Упражнения к главе 4

Упражнение 4.1.

(1) Докажите, что любой граф имеет реализацию в пространстве $\mathbb{R}^3$ в виде геометрического графа без самопересечений, ребра которого — ломаные.

(2) Докажите, что простой граф имеет реализацию в пространстве $\mathbb{R}^3$ в виде геометрического графа без самопересечений, ребра которого — прямолинейные отрезки.

Упражнение 4.2. Сколько граней имеет плоский лес (то есть плоский граф без циклов)?

Упражнение 4.3. Используя формулу Эйлера, покажите, что граф $K_{3,3}$ непланарный.

Упражнение 4.4. Не используя формулу Эйлера, выведите из леммы 3.21, что граф K_5 непланарный.

Упражнение 4.5. Пусть G — плоский связный простой граф, имеющий v вершин, e ребер и f граней.

(1) Используя формулу Эйлера, покажите, что при $v \geq 3$ выполняется $\frac{3}{2}f \leq e \leq 3v - 6$.

(2) Покажите, что G содержит вершину, степень которой не превосходит 5.

Упражнение 4.6. Пусть G — плоский связный простой граф. Покажите, что G не может состоять из 10 вершин, степень каждой из которых равна 5.

Упражнение 4.7. Опишите все плоские связные простые графы, вершины которых имеют одну и ту же степень $d \geq 3$, каждая грань ограничена одним и тем же числом $k \geq 3$ ребер и каждое ребро лежит ровно в двух гранях.

Упражнение 4.8. Можно ли построить диагональную триангуляцию произвольного (в том числе, невыпуклого) плоского многоугольника?

Упражнение 4.9. Пусть n — количество вершин триангуляции Γ. Оцените сверху количество ребер и граней графа Γ подходящими линейными функциями от n.