Глава 6

Равновеликость и равносоставленность. Третья проблема Гильберта.

План. Площади и объемы, их инвариантность и аддитивность, разрезание многоугольников, равносоставленные многоугольники, равновеликие многоугольники, теорема Бойяи–Уоллеса–Гервина, разрезание многогранников, равносоставленные многогранники, равновеликие многогранники, третья проблема Гильберта, зависимость на множестве вещественных чисел, аддитивная функция, функция Дена многогранника, инвариант Дена, теорема Дена, тетраэдр Хилла, равнодополняемые многогранники, координатный тетраэдр, решение Третьей проблемы Гильберта, теорема Дена–Сидлера.

Проблемы, обсуждаемые в этой главе, имеют непосредственное отношение к вычислению площадей и объемов. Известное из курса математического анализа определение этих понятий, основанное на предельном переходе, часто приводит к сложным вычислениям, сводящимся фактически к взятию соответствующего интеграла. Однако в некоторых случаях вычисления можно существенно упростить, если воспользоваться следующими соображениями (мы сформулируем их для плоского случая; пространственный случай получается заменой слова «площадь» на слово «объем»): (1) площади равных фигур одинаковы (инвариантность площади); (2) если фигура F представлена в виде объединения конечного числа фигур $F_1, \dots, F_n$, не имеющих общих внутренних точек, то площадь фигуры F равна сумме площадей фигур F_i (аддитивность площади). Таким образом, если для фигур F и G заданы такие представления с помощью фигур $F_1, \dots, F_n$ и $G_1, \dots, G_n$ соответственно, и при каждом i фигуры F_i и G_i равны, то F и G имеют одинаковые площади.

Хорошо известный пример применения изложенной идеи — вычисление площади параллелограмма через площадь прямоугольника, а также площади треугольника через площадь параллелограмма.

Отметим, что для многоугольников F в качестве фигур F_i принято также рассматривать многоугольники. Приведем теперь необходимые формальные определения.

Определение 6.1. Пусть F и $F_1, \dots, F_n$ — многоугольники, для которых выполняются следующие условия:

(1) при каждом i и $j \neq i$ многоугольники F_i и F_j не имеют общих внутренних точек;

(2) $F = \cup_{i=1}^n F_i$.

Тогда говорят, что F *разрезан на многоугольники* F_i или *составлен из многоугольников* F_i.

Определение 6.2. Пусть F и G — два многоугольника. Если F и G можно так разрезать на многоугольники $F_1, \dots, F_n$ и $G_1, \dots, G_n$ соответственно, что при каждом $i = 1, \dots, n$ многоугольники F_i и G_i равны, то F и G называются *равносоставленными*.

Определение 6.3. Многоугольники F и G называются *равновеликими*, если их площади равны.

Как уже отмечалось, равносоставленные многоугольники равновелики. Верно ли обратное? Замечательно, что ответ положительный. Соответствующий результат называется *теоремой Бойяи–Уоллеса–Гервина*.

Теорема 6.4 (Бойяи, Уоллес, Гервин [3])**.** *Два многоугольника равновелики в том и только том случае, когда они равносоставлены.*

Замечание 6.5. Бойяи (Farkas Bolyai) в 1790 году сформулировал проблему (это — отец Яноша Бойяи, Janos Bolyai, одного из первооткрывателей неевклидовой геометрии), Уоллес (William Wallace) решил ее в 1807 году, сам Бойяи дал независимое решение в 1833 году, и, наконец, Гервин (Paul Gerwien), не зная о существовании этих решений, дал свое в 1835 году, см. [1]. Схема доказательства этой теоремы приведена в виде серии упражнений в конце раздела.

Следующий шаг — попробовать обобщить полученные результаты на многогранники. Начнем с соответствующих определений (дословно повторяющих определения 6.1, 6.2 и 6.3 с заменой слов “многоугольник” на “многогранник” и “площадь” на “объем”).

Определение 6.6. Пусть W и $W_1, \dots, W_n$ — многогранники, для которых выполняются следующие условия:

(1) при каждом i и $j \neq i$ многогранники W_i и W_j не имеют общих внутренних точек;

(2) $W = \cup_{i=1}^n W_i$.

Тогда говорят, что W *разрезан на многогранники* W_i или *составлен из многогранников* W_i.

