

Глава 3

Теорема Жордана

План. Замкнутая кривая, незамкнутая кривая, простая кривая, теорема Жордана о простой замкнутой кривой без самопересечений, лежащей на евклидовой плоскости. Ломаная, вершины ломаной, ребра ломаной, замкнутая ломаная, внутренние и концевые вершины ломаной, замкнутая, незамкнутая простая ломаная, теорема Жордана о простой замкнутой ломаной лежащей на евклидовой плоскости, следствие о перегородках, граф $K_{3,3}$, вложимость и кусочно-линейная вложимость графов, доказательство теоремы Жордана с помощью графов.

В данном разделе мы обсудим знаменитую теорему Жордана о непрерывных кривых без самопересечений, лежащих на евклидовой плоскости. Французский математик Marie Ennemond Camille Jordan включил в свой курс математического анализа [2] (этот курс читался Жорданом в l'Ecole Polytechnique, Paris, опубликован в 1887 году) теорему о том, что замкнутая непрерывная кривая на плоскости разбивает плоскость на две компоненты. Интересно отметить, многие комментаторы считают доказательство Жордана не полным, и утверждают, что первое полное доказательство было дано американским математиком Освальдом Вебленом (Oswald Veblen), хотя другие специалисты утверждают, что у Жордана все правильно, только опущен случай замкнутой ломаной.

Мы приведем здесь доказательство теоремы Жордана, следуя схеме из [1], см. также [4]. С другими доказательствами можно познакомиться тут [5], [6], [7].

3.1 Формулировка и план доказательства

Начнем с необходимых определений. Пусть X — топологическое пространство.

Определение 3.1. Непрерывная кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ называется *замкнутой*, если $\gamma(a) = \gamma(b)$, и *незамкнутой* в противном случае. Незамкнутая непрерывная кривая γ называется *кривой без самопересечений*, если отображение γ взаимно-однозначно с образом. Замкнутая непрерывная кривая называется *замкнутой кривой без самопересечений*, если единственные две различные точки $\{t_1, t_2\} \subset [a, b]$, для которых $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, — это точки

$\{a, b\}$. Кривые без самопересечений будем также называть *простыми* кривыми.

Напомним, что компонентой линейной связности топологического пространства X называется каждое линейно связное подмножество в X , которое не содержится в большем линейно связном подмножестве. Каждая точка из X лежит в некоторой компоненте линейной связности и никакие две такие компоненты не пересекаются, поэтому X разбивается на компоненты линейной (множество компонент в X определено однозначно).

Теорема 3.2 (М. Е. С. Jordan). Пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — непрерывная простая замкнутая кривая, и Γ — образ отображения γ . Тогда множество $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ состоит ровно из двух компонент линейной связности.

Замечание 3.3. Иногда в формулировку теоремы Жордана включают также следующее утверждение. Если γ — непрерывная незамкнутая простая кривая, и Γ — образ отображения γ , то множество $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ линейно связно. Мы вернемся к нему ниже, в разделе 3.6.

Теорема Жордана (теорема 3.2) на первый взгляд кажется совершенно очевидной, но ее доказательство далеко нетривиально. Дело в том, что утверждение теоремы Жордана вытекает из некоторых глобальных свойств плоскости. На других поверхностях оно может оказаться неверным. Рассмотрим несколько примеров.

- Любая замкнутая простая кривая на сфере делит ее поверхность на две компоненты линейной связности.
- Любая замкнутая простая кривая на цилиндре делит ее поверхность на две компоненты линейной связности.
- Не любая замкнутая простая кривая на торе делит ее поверхность на две компоненты линейной связности.
- Не любая замкнутая простая кривая на листе Мебиуса делит ее поверхность на две компоненты линейной связности.

План доказательства:

- Теорема для ломаных.
- Следствие: теорема про четыре точки.
- Следствие: невложимость графов K_5 и $K_{3,3}$ в виде ломаных.
- Равносильность непрерывной и кусочно-линейной вложимости графов.
- Общая теорема Жордана

3.2 Случай ломаных

Нам понадобится несколько определений.

Определение 3.4. Ломаной в $\mathbb{R}^n$ называется последовательность точек $A_0, A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^n$ и отрезков $[A_k, A_{k+1}]$, $k = 0, \dots, m-1$, последовательно их соединяющих.

Точки $A_0, A_1, \dots, A_m$ называются *вершинами ломаной*, а отрезки $e_k = [A_k, A_{k+1}]$, $k = 0, \dots, m-1$, — ее *ребрами* или *звеньями*.

Ломаная называется *замкнутой*, если A_0 совпадает с A_m , и *незамкнутой* в противном случае.

Для незамкнутой ломаной вершины A_0 и A_m , а также ребра e_0 и e_{m-1} называются *концевыми*, а все остальные вершины и ребра — *внутренними*. У замкнутой ломаной все вершины и ребра называются *внутренними*.

Звенья $[A_{k-1}, A_k]$ и $[A_k, A_{k+1}]$ называются *соседними*, а вершина A_k соседних звеньев называется их *общей* вершиной. В случае замкнутой ломаной звенья $[A_0, A_1]$ и $[A_{m-1}, A_m]$ тоже называются *соседними* с *общей* вершиной $A_0 = A_m$.

