Глава 2

Элементы топологии

План. Топология, топологическое пространство, примеры, топология, порожденная базой, замкнутые множества, внутренние точки и точки прикосновения, внутренность и замыкание, непрерывность, критерий непрерывности, индуцированная топология, фактор топология, гомеоморфизм, гомеоморфные топологические пространства, связное пространство, связная компонента, непрерывная кривая, линейно связное топологическое пространство, линейно связная компонента, локально постоянная функция, хаусдорфовость, открытое покрытие топологического пространства, открытое покрытие подмножества топологического пространства, подпокрытие, компактность, теоремы Больцано, Вейерштрасса и Коши.

В данном разделе мы познакомимся с основами топологии — раздела математики, изучающего понятие непрерывности. Вопросы непрерывности очень важны не только при изучении свойств функций, но и более общих и наглядных объектов, таких как кривые и поверхности. Более детальные курсы топологии можно найти, например, в [1] и [2].

2.1 Топологические пространства и непрерывные отображения

Напомним определение непрерывной функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ из курса математического анализа. Функция f называется *непрерывной в точке* $x\in\mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ (зависящее от ε) такое, что для любой точки x', для которой $|x-x'|<\delta$, выполнено неравенство $\bigl|f(x)-f(x')\bigr|<\varepsilon$.

Обозначим через $U_\varepsilon(x)$ интервал $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$. Множество $U_\varepsilon(x)$ принято называть *ε-окрестностью точки x*. Тогда предыдущее определение можно переписать так: для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$ (зависящее, вообще говоря, от ε), что $f\bigl(U_\delta(x)\bigr)\subset U_\varepsilon(f(x))$, то есть образ δ-окрестности точки x содержится в ε-окрестности точки $f(x)$.

Вместо симметричных ε-окрестностей точки можно рассматривать произвольные интервалы, содержащие эту точку. Следующее определение эквивалентно предыдущему (Проверьте!). Функция f называется *непрерывной в точке* $x\in\mathbb{R}$, если

$$\forall (a,b)\ni f(x)\ \ \exists (c,d)\ni x\ :\ f\bigl((c,d)\bigr)\subset (a,b).$$

Интервал, напомним, является простейшим примером открытого подмножества прямой, — подмножества, каждая точка которого входит в него вместе с некоторой ε-окрестностью. Оказывается, именно свойства открытых множеств играют решающую роль в определении понятия непрерывности.

2.1.1 Топология и топологическое пространство

Мы будем использовать следующий подход. Пусть дано множество X. Фиксируем семейство его подмножеств и объявим эти множества открытыми. Оказывается, если выбранное семейство удовлетворяет набору простых аксиом, то получается содержательная теория непрерывных отображений, обобщающая понятие непрерывной функции из математического анализа. Такое семейство подмножеств называется *топологией*, а множество с фиксированной топологией называется *топологическим пространством*. Перейдем к формальностям.

Определение 2.1. Пусть X — произвольное множество и $\tau = \{U_\alpha\}$ — некоторое семейство подмножеств множества X. Семейство τ называется *топологией*, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

(1) само пространство X и пустое множество принадлежат τ;

(2) объединение любого семейства множеств из τ принадлежит τ;

(3) пересечение любого конечного семейства множеств из τ также принадлежит τ.

Определение 2.2. Множество X с фиксированной топологией τ называется *топологическим пространством* и обозначается через (X, τ). Элементы множества X называются *точками*. Множества из τ называются *открытыми в* (X, τ).

Замечание 2.3. Свойства из определения 2.1 иногда называют *аксиомами открытых множеств*. Таким образом, задать топологию на множестве X — это значит фиксировать семейство подмножеств в X, удовлетворяющих аксиомам открытых множеств.

Открытые множества используются для того, чтобы определить окрестности точки.

Определение 2.4. *Окрестностью точки x* топологического пространства (X, τ) будем называть произвольное открытое подмножество U, т.е. $U \in \tau$, содержащее x.

Замечание 2.5. Ниже, там, где из контекста понятно, о какой именно топологии идет речь, мы часто будем обозначать топологическое пространство (X, τ) просто через X.

Простейшие примеры

Пример 2.6. Пусть X — произвольное множество. Семейство τ_d, состоящее из всех подмножеств множества X, является, очевидно, топологией. Эта топология называется *дискретной*, а само пространство — *дискретным топологическим пространством*. Каждое подмножество дискретного топологического пространства является открытым. Любое подмножество дискретного топологического пространства является окрестностью каждой своей точки. В частности, каждая точка является своей окрестностью.

Пример 2.7. Семейство $\tau_0 = \{X, \emptyset\}$ является топологией на X. Эта топология называется *тривиальной*. Каждая точка топологического пространства (X, τ_0) обладает единственной окрестностью — множеством X. Каждое собственное (т.е. не совпадающее со всем X и не пустое) подмножество в X не является открытым.

Пример: метрическая топология

На каждом метрическом пространстве можно естественным образом задать топологию. Поэтому метрические пространства являются важным частным случаем топологических пространств.

Напоминание 2.8. Пусть X — некоторое множество. Напомним, что функция $\rho\colon X \times X \to X$ называется *метрикой* или, иногда, *функцией расстояния*, если она удовлетворяет следующим свойствам

(неотрицательность и невырожденность) для любых x, $y \in X$ выполнено $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0$, если и только если $x = y$,

(симметричность) для любых x, $y \in X$ выполнено $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(неравенство треугольника) для любых x, y, $z \in X$ выполнено неравенство $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Если на множестве X фиксирована функция расстояния ρ, то пара (X, ρ) называется *метрическим пространством*. Элементы метрического пространства называются *точками*. Значение $\rho(x, y)$ функции расстояния ρ на паре точек x и y называется *расстоянием между точками*.

Пространство $\mathbb{R}^n$ с евклидовым расстоянием — стандартный пример метрического пространства.

