Глава 5

Многогранники.

План. Многоугольник, ограниченным замкнутой ломаной без самопересечений, внутренность, внешность и граница многоугольника, пространственный многоугольник, плоскость многоугольника, многогранная поверхность, многоугольники, смежные по ребру, цепочка многоугольников, грани, ребра и вершины многогранной поверхности, инцидентные элементы многогранной поверхности, граничные и внутренние ребра многогранной поверхности, теорема Жордана для замкнутой многогранной поверхности, многогранник, ограниченный замкнутой многогранной поверхностью, внутренность, внешность и граница многогранника, граф и двойственный граф многогранной поверхности, выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, выпуклый многоугольник, выпуклый многогранник, геометрическая реализация графа многогранной поверхности с выпуклыми гранями, планарность графа и двойственного графа выпуклого многогранника, формула Эйлера для выпуклых многогранников, правильный многогранник, платоновы тела, ёж выпуклого многогранника, теорема Минковского о еже, многоугольник на поверхности выпуклого многогранника, внутренность, внешность, граница, угол многоугольника на поверхности выпуклого многогранника.

5.1 Многоугольники

Теорема Жордана для ломаных 3.8 утверждает, что для каждой простой замкнутой ломаной $L \subset \mathbb{R}^2$ множество $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$ состоит из двух компонент. Также в доказательстве этой теоремы мы определили функцию $\eta(P)$ точек множества $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$, которая на одной из компонент равна 0, а на другой 1. Обозначим эти компоненты через Ω_k, $k = 0, 1$, так чтобы на Ω_k функция η принимала значение k. Напомним, что для вычисления $\eta(P)$ мы вводили специальные декартовы координаты x, y, в которых все вершины ломаной L имели разные x-координаты.

Следствие 5.1. *Множество Ω_1 ограничено, а множество Ω_0 неограничено.*

Доказательство. Так как ломаная L состоит из конечного числа отрезков, она представляет собой ограниченное подмножество плоскости, т.е. существует открытый круг $U_r(P)$ радиуса $r > 0$ с центром в некоторой точке $P \in \mathbb{R}^2$ такой, что $L \subset U_r(P)$. Выберем точку $Q \in \mathbb{R}^2$ на граничной окружности круга $U_r(P)$ так, чтобы вектор $\overrightarrow{PQ}$ был сонаправлен с осью y. Тогда луч ℓ_Q не имеет с открытым кругом $U_r(P)$ общих точек, а следовательно, не пересекает L, так что $\eta(Q) = 0$ и, значит, $Q \in \Omega_0$. Так как для любой точки $Q' \in \ell_Q$ луч ℓ_Q также не пересекает L, множество Ω_0 содержит луч ℓ_Q и поэтому неограничено.

Дополнение к кругу $U_r(P)$ линейной связно (предъявите в явном виде кривую, соединяющую данные произвольные точки дополнения), поэтому оно содержится в Ω_0. Но тогда Ω_1 содержится в $U_r(P)$ и, следовательно, ограничено. □

Определение 5.2. *Многоугольником F, ограниченным замкнутой ломаной $L \subset \mathbb{R}^2$ без самопересечений*, называется объединение L и ограниченной компоненты Ω_1 множества $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$. Принято также говорить, что ломаная L *ограничивает* Ω_1. Ограниченная компонента Ω_1 называется *внутренностью F* и обозначается через $\operatorname{Int} F$, неограниченная Ω_0 — *внешностью F* и обозначается через $\operatorname{Out} F$, а ломаная L — *границей F* и обозначается через ∂F. Звенья ломаной L называются *сторонами* или *ребрами многоугольника F*, а вершины ломаной — *вершинами многоугольника F*.

Замечание 5.3. Ломаная — замкнутое подмножество плоскости, компоненты Ω_0 и Ω_1 — открытые. Многоугольник F представляет собой замыкание ограниченной компоненты Ω_1, а ломаная L — это ее топологическая граница $\partial\Omega_1$. Кроме того, $\partial\Omega_1 = \partial\Omega_2 = \partial F$. Многоугольник F — замкнутое подмножество плоскости.

5.2 Многогранные поверхности и многогранники

Пусть π — (аффинная) плоскость в $\mathbb{R}^3$, т.е. множество точек вида $\xi + v$, где v пробегает некоторое двумерное линейное подпространство $V \subset \mathbb{R}^3$, а ξ — фиксированная точка из $\mathbb{R}^3$. Ясно, что все те объекты и построения, которые мы делали в стандартной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, можно проделать и в плоскости π.

Определение 5.4. *Пространственным многоугольником* назовем многоугольник, построенный в некоторой аффинной плоскости $\pi \subset \mathbb{R}^3$, при этом π будем называть *плоскостью многоугольника*.

Замечание 5.5. Аналогичным образом определяется любая плоская фигура, лежащая в пространстве, например, окружность, круг и т.д. Кроме того, говоря про внутренние и внешние точки пространственного многоугольника $F \subset \pi$, мы будем понимать соответствующие точки из $\operatorname{Int} F \subset \pi$ и $\operatorname{Out} F \subset \pi$.

Замечание 5.6. Каждый пространственный многоугольник F, так же, как и его граница ∂F, являются замкнутыми подмножествами не только плоскости, в которой они лежат, но и всего пространства $\mathbb{R}^3$. Однако внутренность $\operatorname{Int} F$ и внешность $\operatorname{Out} F$ открытыми в $\mathbb{R}^3$ не являются (проверьте).

Определение 5.7. *Многогранной поверхностью* $\mathcal{F}$ *в* $\mathbb{R}^3$ называется конечное семейство $\{F_i\}$ пространственных многоугольников $F_i \subset \mathbb{R}^3$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) для каждой пары различных многоугольников F_i и F_j их пересечение $F_i \cap F_j$ или пусто, или состоит из одной, общей для них вершины, или из одного, общего для них ребра; если F_i и F_j имеют общее ребро e, то они называются *смежными по* e;

(2) для каждого многоугольника F_i и каждого его ребра e существует не более одного многоугольника F_j, смежного с F_i по e;

(3) для каждой пары различных многоугольников F и F' семейства существует последовательность многоугольников $F_{i_1}, \dots, F_{i_m}$ такая, что $F_{i_1} = F$, $F_{i_m} = F'$, и при каждом $1 < k \le m$ многоугольники $F_{i_{k-1}}$ и F_{i_k} смежны по некоторому ребру e_k; такую последовательность будем называть *цепочкой многоугольников, соединяющих* F *и* F';

(4) для каждой пары многоугольников F и F', пересекающихся по вершине, существует соединяющая их цепочка, все многоугольники которой также содержат эту вершину;

(5) никакие два смежных многоугольника F_i и F_j не лежат в одной плоскости.