Определение 3.5. Ломаная называется *ломаной без самопересечений*, если никакие два ребра ломаной не имеют общих точек, за исключением соседних: $[A_{k-1}, A_k] \cap [A_k, A_{k+1}] = A_k$, где $k = 1, \dots, m-1$ или $[A_0, A_1] \cap [A_{m-1}, A_m] = A_0 = A_m$.

Ломаную без самопересечений будем также называть *простой*.

Замечание 3.6. Так как ломаная однозначно задается последовательностью своих вершин, мы будем иногда говорить «пусть $L = A_0A_1 \dots A_m$ — ломаная в $\mathbb{R}^n$ », понимая под этим, что $A_0, A_1, \dots, A_m$ — последовательность вершин ломаной L .

Также мы иногда будем рассматривать ломаную в $\mathbb{R}^n$ как подмножество $\mathbb{R}^n$, равное объединению всех ее ребер. В этом смысле, например, мы будем понимать выражение «пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — ломаная на плоскости».

Замечание 3.7. Пусть L — ломаная в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда L — компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$ (так как множество L замкнуто и ограничено).

Утверждение 3.8 (Теорема Жордана для ломаных). Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутая простая ломаная. Тогда множество $\mathbb{R}^2 \setminus L$ состоит ровно из двух компонент линейной связности.

Упражнение 3.1. Проверьте, что теорема Жордана для ломаных (утверждение 3.8 является частным случаем общей теоремы Жордана 3.2. Для этого достаточно по данной ломаной L построить непрерывную кривую, образом которой служит L .

Замечание 3.9. На самом деле, при доказательстве утверждения 3.8 мы покажем, что любые две точки из одной компоненты множества Ω можно соединить ломаной.

3.2.1 Необходимые определения и план доказательства

Определение 3.10. Пусть A и B — два произвольных непустых подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, тогда *расстоянием* $\rho(A, B)$ *между* A *и* B назовем величину $\inf\{|ab| : a \in A, b \in B\}$, где как обычно $|ab|$ обозначает длину отрезка, соединяющего точки a и b . В частности, так определяется *расстояние от точки a до множества B* , а именно, оно равно $\rho(\{a\}, B)$.

Ясно, что для одноточечных подмножеств $A = \{a\}$ и $B = \{b\}$ имеем $\rho(A, B) = |ab|$.

Замечание 3.11. Заметим, что определенная только что функция на непустых подмножествах $\mathbb{R}^n$ не задает метрику. В самом деле, хотя она симметрична, т.е. $\rho(A, B) = \rho(B, A)$, остальные аксиомы не выполняются. Например, существуют непересекающиеся подмножества $A, B \subset \mathbb{R}^n$, для которых $\rho(A, B) = 0$ (приведите пример таких подмножеств). Кроме того, неравенство треугольника выполняется не для всех A, B, C : например, для подмножеств прямой $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$ и $C = [2, 3]$ имеем $1 = \rho(A, C) \not\leq 0 + 0 = \rho(A, B) + \rho(B, C)$.

Лемма 3.12. *Расстояние между двумя отрезками в $\mathbb{R}^n$ равно 0 тогда и только тогда, когда они пересекаются.*

Доказательство. Докажем единственную нетривиальную часть леммы, а именно, что расстояние между непересекающимися отрезками $[A_1, B_1]$ и $[A_2, B_2]$ положительно. Отрезок $[A_i, B_i]$ состоит из точек $P_i(t_i) = A_i + (B_i - A_i)t_i$, где $t_i \in [0, 1]$, поэтому функция $\rho(t_1, t_2) = |P_1(t_1)P_2(t_2)|$ непрерывна. Эта функция определена на квадрате $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, являющемся замкнутым и ограниченным множеством, а значит, компактом по теореме 2.103. Поэтому, в силу следствия 2.106, функция $\rho(t_1, t_2)$ принимает свое наименьшее значение в некоторой точке (x, y) . Так как отрезки не пересекаются, $\rho(x, y) = |P_1(x)P_2(y)| > 0$, поэтому $\rho(t_1, t_2)$ — всюду положительная функция. $\square$

Следствие 3.13. *Расстояние между двумя ломаными в $\mathbb{R}^n$ равно 0 тогда и только тогда, когда ломаные пересекаются.*

Доказательство. Очевидным образом вытекает из предыдущего леммы 3.12, поскольку ломаная представляет собой объединение конечного числа отрезков. $\square$

План доказательства теоремы для ломаных.

- (1) Для каждой точки P ломаной L построим такую круговую окрестность $U(P)$, которая пересекается только с теми ребрами ломаной L , которые содержат точку P . Покажем, что ломаная L делит $U(P)$ на две компоненты линейной связности.

- (2) Покажем, что любую точку Q из $\mathbb{R}^2 \setminus L$ можно соединить с некоторой точкой из $U(A_1) \setminus L$ ломаной, целиком лежащей в $\mathbb{R}^2 \setminus L$. Отсюда будет следовать, что множество $\mathbb{R}^2 \setminus L$ состоит не более чем из двух компонент линейной связности.
- (3) Наконец, мы докажем, что L разбивает плоскость не менее чем на две компоненты. Для этого мы построим на $\mathbb{R}^2 \setminus L$ локально постоянную функцию, принимающую два значения. Так как локально постоянная функция постоянна на компонентах линейной связности, то точки, в которых эта функция принимает разные значения, лежат в разных компонентах.

