2.2 Связность и линейная связность

Определение 2.71. Топологическое пространство X называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых подмножеств A_1 и A_2, каждое из которых является открытым в X. Если такое представление возможно, то пространство X называется *несвязным.*

Замечание 2.72. Если $X = A_1 \cup A_2$, где A_i — открытые непустые подмножества X, и $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то каждое A_i является дополнением открытого множества A_j, $j \neq i$, и поэтому замкнуто в X. Такие одновременно открытые и замкнутые подмножества топологического пространства иногда называют *открыто-замкнутыми.*

Определение 2.73. Подмножество A топологического пространства X называется *связным*, если связным является топологическое пространство A с топологией, индуцированной из X.

Утверждение 2.74. *Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ — связен.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть $[a, b] = A \cup B$, где множества A и B открыты, непусты и не пересекаются. Предположим для определенности, что $a \in A$. Рассмотрим множество всех таких ε, что полуинтервал $[a, a + \varepsilon)$ содержится в A, и пусть ε_0 — точная верхняя грань этого множества. Тогда, так как A — открыто, $\varepsilon_0 > 0$. Поскольку множество A замкнуто, точка $a + \varepsilon_0$ принадлежит A. Но тогда, если только $a + \varepsilon_0 \neq b$, существует открытый интервал $(a+\varepsilon_0-\delta, a+\varepsilon_0+\delta)$, целиком лежащий в A, и поэтому полуинтервал $[a, a + (\varepsilon_0 + \delta))$ содержится в A, что противоречит выбору ε_0. Поэтому $a + \varepsilon_0 = b$. Но тогда $A = [a, b]$ и множество B пусто. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Упражнение 2.5. Показать, что интервал (a, b) связен.

Упражнение 2.6. Пусть $X \cup Y$ — несвязная сумма произвольных топологических пространств. Показать, что пространство $X \cup Y$ несвязно.

Упражнение 2.7. Показать, что букет (см. пример 2.54) связных топологических пространств по любой паре точек является связным.

Определение 2.75. Максимальное по включению связное подпространство пространства X называется его *связной компонентой* или *компонентой связности.*

Замечание 2.76. Максимальность означает, что если связная компонента C пространства X содержится в связном подмножестве $Y \subset X$, то $Y = C$.

Утверждение 2.77. *Связные компоненты топологического пространства X попарно не пересекаются и являются замкнутыми подмножествами пространства X.*

Доказательство. Пусть X_1 и X_2 — разные связные компоненты пространства X. Рассмотрим их объединение $Y = X_1 \cup X_2$. Оно не может быть связным (иначе получаем противоречие с максимальностью). Тогда $Y = A \cup B$, где A и B — непустые непересекающиеся открытые подмножества. Но $X_i \cap A$ и $X_i \cap B$ открыты в X_i, поэтому не могут быть одновременно не пусты (иначе X_i будет не связным). Следовательно каждая компонента X_i содержится или в A, или B. При этом, если $X_1 \subset A$, то $X_2 \subset B$ так как иначе B пусто. Поэтому X_1 и X_2 не пересекаются.

Далее, пусть X_1 — не замкнутая связная компонента, и $x \in X$ — ее точка прикосновения, которая не входит в X_1. Рассмотрим $Y = X_1 \cup \{x\} \subset X$. Множество Y не может быть связным (иначе получаем противоречие с максимальностью X_1). Тогда $Y = A \cup B$, где A и B — непустые непересекающиеся открытые подмножества. Так же как и выше проверяется, что X_1 целиком содержится или в A, или в B, и если $X \subset A$ для определенности, то $x \in B$. Но тогда B — открытая окрестность точки x, которая не пересекается с X_1, поэтому x не является точкой прикосновения для X_1, противоречие. Утверждение доказано. □

Замечание 2.78. Связные компоненты не обязаны быть открытыми подмножествами. В качестве примера достаточно рассмотреть подмножество X вещественной прямой, полученное из отрезка $[0, 1]$ выбрасыванием последовательности $\{1/n\}$. Тогда $\{0\} \subset X$ — связная компонента пространства X.

Упражнение 2.8. Показать, что пространство X связно, если и только если каждое его открыто-замкнутое подмножество или пусто, или совпадает со всем X.

