

Упражнения к главе 7.

Упражнение 7.1. Покажите, что поверхность, склеенная из $4k$ -угольника по слову склейки $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1}$, гомеоморфна сфере с k ручками.

Упражнение 7.2. Покажите, что поверхность, склеенная из $2m$ -угольника по слову склейки $a_1^2 \cdots a_m^2$, гомеоморфна сфере с m пленками Мёбиуса.

Упражнение 7.3. Пусть на поверхности нарисован граф, причем каждая из областей, на которые он делит поверхность, гомеоморфна диску. **Эйлеровой характеристикой** такой карты называется число $v - e + f$, где v — число вершин, e — число ребер и f — число областей. Докажите, что эйлеровы характеристики любых двух карт на поверхности совпадают. Указание: рассмотрите карту, получающуюся “наложением” двух карт, т.е. объединением их границ.

Упражнение 7.4. Эйлеровой характеристикой поверхности называется число

$$\chi = v - e + f,$$

где v , e и f — числа вершин, ребер и областей любой карты, нарисованной на поверхности (согласно утверждению из упражнения 7.5, это число не зависит от карты и, тем самым, характеризует саму поверхность). Вычислите эйлеровы характеристики цилиндра, тора и ленты Мебиуса.

Упражнение 7.5. Поверхность M получается из поверхности N вырезанием k дисков. Выразите $\chi(M)$ через $\chi(N)$.

Упражнение 7.6. Каждая из двух поверхностей M и N имеет край, представляющий собой замкнутую кривую, состоящую из одного куска. Поверхность Q получается из поверхностей M и N склеиванием краев. Выразите $\chi(Q)$ через $\chi(M)$ и $\chi(N)$.

Упражнение 7.7. Вычислите эйлерову характеристику

- (1) поверхности M_g^m , полученной из сферы с g ручками вырезанием m дырок;
- (2) поверхности N_h^m , полученной из сферы с h пленками Мебиуса вырезанием m дырок.

Упражнение 7.8. Сторонам многоугольника приписаны буквы a, b, c, \dots в следующем порядке: $a, b, a, b, c, d, c, d, \dots$. Затем стороны, помеченные одноименными буквами, склеиваются, причем стрелка на каждой стороне направлена по направлению обхода, когда соответствующая буква встречается первый раз, и против направления обхода, когда буква встречается второй раз. Докажите, что, если число разных букв равно $2g$, то полученная поверхность гомеоморфна сфере с g ручками.

Упражнение 7.9. Сторонам многоугольника приписаны буквы a, b, c, \dots в следующем порядке: $a, a, b, b, c, c, d, d, \dots$. Затем стороны, помеченные одноименными буквами, склеиваются, причем стрелка на каждой стороне направлена по направлению обхода. Докажите, что, если число разных букв равно h , то полученная поверхность гомеоморфна сфере с h пленками Мебиуса.

Упражнение 7.10. На замкнутой ориентируемой поверхности нарисована карта, причем каждая страна представляет собой некоторый n -угольник, и в каждой вершине сходится по k ребер. Докажите, что

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{\chi}{2e},$$

где χ — эйлерова характеристика поверхности, а e — число ребер карты. Приведите пример такой карты на сфере при $n = 2, k = 4$.

Упражнение 7.11. Вычислите эйлеровы характеристики бутылки Клейна и проективной плоскости.