3.2.2 Реализация пункта (1)

Пусть P — произвольная точка ломаной L . Положим

$$r(P) = \frac{1}{2} \min \{|PA_i|, |Pe_j| : A_i \neq P, e_j \not\ni P\}.$$

Заметим, что $r(P)$ — непрерывна функция как минимум непрерывных функций.

Положим $U(P) = U_{r(P)}(P)$. Тогда $U(P) \cap L$ — это пара радиусов круга $U(P)$, причем, если P — внутренняя точка некоторого ребра ломаной, то эти два радиуса образуют диаметр.

Справедлива следующая почти очевидная лемма, см. пример 2.94.

Лемма 3.14. *Ломаная L разбивает окрестность $U(P)$ каждой точки $P \in L$ на две компоненты линейной связности.*

3.2.3 Реализация пункта (2)

Положим $U(L) = \cup_{P \in L} U(P)$.

Лемма 3.15. *Любая точка X из множества $U(L) \setminus L$ может быть соединена с некоторой точкой из $U(A_1) \setminus L$ некоторой простой ломаной, лежащей внутри $U(L) \setminus L$.*

Доказательство. Напомним, что ломаная L представляет собой компактное подмножество плоскости. Поэтому из семейства $\{U(P)\}_{P \in L}$ открытых кругов, образующих $U(L)$, можно выбрать конечное подпокрытие $\{U(P_i)\}_{i=1}^k$. Без ограничения общности будем предполагать, что точки P_i занумерованы согласовано с обходом L . Так как круг с центром в P_i пересекает только ребра, содержащие точку P_i , то круги с центрами в соседних (вдоль ломаной) точках пересекаются. Каждое такое пересечение — лунка. Высота лунки — расстояние между точками пересечения соответствующих окружностей. Таких лунок — конечное число, поэтому минимум h высот лунок положителен. Пусть $X \in U(P_i)$. Рассмотрим перпендикуляр, опущенный из X на звено ломаной, содержащей P_i . Выберем на этом перпендикуляре точку Y

на расстоянии $h/4$ от L так, что $[X, Y]$ не пересекает L . Построим искомую простую ломаную, последовательно переходя от окрестности к окрестности и строя отрезки, параллельные звеньям ломаной L , содержащим их центры, на расстоянии $h/4$ от L . $\square$

Пусть теперь Q — произвольная точка из $\mathbb{R}^2 \setminus L$. Соединим Q отрезком с произвольной точкой R ломаной L . Отрезок $[Q, R]$ пересекается с ломаной L по конечному набору точек и отрезков. Пусть P — ближайшая к Q точка из этого пересечения. Окрестность $U(P)$ пересекается с отрезком $[Q, P]$ по радиусу. Выберем произвольную точку S внутри этого радиуса. Тогда $S \in U(L)$ и отрезок $[Q, S]$ не пересекается с ломаной L . Используя лемму 3.15, соединим точку S с некоторой точкой из окрестности $U(A_1)$ некоторой ломаной, лежащей в $U(L)$ и пересекающейся с $[Q, S]$ только по S . Объединение этой ломаной с отрезком $[Q, S]$ — ломаная, лежащая в $\mathbb{R}^2 \setminus L$ и соединяющая Q с точкой из $U(A_1)$. Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 3.16. *Любую точку Q из $\mathbb{R}^2 \setminus L$ можно соединить с некоторой точкой из $U(A_1) \setminus L$ ломаной, целиком лежащей в $\mathbb{R}^2 \setminus L$.*

Следствие 3.17. *Множество $\mathbb{R}^2 \setminus L$ состоит не более чем из двух компонент линейной связности.*

Доказательство. Множество $U(A_1) \setminus L$ состоит из двух компонент линейной связности, любая точка из $\mathbb{R}^2 \setminus L$ соединяется в $\mathbb{R}^2 \setminus L$ с некоторой точкой из $U(A_1) \setminus L$, которая лежит в одной из этих двух компонент, откуда и вытекает требуемое. $\square$

3.2.4 Реализация пункта (3)

Покажем теперь, что $\mathbb{R}^2 \setminus L$ состоит не менее чем из двух компонент. Введем на плоскости декартову систему координат Oxy , для которой все вершины ломаной L имеют разные абсциссы (такая система координат существует, так как это условие запрещает лишь конечное число направлений оси Oy). Для каждой точки $P \in \mathbb{R}^2 \setminus L$ рассмотрим луч ℓ_P , выходящий из P и сонаправленный с осью Oy . Пусть e — произвольное ребро ломаной L . Тогда $\ell_P \cap e$ состоит не более чем из одной точки, в частности, $\ell_P \cap L$ представляет собой конечное число точек.

Точку $Q \in \ell_P \cap L$ назовем *существенной*, если выполняется одно из двух условий:

- (1) точка Q лежит внутри некоторого ребра ломаной L (в этом случае ребро ломаной разбивается точкой Q на два полуинтервала);
- (2) точка Q — вершина ломаной L , и выходящие из Q ребра ломаной L лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, проходящей через ℓ_P .

Положим $\eta(P) = 0$, если число существенных пересечений луча ℓ_P с ломаной L четно (в частности, луч не пересекает ломаную), и $\eta(P) = 1$ в противном случае.