Упражнение 2.9. Сколько компонент связности имеет пространство X, наделенное дискретной топологией?

Утверждение 2.79. *Предположим, что в топологическом пространстве X для каждой пары его различных точек (x, y) найдется связное подмножество C_{xy}, содержащее x и y. Тогда пространство X связно.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть $X = A \cup B$, где A и B — открыты, непусты, причем $A \cap B = \emptyset$. Выберем точки $a \in A$, $b \in B$ и рассмотрим связное множество C_{ab}, содержащее a и b. Однако множество C_{ab} разлагается в объединение двух своих непустых, открытых и непересекающихся подмножеств $C_{ab} \cap A$ и $C_{ab} \cap B$, что противоречит связности C_{ab}. Доказательство закончено. □

Утверждение 2.80. *Образ связного подмножества топологического пространства при непрерывном отображении связен.*

Доказательство. В самом деле, если образ $Y = f(X)$ связного множества X при непрерывном отображении f несвязен, то, по определению, $Y = A \cup B$, где A и B — открыты, непусты и не пересекаются. Но тогда $X =$

$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, причем множества $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$ непусты, открыты и не пересекаются, т.е. X несвязно. Полученное противоречие и завершает доказательство. $\square$

Следствие 2.81 (B. P. J. N. Bolzano, A. L. Cauchy)**.** *Непрерывная функция, заданная на связном топологическом пространстве X, принимает все промежуточные значения.*

Доказательство. Действительно, если, скажем, значение y_0 не принимается непрерывной функцией $f\colon X \to \mathbb{R}$, но принимаются некоторые значения больше и меньше y_0, то образ $f(X)$ распадается в объединение двух открытых, непустых, непересекающихся подмножеств $f(X) \cap (y_0, +\infty)$ и $f(X) \cap (-\infty, y_0)$. Последнее противоречит утверждению 2.80. Следствие доказано. $\square$

Определение 2.82. *Непрерывной кривой* в топологическом пространстве X называется любое непрерывное отображение γ отрезка $[a, b]$ в X. При этом говорят, что эта непрерывная кривая *соединяет точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$*.

Определение 2.83. Топологическое пространство X называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой.

Так как композиция непрерывных отображений — тоже непрерывное отображение, мгновенно получаем следующий результат.

Утверждение 2.84. *Образ при непрерывном отображении линейно связного пространства — линейно связен. В частности, линейная связность — топологический инвариант.*

Из утверждений 2.74, 2.79 и 2.80 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2.85. *Линейно-связное топологическое пространство связно.*

Замечание 2.86. Обратное, вообще говоря, не верно. Приведите пример.

Лемма 2.87. *Пусть в топологическом пространстве X даны две непрерывные кривые $\gamma_1 : [a, b] \to X$ и $\gamma_2 : [b, c] \to X$, причем $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Тогда отображение $g : [a, c] \to X$, которое на $[a, b]$ совпадает с γ_1, а на $[b, c]$ с γ_2, тоже является непрерывной кривой.*

Доказательство. Пусть β_X — какая-нибудь база топологии пространства X. Нам достаточно показать, что отображение γ непрерывно в точке b, т.е. для любого $B \in \beta_X$, содержащего $\gamma(b)$, существует такой интервал $(b - \delta, b + \delta) \subset [a, c]$, что его γ-образ содержится в B. Так как γ_i непрерывны в b, существуют полуинтервалы $(b - \delta_1, b]$ и $[b, b + \delta_2)$, которые отображаются γ_1 и γ_2 соответственно в B. Но тогда достаточно положить $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. $\square$

Лемма 2.88. *Пусть $\gamma : [a, b] \to X$ — непрерывная кривая в топологическом пространстве X, соединяющая точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$, и пусть $[c, d]$ — произвольный отрезок. Тогда существует непрерывная кривая $\gamma' \colon [c, d] \to X$, соединяющая те же точки такая, что $\gamma'(c) = \gamma(a)$, $\gamma'(d) = \gamma(b)$, а также непрерывная кривая $\gamma'' \colon [c, d] \to X$, соединяющая те же точки и такая, что $\gamma''(c) = \gamma(b)$, $\gamma''(d) = \gamma(a)$.*

