Глава 8

Теорема Коши.

План. Комбинаторная эквивалентность. Формулировка теоремы Коши. Комбинаторная и геометрическая леммы. Доказательство теоремы Коши. Лемма о плече. Жескость и изгибаемость. Октаэдры Брикара. Многогранники Конелли и Штеффена. Теоремы Сабитова и Гайфуллина.

8.1 Постановка задачи. Теорема Коши.

Что нужно фиксировать, чтобы многогранник был однозначно определен? Теорема Минковского предлагает для выпуклого многогранника фиксировать площади и направления граней. Вопросы этого типа интересовали еще Эйлера, который высказал гипотезу о том, что «замкнутая пространственная фигура не допускает изменений, пока не рвется».

Рассмотрим замкнутую многогранную поверхность $\mathcal{F} = \{F_i\}$, заданную набором своих (двумерных) граней F_i. Наряду с двумерными гранями, рассмотрим ее одномерные грани — ребра $\{e_j\}$, нульмерные грани — вершины $\{v_j\}$, а также единственную трехмерную грань — многогранник $W \subset \mathbb{R}^3$, ограниченный поверхностью $\mathcal{F}$. Множество всех граней $\hat{\mathcal{F}}$ поверхности $\mathcal{F}$ наделено естественным отношением порядка — порядком по включению[1].

Два многогранника называются *комбинаторно эквивалентными*, если их множества граней изоморфны как упорядоченные множества, то есть между ними существует биекция, сохраняющая отношение порядка.

Если два многогранника равны (то есть их можно совместить движением объемлющего пространства), то, очевидно, они комбинаторно эквивалентны, причем соответствующие грани тоже равны между собой. Предположим, что имеет место обратная ситуация: два многогранника комбинаторно эквивалентны, причем соотвествующие двумерные грани (а значит и соответствующие ребра) равны между собой. Верно ли, что тогда и сами

[1]Если добавить к множеству $\hat{\mathcal{F}}$ всех граней пустую грань, которая, по определению будет наименьшим элементом, то так пополненное упорядоченное множество будет образовывать так называемую *решетку*. Последнее означает, что (1) существуют наибольший и наименьший элементы, и (2) для каждых двух элементов существует инфимум и супремум.

многогранники равны? В общем случае это не так. В качестве примера достаточно рассмотреть куб с «четырехскатной крышей». Эту «крышу» можно перевернуть, тогда комбинаторная эквивалентность и равенство соответствующих граней сохраняется, а полученный в результате многогранник — не выпуклый и, значит, не может быть равен исходному. Однако, выпуклый случай принципиально отличается от общего. Следующий результат был получен знаменитым французским математиком Коши в 1813 году[2].

Теорема 8.1 (Коши)**.** *Если два выпуклых многогранника комбинаторно эквивалентны, причем соотвествующие грани равны, то многогранники равны.*

Доказательство теоремы Коши основано на двух леммах, комбинаторной и геометрической.

Лемма 8.2 (комбинаторная лемма Коши)**.** *Пусть на некоторых ребрах выпуклого многогранника поставлены знаки «+» и «−». Выделим все вершины многогранника, к которым подходит хотя бы одно отмеченное ребро. Тогда среди выбранных вершин найдется такая вершина, при обходе которой встретится менее четырех перемен знака.*

Доказательство. Рёбра, отмеченные тем или иным знаком образуют граф, который мы обозначим через G. Обозначим через B, P, Γ и k количества вершин, ребер, граней и связных компонент этого графа соответственно. Пусть N — общее количество перемен знака при обходе всех вершин многогранника. Ясно, что достаточно рассматривать только те вершины многогранника, которые являются вершинами графа G. Для доказательства леммы достаточно показать, что $N < 4B$. Следуя Коши, мы покажем, что справедливо более сильное неравенство $N \leq 4B - 8$.

Заметим, что каждая пара ребер, соседних при обходе некоторой вершины, является одновременно парой ребер, соседних при обходе некоторой грани.

Замечание 8.3. Граф G может иметь довольно сложную структуру, его открытая грань могут быть гомеоморфна диску с несколькими дырами, а граница такой грани может состоять из нескольких компонент связности. Поэтому нужно быть аккуратным при подсчете количества перемен знака при обходе такой грани, а именно, нужно учитывать обход каждой компоненты границы. При этом некоторые ребра могут участвовать в обходе не один, а два раза.