Многоугольники F_i называются *гранями* $\mathcal{F}$, отрезки в $\mathbb{R}^3$, совпадающие с ребрами граней, — *ребрами* $\mathcal{F}$, а точки в $\mathbb{R}^3$, совпадающие с концами ребер, — *вершинами* $\mathcal{F}$.

Обратите внимание, что два соседних ребра одной грани многогранной поверхности могут лежать на одной прямой.

Замечание 5.8. Мы дали столь «жесткое» определение многогранной поверхности, чтобы избежать сложной комбинаторики. Тем не менее, в более общей теории многие из требований определения 7.2 опускают или заменяют на более слабые. Так, например, иногда рассматривают многогранные поверхности с самопересечениями, или, скажем, отказываются от условия того, что смежные грани не лежат в одной плоскости (в теории изгибаний это используется в доказательстве теоремы, объясняющей, почему игра на аккордеоне невозможна, если сделать жесткими все грани его меха). Однако такие ослабления требований приводят к усложнению теории, например, отказываясь от условия (5), мы приходим к неоднозначности представления в виде многогранной поверхности: теперь каждую грань можно разбить на еще более мелкие грани.

Определение 5.9. Пусть $\mathcal{F}$ — многогранная поверхность. Если вершина (или ребро) $\mathcal{F}$ принадлежит грани, такие вершина и грань (ребро и грань) называются *инцидентными*. Ребро $\mathcal{F}$, инцидентное только одной грани, называется *граничным*, а инцидентное двум граням — *внутренним* (заметим, что других ребер в многогранной поверхности нет в силу пункта (2) из определения 7.2). Многогранная поверхность без граничных ребер называется *замкнутой*.

Замечание 5.10. Мы будем иногда отождествлять многогранную поверхность $\mathcal{F}$ с подмножеством $\mathbb{R}^3$, равным объединению всех граней из $\mathcal{F}$. Именно в этом смысле будем понимать выражение «пусть $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ — многогранная поверхность». Отметим, что каждая многогранная поверхность, рассматриваемая как подмножество, имеет единственное представление в виде многогранной поверхности — точнее, если две многогранные поверхности задают одно и то же подмножество в $\mathbb{R}^3$, то они совпадают в том смысле, что состоят из одних и тех же многоугольников (докажите это).

Приведем без доказательства следующий важный результат.

Теорема 5.11 (теорема Жордана для замкнутой многогранной поверхности)**.** *Пусть $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ — замкнутая многогранная поверхность. Тогда $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{F}$ состоит из двух компонент, каждая из которых является открытым подмножеством в $\mathbb{R}^3$, а поверхность $\mathcal{F}$ является границей каждого из этих подмножеств. Одна из этих компонент является ограниченным подмножеством $\mathbb{R}^3$, а другая — нет.*

Определение 5.12. Пусть $\mathcal{F}$ — замкнутая многогранная поверхность, а Ω — ограниченная компонента множества $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{F}$. Тогда $W = \mathcal{F} \cup \Omega$ называется *многогранником, ограниченным* $\mathcal{F}$, или *многогранником с границей* $\mathcal{F}$ (границу $\mathcal{F}$ многогранника W будем также обозначать через ∂W). Кроме того, $\mathcal{F} = \partial W$ называют также *поверхностью многогранника* W. Ограниченная компонента Ω называется *внутренностью многогранника* и обозначается через $\operatorname{Int} W$. Оставшаяся, неограниченная компонента множества $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{F}$ называется *внешностью многогранника* W и обозначается через $\operatorname{Out} W$.

Замечание 5.13. Если Ω — внутренность многогранника W, то W совпадает с замыканием Ω. кроме того, $\partial\Omega = \partial W = \mathcal{F}$, где ∂ здесь оба раза обозначает топологическую границу.

Действуя так же, как в доказательстве теоремы Жордана для ломаных можно показать, что каждая точка P многогранника W обладает «хорошей» шаровой окрестностью $U(P)$, т.е. открытый шар $U(P)$ пересекается только с гранями, ребрами, вершинами содержащими P.

Следствие 5.14. *Многогранная поверхность $\mathcal{F}$ разбивает каждую хорошую окрестность каждой своей точки на две компоненты линейной связности, из которых одна лежит внутри многогранника W, ограниченного $\mathcal{F}$, а другая лежит во внешности этого многогранника.*

5.3 Графы многогранной поверхности

Пусть $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ — многогранная поверхность. Пусть V обозначает множество вершин поверхности $\mathcal{F}$, а E — множество ребер поверхности $\mathcal{F}$. Так как каждое ребро соединяет некоторые вершины, пара (V, E) является простым графом, вложенным в $\mathbb{R}^3$.

Определение 5.15. *Графом G многогранной поверхности $\mathcal{F}$* называется построенный выше вложенный в $\mathbb{R}^3$ граф (V, E).

Перечислим некоторые свойства графа G многогранной поверхности $\mathcal{F}$.

(1) *Граф G является простым и связным.*

(2) *Степени вершин графа G не меньше* 2. Действительно, каждая вершина $\mathcal{F}$ является вершиной некоторой грани — многоугольника, поэтому из нее выходит не менее двух ребер.

(3) *Вершина v графа G имеет степень* 2*, если и только если оба выходящих из нее ребра e_1 и e_2 — граничные. В частности, степени вершин графа замкнутой многогранной поверхности не меньше* 3. Действительно, никакая пара граней многогранной поверхности не может пересекаться более чем по одному ребру. Поэтому если хотя бы одно из инцидентных v ребер, скажем e_1, — внутреннее, то к e_1 примыкает еще одна грань, в которой имеется ребро e_3, инцидентное v и отличное от e_1 и e_2, так что $\deg v \geq 3$.