Лемма 3.18. *Функция η локально постоянна на $\mathbb{R}^2 \setminus L$.*

Доказательство. Покажем, что если Q — точка пересечения ℓ_P и L , то существует окрестность точки P такая, что для любой точки P' из этой окрестности вклад ребер, содержащих точку Q в величину $\eta(P)$ сохраняется. Действительно, возьмем окрестность $V(P)$ величины меньшей, чем минимум из модулей разностей x -координат точки Q и отличных от нее концов содержащих ее ребер и расстояния от P до L . В этом случае, если Q — существенная, то при смещении P внутри $V(P)$ пересечение останется существенным, если же Q — не существенная, то пересечение или исчезнет, или превратится в два существенных пересечения. В обоих случаях $\eta(P)$ сохраняется. $\square$

Применим следствие 2.110, в соответствии с которым η постоянна на каждой компоненте линейной связности. Остается показать, что η принимает два разных значения. Для этого рассмотрим некоторую точку P ломаной, лежащую внутри произвольного ребра ломаной L , и пусть точки A и B лежат в разных компонентах $U(P) \setminus L$ на диаметре, параллельном оси Oy (такие точки можно выбрать, так как по предположению ребра ломаной L не параллельны оси Oy), и пусть y -координата точки B больше, чем y -координата точки A . Тогда P — существенная точка пересечения для A , и $\eta(B)$ отличается от $\eta(A)$. Последнее означает, что точки A и B лежат в разных компонентах линейной связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$, что и завершает доказательство кусочно-линейной теоремы Жордана (утверждение 3.8).

Замечание 3.19. Из доказательства следует, что окрестность $U(P)$ произвольной точки P простой замкнутой ломаной L , построенная выше, разбивается ломаной на две компоненты связности, которые лежат в разных компонентах связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$.

3.3 Случай простой незамкнутой ломаной

Случай незамкнутой простой ломаной несколько проще и может быть получен несложной модификацией первых двух шагов доказательства.

Утверждение 3.20. *Если L — незамкнутая простая ломаная, то множество $\mathbb{R}^2 \setminus L$ линейно связно.*

Доказательство. Пусть $L = A_1 \cdots A_k$ — незамкнутая простая ломаная. Заметим, что в этом случае окрестности $U(A_0)$ и $U(A_k)$ не разбиваются ломаной L , то есть множество $U(A_0) \setminus L$ линейно связно. Повторяя приведенные выше рассуждения, для произвольной точки Q из $\mathbb{R}^2 \setminus L$ построим ломаную, лежащую в $\mathbb{R}^2 \setminus L$ и соединяющую Q с некоторой точкой из множества $U(A_0) \setminus L$ и воспользуемся его линейной связностью. $\square$

3.4 Следствие про четыре точки и непланарность графов K_5 и $K_{3,3}$

Нам понадобится следующее утверждение, которое вытекает из кусочно-линейной теоремы Жордана является весьма частным случаем так называемой леммы о перегородках.

Лемма 3.21. Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — простая замкнутая ломаная, и A, B, C, D — различные ее точки, расположенные именно в этом порядке. Пусть точки A и C соединены ломаной P_1 , точки B и D соединены ломаной P_2 , причем внутренности ломаных P_1 и P_2 лежат в одной и той же компоненте линейной связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$. Тогда ломаные P_1 и P_2 пересекаются.

Доказательство. Рассмотрим окрестности $U(A)$ и $U(C)$ точек A и C , построенные выше и, если нужно, уменьшим их так, чтобы они не пересекали ломаную P_2 . Обозначим через A_1 и C_1 точки пересечения ломаной P_1 с граничными окружностями окрестностей $U(A)$ и $U(C)$ соответственно. По предположению точки A_1 и C_1 лежат в одной и той же компоненте линейной связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$ с ломаной P_2 . Фиксируем также точки $A_2 \in U(A)$ и $C_2 \in U(C)$, лежащие в другой компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$. Отметим, что A_2, C_2 лежат в той компоненте множества $\mathbb{R}^2 \setminus L$, которая не содержит ломаных P_1 и P_2 .

Точки B и D разбивают ломаную L на две компоненты, которые мы обозначим через L_1 и L_2 . Пусть $A \in L_1$ для определенности. Рассмотрим простую замкнутую ломаную $L_1 \cup P_2$. Она тоже разбивает плоскость на две компоненты линейной связности. Заметим, что

- Точки A_2 и C_2 лежат в одной компоненте по отношению к $L_1 \cup P_2$, так как эти точки лежат в одной компоненте по отношению к L , причем в той, которая не содержит ломаных P_1 и P_2 .
- Точки A_1 и A_2 , а значит и A_1 и C_2 лежат в разных компонентах относительно $L_1 \cup P_2$, так как функция η принимает на A_1 и A_2 разные значения.
- Так как $U(C)$ не пересекает ни P_2 , ни L_1 , то точки C_1 и C_2 лежат в одной компоненте относительно $L_1 \cup P_2$, а значит C_1 и A_1 — в разных.

Из последнего вытекает, что часть ломаной P_1 , ограниченная точками A_1 и C_1 , пересекает ломаную $L_1 \cup P_2$, и значит ломаную P_2 , что и требовалось. $\square$

Замечание 3.22. Утверждение 3.21 может оказаться неверным, если замечать плоскость на другую поверхность. Приведите примеры на листе Мебиуса и на торе.