Определение 6.7. Пусть A и B — два многогранника. Если A и B можно так разрезать на многогранники $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_n$ соответственно, что при каждом $i = 1, \ldots, n$ многогранники A_i и B_i равны, то A и B называются *равносоставленными*.

Определение 6.8. Многогранники A и B называются *равновеликими*, если их объемы равны.

Верно ли, что равновеликие многогранники равносоставлены? Ответ на этот вопрос оказался отрицательным, что было показано Деном (Max Wilhelm Dehn) [2], построившим специальные функции от длин ребер и величин двугранных углов многогранника, которые не меняются при замене многогранника на любой другой, равносоставленный с ним. Такие функции называются теперь *инвариантами Дена*. Оказалось, что для куба и равновеликого ему правильного тетраэдра можно построить такой инвариант Дена, который на кубе и на правильном тетраэдре принимает разные значения, поэтому такие куб и тетраэдр не равносоставлены. Более того, можно показать, что они также и не *равнодополняемы*, т.е. не могут быть дополнены равными многогранниками до равносоставленных многогранников. Кроме того, инварианты Дена позволили доказать существование тетраэдров с равными основаниями и равными высотами, которые не являются равнодополняемыми (в частности, равносоставленными). Таким образом, была решена *третья проблема Гильберта*[1], в которой поднимался вопрос о существовании таких тетраэдров.

Отметим, что инварианты Дена и сама его работа [2] были трудны для понимания. Ряд математиков упростили доказательство Дена (см. историю вопроса в [3]). Возможно, наиболее простой подход к равносоставленности изложен в [4]. Именно его мы и будем обсуждать. Материалы этой главы частично опираются на [3] и на [5].

6.1 Критерий равносоставленности многогранников

В этом параграфе мы определим инварианты Дена и покажем, как можно их использовать для ответа на вопрос о том, являются ли данные многогранники равносоставленными.

[1]David Hilbert (1862–1943) — немецкий математик-универсал, внёс значительный вклад в развитие многих областей математики. Член многих академий наук, в том числе Берлинской, Гёттингенской, Лондонского королевского общества, иностранный почётный член Академии наук СССР (1934). Лауреат премии имени Н.И. Лобачевского (1903).

На 2-ом Международном конгрессе математиков (Париж, 1900) Гильберт сформулировал 23 задачи, которые, в той или иной степени, определили основные направления развития математики XX века. Из них на сегодняшний день решены 16, две, с современной точки зрения, сформулированы не корректно, остается пять. Проблема равносоставленности была решена первой, уже в 1901 году. Отметим, что Ден — ученик Гильберта, и, скорее всего, Гильберт знал, что задача близка к решению.

Рассмотрим множество вещественных числе $\mathbb{R}$ как линейное пространство над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (проверьте, что это действительно линейное пространство). Обозначим это пространство через $\mathbb{R}_Q$. Конечный набор векторов $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_Q$ (т.е. вещественных чисел) является *линейно зависимым*, если существуют рациональные числа $q_1, \ldots, q_n$ такие, что $q_1x_1 + \cdots + q_nx_n = 0$. Отметим, что это последнее условие равносильно существованию целых чисел n_i таких, что $n_1x_1 + \cdots + n_kx_k = 0$.

Каждое конечное множество $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ порождает линейное подпространство $L(X)$ — линейную оболочку множества X в $\mathbb{R}$, т.е. множество всех линейных комбинаций вида $q_1x_1 + \cdots + q_nx_n$, где $q_i \in \mathbb{Q}$. Ясно, что $L(X) \subset \mathbb{R}_Q$ — конечномерное линейное пространство, размерность которого не превышает n.

Пример 6.9. Если $X = \{1, 1/2\}$, то размерность $L(X)$ равна 1, а если $X = \{1, \sqrt{2}\}$, то размерность $L(X)$ равна 2.

Пусть W — некоторый многогранник, и E — множество его ребер. Для каждого $e \in E$ через $|e|$ обозначим длину ребра e, а через α_e — величину двугранного угла многогранника W при этом ребре.

Положим $\alpha(W) = \{\alpha_e : e \in E\}$.

