Глава 7

Замкнутые двумерные поверхности.

План. Топология многогранной поверхности, склейки из многоугольника, слово склейки, вырезание и заклейка дырки, вклейка ручки, вклейка пленки Мебиуса, ориентированные и неориентированные поверхности, Эйлерова характеристика, классификация двумерных поверхностей.

Задачи классификации как правило очень непросты. Тут многое зависит от класса рассматриваемых объектов и от отношения эквивалентности, которое на этих объектах рассматривается. Здесь мы рассмотрим двумерные замкнутые многогранные поверхности, которые будем классифицировать с точностью до гомеоморфизма. Отметим также, что разумной классификации k-мерных поверхностей, $k \geq 3$, в настоящий момент не известно.

Замечание 7.1. Эта классификация практически не отличается от классификации двумерных замкнутых многообразий, которые изучаются в курсе дифференциальной геометрии. Многообразия — топологические пространства, склеенные из дисков примерно так же как многогранные поверхности из многоугольников (но с перекрытиями).

7.1 Топология многогранной поверхности

Здесь мы немного модифицируем определение многогранной поверхности.

Определение 7.2. *Связной многогранной поверхностью $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}^n$* называется конечное семейство $\{F_i\}$ пространственных многоугольников $F_i \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) для каждой пары различных многоугольников F_i и F_j их пересечение $F_i \cap F_j$ или пусто, или состоит из одной, общей для них вершины, или из одного, общего для них ребра; если F_i и F_j имеют общее ребро e, то они называются *смежными по e*;

(2) для каждого многоугольника F_i и каждого его ребра e существует не более одного многоугольника F_j, смежного с F_i по e;

(3) для каждой пары различных многоугольников F и F' существует последовательность многоугольников $F_{i_1}, \ldots, F_{i_m}$ такая, что $F_{i_1} = F$, $F_{i_m} = F'$, и при каждом $1 < k \leq m$ многоугольники $F_{i_{k-1}}$ и F_{i_k} смежны по некоторому ребру e_k;

(4) для каждой пары многоугольников F и F', пересекающихся по вершине, существует соединяющая их цепочка, все многоугольники которой также содержат эту вершину.

Многоугольники F_i называются *гранями* $\mathcal{F}$, отрезки в $\mathbb{R}^n$, совпадающие с ребрами граней, — *ребрами* $\mathcal{F}$, а точки в $\mathbb{R}^n$, совпадающие с концами ребер, — *вершинами* $\mathcal{F}$. Ребро называется *граничным*, если оно является ребром ровно одной грани. Объединение граничных ребер называется *границей* поверхности или ее *краем*. Поверхность, у которой нет граничных ребер, называется *замкнутой*.

Поверхность $\mathcal{F}$ — подмножество в $\mathbb{R}^n$, поэтому на нем индуцируется топология. Топологию на $\mathcal{F}$ можно получить и по-другому. Каждая грань — многоугольник, на нем индуцирована топология из плоскости, поэтому на объединении граней есть топология дизъюнктного объединения. Теперь введем отношение эквивалентности, отождествив общие точки ребер смежных граней. Возникает фактор-топология на объединении граней.

Упражнение 7.1. Проверьте, что эта топология на $\mathcal{F}$ совпадает с индуцированной из $\mathbb{R}^n$.

Упражнение 7.2. Проверьте следующие свойства поверхности.

- Каждая грань (многоугольник) гомеоморфен диску.
- Поверхность $\mathcal{F}$ — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$.
- Топологическая граница $\mathcal{F}$ совпадает с границей $\mathcal{F}$ как многогранной поверхности.
- Каждая внутренняя точка многогранной поверхности обладает окрестностью, гомеоморфной двумерной плоскости (или, что все равно, открытому кругу на плоскости).
- Каждая граничная точка многогранной поверхности обладает окрестностью, гомеоморфной замкнутой двумерной полуплоскости (или, что все равно, «половине» открытого круга, т.е. пересечению открытого полукруга и замкнутой полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через центр круга).
- Граница поверхности представляет собой объединение замкнутых (пространственных) ломаных и гомеоморфна объединению окружностей.