Далее, обозначим через E' множество внутренних ребер многогранной поверхности $\mathcal{F}$. Положим $V' = \{F_i\}$ — множество граней поверхности $\mathcal{F}$. Наконец, отображение инцидентности ∂' так: положим $\partial(e) = \{F_i, F_j\}$, если и только, если ребро $e \in E'$ является пересечением граней F_i и F_j.

Определение 5.16. *Двойственным графом G' многогранной поверхности* $\mathcal{F}$ называется построенный только что комбинаторный граф (V', E', ∂').

Перечислим теперь некоторые свойства двойственного графа G' многогранной поверхности $\mathcal{F}$.

(1) *Граф G' является простым и связным.* Действительно, различные вершины графа G', соединенные ребром, — это смежные грани. Так как смежные грани имеют ровно одно общее ребро в $\mathcal{F}$, то граф G' не содержит кратных ребер. Связность равносильна условию (3) из определения 7.2.

(2) *Степени вершин графа G', соответствующего замкнутой многогранной поверхности, не меньше* 3. Действительно, каждая грань $\mathcal{F}$ содержит не менее 3 ребер.

Количество ребер грани F многогранной поверхности иногда называют *гональностью* или *степенью грани* и обозначают через $\deg F$. Так как каждое ребро замкнутой поверхности является внутренним, то имеет место следующий результат.

Следствие 5.17. *Пусть $\mathcal{F} = \{F_i\}$ — замкнутая многогранная поверхность, и P — количество ее ребер. Тогда*

$$2P = \sum_i \deg F_i.$$

5.4 Выпуклые многогранники

Определение 5.18. Подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с каждой парой своих точек оно содержит отрезок, соединяющий эти точки.

Пример 5.19. Точка, прямая, плоскость, полупространство, открытый шар, замкнутый шар являются, очевидно, выпуклыми подмножествами пространства.

Упражнение 5.1. Проверьте, что любое непустое пересечение выпуклых множеств — выпукло.

Определение 5.20. Многоугольник и многогранник называются *выпуклыми*, если они представляют собой выпуклые подмножества пространства.

Теорема 5.21. *Многогранник $W \subset \mathbb{R}^3$ выпуклый, если и только если он равен пересечению замкнутых полупространств, ограниченных плоскостями, проходящими через его грани.*

Доказательство. Пусть $F_1, \ldots, F_m$ — грани многогранника W. Обозначим через π_k плоскость, проходящую через F_k (отметим, что в силу нашего определения все эти плоскости попарно различны). Предположим сначала, что многогранник равен пересечению замкнутых полупространств, ограниченных плоскостями π_k, т.е. для каждого k существует такое полупространство Π_k, ограниченное плоскостью π_k, что $W = \cap_{k=1}^m \Pi_k$. Так как все полупространства выпуклы, а пересечение выпуклых множеств тоже выпукло (см. упражнение 5.1), многогранник W — выпуклый.

Пусть теперь W — выпуклый многогранник. Докажем, что он совпадает с пересечением полупространств, ограниченных плоскостями, проходящими через его грани.

Лемма 5.22. *Каждая грань F выпуклого многогранника W равна пересечению W и содержащей ее плоскости π и является выпуклым пространственным многоугольником.*

Доказательство. Очевидно, $F \subset W \cap \pi$. Покажем обратное включение. Пусть $Q \in \pi$, но $Q \notin F$, мы покажем, что тогда $Q \notin W$. Пусть P — внутренняя точка грани F (то есть лежит в ее относительной внутренности), тогда отрезок $[P, Q]$ пересекает границу многоугольника F в некоторой точке R, лежащей на некотором звене e ломаной $L = \partial F$, ограничивающей F. Выберем P так, чтобы R лежала внутри звена e. Пусть F' — грань многогранника W, примыкающая к F по ребру e. По определению многогранной поверхности, F' лежит в плоскости π' отличной от π. Рассмотрим хорошую окрестность $U(R)$ точки R в пространстве. Эта окрестность разбивается поверхностью многогранника (а значит и объединением граней F и F') на две компоненты U_1 и U_2, одна из которых, пусть U_1, лежит внутри, а другая — снаружи многогранника W. Плоскость π' так же разбивает хорошую окрестность на два полушария, одно из которых содержит U_1, а другое –

содержится в U_2. Отрезок $[Q,R]$ пересекается с U_2, отрезок $[R,P]$ — с полушарием, содержащим U_1, поэтому Q лежит во внешности многогранника W, то есть не принадлежит W, что и требовалось. $\square$

Лемма 5.23. *Пусть F — произвольная грань многогранника W, и π — содержащая ее двумерная плоскость. Тогда W лежит в одном из двух замкнутых полупространств, ограниченных плоскостью π.*

Доказательство. Грань F очевидно лежит в обоих замкнутых полупространствах, ограниченных π.

Пусть A — произвольная внутренняя точка грани F. Рассмотрим ее хорошую окрестность $U(A)$, которая по следствию 5.14, делится поверхностью многогранника (а значит гранью F и плоскостью π) на две компоненты связности, из которых одна лежит в W, а другая — нет. Фиксируем точку $B \in \operatorname{Int} W \cap U(A)$, и покажем, что многогранник W весь лежит в том ограниченном π замкнутом полупространстве Π, которое содержит B. Действительно, пусть P — произвольная точка из $W \setminus F$. Тогда отрезок $[P,B]$ целиком лежит в W в силу выпуклости W, не пересекает π в силу леммы 5.22 и, поэтому, целиком содержится в полупространстве Π. В частности, $P \in \Pi$. $\square$

Таким образом, W содержится в пересечении полупространств Π_k, ограниченных плоскостями, содержащими грани многогранника.

Докажем теперь, что $W = \cap_{k=1}^m \Pi_k$. Предположим противное, т.е. существует точка $P \in \cap_{k=1}^m \Pi_k$ такая, что $P \notin W$. Пусть Q — произвольная точка из $\operatorname{Int} W$. Тогда точки P и Q лежат в разных компонентах множества $\mathbb{R}^3 \setminus \partial W$, поэтому $[P,Q]$ пересекает некоторую грань F_i, а значит и плоскость π_i. При этом Q — внутренняя точка многогранника, поэтому она не лежит в плоскости π_i по лемме 5.22, отрезок $[P,Q]$ пересекает плоскость π_i по точке, поэтому Q и P должны лежать в разных полупространствах относительно π_i. Но $Q \in W \subset \Pi_i$ по доказанному выше, а $P \in \Pi_i$ по условию, противоречие. $\square$

Следующие утверждения оставим в качестве упражнений.

