Глава 4

Плоские графы.

План. Реализация комбинаторного графа в топологическом пространстве, планарные графы, непланарные графы, грань плоского графа, формула Эйлера для плоских графов, теорема Понтрягина–Куратовского (критерий планарности графа), раскраски, теорема Хивуда, лемма Шпернера.

В предыдущих разделах мы для каждого графа G построили топологическое пространство X_G, которое назвали топологическим графом. Иногда, чтобы избежать путаницы и отличать граф G от топологического графа, обычные графы будем называть *комбинаторными*.

Определение 4.1. Пусть даны два (комбинаторных) графа $G = (V, E, \partial)$ и $G' = (V', E', \partial')$. *Отображением* $f\colon G \to G'$ *из графа* G *в граф* G' называется отображение $f\colon V \sqcup E \to V' \sqcup E'$ такое, что $f(V) \subset V'$, $f(E) \subset E'$ и для каждого $e \in E$ выполняется $f\big(\partial(e)\big) = \partial'\big(f(e)\big)$. Здесь той же буквой f мы обозначили отображение, определенное на подмножествах V: если $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$, то $f\big(\{v_1, \dots, v_k\}\big) = \big\{f(v_1), \dots, f(v_k)\big\}$. Взаимно однозначное f называется *изоморфизмом графов* G *и* G'. Графы называются *изоморфными*, если между ними существует изоморфизм.

Замечание 4.2. Отношение изоморфности — отношение эквивалентности.

Легко проверить, что справедлива следующая лемма.

Лемма 4.3. *Пусть G и G' — изоморфные графы. Тогда соотвествующие топологические графы гомеоморфны.*

Замечание 4.4. Обратное утверждение не верно. Приведите пример.

Также выше мы определили вложение графа $G = (V, E, \partial)$ в топологическое пространство Y как непрерывное взаимно-однозначное с образом отображение $f\colon X_G \to Y$. Напомним, что $V \subset X_G$, поэтому каждая вершина v графа G переводится вложением f в точку топологического пространства Y. Далее, для каждого ребра $e \in E$ пространство X_G содержит соответствующий отрезок $[a_e, b_e]$, поэтому ребру e графа G соответствует простая непрерывная кривая $f|_{[a_e,b_e]}\colon [a_e,b_e] \to Y$ в пространстве Y, которая соединяет f-образы инцидентных ребру e вершин. Так как f — взаимно однозначно, то соответствующие ребрам кривые могут пересекаться только по образам инцидентным этим ребрам вершин.

В дальнейшем мы будем называть $f(X_G) \subset Y$ *геометрической реализацией* графа G, а f-образы вершин и ребер графа — вершинами и ребрами этой реализации. Очевидно, между множеством вершин (ребер) геометрической реализации и между множеством верши (ребер) исходного графа имеется естественная биекция. В дальнейшем нам будет удобно не различать эти множества, т.е. отождествлять вершины (ребра) графа с их f-образами. В этом смысле геометрическую реализацию можно рассматривать как граф, вершины которого — точки из Y, а ребра — простые непрерывные кривые в Y.

Выше были определены планарные графы (графы, для которых существует вложение в плоскость). Каждую геометрическую реализацию планарного графа будем называть *плоским графом.* Напомним, что не каждый граф является планарным, и отметим, что для одного и того же планарного графа существует много реализаций в виде плоских графов. В частности, как было показано в предыдущем разделе, у каждого планарного графа существует реализация такая, что все кривые, соотвествующие ребрам, являются ломаными.

4.1 Формула Эйлера для плоских графов

Определение 4.5. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ — геометрическая реализация графа G на плоскости. Компоненты линейной связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ называются *гранями графа* Γ.

Напомним, что связный граф без циклов называется деревом. Граф без циклов называется *лесом*. Таким образом, лес — это граф, все связные компоненты которого являются деревьями.

Теорема 4.6 (Формула Эйлера)**.** *Пусть G — произвольный плоский граф, B, P, Γ и k — количества его вершин, ребер, граней и связных компонент. Тогда*

$$B - P + \mathit{\Gamma} = 1 + k.$$

Доказательство. Заметим, что если G — связный граф, состоящий из одного ребра, то формула принимает вид $\mathit{\Gamma} = 3 - B$, что эквивалентно теореме Жордана,[1] поэтому доказательство сталкивается с теми же трудностями.

