Глава 1

Элементы теории графов

План. Общее определение графов, вершины, ребра, граничное отображение, инцидентные вершины и ребра, вершины, соединенные ребром, смежные вершины, смежные ребра, петля, кратное ребро, кратность ребра, простой граф, лемма о рукопожатиях, степень вершины, задача Эйлера, маршрут, цепь, путь, цикл, связный граф, эйлеров цикл или обход ребер графа, эйлеров граф, критерий эйлеровости графа, простой цикл, гамильтонов цикл, гамильтонов граф, теорема Дирака — достаточное условие гамильтоновости, дерево, свойства деревьев, остовные деревья, взвешенные графы, минимальные остовные деревья, алгоритм Краскала.

1.1 Основные понятия теории графов

Для произвольного множества V через $V^{(k)}$ будем обозначать множество всех k-элементных подмножеств множества V. Множество $V^{(2)}$ совпадает с множеством неупорядоченных пар различных элементов V. Множество $V^{(1)}$ состоит из одноэлементных подмножеств множества V, его можно отождествить с V. Если множество V конечно и состоит из n элементов, то $V^{(k)}$ пусто при $k > n$, а $V^{(n)}$ состоит из одного элемента V.

Определение 1.1. *Графом* G называется тройка $G = (V, E, \partial)$, состоящая из множеств V, E и отображения $\partial\colon E \to V^{(1)} \cup V^{(2)}$. Элементы из V называются *вершинами* графа G, элементы из E — *ребрами* графа G, а ∂ — *граничным отображением* или *отображением инцидентности*.

Замечание 1.2. Всюду, если не оговорено противное, мы будем рассматривать *конечные графы*, т.е. графы, у которых множества V и E конечны.

Пример 1.3. Пусть $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, $\partial(e_i) = \{v_j, v_k\}$ для любых $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Тогда граф (V, E, ∂) можно рассматривать как модель треугольника с множеством вершин V и множеством сторон E. При этом граничное отображение ∂ показывает, к каким вершинам каждое из ребер e_i «приклеивается», например, $\partial(e_1) = \{v_2, v_3\}$, так что сторона–ребро e_1 соединяет вершины v_2 и v_3.

В теории графов принята следующая терминология:

- если $v \in \partial(e)$, то говорят, что вершина v и ребро e *инцидентны*;

- если $\partial(e) = \{v, w\}$, то говорят, что вершины v и w — *смежные* или *соседние*, или же, что они *соединены ребром* e, и что ребро e *соединяет* эти вершины;

- ребра e и e' называются *смежными* или *соседними*, если множества $\partial(e)$ и $\partial(e')$ пересекаются ровно по единственной вершине;

- ребро, инцидентное ровно одной вершине, называется *петлей*;

- если некоторой паре вершин инцидентно несколько ребер, то все эти ребра называются *кратными*;

- если некоторой вершине инцидентно несколько петель, то все эти петли также называются *кратными*.

Кратностью ребра e называется количество всех ребер e', для которых $\partial(e') = \partial(e)$. Ясно, что ребро e не является кратным тогда и только тогда, когда его кратность равна 1.

Определение 1.4. Граф без петель и кратных ребер называется *простым*.

Замечание 1.5. Чтобы задать простой граф, достаточно задать множество вершин V и некоторое подмножество E в $V^{(2)}$.

В самом деле, пусть $G = (V, E, \partial)$ — простой граф. Тогда ∂ отображает множество E взаимно-однозначно на некоторое подмножество в $V^{(2)}$, что позволяет отождествить E и $\partial(E) \subset V^{(2)}$. Иными словами, ребро простого графа однозначно задается парой различных вершин, которые оно соединяет.

Таким образом, *простой граф* можно рассматривать как пару (V, E), где E — некоторое подмножество в $V^{(2)}$.

Для простого графа $G = (V, E)$ ребро $e = \{v, w\} \in E$ удобно обозначать через vw или wv.

Имеется большое количество задач, которые естественно решаются на языке теории графов.

Задача 1.6 (Лемма о рукопожатиях)**.** Некоторые участники конференции, здороваясь, пожимают друг другу руки. Докажите, что число участников, каждый из которых совершил нечетное число рукопожатий, — четно.

Решение этой задачи использует понятие степени вершины и одну очень полезную формулу.

Определение 1.7. Пусть v — произвольная вершина некоторого графа. Тогда *степенью* $\deg v$ этой вершины называется количество инцидентных v ребер, не являющихся петлями, плюс удвоенное количество петель, инцидентных v.

