Глава 3

Теорема Жордана

План. Замкнутая кривая, незамкнутая кривая, простая кривая, теорема Жордана о простой замкнутой кривой без самопересечений, лежащей на евклидовой плоскости. Ломаная, вершины ломаной, ребра ломаной, замкнутая ломаная, внутренние и концевые вершины ломаной, замкнутая, незамкнутая простая ломаная, теорема Жордана о простой замкнутой ломаной лежащей на евклидовой плоскости, следствие о перегородках, граф $K_{3,3}$, вложимость и кусочно-линейная вложимость графов, доказательство теоремы Жордана с помощью графов.

В данном разделе мы обсудим знаменитую теорему Жордана о непрерывных кривых без самопересечений, лежащих на евклидовой плоскости. Французский математик Marie Ennemond Camille Jordan включил в свой курс математического анализа [2] (этот курс читался им в l'Ecole Polytechnique, Paris, опубликован в 1887 году) теорему о том, что замкнутая непрерывная кривая на плоскости разбивает плоскость на две компоненты линейной связности. Интересно отметить, многие комментаторы считают доказательство Жордана не полным, и утверждают, что первое полное доказательство было дано американским математиком Освальдом Вебленом (Oswald Veblen), хотя другие специалисты утверждают, что у Жордана все правильно, только опущен случай замкнутой ломаной.

Мы приведем здесь доказательство теоремы Жордана, следуя схеме из [1], см. также [4]. С другими доказательствами можно познакомиться тут [5], [6], [7].

3.1 Формулировка и план доказательства

Начнем с определений. Пусть X — топологическое пространство.

Определение 3.1. Непрерывная кривая $\gamma\colon [a,b]\to X$ называется *замкнутой*, если $\gamma(a)=\gamma(b)$, и *незамкнутой* в противном случае. Незамкнутая непрерывная кривая γ называется *кривой без самопересечений*, если отображение γ взаимно-однозначно с образом. Замкнутая непрерывная кривая называется *замкнутой кривой без самопересечений*, если единственные две различные точки t_1, t_2 отрезка $[a,b]$, для которых $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$, — это точки a, b. Кривые без самопересечений будем также называть *простыми*.

Напомним, что компонентой линейной связности топологического пространства X называется каждое линейно связное подмножество в X, которое не содержится в большем линейно связном подмножестве. Каждая точка из X лежит в некоторой компоненте линейной связности, и никакие две такие компоненты не пересекаются, поэтому X разбивается на компоненты линейной связности.

Теорема 3.2 (M. E. C. Jordan)**.** *Пусть* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *— непрерывная простая замкнутая кривая, и* Γ *— образ отображения* γ*. Тогда множество* $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ *состоит ровно из двух компонент линейной связности.*

Замечание 3.3. Иногда в формулировку теоремы Жордана включают также следующее утверждение. *Если* γ *— непрерывная незамкнутая простая кривая, и* Γ *— образ отображения* γ*, то множество* $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ *линейно связно.* Мы вернемся к нему ниже, в разделе 3.6.

Теорема Жордана (теорема 3.2) на первый взгляд кажется совершенно очевидной, но ее доказательство далеко нетривиально. Дело в том, что утверждение теоремы Жордана вытекает из некоторых глобальных свойств плоскости. На других поверхностях оно может оказаться неверным. Рассмотрим несколько примеров.

- Любая замкнутая простая кривая на сфере делит ее поверхность на две компоненты линейной связности.
- Любая замкнутая простая кривая на цилиндре делит его поверхность на две компоненты линейной связности.
- Не любая замкнутая простая кривая на торе (т.е. на поверхности бублика) делит его поверхность на две компоненты линейной связности (Постройте примеры!).
- Не любая замкнутая простая кривая на листе Мебиуса делит его поверхность на две компоненты линейной связности (Постройте примеры!).

Мы разобьем доказательство на несколько шагов. План доказательства:

- Теорема Жордана для ломаных (кусочно-линейный случай).
- Следствие: теорема про четыре точки на замкнутой ломаной и «перегородки».
- Следствие: кусочно-линейная невложимость графов K_5 и $K_{3,3}$ в плоскость (т.е. с ребрами в виде ломаных).
- Равносильность непрерывной и кусочно-линейной вложимости графов.
- Общая теорема Жордана.

3.2 Случай ломаных

Нам понадобится несколько определений.

Определение 3.4. *Ломаной в* $\mathbb{R}^n$ называется последовательность точек $A_0, A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^n$ и отрезков $[A_k, A_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, m-1$, последовательно их соединяющих.

Точки $A_0, A_1, \ldots, A_m$ называются *вершинами ломаной*, а отрезки $e_k = [A_k, A_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, m-1$, — ее *ребрами* или *звеньями*.

Ломаная называется *замкнутой*, если A_0 совпадает с A_m, и *незамкнутой* в противном случае.

Для незамкнутой ломаной вершины A_0 и A_m, а также ребра e_0 и e_{m-1} называются *концевыми*, а все остальные вершины и ребра — *внутренними*. У замкнутой ломаной все вершины и ребра называются *внутренними*.

Звенья $[A_{k-1}, A_k]$ и $[A_k, A_{k+1}]$ называются *соседними*, а вершина A_k соседних звеньев называется их *общей* вершиной. В случае замкнутой ломаной звенья $[A_0, A_1]$ и $[A_{m-1}, A_m]$ тоже называются *соседними* с *общей* вершиной $A_0 = A_m$.

Определение 3.5. Ломаная называется *ломаной без самопересечений*, если никакие два ребра ломаной не имеют общих точек, за исключением соседних, а соседние ребра пересекаются только по общей вершине. Ломаную без самопересечений будем также называть *простой*.