Обозначим через Γ_i число граней графа, ограниченных i ребрами (при этом ребро считается один раз, если соответствующая грань примыкает к нему с одной стороны, и два раза, если с двух сторон). Отметим, что $i \geq 3$. Число перемен знака у грани, ограниченной i ребрами не превосходит i, если i четно, и $i-1$, если нечетно. Поэтому $N \leq 2\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 4\Gamma_5 + 6\Gamma_6 + \cdots$.

[2] Augustin Louis Cauchy, Sur les polygones et polyèdres, Second mémoire, J. de l'École Polytechnique. 1813. V. 9. P. 87–98

С другой стороны, каждое ребро графа G или примыкает к двум граням, или считается два раза у одной грани, поэтому $2Р = 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + 6\Gamma_6 + \cdots$. Далее, у графа G компонент связности не меньше одной, поэтому, по формуле Эйлера, $В - Р + \Gamma = 1 + k \geq 2$ или $4В - 8 \geq 4Р - 4\Gamma$. Собирая вместе полученные соотношения, получаем:

$$4В-8 \geq 4Р-4\Gamma = 2(3\Gamma_3+4\Gamma_4+5\Gamma_5+6\Gamma_6+\cdots)-4(\Gamma_3+\Gamma_4+\Gamma_5+\cdots) =$$
$$= \sum_{i\geq 3} 2i\Gamma_i - 4\sum_{i\geq 3}\Gamma_i = \sum_{i\geq 3}(2i-4)\Gamma_i \geq (2\Gamma_3+4\Gamma_4+4\Gamma_5+6\Gamma_6+\cdots) \geq N.$$

Последнее неравенство справедливо, поскольку $2i-4 \geq i-1$ при всех $i \geq 3$. Лемма доказана. □

Лемма 8.4 (геометрическая лемма Коши–Лежандра)**.** *Пусть на плоскости (или на полусфере) заданы выпуклые n-угольники $A_1 \ldots A_n$ и $B_1 \ldots B_n$, причем их соответствующие стороны равны, а среди соответствующих углов есть неравные. Отметим вершину A_i первого многоугольника знаком «+», если угол в ней строго больше, чем в вершине B_i второго, и знаком «−», если строго меньше. Тогда число перемен знака при обходе первого многоугольника не меньше четырех.*

Доказательство. Так как по предположению у многоугольников есть неравные углы, то есть и перемены знака, и, значит их не меньше двух. Предположим, что перемен знака ровно две. Тогда вершины первого многоугольника разбиваются на две последовательных подмножества, в одном из них нет вершин с меткой «−», а в другом нет вершин с меткой «+». Пусть эти подмножества разделяют стороны $A_{i-1}A_i$ и A_jA_{j+1}. Фиксируем точки $C \in A_{i-1}A_i$ и $D \in A_jA_{j+1}$ внутри этих сторон. На соответствующих сторонах второго многоугольника разместим точки E и F так, чтобы $|EB_i| = |CA_i|$ и $|FB_j| = |DA_j|$.

Рассмотрим ломаные $CA_i \cdots A_jD$ и $EB_i \cdots B_jF$. Их соответствующие звенья равны, а углы в вершинах первой ломаной не меньше, чем углы в вершинах второй, причем как минимум один угол строго больше, то есть первую ломаную можно получить из второй увеличением некоторых углов последней.

Лемма 8.5 (Коши о плече)**.** *Пусть $P_1 \cdots P_n$ и $Q_1 \cdots Q_n$ — выпуклые многоугольники на плоскости (на полусфере). Предположим, что $|P_iP_{i+1}| = |Q_iQ_{i+1}|$, $i = 1, \ldots, n-1$, и величины углов в вершинах $P_2, \ldots, P_{n-1}$ первого многоугольника не меньше чем величины углов второго в соответствующих вершинах Q_i. Тогда $|P_1P_n| \geq |Q_1Q_n|$, причем равенство достигается, если и только если все неравенства углы во всех соответствующих вершинах P_i и Q_i выполнены в виде равенств.*

Таким образом, из леммы 8.5 следует, что $|CD| > |EF|$. Применив те же рассуждения к ломаным $DA_{j+1} \cdots A_{i-1}C$ и $FB_{j+1} \cdots B_{i-1}E$, получим обратное неравенство. Поэтому перемен знака не меньше четырех. □