Определение 6.10. Пусть X — произвольное конечное множество вещественных чисел, содержащее $\alpha(W)$ и число π. Каждую линейную функцию $f\colon L(X) \to \mathbb{R}$, для которой $f(\pi) = 0$, будем называть *функцией Дена многогранника* W, а число $\Delta_f(W) = \sum_{e\in E} |e|\, f(\alpha_e)$ — *инвариантом Дена многогранника* W, отвечающим f.

Замечание 6.11. Так как $f\colon L(X) \to \mathbb{R}$ — линейная функция (на линейном пространстве $L(X)$), то $f(0) = 0$.

Замечание 6.12. Если множество X содержит π и все множества $\alpha(W_i)$, где $W_1, \ldots, W_k$ — некоторое семейство многогранников, тогда линейная функция $f\colon L(X) \to \mathbb{R}$, равная нулю на π, является функцией Дена одновременно для всех W_i.

Теорема 6.13. *Пусть A и B — равносоставленные многогранники, а f — произвольная функция Дена для A и B. Тогда $\Delta_f(A) = \Delta_f(B)$.*

Прежде, чем доказывать эту теорему, приведем некоторые ее следствия.

6.2 Примеры вычисления инвариантов Дена

Лемма 6.14. *Пусть X — конечное множество вещественных чисел, содержащее π, и $f\colon L(X) \to \mathbb{R}$ — линейная функция, равная нулю на π. Тогда $f(p\pi/q) = 0$ для всех целых p и натуральных q.*

Доказательство. Действительно, $f(p\pi/q) = p/qf(\pi) = 0$, где первое равенство выполнено в силу линейности функции f. □

Утверждение 6.15. *Каждый инвариант Дена для куба равен нулю.*

Доказательство. Обозначим куб через K, и пусть a — длина его стороны. Пусть f — произвольная функция Дена для куба K. Так как все двугранные углы куба равны $\pi/2$, а $f(\pi/2)=0$ в силу леммы 6.14, то

$$f(K)=\sum_{i=1}^{12} a\cdot f(\pi/2)=0.$$

□

Предложение 6.16. *Каждый инвариант Дена для призмы равен нулю.*

Доказательство. Пусть f — произвольная функция Дена для призмы P. Обозначим через $e_1,\dots,e_n$ ребра нижнего основания, через $e'_1,\dots,e'_n$ — соответствующие ребра верхнего основания, и через $h_1,\dots,h_n$ — боковые ребра призмы P. Тогда при каждом i выполняется $|e_i|=|e'_i|$ и $\alpha_{e_i}+\alpha_{e'_i}=\pi$. Кроме того, $|h_1|=\dots=|h_n|$ и $\sum_i \alpha_{h_i}=\pi(n-2)$ (плоское сечение соответствующего призме цилиндра, перпендикулярное образующим, является плоским n-угольником). Отсюда вытекает, что

$$f(\alpha_{e_i})+f(\alpha_{e'_i})=f(\alpha_{e_i}+\alpha_{e'_i})=f(\pi)=0,$$
$$\sum_i f(\alpha_{h_i})=f\Big(\sum_i \alpha_{h_i}\Big)=f\big((n-2)\pi\big)=(n-2)f(\pi)=0.$$

Используем приведенные только что формулы для вычисления $f(P)$:

$$f(P)=\sum_{i=1}^{n}|e_i|f(\alpha_{e_i})+\sum_{i=1}^{n}|e'_i|f(\alpha_{e'_i})+\sum_{i=1}^{n}|h_i|f(\alpha_{h_i})=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}|e_i|\big(f(\alpha_{e_i})+f(\alpha_{e'_i})\big)+|h_1|\sum_{i=1}^{n}f(\alpha_{h_i})=0.$$

□

6.3 Некоторые следствия из теоремы Дена

Следствие 6.17. *Правильный тетраэдр и куб не равносоставлены.*

Доказательство. Легко видеть, что все двугранные углы α правильного тетраэдра равны $\arccos(1/3)$. У куба двугранные углы равны $\pi/2$.

Лемма 6.18. *Число* $\frac{1}{\pi}\arccos(1/3)$ *— иррационально, поэтому α и π линейно независимы над $\mathbb{Q}$.*

Доказательство. Покажем сначала, что если $\alpha=\arccos(1/3)$, то $\cos(k\alpha)$ при натуральных k имеет вид $a_k/3^k$, где a_k — целое, не делящееся на 3.