Замечание 7.3. Каждый многоугольник можно разбить на треугольники. Так как здесь мы не требуем, чтобы смежные грани поверхности не лежали в одной двумерной плоскости, то без ограничения общности можно предполагать, что все гранит поверхности – треугольники. Такие поверхности называются *триангулированными*, т.е. разбитыми на треугольники.

Замечание 7.4. Так как мы классифицируем поверхности с точностью до гомеоморфизма, то, в итоге, нас не интересует ни конкретное разбиение поверхности на грани, ни форма этих граней, а только топология поверхности. С нашей точки зрения куб и тетраэдр (как многогранные поверхности) гомеоморфны друг другу и гомеоморфны двумерной сфере (которая хоть и не является многогранной поверхностью, но будет использоваться нами как модельное пространство).

Наша цель — классификация многогранных поверхностей с точностью до гомеоморфизма. Мы покажем, что каждая из многогранных поверхностей гомеоморфна одной из построенных нами ниже топологической поверхности, которые мы будем называть *модельными.*

7.2 Склейки из многоугольника

Простейшие примеры двумерных поверхностей можно получить, склеивая по различным правилам стороны квадрата.

Задача 7.5. Построить триангуляции цилиндра, тора, проективной плоскости и бутылки Клейна.

Задача 7.6. Проверьте, что край пленки Мебиуса состоит из одной окружности, цилиндра — из двух, а у остальных поверхностей край пуст.

Оказывается, приведенные примеры являются, в некотором смысле, универсальными.

Утверждение 7.7. *Любая связная замкнутая многогранная поверхность гомеоморфна поверхности, полученной из многоугольника некоторой склейкой пар его сторон.*

Доказательство. Пометим все ребра всех граней буквами и стрелками. Разрежем поверхность по всем ребрам на грани. Получим объединение многоугольников с размеченными сторонами. Будем последовательно склеивать грани, приклеивая на каждом шаге ровно одну грань ровно по одному ребру, следя за тем, чтобы буквы и направления стрелок у склеиваемых ребер совпадали. На каждом шаге будем получать многоугольник, стороны которого помечены буквами и стрелками. Так как мы все рассматриваем с точностью до гомеоморфизма, то можно каждый раз заменять многоугольник на гомеоморфный (с той же разметкой) так, чтобы очередная грань пересекалась с многоугольником, построенным на предыдущем шаге только по общему ребру. Утверждение доказано. □

Будем кодировать многоугольник P с размеченной границей так называемым *словом склейки* следующим образом. Выберем одно из двух направлений обхода границы многоугольника, начнем с произвольной его вершины и будем последовательно выписывать буквы, которыми помечены последовательные (в соответствие с обходом) стороны многоугольника, причем если направление стороны совпадает с направлением обхода, то просто записываем букву, а если направление противоположно, то записываем букву в степени -1.

Пример 7.8. Например, тор может быть получен склейкой прямоугольника по слову $aba^{-1}b^{-1}$. Заметим, что слово склейки определено неоднозначно, например, та же склейка тора может быть описана словом $ba^{-1}b^{-1}a$. Более того, тор может быть склеен и из других многоугольников, например, из шестиугольника по слову $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$ (проверьте).

7.3 Модельные поверхности

Чтобы сформулировать основную теорему, нам понадобится набор модельных поверхностей. Они не будут многогранными поверхностями, а будут получены из сферы с помощью трех элементарных операций.

Рис. 7.1: Элементарные операции: вырезание диска, приклейка ручки и приклейка листа Мебиуса.

- вырезание диска,
- приклейка ручки,
- приклейка листа Мебиуса.

