

Глава 7

Замкнутые двумерные поверхности.

План. Топология многогранной поверхности, склейки из многоугольника, слово склейки, вырезание и заклейка дырки, вклейка ручки, вклейка пленки Мебиуса, ориентированные и неориентированные поверхности, Эйлерова характеристика, классификация двумерных поверхностей.

Задачи классификации как правило очень непросты. Тут многое зависит от класса рассматриваемых объектов и от отношения эквивалентности, которое на этих объектах рассматривается. Здесь мы рассмотрим двумерные замкнутые многогранные поверхности, которые будем классифицировать с точностью до гомеоморфизма. Отметим также, что разумной классификации k -мерных поверхностей, $k \geq 3$, в настоящий момент не известно.

Замечание 7.1. Эта классификация практически не отличается от классификации двумерных замкнутых многообразий, которые изучаются в курсе дифференциальной геометрии. Многообразия — топологические пространства, склеенные из дисков примерно так же как многогранные поверхности из многоугольников (но с перекрытиями).

7.1 Топология многогранной поверхности

Здесь мы немного модифицируем определение многогранной поверхности.

Определение 7.2. *Связной многогранной поверхностью \mathcal{F} в \mathbb{R}^n называется конечное семейство $\{F_i\}$ пространственных многоугольников $F_i \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее следующим условиям:*

- (1) для каждой пары различных многоугольников F_i и F_j их пересечение $F_i \cap F_j$ или пусто, или состоит из одной, общей для них вершины, или из одного, общего для них ребра; если F_i и F_j имеют общее ребро e , то они называются *смежными по e* ;

- (2) для каждого многоугольника F_i и каждого его ребра e существует не более одного многоугольника F_j , смежного с F_i по e ;
- (3) для каждой пары различных многоугольников F и F' существует последовательность многоугольников F_{i_1}, \dots, F_{i_m} такая, что $F_{i_1} = F$, $F_{i_m} = F'$, и при каждом $1 < k \leq m$ многоугольники $F_{i_{k-1}}$ и F_{i_k} смежны по некоторому ребру e_k ;
- (4) для каждой пары многоугольников F и F' , пересекающихся по вершине, существует соединяющая их цепочка, все многоугольники которой также содержат эту вершину.

Многоугольники F_i называются *гранями* \mathcal{F} , отрезки в \mathbb{R}^n , совпадающие с ребрами граней, — *ребрами* \mathcal{F} , а точки в \mathbb{R}^n , совпадающие с концами ребер, — *вершинами* \mathcal{F} . Ребро называется *граничным*, если оно является ребром ровно одной грани. Объединение граничных ребер называется *границей* поверхности или ее *краем*. Поверхность, у которой нет граничных ребер, называется *замкнутой*.

Поверхность \mathcal{F} — подмножество в \mathbb{R}^n , поэтому на нем индуцируется топология. Топологию на \mathcal{F} можно получить и по-другому. Каждая грань — многоугольник, на нем индуцирована топология из плоскости, поэтому на объединении граней есть топология дизъюнктного объединения. Теперь введем отношение эквивалентности, отождествив общие точки ребер смежных граней. Возникает фактор-топология на объединении граней.

Упражнение 7.1. Проверьте, что эта топология на \mathcal{F} совпадает с индуцированной из \mathbb{R}^n .

Упражнение 7.2. Проверьте следующие свойства поверхности.

- Каждая грань (многоугольник) гомеоморфен диску.
- Поверхность \mathcal{F} — замкнутое подмножество в \mathbb{R}^n .
- Топологическая граница \mathcal{F} совпадает с границей \mathcal{F} как многогранной поверхности.
- Каждая внутренняя точка многогранной поверхности обладает окрестностью, гомеоморфной двумерной плоскости (или, что все равно, открытому кругу на плоскости).
- Каждая граничная точка многогранной поверхности обладает окрестностью, гомеоморфной замкнутой двумерной полуплоскости (или, что все равно, «половине» открытого круга, т.е. пересечению открытого круга и замкнутой полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через центр круга).
- Граница поверхности представляет собой объединение замкнутых (пространственных) ломаных и гомеоморфна объединению окружностей.