Вычислим сумму степеней всех вершин графа. Заметим, что каждое ребро вносит в эту сумму вклад, равный 2, поэтому

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg v,$$

где $|E|$ — количество элементов множества E ребер графа. Обозначим через n_k количество вершин степени k. Тогда сумму степеней всех вершин можно записать в виде $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\, n_k$. Таким образом, имеет место важная формула:

$$2|E| = \sum_{k=0}^{\infty} k\, n_k. \tag{1.1}$$

Решение задачи 1.6. Рассмотрим граф G, который очевидным образом описывает рукопожатия: за вершины принимаем участников конференции, за ребра — все рукопожатия (то есть две вершины соединены ребром, если и только если соответствующие участники пожали руки). Тогда в задаче требуется доказать, что в нашем графе количество вершин с нечетными степенями четно. Иными словами, требуется доказать, что число $A = n_1 + n_3 + n_5 + \ldots$ четно.

Воспользуемся формулой (1.1):

$$2|E| = \sum_{k=0}^{\infty} k\, n_k = \sum_{k=0}^{\infty} 2k\, n_{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)\, n_{2k-1}. \tag{1.2}$$

Из нее следует, что число $1n_1+3n_3+5n_5+\ldots$ четно. Теперь заметим, что оно отличается от числа A на четное число $2n_3 + 4n_5 + 6n_7 + \ldots$, следовательно A само четно.

Замечание 1.8. Разберитесь, учитывает ли приведенное выше решение ситуацию, когда какие-то пары участников конференции здоровались несколько раз.

Отметим, что в теории графов имеется много интересных задач, решения которых основаны на вычислении различных соотношений между числовыми характеристиками графов. Часть из таких задач будет рассмотрена на семинарах.

1.2 Эйлеровы и гамильтоновы графы

Следующий круг вопросов связан с обходами вершин и ребер графов.

1.2.1 Обход ребер. Эйлеровы циклы

Мы начнем с классической задачи, которую придумал и решил Л. Эйлер, и с которой, как многие думают, берет начало теория графов.

Задача 1.9 (Задача Эйлера)**.** В городе Кёнигсберге на реке Прегель имеется 7 мостов. Эйлера интересовал вопрос, можно ли, выйдя из дома, вернуться назад, пройдя каждый мост ровно один раз?

Эйлер изобразил части суши точками (вершинами), а мосты — линиями, соединяющими эти точки (ребрами) и, фактически, сформулировал эту задачу в терминах теории графов.

Нам нужно ввести ряд новых понятий.

Определение 1.10. *Маршрутом, соединяющим вершины* v_0 *и* v_k, или (v_0, v_k)-*маршрутом* называется последовательность $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$, где v_i — вершины графа, а e_i — его ребра, причем для каждого i ребро e_i соединяет вершины v_{i-1} и v_i, то есть $v_{i-1}, v_i \in \partial e_i$. Маршрут называется *замкнутым*, если $v_0 = v_k$. В обоих рассмотренных случаях число k называется *длиной маршрута*. Если в маршруте различны все ребра e_i, то такой маршрут называется *цепью*. Замкнутая цепь называется *циклом*. Если в маршруте все вершины различны, кроме, быть может, первой и последней, то такой маршрут называется *путем*. Замкнутый путь называется *простым циклом*.

Замечание 1.11. Если G — простой граф, то маршрут из определения 1.10 записывается как $v_0 v_1 \cdots v_k$ (без указания ребер и без разделения запятыми).

Определение 1.12. Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить некоторым маршрутом.

Определение 1.13. Цикл в связном графе называется *эйлеровым* или *реберным обходом графа*, если он содержит все ребра графа. Граф, для которого существует эйлеров цикл, называется *эйлеровым графом*.

Итак, в задаче 1.9 спрашивается, существует ли для конкретного графа, который соответствует плану города Калининград, эйлеров цикл, т.е. является ли этот граф эйлеровым. Эйлер решил общую задачу о существовании такого цикла, и как мгновенное следствие получил, что в задаче 1.9 ответ отрицательный.

Теорема 1.14 (Критерий эйлеровости графа)**.** *Связный граф эйлеров, если и только если степени всех его вершин четны.*

Доказательство. Заметим сначала, что выкидывание петли сохраняет связность графа, четности степеней его вершин, а также свойство графа содержать эйлеров цикл. Таким образом, мы будем сразу предполагать, что рассматриваемые графы не имеют петель. Заметим также, что, по определению, эйлеровы циклы существуют лишь в связных графах.