Доказательство. Действительно, достаточно рассмотреть композицию $\gamma' = \gamma \circ f$, где $f \colon [c, d] \to [a, b]$ линейное отображение

$$f(t) = \frac{(b-a)t + ad - bc}{d-c}, \qquad t \in [c, b].$$

Тогда $f(c) = a$, $f(d) = b$, поэтому γ' — непрерывная кривая, и $\gamma'(c) = \gamma\bigl(f(c)\bigr) = \gamma(a)$ и $\gamma'(d) = \gamma\bigl(f(d)\bigr) = \gamma(b)$. Аналогично, если положить

$$h(t) = \frac{(a-b)t + bd - ac}{d-c}, \qquad t \in [c, b],$$

то $h(c) = b$, $h(d) = a$, и если $\gamma'' = \gamma \circ h$, то $\gamma''(c) = \gamma\bigl(h(c)\bigr) = \gamma(b)$ и $\gamma''(d) = \gamma\bigl(h(d)\bigr) = \gamma(a)$, что и требовалось. □

Теорема 2.89. *Зафиксируем в топологическом пространстве X некоторую точку x_0. Тогда X линейно связно, если и только если любую точку можно соединить непрерывной кривой с x_0.*

Доказательство. Если X линейно связно, то утверждение теоремы мгновенно следует из определения линейной связности. Обратно, пусть y_1 и y_2 — произвольные точки из X, и пусть $\gamma_i \colon [a_i, b_i] \to X$, $\gamma_i(a_i) = y_i$, $\gamma(b_i) = x_0$, $i = 1, 2$, — непрерывные кривые, соединяющие y_1 и y_2 с точкой x_0. По лемме 2.88 можно заменить кривую γ_2 на кривую $\gamma_2' \colon [b_1, c] \to X$, соединяющую те же точки, что и γ_2, причем $\gamma'(b_1) = x_0$, $\gamma_2'(c) = y_2$. Применяя лемму 2.87, получаем непрерывную кривую, соединяющую y_1 и y_2. Таким образом, пространство X — линейно связно. □

Определение 2.90. Линейно связное подмножество топологического пространства X, не содержащееся в отличном от него самого линейно связном подмножестве X, то есть максимальное по включению линейно связное подмножество, называется *линейно связной компонентой пространства X* или *компонентой линейной связности пространства X*.

Разбор следующих примеров оставим в качестве упражнений.

Пример 2.91. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из $\mathbb{R}^2$ выбрасыванием оси x. Тогда X состоит из двух компонент — открытых полуплоскостей $\bigl\{(x, y) : y < 0\bigr\}$ и $\bigl\{(x, y) : y > 0\bigr\}$.

Пример 2.92. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из $\mathbb{R}^2$ выбрасыванием двух лучей, выходящих из одной точки. Тогда X состоит из двух компонент.

Пример 2.93. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из некоторого круга $U_r(A)$ выбрасыванием произвольного его радиуса AC. Тогда X — линейно связное пространство.

Пример 2.94. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из некоторого круга $U_r(A)$ выбрасыванием двух различных его радиусов AC и AD. Тогда X состоит из двух компонент.

2.3 Хаусдорфовость

Еще одной важной характеристикой топологического пространства являются свойства отделимости. Мы здесь приведем только одну из многих так называемых аксиом отделимости, аксиому Хаусдорфа[1].

Определение 2.95. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым*, если для любых двух его различных точек существуют непересекающиеся открытые окрестности.

Очевидно, не любое пространство является хаусдорфовым. Простейший пример нехаусдорфова — пространство X, состоящее из двух и более точек, с тривиальной топологией $\{X, \emptyset\}$. Стандартный пример хаусдорфова пространства — пространство с метрической топологией.