Замечание 7.3. Каждый многоугольник можно разбить на треугольники. Так как здесь мы не требуем, чтобы смежные грани поверхности не лежали в одной двумерной плоскости, то без ограничения общности можно предполагать, что все грани поверхности — треугольники. Такие поверхности называются *триангулированными*, т.е. разбитыми на треугольники.

Замечание 7.4. Так как мы классифицируем поверхности с точностью до гомеоморфизма, то, в итоге, нас не интересует ни конкретное разбиение поверхности на грани, ни форма этих граней, а только топология поверхности. С нашей точки зрения куб и тетраэдр (как многогранные поверхности) гомеоморфны друг другу и гомеоморфны двумерной сфере (которая хоть и не является многогранной поверхностью, но будет использоваться нами как модельное пространство).

Наша цель — классификация многогранных поверхностей с точностью до гомеоморфизма. Мы покажем, что каждая из многогранных поверхностей гомеоморфна одной из построенных нами ниже топологической поверхности, которые мы будем называть *модельными*.

7.2 Склейки из многоугольника

Простейшие примеры двумерных поверхностей можно получить, склеивая по различным правилам стороны квадрата.

Задача 7.5. Построить триангуляции цилиндра, тора, проективной плоскости и бутылки Клейна.

Задача 7.6. Проверьте, что край пленки Мебиуса состоит из одной окружности, цилиндра — из двух, а у сферы, тора, бутылки Клейна и проективной плоскости край пуст.

Оказывается, приведенные примеры являются, в некотором смысле, универсальными.

Утверждение 7.7. *Любая связная замкнутая многогранная поверхность гомеоморфна поверхности, полученной из многоугольника некоторой склейкой пар его сторон.*

Доказательство. Пометим все ребра всех граней буквами и стрелками. Разрежем поверхность по всем ребрам на грани. Получим объединение многоугольников с размеченными сторонами. Будем последовательно склеивать грани, приклеивая на каждом шаге ровно одну грань ровно по одному ребру, следя за тем, чтобы буквы и направления стрелок у склеиваемых ребер совпадали. На каждом шаге будем получать многоугольник, стороны которого помечены буквами и стрелками. Так как мы все рассматриваем с точностью до гомеоморфизма, то можно каждый раз заменять многоугольник на гомеоморфный (с той же разметкой) так, чтобы очередная грань пересекалась с многоугольником, построенным на предыдущем шаге только по общему ребру. Утверждение доказано. \square

Будем кодировать многоугольник P с размеченной границей так называемым *словом склейки* следующим образом. Выберем одно из двух направлений обхода границы многоугольника, начнем с произвольной его вершины и будем последовательно выписывать буквы, которыми помечены последовательные (в соответствии с обходом) стороны многоугольника, причем если направление стороны совпадает с направлением обхода, то просто записываем букву, а если направление противоположно, то записываем букву в степени -1 .

Пример 7.8. Например, тор может быть получен склейкой прямоугольника по слову $aba^{-1}b^{-1}$. Заметим, что слово склейки определено неоднозначно, например, та же склейка тора может быть описана словом $ba^{-1}b^{-1}a$. Более того, тор может быть склеен и из других многоугольников, например, из шестиугольника по слову $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$ (проверьте).

7.3 Модельные поверхности

Чтобы сформулировать основную теорему, нам понадобится набор модельных поверхностей. Они не будут многогранными поверхностями, а будут получены из сферы с помощью следующих трех элементарных операций:



Рис. 7.1: Элементарные операции: вырезание диска, приклейка ручки и приклейка листа Мебиуса.