[1]Если $B = 1$, то граф G — петля, его геометрическая реализация — простая замкнутая непрерывная кривая, и формула Эйлера утверждает, эта кривая разбивает плоскость на две компоненты. Если же $B = 2$, то геометрическая реализация графа G — простая незамкнутая кривая, и формула Эйлера утверждает, что такая кривая не разбивает плоскость.

Здесь мы докажем формулу Эйлера в предположении, что все ребра геометрической реализации графа G — ломаные. В этом случае можно перестроить граф G так, чтобы все ребра стали прямолинейными отрезками, а геометрическая реализация, как подмножество плоскости, не поменялась. Для этого нужно добавить все внутренние вершины ребер-ломаных к множеству вершин графа и заменить ребра-ломаные на их отдельные звенья, соединяющие соотвествующие вершины. Очевидно, при этом не меняются количество k связных компонент и количество граней $Г$, а количества вершин и ребер увеличиваются одинаково, поэтому формула Эйлера для исходного и перестроенного графов верна или не верна одновременно. Обозначим перестроенный граф той же буквой G.

Проведем индукцию по числу ребер графа. Если количество ребер равно нулю, то $k = В$, $Г = 1$, и формула Эйлера верна. Предположим теперь, что в графе G есть хотя бы одно ребро.

Пусть сначала в плоском графе G имеется цикл $C = v_{i_1}v_{i_2}\dots v_{i_k}$, где $v_{i_k} = v_{i_1}$. Этот цикл представляет собой замкнутую ломаную без самопересечений. Посмотрим, что произойдет при выбрасывании из графа G одного из ребер этой ломаной. Количество связных компонент графа при этом не меняется, количество вершин не меняется, количество ребер уменьшается на единицу. Покажем, что количество граней (компонент линейной связности дополнения к графу в плоскости) тоже уменьшается на единицу.

По теореме Жордана ломаная C разбивает плоскость на две компоненты. Пусть e — произвольное ребро цикла C, и P — внутренняя точка ребра e. Пусть G' — плоский граф, полученный из G выбрасыванием ребра e. Так как P не содержится в G', а G' равен объединению конечного числа отрезков, расстояние $|P, G'|$ от точки P до графа G' положительно. Положим $r = |P, G'|/2$ и $U(P) = U_r(P)$.

Как мы уже видели при доказательстве теоремы Жордана, ломаная C разбивает круг $U(P)$ на две компоненты линейной связности, которые лежат в разных компонентах линейной связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus C$ и, значит, в разных гранях графа G. Однако после удаления ребра e эти точки оказываются в одной компоненте (их можно соединить отрезком, лежащим в $U(P)$ и, следовательно, не пересекающим G'), поэтому число граней уменьшилось как минимум на 1 (объединяются грани, примыкающие к ребру e).

Покажем теперь, что при выбрасывании ребра e из графа G остальные грани не изменятся. Пусть точки A и B до выбрасывания ребра e нельзя было соединить друг с другом ломаной, а после выбрасывания — можно. Покажем, что в этом случае обе точки принадлежат граням, примыкающим к ребру e. Пусть L — такая ломаная, соединяющая A и B и не пересекающая G'. Ясно, что L пересекает ребро e по некоторым внутренним точкам. Пусть R — первая, считая от A, точка пересечения ломаной L с внутренностью ребра e. Выберем круговую окрестность $U(R)$ с центром в R того же радиуса, что и $U(P)$. Пусть S — точка ломаной L, лежащая внутри радиуса круга $U(R)$, расположенного между R и A. Обозначим через L' часть ломаной L между A и S, и добавим к L' отрезок, параллельный e и соединяющий S с подходящей точкой из круга $U(P)$. Полученная ломаная соединяет A с точкой, лежащей в одной из двух граней, примыкающих к ребру e. Аналогичным образом можно показать, что точка B также лежит в одной из этих двух граней.

Таким образом, если граф G содержит цикл, то можно уменьшить количество его ребер, сохранив значения левой и правой частей формулы Эйлера.