Следствие 5.24. *Пусть $W \subset \mathbb{R}^3$ — выпуклый многогранник, $F_1,\dots,F_m$ — его грани, π_i — плоскость, содержащая F_i. Обозначим через Π_i замкнутое полупространство, ограниченное π_i и содержащее W, и пусть $\mathring{\Pi}_i$ — внутренность этого полупространства. Пусть P — произвольная точка из W. Тогда*

(1) *P — вершина W, общая для граней $F_{i_1},\dots,F_{i_k}$, если и только если $P \in \pi_i$ при $i \in \{i_1,\dots,i_k\}$, и $P \in \mathring{\Pi}_i$ при всех остальных i;*

(2) *P — внутренняя точка ребра W, общего для граней F_{i_1} и F_{i_2}, если и только если $P \in \pi_i$ при $i \in \{i_1,i_2\}$, и $P \in \mathring{\Pi}_i$ при всех остальных i;*

(3) *P — внутренняя точка грани F_{i_1}, т.е. $P \in \operatorname{Int} F_i$, если и только если $P \in \pi_{i_1}$ и $P \in \mathring{\Pi}_i$ при $i \neq i_1$;*

(4) *P — внутренняя точка многогранника W, если и только если $P \in \mathring{\Pi}_i$ при всех i.*

Следующая конструкция заимствована нами из [2].

Конструкция 5.25. В обозначениях следствия 5.24, выберем в произвольной грани F_i ее внутреннюю точку P. По этому же следствию, $P \in \mathring{\Pi}_j$ для всех $j \neq i$, поэтому шаровая окрестность U_P, радиус которой меньше расстояния от P до всех π_j, $j \neq i$, также лежит в каждом таком $\mathring{\Pi}_j$. Пусть Q — произвольная точка из U_P, не лежащая в Π_i, в частности, $Q \notin \pi_i$. Обозначим через $\nu\colon \Pi_i \to \pi_i$ радиальную проекцию из точки Q на плоскость π_i: каждой точке $S \in \Pi_i$ ставится точка $R = \nu(S) \in \pi_i$ пересечения луча QS с π_i.

Лемма 5.26. *Ограничение радиальной проекции ν на $\partial W \setminus \operatorname{Int} F_i$ является гомеоморфизмом с образом.*

Доказательство. Пусть R — произвольная точка плоскости π_i. Рассмотрим луч QR и выясним, как устроено пересечение $QR \cap \partial W$.

Пусть $R \in \operatorname{Out} F_i$, тогда, по лемме 5.22, $R \notin W$ и, значит, для некоторого $j \neq i$ выполняется $R \notin \Pi_j$, поэтому интервал (Q, R) пересекает плоскость π_j по некоторой точке T. Но тогда открытый луч TR содержится в $R^2 \setminus \Pi_j$, поэтому $TR \cap W = \emptyset$. Кроме того, $[Q, R) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Pi_i$, поэтому $[Q, R) \cap W = \emptyset$, так что в этом случае луч QR не пересекает W.

Пусть $R \in \partial F_i$. По следствию 5.24, точка R лежит в некоторой плоскости π_j, $j \neq i$, поэтому все точки луча QR, следующие за точкой R, лежат в $\mathbb{R}^3 \setminus \Pi_j$, следовательно, все они не принадлежат W. Кроме того, $(Q, R) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Pi_i$, поэтому $(Q, R) \cap W = \emptyset$, так что $QR \cap W$ состоит ровно из одной точки, а именно, точки R.

Наконец, пусть $R \in \operatorname{Int} F_i$. Выберем шаровую окрестность U_R точки R так же, как мы выбирали U_P. Тогда точки из $QR \cap U_R$, следующие на луче QR за точкой R, лежат во всех $\mathring{\Pi}_j$, поэтому все они принадлежат внутренности W. Обозначим через S последнюю точку луча QR, лежащую в W. В силу сказанного выше, $S \neq R$. Покажем, что интервал (R, S) состоит из внутренних точек для W. Действительно, если на нем имеется некоторая точка $T \in \partial W$, то T содержится в некоторой плоскости π_j, но тогда все точки открытого луча TS не содержатся в Π_j и, в частности, в W, поэтому $S \notin W$, противоречие. Итак, мы доказали, что $QR \cap \partial W$ состоит в рассматриваемом случае из двух точек: R и S. Отсюда и из разобранных выше случаев вытекает, что ограничение ν на $\partial W \setminus \operatorname{Int} F_i$ — взаимно однозначно с образом. Непрерывность этого ограничения и отображения, обратного к нему, следует из непрерывности радиальной проекции. □

Следствие 5.27. *Граф выпуклого многогранника планарен.*

Доказательство. По лемме 5.26, границу ∂W выпуклого многогранника, из которой выкинута внутренность некоторой грани F, можно гомеоморфно отобразить на внутренность грани F. При таком отображении граф многогранника W отображается на некоторый плоский граф, так что граф многогранника планарен. □

Описанный в доказательстве следствия 5.27 образ графа многогранника W называется *диаграммой Шлегеля*[1] многогранника W в грани F_i. Это плоский граф, ребра которого — прямолинейные отрезки, ограниченные грани — многоугольники, соответствующие граням многогранника, отличным от F_i. Наконец, грань F_i можно представлять или как неограниченную грань, или как объединение всех остальных граней. Тем самым, диаграмма Шлегеля полностью описывает комбинаторную структуру многогранника.

Заметим, что для одного и того же многогранника можно построить разные диаграммы Шлегеля, выбирая разные грани в качестве F_i.

Упражнение 5.2. Нарисуйте диаграммы Шлегеля для треугольной призмы в треугольной и в четырехугольной гранях.

Эта конструкция дословно переносится на многомерный случай. Диаграммой Шлегеля в гиперграни F многогранника размерности d называют разбиение грани F на $(d-1)$-мерные выпуклые многогранники — образы гиперграней. В частности, так можно получить сравнительно наглядные трехмерные изображения четырехмерных многогранников.