Напоминание 2.9. Функция $h\colon L \to \mathbb{R}$ на вещественном линейном пространстве L называется *нормой*, если она удовлетворяет следующим свойствам

(неотрицательность и невырожденность) $h(x) \geq 0$ для любого $x \in L$, причем $h(x) = 0$, если и только если $x = 0$,

(полуоднородность) для любого $x \in L$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $h(\lambda x) = |\lambda| h(x)$,

(неравенство треугольника) для любых x, $y \in L$ выполнено неравенство $h(x + y) \leq h(x) + h(y)$.

Линейное пространство, на котором задана некоторая норма, называют *нормированным пространством.* Обычно норму $h(x)$ вектора x обозначают через $\|x\|$ или просто $|x|$. Если $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, то функция $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ является нормой (Проверьте!), которая называется *евклидовой нормой.*

Любое нормированное пространство $(L, \|\cdot\|)$ можно превратить в метрическое, взяв в качестве метрики функцию $d(x,y) = \|x-y\|$ (Проверьте аксиомы метрики!).

Пусть x — произвольная точка метрического пространства (X,ρ). *Открытым шаром с центром в x радиуса ε* называется множество всех точек y из X, таких, что $\rho(x,y) < \varepsilon$. Точка a множества $A \subset X$ называется *внутренней точкой для A*, если в A содержится некоторый открытый шар $O_\varepsilon(a)$. Множество всех внутренних точек множества A называется *внутренностью множества A* и обозначается через $\operatorname{Int} A$. Ячно, что $\operatorname{Int} A \subset A$, обратное, вообще говоря, неверно. Множество A называется *открытым в X* (как в метрическом пространстве), если его внутренность совпадает с ним самим: $A = \operatorname{Int} A$.

Утверждение 2.10. *Пусть (X,ρ) — произвольное метрическое пространство. Объединение любого семейства множеств, открытых в X, открыто в X, и пересечение конечного числа множеств, открытых в X, также открыто в X.*

Доказательство. Действительно, пусть $\{A_\alpha\}$ — произвольное семейство открытых подмножеств пространства X. Обозначим через A объединение всех множеств A_α, и пусть a — произвольная точка множества A. Тогда существует такое α_0, что $a \in A_{\alpha_0}$, а множество A_{α_0} — открыто по условию. Поэтому существует открытый шар $O_\varepsilon(a)$, целиком лежащий в A_α. Но тогда $O_\varepsilon(a) \subset A$, и, значит, каждая точка множества A — внутренняя, т.е., по определению, A — открыто в метрическом пространстве X.

Пусть теперь α пробегает конечное множество значений: $\alpha = 1,\dots,N$. Обозначим через A' пересечение всех множеств A_α, и пусть a — произвольная точка из A'. Тогда $a \in A_\alpha$ для каждого $\alpha = 1,\dots,n$. Поэтому для каждого α существует такое ε_α, что шар $O_{\varepsilon_\alpha}(a)$ целиком лежит в A_α. Положим $\varepsilon = \min_\alpha \varepsilon_\alpha$ и заметим, что $\varepsilon > 0$, так как набор множеств A_α конечен. Тогда $O_\varepsilon(a) \subset O_{\varepsilon_\alpha}(a)$ для любого α, и поэтому $O_\varepsilon(a) \subset A'$, т.е. каждая точка a из A' является внутренней для A'. Доказательство закончено. $\square$

Так как само множество X очевидно открыто, а пустое множество открыто по определению, то имеет место следующее утверждение.

Следствие 2.11. *Семейство всех открытых подмножеств метрического пространства образуют топологию.*

Определение 2.12. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство. Топология из следствия 2.11, т.е. топология, состоящая из всех открытых подмножеств множества X (открытых как в метрическом пространстве), называется *метрической* или *порожденной метрикой ρ* и обозначается через τ_ρ.

Пример 2.13. На произвольном не пустом множестве X рассмотрим функцию расстояния, равную 1 на любой паре различных элементов из X. Легко проверить, что соответствующая метрическая топология совпадает с дискретной топологией на множестве X. Поэтому дискретная топология является метрической.

Упражнение 2.1. Сколько различных топологий можно ввести на множестве X, состоящем из двух элементов? Каждая ли из них является метрической?

Пример: задание топологии с помощью базы окрестностей

Описанная выше конструкция метрической топологии (с помощью открытых шаров) может быть обобщена. Оказывается, в общем случае топологию можно построить начав с более узкого семейства окрестностей точек множества X.

Определение 2.14. Пусть X — произвольное множество. Семейство β подмножеств множества X называется *базой окрестностей*, если

(1) каждый элемент $x \in X$ содержится в некотором $U \in \beta$, и

(2) для любых двух пересекающихся U, $V \in \beta$ и любого $x \in U \cap V$ найдется такой $W \in \beta$, что $x \in W \subset U \cap V$.

Элементы множества X, на котором задана некоторая база, принято называть *точками*. Каждый элемент базы β, содержащий точку x, будем называть *β-окрестностью точки x* или ее *базовой окрестностью*.

Задача 2.15. Пусть β — некоторая база окрестностей на множестве X. Пусть конечный набор $V_1, \ldots, V_k$ элементов базы имеет непустое пересечение. Тогда для каждой точки $x \in \cap_{i=1}^k V_i$ существует элемент базы V такой, что $x \in V \subset \cap_{i=1}^k V_i$.

Пусть дано множество X с базой β. Будем называть подмножество $A \subset X$ *открытым* (относительно базы β), если для любой точки $x \in A$ найдется такое $U \in \beta$, что $x \in U \subset A$ (т.е. каждая точка входит в A вместе с некоторой своей базовой окрестностью). Пустое множество будем считать открытым по определению.

Замечание 2.16. Как нетрудно заметить, это определение аналогично определению открытого подмножества метрического пространства (вместо открытых шаров берутся элементы базы, см. ниже пример 2.20).

Любой элемент любой базы на X является открытым подмножеством в X (в смысле этой базы).