Замечание 3.6. Так как ломаная однозначно задается последовательностью своих вершин, мы будем иногда говорить «пусть $L = A_0A_1 \cdots A_m$ — ломаная в $\mathbb{R}^n$», понимая под этим, что $A_0,\ A_1, \ldots, A_m$ — последовательность вершин ломаной L.

Также мы иногда будем рассматривать ломаную в $\mathbb{R}^n$ как подмножество $\mathbb{R}^n$, равное объединению всех ее ребер. В этом смысле, например, мы будем понимать выражение «пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — ломаная на плоскости» или «подмножество $\mathbb{R}^2 \setminus L$».

Замечание 3.7. Пусть L — ломаная в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда L — компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$ (так как множество L замкнуто и ограничено).

Утверждение 3.8 (Теорема Жордана для ломаных). *Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутая простая ломаная. Тогда множество $\mathbb{R}^2 \setminus L$ состоит ровно из двух компонент линейной связности.*

Упражнение 3.1. Проверьте, что теорема Жордана для ломаных (утверждение 3.8) является частным случаем общей теоремы Жордана 3.2. (Для этого достаточно по данной ломаной L построить непрерывную кривую, образом которой служит L).

Замечание 3.9. На самом деле, при доказательстве утверждения 3.8 мы покажем, что любые две точки из одной компоненты множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$ можно соединить ломаной.

Определение 3.10. Пусть A и B — два произвольных непустых подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, тогда *расстоянием* $\rho(A,B)$ *между* A *и* B назовем величину $\inf\bigl\{|ab| : a \in A,\ b \in B\bigr\}$, где, как обычно, $|ab|$ обозначает длину отрезка, соединяющего точки a и b. В частности, так определяется *расстояние от точки* a *до множества* B, а именно, оно равно $\rho\bigl(\{a\}, B\bigr)$.

Ясно, что для одноточечных подмножеств $A = \{a\}$ и $B = \{b\}$ имеем $\rho(A,B) = |ab|$.

Замечание 3.11. Заметим, что определенная только что функция на непустых подмножествах $\mathbb{R}^n$ не является метрикой. В самом деле, хотя она симметрична, т.е. $\rho(A,B) = \rho(B,A)$, остальные аксиомы не выполняются. Например, существуют непересекающиеся подмножества $A, B \subset \mathbb{R}^n$, для которых $\rho(A,B) = 0$ (приведите пример таких подмножеств). Кроме того, неравенство треугольника выполняется не для всех A, B, C: например, для подмножеств прямой $A = [0,1]$, $B = [1,2]$ и $C = [2,3]$ имеем $1 = \rho(A,C) \not\leq 0 + 0 = \rho(A,B) + \rho(B,C)$.

Лемма 3.12. *Расстояние между двумя компактными подмножествами* $\mathbb{R}^n$ *равно* 0 *тогда и только тогда, когда они пересекаются.*

Доказательство. Докажем нетривиальную часть леммы, а именно, что расстояние между непересекающимися компактными подмножествами A и B положительно. Функция $\rho(a,b) = |ab|$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ непрерывна на $\mathbb{R}^{2n}$. Ее ограничение на компакт $A \times B \subset \mathbb{R}^{2n}$ также непрерывно. Поэтому, в силу следствия 2.112, функция $\rho(a,b)$ принимает на $A \times B$ свое наименьшее значение в некоторой точке (a,b). Так как множества A и B пересекаются, то $a \neq b$, поэтому $\rho(a,b) = |ab| = \rho(A,B) > 0$, что и требовалось. $\square$

Следствие 3.13. *Расстояние между двумя ломаными в* $\mathbb{R}^n$ *равно* 0 *тогда и только тогда, когда ломаные пересекаются.*

Доказательство. Вытекает из леммы 3.12, поскольку каждая ломаная представляет собой компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$. $\square$

План доказательства теоремы для ломаных.

(1) Для каждой точки P ломаной L построим такую круговую окрестность $U(P)$, которая пересекается только с теми ребрами ломаной L, которые содержат точку P. Покажем, что ломаная L делит $U(P)$ на две компоненты линейной связности.

(2) Покажем, что любую точку Q из $\mathbb{R}^2 \setminus L$ можно соединить с некоторой точкой из $U(A_1) \setminus L$ ломаной, целиком лежащей в $\mathbb{R}^2 \setminus L$. Отсюда будет следовать, что множество $\mathbb{R}^2 \setminus L$ состоит не более чем из двух компонент линейной связности.

(3) Наконец, мы докажем, что L разбивает плоскость не менее чем на две компоненты. Для этого мы построим на $\mathbb{R}^2 \setminus L$ локально постоянную

функцию, принимающую два разных значения. Так как локально постоянная функция постоянна на компонентах линейной связности, то точки, в которых эта функция принимает разные значения, лежат в разных компонентах.

Перейдем к реализации плана.

Реализация пункта (1)

Пусть P — произвольная точка ломаной L. Положим

$$r(P) = \frac{1}{2}\min\bigl\{|PA_i|, |Pe_j| : A_i \neq P,\ e_j \not\ni P\bigr\}.$$

Заметим, что $r(P) > 0$ как минимум конечного числа положительных величин.

Положим $U(P) = U_{r(P)}(P)$. Тогда $U(P) \cap L$ — это пара радиусов круга $U(P)$, причем, если P — внутренняя точка некоторого ребра ломаной, то эти два радиуса образуют диаметр.

Справедлива следующая почти очевидная лемма, см. пример 2.97.

Лемма 3.14. *Ломаная L разбивает окрестность $U(P)$ каждой точки $P \in L$ на две компоненты линейной связности.*

Реализация пункта (2)

Положим $U(L) = \cup_{P\in L} U(P)$. Заметим, что $U(L)$ — открытое подмножество, содержащее L.