Утверждение 2.96. *Любая метрическая топология — хаусдорфова.*

Доказательство. Пусть (X, d) — метрическое пространство, и x, y — любые две его различные точки. Положим $r = d(x, y)/3$. Тогда открытые шаровые окрестности $U_r(x)$ и $U_r(y)$ не пересекаются. Действительно, пусть $z \in U_r(x) \cap U_r(y)$. Тогда по неравенству треугольника имеем: $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y) < 2r = 2d(x, y)/3$, противоречие. $\square$

Следствие 2.97. *Нехаусдорфова топология не является метрической.*

Утверждение 2.98. *Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство, и $x \in X$ — произвольная его точка. Тогда множество $\{x\} \subset X$ замкнуто в X.*

Доказательство. Действительно, для каждой точки $y \in X \setminus \{x\}$ найдется окрестность $U(y)$, которая не пересекается с некоторой окрестностью точки x, а значит $x \notin U(y)$. Но тогда $X \setminus \{x\} = \cup_{y \in X \setminus \{x\}} U(y)$ открыто как объединение открытых множеств. $\square$

[1] Felix Hausdorff (1868–1942), замечательный немецкий математик, один из основателей топологии, теории размерностей, метрической геометрии. Служил профессором в Лейпциге, Грейфсвальде и Бонне. В 1935 году был отстранен от преподавания, в 1942 перед отправкой в лагерь принял яд вместе с женой и ее сестрой.

2.4 Компактность

Определение 2.99. *Открытым покрытием топологического пространства* X называется семейство $\{U_\alpha\}$ открытых в X множеств U_α такое, что $X = \cup_\alpha U_\alpha$. *Открытым покрытием подмножества* Y *топологического пространства* X называется семейство $\{U_\alpha\}$ открытых в X множеств U_α такое, что $Y \subset \cup_\alpha U_\alpha$. *Подпокрытием* называется произвольное подсемейство покрытия, само являющееся покрытием.

Определение 2.100. Топологическое пространство X (подмножество Y топологического пространства X) называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Пример 2.101. Как показывается в математическом анализе (Теорема Бореля), отрезок $[a, b]$ компактен.

Определение 2.102. Подмножество $Y \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если оно лежит в некотором шаре $U_r(P)$.

Следующее важное утверждение (Теорема Гейне–Бореля–Лебега), являющееся критерием компактности подмножества евклидова пространства, доказано в курсе математического анализа.

Теорема 2.103 (E. Borel, E. Heine, H.-L. Lebesgue)**.** *Подмножество* Y *в* $\mathbb{R}^n$ *компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Нам понадобятся некоторые общие свойства компактных пространств.

Предложение 2.104. *Пусть* $f\colon X \to Y$ *— непрерывное отображение топологических пространств. Предположим, что* X *компактно. Тогда* $f(X)$ *— компактное подмножество* Y*.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}$ — произвольное открытое покрытие множества $f(X)$, тогда $\left\{f^{-1}(U_\alpha)\right\}$ — открытое покрытие компакта X, поэтому в нем существует некоторое конечное подпокрытие. Но тогда те U_β, для которых множества $f^{-1}(U_\beta)$ образуют это конечное подпокрытие, сами образуют конечное подпокрытие покрытия $\{U_\alpha\}$ множества $f(X)$. □

Следствие 2.105. *Образ непрерывной кривой в* $\mathbb{R}^n$ *компактен и, значит, замкнут и ограничен.*

Доказательство. Это следует из компактности отрезка (пример 2.101), предложения 2.104 и теоремы 2.103. □

Следствие 2.106 (K. Th. W. Weierstraß)**.** *Пусть* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *— непрерывная функция на компактном топологическом пространстве. Тогда функция* f *ограничена и принимает свои наименьшее и наибольшее значения.*

Доказательство. Действительно, по предложению 2.104, множество $f(X) \subset \mathbb{R}$ компактно, следовательно, по теореме 2.103, оно замкнуто и ограничено. Ограниченность множества $f(X)$ означает ограниченность функции f. Замкнутость множества $f(X)$ означает, что $\inf f(X)$ и $\sup f(X)$ лежат в $f(X)$, т.е. функция достигает своего наименьшего и наибольшего значений. $\square$

Следствие 2.107. *Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная кривая, и $P \in \mathbb{R}^n$ — точка, не лежащая на этой кривой, т.е. не принадлежащая образу отображения γ. Тогда функция $f(t) = |P\gamma(t)|$ расстояния от P до точек кривой $\gamma(t)$ достигает своего минимума, и этот минимум положителен.*

Доказательство. Действительно, функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, поэтому, в силу следствия 2.106, функция f достигает своего наименьшего значения в некоторой точке $t_0 \in [a,b]$. Но тогда $f(t_0) = |P\gamma(t_0)| > 0$, так как P не лежит на γ. $\square$

Определение 2.108. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, заданная на топологическом пространстве, называется *локально постоянной*, если для каждой точки $x \in X$ существует такая окрестность U, что f постоянна на U.