- вырезание диска,
- приклейка ручки,

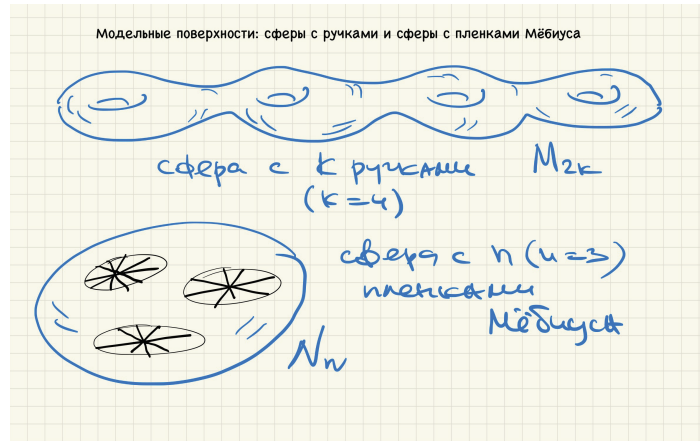


Рис. 7.2: Модельные поверхности. Слово склейки для M_{2k} имеет вид $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1}$, слово склейки для N_m имеет вид $a_1^2 \cdots a_m^2$.

- приклейка листа Мебиуса.

Кратное применение этих операций позволяет построить модельные поверхности, изображенные на рис. 7.2. Мы фиксируем для них названия и обозначения с рис. 7.2, а именно, *сферы с k ручками*, которые мы обозначили через M_{2k} , и *сферы с t пленками Мёбиуса*, обозначенные через N_m . Отметим, что для каждой модельной поверхности можно построить гомеоморфную ей многогранную поверхность.

Упражнение 7.3. Покажите, что поверхность, склеенная из $4k$ -угольника по слову склейки $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1}$, гомеоморфна сфере с k ручками.

Упражнение 7.4. Покажите, что поверхность, склеенная из $2m$ -угольника по слову склейки $a_1^2 \cdots a_m^2$, гомеоморфна сфере с m пленками Мёбиуса.

7.4 Теорема классификации — переклейки

Теорема 7.9. *Каждая связная замкнутая двумерная многогранная поверхность гомеоморфна одной из модельных поверхностей.*

План доказательства такой: мы начнем с произвольной замкнутой связной двумерной поверхности, склеенной из многоугольника, и будем разрезать и переклеивать этот многоугольник, меняя при этом слово склейки, но не меняя поверхность (такие преобразования, фактически, меняют только разбиение поверхности на многоугольники и соответствуют некоторым гомеоморфизмам поверхности). В результате получим многоугольник с одним из трех стандартных слов склейки: a^{-1} , $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1}$ или

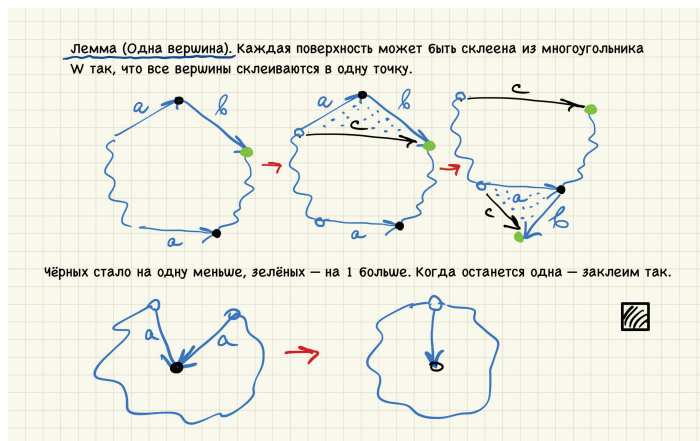


Рис. 7.3: Лемма об одной вершине.

$a_1^2 \cdots a_m^2$. Таким образом, будет показано, что исходная поверхность гомеоморфна или сфере, или сфере с $k \geq 1$ ручками, или сфере с $m \geq 1$ пленками Мебиуса.

Разобьем доказательство на несколько лемм, формулировки и доказательства которых приведены на рисунках.