Предположим, что граф содержит эйлеров цикл, и представим себе, что мы обходим ребра графа по этому циклу. Рассмотрим произвольную вершину v. Скажем, что ребро, по которому мы зашли в v, и следующее ребро, по которому мы из v вышли, образуют пару. Так как все ребра цикла различны, любые две таких пары ребер не пересекаются, поэтому все инцидентные v ребра разбиваются на непересекающиеся пары смежных ребер эйлерова цикла. Следовательно, степень вершины v четна.

Для доказательства обратного утверждения, покажем сначала, что в любом графе, содержащем хотя бы одно ребро, и в котором степени вершин четны, имеется цикл. Действительно, начнем с произвольного ребра e_1, соединяющего вершины v_0 и v_1. В силу четности степени вершины v_1, существует ребро e_2, соединяющее v_1 с некоторой вершиной v_2. Если v_2 совпала с v_0, то получили цикл. Иначе продолжаем процесс. В силу конечности числа вершин, на некотором шаге добавленная вершина совпадет с одной из уже имеющихся, и мы получим искомый цикл.

Выкинув этот цикл (т.е. все его ребра) из графа, вновь получим граф, степени вершин которого четны. Таким образом, каждый граф из условия задачи можно представить в виде объединения реберно непересекающихся циклов. Для каждого цикла существует другой из этого семейства, который с ним пересекается (так как исходный граф связный). Два реберно непересекающихся цикла, имеющих общую вершину, всегда объединяются в один: достаточно стартовать с общей вершины, пройти сначала один цикл, а затем другой. Таким образом мы последовательно объединим все найденные циклы в один и получим искомый эйлеров цикл. $\square$

Задача 1.15. Докажите, что если в связном графе существует цепь, проходящий через каждое, то либо эта цепь является эйлеровым циклом, либо в графе существуют в точности две вершины нечетной степени, остальные вершины имеют четную степень, а цепь начинается и заканчивается в вершинах с нечетными степенями.

Задача 1.16. Какое наименьшее количество реберно-непересекающихся цепей достаточно для покрытия всех ребер связного графа?

1.2.2 Обход вершин. Гамильтоновы циклы

Обсудим еще одну задачу, связанную на этот раз с обходами всех вершин графа. Предварительно дадим необходимые определения.

Определение 1.17. Простой цикл, проходящий через все вершины графа, называется *гамильтоновым*. Граф, содержащий некоторый гамильтонов цикл, называется *гамильтоновым*.

Задача о поиске гамильтонова цикла была предложена У. Гамильтоном (W. R. Hamilton) в 1859 году в форме игры, которая называлась «Кругосветное путешествие». Рассмотрим граф додекаэдра, вершины которого будем представлять городами, а ребра — соединяющими города дорогами. Требуется, начав с некоторого города и переходя от одного города к другому по имеющимся дорогам, посетить каждый город ровно один раз и вернуться в исходный.

Приведем сначала ряд простых замечаний.

(1) Каждый гамильтонов граф — связный.

(2) Если простой цикл походит через петлю, то этот цикл состоит из одной вершины и этой петли. Поэтому, если гамильтонов граф содержит более одной вершины, то ни один его гамильтонов цикл не проходит через петли. Поэтому наличие петель у графа с двумя и более вершинами не влияет на гамильтоновость.

(3) Если гамильтонов цикл содержит два ребра, соединяющих одну и ту же пару вершин, то такой граф имеет ровно две вершины; обратно, каждый граф, имеющий ровно две вершины и такой, что эти вершины соединены не менее чем двумя ребрами, является гамильтоновым.

(4) Если гамильтонов граф G содержит более двух вершин, то в его гамильтонов цикл не могут входить два ребра, соединяющих одну и ту же пару вершин; поэтому граф, полученный из G выбрасыванием из каждого семейства кратных ребер всех ребер, кроме одного, — также гамильтонов.

Таким образом, произвольный граф G, содержащий не менее трех вершин, гамильтонов тогда и только тогда, когда гамильтоновым является граф G', полученный из G отбрасыванием всех петель, а также выбрасыванием из каждого семейства кратных ребер всех ребер, кроме одного. Граф G' простой по определению.

Итак, при изучении гамильтоновых графов можно ограничиться простыми графами.