Утверждение 2.17. *Непустое подмножество A множества X с базой β является открытым в смысле этой базы, если и только если $A = \cup_\alpha U_\alpha$ для некоторого семейства $\{U_\alpha\} \subset \beta$.*

Доказательство. Действительно, если A открыто, то, по определению, для каждой точки $x \in A$ существует $U = U_x \in \beta$ такое, что $x \in U_x \subset A$. Тогда $\cup_{x\in A} U_x = A$, что и требовалось. Обратно, если $A = \cup_\alpha U_\alpha$, где $\{U_\alpha\} \subset \beta$, то для каждого $x \in A$ найдется U_α такое, что $x \in U_\alpha \subset A$, то есть A — открыто. □

Утверждение 2.18. *Пусть X — произвольной множество с некоторой базой β, и τ_β — семейство всех открытых подмножеств множества X (относительно этой базы). Тогда τ_β — топология на X.*

Доказательство. Пустое множество является открытым по определению, каждая точка $x \in X$ содержится в некотором элементе базы, который, очевидно, содержится в X, поэтому X тоже открыто, что доказывает первое свойство.

Пусть $\{U_\alpha\}$ — произвольное семейство открытых множеств (в смысле базы β), положим $U = \cup_\alpha U_\alpha$, и пусть $x \in U$ — произвольная точка. Тогда $x \in U_\alpha$ для некоторого α; множество U_α открыто, поэтому существует элемент базы V такой, что $x \in V \subset U_\alpha$, откуда $x \in V \subset U$, и, значит, U — открыто.

Наконец, пусть $U_1, \ldots, U_k$, $U = \cap_{i=1}^k U_i$, и $x \in U$ — произвольная точка из пересечения. Так как каждое U_i — открыто, то для каждого i существует элемент базы V_i такой, что $x \in V_i \subset U_i$. Поэтому $x \in \cap_i V_i$, и существует элемент базы V, $x \in V \subset \cap_i V_i \subset U$, см. задачу 2.15. Поэтому U — открыто, что и требовалось. □

Будем говорить, что топология τ_β *порождена базой* β или *задана с помощью базы* β. Таким образом, каждая база порождает некоторую топологию. При этом разные базы могут задавать одну и ту же топологию (Приведите пример!). Обратно, пусть τ — произвольная топология на X. Тогда $\tau = \tau_\beta$ для некоторой базы β на X(Проверьте!).

Замечание 2.19. Если топология на X задана с помощью некоторой базы β, то это может упростить некоторые доказательства. Например, чтобы показать, что некоторое подмножество $A \subset X$ не является открытым, достаточно предъявить точку $a \in A$ для которой не существует элемента базы $V \in \beta$ такого, что $x \in V \subset A$ (а не произвольного открытого множества V). Другими словами, часто вместо произвольной открытой окрестности достаточно рассматривать произвольную базовую окрестность.

Пример 2.20. Пусть (X, ρ) —метрическое пространство. Для каждой точки $x \in X$ и каждого положительного числа $r > 0$ множество $U_r(x) = \big\{y \in X \mid \rho(x,y) < r\big\}$ назовем *открытым шаром радиуса r с центром в точке x*. Семейство $\beta_\rho = \big\{U_r(x) \mid x \in X, r > 0\big\}$ открытых шаров в метрическом пространстве образует базу. Действительно, каждая точка x метрического пространства, очевидно, содержится в открытом шаре $U_r(x)$ любого положительного радиуса. Далее, пусть шары $U_a(x)$ и $U_b(y)$ пересекаются, и z — произвольная точка их пересечения. Положим $c = \min\big\{a - \rho(x,z), b - \rho(y,z)\big\}$.

Так как $z \in W := U_a(x) \cap U_b(y)$, то $c > 0$. Остается показать, что $U_c(z) \subset W$. Это следует из неравенства треугольника: если $t \in U_c(z)$, то

$$\rho(x,t) \le \rho(x,z) + \rho(z,t) < \rho(x,z) + c \le \rho(x,z) + \big(a - \rho(x,z)\big) = a,$$

откуда $t \in U_a(x)$. Включение $t \in U_b(y)$ проверяется точно так же. Итак семейство β_ρ образует базу окрестностей, которая называется *метрической*.

Задача 2.21. Пусть (X, ρ) —метрическое пространство. Проверьте, что топология, порожденная метрической базой, совпадает с метрической топологией.

Замечание 2.22. Любая топология, определенная с помощью аксиом топологии, обладает некоторой базой. Например, в качестве базы можно взять всю топологию.

2.1.2 Замкнутые подмножества

Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Его подмножество F назовем *замкнутым*, если дополнение $X \setminus F$ открыто в X.

Следующее утверждение является прямым следствием аксиом открытых множеств и простейших свойств теоретико-множественных операций (объединения, пересечения и дополнения).

Утверждение 2.23. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Тогда его замкнутые подмножества обладают следующими свойствами.*

(1) *Множества $\emptyset$ и X являются замкнутыми.*

(2) *Пересечение произвольного семейства замкнутых подмножеств пространства X замкнуто в X.*

(3) *Объединение любого конечного семейства замкнутых подмножеств пространства X замкнуто в X.*

Замечание 2.24. Свойства замкнутых множеств из утверждения 2.23 иногда называют *аксиомами замкнутых множеств*. Если фиксировать семейство подмножеств некоторого множества X, удовлетворяющее этим свойствам, и объявить их замкнутыми подмножествами в X, а дополнения до них объявить открытыми, то так определенная система открытых подмножеств будет удовлетворять аксиомам открытых множеств и, следовательно, задаст некоторую топологию на X (Проверьте!).

Пример 2.25. Пусть (X, τ_d) — топологическое пространство с дискретной топологией. Тогда любое подмножество X — замкнуто (и, одновременно, открыто).

Пример 2.26. Пусть (X, τ_0) — топологическое пространство с тривиальной топологией. Тогда у X только два замкнутых подмножества, а именно, $\emptyset$ и само X.