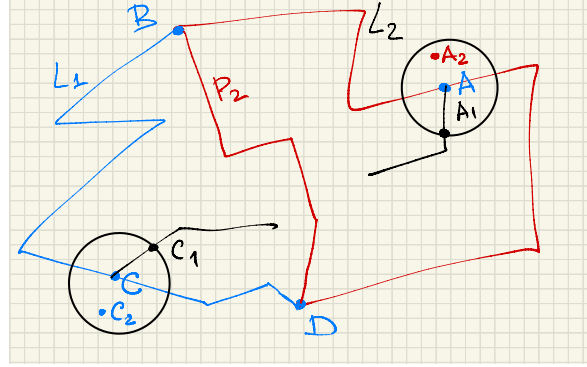


Рис. 3.1: Четыре точки.

Напомним, что через K_n обычно обозначается *полный граф с n вершинами*, то есть простой граф с n вершинами, любые две вершины которого смежны. Далее, через K_{n_1, n_2} обычно обозначается *полный двудольный граф*, а именно, простой граф, множество вершин которого разбито на два подмножества V_1 и V_2 , называемые *долями*, где $|V_i| = |n_i|$, $i = 1, 2$, при этом любые две вершины из разных подмножеств соединены ребром, и других ребер нет.

Напомним, что для каждого графа $G = (V, E, \partial)$ выше было построено топологическое пространство X_G , названное топологическим графом.

Пусть $G = (V, E, \partial)$ — некоторый граф. Используем операцию склеивания точек для построения по графу G топологического пространства X_G , которое будем называть *топологическим графом*, соответствующим G . Каждому ребру $e \in E$ графа G поставим в соответствие отрезок $[a_e, b_e]$, будем считать, что отрезки попарно не пересекаются, тогда их объединение $\sqcup_{e \in E} [a_e, b_e]$ представляет собой топологическое пространство. Добавим к полученному пространству множество вершин графа, каждая из которых рассматривается как одноточечное пространство: $Y = V \cup (\sqcup_{e \in E} [a_e, b_e])$. Склеим теперь некоторые точки из Y так. Для каждого $e \in E$, если $\partial^{-1}(e)$ состоит из одной вершины, то склеим концы отрезка $[a_e, b_e]$ с этой вершиной, а если $\partial^{-1}(e)$ состоит из двух вершин, то склеим один конец отрезка $[a_e, b_e]$ с одной из них, а второй — со второй.

Вложением графа G в топологическое пространство Y называется непрерывное взаимно-однозначное с образом отображение $f: X_G \rightarrow Y$. Отметим, что при таком отображении вершины графа переходят в точки топологического пространства Y , а ребрам соответствуют простые непрерывные кривые, которые пересекаются только по точкам, соответствующим общим вершинам.

Упражнение 3.2. Покажите, что любой граф можно вложить в трехмерное пространство.

Граф называется *планарным*, если существует его вложение в плоскость.

Следствие 3.23. *Граф $K_{3,3}$ нельзя вложить в плоскость так, чтобы непрерывные кривые, соответствующие ребрам, были ломаными.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть множество вершин графа разбито на доли так: $\{v_1, v_3, v_5\}$ и $\{v_2, v_4, v_6\}$. Тогда образы ребер $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_1$ образуют простую замкнутую ломаную L , на которой последовательно расположены вершины $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$. Ломаная L разбивает плоскость на две части, поэтому две из трех ломаных, соответствующих оставшимся трем ребрам v_1v_4, v_2v_5, v_3v_6 лежат в одной из этих частей и пересекаются по лемме 3.21, противоречие. $\square$

Упражнение 3.3. Покажите, что граф $K_{3,3}$ можно вложить в тор.

Упражнение 3.4. Покажите, что граф K_5 нельзя вложить в плоскость так, чтобы непрерывные кривые, соответствующие ребрам, были ломаными.

Оказывается, вложимость графа в плоскость эквивалентна его вложимости с ребрами-ломаными.

Утверждение 3.24. *Если граф вложим в плоскость, то он вложим в плоскость так, что все непрерывные кривые, соответствующие ребрам, являются ломаными.*

Доказательство. Пусть $f: X_G \rightarrow \mathbb{R}^2$ — вложение графа $G = (V, E, \partial)$ в плоскость, и обозначим через γ_e непрерывную кривую, соответствующую ребру e (то есть являющуюся ограничением отображения f на соответствующий отрезок). отождествим вершины с их f -образами, и для каждой вершины $v \in V$ положим

$$r(v) = \min \{ |vv'|, |v\gamma_e| : v' \neq v, e \not\ni v \},$$

и пусть $r = 1/2 \min \{ r(v) : v \in V \}$. Построим круговые окрестности $U(v)$ радиуса r для всех вершин $v \in V$. Заметим, что построенные окрестности попарно не пересекаются и, более того, окрестность $U(v)$ не пересекается с кривыми γ_e , соответствующими ребрам, не инцидентным v .