Лемма 3.15. *Любая точка X из множества $U(L) \setminus L$ может быть соединена с некоторой точкой из $U(A_1) \setminus L$ некоторой простой ломаной, лежащей внутри $U(L) \setminus L$.*

Доказательство. Напомним, что ломаная L представляет собой компактное подмножество плоскости. Поэтому из семейства $\bigl\{U(P)\bigr\}_{P\in L}$ открытых кругов, составляющих $U(L)$ и образующих открытое покрытие компакта L, можно выбрать конечное подпокрытие $\bigl\{U(P_i)\bigr\}_{i=1}^{k}$. Для удобства добавим к этому покрытию все круги $U(A_i)$ с центрами в вершинах ломаной (переобозначив их центры через P_j). Без ограничения общности будем предполагать, что точки P_i занумерованы согласовано с обходом L.

Так как круг с центром в P_i пересекает только звенья, содержащие точку P_i, то круги с центрами в соседних (вдоль ломаной) точках пересекаются. Каждое такое пересечение — лунка. Высота лунки — расстояние между точками пересечения соответствующих окружностей. Таких лунок — конечное число, поэтому минимум h высот лунок положителен. Если две лунки порождены окрестностями последовательных точек P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, лежащих на одном звене ломаной, то каждая из двух прямых, параллельных этому звену и отстоящих от него на расстояние $h/4$, пересекает обе лунки, и любой отрезок такой прямой с концевыми точками в разных лунках лежит в $U(L) \setminus L$. Назовем построенные отрезки *хорошими.*

Далее, пусть лунка Λ порождена окрестностями последовательных точек P_{i-1}, P_i, причем P_i — вершина ломаной. Обозначим через b_i прямую, делящую пополам угол ломаной L с вершиной P_i. Тогда для каждой точки $X \in \Lambda$ и каждой точки $Y \in b_i \cap \big(U(P_i) \setminus L\big)$, лежащей в той же компоненте множества $U(P_i) \setminus L$, что и X, отрезок $[X, Y]$ лежит в $U(P_i) \setminus L$. Назовем построенные отрезки *хорошими.*

Итак, пусть $X \in U(L) \setminus L$. Тогда $X \in U(P_i)$ для некоторой точки P_i. Если P_i — вершина, то соединим X с какой-нибудь точкой $Y \in b_i \cap \big(U(P_i) \setminus L\big)$, лежащей в той же компоненте множества $U(P_i) \setminus L$, что и X. Заметим, что отрезок $[X, Y]$ лежит в $U(P_i) \setminus L$. Иначе рассмотрим проходящий через P_i перпендикуляр l_i к содержащему P_i звену ломаной L и соединим X с точкой $Y \in l_i$, такой, что $|YP_i| = h/4$, и точка Y лежит в той же компоненте $U(P_i) \setminus L$, что и X, а значит отрезок $[X, Y]$ лежит в $U(L) \setminus L$. Достроим отрезок $[X, Y]$ до искомой простой ломаной, последовательно добавляя хорошие отрезки. $\square$

Пусть теперь Q — произвольная точка из $\mathbb{R}^2 \setminus L$. Соединим Q отрезком с произвольной точкой R ломаной L. Отрезок $[Q, R]$ пересекается с ломаной L по конечному набору точек и отрезков. Пусть P — ближайшая к Q точка из этого пересечения (Проверьте, что Q существует). Окрестность $U(P)$ пересекается с отрезком $[Q, P]$ по радиусу. Выберем произвольную точку S внутри этого радиуса. Тогда $S \in U(L)$ и отрезок $[Q, S]$ не пересекается с ломаной L. Используя лемму 3.15, соединим точку S с некоторой точкой из окрестности $U(A_1)$ некоторой ломаной, лежащей в $U(L)$ и пересекающейся с $[Q, S]$ только по S. Объединение этой ломаной с отрезком $[Q, S]$ — ломаная, лежащая в $\mathbb{R}^2 \setminus L$ и соединяющая Q с точкой из $U(A_1)$. Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 3.16. *Любую точку Q из $\mathbb{R}^2 \setminus L$ можно соединить с некоторой точкой из $U(A_1) \setminus L$ ломаной, целиком лежащей в $\mathbb{R}^2 \setminus L$.*

Следствие 3.17. *Множество $\mathbb{R}^2 \setminus L$ состоит не более чем из двух компонент линейной связности.*

Доказательство. Множество $U(A_1) \setminus L$ состоит из двух компонент линейной связности, любая точка из $\mathbb{R}^2 \setminus L$ соединяется в $\mathbb{R}^2 \setminus L$ с некоторой точкой из $U(A_1) \setminus L$, которая лежит в одной из этих двух компонент, откуда и вытекает требуемое. $\square$

Реализация пункта (3)

Покажем теперь, что $\mathbb{R}^2 \setminus L$ состоит не менее чем из двух компонент. Введем на плоскости декартову систему координат Oxy, для которой все вершины ломаной L имеют разные абсциссы (такая система координат существует, так как это условие запрещает лишь конечное число направлений оси Oy). Для каждой точки $P \in \mathbb{R}^2 \setminus L$ рассмотрим луч ℓ_P, выходящий из P и сонаправленный с осью Oy. Пусть e — произвольное ребро ломаной L. Тогда $\ell_P \cap e$ состоит не более чем из одной точки, в частности, $\ell_P \cap L$ представляет собой конечное число точек.

Точку $Q \in \ell_P \cap L$ назовем *существенной*, если выполняется одно из двух условий:

(1) точка Q лежит внутри некоторого ребра ломаной L (в этом случае ребро ломаной разбивается точкой Q на два полуинтервала);

(2) точка Q — вершина ломаной L, и выходящие из Q ребра ломаной L лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, проходящей через ℓ_P.