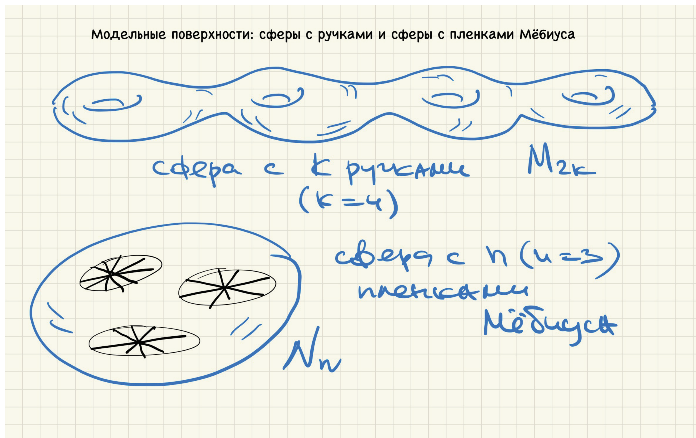

Рис. 7.2: Модельные поверхности. Слово склейки для M_{2k} имеет вид $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1}$, слово склейки для N_m имеет вид $a_1^2 \cdots a_m^2$.

7.4 Теорема классификации — переклейки

Теорема 7.9. *Каждая связная замкнутая двумерная многогранная поверхность гомеоморфна одной из модельных поверхностей.*

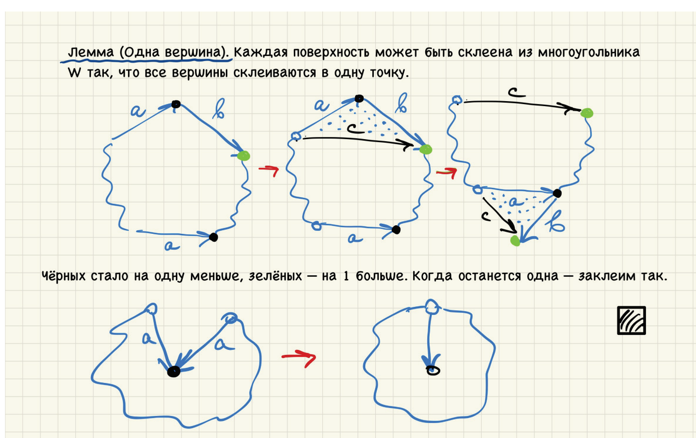

Рис. 7.3: Лемма об одной вершине.

План доказательства такой: мы начнем с произвольной замкнутой связной двумерной поверхности, склеенной из многоугольника, и будем разрезать и переклеивать этот многоугольник, меняя при этом слово склейки, но не меняя поверхность (такие преобразования, фактически, меняют только разбиение поверхности на многоугольники и соответствуют некоторым гомеоморфизмам поверхности). В результате получим многоугольник с одним из трех стандартных слов склейки: $a\,a^{-1}$, $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1}$ или $a_1^2 \cdots a_m^2$. Таким образом, будет показано, что исходная поверхность гомеоморфна или сфере, или сфере с $k \geq 1$ ручками, или сфере с $m \geq 1$ пленками Мебиуса.

Разобьем доказательство на несколько лемм, формулировки и доказательства которых приведены на рисунках.

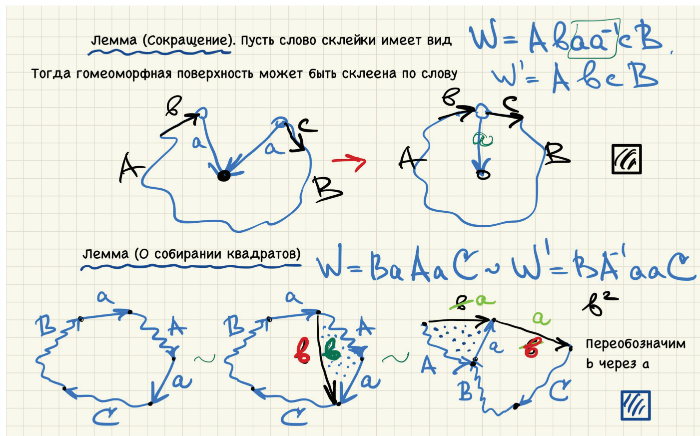

Рис. 7.4: Леммы о сокращении слов и о собирании квадратов.