Полным графом K_n называется простой граф с n вершинами, в котором каждая пара вершин смежна, т.е. любые две различные вершины соединены единственным ребром.

(5) Полный граф K_n при $n \geq 3$ является гамильтоновым (Докажите!).

Отметим, что до сих пор не известно ни одного критерия, описывающего гамильтоновы графы. Многочисленные условия, являющиеся по отдельности или необходимыми, или достаточными, можно, например, найти в [1] или [2]. Приведем одно из этих условий.

Теорема 1.18 (Дирак)**.** *Пусть $G = (V, E)$ — простой граф с $n \geq 3$ вершинами. Если $\min_{v\in V} \deg v \geq n/2$, то G гамильтонов, в частности, граф G связный.*

Доказательство. Положим $\delta = \min_{v\in V} \deg v$.

Пусть $\gamma = v_0 v_1 \cdots v_\ell$ — путь в графе G, имеющий максимально возможную длину среди всех путей в G. Покажем, что G содержит цикл C длины $\ell + 1$.

Если в графе есть ребро $v_0 v_\ell$, то в качестве C возьмем цикл $v_0 v_1 \cdots v_\ell v_0$.

Далее будем предполагать, что $v_0 v_\ell \notin E$. Положим

$$X = \{v_i : v_0 v_{i+1} \in E\}, \quad Y = \{v_i : v_i v_\ell \in E\}.$$

Обратите внимание на сдвиг индекса в определении множества X. Например $v_0 \in X$, но $v_{\ell-1} \notin X$ так как нет ребра $v_0 v_\ell$. Далее, $v_\ell \notin X$ так как не определена вершина $v_{\ell+1}$. Также легко видеть, что $v_0, v_\ell \notin Y$ (Проверьте!).

Заметим, что каждая смежная с v_0 вершина w графа G лежит на γ, так как иначе $wv_0v_1 \cdots v_\ell$ — путь в G длины $\ell + 1$, что противоречит максимальности длины пути γ. Теперь нетрудно понять, что множество вершин, смежных с v_0, и множество X содержат одинаковое количество элементов, т.е. $|X| = \deg v_0 \geq \delta$. Аналогично, множество всех вершин графа, смежных с v_ℓ, также содержится во множестве вершин пути γ, поэтому совпадает с Y, откуда $|Y| = \deg v_\ell \geq \delta$. Следовательно, $|X| + |Y| \geq \delta + \delta \geq n$.

Теперь докажем, что множества X и Y пересекаются. Напомним, что вершина v_ℓ не принадлежит ни X, ни Y, поэтому $v_\ell \notin X \cup Y$ и, значит, $X \cup Y \neq V$, откуда $|X \cup Y| < n$. Но если бы X и Y не пересекались, то выполнялось бы равенство $|X \cup Y| = |X| + |Y| \geq n$, противоречие. Следовательно, множества X и Y пересекаются.

Пусть вершина v_k лежит в пересечении $X \cap Y$. Раньше мы показали, что $v_\ell, v_{\ell-1} \notin X$; кроме того, $v_0 \notin Y$. Поэтому v_k не может совпадать ни с v_0, ни с $v_{\ell-1}$, ни с v_ℓ. Итак, $0 < k < \ell - 1$.

Искомый цикл C строится следующим образом. Сначала из v_0 вдоль пути γ идем в вершину v_k, из нее по ребру $v_k v_\ell$ (оно существует, так как $v_k \in Y$) идем в v_ℓ, затем по γ идем в обратном направлении из v_ℓ в v_{k+1}, наконец, возвращаемся в v_0 по ребру $v_{k+1} v_0$ (оно существует, так как $v_k \in X$). Легко видеть, что длина построенного цикла C равна $\ell + 1$.

Докажем наконец, что цикл C — гамильтонов. Предположим противное, т. е. что существует вершина $x \in V$, через которую C не проходит. Покажем, что x должна быть смежна с некоторой вершиной v_p из C. Действительно, если это не так, то вне цикла C лежит вершина x и не менее чем δ смежных с x вершин, т.е. не менее $\delta + 1$ вершины. С другой стороны, вершина v_0 и не менее чем δ смежных с v_0 вершин лежат в C, поэтому C содержит не менее $\delta + 1$ вершины. Таким образом, в графе G содержится не менее $2\delta + 2 > n$ вершин, противоречие.