Положим $\eta(P) = 0$, если число существенных пересечений луча ℓ_P с ломаной L четно (в частности, если луч не пересекает ломаную), и $\eta(P) = 1$ в противном случае.

Лемма 3.18. *Функция η локально постоянна на $\mathbb{R}^2 \setminus L$.*

Доказательство. Покажем, что если Q — точка пересечения ℓ_P и L, то существует окрестность точки P такая, что для любой точки P' из этой окрестности вклад ребер, содержащих точку Q в величину $\eta(P)$ сохраняется. Действительно, возьмем окрестность $V(P)$ величины меньшей, чем минимум из модулей разностей x-координат точки Q и отличных от нее концов содержащих ее ребер и расстояния от P до L. В этом случае, если Q — существенная, то при смещении P внутри $V(P)$ пересечение останется существенным, если же Q — не существенная, то пересечение или исчезнет, или превратиться в два существенных пересечения. В обоих случаях $\eta(P)$ сохраняется. Если же луч ℓ_P не пересекает ломаную, то возьмем окрестность $V(P)$ величины меньшей, чем минимум из модулей разностей x-координат точки P и вершин ломаной. Тогда при смещении P внутри $V(P)$ пересечений не возникнет. $\square$

Применим следствие 2.116, в соответствии с которым η постоянна на каждой компоненте линейной связности. Остается показать, что η принимает два разных значения. Для этого рассмотрим некоторую точку P ломаной, лежащую внутри произвольного ребра ломаной L, и пусть точки A и B лежат в разных компонентах $U(P) \setminus L$ на диаметре, параллельном оси Oy (такие точки можно выбрать, так как по предположению ребра ломаной L не параллельны оси Oy), и пусть y-координата точки B больше, чем y-координата точки A. Тогда P — существенная точка пересечения для луча ℓ_A, и $\eta(B)$ отличается от $\eta(A)$. Последнее означает, что точки A и B лежат в разных компонентах линейной связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$, что и завершает доказательство кусочно-линейной теоремы Жордана (утверждение 3.8).

Замечание 3.19. Из доказательства следует, что окрестность $U(P)$ произвольной точки P простой замкнутой ломаной L, построенная выше, разбивается ломаной на две компоненты связности, которые лежат в разных компонентах связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$.

3.3 Случай простой незамкнутой ломаной

Случай незамкнутой простой ломаной несколько проще и может быть получен несложной модификацией первых двух шагов доказательства.

Утверждение 3.20. *Если L — незамкнутая простая ломаная, то множество $\mathbb{R}^2 \setminus L$ линейно связно.*

Доказательство. Пусть $L = A_0 \cdots A_k$ — незамнутая простая ломаная. Заметим, что в этом случае окрестности $U(A_0)$ и $U(A_k)$ не разбиваются ломаной L, то есть множество $U(A_0) \setminus L$ линейно связно. Повторяя приведенные выше рассуждения, для произвольной точки Q из $\mathbb{R}^2 \setminus L$ построим ломаную, лежащую в $\mathbb{R}^2 \setminus L$ и соединяющую Q с некоторой точкой из множества $U(A_0) \setminus L$ и воспользуемся его линейной связностью. □

3.4 Следствия про четыре точки и непланарность графов K_5 и $K_{3,3}$

Нам понадобится следующее утверждение, которое вытекает из кусочно-линейной теоремы Жордана и является весьма частным случаем так называемой леммы о перегородках.

Лемма 3.21. *Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — простая замкнутая ломаная, и A, B, C, D — различные ее точки, расположенные на ней именно в этом порядке. Пусть точки A и C соединены ломаной P_1, точки B и D соединены ломаной P_2, причем внутренности ломаных P_1 и P_2 лежат в одной и той же компоненте линейной связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$. Тогда ломаные P_1 и P_2 пересекаются.*

Доказательство. Рассмотрим окрестности $U(A)$ и $U(C)$ точек A и C, построенные выше и, если нужно, уменьшим их так, чтобы они не пересекали ломаную P_2. Обозначим через A_1 и C_1 точки пересечения ломаной P_1 с граничными окружностями окрестностей $U(A)$ и $U(C)$ соответственно. Точки A_1 и C_1 лежат в одной и той же компоненте линейной связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$, и эта та компонента, в которой лежат обе ломаные P_1 и P_2. Фиксируем также точки $A_2 \in U(A)$ и $C_2 \in U(C)$, лежащие в другой компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$. Отметим, что A_2, C_2 лежат в той компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$, которая не содержит ломаных P_1 и P_2.

Точки B и D разбивают ломаную L на две компоненты, которые мы обозначим через L_1 и L_2. Пусть $C \in L_1$ для определенности. Рассмотрим простую замкнутую ломаную $L_1 \cup P_2$. Она тоже разбивает плоскость на две компоненты линейной связности. Заметим, что

- Точки A_2 и C_2 лежат в одной компоненте по отношению к $L_1 \cup P_2$, так как эти точки лежат в одной компоненте по отношению к L, причем в той, которая не содержит ломаных P_1 и P_2.
- Точки C_1 и C_2, а значит и C_1 и A_2 лежат в разных компонентах относительно $L_1 \cup P_2$, так как функция η принимает на C_1 и C_2 разные значения.
- Так как $U(A)$ не пересекает ни P_2, ни L_1, то точки A_1 и A_2 лежат в одной компоненте относительно $L_1 \cup P_2$, а значит C_1 и A_1 — в разных.

Из последнего вытекает, что часть ломаной P_1, ограниченная точками A_1 и C_1, пересекает ломаную $L_1 \cup P_2$, и значит ломаную P_2, что и требовалось.