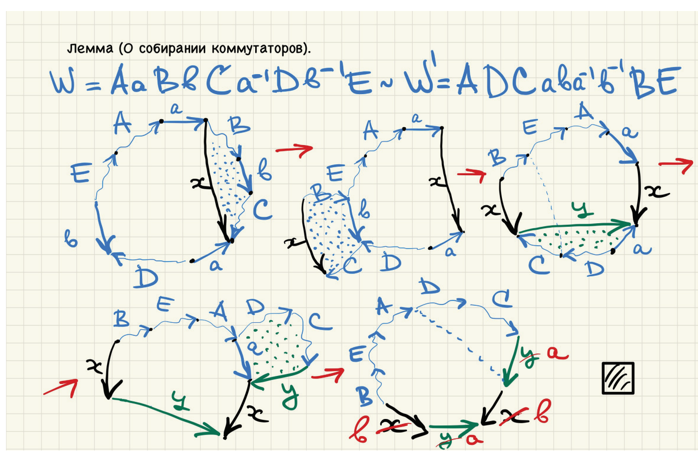

Рис. 7.5: Лемма о собирании коммутаторов.

Последовательно применим преобразования, описанные в приведенных

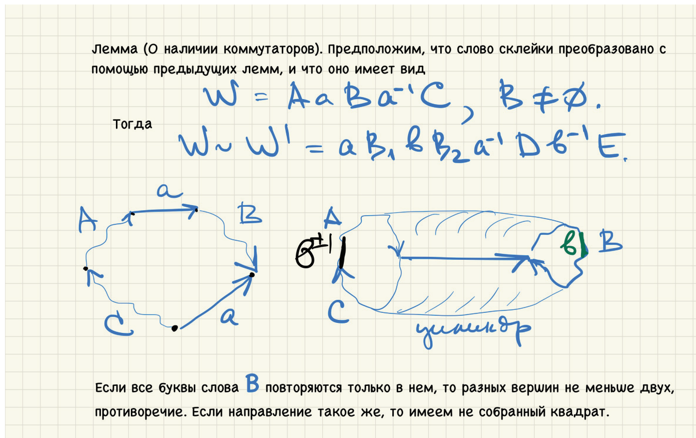

Рис. 7.6: Лемма о существовании коммутатора.

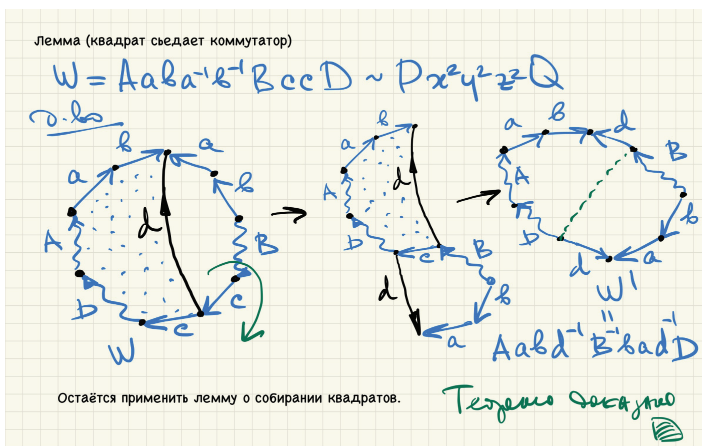

Рис. 7.7: Лемма о коммутаторе и квадрате.

выше леммах. А именно, добьемся, чтобы все вершины склеивались в одну точку, проведем все возможные сокращения, соберем квадраты и коммутаторы. Если есть и то, и другое, то уберем все коммутаторы, оставив только квадраты. В результате мы получим искомый многоугольник с одним из стандартных слов склейки.

7.5 Ориентация многогранной поверхности

Напомним, что *задать ориентацию на плоскости* означает фиксировать некоторый базис, который объявляется положительно ориентированным вместе со всеми другими базисами, которые получаются из него умножением на матрицу с положительным определителем. Все остальные базисы объявляются отрицательно ориентированными. Если фиксирована ориентация плоскости, то поворот от первого вектора положительно ориентированного базиса ко второму называется положительным (против часовой стрелки или налево), а поворот в противоположную сторону — отрицательным (по часовой стрелке или направо).