Пусть теперь граф G не содержит циклов. Тогда он представляет собой лес, у которого по меньшей мере одна связная компонента содержит не нулевое количество ребер. Эта компонента является деревом с двумя или более вершинами и, поэтому, содержит некоторую вершину v степени 1. Пусть e — единственное ребро, инцидентное этой вершине. Рассмотрим граф G', полученный из G выбрасыванием ребра e и вершины v. Количество компонент связности при этом не меняется, число вершин и число ребер меняются на 1. Остается проверить, что число граней не меняется.

Действительно, пусть пару точек A и B можно соединить ломаной L, не пересекающей G'. Если L не пересекает e, то она не пересекает и граф G. Иначе, как при доказательстве теоремы Жордана для незамкнутых ломаных, перестроим ломаную L, обойдя ребро e со стороны его вершины v степени 1. Теорема доказана. □

Следствие 4.7. *Плоское дерево имеет одну грань.*

Доказательство. Действительно, если G — дерево, то $B = P + 1$, $k = 1$, откуда

$$\Gamma = 1 + k + P - B = 1 + 1 + P - (P + 1) = 1.$$

□

Упражнение 4.1. Сколько граней имеет плоский лес?

Формула Эйлера накладывает довольно серьезные ограничения на структуру графа. Грубо говоря, планарные графы довольно «разрежены».

Утверждение 4.8. *Каждый простой планарный граф имеет вершину степени не больше пяти.*

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ — соотвествующий плоский граф, и обозначим через B, P и Γ количества его вершин, ребер и граней соответственно. Если граф не содержит циклов, то его связные компоненты — деревья, а каждое дерево имеет вершину степени 0 или 1. Пусть теперь граф содержит циклы, а значит и конченые грани. Предположим, что степень каждой вершины больше пяти, тогда

$$2P = 2|E| = \sum_{v \in V} \deg v \geq 6|V| = 6B,$$

то есть $P \geq 3B$. Подставляя это в формулу Эйлера, получаем $1 + k = B - P + \Gamma \leq \Gamma - 2/3P$, следовательно $3(1 + k) + 2P \leq 3\Gamma$.

С другой стороны, каждая конечная грань ограничена тремя и более ребрами, каждое ребро графа входит в границу одной или двух граней графа, выкидывая ребра, входящие в границу одной грани, мы не меняем число граней, поэтому $2P \geq 3\varGamma$. Итак, $2P \geq 3\varGamma \geq 3(1+k)+2P$, противоречие. $\square$

4.2 Теорема Куратовского: критерий планарности графа

Два графа называются *гомеоморфными*, если гомеоморфны соответствующие топологические графы. Очевидно, любые два изоморфных графа гомеоморфны. Обратное не верно, но несложно показать, что если графы гомеоморфны, то их можно превратить в изоморфные с помощью конечной последовательности операций *подразбиения ребер*. Эта операция определяется так.

Пусть $G = (V, E, \partial)$ — произвольный граф и $e \in E$ — некоторое его ребро. Пусть w не содержится в V, а e_1 и e_2 не содержатся в E. Определим граф $G' = (V', E', \partial')$, положив $V' = V \cup \{w\}$, $E' = \big(E \setminus \{e\}\big) \cup \{e_1, e_2\}$, и положив отображение ∂' равным ∂ на $E \setminus \{e\}$, а на e_1 и e_2 зададим его так:

(1) если $\partial(e) = \{v\}$, то $\partial'(e_1) = \partial'(e_2) = \{v, w\}$;

(2) если же $\partial(e) = \{u, v\}$, то $\partial'(e_1) = \{u, w\}$, $\partial'(e_2) = \{v, w\}$.

Будем говорить, что граф G' получен из графа G *подразбиением ребра* e.

Теорема 4.9 (K. Kuratowski)**.** *Граф G является планарным тогда и только тогда, когда никакой его подграф не гомеоморфен $K_{3,3}$ или K_5.*

Доказательство в одну сторону — а именно, доказательство непланарности графа, содержащего подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ или K_5, очевидно после того, как мы доказали непланарность $K_{3,3}$ и K_5. Доказательство в другую сторону намного сложнее и мы опустим его.