Доказательство проведем индукцией по k. Для $k=1$ это так. Для $k=2$ это тоже так в силу того, что $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = -7/9$. Предположим, что утверждение доказано для всех $k < n$, где $n \ge 3$. Тогда

$$\cos(n\alpha) + \cos\big((n-2)\alpha\big) = 2\cos\big((n-1)\alpha\big)\cos\alpha = 2a_{n-1}/3^n,$$

откуда $\cos(n\alpha) = 2a_{n-1}/3^n - a_{n-2}/3^{n-2} = (2a_{n-1} - 9a_{n-2})/3^n$. Осталось заметить, что числитель не делится на 3, так как a_{n-1} не делится на 3 по предположению.

Покажем теперь, что α/π иррационально. Предположим противное, т.е. $\alpha = \frac{p}{q}\pi$, где $p \ne 0$ и $q > 0$ — целые числа, тогда $\cos(q\alpha) = \pm 1$, чего не может быть в силу того, что мы доказали выше. □

Рассмотрим множество $X = \{\alpha, \pi\}$, тогда $L(X)$ — двумерно, α и π — базис в $L(X)$, причем $\pi/2 \in L(X)$. Зададим на $L(X)$ линейную функцию f, положив $f(\alpha) = 1$, $f(\pi) = 0$ и продолжив ее по линейности. Тогда f — функция Дена для тетраэдра и куба.

Вычислим теперь инварианты Дена, соответствующие функции f. По утверждению 6.15, каждый инвариант Дена для куба равен нулю. Пусть T — рассматриваемый правильный тетраэдр, и a — длина его стороны. Тогда $\Delta_f(T) = \sum_{i=1}^{6} a\, f(\alpha) = 6a \ne 0$, поэтому, в силу теоремы 6.13, тетраэдр T и куб не равносоставлены. □

6.4 Доказательство теоремы 6.13

На понадобится следующий технический результат.

Лемма 6.19. *Пусть $X = \{x_i\}$ — конечное множество вещественных чисел и $y \in \mathbb{R}$. Положим $Y = X \cup \{y\}$. Тогда каждая линейная функция $f\colon L(X) \to \mathbb{R}$ продолжается до некоторой линейной функции на $L(Y)$.*

Доказательство. Если вектор $y \in \mathbb{R}$ линейно независим с векторами из X, то можно продолжить функцию f, выбрав произвольное значение $f(y)$, и далее по линейности. Если же $y \in L(X)$, то значение функции и так определено. А именно, если для некоторых целых n_i и $n \ne 0$ имеем $n\,y + \sum n_i x_i = 0$, то $f(y) = -\frac{1}{n}\sum n_i f(x_i)$. □

Следствие 6.20. *Пусть W — некоторый многогранник и f — его функция Дена. Рассмотрим произвольные многогранники $W_1, \ldots, W_n$. Тогда f продолжается до функции Дена для всех многогранников W_i.*

В формулировке следующего предложения также используется следствие 6.20.

Предложение 6.21 (аддитивность инварианта Дена)**.** *Пусть W — произвольный многогранник, разбитый на многогранники $W_1, \ldots, W_n$, и f — некоторая функция Дена для W. Обозначим той же буквой произвольное продолжение f до функции Дена для всех многогранников $W_1, \ldots, W_n$. Тогда $\Delta_f(W) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_f(W_i)$.*

Доказательство. Пусть e — ребро одного из многогранников $W, W_1, \ldots, W_n$. Рассмотрим все вершины этих многогранников, попавшие на e, а также все точки пересечения ребра e с другими ребрами этих многогранников. Тогда ребро e разобьется этими точками на отрезки, которые будем называть *звеньями.* Звено ε может входить в ребра нескольких многогранников, в каждом из них определен двугранный угол при ребре, содержащем это звено. Если это угол в W_i, то обозначим его α_ε^i, а если это угол в W, то через α_ε.

Обозначим через $\mathcal{E}$ множество всех звеньев, каждое из которых лежит в некотором ребре многогранника W.