Упражнение 5.3. Нарисуйте диаграмму Шлегеля четырехмерного куба.

Конструкция 5.28. Построим вложение двойственного графа G' многогранной поверхности $\mathcal{F}$, все грани которой — выпуклые многоугольники, в саму поверхность. Для этого возьмем в каждой грани F_i многогранной поверхности $\mathcal{F}$ по внутренней точке P_i и примем эти точки за образы соответствующих вершин графа. Соединим каждую точку P_i с серединами тех сторон содержащей ее грани, которые соответствуют внутренним ребрам многогранной поверхности. Получим набор отрезков, пересекающихся только по P_i. Точки P_i из смежных граней соединены двузвенными ломаными. Эти ломаные возьмем в качестве образов соответствующих ребер графа.

Замечание 5.29. Несколько более сложно определяется *геометрическая реализация двойственного графа произвольной многогранной поверхности* (дайте соответствующее определение).

Предложение 5.30. *Двойственный граф выпуклого многогранника W планарен.*

Доказательство. Приведем еще одну конструкцию из [2]. В обозначениях следствия 5.24, выберем произвольную точку $P \in \operatorname{Int} W$. Существует шар

[1] Шлегель, Stanislaus Ferdinand Victor Schlegel (1843–1908), немецкий математик, геометр, ученик и коллега Грассмана, изобрел этод метод описания многогранников в 1886 году.

$U_\varepsilon(P)$, содержащийся в $\operatorname{Int} W$. Уменьшая ε, если необходимо, добьемся того, чтобы сфера $S_\varepsilon(P)$, ограничивающая этот шар, также лежала в $\operatorname{Int} W$.

Пусть $\mu\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{P\} \to S_\varepsilon(P)$ — радиальная проекция на $S_\varepsilon(P)$ с центром в P:

$$\mu(Q) = P + \varepsilon\,\overrightarrow{PQ}/\|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Покажем, что μ отображает ∂W взаимно однозначно на $S_\varepsilon(P)$.

Действительно, если Q — произвольная точка из $S_\varepsilon(P)$, то луч PQ содержит некоторую точку $R \in \operatorname{Out} W$, так как W — ограниченное множество. Но тогда $[P, R]$ пересекает ∂W. Пусть S — некоторая точка из этого пересечения, тогда $\mu(S) = Q$. Таким образом, ограничения μ на ∂W сюръективно.

Покажем теперь, что это ограничение инъективно. Предположим, что S_1 и S_2 — различные точки из ∂W, для которых $Q = \mu(S_1) = \mu(S_2)$. Без ограничения общности, будем считать, что $S_1 \in (Q, S_2)$. Так как $S_1 \in \partial W$, то S_1 лежит в некоторой грани F_i многогранника W. Но тогда, в обозначениях следствия 5.24, $S_1 \in \pi_i$ и $P \in \mathring{\Pi}_i$, поэтому S_2 лежит вне полупространства Π_i, так что $S_2 \notin W$.

Итак, мы доказали, что μ отображает ∂W взаимно однозначно на $S_\varepsilon(P)$. Из непрерывности радиальной проекции и вспомогательных утверждений, доказанных при решении задачи 2.29, вытекает, что это отображение — гомеоморфизм.

Рассмотрим геометрическую реализацию G двойственного графа многогранника W, описанную конструкции 5.28. Выберем произвольную точку T из ∂W, не принадлежащую G. По задаче 2.29, существует гомеоморфизм η между $S_\varepsilon(P) \setminus \bigl\{\mu(T)\bigr\}$ и плоскостью $\mathbb{R}^2$, поэтому $\eta \circ \mu(G)$ — геометрическая реализация двойственного графа многогранника W, являющаяся плоским графом. $\square$

5.5 Формула Эйлера для многогранников

В данном разделе будем рассматривать выпуклые многогранники W. По следствию 5.27, графы G таких многогранников планарны. Пусть ν — отображение, построенное в конструкции 5.25, тогда $\nu(G)$ — связный плоский граф, имеющий столько же вершин, ребер и граней, сколько и многогранник W, откуда, используя формулу Эйлера из теоремы 4.7, получаем следующий результат.

Теорема 5.31 (Формула Эйлера для выпуклых многогранников)**.** *Пусть W — выпуклый многогранник, и пусть f, e и v — количества его граней, ребер и вершин. Тогда*

$$v - e + f = 2.$$

Замечание 5.32. Аналог формулы Эйлера впервые появился в работах Декарта (René Descartes) в 17 веке. Он вычислил сумму всех углов всех граней выпуклого многогранника.

Задача 5.33. Используя формулу Эйлера, получите результат Декарта: покажите, что сумма всех углов всех граней выпуклого многогранника с v вершинами равна $2\pi(v-2)$.

5.6 Правильные многогранники

Определение 5.34. Выпуклый многогранник назовем *правильным*, если все его грани — равные правильные пространственные многоугольники, стыкующиеся в вершинах в одном и том же количестве и образующие равные двугранные углы при всех ребрах.

Пусть W — правильный многогранник, G — его граф. Как мы уже показали, граф G планарен. Обозначим через Γ его геометрическую реализацию. Тогда плоский граф Γ имеет столько же вершин, ребер и граней, сколько и многогранник W. Из определений замкнутого многогранника и правильного многогранника вытекает, что

(1) Γ — плоский простой связный граф;

(2) степени вершин графа Γ одинаковы и не меньше 3;

(3) каждая грань графа Γ ограничена один и тем же числом ребер, то есть степени всех граней одинаковы, причем степень каждой грани не меньшим 3;

(4) каждое ребро графа Γ лежит ровно в двух гранях.

Такие графы мы описали в задаче 4.7. Приведем ответ.

Пусть (v, e, f) — вектор, компоненты которого равны соответственно количествам вершин, ребер и граней графа G_ν, а, значит, и правильного многогранника W. Тогда эти векторы могут быть только следующих пяти типов: $(4, 6, 4)$, $(6, 12, 8)$, $(8, 12, 6)$, $(12, 30, 20)$ и $(20, 30, 12)$. Оказывается, правильные многогранники каждого из этих пяти типов существуют. Они называются *платоновыми телами*. Доказательство существования каждого из этих платоновых тел можно найти, например, в [2].