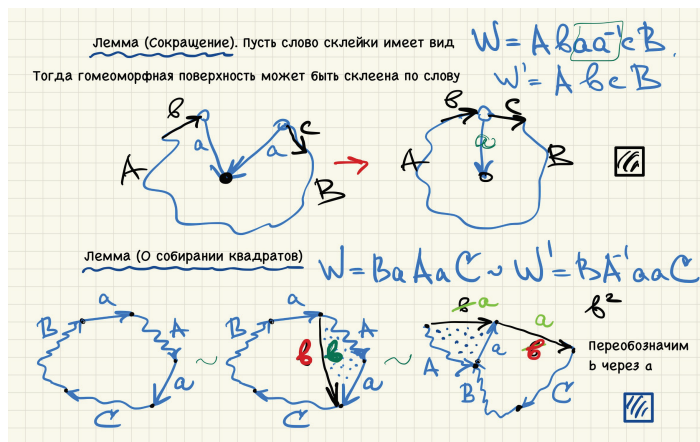


Рис. 7.4: Леммы о сокращении слов и о собирании квадратов.

Замечание 7.10. В формулировке и доказательстве леммы об одной вершине, см. 7.3, пропущен тривиальный случай, когда на последнем шаге описанного процесса остается двуугольник. Этот случай соответствует сфере, склеенной по слову aa^{-1} .

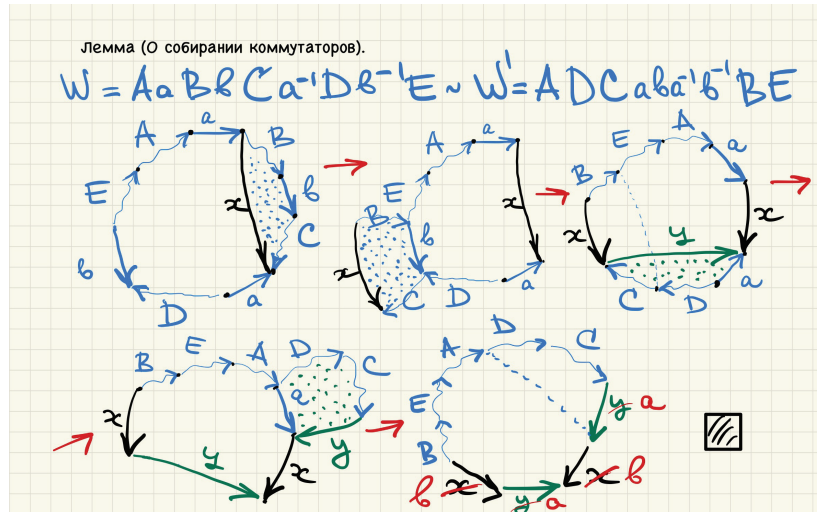


Рис. 7.5: Лемма о собирании коммутаторов.

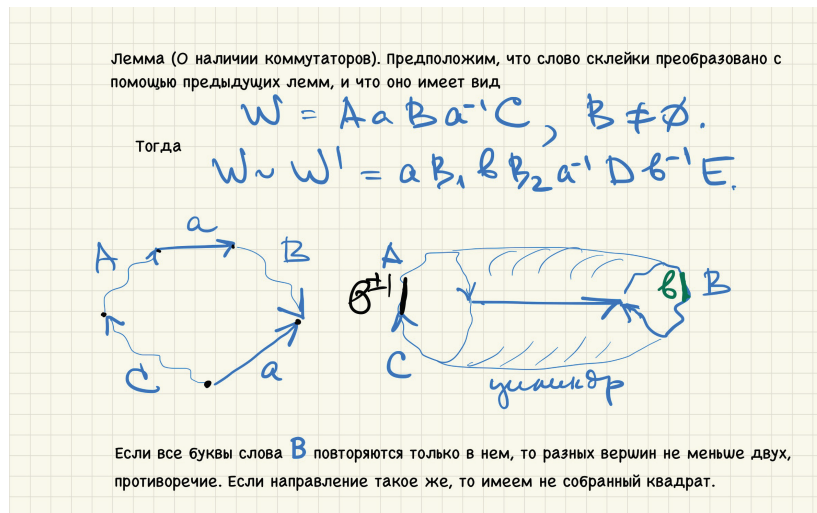


Рис. 7.6: Лемма о существовании коммутатора.