Замечание 4.10. Эту теорему в русскоязычной литературе принято называть теоремой Понтрягина–Куратовского. Доказательство впервые было опубликовано в 1930 году польским математиком К. Куратовским (Kazimierz Kuratowski, 1896–1980), одним из основателей современной топологии. Лев Семенович Понтрягин (1908-1988) — выдающийся советский математик, академик, внесший вклад в топологию, теорию управления, вариационное исчисление, автор знаменитого принципа максимума. Принято считать, что Понтрягин доказал эту теорему несколько раньше, но доказательство не опубликовал.

Замечание 4.11. Имеется конструктивное доказательство теоремы Куратовского, которое, фактически, строит вложение планарного графа в плоскость. При этом вложение можно построить так, чтобы все ребра соответствующего плоского графа были прямолинейными отрезками. Это усиление теоремы Куратовского называется теоремой Вагнера (Klaus Wagner, профессор Кёльнского университета).

Замечание 4.12. Само наличие короткого списка запрещенных подграфов из формулировки теоремы Куратовского совершенно не очевидно. Например уже для случая тора такой список не известен. Компьютерные эксперименты указывают, что это список очень большой.

4.3 Раскраски плоских графов

Задача о «хорошей» раскраске вершин (граней) плоского графа возникла в 19 веке при попытке нарисовать политическую карту Англии так, чтобы соседние графства были окрашены в разные цвета. Аккуратная формулировка гипотезы о том, что всегда достаточно четырех цветов, была опубликована Кэли (Arthur Cayley) в 1878 году. Хивуд (Percy John Heawood) в 1890 доказал ослабленный вариант теоремы и сформулировал гипотезу для графа на поверхности любого рода. Теорему для сферы и плоскости доказали Хакен (Wolfgang Haken) и Аппель (Kenneth Appel) в 1976 году с использованием компьютерного перебора. Для всех остальных поверхностей доказательство оказалось проще и было получено Рингелем (Gerhard Ringel), Янгсом (John William Theodore Youngs) и др. в 1954–1968 годах (так называемая теорема Рингеля–Янгса)

Определение 4.13. Пусть $\mathcal{C} = \{\mathrm{Col}_i\}$ — некоторое множество, элементы которого будем называть *цветами*. Каждое отображение $\nu\colon V \to \mathcal{C}$ будем называть *раскраской графа* $G = (V, E, \partial)$ *цветами из множества* $\mathcal{C}$. При этом будем говорить, что *вершина* v *покрашена в цвет* $\nu(v)$. Раскраска ν называется *правильной*, если смежные вершины покрашены в разные цвета. Наименьшее число цветов, необходимое для правильной раскраски графа G называется его *хроматическим числом.*

Теорема 4.14 (Теорема Хивуда о пяти красках)**.** *Для каждого плоского простого графа существует правильная раскраска* 5 *цветами, то есть хроматическое число плоского графа не превосходит пяти.*

Доказательство. Пусть G — произвольный плоский простой граф. Теорему будем доказывать индукцией по числу вершин. Если G имеет не более 5 вершин, то, конечно же, его можно раскрасить не более чем 5 цветами.

Пусть теперь G имеет более 5 вершин. Согласно утверждению 4.8, граф G содержит вершину v степени не больше 5. Обозначим через $L(v)$ подграф в G, порожденный множеством всех вершин, соседних с v (этот подграф обычно называют *линком* вершины v). Очевидно, в рассматриваемом случае граф $L(v)$ содержит не более пяти вершин.

Пусть сначала $L(v)$ содержит менее 5 вершин. По индукции, граф $G \setminus v$, полученный из G выбрасыванием вершины v, вместе со всеми инцидентными ей ребрами, можно покрасить 5 цветами. Эта раскраска дает правильную раскраску всех вершин графа G, кроме v. Но v имеет менее 5 соседних вершин, поэтому если мы покрасим ее в тот цвет, который не встречается среди цветов вершин графа $L(v)$, то получится правильная раскраска всего графа G.

Остается рассмотреть случай, когда $L(v)$ состоит ровно из 5 вершин.