Многомерные аналоги правильных многогранников определяются как «наиболее симметричные» многогранники. Формальное определение дается на языке так называемых флагов. Семейство $F = \{F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}\}$ граней F_i многогранника размерности n называется *флагом*, если размерность грани F_i равна i и $F_i \subset F_{i+1}$ для каждого $i = 0, \ldots, n-2$. Выпуклый многогранник называется *правильным*, если для каждой пары его флагов существует движение многогранника, переводящее один флаг в другой.

Задача 5.35. Проверьте, что приведенное выше определение правильного трехмерного многогранника эквивалентно общему определению.

Вектор $(k_0, \ldots, k_{n-1})$, составленный из чисел k_i, равных количеству i-мерных граней многогранника, назовем f-вектором этого многогранника.

Для трехмерного случая это как раз вектор (v, e, f), использовавшийся выше при описании платоновых тел.

В размерности 4 существует шесть правильных многогранников. Приведем здесь их список.

- Аналог тетраэдра (так называемый пятиячеечник или четырехмерный симплекс), f-вектор имеет вид $(5, 10, 10, 5)$, гиперграни — трехмерные правильные тетраэдры.
- Аналог куба (так называемый гиперкуб или тессеракт), f-вектор имеет вид $(16, 32, 24, 8)$, гиперграни — трехмерные кубы.
- Аналог октаэдра (так называемый шестнадцатиячеечник), f-вектор имеет вид $(8, 24, 32, 16)$, гиперграни — трехмерные правильные тетраэдры.
- 24-ячеечник, f-вектор имеет вид $(24, 96, 96, 24)$, гиперграни — правильные октаэдры.
- 120-ячеечник, f-вектор имеет вид $(600, 1200, 720, 120)$, гиперграни — правильные додекаэдры.
- 600-ячеечник, f-вектор имеет вид $(120, 720, 1200, 600)$, гиперграни — правильные тетраэдры.

Заметим, что как и в трехмерном случае «куб» и «октаэдр» взаимно двойственны. Также взаимно двойственны два последних многогранника. Их можно считать аналогами додекаэдра и икосаэдра.

Задача 5.36. Придумайте аналог формулы Эйлера для четырехмерных многогранников.

В размерностях 5 и выше имеется только три правильных многогранника: это аналоги тетраэдра, куба и октаэдра. Они называются соответственно, симплексами, гиперкубами и гипероктаэдрами.

Задача 5.37. Выпишите f-вектор n-мерного симплекса.

Задача 5.38. Придумайте аналог формулы Эйлера для n-мерных многогранников (его придумал Пуанкаре в 1899 году).

5.7 Теорема Минковского о «еже»

Пусть $W \subset \mathbb{R}^3$ — произвольный выпуклый многогранник. Обозначим через $F_1, \ldots, F_m$ все его грани, через n_i — единичный вектор, перпендикулярный грани F_i и направленный наружу многогранника W, а через S_i — площадь грани F_i. Положим $\xi_i = S_i\, n_i$. Семейство векторов $\{\xi_i\}$ назовем *ежом многогранника* W. Мы хотим понять, какими свойствами обладают ежи многогранников и сколь однозначно они определяют многогранник. Подробности см. в [4] и [7].

Утверждение 5.39. *Пусть* $\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ *— ёж выпуклого многогранника* W*. Тогда векторы* ξ_i *некомпланарны и выполняется* $\sum_{i=1}^m \xi_i = 0$.

Доказательство. Если бы векторы ξ_i лежали в одной плоскости π, то, по теореме 5.21, многогранник W был бы равен пересечению полупространств Π_i, ограниченных плоскостями π_i, параллельными прямой, перпендикулярной π, так что W не был бы ограниченным. Докажем теперь вторую часть утверждения.

Пусть P — произвольная точка из $\operatorname{Int} W$, а P_i — точка, лежащая в относительной внутренности грани F_i. Тогда расстояние h_i от точки P до плоскости, проходящей через грань F_i, равно $\langle n_i, P_i - P\rangle$, где $\langle a, b\rangle$ обозначает стандартное скалярное произведение векторов a и b.

Обозначим через V_i пирамиду с основанием F_i и вершиной P, через v_i — объем этой пирамиды, а через v — объем многогранника W. Тогда $v = \sum_i v_i$. С другой стороны,

$$v_i = \frac{1}{3}\, h_i\, S_i = \frac{1}{3}\,\langle n_i, P_i - P\rangle\, S_i = \frac{1}{3}\,\langle \xi_i, P_i - P\rangle,$$

поэтому

$$\begin{aligned} v = \sum_i \frac{1}{3}\,\langle \xi_i, P_i - P\rangle &= \sum_i \frac{1}{3}\,\langle \xi_i, P_i\rangle - \sum_i \frac{1}{3}\,\langle \xi_i, P\rangle = \\ &= \sum_i \frac{1}{3}\,\langle \xi_i, P_i\rangle - \frac{1}{3}\Big\langle \sum_i \xi_i, P\Big\rangle = \sum_i \frac{1}{3}\,\langle \xi_i, P_i\rangle - \frac{1}{3}\,\langle \xi, P\rangle. \end{aligned}$$

Заметим, что полученное равенство справедливо для произвольной точки $P \in \operatorname{Int} W$, поэтому, если P' — любая другая точка из $\operatorname{Int} W$, то $\langle \xi, PP'\rangle = 0$. Так как $\operatorname{Int} W$ — открытое подмножество в $\mathbb{R}^3$ и, в частности, содержит открытый шар, направление вектора PP' можно выбрать произвольным. Поэтому $\xi = 0$. Утверждение доказано. □

Замечание 5.40. Утверждение 5.39 выполнено для произвольного, не обязательно выпуклого, многогранника. Но доказательство в общем случае технически сложнее. Кроме того, в общем случае легко построить пример двух разных многогранников (например, выпуклого и не выпуклого) с одинаковыми ежами. Для выпуклых многогранников ситуация оказывается более жесткой, а именно, оказывается ёж определяет выпуклый многогранник однозначно. Этот результат известен как теорема Минковского[2].

Теорема 5.41 (Г. Минковский [5])**.** *Пусть* $\xi_1, \dots, \xi_m$ *— ненулевые некомпланарные векторы в* $\mathbb{R}^3$*, причем* $\sum_i \xi_i = 0$*. Тогда существует единственный, с точностью до параллельного переноса, выпуклый многогранник, ёж которого равен* $\{\xi_i\}$.