Последовательно применим преобразования, описанные в леммах, приведенных на рисунках 7.3–7.7. А именно, добьемся, чтобы все вершины склеивались в одну точку, проведем все возможные сокращения, соберем квадраты и коммутаторы. Если есть и то, и другое, то уберем все коммутаторы, оставив только квадраты. В результате мы получим искомый

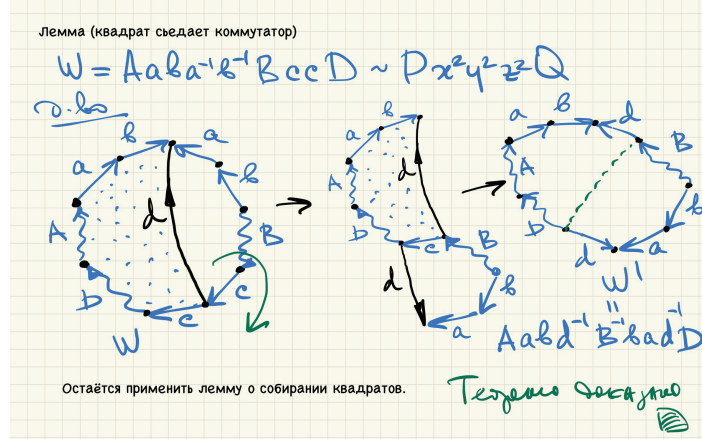


Рис. 7.7: Лемма о коммутаторе и квадрате.

многоугольник с одним из стандартных слов склейки.

7.5 Ориентация многогранной поверхности

Напомним, что *задать ориентацию на плоскости* означает фиксировать некоторый базис, который объявляется положительно ориентированным вместе со всеми другими базисами, которые получаются из него умножением на матрицу с положительным определителем. Все остальные базисы объявляются отрицательно ориентированными. Если фиксирована ориентация плоскости, то поворот от первого вектора положительно ориентированного базиса ко второму называется поворотом в *положительном направлении* (или *против часовой стрелки*, или *налево*), а поворот в противоположную сторону — поворотом в *отрицательном направлении* (*по часовой стрелке* или *направо*).

Каждый многоугольник F_i многогранной поверхности можно *ориентировать*, задав одно из двух возможных направлений циклического обхода его вершин и ребер или, что равносильно, задать направление обхода замкнутой ломаной, являющейся границей этого многоугольника. Другими словами, на каждой стороне многоугольника должно быть указано направление, причем в каждой вершине встречаются одно входящее и одно выходящее направления.

Замечание 7.11. Вместо направления обхода границы грани можно фиксировать ориентацию плоскости, содержащей эту грань, задав тем самым положительное направление обхода замкнутой ломаной. В дальнейшем, переходя к криволинейным (но дифференцируемым) поверхностям, ориентация будет задаваться выбором базиса в касательных плоскостях.

Рассмотрим теперь многогранную поверхность. Ее ориентация получается из ориентации входящих в нее многоугольников-граней, при условии согласованности ориентаций на их пересечениях, то есть на общих ребрах.

Пусть две грани F_i и F_j пересекаются по ребру e . Предположим, что обе грани ориентированы. Это, в частности, означает что на ребре e указаны два направления, одно порождено ориентацией грани F_i , а другое — ориентацией грани F_j . Будем говорить, что ориентации смежных граней F_i и F_j *согласованы*, если эти направления противоположны. Заметим, что в этом и только в этом случае обходы границ граней F_i и F_j , порожденные их ориентациями, задают обход многоугольника, который получается склейкой F_i и F_j по общему ребру. (Этот многоугольник можно представлять себе расположенным в общей плоскости, в которую помещены F_i и F_j . Возможные пересечения устраняются с помощью гомеоморфизмов многоугольников.) Кроме того, если две грани смежны и на одной из них задана ориентация, то согласованная ориентация второй грани определена однозначно выбором направления общего ребра (а именно, нужно выбрать направление, противоположное направлению этого ребра в смежной ориентированной грани).

Определение 7.12. Многогранная поверхность называется *ориентированной*, если на каждой ее грани задана ориентация, причем эти ориентации согласованы на каждой паре смежных граней поверхности. Семейство согласованных ориентаций всех граней поверхности называется *ориентацией поверхности*. Поверхность называется *ориентируемой*, если на ней существует некоторая ориентация.