Предложение 2.109. *Локально постоянная функция непрерывна.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — локально постоянная функция. Тогда для каждой $x \in X$ существует окрестность U точки x, на которой f постоянно. Но тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеем: $f(U) = \big\{f(x)\big\} \subset \big(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon\big)$, поэтому f непрерывна в каждой точке x. $\square$

Следствие 2.110. *Локально постоянная функция f постоянна на каждой компоненте линейной связности.*

Доказательство. Пусть x и y — произвольные точки из компоненты линейной связности, т.е. существует непрерывная кривая $\gamma\colon [a,b] \to X$, для которой $x = \gamma(a)$ и $y = \gamma(b)$. Образ $\Gamma = \gamma\big([a,b]\big)$ кривой γ компактен в силу предложения 2.104. Для каждой точки $t \in \Gamma$ существует окрестность $U(t)$ на которой функция f постоянна. Выберем конечное подпокрытие открытого покрытия $\big\{U(t)\big\}$ компакта Γ. Из существования этого конечного покрытия следует, что функция f принимает конечное число значений на Γ. С другой стороны, если среди этих значений есть пара различных, то, по теореме Больцано–Коши (см. следствие 2.81) таких значений континуум, противоречие. $\square$

Утверждение 2.111. *Замкнутое подмножество компактного пространства компактно.*

Доказательство. Пусть A — замкнутое подмножество компактного пространства X, и $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие множества A. Так как $X \setminus A$ — открытое подмножество в X, то семейство $\{U_\alpha\} \cup \{X \setminus A\}$ является открытым покрытием всего пространства X. Пространство X компактно, поэтому у этого покрытия существует конечное подпокрытие $\{X \setminus A, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}\}$.

Но тогда $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}\}$ — это конечное покрытие множества A. Доказательство закончено. $\square$

В общем случае замкнутость не является необходимым условием компактности. Однако справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.112. *Компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.*

Доказательство. Пусть K — компактное подмножество хаусдорфова пространства X. Покажем, что произвольная точка $x \in X \setminus K$ не является точкой прикосновения для K. Действительно, в силу хаусдорфовости, для каждой точки $y \in K$ существует пара непересекающихся открытых окрестностей $U(x, y)$ и $V(y)$ точек x и y соответственно, причем окрестность точки x зависит, вообще говоря, от y. Воспользуемся компактностью K и выберем его конечное покрытие окрестностями $\big\{V(y_i)\big\}_{i=1}^{k}$. Тогда $U(x) = \cap_i U(x, y_i)$ — конечное пересечение открытых окрестностей точки x, которое само является окрестностью точки x. Таким образом, $U(x)$ — открытая окрестность точки x, которая не пересекается с K, что и требовалось. $\square$

Компактность — сильное условие, позволяющее упростить, в том числе, доказательство гомеоморфности.

Теорема 2.113. *Пусть $f\colon X \to Y$ непрерывное взаимно однозначное с образом отображение компактного пространства X в хаусдорфово пространство Y. Тогда f — гомеоморфизм с образом.*

Доказательство. Положим $A = f(X)$. Обратное отображение $f^{-1}\colon A \to X$ определено благодаря взаимной однозначности. Остается доказать его непрерывность. Пусть $F \subset X$ — произвольное замкнутое подмножество. Тогда F компактно (утверждение 2.111). Прообраз $\big(f^{-1}\big)^{-1}(F)$ при отображении f^{-1} равен $f(F)$ — компактному подмножеству в Y (предложение 2.104). Но компактное подмножество в хаусдорфовом пространстве Y замкнуто (утверждение 2.112), значит прообраз любого замкнутого подмножества $F \subset X$ при отображении f^{-1} замкнут. Осталось применить критерий непрерывности. $\square$

Литература к главе 2

[1] Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология.* Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1979.

[2] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Курс дифференциальной геометрии и топологии*, Факториал Пресс, 2000.