Итак, x и некоторая v_p смежны, и тогда путь, полученный из $xv_p \cup C$ выкидыванием любого их двух ребер цикла C, инцидентных v_p, будет иметь длину $\ell + 1$, что противоречит предположению о максимальности ℓ. Полученное противоречие показывает, что такой вершинц x не существует и, значит, C проходит через все вершины графа G, т. е. C — гамильтонов цикл. $\square$

1.3 Подграфы.

Граф $H = (V_H, E_H, \partial_H)$ называется *подграфом* графа $G = (V_G, E_G, \partial_G)$, если $V_H \subset V_G$, $E_H \subset E_G$ и $\partial_H = \partial_G|_{V_H}$. Будем записывать это так: $H \subset G$.

В частности, если $M \subset V_G$, то определен подграф $G(M) = (M, E_M, \partial_M)$, где $E_M = \partial_G^{-1}(M^{(1)} \cup M^{(2)})$, $\partial_M = \partial_G|_{E_M}$, то есть, говоря неформально, подграф $G(M)$ состоит из всех ребер графа G, соединяющих между совбой вершины из M.

В случае простых графов $H = (V_H, E_H) \subset G = (V_G, E_G)$, если $V_H \subset V_G$, $E_H \subset E_G$.

Каждый маршрут $\gamma = v_{i_1}e_{i_1}v_{i_2}\cdots e_{i_k}v_{i_{k+1}}$ в графе G порождает подграф $G(\gamma)$, множества вершин и ребер которого суть $V_\gamma = \cup_p\{v_{i_p}\}$ и $E_\gamma = \cup_p\{e_{i_p}\}$ соответственно, а отображение инцидентности имеет вид $\partial_\gamma = \partial_G|_{E_\gamma}$.

Подграф $H = (V_H, E_H, \partial_H) \subset G = (V_G, E_G, \partial_G)$ называется *остовным*, если $V_H = V_G$.

Подграфы, очевидно, упорядочены по включению.

Напоминание 1.19. Напомним, что бинарное отношение R на множестве X — это произвольное подмножество $R \subset X \times X$. В данном контексте принято вместо $(x_1, x_2) \in R$ использовать запись $x_1 R x_2$ или использовать вместо R какой-нибудь специальный символ, например, $x_1 \sim x_2$. На бинарные отношения можно неформально смотреть как на «многозначные частично определенные отображения», а именно, можно считать, что отношение R «сопоставляет» элементу $x \in R$ множество $R(x) = \{y \in Y \mid x\,R\,y\}$.

Бинарное отношение называется *рефлексивным*, если $x \sim x$ для любого $x \in X$; *симметричным*, если $x_1 \sim x_2$, если и только если $x_2 \sim x_1$ и *транзитивным*, если из того, что $x_1 \sim x_2$ и $x_2 \sim x_3$, следует, что $x_1 \sim x_3$.

Бинарное отношение R на X называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Пусть R — отношение эквивалентности на X, тогда для каждого элемента $x \in X$ определено подмножество

$$[x]_R = R(x) = \{x' \in X \mid x \sim x'\} \subset X,$$

которое называется *классом эквивалентности элемента* x. Легко проверить, что классы эквивалентности образуют *разбиение множества* X, то есть они не пусты, попарно не пересекаются, и их объединение совпадает со всем множеством X. Верно и обратное, а именно, любое разбиение множества X, т.е. семейство $\{X_i\}_{i\in I}$ непустых, попарно непересекающихся подмножеств множества X такое, что $\cup_{i\in I} X_i = X$, является разбиением множества X на классы эквивалентности (для отношения эквивалентности R, определенного так: $R(x) = X_i$, где $X_i \ni x$). Множество классов эквивалентности называется *фактор-множеством* и обозначается через X/R. Отображение $\pi\colon X \to X/R$, определенное формулой $\pi(x) = [x]_R$, называется *канонической проекцией* на фактор-множество.

Бинарное отношение R называется *антисимметричным*, если $x_1 R x_2$ и, одновременно, $x_2 R x_1$ возможно только при $x_1 = x_2$.

Бинарное отношение R на X называется *отношением порядка*, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Примеры отношения порядка — отношение $x \le y$ на числовой прямой, отношение $A \subset B$ на множестве всех подмножеств некоторого фиксированного множества.