Выбросим из графа G вершину v и инцидентные ей ребра (уточним, что $L(v)$ не выбрасывается). По предположению индукции полученный граф G' можно раскрасить не более чем в 5 цветов. Если вершины из $L(v)$ покрашены менее чем в 5 цветов, то покрасив вершину v в оставшийся цвет, мы получим нужную раскраску графа G. Остается рассмотреть случай, когда вершины из $L(v)$ покрашены в точности в 5 цветов.

Занумеруем смежные с v вершины по порядку, скажем, против часовой стрелки. (Более формально, рассмотрим окружность с центром в v и радиусом меньшим, чем расстояние от v до ближайшей вершины графа. Нумерация вершин из $L(v)$ должна быть такой, чтобы первые, считая от v, точки пересечения ребер vv_i с построенной окружностью малого радиуса появлялись по порядку, когда мы, для определенности, обходим окружность против часовой стрелки.) Обозначим цвет вершины v_i через Col_i. Рассмотрим в графе G' множество X тех вершин цветов Col_1 и Col_3, в которые мы можем пройти по ребрам графа G' только через вершины цветов Col_1 и Col_3, начиная с v_1; мы считаем, что $v_1 \in X$. Если X не содержит вершину v_3, то мы перекрасим все вершины множества X: вершину цвета Col_1 перекрасим в Col_3 и наоборот. Легко видеть, что эта раскраска является допустимой для графа G', но при этом вершины из $L(v)$ покрашены в 4 цвета, исключая Col_1. Покрасив v в цвет Col_1 получим нужную раскраску графа G.

Наконец, осталось разобраться со случаем, когда $v_3 \in X$. В этом случае в графе G' существует путь C без самопересечений из v_1 в v_3, проходящий только по вершинам цветов Col_1 и Col_3. Добавив в нему два ребра v_1v и vv_3, получим замкнутую несамопересекающуюся ломаную $\bar{C}$. Она разбивает плоскость на две компоненты, причем легко видеть, что точки v_2 и v_5 лежат в разных компонентах относительно $\bar{C}$. Рассмотрим множество Y тех вершин цветов Col_2 и Col_5, в которые можно пройти по ребрам графа G' только через вершины цветов Col_2 и Col_5, начиная с v_5; мы считаем, что $v_5 \in Y$. По построению $\bar{C}$ мы не можем соединить никакой (даже не обращая внимания на цвета) ломаной вершину v_5 с вершиной v_2, не пересекающей $\bar{C}$. Следовательно, $v_2 \notin Y$. Но тогда мы перекрасим вершины из Y: вершину цвета Col_5 перекрасим в Col_2 и наоборот. Эта раскраска является допустимой для графа G' и при этом вершины из $L(v)$ покрашены в 4 цвета, исключая Col_5. Покрасив v в цвет Col_5, получим нужную раскраску графа G. □

4.4 Лемма Шпернера

Раскраски графов оказываются полезны в самых разных задачах. Здесь мы расскажем о, казалось бы, чисто комбинаторном результате, который был получен немецким математиком Шпернером (Emanuel Sperner) в 1928 году, и который до сих пор находит новые обобщения и приложения в самых разных областях, в том числе в геометрии и топологии.

Пусть Γ — связный плоский граф такой, что каждое его ребро входит в границу двух его граней. Замыкание ограниченной грани графа G называются *треугольником*, если ее граница состоит из трех ребер. Обозначим через W объединение всех треугольников графа G. Предположим, что каждое ребро графа входит в границу по меньшей мере одного треугольника, и что граница множества W — простая замкнутая кривая. Тогда плоский граф Γ называется *триангуляцией множества W*.

Пример 4.15. Рассмотрим выпуклый многоугольник W на плоскости. Легко доказать (Сделайте это!), что W можно разбить диагоналями на треугольники. Соотвествующий плоский граф является триангуляцией W. Такая триангуляция называется *диагональной*.

Упражнение 4.2. Можно ли построить диагональную триангуляцию произвольного (в том числе, невыпуклого) плоского многоугольника?

Упражнение 4.3. Пусть n — количество вершин триангуляции Γ. Оцените сверху количество ребер и граней графа Γ.

