Упражнения к главе 2

Упражнение 2.1. Рассмотрим множество $\mathbb{R}$ и семейство его подмножеств β, состоящее из всевозможных лучей $(a, +\infty)$. Докажите, что

(1) семейство β — база окрестностей;

(2) функция $f(x) = 2x$ непрерывна;

(3) функция $g(x) = -x$ непрерывной не является.

Здесь f и g рассматриваются как отображения из $(\mathbb{R}, \beta)$ в $(\mathbb{R}, \beta)$.

Упражнение 2.2. Пусть X — произвольное множество. Рассмотрим следующие семейства подмножеств X:

(1) $\beta_a = \{X\}$;

(2) β_d, совпадающее с семейством всех одноточечных множеств;

(3) β_z, состоящее всех множеств U, для которых $X \setminus U$ — конечный набор точек.

Докажите, что каждое из этих семейств является базой окрестностей и опишите порожденные ими топологии τ_a, τ_d и τ_z. Семейство τ_a называется *антидискретной топологий*, семейство τ_d — *дискретной топологией*, а семейство τ_z для бесконечного X — *топологией Зарисского*; для конечного X топология τ_z совпадает с τ_d.

Упражнение 2.3. Пусть β — некоторая база окрестностей на множестве X. Пусть конечный набор $V_1, \ldots, V_k$ элементов базы имеет непустое пересечение. Покажите, что для каждой точки $x \in \cap_{i=1}^{k} V_i$ существует элемент базы V такой, что $x \in V \subset \cap_{i=1}^{k} V_i$. (Задача 2.16.)

Упражнение 2.4. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (x, y) две нормы, манхеттенскую норму $\big\|(x, y)\big\|_1 = |x| + |y|$ и евклидову норму $\big\|(x, y)\big\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$, и пусть β_1 и β_2 — базы окрестностей, порожденные соответствующими метриками. Покажите, что порожденные этими базами топологии совпадают.

Две метрики ρ_1 и ρ_2 на одном и том же множестве X называются эквивалентными, если существуют такие положительные числа a и b, что $a\rho_1(x, y) \le \rho_2(x, y) \le b\rho_1(x, y)$ для любых x, $y \in X$.

Упражнение 2.5. Покажите, что если метрики, заданные на одном и том же множестве X эквивалентны, то порожденные ими метрические топологии совпадают.

Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на одном и том же линейном пространстве L называются эквивалентными, если существуют такие положительные числа a и b, что $a\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le b\|x\|_1$ для любого $x \in L$.

Упражнение 2.6. Покажите, что если нормы, заданные на одном и том же линейном пространстве L эквивалентны, то порожденные ими топологии совпадают.

Упражнение 2.7. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Докажите свойства замкнутых множеств (утверждение 2.22).

Упражнение 2.8. Приведите примеры, показывающие, что образ открытого (замкнутого) множества при непрерывном отображении не обязан быть открытым (соответственно, замкнутым).

Упражнение 2.9. Описать все непрерывные отображения из произвольного топологического пространства X в пространство с тривиальной топологией.

Упражнение 2.10. Описать все непрерывные отображения из пространства с дискретной топологией в произвольное топологическое пространство.

Упражнение 2.11. Описать все непрерывные функции на бесконечном пространстве с топологией Зарисского.

Упражнение 2.12. Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, заданное формулой $f(x) = \sin x$. Выясните, является ли f непрерывным, если мы рассматриваем на $\mathbb{R}$ и $[-1, 1]$ следующие топологии из задачи 2.2:

(1) $(\mathbb{R}, \tau_a)$, $\big([-1, 1], \tau_z\big)$;

(2) $(\mathbb{R}, \tau_z)$, $\big([-1, 1], \tau_a\big)$;

(3) $(\mathbb{R}, \tau_d)$, $\big([-1, 1], \tau_z\big)$;

(4) $(\mathbb{R}, \tau_z)$, $\big([-1, 1], \tau_d\big)$;

(5) $(\mathbb{R}, \tau_z)$, $\big([-1, 1], \tau_z\big)$.

Упражнение 2.13. Пусть отображение $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ задано в виде $\gamma(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$. Докажите, что отображение γ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все функции $x_i(t)$.

Упражнение 2.14. Пусть p — произвольная точка в $\mathbb{R}^n$. Для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ положим $\rho_p(x) = |px|$. Покажите, что ρ_p — непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$.

Упражнение 2.15. Проверьте, что семейство $\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau_X\}$ подмножеств множества Y является топологией на Y. (Это — индуцированная топология).

Упражнение 2.16. Предположим, что топология на X задана базой β_X, и пусть $Y \subset X$. Проверьте, что семейство $\beta_Y = \{Y \cap U : U \in \beta_X\}$ подмножеств множества Y является базой окрестностей на Y, и что топология, заданная базой β_Y, совпадает с индуцированной топологией τ_Y.