Лемма 6.22. *В сделанных обозначениях,*

$$\Delta_f(W) = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} |\varepsilon|\, f(\alpha_\varepsilon). \tag{6.1}$$

Доказательство. Действительно, ребро e многогранника W дает вклад $|e|\, f(\alpha_e)$ в левую часть формулы (6.1), т.е. в $\Delta_f(W)$, а все звенья $\varepsilon \in \mathcal{E}$, лежащие в e, дают вклад в правую часть формулы (6.1), равный

$$\sum_{\varepsilon \subset e} |\varepsilon|\, f(\alpha_\varepsilon) = \sum_{\varepsilon \subset e} |\varepsilon|\, f(\alpha_e) = f(\alpha_e) \sum_{\varepsilon \subset e} |\varepsilon| = f(\alpha_e)\, |e|,$$

что и требовалось. □

Покажем теперь, что величина $\sum_{i=1}^n \Delta_f(W_i)$ равна правой части формулы (6.1). Из леммы 6.22, примененной к многогранникам W_i следует, что

$$\Delta_f(W_i) = \sum_{\varepsilon} |\varepsilon|\, f(\alpha_\varepsilon^i),$$

где суммирование берется по всем звеньям всех ребер многогранника W_i, поэтому

$$\sum_{i=1}^n \Delta_f(W_i) = \sum_{\varepsilon, i} |\varepsilon|\, f(\alpha_\varepsilon^i).$$

Рассмотрим сначала все звенья, не попавшие в $\mathcal{E}$, и покажем, что они дают нулевой вклад в эту сумму. Действительно, такие звенья могут быть двух типов: (1) звенья, лежащие в гранях многогранника W, и (2) звенья, внутренности которых лежат внутри многогранника W.

Пусть ε — звено первого типа, и пусть $W_{i_1}, \ldots, W_{i_k}$ — все многогранники W_i, в ребрах которых лежит ε, тогда $\sum_j \alpha_\varepsilon^{i_j} = \pi$, поэтому

$$\sum_j f(\alpha_\varepsilon^{i_j}) = f\Big(\sum_j \alpha_\varepsilon^{i_j}\Big) = f(\pi) = 0.$$

Отсюда вытекает, что вклад звена ε в величину $\sum_i \Delta_f(W_i)$ равен

$$\sum_j |\varepsilon|\, f(\alpha_\varepsilon^{i_j}) = |\varepsilon| \sum_j f(\alpha_\varepsilon^{i_j}) = 0.$$

Если ввести такие же обозначения для ребра ε второго типа, то получим $\sum_j \alpha_\varepsilon^{i_j} = 2\pi$ и, из тех же самых соображений, его вклад в $\sum_i \Delta_f(W_i)$ равен нулю.

Осталось выяснить, какой вклад в величину $\sum_i \Delta_f(W_i)$ дают звенья из $\mathcal{E}$. Пусть ε — такое звено. Опять, в тех же самых обозначениях, имеем $\sum_j \alpha_\varepsilon^{i_j} = \alpha_\varepsilon$, поэтому

$$\sum_j f(\alpha_\varepsilon^{i_j}) = f\Big(\sum_j \alpha_\varepsilon^{i_j}\Big) = f(\alpha_\varepsilon).$$

Отсюда вытекает, что вклад звена ε в величину $\sum_i \Delta_f(W_i)$ равен

$$\sum_j |\varepsilon|\, f(\alpha_\varepsilon^{i_j}) = |\varepsilon| \sum_j f(\alpha_\varepsilon^{i_j}) = |\varepsilon|\, f(\alpha_\varepsilon),$$

т.е. он равен вкладу этого же звена в величину $\Delta_f(W)$. Отсюда вытекает, что $\Delta_f(W) = \sum_i \Delta_f(W_i)$. □

Доказательство теоремы 6.13. Так как A и B — равносоставленные многогранники, их можно разрезать на многогранники $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_n$ соответственно так, что A_i равен B_i при всех $i = 1, \ldots, n$. Продолжим f до функции Дена для всех многогранников A_i (а, значит, и всех B_i). Так как у равных многогранников инварианты Дена равны, имеем $\Delta_f(A_i) = \Delta_f(B_i)$. Кроме того, по предложению 6.21 имеем

$$\Delta_f(A) = \sum_{i=1}^n \Delta_f(A_i) = \sum_{i=1}^n \Delta_f(B_i) = \Delta_f(B).$$

□

6.5 Решение Третьей проблемы Гильберта

Третья проблема Гильберта — это вопрос о существовании тетраэдров с равными основаниями и равными высотами, которые не являются равнодополняемыми (в частности, не являются равносоставленными).

