Упражнения к главе 5.

Упражнение 5.1. Проверьте, что любое непустое пересечение выпуклых множеств — выпукло.

Упражнение 5.2. Нарисуйте диаграммы Шлегеля для треугольной призмы в треугольной и в четырехугольной гранях.

Упражнение 5.3. Нарисуйте диаграмму Шлегеля для 4-мерного куба.

Упражнение 5.4. Пусть W — выпуклый многогранник, и пусть v, e и f обозначают количества вершин, ребер и граней этого многогранника. Докажите, что

(1) $e + 6 \leq 3v$ и $e + 6 \leq 3f$;

(2) $f + 4 \leq 2v$ и $v + 4 \leq 2f$;

(3) многогранник W имеет хотя бы одну треугольную, четырехугольную или пятиугольную грань;

(4) многогранник W имеет хотя бы один трехгранный, четырехгранный или пятигранный пространственный угол (т.е. вершину, в которой стыкуются 3, 4 или 5 граней);

(5) многогранник W имеет или хотя бы одну треугольную грань, или один трехгранный пространственный угол;

(6) сумма всех плоских углов граней многогранника W равна $2\pi(v - 2)$.

Упражнение 5.5.

(a) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что все его грани имеют не меньше 5 ребер?

(b) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что в каждой его вершине сходится не меньше 5 ребер?

(c) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что все его грани имеют не меньше 4 ребер?

(d) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что в каждой его вершине сходится не меньше 4 ребер?

(e) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что все его грани имеют не меньше 3 ребер?

(f) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что в каждой его вершине сходится не меньше 3 ребер?

Определение 5.49. Пусть P — вершина произвольного многогранника W, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — величины углов всех граней W при этой вершине. Тогда *кривизной в вершине* P называется величина $K(P) = 2\pi - \sum_i \alpha_i$.

Упражнение 5.6. Докажите, что у выпуклого многогранника сумма кривизн $K(P)$ по всем его вершинам P равна 4π.

Упражнение 5.7. Пусть $L \subset \mathbb{R}^3$ — замкнутая ломаная без самопересечений, лежащая на границе ∂W выпуклого многогранника W. Докажите, что $\partial W \setminus L$ состоит из двух компонент.

Определение 5.50. Пусть $L \subset \mathbb{R}^3$ — замкнутая ломаная без самопересечений, лежащая на границе ∂W выпуклого многогранника W, а Ω_1 и Ω_2 — компоненты множества $\partial W \setminus L$. Тогда множества $M_i = L \cup \Omega_i$ называются *многоугольниками на* ∂W. Для многоугольника M_i точки из Ω_i называются *внутренними*, из Ω_j — *внешними*, а из L — *граничными*, где $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Положим $\operatorname{Int} M_i = \Omega_i$, $\operatorname{Out} M_i = \Omega_j$ и $\partial M_i = L$.

Определение 5.51. Пусть X — многоугольник на поверхности ∂W выпуклого многогранника W, а P — некоторая вершина многоугольника X. Тогда *угол α_P многоугольника X в вершине P* определяется так. Если P лежит внутри грани, то α_P — это угол на плоскости, содержащей эту грань. Если же P попала или на ребро, или в вершину из ∂W, то угол в этой вершине складывается из всех углов многоугольников, полученных пересечением X и содержащих эту вершину граней (конечно, углы рассматриваются в этой вершине).

Упражнение 5.8. Пусть X — n-угольник X, лежащий на границе выпуклого многогранника. Докажите, что его сумма его углов равна $\pi(n-2) + \sum_P K(P)$, где последняя сумма берется по всем вершинам многогранника, попавшим внутрь X.

Упражнение 5.9. Существует ли тетраэдр с гранями $F_1, \dots, F_4$ такой, что площадь каждой F_i равна 1, грани F_1 и F_2 перпендикулярны друг другу, грани F_3 и F_4 также перпендикулярны друг другу, а угол между ребром $e_{12} = F_1 \cap F_2$ и $e_{34} = F_3 \cap F_4$ равен $37°$? Указание: воспользуйтесь теоремой Минковского.

Определение 5.52. Пусть X — произвольное подмножество $\mathbb{R}^n$. Наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее X, называется *выпуклой оболочкой* X и обозначается через $\operatorname{conv} X$. Иными словами, $\operatorname{conv} X$ — это такое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, что $X \subset \operatorname{conv} X$, и если $Y \supset X$ — выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{conv} X \subset Y$.

Замечание 5.53. Определение 5.52 и тот факт, что пересечение выпуклых множеств — выпукло, мгновенно влекут, что $\operatorname{conv} X$ совпадает с пересечением всех выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$, содержащих X.

Упражнение 5.10. Докажите, что выпуклый многогранник совпадает с выпуклой оболочкой множества своих вершин.