Следствие 8.6. *Рассмотрим два выпуклых многогранных угла, с одинаковым числом граней и равными соответствующими плоскими углами. Сравним двугранные углы при соответствующих ребрах этих многогранных углов и поставим на ребре первого угла знак «+», если угол при нем больше, чем у второго, и «−», если меньше. Тогда число перемен знака при обходе вершины первого угла не меньше четырех.*

Доказательство. Рассмотрим сферы единичного радиуса с центрами в вершинах многогранных углов. Тогда грани этих углов вырежут на сферах сферические многоугольники. Вершины этих многоугольников соответствуют ребрам многогранных углов, величины углов многоугольников в вершинах равны двугранным углам. Таким образом, первому многогранному углу соответствует сферический выпуклый многоугольник, на некоторых вершинах которого расставлены знаки как в лемме 8.4. Остается применить эту лемму. Следствие доказано. □

Доказательство теоремы Коши. Проведем доказательство «от противного». Предположим, что существуют два неравных друг другу комбинаторно эквивалентных многогранника P и Q, у которых соответствующие грани равны. Тогда у них отличаются двугранные углы при каких-то ребрах. Поставим на ребре многогранника P знак «+», если двугранный угол при этом ребре больше, чем двугранный угол при соответствующем ребре многогранника Q, и знак «+», если меньше. Из леммы8.2 вытекает, что найдется вершинам многогранника, в которую приходит помеченное ребро и такая, что число перемен знака помеченных ребер при ее обходе не больше двух. С другой стороны, из следствия 8.6 следует, что это невозможно. Теорема доказана.

Таким образом, недоказанной осталась только лемма Коши «о плече».

Доказательство Коши леммы о плече. Проведем доказательство индукцией по n. Если $n = 3$, то утверждение леммы — прямое следствие теоремы косинусов. Предположим сначала, что у наших многоугольников есть равне углы, скажем P_k и Q_k. Тогда треугольники $P_{k-1}P_kP_{k+1}$ и $Q_{k-1}Q_kQ_{k+1}$ равны. Отрезая эти треугольники от исходных многоугольников, получим многоугольники с меньшим числом вершин и удовлетворяющие предположению индукции, что и завершает доказательство в этом случае.

Пусть теперь все углы P_i строго больше соответствующих Q_i, $i = 2, \dots, n-1$. Возьмем вершину Q_k, $k = 2, \dots, n-1$, проведем диагонали Q_1Q_k и Q_kQ_n. Они ограничивают треугольник $Q_1Q_kQ_n$. Деформируем второй многоугольник, увеличивая угол Q_k так, чтобы он стал равен углу первого многоугольника в вершине P_k. При этом сторона Q_1Q_n только увеличится. Полученная в результате пара многоугольников (исходный первый и деформированный второй) удовлетворяют условиям леммы, тем самым второй случай сводится к первому.

Примерно через 100 лет Штейниц (Ernst Steinitz) заметил и исправил ошибку в доказательстве Коши. Дело в том, что второй многоугольник при деформации может перестать быть выпуклым. Аккуратное доказательство довольно громоздко, мы его здесь опускаем[3].

8.2 Жесткость и изгибаемость.

Приведенный выше пример куба с «четырехскатной крышей», демонстрирующий существенность условия выпуклости в теореме Коши, дает дискретное преобразование одного многогранника в другой, сохраняющее все двумерные грани, но меняющее двугранные углы. Непрерывные деформации такого типа называются изгибаниями. Более точно, непрерывное семейство $\{P_t : t \in [0,1]\}$ комбинаторно эквивалентных многогранных поверхностей с попарно равными соответствующими гранями называется *изгибанием*. Многогранная поверхность P называется *изгибаемой*, если существует его не постоянное изгибание P_t, $P_0 = P$. Как мы уже упоминали выше, Эйлер высказал гипотезу о невозможности изгибаемости (так называемой *жесткости*) замкнутых поверхностей. Из теоремы Коши следует, что в отношении выпуклых многогранников Эйлер был прав.

Следствие 8.7. *Выпуклые многогранники неизгибаемы.*

Доказательство. Множество выпуклых многогранников (в смысле нашего определения) открыто. Поэтому наличие изгибаемости влечет существование двух неравных комбинаторно эквивалентных многогранников с равными соответствующими гранями. Это противоречит теореме Коши. □

Довольно долго специалисты верили, что никакие многогранники не изгибаются. Первые сомнения зародились после работ Брикара[4], который придумал два вида изгибаемых октаэдров, но погруженных, то есть с самопересечениями.