В качестве следующего примера рассмотрим метрические пространства. В этом случае понятие замкнутого множества можно естественно определить с помощью метрики. Напомним соответствующую конструкцию и покажем, что она эквивалентна топологической.

Конструкция 2.27. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $A \subset X$ — произвольное его подмножество. Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения множества* A, если любой открытый шар $O_\varepsilon(x)$ пересекается с A. В частности, каждая точка $a \in A$ является точкой прикосновения множества A, хотя обратное неверно.

Замыканием $\operatorname{Cl} A$ подмножества A называется множество всех точек прикосновения множества A. Ясно, что $A \subset \operatorname{Cl} A$; обратное, вообще говоря, неверно. Если замыкание $\operatorname{Cl} A$ множества A совпадает с самим A, т.е. $\operatorname{Cl} A = A$, то множество A называется *замкнутым в* X.

Пример 2.28. Пусть $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$. Множество всех точек прикосновения интервала (a, b) — это отрезок $[a, b]$. В частности, a и b — точки прикосновения множества (a, b). Поэтому замыкание $\operatorname{Cl}(a, b)$ совпадает с отрезком $[a, b]$.

Утверждение 2.29. *Пусть (X, ρ) — некоторое метрическое пространство. Подмножество $A \subset X$ является открытым, если и только если его дополнение, т.е. множество $X \setminus A$, замкнуто.*

Доказательство. Пусть сначала A — открыто. Рассмотрим произвольную точку $a \in A$. По определению, существует открытый шар $O_\varepsilon(a)$, целиком лежащий в A. Но тогда этот шар не пересекается с $X \setminus A$, поэтому a не является точкой прикосновения множества $X \setminus A$. Но тогда $\overline{X \setminus A} = X \setminus A$, т.е. дополнение до A замкнуто в X.

Обратно: пусть теперь множество $X \setminus A$ замкнуто в X. Это означает, что никакая точка из A не является точкой прикосновения для $X \setminus A$. Пусть a — произвольная точка из A. Тогда существует открытый шар $O_\varepsilon(a)$ не пересекающийся с $X \setminus A$ и, значит, этот шар целиком лежит в A. Последнее означает, что каждая точка из A является внутренней для A, т.е. A открыто. Доказательство закончено. $\square$

2.1.3 Топологические внутренность и замыкание

Использую понятие окрестности точки, можно перенести понятие внутренности и замыкания со случая метрического пространства на общий случай топологического пространства.

Определение 2.30. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Точка a множества $A \subset X$ называется *внутренней точкой для* A, если в A содержится некоторая окрестность U точки a. Множество всех внутренних точек множества A называется *внутренностью множества* A и обозначается через $\operatorname{Int} A$.

Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения множества* $A \subset X$, если любая окрестность точки x пересекается с A. *Замыканием* $\mathrm{Cl}\, A$ множества A называется множество всех его точек прикосновения.

Утверждение 2.31. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Множество $A \subset X$ является открытым, если и только если $\mathrm{Int}\, A = A$. Множество $A \subset X$ является замкнутым, если и только если $\mathrm{Cl}\, A = A$.*

Доказательство. Каждое открытое множество само является окрестностью каждой своей точки, поэтому совпадает со своей внутренностью. Обратно, если каждая точка множества A является внутренней, то для каждой точки $a \in A$ существует открытое множество $U(a) \subset A$, содержащее a. Возьмем объединение $U = \cup_{a \in A} U(a)$. По определению, U — открыто. Кроме того, так как каждое $U(a) \subset A$, то само множество U содержится в A. В то же время $A \subset U$, так как каждая точка $a \in U(a)$. Поэтому $U = A$ и, в частности, A — открыто.

Далее, множество A — замкнуто, если и только если $X \setminus A$ открыто. Последнее, как мы только что показали, равносильно тому, что каждая точка из $X \setminus A$ обладает окрестностью, не пересекающейся с A, что, в свою очередь, равносильно включению $\mathrm{Cl}\, A \subset A$, т.е. $\mathrm{Cl}\, A = A$. Доказательство закончено. □

Следствие 2.32. *Пусть A — произвольное подмножество топологического пространства (X, ρ). Тогда внутренность $\mathrm{Int}\, A$ множества A открыта, а замыкание $\mathrm{Cl}\, A$ множества A — замкнуто.*

Если топология задана с помощью некоторой базы β, то при определении внутренности и точек прикосновения достаточно рассматривать базовые окрестности.

Утверждение 2.33. *Пусть топология τ пространства X задана базой β. Тогда точка $a \in A$ является внутренней для A, если и только если существует базовая окрестность $V \in \beta$ такая, что $a \in V \subset A$. Точка $x \in X$ является точкой прикосновения для A, если и только если любая базовая окрестность точки x пересекает A.*

Доказательство. Начнем с первого утверждения. С одной стороны, базовая окрестность является окрестностью, поэтому если существует $V \in \beta$ такая, что $a \in V \subset A$, то точка a внутренняя по определению. Обратно, если $U \in \tau$ — открытая окрестность точки a такая, что $U \subset A$, то, так как топология порождена базой, существует элемент базы V такой, что $a \in V \subset U \subset A$, что и требовалось.

Далее, если x — предельная точка множества A, то любая окрестность точки x, в том числе и базовая, пересекается с A. Обратно, пусть каждая базовая окрестность точки x пересекает A, и U — произвольная окрестность точки x. Тогда существует $V \in \beta$ такая, что $x \in V \subset U$. Но V пересекается с A, и $(V \cap A) \subset (U \cap A)$, то есть $U \cap A$ не пусто. □

Определение 2.34. Топологической *границей* множества $A \subset X$ называется множество $\partial A = \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A$.

Заметим, что граница ∂A произвольного множества A замкнута как пересечение двух замкнутых множеств $\operatorname{Cl} A$ и $X \setminus \operatorname{Int} A$.