Замечание 7.13. Рассмотрим на поверхности замкнутую цепочку смежных граней, т.е. такой набор F_1, \dots, F_n граней, где грань F_i является смежной с F_{i+1} , а F_n смежна также с гранью F_1 . Зададим ориентацию на первой грани F_1 ; правило согласования однозначно определяет ориентацию грани F_2 , она, в свою очередь, — ориентацию на F_3 и далее по цепочке до F_n , а затем — снова на F_1 . Таким образом, на первой грани возникает две ориентации. Будем говорить, что цепочка граней *сохраняет ориентацию*, если эти две ориентации совпадают, и *обращает ориентацию*, если они противоположны. Если на поверхности существует обращающая ориентация цепочка граней, то поверхность неориентируема; легко проверить (докажите!), что верно и обратное утверждение. Таким образом, ориентируемость поверхности эквивалентна отсутствию на ней обращающих ориентацию замкнутых цепочек граней.

Замечание 7.14. Замкнутая выпуклая многогранная поверхность в трехмерном пространстве — ориентируемая. Действительно, эта поверхность разделяет пространство на две части, на каждой грани выберем внешнюю нормаль (нормаль, направленную в неограниченную область), и выберем направление обхода границы грани, например, по правилу «правого винта». Для этого фиксируем ориентацию в \mathbb{R}^3 и выберем базис в каждой плоскости грани так, чтобы полученный из него добавлением внешней нормали базис в \mathbb{R}^3 был бы положительно ориентирован.

Замечание 7.15. Не любая многогранная поверхность ориентируема. Пример — лист Мебиуса.

Задача 7.16. Представить лист Мебиуса в виде многогранной поверхности в \mathbb{R}^3 .

Задача 7.17. Предъявить на пленке Мебиуса цепочку граней, обращающую ориентацию.

Следствие 7.18. Поверхность, содержащая лист Мебиуса, неориентируема.

Утверждение 7.19. Гомеоморфные многогранные поверхности ориентируемы или неориентируемы одновременно.

7.6 Теорема классификации — эйлерова характеристика

Чтобы проверить попарную негомеоморфность нужна некая характеристика поверхностей, которая сохраняется при гомеоморфизмах. Мы уже видели, что одной из таких характеристик может служить ориентируемость. В качестве еще одной такой характеристики многогранной поверхности мы возьмем эйлерову характеристику. Каждая многогранная поверхность разбита на грани, ребра и вершины. *Эйлеровой характеристикой* многогранной поверхности \mathcal{F} назовем величину $\Gamma - P + B$, где Γ , P , B — количество граней, ребер и вершин поверхности.

Утверждение 7.20. Эйлерова характеристика поверхности не зависит от разбиения ее на грани и не меняется при гомеоморфизмах.

Вычислим эйлеровы характеристики модельных поверхностей.

Лемма 7.21. Пусть M — замкнутая двумерная многогранная поверхность, и поверхность $M \setminus kD^2$ получена из M вырезанием k дисков. Тогда $\chi(M) = \chi(N) + k$.

Доказательство. Действительно, без ограничения общности можно предполагать, что $M \setminus kD^2$ получена из поверхности M удалением k попарно непересекающихся граней–дисков. При этом количества вершин и ребер не меняются, откуда и следует требуемое равенство. \square

Пусть M и N — замкнутые двумерные многогранные поверхности. Выбросим из каждой из них по диску и склеим поверхности $M \setminus D^2$ и $N \setminus D^2$ по граничным окружностям. Результат такого склеивания называется *связной суммой* поверхностей M и N и обозначается через $M \# N$.

Лемма 7.22. В сделанных обозначениях, $\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - 2$.