Упражнение 2.17. Рассмотрим на плоскости с координатами x, y окружность $S^1 = \big\{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\big\}$, и пусть $X = S^1 \cap \{(x,y) : y \geq 0\}$ — замкнутая полуокружность. Покажите, что X гомеоморфно отрезку $[-1,1]$.

Упражнение 2.18. На плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y рассмотрим замкнутое кольцо $X = \big\{(x,y) : a \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq b\big\}$, где $0 < a < b < \infty$. Также в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами (x,y,z) рассмотрим цилиндр $Y = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1,\ a \leq z \leq b\}$. Проверьте, что X и Y гомеоморфны.

Упражнение 2.19. Вырежем из бумаги прямоугольную ленту и склеим две противоположных стороны, предварительно перекрутив ленту на $360°$. Тогда полученное топологическое пространство будет гомеоморфно обычному цилиндру. Что будет, если перекрутить ленту на $360k°$? На $180°$?

Упражнение 2.20. Пусть $[a,b] \subset \mathbb{R}$ — стандартный отрезок. Покажите, что фактор-пространство $[a,b]/\{a,b\}$ гомеоморфно окружности.

Упражнение 2.21. Пусть $X = D^n$ — замкнутый n-мерный диск, и $A \subset X$ — граничная сфера. Рассмотрим пространство $Y = X/A$, полученное из D^n факторизацией по граничной сфере. Покажите, что Y гомеоморфно n-мерной сфере.

Упражнение 2.22. Пусть $X \cup Y$ — несвязная сумма непустых топологических пространств. Показать, что пространство $X \cup Y$ несвязно.

Упражнение 2.23. Показать, что букет (см. пример 2.56) связных топологических пространств по любой паре их точек является связным.

Упражнение 2.24. Докажите, что замыкание связного подмножества связно.

Упражнение 2.25. Покажите, что связные компоненты топологического пространства X попарно не пересекаются и являются его замкнутыми подмножествами.

Упражнение 2.26. Приведите пример, показывающий, что компонента связности не обязана быть открытым подмножеством.

Упражнение 2.27. Показать, что пространство X связно, если и только если каждое его открыто-замкнутое подмножество или пусто, или совпадает со всем X.

Упражнение 2.28. Как устроены компоненты связности пространства X, наделенного дискретной топологией?

Упражнение 2.29. Докажите, что

(1) отрезок и окружность не гомеоморфны;

(2) буквы Р и Я не гомеоморфны;

(3) сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ с выкинутой точкой $N = (0, 0, 1)$ и плоскость $\mathbb{R}^2$ гомеоморфны.

Упражнение 2.30. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задана непрерывная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть Γ — множество нулей функции f, т.е. $\Gamma = \{(x_1, \ldots, x_n) : f(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$. Положим $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \Gamma$. Докажите, что точки $P, Q \in \Omega$, в одной из которых функция f положительна, а в другой — отрицательна, лежат в разных компонентах множества Ω, т.е. их нельзя соединить непрерывной кривой, лежащей в Ω.

Упражнение 2.31. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из $\mathbb{R}^2$ выбрасыванием оси x. Докажите, что X состоит из двух компонент — открытых полуплоскостей $\big\{(x, y) : y < 0\big\}$ и $\big\{(x, y) : y > 0\big\}$.

Упражнение 2.32. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из $\mathbb{R}^2$ выбрасыванием двух лучей, выходящих из одной точки. Докажите, что X состоит из двух компонент.

Упражнение 2.33. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из некоторого круга $U_r(A)$ выбрасыванием произвольного его радиуса AC. Докажите, что X — линейно связное пространство.

Упражнение 2.34. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из некоторого круга $U_r(A)$ выбрасыванием двух различных его радиусов AC и AD. Докажите, что X состоит из двух компонент.

Упражнение 2.35. Приведите пример связного (линейно связного) топологического пространтсва, состоящего из семи точек.

Упражнение 2.36. Покажите, что метрические пространств обладают следующим свойством. Для каждой точки x и каждого замкнутого подмножества F метрического пространства X, таких, что $x \notin F$, найдутся непересекающиеся открытые окрестности, т.е. такие открытые непересекающиеся подмножества $U, V \subset X$, что $x \in U$ и $F \subset V$.

Упражнение 2.37. Покажите, что метрические пространств обладают следующим свойством. Для каждых двух замкнутых непересекающихся подмножеств F_1 и F_2 метрического пространства X найдутся непересекающиеся открытые окрестности, т.е. такие открытые непересекающиеся подмножества $U_1, U_2 \subset X$, что $F_1 \subset U_1$ и $F_2 \subset U_2$.

Упражнение 2.38. Показать, что локально постоянная функция постоянна на каждой компоненте.