2.1.4 Непрерывные отображения

Перейдем к определению непрерывных отображений.

Определение 2.35. Отображение $f\colon X \to Y$ топологического пространства (X, τ_X) в топологическое пространство (Y, τ_Y) называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности $V\big(f(x_0)\big) \in \tau_Y$ точки $f(x_0)$ в пространстве Y существует такая окрестность $U(x_0) \in \tau_X$ точки x_0 в пространстве X, что $f\big(U(x_0)\big) \subset V\big(f(x_0)\big)$. Отображение f называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Ясно, что непрерывность зависит от выбора топологий. Прежде чем приводить примеры, докажем критерий непрерывности.

Напоминание 2.36. Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольное отображение множеств, и $y \in Y$ — произвольный элемент множества Y. Каждый элемент $x \in X$ такой, что $f(x) = y$ называется *прообразом* элемента y. *Полным прообразом элемента* y называется подмножество $f^{-1}(y) = \big\{x \in X \mid f(x) = y\big\} \subset X$, т.е. полный прообраз — это множесто во всех прообразов. Аналогично, для произвольного $A \subset Y$ множество $f^{-1}(A) = \big\{x \in X \mid f(x) \in A\big\}$ называется полным прообразом подмножества A. Пусть $A \subset Y$ — произвольное подмножество в Y и $\{U_\alpha\}$ — произвольное семейство подмножеств множества Y. Тогда

- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(Y) = X$;
- $f^{-1}\big(\cup_\alpha U_\alpha\big) = \cup_\alpha f^{-1}(U_\alpha)$;
- $f^{-1}\big(\cap_\alpha U_\alpha\big) = \cap_\alpha f^{-1}(U_\alpha)$;
- $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

Теорема 2.37. *Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно, если и только если выполнено одно из следующих эквивалентных условий*:

- *прообраз любого открытого множества $A \subset Y$ открыт в X*;
- *прообраз любого замкнутого множества замкнут.*

Доказательство. Пусть сначала f непрерывно. Рассмотрим произвольное открытое множество $A \subset Y$ и обозначим через $f^{-1}(A)$ его прообраз при отображении f. Пусть $x \in f^{-1}(A)$ — произвольная точка из прообраза; обозначим через $y = f(x)$ образ точки x при отображении f. Тогда y принадлежит открытому множеству A. Возьмем A в качестве окрестности точки y: $V(y) = A$. Так как отображение f непрерывно в точке x, то существует окрестность $U(x)$ точки x, такая, что $f(U(x)) \subset V(y) = A$, но тогда $U(x) \subset A$, и множество $f^{-1}(A)$ открыто по утверждению 2.31.

Обратно, пусть прообраз произвольного открытого подмножества из Y открыт в X. Фиксируем произвольную точку $x \in X$, и пусть, как и выше, $y = f(x)$. Рассмотрим произвольную окрестность $V(y)$ точки Y. По определению, $V(y)$ — открытое множество, значит, $f^{-1}(V(y))$ — открытое подмножество в X, причем $x \in f^{-1}(V(y))$. Выберем в качестве окрестности $U(x)$ точки x множество $f^{-1}(V(y))$. Тогда $f(U(x)) \subset V(y)$, поэтому отображение f непрерывно в произвольной точке x, что и требовалось доказать.

Для завершения доказательства утверждения осталось показать, что сформулированные в нем условия непрерывности эквивалентны. Это немедленно следует из соотношения $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$, справедливого для произвольного множества $A \subset Y$ и отображения f. Доказательство закончено. $\square$

Замечание 2.38. Вообще говоря, образ открытого (замкнутого) множества при непрерывном отображении не обязан быть открытым (замкнутым). Приведите соответствующие примеры.

Упражнение 2.2. Описать все непрерывные отображения из произвольного топологического пространства X в пространство с тривиальной топологией. Описать все непрерывные отображения из пространства с дискретной топологией в произвольное топологическое пространство.

Следствие 2.39. *Композиция непрерывных отображений непрерывна.*

Доказательство. Действительно, пусть (X_i, τ_i), $i = 1, 2, 3,$ — топологические пространства, и $f\colon X_1 \to X_2$, $g\colon X_2 \to X_3$ — непрерывные отображения. Рассмотрим композицию $g \circ f\colon X_1 \to X_3$. Пусть $U \in \tau_3$ — произвольное открытое подмножество в (X_3, τ_3). Заметим, что $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}\big(g^{-1}(U)\big)$. По теореме 2.37 множество $g^{-1}(U)$ открыто так как g непрерывно, поэтому $f^{-1}\big(g^{-1}(U)\big)$ тоже открыто по той же теореме в силу непрерывности f. Таким образом, прообраз каждого открытого множества $U \subset X_3$ при отображении $g \circ f$ открыт в X_1, поэтому отображение $g \circ f$ непрерывно. $\square$

Следующие общие свойства непрерывных отображений легко следуют из теоремы 2.37.

Предложение 2.40. (1) *Тождественное отображение топологического пространства в себя непрерывно.*

(2) *Если $f\colon X \to \mathbb{R}$ и $g\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, и λ — произвольное вещественное число, то следующие функции также непрерывны: $\lambda f\colon X \to \mathbb{R}$, $f + g\colon X \to \mathbb{R}$, $f g\colon X \to \mathbb{R}$, и если $g(x) \neq 0$ при всех $x \in X$, то и $f/g\colon X \to \mathbb{R}$.*

2.1.5 Непрерывность и база топологии

Если топология топологических пространств заданы с помощью базы β, т.е. $\tau = \tau_\beta$. Тогда при определении непрерывности можно ограничиться рассмотрением базовых окрестностей (а не всех).