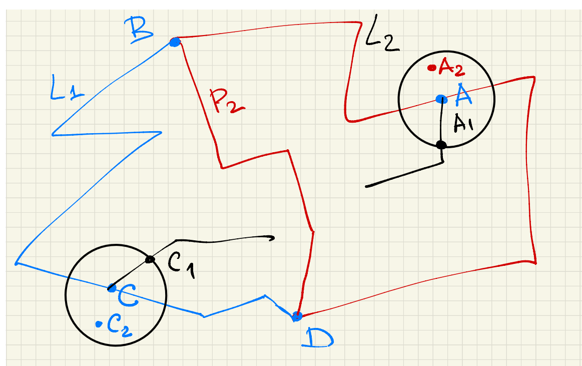

Рис. 3.1: Четыре точки, две перегородки.

□

Замечание 3.22. Утверждение 3.21 может оказаться неверным, если заменить плоскость на другую поверхность. Приведите примеры на листе Мебиуса и на торе.

Напомним, что через K_n обычно обозначается *полный граф с n вершинами*, то есть простой граф с n вершинами, любые две вершины которого смежны. Далее, через K_{n_1,n_2} обычно обозначается *полный двудольный граф*, а именно, простой граф, множество вершин которого разбито на два подмножества V_1 и V_2, называемые *долями*, где $|V_i| = n_i$, $i = 1, 2$, при этом любые две вершины из разных подмножеств соединены ребром, и других ребер нет.

Напомним, что для каждого графа $G = (V, E, \partial)$ выше было построено топологическое пространство X_G, названное топологическим графом.

Напоминание. Пусть $G = (V, E, \partial)$ — некоторый граф. Используем операцию склеивания точек для построения по графу G топологического пространства X_G, которое будем называть *топологическим графом*, соответствующим G. Каждому ребру $e \in E$ графа G поставим в соответствие отрезок $[a_e, b_e]$, будем считать, что отрезки попарно не пересекаются, тогда их объединение $\sqcup_{e\in E}[a_e, b_e]$ представляет собой топологическое пространство. Добавим к полученному пространству множество вершин графа, каждая из которых рассматривается как одноточечное пространство: $Y = V \cup \big(\sqcup_{e\in E} [a_e, b_e]\big)$. Склеим теперь некоторые точки из Y так. Для каждого $e \in E$, если $\partial^{-1}(e)$ состоит из одной вершины, то склеим концы отрезка $[a_e, b_e]$ с этой вершиной, а если $\partial^{-1}(e)$ состоит из двух вершин, то склеим один конец отрезка $[a_e, b_e]$ с одной из них, а второй — со второй.

Вложением графа G в топологическое пространство Y называется непрерывное взаимно-однозначное с образом отображение $f\colon X_G \to Y$. Отметим, что при таком отображении вершины графа переходят в точки топологического пространства Y, а ребрам соответствуют простые непрерывные кривые, которые пересекаются только по точкам, соответствующим общим вершинам.

Упражнение 3.2. Покажите, что любой граф можно вложить в трехмерное пространство.

Граф называется *планарным*, если существует его вложение в плоскость.

Следствие 3.23. *Граф $K_{3,3}$ нельзя вложить в плоскость так, чтобы непрерывные кривые, соответствующие ребрам, были ломаными.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть множество вершин графа разбито на доли так: $\{v_1, v_3, v_5\}$ и $\{v_2, v_4, v_6\}$. Тогда образы ребер v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_1 образуют простую замкнутую ломаную L, на которой последовательно расположены вершины $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$. Ломаная L разбивает плоскость на две компоненты. Но две из трех ломаных, соответствующих оставшимся трем ребрам v_1v_4, v_2v_5, v_3v_6 лежат в одной из этих компонент и пересекаются по лемме 3.21, противоречие. ☐

Упражнение 3.3. Покажите, что граф $K_{3,3}$ можно вложить в тор.

Упражнение 3.4. Покажите, что граф K_5 нельзя вложить в плоскость так, чтобы непрерывные кривые, соответствующие ребрам, были ломаными.

Оказывается, вложимость графа в плоскость эквивалентна его вложимости с ребрами-ломаными.

Утверждение 3.24. *Если граф вложим в плоскость, то он вложим в плоскость так, что все непрерывные кривые, соответствующие ребрам, являются ломаными.*

Доказательство. Пусть $f\colon X_G \to \mathbb{R}^2$ — вложение графа $G = (V, E, \partial)$ в плоскость, и обозначим через γ_e непрерывную кривую, соответствующую ребру e (то есть g_e — это ограничение отображения f на соотвествующий отрезок). Отождествим вершины с их f-образами, и для каждой вершины $v \in V$ положим

$$r(v) = \min\left\{|vv'|, |v\gamma_e| : v' \neq v,\ e \not\ni v\right\},$$

и пусть $r = 1/2 \min\left\{r(v) : v \in V\right\}$. Построим круговые окрестности $U(v)$ радиуса r для всех вершин $v \in V$. Заметим, что построенные окрестности попарно не пересекаются и, более того, окрестность $U(v)$ не пересекается с кривыми γ_e, соответствующими не инцидентным v ребрам.

Предположим сначала, что граф не имеет петель, и пусть $e = v_i v_j$ — любое его ребро, а $\gamma_e\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ — соответствующая непрерывная кривая, $\gamma_e(a) = v_i$, $\gamma_e(b) = v_j$. Положим

$$t_a = \sup\left\{t \in [a,b] : |\gamma(t)v_i| = r\right\}, \qquad t_b = \inf\left\{t \in [a,b] : |\gamma(t)v_j| = r\right\}.$$

Обозначим через δ_e ограничение кривой γ_e на отрезок $[t_a, t_b]$. Это — вложенная кривая, соединяющая точки $\gamma(t_a)$ и $\gamma(t_b)$, лежащие на границе кругов $U_r(v_i)$ и $U_r(v_j)$ соответственно, и лежащая вне этих кругов и, более того, вне всех кругов $U_r(v)$, $v \in V$. Теперь мы поступим следующим образом.