[2]Герман Минковский (Hermann Minkowski, 1864–1909) выдающийся немецкий математик, родился в Российской империи, на территории современной Польши. Известен работами по геометрической теории чисел, неевклидовой и метрической геометрии, теории относительности. Служил профессором в Кёнигсбергском и Гёттингенском университетах. Один из учителей А. Эйнштейна.

Теорема 5.41 довольно сложна, мы приведем здесь эскиз доказательства, позволяющий проследить за основными идеями и конструкциями. Полное доказательство можно найти в замечательных лекциях Игоря Пака [7]. Начнем с известного неравенства Брунна[3]–Минковского для объемов выпуклых тел. Оно допускает прямое доказательство с помощью предельного перехода и разбиения на «кирпичи».

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Множество $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\} \subset \mathbb{R}^n$ называется *суммой Минковского множеств* A *и* B. Легко проверить, что $A + B = B + A$, и сумма выпуклых множеств — выпуклое множество. Далее, для $\lambda > 0$ положим $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$. Множества A и B назовем *подобными*, если существует $\lambda > 0$ такое, что $\lambda A = B$. Обозначим через $|A|$ объем множества A.

Утверждение 5.42. *Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые подмножества с непустой внутренностью. Тогда*

$$|A + B|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + |B|^{1/n},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда множества A и B подобны.

Эскиз доказательства. Пусть $\xi_i = a_i n_i$, где n_i — единичные векторы, a_i — положительные числа. Если искомый многогранник W существует, то он представляет собой пересечение замкнутых полупространств Π_i, ограниченных плоскостями π_i, каждая из которых содержит соответствующую грань F_i. При этом площадь F_i равна a_i, вектор n_i — это единичный вектор внешней нормали к плоскости π_i, а полупространство Π_i задается неравенством $\langle Ox, n_i \rangle \leq z_i$, где O — начало координат, расположенное внутри W, а через Ox обозначен радиус-вектор точки $x \in \mathbb{R}^n$. Без ограничения общности будем считать, что n_1, n_2, n_3 линейно независимы и $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, то есть начало координат является общей вершиной граней F_1, F_2, F_3. Положим $z = (z_4, \ldots, z_m)$, и пусть $C_+ \subset \mathbb{R}^{m-3}$ — положительный ортант, состоящий из векторов z с неотрицательными координатами. Обозначим через $\mathcal{Z}$ множество векторов $z \in C_+$, таких, что пересечение полупространств $\bigl\{x : \langle Ox, n_i \rangle \leq z_i\bigr\}$ представляет собой некоторый многогранник с гранями $F_1, \ldots, F_m$, где F_i лежит в плоскости, заданной уравнением $\langle Ox, n_i \rangle = z_i$. Этот многогранник обозначим через P_z.

Лемма 5.43. *Пусть $v(z)$ — объем многогранника P_z. Тогда*

$$\frac{\partial v(z)}{\partial z_i} = |F_i|, \qquad i = 4, \ldots, m,$$

где через $|F_i|$ обозначена площадь грани F_i многогранника P_z.

Обозначим через $\mathcal{K} \subset \mathcal{Z}$ множество всех таких $z \in \mathcal{Z}$, что объем многогранника P_z не меньше 1.

---

[3]Герман Карл Брунн (Hermann Karl Brunn, 1862–1939) немецкий математик и арабист, специалист по выпуклой геометрии, топологии, теории узлов.

Лемма 5.44. *Множество $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{m-3}$ замкнуто и строго выпукло. Через каждую точку $z \in \partial K$ проходит единственная опорная гиперплоскость.*

Доказательство. Так как объем $v(z)$ многогранника P_z непрерывно зависит от z, то множество $\mathcal{K}$ замкнуто. Далее, так как частные производные функции $v(z)$ существуют и непрерывны, то функция $v(z)$ дифференцируема, поэтому (это — материал курса дифференциальной геометрии или математического анализа) в каждой точке $z \in \partial\mathcal{K}$ регулярной поверхности $\partial\mathcal{K}$ существует единственная касательная плоскость, которая является единственной опорной плоскостью множества $\mathcal{K}$ в этой точке.

Докажем выпуклость. Пусть z', $z'' \in \mathcal{K}$ и $\lambda \in [0,1]$. Положим $z = (1-\lambda)z' + \lambda\, z''$. Рассмотрим многогранник $P = (1-\lambda)P_{z'} + \lambda\, P_{z''}$. Для каждого $x \in P$ найдутся $x' \in (1-\lambda)P_{z'}$ и $x'' \in \lambda P_{z''}$ такие, что $x = x' + x''$.

Лемма 5.45. *В сделанных обозначениях, $\langle Ox'', n_i\rangle \le \lambda z_i''$ и $\langle Ox', n_i\rangle \le (1-\lambda)z_i'$.*

Доказательство. Докажем первое неравенство, второе проверяется аналогично. Если $x'' \in \lambda P_{z''}$, то $x'' = \lambda y$ для некоторого $y \in P_{z''}$. По определению $P_{z''}$ для такого y выполнено неравенство $\langle Oy, n_i\rangle \le z_i''$, умножая которое на положительное λ получаем $\langle \lambda Oy, n_i\rangle \le \lambda z_i''$. Но $Oz'' = \lambda Oy$, откуда и вытекает требуемое. □

Применим лемму:

$$\langle Ox, n_i\rangle = \langle Ox', n_i\rangle + \langle Ox'', n_i\rangle \le (1-\lambda)z_i' + \lambda z_i'' = z_i,$$

поэтому $P \subset P_z$, поэтому многогранник P_z имеет непустую внутренность. Оценим его объем. Используя утверждение 5.42 (неравенство Брунна–Минковского), а также однородность объема (то есть $|\lambda P| = \lambda^3|P|$, где $\lambda > 0$), неравенства $|P_{z'}| \ge 1$ и $|P_{z''}| \ge 1$ и монотонность степенной функции, получаем, что

$$|P_z| \ge |P| = \big|(1-\lambda)P_{z'} + \lambda\, P_{z''}\big| \ge \big(|(1-\lambda)P_{z'}|^{1/3} + |\lambda\, P_{z''}|^{1/3}\big)^3 \ge$$
$$\ge \big((1-\lambda)|P_{z'}|^{1/3} + \lambda\,|P_{z''}|^{1/3}\big)^3 \ge \big((1-\lambda)+\lambda\big)^3 = 1,$$

откуда $z \in \mathcal{K}$, что и требовалось.