Каждый многоугольник F_i многогранной поверхности можно *ориентировать*, задав одно из двух возможных направлений циклического обхода его вершин и ребер. Другими словами, на каждой стороне многоугольника должно быть указано направление, причем в каждой вершине встречаются одно входящее и одно выходящее направления.

Рассмотрим теперь многогранную поверхность. Ее ориентация получается из ориентации входящих в нее многоугольников–граней, при условии согласованности ориентаций на их пересечениях, то есть на общих ребрах.

Пусть две грани F_i и F_j пересекаются по ребру e. Предположим, что обе грани ориентированы. Это, в частности, означает что на ребре e указаны два направления, одно порождено ориентацией грани F_i, а другое — ориентацией грани F_j. Будем говорить, что ориентации смежных граней F_i и F_j *согласованы*, если эти направления противоположны. Заметим, что в этом и только в этом случае обходы границ граней F_i и F_j, порожденные ориентацией, задают обход многоугольника, который получается склейкой F_i и F_j по общему ребру. (Этот многоугольник можно представлять себе в общей плоскости, в которую помещены F_i и F_j. Возможные пересечения устраняются с помощью гомеоморфизмов многоугольников.) Кроме того, если две грани смежны и на одной из них задана ориентация, то согласованная ориентация второй грани определена однозначно выбором направления общего ребра (а именно, нужно выбрать направление, противоположное направлению этого ребра в смежной ориентированной гарни).

Определение 7.10. Многогранная поверхность называется *ориентированной*, если на каждой ее грани задана ориентация, причем эти ориентации согласованы на каждой паре смежных граней поверхности. Семейство согласованных ориентаций всех граней поверхности называется *ориентацией поверхности*. Поверхность называется *ориентируемой*, если на ней существует ориентация.

Замечание 7.11. Вместо направления обхода границы грани можно в каждой грани фиксировать базис (формально, базис в соответствующей плоскости) и объявлять его положительным. Задание положительно ориентируемого базиса задает положительное направление обхода. В дальнейшем, переходя к криволинейным (но дифференцируемым) поверхностям, ориентация будет задаваться выбором базиса в касательной плоскости.

Замечание 7.12. Рассмотрим на поверхности замкнутую цепочку смежных граней, т.е. такой набор $F_1, \ldots, F_n$ граней, где грань F_i является смежной с F_{i+1}, а F_n смежна также с гранью F_1. Зададим ориентацию на первой грани F_1; правило согласования однозначно определяет ориентацию грани F_2, она, в свою очередь, — ориентацию на F_3 и далее по цепочке до F_n, а затем — снова на F_1. Таким образом, на первой грани возникает две ориентации. Будем говорить, что цепочка граней *сохраняет ориентацию*, если эти две ориентации совпадают, и *обращает ориентацию*, если они противоположны. Если на поверхности существует обращающая ориентацию цепочка граней, то поверхность неориентируема; легко проверить (докажите!), что верно и обратное утверждение. Таким образом, ориентируемость поверхности эквивалентна отсутствию на ней обращающих ориентацию замкнутых цепочек граней.

Замечание 7.13. Замкнутая выпуклая многогранная поверхность в трехмерном пространстве — ориентируемая. Действительно, эта поверхность разделяет пространство на две части, на каждой грани выберем внешнюю нормаль (нормаль, направленную в неограниченную область), и выберем направление обхода границы грани, например, по правилу правого винта (выберем базис в плоскости грани так, чтобы полученный из него добавлением нормали базис в $\mathbb{R}^3$ был бы положительно ориентирован).

Замечание 7.14. Не любая многогранная поверхность ориентируема. Пример — пленка Мебиуса.

Задача 7.15. Представить лист Мебиуса в виде многогранной поверхности в $\mathbb{R}^3$.

Задача 7.16. Предъявить на пленке Мебиуса цепочку граней, обращающую ориентацию.