- заменим начальный (то есть от $\gamma_e(a) = v_i$ до $\gamma_e(t_a)$) и конечный (то есть от $\gamma_e(t_b)$ до $\gamma_e(b) = v_j$) фрагменты кривых γ_e на радиусы, соединяющие центр окрестности $U(v)$ с концом соответствующей кривой δ_e, лежащим на границе $U(v)$;

- заменим каждую кривую δ_e на простую ломаную, соединяющую те же точки что и δ_e так, чтобы ломаные, соответствующие разным ребрам не пересекались.

Для реализации второго пункта нужно выбрать ε меньше чем величина $1/2 \min\left\{r, |\delta_e \delta_{e'}|\right\}$, где минимум берется по всем парам различных ребер e, e'. Тогда окрестности $U_\varepsilon(\delta_e)$ попарно не пересекаются и пересекают круги $U_r(v)$, только если v инцидентно e. Остается заменить кривую δ_e, $e = vv'$ на ломаную, соединяющую те же точки, лежащую в окрестности $U_\varepsilon(\delta_e)$ и не заходящую внутрь кругов $U_r(v)$ и $U_r(v')$. Покажем, что это можно сделать.

Лемма 3.25. *Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная кривая, образ которой лежит в открытом множестве U. Тогда существует ломаная $L \subset U$, соединяющая точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$.*

Доказательство. Пусть $T \subset [a,b]$ состоит из всех $t \in [a,b]$ для которых существует ломаная $L_t \subset U$, соединяющая $\gamma(a)$ и $\gamma(t)$. Множество T не пусто и содержит некоторое $t > a$ (Проверьте!). Положим $t_0 = \sup T$. Пусть $t_0 < b$. Точка $P = \gamma(t_0)$ лежит в открытом множестве U, поэтому существует открытый шар $U_\varepsilon(P) \subset U$. Так как γ непрерывно, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\gamma\big((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)\big) \subset U$ и $t_0 + \varepsilon < b$. Так как t_0 — точная верхняя грань, то существует $\tau \in (t_0 - \varepsilon, t_0] \cap T$, то есть существует ломаная L_τ. Добавим к ломаной L_τ отрезок $\big[\gamma(\tau), \gamma(t_0 + \varepsilon/2)\big]$. Получим ломаную $L_{t_0+\varepsilon/2}$, что противоречит выбору t_0. Лемма доказана. □

Остается добавить петли. Реализуем сначала граф без петель. Напомним, что у каждой вершины есть круговая окрестность, пересечение которой с реализацией графа состоит из нескольких радиусов. Но тогда петли можно реализовать внутри этих окрестностей, поместив между радиусами. Утверждение доказано. □

Следствие 3.26. *Графы $K_{3,3}$ и K_5 не являются планарными.*

3.5 Теорема Жордана: компонент не меньше двух

Используем теперь непланарность графа $K_{3,3}$ для доказательства следующего утверждения.

Утверждение 3.27. *Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ — непрерывная замкнутая простая кривая, и Γ — образ отображения γ. Тогда множество $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ не является линейно связным.*

Доказательство. Пусть на плоскости фиксированы стандартные координаты (x, y), тогда кривая γ задается парой координатных функций: $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. Так как $x(t)$ — непрерывная на отрезке функция, то она принимает на $[a, b]$ наименьшее и наибольшее значения, которые мы обозначим через x_m и x_M соответственно. Последнее означает, что образ Γ кривой γ лежит в полосе между двумя вертикальными (то есть параллельными Oy) прямыми ℓ_m, на которой $x = x_m$, и ℓ_M, на которой $x = x_M$. (Такие прямые называются *опорными*). Обозначим через A_m и A_M точки пересечения Γ с прямыми ℓ_m и ℓ_M соответственно, имеющие максимальные y-координаты. (Точка A_m действительно существует, так как $\Gamma \cap \ell_m$ — замкнутое ограниченное подмножество прямой, а значит оно содержит свою точную верхнюю грань. Аналогично проверяется существование точки A_M.) Точки A_m и A_M делят кривую Γ на две дуги.

Проведем еще одну вертикальную прямую $x = (x_m + x_M)/2$ и обозначим ее через ℓ. Эта прямая также пересекает кривую Γ. Пусть P — точка пересечения ℓ с Γ с наименьшей y-координатой. Назовем *нижней* ту дугу кривой Γ, ограниченную точками A_m и A_M, которая содержит P. Обозначим ее через Γ_1. Вторую дугу обозначим через Γ_2 и назовем *верхней.* Обе дуги Γ_1 и Γ_2 представляют собой образы простых непрерывных кривых, соединяющих точки A_m и A_M, поэтому каждая из них пересекает прямую ℓ. Пусть B_2 — точка из пересечения $\ell \cap \Gamma_2$ с наименьшей y-координатой (отметим, что y-координата точки B_2 больше, чем координата точки P). Теперь на пересечении $\ell \cap \Gamma_1$, среди точек с y-координатами меньшими чем у B_2 выберем точку B_1 с наибольшей координатой. Тогда отрезок $[B_1, B_2]$ пересекает Γ только по своим концам. Обозначим через A середину отрезка $[B_1, B_2]$.