Предположим сначала, что граф не имеет петель, и пусть $e = v_i v_j$ — любое его ребро, а $\gamma_e: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — соответствующая непрерывная кривая, $\gamma_e(a) = v_i, \gamma_e(b) = v_j$. Положим

$$t_a = \sup \{ t \in [a, b] : |\gamma(t)v_i| = r \}, \quad t_b = \inf \{ t \in [a, b] : |\gamma(t)v_j| = r \}.$$

Обозначим через δ_e ограничение кривой γ_e на отрезок $[t_a, t_b]$. Это — вложенная кривая, соединяющая точки $\gamma(t_a)$ и $\gamma(t_b)$, лежащие на границе кругов $U_r(v_i)$ и $U_r(v_j)$ соответственно, и лежащая вне этих кругов и, более того, вне всех кругов $U_r(v), v \in V$. Теперь мы поступим следующим образом.

- заменим начальный и конечный фрагменты кривых γ_e на радиусы, соединяющие центр окрестности $U(v)$ с концом соответствующей кривой δ_e , лежащим на границе $U(v)$;

- заменим каждую кривую δ_e на простую ломаную, соединяющую те же точки что и δ_e так, чтобы ломаные, соответствующие разным ребрам не пересекались.

Для реализации второго пункта нужно выбрать ε меньше чем величина $1/2 \min \{r, |\delta_e \delta_{e'}|\}$, где минимум берется по всем парам различных ребер e, e' . Тогда окрестности $U_\varepsilon(\delta_e)$ попарно не пересекаются и пересекают круг $U_r(v)$ только если v инцидентно e . Остается заменить кривую $\delta_e, e = vv'$ на ломаную, соединяющую те же точки, лежащую в окрестности $U_\varepsilon(\delta_e)$ и не заходящую внутрь кругов $U_r(v)$ и $U_r(v')$.

Лемма 3.25. Пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывная кривая, образ которой лежит в открытом множестве U . Тогда существует ломаная $L \subset U$, соединяющая точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$.

Доказательство. Пусть $T \subset [a, b]$ состоит из всех $t \in [a, b]$ для которых существует ломаная $L_t \subset U$, соединяющая $\gamma(a)$ и $\gamma(t)$. Множество T не пусто и содержит некоторое $t > a$ (Проверьте!). Положим $t_0 = \sup T$. Пусть $t_0 < b$. Точка $P = \gamma(t_0)$ лежит в открытом множестве U , поэтому существует открытый шар $U_\varepsilon(P) \subset U$. Так как γ непрерывно, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\gamma((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)) \subset U$ и $t_0 + \varepsilon < b$. Так как t_0 — точечная верхняя грань, то существует $\tau \in (t_0 - \varepsilon, t_0) \cap T$, то есть существует ломаная L_τ . Добавим к ломаной L_τ отрезок $[\gamma(\tau), \gamma(t_0 + \varepsilon/2)]$. Получим ломаную $L_{t_0 + \varepsilon/2}$, что противоречит выбору t_0 . Лемма доказана. $\square$

Остается добавить петли. Реализуем сначала граф без петель. Напомним, что у каждой вершины есть круговая окрестность, пересечение которой с реализацией графа состоит из нескольких радиусов. Но тогда петли можно реализовать внутри этих окрестностей, поместив между радиусами. Утверждение доказано. $\square$

Следствие 3.26. Графы $K_{3,3}$ и K_5 не являются планарными.

3.5 Теорема Жордана: компонент не меньше двух

Используем теперь непланарность $K_{3,3}$ для доказательства следующего утверждения.

Утверждение 3.27. Пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — непрерывная замкнутая простая кривая, и Γ — образ отображения γ . Тогда множество $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ не является линейно связным.

Доказательство. Пусть на плоскости фиксированы стандартные координаты (x, y) , тогда кривая γ задается парой координатных функций: $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Так как $x(t)$ — непрерывная на отрезке функция, то она принимает на $[a, b]$ наименьшее и наибольшее значения, которые мы обозначим

через x_m и x_M соответственно. Последнее означает, что образ Γ кривой γ лежит в полосе между двумя вертикальными (то есть параллельными Oy) прямыми ℓ_m , на которой $x = x_m$, и ℓ_M , на которой $x = x_M$. (Такие прямые называются *опорными*). Обозначим через A_m и A_M точки пересечения Γ с прямыми ℓ_m и ℓ_M соответственно, имеющие максимальные y -координаты. (Точка A_m действительно существует, так как $\Gamma \cap \ell_m$ — замкнутое ограниченное подмножество прямой, а значит оно содержит свою точную верхнюю грань. Аналогично проверяется существование точки A_M .)

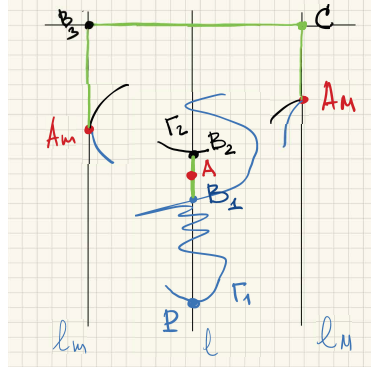


Рис. 3.2: Теорема Жордана: строим граф $K_{3,3}$.

Точки A_m и A_M делят кривую Γ на две дуги.