Утверждение 7.17. *Гомеоморфные многогранные поверхности ориентируемы или неориентируемы одновременно.*

7.6 Теорема классификации — эйлерова характеристика

Чтобы проверить попарную негомеоморфность нужна некая характеристика поверхностей, которая сохраняется при гомеоморфизмах. Мы уже видели, что одой из таких характеристик может служить ориентируемость. В качестве еще одой такой характеристики многогранной поверхности мы возьмем эйлерову характеристику. Каждая многогранная поверхность разбита на грани, ребра и вершины. *Эйлеровой характеристикой* многогранной поверхности $\mathcal{F}$ назовем величину $\Gamma - P + B$, где Γ, P, B — количество граней, ребер и вершин поверхности.

Утверждение 7.18. *Эйлерова характеристика поверхности не зависит от разбиения ее на грани и не меняется при гомеоморфизмах.*

Утверждение 7.19. *Эйлерова характеристика сферы с $k \geq 0$ ручками равна $2-2k$. Эйлерова характеристика сферы с m пленками Мебиуса равна $2-m$.*

Из утверждений 7.19 и 7.17 следует следующий результат.

Теорема 7.20. *Если многогранные поверхности гомеоморфны разным модельным поверхностям, то они не гомеоморфны.*

Тем самым, классификация двумерных поверхностей завершена.

Упражнения к главе 7.

Упражнение 7.3. Пусть на поверхности нарисован граф, причем каждая из областей, на которые он делит поверхность, гомеоморфна диску. **Эйлеровой характеристикой** такой карты называется число $v - e + f$, где v — число вершин, e — число ребер и f — число областей. Докажите, что эйлеровы характеристики любых двух карт на поверхности совпадают. Указание*:* рассмотрите карту, получающуюся "наложением" двух карт, т.е. объединением их границ.

Упражнение 7.4. Эйлеровой характеристикой поверхности называется число

$$\chi = v - e + f,$$

где v, e и f — числа вершин, ребер и областей любой карты, нарисованной на поверхности *(*согласно утверждению из упражнения *7.3*, это число не зависит от карты и, тем самым, характеризует саму поверхность*)*. Вычислите эйлеровы характеристики цилиндра, тора и ленты Мебиуса.

Упражнение 7.5. Поверхность M получается из поверхности N вырезанием k дисков. Выразите $\chi(M)$ через $\chi(N)$.

Упражнение 7.6. Каждая из двух поверхностей M и N имеет край, представляющий собой замкнутую кривую, состоящую из одного куска. Поверхность Q получается из поверхностей M и N склеиванием краев. Выразите $\chi(Q)$ через $\chi(M)$ и $\chi(N)$.

Упражнение 7.7. Вычислите эйлерову характеристику

(1) поверхности M_g^m, полученной из сферы с g ручками вырезанием m дырок*;*

(2) поверхности N_h^m, полученной из сферы с h пленками Мебиуса вырезанием m дырок.

Упражнение 7.8. Сторонам многоугольника приписаны буквы a, b, $c, \dots$ в следующем порядке*:* a, b, a, b, c, d, c, $d, \dots$ Затем стороны, помеченные одноименными буквами, склеиваются, причем стрелка на каждой стороне направлена по направлению обхода, когда соответствующая буква встречается первый раз, и против направления обхода, когда буква встречается второй раз. Докажите, что, если число разных букв равно $2g$, то полученная поверхность гомеоморфна сфере с g ручками.

Упражнение 7.9. Сторонам многоугольника приписаны буквы a, b, $c, \dots$ в следующем порядке*:* a, a, b, b, c, c, d, $d, \dots$ Затем стороны, помеченные одноименными буквами, склеиваются, причем стрелка на каждой стороне направлена по направлению обхода. Докажите, что, если число разных букв равно h, то полученная поверхность гомеоморфна сфере с h пленками Мебиуса.

Упражнение 7.10. На замкнутой ориентируемой поверхности нарисована карта, причем каждая страна представляет собой некоторый n-угольник, и в каждой вершине сходится по k ребер. Докажите, что

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{\chi}{2e},$$

где χ — эйлерова характеристика поверхности, а e — число ребер карты. Приведите пример такой карты на сфере при $n = 2$, $k = 4$.

Упражнение 7.11. Вычислите эйлеровы характеристики бутылки Клейна и проективной плоскости.