Приведем формальное определение.

Определение 6.23. Многогранники A и B называются *равнодополняемыми*, если они имеют одинаковые объемы и существуют равносоставленные многогранники W^A и W^B, которые можно так разрезать на многогранники $W_0^A, W_1^A, \ldots, W_n^A$ и $W_0^B, W_1^B, \ldots, W_n^B$, что многогранник W_0^A равен A, многогранник W_0^B равен B, а при всех $i = 1, \ldots, n$ многогранники W_i^A и W_i^B равны.

Замечание 6.24. Если многогранники A и B равносоставлены, то они и равнодополняемы. Действительно, в качестве W^A и W^B можно взять их самих. Таким образом, равнодополняемость действительно является обобщением равносоставленности.

Замечание 6.25. В евклидовой геометрии верно и обратное, а именно из равнодополняемости вытекает равносоставленность. Но это последнее утверждение перестает быть верным в неархимедовых геометриях (геометриях, построенных над неархимедовыми полями). Подробности и примеры можно найти в книге [3].

Следствие 6.26. *У равнодополняемых многогранников все инварианты Дена совпадают.*

Доказательство. В обозначениях определения 6.23, пусть f — произвольная функция Дена для A и B, продолженная до функции Дена для всех W_i^A и W_j^B. Тогда $\Delta_f(A)=\Delta_f(W_0^A)$, $\Delta_f(B)=\Delta_f(W_0^B)$, и $\Delta_f(W_i^A)=\Delta_f(W_i^B)$ при всех $i=1,\dots,n$. По предложению 6.21, $\Delta_f(W^A)=\sum_{i=0}^n\Delta_f(W_i^A)$ и $\Delta_f(W^B)=\sum_{i=0}^n\Delta_f(W_i^B)$. Так как W^A и W^B равносоставлены, то, по теореме 6.13, имеем $\Delta_f(W^A)=\Delta_f(W^B)$, откуда

$$\Delta_f(A)=\Delta_f(W_0^A)=\Delta_f(W^A)-\sum_{i=1}^n\Delta_f(W_i^A)=\Delta_f(W^B)-\sum_{i=1}^n\Delta_f(W_i^B)=$$
$$=\Delta_f(W_0^B)=\Delta_f(B).$$

□

Ответ на вопрос Гильберта оказался положительным. Приведем соотвествующий пример. Рассмотрим тетраэдр T_H, основание которого — равнобедренный прямоугольный треугольник, а высота равна катету основания и падает в один из концов гипотенузы основания, см. рис. 6.1, слева.

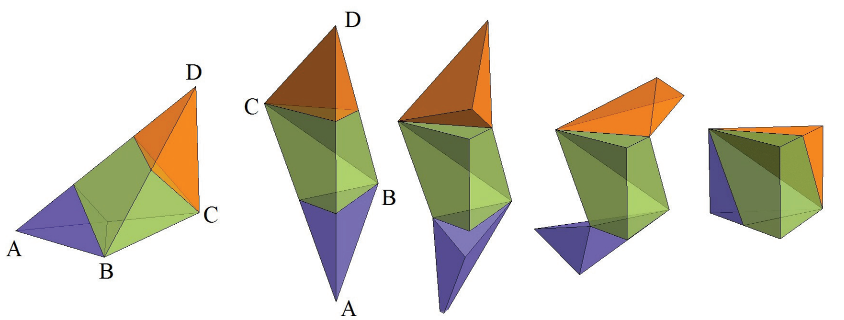

Рис. 6.1: Тетраэдр Хилла равносоставлен с прямоугольной призмой.