Утверждение 2.41. *Пусть топологии пространств (X, τ_X) и (Y, τ_Y) порождены базами β_X и β_Y соотвественно, и пусть $f\colon X \to Y$ — отображение. Тогда*

- *Отображение f непрерывно в точке x тогда и только тогда, когда для любой базовой окрестности $V \in \beta_Y$ точки $f(x)$, т.е. $f(x) \in V \in \beta_Y$, существует базовая окрестность $U \in \beta_X$ точки x, т.е. $x \in U \in \beta_X$ такая, что $f(U) \subset V$.*

- *Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз каждой базовой окрестности $V \in \beta_Y$ открыт в X.*

Доказательство. **1.** Пусть сначала $f \in C(x)$. Так как каждая базовая окрестность — открытое множество, для любой базовой окрестности V точки $f(x)$ существует открытая окрестность $A \in \tau_X$ точки x такая, что $f(A) \subset V$. Но $x \in A$ и, так как τ_X порождена базой β_X, существует базовая окрестность $U \in \beta_X$ точки X целиком лежащая в A. Но $f(U) \subset f(A) \subset V$, что и требовалось.

Обратно, пусть $B \in \tau_Y$ — произвольная открытая окрестность точки $f(x)$. Так как топология τ_Y порождена базой β_Y и $f(x) \in B$, то существует элемент $V \in \beta_Y$ такой, что $f(x) \in V \subset B$. По предположению, существует $U \in \beta_X$ такое, что $f(U) \subset V$. Но U — открытое подмножество в X, и $f(U) \subset V \subset B$, что и требовалось.

2. Пусть сначала f — непрерывно. Так как любой элемент V базы β_Y является открытым подмножеством в Y, то по теореме 2.37 заключаем, что $f^{-1}(V)$ открыто в X, что и требовалось. Обратно, пусть $B \in \tau_Y$ — произвольное открытое подмножество в Y. Тогда по утверждению 2.18 множество B представимо в виде объединения элементов базы, т.е. $B = \cup_\alpha V_\alpha$. Тогда $f^{-1}(B) = \cup_\alpha f^{-1}(V_\alpha)$, а каждое множество $f^{-1}(V_\alpha)$ является открытым по предположению, поэтому и $f^{-1}(B)$ открыто как объединение открытых множеств. Доказательство закончено. $\square$

Пример 2.42. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y)— метрические пространства. Превратим их в топологические пространства, наделив стандартными метрическими топологиями. Тогда определение непрерывности принимает следующий стандартный для метрических пространств вид. Отображение $f\colon X \to Y$ метрических пространств называется непрерывным в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что $f\big(U_\delta(x_0)\big) \subset V_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$, т.е. из $\rho_X(x_0, x) < \delta(\varepsilon)$ следует, что $\rho_Y\big(f(x_0), f(x)\big) < \varepsilon$.

Пример 2.43. Еще один важный частный случай — это отображения топологического пространства X в числа. Такие отображения называют *функциями.* Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая зависящая от ε окрестность $U(x_0)$ этой точки в пространстве X, что для любой точки x из $U(x_0)$ имеет место неравенство $\big|f(x_0) - f(x)\big| < \varepsilon$.

Замечание 2.44. Рассмотрим отображение $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Это отображение сопоставляет каждому $t \in [a,b]$ точку $\bigl(x_1(t),\dots,x_n(t)\bigr) \in \mathbb{R}^n$, тем самым задавая функции $x_i(t)$, которые будем называть *координатными функциями отображения* γ. Непосредственно проверяется следующее несложное, но полезное предложение.

Предложение 2.45. *Отображение $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все задаваемые им координатные функции.*

Замечание 2.46. Выбрав подходящим образом базы, можно построить довольно неожиданные примеры непрерывных (или разрывных — не являющихся непрерывными) функций.

Пример 2.47. Рассмотрим множество $\mathbb{R}$ и семейство его подмножеств β, состоящее из всевозможных лучей $(a,+\infty)$. Легко проверить, что β — база. Тогда функция $f(x) = 2x$ непрерывна, но функция $g(x) = -x$ непрерывной не является (проверьте), если рассматривать функции f и g как отображения из $(\mathbb{R},\beta)$ в $(\mathbb{R},\beta)$.

Следствие 2.48. *Пусть p — произвольная точка в $\mathbb{R}^n$. Для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ положим $\rho_p(x) = |px|$. Тогда ρ_p — непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Действительно, если $p = (p_1,\dots,p_n)$ и $x = (x_1,\dots,x_n)$, то координаты точки x — непрерывные функции на $\mathbb{R}^n$, и расстояние $\rho_p(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - p_i)^2}$ является композицией непрерывных функций, откуда и следует непрерывность ρ_p. □

2.1.6 Конструкции

В данном разделе мы опишем несколько стандартных конструкций, позволяющих построить новые топологии из имеющихся.

Дизъюнктное объединение

Пусть X и Y — топологические пространства с топологиями τ_X и τ_Y, причем множества X и Y не пересекаются. Тогда на множестве $X \cup Y$ определена топология с базой $\tau_X \cup \tau_Y$. Другими словами, множество $U \subset X \cup Y$ открыто в этой топологии, если и только если $U \cap X$ и $U \cap Y$ открыты в X и Y соответственно, или, что все равно, $U = V_X \cup V_Y$ — объединение открытых множеств $V_X \subset X$ и $V_Y \subset Y$. Эта топология называется топологией *дизъюнктного объединения.*

Индуцированная топология

Пусть X — произвольное топологическое пространство с топологией τ_X. Положим $\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau_X\}$.

Упражнение 2.3. Проверьте, что семейство $\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau_X\}$ подмножеств множества Y является топологией на Y.

Определение 2.49. Пусть $Y \subset X$ — произвольное подмножество топологического пространства X. Топология τ_Y называется *индуцированной из* X.

Пример 2.50. Будем рассматривать плоскость как модель листа бумаги, тогда каждый рисунок можно рассматривать как подмножество в $\mathbb{R}^2$. В частности, так можно представлять себе буквы. Описанная выше конструкция индуцированной топологии превращает все такие рисунки в топологические пространства. Также получаются топологические пространства, соответствующие геометрическим фигурам, например ломаной, треугольнику, окружности, кругу и т.д.