Теорема 4.16 (Лемма Шпернера)**.** *Пусть W — треугольник на плоскости и Γ — произвольная его триангуляция, причем вершины треугольника W являются вершинами графа G. Предположим, что задана раскраска вершин Γ в три цвета такая, что*

- *вершины треугольника окрашены в разные цвета,*
- *вершины графа Γ, лежащие на стороне треугольника W окрашены в два цвета (заметим, что это те два цвета, в которые окрашены вершины треугольника, ограничивающие эту сторону).*

Тогда среди треугольников триангуляции найдется такой, что его вершины окрашены в разные цвета, причем таких треугольников нечетное число.

Доказательство. Начнем с одномерного аналога этого утверждения.

Лемма 4.17. *Пусть фиксировано конечное подмножество $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ точек отрезка $[a, b]$, и пусть эти точки окрашены в два цвета, причем концы отрезка — в разные цвета. Тогда среди отрезков $[t_{i-1}, t_i]$ найдется отрезок, концы которого окрашены в разные цвета, причем таких отрезков нечетное число.*

Доказательство. В самом деле, пусть a окрашена в цвет A, а b — в цвет B. Пусть t_i — точка с наименьшим номером, окрашенная в цвет B. Тогда $1 \leq i \leq k$ и концы отрезка $[t_{i-1}, t_i]$ окрашены в разные цвета. Выберем теперь наибольшее $p \geq 0$, для которого все точки t_{i+j}, $j \leq p$, окрашены в цвет B. Если $i + p = k$, то $t_{i+j} = b$, если же $i + p < k$, то концы отрезка $[t_{i+p}, t_{i+p+1}]$ окрашены в разные цвета, причем точка t_{i+p+1} окрашена в цвет A, значит она отлична от b, и мы можем применить к отрезку $[t_{i+p+1}, b]$ предыдущее рассуждение. Итак, если процесс не закончился, то мы увеличили число искомых отрезков на два, а если закончился, то на единицу, поэтому общее число искомых отрезков нечетно. Лемма доказана. □

Перейдем к доказательству теоремы. Обозначим цвета через A, B, C и выберем любую пару, для определенности A и B. Построим граф H, вершинами которого будут ребра, концы которых раскрашены в эти два цвета, а также те грани-треугольники, в границу которых входит хотя бы одно такое ребро. Две вершины соединим ребром, если и только если одна из них ребро, а другая — грань, его содержащая, в частности, граф H двудольный. Так как ребро триангуляции входит в границу одного или двух треугольников, то степень вершины графа H, соответствующей ребру триангуляции Г, равна 1 или 2, причем степень равна 1, если и только если это ребро лежит на границе W. Далее, если две вершины треугольника T триангуляции Г раскрашены в цвета A и B, то, в зависимости от цвета третьей вершины, степень вершины графа H, соответствующей треугольнику T равна 1 или 2, причем степень равна 1, если и только если вершины треугольника T окрашены в три разных цвета. Итак, все вершины графа H имеют степени 1 и 2. Поэтому связная компонента графа H представляет собой или цикл четной длины, или путь. Вершины степени 1 такого пути соответствуют или ребрам, лежащим на границе W, или треугольникам триангуляции, вершины которых окрашены в три разных цвета.

Рассмотрим сторону треугольника, соединяющую те две его вершины, которые окрашены в цвета A и B, и обозначим ее через $[A, B]$. Она разбита на отрезки вершинами триангуляции Г. По лемме 4.17 на стороне $[A, B]$ имеется нечетное число отрезков, концы которых окрашены в разные цвета. Они соответствуют вершинам степени 1 графа H. Для каждой такой вершины рассмотрим содержащую ее связную компоненту графа H. Как мы уже отмечали, эта компонента представляет собой путь. Его вторая вершина степени 1 — это или ребро триангуляции, концы которого окрашены в цвета A и B и которое лежит на границе W, или треугольник с тремя разноцветными вершинами. При этом в первом случае ребро лежит на той же стороне $[A, B]$ треугольника W.