Доказательство. Действительно, как и выше будем предполагать, что из поверхностей выбрасываются грани-многоугольники с одинаковым количеством вершин, а при склеивании граничных окружностей — ломаных, ограничивающих эти многоугольники, склеиваются вершины с вершинами и ребра с ребрами. Тогда суммарное количество ребер и вершин поверхностей M и N при таком склеивании убывает на одну и ту же величину, а количество граней убывает на два, поэтому $\chi(M\#N) = \chi(M) + \chi(N) - 2$, что и требовалось. \square

Пример 7.23. Пусть $M = N = S^2$. Тогда легко видеть, что $S^2\#S^2$ гомеоморфно S^2 . С другой стороны,

$$\chi(S^2) = \chi(S^2\#S^2) = \chi(S^2) + \chi(S^2) - 2,$$

откуда $\chi(S^2) = 2$. Далее, цилиндр H представляет собой сферу с двумя выкинутыми дисками. Поэтому $\chi(H) = 0$.

Лемма 7.24. *Эйлерова характеристика тора равна нулю.*

Доказательство. Тор можно получить из цилиндра H , склеив граничные окружности. Без ограничения общности можно предположить, что ломаные-окружности имеют одинаковое число вершин. При таком склеивании количество вершин и ребер уменьшается на одну и ту же величину, количество граней не меняется, поэтому эйлерова характеристика тоже не меняется. Лемма доказана. \square

Утверждение 7.25. *Эйлерова характеристика сферы M_{2k} с k ручками равна $2 - 2k$.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по числу ручек k . При $k = 0$ мы имеем сферу с эйлеровой характеристикой 2. Сфера с k ручками может быть получена как связная сумма тора T^2 и сферы $M_{2(k-1)}$ с $k - 1$ ручкой. Поэтому

$$\chi(M_{2k}) = \chi(M_{2(k-1)}\#T^2) = \chi(M_{2(k-1)}) + \chi(T^2) - 2 = \chi(M_{2(k-1)}) - 2.$$

По предположению индукции, $\chi(M_{2(k-1)}) = 2 - 2(k - 1) = 4 - 2k$, откуда $\chi(M_{2k}) = 4 - 2k - 2 = 2 - 2k$, что и требовалось. \square

Лемма 7.26. *Эйлерова характеристика проективной плоскости равна 1.*

Доказательство. Воспользуемся следующими двумя фактами: сфера N_3 с тремя пленками Мёбиуса гомеоморфна связной сумме трех проективных плоскостей, $N_3 = \mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2$, и она же гомеоморфна связной сумме проективной плоскости и тора: $N_3 = \mathbb{R}P^2\#T^2$. Поэтому

$$\chi(N^3) = \chi(\mathbb{R}P^2\#T^2) = \chi(\mathbb{R}P^2) + \chi(T^2) - 2 = \chi(\mathbb{R}P^2) - 2,$$

и

$$\chi(N^3) = \chi(\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2) = 3\chi(\mathbb{R}P^2) - 4,$$

откуда $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$, что и требовалось. \square

Утверждение 7.27. *Эйлерова характеристика сферы N_k с k пленками Мёбиуса $2 - k$.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по числу ручек k . При $k = 0$ мы имеем сферу с эйлеровой характеристикой 2. Сфера с k листами Мёбиуса может быть получена как связная сумма тора $\mathbb{R}P^2$ и сферы N_{k-1} с $k - 1$ листом. Поэтому

$$\chi(N_k) = \chi(N_{k-1} \# \mathbb{R}P^2) = \chi(N_{k-1}) + \chi(\mathbb{R}P^2) - 2 = \chi(N_{k-1}) - 1.$$

По предположению индукции, $\chi(N_{k-1}) = 2 - (k - 1) = 3 - k$, откуда $\chi(N_k) = 3 - k - 1 = 2 - k$, что и требовалось. \square

Упражнение 7.5. Вычислите эйлерову характеристику

- (1) поверхности M_g^m , полученной из сферы с g ручками вырезанием m дырок;
- (2) поверхности N_h^m , полученной из сферы с h пленками Мебиуса вырезанием m дырок.

Из утверждений 7.25, 7.27 и 7.19 следует следующий результат.

Теорема 7.28. *Если многогранные поверхности гомеоморфны разным модельным поверхностям, то они не гомеоморфны.*

Тем самым, классификация двумерных поверхностей завершена.