Упражнение 2.4. Предположим, что топология на X задана базой β_X. Проверьте, что семейство $\beta_Y = \{Y \cap U : U \in \beta_X\}$ подмножеств множества Y является базой окрестностей на Y. Проверьте, что топология, заданная базой β_Y, совпадает с индуцированной топологией τ_Y.

Пример 2.51. Пусть X — окружность $x^2 + y^2 = 1$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y. Тогда индуцированную базу окрестностей будут составлять всевозможные пересечения окружности с открытыми кругами, т.е. открытые дуги окружности, и сама окружность.

Фактор топология

Опишем еще одну важную конструкцию, позволяющую строить новые топологические пространства (см. необходимые понятия в напоминании 1.19).

Пусть (X, τ) — топологическое пространство с топологией τ, и предположим, что на множестве X задано некоторое отношение эквивалентности. Рассмотрим следующее семейство подмножеств фактор множества X/R:

$$\tau_R = \big\{U \subset X/R \mid \pi^{-1}(U) \in \tau\big\},$$

где $\pi\colon X \to X/R$ — каноническая проекция.

Следующее утверждение — простое упражнение на свойства полного прообраза.

Лемма 2.52. *Семейство τ_R удовлетворяет аксиомам топологии.*

Доказательство. Действительно, $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$ и $\pi^{-1}(X/R) = X \in \tau$, поэтому выполнена первая аксиома топологии. Далее, пусть $\{U_\alpha\} \subset \tau_R$ произвольное семейство элементов τ_R. Тогда $\pi^{-1}(U_\alpha) \in \tau$ для каждого α. С другой стороны, по упоминавшимся уже свойствам полного прообраза, $\pi^{-1}\big(\cup_\alpha U_\alpha\big) = \cup_\alpha \pi^{-1}(U_\alpha) \in \tau$. Наконец, пусть $\{U_i\} \subset \tau_R$ произвольное конечное семейство элементов τ_R. Тогда $\pi^{-1}(U_i) \in \tau$ для каждого i, и $\pi^{-1}\big(\cap_i U_i\big) = \cap_i \pi^{-1}(U_i) \in \tau$. $\square$

Топология τ_R называется *фактор-топологией*, а топологическое пространство $(X/R, \tau_R)$ — *фактор-пространством.*

Пример 2.53 (Склеивание пары точек)**.** Пусть X — топологическое пространство, x, $y \in X$ — пара его различных точек. Определим отношение эквивалентности R на X, положив $a \sim b$, если и только если $a = b$, или $a = x$ и $b = y$, или $b = x$ и $a = y$. Тогда про пространство X/R говорят, что оно получено из X *склейкой точек x и y.*

Пример 2.54 (Букет)**.** Пусть X и Y — топологические пространства, $x \in X$, $y \in Y$ — фиксированные точки в них, и $X \sqcup Y$ — дизъюнктное объединение. Тогда склейка $X \sqcup Y$ по точкам x и y называется *букетом* пространств X и Y (с отмеченными точками x и y).

Пример 2.55 (Склеивание концов отрезка)**.** Пусть $X = [a, b]$. Рассмотрим пространство Y, полученное из X склейкой точек a и b, см. пример 2.53. Точки этого пространства — это одноэлементные классы эквивалентности точек интервала (a, b), которые естественно отождествлять с самими точками интервала, и еще один класс эквивалентности $[a] = [b] = \{a, b\}$, состоящий из двух склеенных точек. В качестве окрестности точки $x \in (a, b) \subset Y$ можно взять любой интервал вида $(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_2) \subset (a, b)$, а в качестве окрестности точки $[a]$ можно взять образ объединения $[a, a+\varepsilon_1) \cup (b-\varepsilon_2, b]$ двух открытых в $[a, b]$ полуинтервалов при канонической проекции $\pi\colon X \to Y$. При этой проекции точки a, $b \in X$ переходят в один и тот же класс $[a] \in Y$ («точки a и b склеиваются»).

Пример 2.56 (Факторизация по подмножеству)**.** Более общо, пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$ — его непустое подмножество. Определим отношение эквивалентности R_A на X, положив $a \sim b$, если и только если $a = b$, или a, $b \in A$. Тогда про пространство X/R_A говорят, что оно получено из X *факторизацией по множеству A*. Будем обозначать его через X/A. Если $A = \{x, y\}$, то получаем пространство со склеенными точками x и y, см. пример 2.53.

Пример 2.57 (Топологический граф)**.** Пусть $G = (V, E, \partial)$ — некоторый граф. Используем операцию склеивания точек для построения по графу G топологического пространства X_G, которое будем называть *топологическим графом*, соответствующим G. Каждому ребру $e \in E$ графа G поставим в соответствие отрезок $[a_e, b_e]$, будем считать, что отрезки попарно не пересекаются, тогда их объединение $\sqcup_{e\in E}[a_e, b_e]$ представляет собой топологическое пространство. Добавим к полученному пространству множество вершин графа, каждая из которых рассматривается как одноточечное пространство: $Y = V \cup \big(\sqcup_{e\in E}\,[a_e, b_e]\big)$. Склеим теперь некоторые точки из Y так. Для каждого $e \in E$, если $\partial^{-1}(e)$ состоит из одной вершины, то склеим концы отрезка $[a_e, b_e]$ с этой вершиной, а если $\partial^{-1}(e)$ состоит из двух вершин, то склеим один конец отрезка $[a_e, b_e]$ с одной из них, а второй — со второй.

2.1.7 Гомеоморфизм

Какие топологические пространства следует считать «одинаковыми»? Например, два линейных пространства изоморфны, если между существует линейная биекция. В случае топологических пространств ключевым свойством является непрерывность.