Наконец, строгая выпуклость следует из второй части утверждения 5.42. Действительно, если отрезок $[z', z'']$ лежит на границе $\partial\mathcal{K}$, то $|P_z| = 1$ при всех λ, поэтому все неравенства в предыдущей цепочке выполнены в форме равенств, что возможно только если $P_{z'}$ и $P_{z''}$, а значит и все P_z, подобны друг другу. Но у них одинаковый объем, значит они конгруэнтны. Наконец, они все имеют общую вершину O и совпадающие векторы нормалей к трем граням в ней. Поэтому все эти многогранники совпадают, что невозможно, так как ограничивающие их полупространства меняются. Лемма доказана. □

Перейдем к доказательству теоремы. Начнем с существования. Рассмотрим гиперплоскость $H \subset \mathbb{R}^{m-3}$, заданную уравнением $a_4 z_4 + \dots + a_m z_m = 0$. Так как все a_i положительны, то она пересекает C_+ только в начале координат, и так как $\mathcal{K} \subset C_+$, то существует параллельная H опорная к $\mathcal{K}$ гиперплоскость, пересекающая $\mathcal{K}$ по одной точке. Обозначим эту точку через z_0, а плоскость — через H_{z_0}. Покажем, что многогранник P_{z_0} подобен искомому.

Так как гиперплоскость $H_{z_0} = z_0 + H$ касается $\partial K = \{z \in \mathcal{Z} : v(z) = 1\}$, то производная объема $v(z)$ вдоль любого вектора из H в точке z_0 равна нулю. Фиксируем любую пару индексов i и j, где $4 \le i < j \le m$, и рассмотрим вектор $u_{ij} = a_j e_i - a_i e_j$, где $\{e_i\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^{m-3}$. Отметим, что у вектора u_{ij} только две ненулевые координаты. Тогда, используя лемму 5.43 и правила дифференцирования сложной функции, получаем:

$$0 = \frac{dv(z_0 + tu_{ij})}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{\partial v}{\partial z_i}\Big|_{z=z_0} \frac{dz_i}{dt}\Big|_{t=0} + \frac{\partial v}{\partial z_j}\Big|_{z=z_0} \frac{dz_j}{dt}\Big|_{t=0} = \\ = \frac{\partial v}{\partial z_i}\Big|_{z=z_0} a_j - \frac{\partial v}{\partial z_j}\Big|_{z=z_0} a_i = |F_i| a_j - |F_j| a_i,$$

где через $|F_i|$ обозначена площадь грани F_i многогранника P_{z_0}. Поэтому $|F_i| = s\, a_i$ для всех $i \ge 4$ и некоторого положительного s. Так как первые три вектора n_1, n_2, n_3 линейно независимы, то коэффициенты a_1, a_2, a_3 определяются однозначно из соотношения $\sum_i a_i n_i = 0$ и пропорциональны $|F_i|$ с тем же коэффициентом s в силу равенства нулю суммы векторов ежа многогранника P_{z_0}. Тем самым, многогранник P_{z_0} подобен исходному с коэффициентом $\sqrt{s}$.

Единственность искомого многогранника следует из строгой выпуклости множества $\mathcal{K}$. Действительно, для каждого такого многогранника есть подобный ему многогранник P_z объема 1. Опорная плоскость H_z в точке $z \in \partial\mathcal{K}$ однозначно определена. Если таких многогранников несколько, то соотвествующие опорные плоскости будут параллельны, что противоречит строгой выпуклости.

Замечание 5.46. У теоремы 5.41 имеются обобщения как на многомерный случай, так и на невыпуклые многогранники (см. например [6]).

Следствие 5.47. *Выпуклый многогранник центрально симметричен, если и только если для каждой его грани существует параллельная ей грань той же площади.*

Доказательство. Если многогранник центрально симметричен, то каждая его грань центрально симметрична некоторой другой его грани, такие грани параллельны и их площади равны, что и требовалось.

Пусть теперь у каждой грани выпуклого многогранника имеется параллельная ей грань той же площади.

Лемма 5.48. *В сделанных предположениях ёж многогранника центрально симметричен, т.е. вектор a принадлежит ежу, если и только если противоположный вектор $-a$ принадлежит этому ежу.*

Доказательство. Пусть F и F' — параллельные грани одинаковой площади. Если их внешние нормали сонаправлены, то содержащие их плоскости должны совпадать (иначе одна грань лежит внутри ограниченного второй полупространства, содержащего многогранник), но последнее также невозможно, так как содержащая грань плоскость пересекается с многогранником в точности по этой грани.

Таким образом, граням F и F' соответствует пара противоположных векторов в еже многогранника. Такие пары не могут пересекаться, иначе снова получим пару параллельных граней с сонаправленными внешними нормалями. □

Итак, ёж многогранника центрально симметричен. По теореме Минковского, ему соответствует единственный, с точностью до сдвига, многогранник. Но если этот многогранник не является центрально-симметричным, то его центрально-симметрическая копия имеет ровно такой же ёж, но не может быть переведена в исходный многогранник параллельным переносом. Доказательство закончено. □

Литература к главе 5

[1] Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.Л. *Многогранники, графы, оптимизация.* М.: Наука, 1981.

[2] Берже М. *Геометрия*, тт. 1-2, М.: Мир, 1984.

[3] Долбилин Н.П. *Три теоремы о выпуклых многогранниках.* Квант, 2001, N 5, 7—12.

[4] Долбилин Н.П. *Теорема Минковского о многогранниках.* Квант, 2006, N 4, 3—8.

[5] Минковский Г. *Общие теоремы о выпуклых многогранниках.* Успехи мат. наук, 1936, вып. 2, 55—71.

[6] Alexandrov V. *Minkowski-type and Alexandrov-type theorems for polyhedral herissons*, 2002, arXiv:math/0211286v1.

[7] Pak I., *Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry*, 2010, конспекты лекций, см. на сайте `https://www.math.ucla.edu`.