Таким образом, семейство ребер триангуляции, лежащих на стороне $[A, B]$ и таких, что их концы окрашены в разные цвета, разбивается на два подмножества: в первое входят ребра, соединенные путями в графе H, а во второе — все остальные. Первое подмножество состоит, очевидно из четного числа ребер. Поэтому из леммы 4.17 вытекает, что второе подмножество состоит из нечетного числа элементов (и. в частности, не пусто). Остается заметить, что каждому ребру из второго множества соответствует треугольник триангуляции, все вершины которого окрашены в разные цвета. Лемма доказана. □

Замечание 4.18. Теоретико-множественный аналог леммы Шпернера — это лемма Кнастера–Куратовского–Мазуркевича (Knaster–Kuratowski–Mazurkiewicz): *Пусть треугольник* $A_1A_2A_3$ *покрыт тремя замкнутыми мно-*

жествами C_1, C_2, C_3 *так, что* $A_i \in C_i$, $i = 1, 2, 3$, *и стороны* $[A_i, A_j]$ *содержатся в объединениях* $C_i \cup C_j$ *соответствующих множеств. Тогда пересечение* $\cap C_i$ *не пусто.*

Замечание 4.19. Еще один комбинаторный аналог леммы Шпернера — это так называемая лемма Таккера (Albert Tucker). Она формулируется вот как. Пусть задана триангуляция круга W, вершины которой центрально симметричны. Пусть вершины триангуляции размечены метками $\{\pm 1, \pm 2\}$ так, что метки на границе тоже центрально симметричны. Тогда лемма Таккера утверждает, что найдется ребро триангуляции, концы которого помечены противоположными метками.

Литература к главе 4

[1] Прасолов В.В. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*, 2004, изд-во МЦНМО.

[2] Шашкин Ю.А. *Неподвижные точки*, М.: Наука, 1989 (Популярные лекции по математике, выпуск 60).

[3] Емеличев В.А. и др. *Лекции по теории графов*, М.: Наука, 1990.

Упражнения к главе 4

Упражнение 4.4.

(1) Докажите, что любой граф имеет реализацию в пространстве $\mathbb{R}^3$ в виде геометрического графа без самопересечений, ребра которого — ломаные.

(2) Докажите, что простой граф имеет реализацию в пространстве $\mathbb{R}^3$ в виде геометрического графа без самопересечений, ребра которого — прямолинейные отрезки.

Упражнение 4.5. Используя формулу Эйлера, покажите, что граф $K_{3,3}$ непланарный.

Упражнение 4.6. Не используя формулу Эйлера, выведите из леммы **??**, что граф K_5 непланарный.

Упражнение 4.7. Пусть G — плоский связный простой граф, имеющий v вершин, e ребер и f граней.

(1) Используя формулу Эйлера, покажите, что при $v \geq 3$ выполняется $\frac{3}{2}f \leq e \leq 3v - 6$.

(2) Покажите, что G содержит вершину, степень которой не превосходит 5.

Упражнение 4.8. Пусть G — плоский связный простой граф. Покажите, что G не может состоять из 10 вершин, степень каждой из которых равна 5.

Упражнение 4.9. Опишите все плоские связные простые графы, вершины которых имеют одну и ту же степень $d \geq 3$, каждая грань ограничена одним и тем же числом $k \geq 3$ ребер и каждое ребро лежит ровно в двух гранях.

Определение 4.20. Пусть G — простой граф. *Окружением* $\mathcal{N} = \mathcal{N}(v)$ *вершины* v графа G назовем следующий граф: его вершины — это все вершины из G, каждая из которых соединена с v некоторым ребром; его ребра — все ребра графа G, соединяющие выбранные вершины.

Определение 4.21. Пусть $\mathcal{C} = \{\mathrm{Col}_i\}$ — некоторое множество, элементы которого будем называть *цветами*. Каждое отображение $\nu\colon V \to \mathcal{C}$ будем называть *раскраской графа* $G = (V, E, \partial)$ *цветами из множества* $\mathcal{C}$. При этом будем говорить, что *вершина* v *покрашена в цвет* $\nu(v)$. Раскраска ν называется *правильной*, если смежные вершины покрашены разными цветами.

Упражнение 4.10 (Теорема Хивуда о пяти красках)**.** Докажите, что для каждого плоского простого графа существует правильная раскраска 5 цветами.

Упражнение 4.11. Докажите, что каждый планарный граф имеет реализацию в виде плоского графа, ребра которого — ломаные.