Многогранник T_H называется *тетраэдром Хилла* (Micaiah John Muller Hill). Заметим кстати, что тетраэдр Хилла составляет куб и, как следствие, заполняет пространство, см. рис. 6.2 и рис. 6.3

Предложение 6.27. *Тетраэдр Хилла равносоставлен с некоторой призмой.*

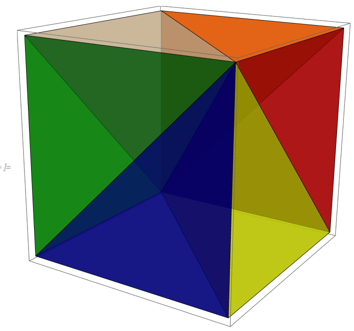

Рис. 6.2: Шесть тетраэдров Хилла составляют куб.

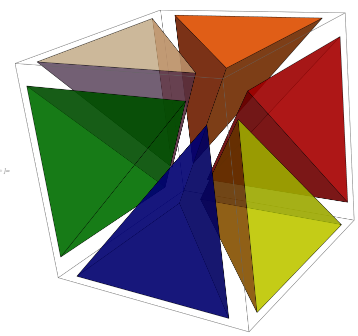

Рис. 6.3: Куб, разрезанный на тетраэдры Хилла.

Доказательство. Разрезание тетраэдра Хилла на три части, из которых составляется прямоугольника призма, также представлено на рис. 6.1 (отметим, что у Хилла было другое разбиение). □

Следствие 6.28. *Каждый инвариант Дена тетраэдра Хилла равен нулю.*

Доказательство. Из утверждению 6.27 и теоремы 6.13 вытекает, что у тетраэдра Хилла каждый инвариант Дена — такой же, как и у призмы. Следовательно, по предложению 6.16, каждый инвариант Дена тетраэдра Хилла равен нулю. □

Следствие 6.29. *Правильный тетраэдр не является равнодополняемым ни с кубом, ни с тетраэдром Хилла.*

Второй участник примера — это *координатный тетраэдр*, то есть тетраэдр с вершинами $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$ или тетраэдр подобный этому.

Предложение 6.30. *У координатного тетраэдра имеется ненулевой инвариант Дена.*

Доказательство. Обозначим через β величину двугранных углов координатного тетраэдра при ребрах грани, являющейся правильным треугольником. Тогда, как легко видеть, $\cos\beta = 1/\sqrt{3}$. Дословно повторяя рассуждения из доказательства леммы 6.18, можно показать, что при любом натуральном k имеем $\cos(k\beta) = a_k/(\sqrt{3})^k$, где a_k — целое число, не делящееся на 3, откуда тем же способом заключаем, что число $\frac{1}{\pi}\arccos(1/\sqrt{3})$ — иррационально. Отсюда вытекает, что α и π линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Поэтому, положив $f(\beta) = 1$, $f(\pi) = 0$ и продолжив на $L(X)$, где $X = \{\beta, \pi\}$, по линейности, мы получим функцию Дена для координатного тетраэдра. Легко видеть, что соответствующий ей инвариант Дена отличен от нуля. $\square$

Замечание 6.31. Если в качестве основания координатного тетраэдра взять прямоугольный треугольник, то он будет отличаться от тетраэдра Хилла с таким же основанием лишь тем, что высота последнего падает не в вершину прямого угла основания, а в вершину острого. При этом высоты у таких тетраэдров будут равны.

Следствие 6.32 (решение Третьей проблемы Гильберта)**.** *Тетраэдр Хилла и координатный тетраэдр имеют равные основания, равные высоты, но не являются равнодополняемыми.*

Доказательство. Пусть f — функция Дена, построенная в доказательстве предложения 6.30. Тогда ее значение на координатном тетраэдре отлично от нуля. Продолжим f до функции Дена для тетраэдра Хилла. По следствию 6.28, значение f на тетраэдре Хилла равно нулю. Поэтому, в силу следствия 6.26, рассматриваемые тетраэдры не являются равнодополняемыми. $\square$

6.6 Дальнейшее развитие

В 1965 Сидлер (Jean-Pierre Sydler) [7] доказал, что равенство инвариантов Дена достаточно для равносоставленности многогранников в $\mathbb{R}^3$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 6.33 (Ден–Сидлер)**.** *Для равносоставленности многогранников в $\mathbb{R}^3$ необходимо и достаточно, чтобы совпадали их объемы и все инварианты Дена.*

Замечание 6.34. Теорему Дена–Сидлера на четырехмерный случай обобщили Б. Джессен (B. Jessen) и А. Торуп (A. Thorup), см. [9].