Определение 2.58. Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств называется *гомеоморфизмом*, если f взаимно однозначно, и оба отображения f и f^{-1} непрерывны. Топологические пространства X и Y называются *гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм $f\colon X \to Y$.

Замечание 2.59. Из теоремы 2.37 вытекает, что если $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм, то множество $U \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда открыто множество $f(U) \subset Y$. Поэтому гомеоморфизм устанавливает биекцию между топологиями.

Замечание 2.60. На гомеоморфизм f можно смотреть как на "переименование точек" в пространстве Y: если $f(x) = y$, то x можно воспринимать как новое имя точки y. При таком взгляде становится очевидно, что все топологические свойства гомеоморфных топологических пространств одинаковы.

Топологические пространства принято рассматривать с точностью до гомеоморфизма.

Замечание 2.61. Из предложения 2.40 вытекает, что

- каждое пространство гомеоморфно само себе,
- X гомеоморфно Y, если и только если Y гомеоморфно X,
- если X гомеоморфно Y, а Y гомеоморфно Z, то и X гомеоморфно Z.

Таким образом, отношение гомеоморфности — это отношение эквивалентности (рефлексивно, симметрично, транзитивно).

Обычно гомеоморфность двух пространств проще всего устанавливается явным предъявлением подходящего гомеоморфизма.

Пример 2.62. Покажем, что прямая $\mathbb{R}$ и интервал (a, b) гомеоморфны. Действительно, в частном случае, когда $(a, b) = (-\pi/2, \pi/2)$, гомеоморфизм устанавливается функцией $y = \operatorname{arctg} x$, так как она и обратная к ней, равная ограничению функции $x = \operatorname{tg} y$ на $(-\pi/2, \pi/2)$, являются непрерывными функциями.

В общем случае, интервал (a, b) сначала переводится гомеоморфно на интервал $(-\pi/2, \pi/2)$ с помощью отображения вида $y = kx + c$, где k и c — некоторые вещественные числа (найдите явные выражения для k и c); затем можно воспользоваться замечанием 2.61.

Пример 2.63. Рассмотрим на плоскости с координатами x, y окружность $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, и пусть $X = S^1 \cap \{(x, y) : y \geq 0\}$ — замкнутая полуокружность. Тогда X гомеоморфно отрезку $[-1, 1]$. Для проверки достаточно представить отрезок $[-1, 1]$ как подмножество оси x, рассмотреть взаимно однозначное отображение $f\colon X \to [-1, 1]$, положив $f\colon (x, y) \mapsto x$, и показать, что f — гомеоморфизм (сделайте это).

Пример 2.64. Если в примере 2.63 рассмотреть открытую полуокружность $X = S^1 \cap \{(x, y) : y > 0\}$, то аналогичное построение покажет, что X гомеоморфно интервалу $(-1, 1)$, а, значит, в силу примера 2.62 и замечания 2.61, открытая полуокружность гомеоморфна прямой.

Пример 2.65. На плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y рассмотрим кольцо $X = \{(x, y) : a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq b\}$, где $0 < a < b < \infty$. Также в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами (x, y, z) рассмотрим цилиндр $Y = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1,\ a \leq z \leq b\}$. Тогда X и Y гомеоморфны. Для доказательства достаточно показать, что отображение $f\colon X \to Y$, заданное так:

$$f\colon (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

является гомеоморфизмом (сделайте это).

Пример 2.66. Вырежем из бумаги прямоугольную ленту и склеим две противоположных стороны, предварительно перекрутив ленту на $360°$. Тогда полученное топологическое пространство будет гомеоморфно обычному цилиндру (попробуйте это показать).

Проверка того, что данное отображение не является гомеоморфизмом, обычно несложная. Следующий пример демонстрирует, что для гомеоморфности отображения может оказаться недостаточно его взаимной однозначности и непрерывности.

Пример 2.67. Отображение f из полуинтервала $[0, 2\pi)$ в окружность $\{x^2 + y^2 = 1\}$, заданное формулой $h : t \mapsto (\cos t, \sin t)$, взаимно однозначно и непрерывно (проверьте!), но обратное к нему непрерывным не является, поэтому отображение f — не гомеоморфизм.

Пример 2.68. Рассмотрим пространство $X = [a, b]/\{a, b\}$, полученное из отрезка $[a, b]$ склейкой его концов a и b, см. пример 2.55. Тогда X гомеоморфно окружности (проверьте!).

Пример 2.69. Пусть $X = D^n$ — замкнутый n-мерный диск, и $A \subset X$ — граничная сфера. Рассмотрим пространство $Y = X/A$, полученное из D^n факторизацией по граничной сфере, см. пример 2.56. Тогда Y гомеоморфно n-мерной сфере (проверьте!).

А вот доказать, что гомеоморфизма не существует вообще — это довольно непростая задача. По большому счету, единственный способ состоит в том, чтобы сравнивать какие-то свойства или характеристики рассматриваемых пространств, которые у гомеоморфных пространств должны быть одинаковыми. Такие свойства или характеристики называются *топологическими инвариантами.* Если какая-то из таких характеристик у двух данных пространств различается, то пространства не гомеоморфны. Если же эти характеристики совпадают, то ничего определенного сказать нельзя.

Пример 2.70. Приведем идею доказательства того, что буквы Т и Г не гомеоморфны (детали станут понятны позже, после того, как мы обсудим понятие линейной связности). Действительно, если бы существовал гомеоморфизм $f\colon \mathrm{T} \to \Gamma$, то для любой точки $x \in \mathrm{T}$ ограничение f на $\mathrm{T} \setminus \{x\}$ было бы гомеоморфизмом с $\Gamma \setminus \bigl\{f(x)\bigr\}$. Однако если из Т выкинуть точку крепления горизонтальной перекладины, то Т распадется на три куска. Буква Г, после выкидывания любой точки, распадается не более чем на два куска. “Количество кусков”, из которых состоит топологическое пространство, является топологическим инвариантом. Тем самым, буквы Т и Г не гомеоморфны.