Проведем еще одну вертикальную прямую $x = (x_m + x_M)/2$ и обозначим ее через ℓ . Эта прямая также пересекает кривую Γ . Пусть P — точка пересечения ℓ с Γ с наименьшей y -координатой. Назовем дугу кривой Γ , содержащую P *нижней*, обозначим ее через Γ_1 , а вторую дугу обозначим через Γ_2 и назовем *верхней*. Обе дуги Γ_1 и Γ_2 представляют собой образы простых непрерывных кривых, соединяющих точки A_m и A_M , поэтому каждая из них пересекает прямую ℓ . Пусть B_2 — точка из пересечения $\ell \cap \Gamma_2$ с наименьшей y -координатой (отметим, что y -координата точки B_2 больше, чем координата точки P). Теперь на пересечении $\ell \cap \Gamma_1$, среди точек с y -координатами меньшими чем у B_2 выберем точку B_1 с наибольшей координатой. Тогда отрезок $[B_1, B_2]$ пересекает Γ только по своим концам. Обозначим через A середину отрезка $[B_1, B_2]$.

Наконец, так как кривая Γ ограничена, существует горизонтальная прямая $y = y_0$ такая, что y_0 больше наибольшего значения координатной функции $y(t)$ кривой γ . Тогда эта прямая не пересекает Γ , но пересекает прямые ℓ_m и ℓ_M по точкам B_3 и C соответственно. Кроме того, лучи $[A_m, B_3]$ и $[A_M, C]$ пересекают Γ только по своим начальным точкам A_m и A_M .

Покажем, что точки A и B_3 лежат в разных компонентах линейной связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Действительно, если бы эти точки можно было бы соединить непрерывной кривой δ , не пересекающей Γ , то мы получили бы вложение в плоскость графа $K_{3,3}$ с множеством вершин, состоящим

из двух долей $\{A_m, A, A_M\}$ и $\{B_1, B_2, B_3\}$, и следующими ребрами: четыре дуги $A_mB_1, A_mB_2, A_MB_1, A_MB_2$ кривой Γ , три отрезка AB_1, AB_2, A_mB_3 , двузвенная ломаная B_3CA_M и кривая δ . Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Для завершения доказательства теоремы Жордана остается проверить, что компонент ровно две. В двух следующих разделах мы приведем схему доказательства, не вдаваясь в мелкие подробности.

3.6 Случай простой незамкнутой кривой

Случай незамкнутой простой непрерывной кривой может быть получен из теоремы Жордана для ломаных с помощью обычных приемов математического анализа (впрочем потребуются определенная изобретательность). Мы приводим здесь эскиз доказательства, поскольку само утверждение требуется нам для завершения доказательства теоремы Жордана, а именно, для проверки того, что компонент ровно две.

Нам понадобится следующее следствие.

Следствие 3.28. Пусть $f: X_G \rightarrow \mathbb{R}^2$ — вложение графа G в плоскость такое, что все его ребра — ломаные, и пусть $\Gamma = f(X_G)$ — образ графа G . Тогда среди компонент линейной связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ имеется ровно одна неограниченная компонента.

Утверждение 3.29. Если γ — незамкнутая простая непрерывная кривая, и Γ — образ отображения γ , то множество $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ линейно связно.

Доказательство. Пусть x, y — произвольные точки из $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Мы построим плоский граф H такой, что точки x, y лежат в единственной неограниченной компоненте A множества $\mathbb{R}^2 \setminus H$, а кривая Γ — не пересекается с A . Тогда кривая, соединяющая x с y в A , не будет пересекать Γ , что и требовалось.

Перейдем к построению графа H . Так как Γ — компакт, выберем положительное d такое, что расстояния $|x\Gamma|$ и $|y\Gamma|$ больше чем $3d$. Воспользовавшись равномерной непрерывностью отображения γ (непрерывное отображение отрезка — равномерно непрерывно), разобьем кривую Γ последовательными точками $p_1, \dots, p_{k+1}$ на дуги Γ_i , где Γ_i ограничена точками p_i, p_{i+1} , так, что расстояние от p_i до любой точки дуги Γ_i меньше d . Положим $d' = \min \{|\Gamma_i, \Gamma_j| : |i-j| > 1\}$. Заметим, что $d' \leq d$. Теперь разобьем каждую дугу Γ_i на меньшие дуги Γ_{ij} , ограниченные точками $p_{i,j}$ и $p_{i,j+1}$ так, чтобы расстояние от $p_{i,j}$ до каждой точки дуги Γ_{ij} меньше чем $d'/4$. Граф H_i — объединение одинаковых квадратов, стороны которых равны $d'/2$, параллельны координатным осям, а центры расположены в точках $a_{i,j}$. В силу выбора d' графы H_i и H_j пересекаются только при $|i-j| \leq 1$. Положим $H = \cup H_i$.

Лемма 3.30. Точки x, y лежат в единственной неограниченной области, ограниченной графом H .

Доказательство. Идея доказательства в том, что ограниченные циклы графа H — маленькие, а именно, каждый такой цикл лежит в объединении двух соседних графов $H_i \cup H_{i+1}$. Диаметр каждого графа H_i не превосходит $d + d'/2$, диаметр $H_i \cup H_{i+1}$ не превосходит $2d + d' \leq 3d$, а расстояние от x до Γ больше чем $3d$, противоречие. $\square$

Утверждение доказано. $\square$

3.7 Теорема Жордана: компонент ровно две

Мы используем утверждение 3.29 для завершения доказательства теоремы Жордана.

Лемма 3.31. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ — образ простой непрерывной замкнутой кривой, и A — произвольная компонента линейной связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Тогда каждая точка кривой Γ принадлежит границе множества A .