Конструкция 8.8. Рассмотрим плоский параллелограмм $ABCD$, $AB \neq BC$, и отразим ломаную CDA относительно прямой AC. Обозначим образ точки D той же буквой. Получим замкнутую ломаную $ABCD$ с двумя точками самопересечения. Эта фигура называется *антипараллелограммом.* Заметим, что каждый антипараллелограмм можно вписать в окружность. Кроме того, антипараллелограмм допускает изгибание — непрерывную деформацию, при которой сохраняются длины сторон, но меняются углы, см. рис. 8.1.

Рассмотрим теперь антипараллеограмм в пространстве $\mathbb{R}^3$, лежащий в плоскости Oxy так, что центр описанной вокруг него окружности совпадает с началом координат. Поместим на оси Oz пару симметричных относительно плоскости Oxy точек S и S', и построим на сторонах антипараллелограмма четыре треугольника с вершиной S и еще четыре с вершиной S', см. 8.2. Полученная многогранная поверхность (с самопересечениями) называется

[3] Доказательство можно найти, например, здесь: Pak I., *Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry*, 2010, `https://www.math.ucla.edu`.

[4] Raoul Bricard (1870–1943), французский математики и инженер.

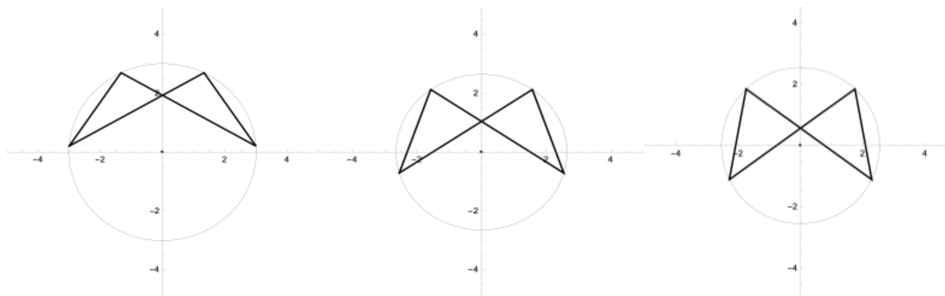

Рис. 8.1: Вписанные в окружности антипараллелограммы со сторонами длины 3 и 5.

октаэдром Брикара. Она, очевидно, изгибаема: если изгибать антипараллелограмм, оставляя центр описанных окружностей неподвижным (например, показано на рис. 8.1), то октаэдр Брикара тоже будет изгибаться.

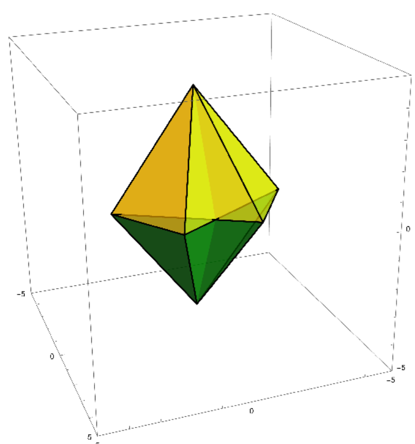

Рис. 8.2: Октаэдр Брикара над антипараллелограммом.

Конструкция 8.9. Снова рассмотрим плоский параллелограмм $ABCD$, $AB \neq BC$, и теперь превратим его в пространственный (не плоский) многоугольник, «перегнув» вдоль одной из диагоналей, скажем, вдоль AC. Прямая ℓ, проходящая через середины диагоналей полученного четырехугольника (вершины которого мы обозначим теми же буквами), перпендикулярна этим диагоналям (Проверьте!). Поэтому при повороте на 180° вокруг прямой ℓ четырехугольник переходит в себя (точки A и C, а также B и D, и меняются местами). Выберем точку S вне прямой ℓ и построим на сторонах четырехугольник $ABCD$ треугольники с вершиной S. Получим поверхность из четырех треугольников (часть четырехгранного угла), которая, очевидно, изгибается. Теперь повернем полученную конструкцию на 180° вокруг прямой ℓ и обозначим через S' образ точки S при этом повороте. Построенные треугольники перейдут в треугольники с вершиной S'. Полученные восемь треугольников образуют замкнутую многогранную поверхность — *октаэдр Брикара*, см. рис. 8.3.

