Упражнения к главе 1

Упражнение 1.1. Покажите, что в любой компании имеется не менее двух человек, у которых количества знакомых одинаковы.

Упражнение 1.2.

(1) Города страны соединены авиалиниями. Из столицы выходит 21 линия, из города Дальний — одна, а из каждого из остальных городов — по двенадцать линий. Докажите, что из столицы можно долететь до города Дальний (возможно, с пересадками).

(2) Покажите, что если в графе имеется ровно две вершины нечетной степени, то их можно соединить маршрутом.

(3) Турист, который приехал в Москву на поезде, весь день гулял по городу. Поужинав на Манежной площади, он решил вернуться на вокзал, следуя по тем улицам, которые уже проходил нечетное число раз. Докажите, что такое возвращение возможно.

Упражнение 1.3. В компании, состоящей из пяти человек, среди любых трех человек найдутся двое знакомых и двое незнакомых друг с другом. Докажите, что компанию можно рассадить за круглым столом так, чтобы по обе стороны от каждого человека сидели его знакомые.

Упражнение 1.4. Известно, что в компании, состоящей не менее чем из четырех человек, каждый человек знаком не менее, чем с половиной присутствующих. Докажите, что можно выбрать из компании четырех человек и рассадить их за круглым столом так, что каждый из них будет сидеть рядом со своими знакомыми.

Упражнение 1.5.

(1) В парке “Лотос” невозможно найти такой маршрут для прогулок по его дорожкам, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую дорожку парка содержит не более раза. Докажите, что некоторые дорожки парка приводят в тупик.

(2) Вершина степени 1 называется *висячей*. Связный граф без циклов называется *деревом*. Докажите, что в каждом дереве, содержащем хотя бы одно ребро, имеется висячая вершина.

Упражнение 1.6. Администрация парка “Лотос” решила провести реконструкцию освещения парка. По новому проекту каждый перекресток и тупик должен будет освещаться четырьмя светильниками, а алея, соединяющая два перекрестка или перекресток и тупик — шестью. Сколько светильников будет установлено, если в парке 18 перекрестков и тупиков.

Упражнение 1.7. *Насыщенным углеводородом* называется соединение углерода C, имеющего валентность 4, и водорода H, имеющего валентность

1, в котором при заданном числе атомов углерода содержится наибольшее число атомов водорода. Найдите формулу насыщенного углеводорода, содержащего n атомов углерода.

Упражнение 1.8. Докажите, что если в связном графе существует маршрут, проходящий через каждое ребро в точности один раз, то либо этот маршрут является эйлеровым циклом, либо в графе существуют в точности две вершины нечетной степени, остальные вершины имеют четную степень, а маршрут начинается и заканчивается в вершинах с нечетными степенями.

Упражнение 1.9. На пир при дворе короля Артура собралось четное число рыцарей, которые либо дружат, либо враждуют. Оказалось, что у каждого из рыцарей друзей больше, чем врагов. Доказать, что волшебник Мерлин может так рассадить рыцарей за круглым столом, что справа и слева от каждого из них будет сидеть друг.

Упражнение 1.10. Пусть в простом графе $G = (V, E)$ степень каждой вершины не меньше чем $|V|/2$. Докажите, что граф G — связный.

Удобно задавать простые графы с помощью матриц. Пусть $G = (V, E)$ — простой граф, и предположим, что множество вершин занумеровано, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. *Матрицей смежности графа* G называется квадратная матрица $A_G = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, где $a_{ij} = 1$, если и только если $v_i v_j \in E$, а иначе $a_{ij} = 0$.

Упражнение 1.11. Пусть $G = (V, E)$ — простой граф, $A_G = (a_{ij})$ — его матрица смежности (для некоторой нумерации вершин). Проверьте, что $A = A^T$, $\sum_i a_{ij} = \deg v_j$, и что ранг матрицы A_G не зависит от нумерации вершин.

Далее, *матрицей Кирхгофа графа* G называется квадратная матрица $B_G = (b_{ij})_{i,j=1}^n$, где $b_{ij} = -1$, если и только если $v_i v_j \in E$, $b_{ii} = \deg v_i$, а иначе $b_{ij} = 0$.

Упражнение 1.12. Пусть $G = (V, E)$ — простой граф, $B_G = (b_{ij})$ — его матрица Кирхгофа (для некоторой нумерации вершин). Проверьте, что $B = B^T$, $\sum_i b_{ij} = 0$, и что ранг матрицы B_G не зависит от нумерации вершин.

Пусть теперь фиксирована также некоторая нумерация множества E, $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Определим прямоугольную матрицу $C_G = (c_{ij})$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, положив $c_{ij} = 1$, если и только если вершина v_i и ребро e_j инцидентны, и $c_{ij} = 0$ в противном случае. Матрица C называется *матрицей инцидентности*. Иногда удобно заменить в каждом столбце матрицы C одну единицу на минус единицу. Полученная матрица называется *матрицей инцидентности с ориентацией* (можно считать, что каждое ребро ориентировано от вершины, соответствующей $+1$, к вершине, соответствующей -1.)

Упражнение 1.13. Пусть $G = (V, E)$ — простой граф, B_G, $C_G = (c_{ij})$, $O = (o_{ij})$ — его матрицы Кирхгофа, инцидентности и инцидентности с некоторой ориентацией. Показать, что $\sum_i c_{ij} = 2$, $\sum_j c_{ij} = \deg v_i$, $\sum_i o_{ij} = 0$. Проверить, что $O_G O_G^T = B_G$.