Доказательство. Пусть $P \in \Gamma$ — произвольная точка кривой Γ , точка a лежит в A , а точка b — в другой компоненте линейной связности множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Выбросим из Γ произвольную, сколь угодно малую дугу δ , содержащую P , тогда существует непрерывная кривая, соединяющая точки a и b и проходящая через дугу δ . У этой кривой есть отрезок, целиком лежащий внутри A , за исключением той его концевой точки, которая лежит на дуге δ . Поэтому граница множества A содержит всюду плотное подмножество кривой Γ , а значит и всю кривую Γ (оба множества, очевидно, замкнуты). $\square$

Итак, пусть множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ состоит из трех (или более) компонент линейной связности. В компонентах A_i , $i = 1, 2, 3$, выберем по точке x_i , и пусть δ_i , $i = 1, 2, 3$, — попарно не пересекающиеся дуги кривой Γ . В каждой компоненте A_i соединим точку x_i с серединами дуг δ_j , $j = 1, 2, 3$, кривыми γ_{ij} . При этом можно добиться, чтобы кривые γ_{ij} не пересекались. В результате мы получим вложение графа $K_{3,3}$ в плоскость, противоречие.

Тем самым, теорема Жордана полностью доказана.

Литература к главе 3

- [1] Прасолов В.В., *Теорема Жордана*, Матемю обр., 1999, выпуск 2–3 (9–10), стр. 95–101.
- [2] М.Е.С. Jordan, *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, Gauthier–Villars, Paris, 1887. Vol. 3, pp. 587–594.
- [3] К. Kuratowski, *Sur le probleme des courbes gauches en Topologie*, Fund. Math., **15** (1930) pp. 271–283.
- [4] Прасолов В.В. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*, 2004, изд-во МЦНМО.
- [5] Вольперт А.И. *Элементарное доказательство теоремы Жордана*. УМН, 1950, т. 5, вып. 5(39), с. 168–172.
- [6] Филиппов А.Ф. *Элементарное доказательство теоремы Жордана*. УМН, 1950, т. 5, вып. 5(39), с. 173–176.
- [7] Парамонов П.В. *Теорема Жордана*,
<http://www.math.msu.su/tffa/lectures/JORDANThlec2012.pdf>

Упражнения к главе 3

Упражнение 3.5.

- (1) Приведите пример непересекающихся подмножеств на прямой, расстояние между которыми равно нулю.
- (2) Приведите пример непересекающихся замкнутых подмножеств прямой, расстояние между которыми равно нулю.
- (3) Существуют ли два замкнутых непересекающихся подмножества окружности, находящиеся на нулевом расстоянии?

Упражнение 3.6. Пусть A — некоторое подмножество плоскости. Рассмотрим функцию $f(x) = \inf\{|xy| : y \in A\}$ (расстояние от x до A). Докажите, что f непрерывна.

Упражнение 3.7. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции, заданные на топологическом пространстве X . Докажите, что функция $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ также непрерывна.

Упражнение 3.8. Докажите, не используя теорему Жордана, что квадрат (стороны квадрата) разбивает плоскость на 2 компоненты.

Упражнение 3.9. Докажите, не используя теорему Жордана, что треугольник (замкнутая трехзвенная ломаная) разбивает плоскость на 2 компоненты.

Упражнение 3.10. Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутая ломаная без самопересечений такая, что для каждого ее ребра ломаная L лежит в замкнутой полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через это ребро (такие ломаные иногда называют *выпуклыми*). Не используя теорему Жордана, докажите, что L разбивает плоскость на 2 компоненты.

Упражнение 3.11. Докажите, что открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ линейно связно тогда и только тогда, когда любые две его точки можно соединить ломаной.

Упражнение 3.12. Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — незамкнутая ломаная без самопересечений. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε -окрестность $U_\varepsilon(L)$ ломаной L . Пусть P и Q — произвольные точки из $U_\varepsilon(L) \setminus L$. Покажите, что их можно соединить ломаной, не пересекающей L и лежащей в $U_\varepsilon(L)$.

Упражнение 3.13. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из некоторого круга $U_r(A)$ выбрасыванием трех различных его радиусов. Докажите, что X состоит из трех компонент.

Упражнение 3.14. Пусть OA , OB и OC — три отрезка, причем любые два из них имеют только одну общую точку O . Докажите, что объединение этих отрезков не разбивает плоскость, т.е. что $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (OA \cup OB \cup OC)$ линейно связно.

Упражнение 3.15. Пусть L_1 и L_2 — незамкнутые ломаные без самопересечений, лежащие на плоскости $\mathbb{R}^2$ и не имеющие общих точек. Докажите, что $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (L_1 \cup L_2)$ линейно связно.

Упражнение 3.16. Рассмотрим конечную последовательность

$$[A_1, B_1], [A_2, B_2], \dots, [A_m, B_m]$$

отрезков $[A_i, B_i] \subset \mathbb{R}^2$ и положим $X_k = \cup_{i=1}^k [A_i, B_i]$. Предположим, что для каждого $k = 2, \dots, m$ выполняется или $X_{k-1} \cap [A_k, B_k] = \emptyset$, или $X_{k-1} \cap [A_k, B_k] = \{A_k\}$. Докажите, что любые две точки из каждого множества $\Omega_k = \mathbb{R}^2 \setminus X_k$ можно соединить ломаной, лежащей в Ω_k . В частности, каждое множество Ω_k — линейно связно.