Наконец, так как кривая Γ ограничена, существует горизонтальная прямая $y = y_0$ такая, что y_0 больше наибольшего значения координатной функ-

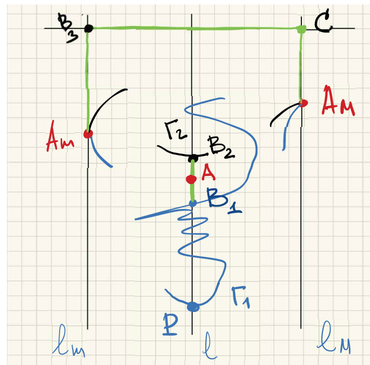

Рис. 3.2: Теоорема Жордана: строим граф $K_{3,3}$.

ции $y(t)$ кривой γ. Тогда эта прямая не пересекает Γ, но пересекает прямые ℓ_m и ℓ_M по точкам B_3 и C соответственно. Кроме того, лучи $[A_m, B_3)$ и $[A_M, C)$ пересекают Γ только по своим начальным точкам A_m и A_M.

Покажем, что точки A и B_3 лежат в разных компонентах линейной связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Действительно, если бы эти точки можно было бы соединить непрерывной кривой δ, не пересекающей Γ, то мы получили бы вложение в плоскость графа $K_{3,3}$ с множеством вершин, состоящим из двух долей $\{A_m, A, A_M\}$ и $\{B_1, B_2, B_3\}$, и следующими ребрами: четыре дуги A_mB_1, A_mB_2, A_MB_1, A_MB_2 кривой Γ, три отрезка AB_1, AB_2, A_mB_3, двузвенная ломаная B_3CA_M и кривая δ. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Для завершения доказательства теоремы Жордана остается проверить, что компонент ровно две. В двух следующих разделах мы приведем схему доказательства, не вдаваясь в технические подробности.

3.6 Случай простой незамкнутой кривой

Случай незамкнутой простой непрерывной кривой может быть получен из теоремы Жордана для ломаных с помощью обычных приемов математического анализа (впрочем потребуется определенная изобретательность). Мы приводим здесь эскиз доказательства, поскольку само утверждение потребуется нам для завершения доказательства теоремы Жордана, а именно, для проверки того, что компонент ровно две.

Нам понадобится следующее следствие.

Следствие 3.28. *Пусть $f\colon X_G \to \mathbb{R}^2$ — вложение конечного графа G в плоскость такое, что все его ребра — ломаные, и пусть $\Gamma = f(X_G)$ — образ графа G. Тогда среди компонент линейной связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ имеется ровно одна неограниченная компонента.*

Упражнение 3.5. Докажите следствие 3.28.

Утверждение 3.29. *Если γ — незамкнутая простая непрерывная кривая, и Γ — образ отображения γ, то множество $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ линейно связно.*

Доказательство. Пусть x, y — произвольные точки из $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Мы построим плоский граф H такой, что точки x, y лежат в единственной неограниченной компоненте A множества $\mathbb{R}^2 \setminus H$, а кривая Γ — не пересекается с A. Тогда кривая, соединяющая x с y в A, не будет пересекать Γ, что и требовалось.

Перейдем к построению графа H. Так как Γ — компакт, выберем положительное d такое, что расстояния $|x\Gamma|$ и $|y\Gamma|$ больше чем $3d$. Воспользовавшись равномерной непрерывностью отображения γ (непрерывное отображение отрезка равномерно непрерывно по теореме Кантора), разобьем кривую Γ последовательными точками $p_1, \ldots, p_{k+1}$ на дуги Γ_i, где Γ_i ограничена точками p_i, p_{i+1}, так, что расстояние от p_i до любой точки дуги Γ_i меньше d. Положим $d' = \min\left\{|\Gamma_i \Gamma_j| : |i-j| > 1\right\}$. Заметим, что $d' \leq d$. Теперь разобьем каждую дугу Γ_i на меньшие дуги Γ_{ij}, ограниченные точками p_{ij} и p_{ij+1} так, чтобы расстояние от p_{ij} до каждой точки дуги Γ_{ij} меньше чем $d'/4$. Граф H_i — объединение одинаковых квадратов, стороны которых равны $d'/2$, параллельны координатным осям, а центры расположены в точках p_{ij}. В силу выбора d' графы H_i и H_j пересекаются только при $|i-j| \leq 1$. Положим $H = \cup H_i$.

Лемма 3.30. *Точки x, y лежат в единственной неограниченной области, ограниченной графом H.*

Доказательство. Идея доказательства в том, что ограниченные циклы графа H — маленькие, а именно, каждый такой цикл лежит в объединении двух соседних графов $H_i \cup H_{i+1}$. Диаметр каждого графа H_i не превосходит $d + d'/2$, диаметр $H_i \cup H_{i+1}$ не превосходит $2d + d' \leq 3d$, а расстояние от x до Γ больше чем $3d$, противоречие. □

Утверждение доказано. □

3.7 Теорема Жордана: компонент ровно две

Мы используем утверждение 3.29 для завершения доказательства теоремы Жордана.

Лемма 3.31. *Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ — образ простой непрерывной замкнутой кривой, и A — компонента линейной связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Тогда каждая точка кривой Γ принадлежит границе множества A.*

Доказательство. Пусть $P \in \Gamma$ — произвольная точка кривой Γ, точка a лежит в A, а точка b — в другой компоненте линейной связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Выбросим из Γ произвольную, сколь угодно малую дугу δ, содержащую P, тогда существует непрерывная кривая, соединяющая точки a и b

и проходящая через дугу δ. У этой кривой есть отрезок, целиком лежащий внутри A, за исключением той его концевой точки, которая лежит на дуге δ. Поэтому граница множества A содержит всюду плотное подмножество кривой Γ, а значит и всю кривую Γ (оба множества, очевидно, замкнуты). $\square$

Итак, пусть множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ состоит из трех (или более) компонент линейной связности. В компонентах A_i, $i = 1, 2, 3$, выберем по точке x_i, и пусть δ_i, $i = 1, 2, 3$, — попарно не пересекающиеся дуги кривой Γ. В каждой компоненте A_i соединим точку x_i с серединами дуг δ_j, $j = 1, 2, 3$, кривыми γ_{ij}. При этом можно добиться, чтобы кривые γ_{ij} не пересекались. В результате мы получим вложение графа $K_{3,3}$ в плоскость, противоречие.