Упражнение 1.14. Пусть $G = (V, E)$ — простой граф, $|V| = |E|+1$, и пусть O_G — матрица инцидентности графа G с некоторой ориентацией. Показать, что $\operatorname{rk} O_G = |E|$ тогда и только тогда, когда G — дерево, причем, если G — дерево, то любой старший минор матрицы O_G равен ± 1.

Упражнение 1.15. Пусть $G = (V, E)$ — простой граф, и пусть B_G — его матрица Кирхгофа. Показать, что $\operatorname{rk} B_G + 1 = |V|$ тогда и только тогда, когда G — связен.

Упражнение 1.16. Пусть $G = (V, E)$ — простой граф, B_G — его матрица Кирхгофа, и k — число компонент связности. Показать, что $\operatorname{rk} B_G + k = |V|$.

Формула Бине–Коши является обобщением хорошо известного равенства $\det(AB) = \det A \det B$ на случай, когда A и B — прямоугольные матрицы, произведение которых является квадратной матрицей. А именно, пусть A и B — матрицы размером $m \times n$ и $n \times m$ соответственно.

Упражнение 1.17. Проверьте, что, в сделанных обозначениях, если $n < m$, то $\det(AB) = 0$.

Пусть теперь $n > m$, обозначим через $A_{i_1 \cdots i_m}$ определитель $m \times m$ матрицы, порожденной столбцами матрицы A с номерами $i_1, \ldots, i_m$, а через $B^{i_1 \cdots i_m}$ — определитель $m \times m$ матрицы, порожденной строками матрицы B с номерами $i_1, \ldots, i_m$. Тогда

$$\det(AB) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n} A_{i_1 \cdots i_m} B^{i_1 \cdots i_m}.$$

Упражнение 1.18. Проверьте, что если сумма строк симметричной $n \times n$ матрицы равна нулевой строке, то алгебраические дополнения всех ее элементов, т.е. все ее $(n-1) \times (n-1)$ миноры, взятые со знаками, одинаковы.

Упражнение 1.19 (матричная теорема Кирхгофа)**.** Из задач 1.14, 1.18 и формулы Бине–Коши вывести *теорему Кирхгофа*: количество остовных деревьев в связном графе с $n \ge 2$ вершинами равно, с точностью до знака, любому $(n-1) \times (n-1)$ минору его матрицы Кирхгофа.

Упражнение 1.20. Проверить, что в полном графе с n вершинами имеется n^{n-2} остовных дерева.

Упражнение 1.21 (теорема Кэли)**.** Количество деревьев с $n \ge 2$ (занумерованными) вершинами равно n^{n-2}.

Пусть $G = (V, E)$ — связный простой граф с n вершинами, на ребрах которого задана весовая функция ω. Рассмотрим следующий алгоритм построение МОД. Занумеруем ребра графа так, чтобы $\omega(e_i) \leq \omega(e_{i+1})$, сформировав тем самым очередь $\{e_1, \ldots, e_m\}$. Положим $T_0 = (V, \emptyset)$. Пусть T_{k-1} — остовный подграф, построенный на предыдущем шаге. Этот граф представляет собой некоторый лес. Пусть $P_{k-1} = \{V_1, \ldots, V_p\}$ — множества вершин связных компонент этого леса. Возьмем из очереди следующее ребро e. Если вершины ребра e лежат в разных V_i, то $T_k = T_{k-1} \cup e$, и перестроим P_{k-1} в P_k, объединив те два множества V_i, в которых оказались вершины ребра e. Иначе берем из очереди следующее ребро. Алгоритм заканчивает работу, когда будет построен граф T_{n-1}.

Упражнение 1.22. Покажите, что описанный выше алгоритм — это алгоритм Краскала.

Пусть $G = (V, E)$ — связный простой граф с n вершинами, на ребрах которого задана весовая функция ω. Рассмотрим следующий алгоритм построение МОД (так называемый *алгоритм Прима*[3]). Выберем ребро наименьшего веса, обозначим его через $e_1 = \{u, v\}$. Положим $T_1 = \big\{\{u, v\}, \{e_1\}\big\}$. Пусть T_{k-1} — подграф, построенный на предыдущем шаге. Граф T_k получается из T_{k-1} добавлением ребра e_k наименьшего возможного веса среди всех ребер e таких, что $T_{k-1} \cup \{e\}$ является деревом. (Здесь, допуская определенную неаккуратность, под добавлением ребра мы понимаем добавление ребра к множеству ребер и вершин этого ребра к множеству вершин графа). Алгоритм заканчивает работу, когда построен граф T_{n-1}.

Упражнение 1.23. Покажите, что алгоритм Прима корректен, и что результат его работы, то есть граф T_{n-1} — это МОД.

[3]Назван в честь американского математика Роберта Прима (Robert C. Prim). По-видимому, первым этот алгоритм опубликовал чешский математик Войцех Ярник (V. Jarnik) в 1930 году. Отметим, что Ярник также первым сформулировал знаменитую проблему Штейнера о кратчайшем дереве на плоскости (вместе с Кесслером, M. Kössler). Позднее, в связи с бурным развитием вычислительной техники и, как следствие, возросшей востребованностью задачи, алгоритм был многократно переоткрыт, в том числе Примом в 1957 году и Дийкстрой (E.W. Dijkstra) в 1959 году. В англоязычной литературе этот алгоритм называют также алгоритмом Ярника, алгоритмом Прима–Ярника, алгоритмом Прима–Дийкстры или DJP-алгоритмом.