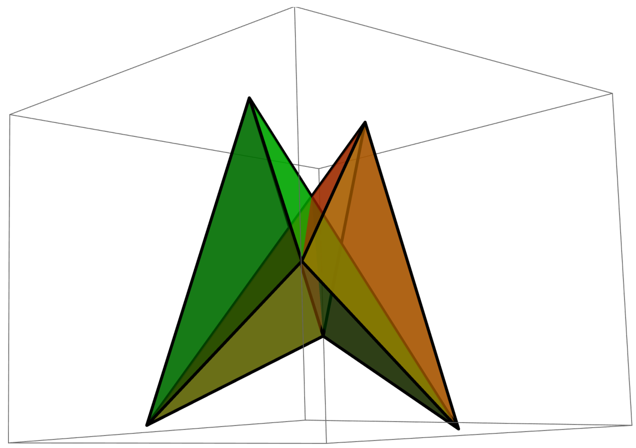

Рис. 8.3: Октаэдр Брикара над пространственным четырехугольником.

Этот октаэдр также имеет самопересечения, и также изгибаем (деформация четырехгранной незамкнутой поверхности $ABCDS$ порождает симметричную деформацию симметричной поверхности $ABCDS'$).

Замечание 8.10. Октаэдры Брикара комбинаторно эквивалентны обычному октаэдру.

Замечание 8.11. Если представить обычный правильный октаэдр как два четырехгранных угла, стыкующихся по квадрату, и отразить один из этих четырехгранных углов относительно плоскости квадрата, то получим «удвоенный» (погруженный) октаэдр, который также изгибаем.

Наконец, в 1977 году Роберт (Боб) Конелли (Robert Conelly) построил первый пример изгибаемого многогранника без самопересечений (так называемая сфера Конелли). Его многогранник состоял из 18 треугольных граней. Наименьший известный пример на сегодня — многогранник Штеффена (Klaus Steffen), 1978 год имеет 9 вершин, 21 ребро и 14 треугольных граней. Модель этого многогранника несложно построить самому, см. инструкцию, например, здесь: `https://ru.wikipedia.org/wiki/Многогранник_Штеффена`. И. Максимов показал, что в классе изгибаемых многогранников с треугольными гранями многогранник Штеффена имеет наименьшее возможное количество вершин. В общем случае вопрос о минимальном числе вершин изгибаемого многогранника открыт.

После открытия изгибаемых многогранников возник вопрос о поведении их объема при изгибании. Конелли заметил, что у известных примеров изгибаемых многогранников не изменяется объем. Возникла гипотеза о неизменности объема многогранника при изгибании, так называемая гипотеза о «кузнечных мехах». Эта гипотеза была доказана И.Х. Сабитовым, профессором механико-математического факультета.

И.Х. Сабитов получил некоторое удивительное обобщение формулы Герона. Напомним, что эта формула выражает площадь s произвольного треугольника через длины a, b, c его сторон, а именно, $s^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, где $2p = a + b + c$. В частности, площадь треугольника является корнем квадратного трехчлена, коэффициенты которого выражаются через длины сторон этого треугольника (причем только с помощью арифметических действий). Эта формула имеет обобщение на случай многомерного симплекса, а именно, справедлива так называемая формула Кэли–Менгера: квадрат объема симплекса равен определителю матрицы, элементы которой суть нули, единицы и квадраты длин сторон этого симплекса.

Теорема, полученная Сабитовым, утверждает, что объем произвольного многогранника с треугольными гранями в трехмерном пространстве является корнем некоторого многочлена, коэффициенты которого выражаются через длины его ребер с помощью арифметических действий, причем вид этих зависимостей определяется комбинаторной структурой многогранника (то есть для комбинаторно эквивалентных многогранников зависимости одинаковы). Отсюда следует, что объем многогранника с заданной комбинаторной структурой и длинами ребер, может принимать лишь конечный набор значений. В частности, у непрерывного семейства таких многогранников объем постоянен.

Теорема Сабитова была обобщена А.А. Гайфуллиным на многомерный случай (2012). В сферическом пространстве любой размерности существуют изгибаемые многогранники с меняющимся объемом (В. Александров, А. Гайфуллин). А вот в нечетномерном пространстве Лобачевского справедлив аналог теоремы Сабитова: объем при изгибании сохраняется (А. Гайфуллин, 2015). Для пространства Лобачевского четной размерности вопрос открыт.