Тем самым, теорема Жордана полностью доказана.

Литература к главе 3

[1] Прасолов В.В., *Теорема Жодана*, Матем. обр., 1999, выпуск 2–3 (9–10), стр. 95–101.

[2] M. E. C. Jordan, *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, Gauthier–Villars, Paris, 1887. Vol. 3, pp. 587–594.

[3] K. Kuratowski, *Sur le problème des courbes gauches en Topologie*, Fund. Math., **15** (1930) pp. 271–283.

[4] Прасолов В.В., *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*, 2004, изд-во МЦНМО.

[5] Вольперт А.И., *Элементарное доказательство теоремы Жордана.* УМН, 1950, т. 5, вып. 5(39), с. 168–172.

[6] Филиппов А.Ф., *Элементарное доказательство теоремы Жордана.* УМН, 1950, т. 5, вып. 5(39), с. 173–176.

[7] Парамонов П.В., *Теорема Жордана*, http://www.math.msu.su/tffa/lectures/JORDANThlec2012.pdf

Упражнения к главе 3

Упражнение 3.1. Проверьте, что теорема Жордана для ломаных (утверждение 3.8) является частным случаем общей теоремы Жордана 3.2. (Для этого достаточно по данной ломаной L построить непрерывную кривую, образом которой служит L).

Упражнение 3.2.

(1) Приведите пример непересекающихся подмножеств на прямой, расстояние между которыми равно нулю.

(2) Приведите пример непересекающихся замкнутых подмножеств прямой, расстояние между которыми равно нулю.

(3) Существуют ли два замкнутых непересекающихся подмножества окружности, находящиеся на нулевом расстоянии?

Упражнение 3.3. Пусть A — некоторое подмножество плоскости. Рассмотрим функцию $f(x) = \inf\bigl\{|xy| : y \in A\bigr\}$ (расстояние от x до A). Докажите, что f непрерывна.

Упражнение 3.4. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции, заданные на топологическом пространстве X. Докажите, что функция $h(x) = \max\bigl\{f(x), g(x)\bigr\}$ также непрерывна.

Упражнение 3.5. Докажите, не используя теорему Жордана, что квадрат (стороны квадрата) разбивает плоскость на 2 компоненты.

Упражнение 3.6. Докажите, не используя теорему Жордана, что треугольник (замкнутая трехзвенная ломаная) разбивает плоскость на 2 компоненты.

Упражнение 3.7. Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутая ломаная без самопересечений такая, что для каждого ее ребра ломаная L лежит в замкнутой полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через это ребро (такие ломаные иногда называют *выпуклыми*). Не используя теорему Жордана, докажите, что L разбивает плоскость на 2 компоненты.

Упражнение 3.8. Докажите, что открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ линейно связно тогда и только тогда, когда любые две его точки можно соединить ломаной.

Упражнение 3.9. Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — незамкнутая ломаная без самопересечений. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε-окрестность $U_\varepsilon(L)$ ломаной L. Пусть P и Q — произвольные точки из $U_\varepsilon(L) \setminus L$. Покажите, что их можно соединить ломаной, не пересекающей L и лежащей в $U_\varepsilon(L)$.

Упражнение 3.10. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из некоторого круга $U_r(A)$ выбрасыванием трех различных его радиусов. Докажите, что X состоит из трех компонент.

Упражнение 3.11. Пусть OA, OB и OC — три отрезка, причем любые два из них имеют только одну общую точку O. Докажите, что объединение этих отрезков не разбивает плоскость, т.е. что $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (OA \cup OB \cup OC)$ линейно связно.

Упражнение 3.12. Покажите, что любой граф можно вложить в трехмерное пространство.

Упражнение 3.13. Покажите, что граф $K_{3,3}$ можно вложить в тор.

Упражнение 3.14. Покажите, что граф K_5 нельзя вложить в плоскость так, чтобы непрерывные кривые, соответствующие ребрам, были ломаными. Можно ли вложить его в тор?

Упражнение 3.15. Пусть $f\colon X_G \to \mathbb{R}^2$ — вложение конечного графа G в плоскость такое, что все его ребра — ломаные, и пусть $\Gamma = f(X_G)$ — образ графа G. Докажите, что среди компонент линейной связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ имеется ровно одна неограниченная компонента.

Упражнение 3.16. Пусть L_1 и L_2 — незамкнутые ломаные без самопересечений, лежащие на плоскости $\mathbb{R}^2$ и не имеющие общих точек. Докажите, что $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (L_1 \cup L_2)$ линейно связно.

Упражнение 3.17. Рассмотрим конечную последовательность

$$[A_1, B_1],\ [A_2, B_2], \ldots, [A_m, B_m]$$

отрезков $[A_i, B_i] \subset \mathbb{R}^2$ и положим $X_k = \cup_{i=1}^{k} [A_i, B_i]$. Предположим, что для каждого $k = 2, \ldots, m$ выполняется или $X_{k-1} \cap [A_k, B_k] = \emptyset$, или $X_{k-1} \cap [A_k, B_k] = \{A_k\}$. Докажите, что любые две точки из каждого множества $\Omega_k = \mathbb{R}^2 \setminus X_k$ можно соединить ломаной, лежащей в Ω_k. В частности, каждое множество Ω_k — линейно связно.