Множество X с заданным на нем некоторым отношением порядка $\preceq$ называется *упорядоченным множеством*. Элемент $m \in X$ называется *наименьшим* (относительно заданного отношения порядка), если $m \preceq x$ для любого $x \in X$ (то есть элемент m «меньше всех»). Аналогично определяется *наибольший* элемент (запишите определение). Далее, элемент $A \in X$ называется *максимальным*, если $A \preceq x$ влечет $A = x$ (то есть нет элементов «больших чем A»). Аналогично определяется *минимальный* элемент (запишите определение). Если наименьший (наибольший) элемент существует, то он единственен и является также единственным минимальным (соответственно, максимальным) элементом. Минимальных (максимальных) элементов может быть несколько (приведите пример).

Максимальный по включению связный подграф графа G называется *компонентой связности*. Очевидно, граф G является связным, если и только если он совпадает со своей единственной компонентой связности.

Замечание 1.20. Введем на множестве вершин графа бинарное отношение: две вершины x и y графа называются *достижимыми* друг из друга, если существует (x, y)-маршрут. Легко проверить, что это отношение — отношение эквивалентности. Пусть x — произвольная вершина графа G. Тогда подграф $G\bigl([x]\bigr)$, порожденный классом эквивалентности вершины x относительно отношения достижимости, — это связная компонента графа G, содержащая вершину x (проверьте это).

1.4 Деревья.

Важный класс графов, встречающихся в самых разных областях, — это так называемые деревья.

Определение 1.21. Связный граф без циклов называется *деревом*.

Заметим, что каждая петля образует цикл, аналогично, каждая пара кратных ребер образует цикл. Поэтому каждое дерево — простой граф. Деревья обладают целым рядом важных свойств, некоторые из которых можно использовать в качестве альтернативного определения дерева.

Теорема 1.22. *Пусть $G = (V, E)$ — простой граф с $n = |V|$ вершинами и $m = |E|$ ребрами. Следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Граф G — дерево.*

(2) *Граф G — связен, и $n = m + 1$.*

(3) *Граф G не имеет циклов, и $n = m + 1$.*

(4) *Любые две разные вершины $x, y \in V$ соединены в G единственным путем.*

(5) *Граф G не имеет циклов, и для любой пары x, y его несмежных вершин новый граф $G' = \bigl(V, E \cup \{xy\}\bigr)$, полученный из G добавлением ребра xy, содержит единственный цикл.*

Доказательство. Покажем, что из (1) следует (2). Проведем индукцию по числу вершин n. При $n = 1$ дерево, очевидно, не имеет ребер, то есть $m = 0$, и искомое равенство выполнено. Предположим, что равенство выполнено для всех деревьев с $|V| < n$ вершинами. Рассмотрим произвольное дерево с $n \geq 2$ вершинами. Множество его ребер не может быть пустым (иначе никакие две вершины не соединены путем). Выберем произвольное ребро e и рассмотрим граф $G \setminus e = \big(V, E \setminus \{e\}\big)$.

Лемма 1.23. *Граф $G \setminus e$ представляет собой объединение двух деревьев.*

Доказательство. Действительно, в графе $G \setminus e$ очевидно нет циклов. Пусть $e = xy$. Покажем, что вершины x и y принадлежат разным компонентам связности графа $G \setminus e$. Если это не так, то существует путь γ в $G \setminus e$, соединяющий x и y, но тогда $\gamma \cup xy$ — это цикл в графе G, противоречие. Каждая компонента связности графа $G \setminus e$ является связным графом без циклов, поэтому является деревом. С другой стороны, добавление одного ребра соединяет не более двух компонент связности, что и требовалось. $\square$

Итак, $G \setminus e = T_1 \cup T_2$, где графы T_1 и T_2 являются деревьями. Обозначим через n_i и m_i количество вершин и ребер дерева T_i, $i = 1, 2$. Тогда $n_i = m_i + 1$ по предположению индукции. С другой стороны, $n = n_1 + n_2$, $m = m_1 + m_2 + 1$, откуда

$$n = n_1 + n_2 = (m_1 + 1) + (m_2 + 1) = (m_1 + m_2 + 1) + 1 = m + 1,$$

что и требовалось.

Покажем теперь, что из (2) следует (3). Предположим, что граф G содержит цикл. Выберем произвольное ребро e из этого цикла и рассмотрим граф $G \setminus e$. Так как ребро e входило в цикл, граф $G \setminus e$ по-прежнему связный. С другой стороны, у графа $G \setminus e$ слишком мало ребер.

Лемма 1.24. *Пусть G — произвольный простой граф, у которого n вершин, m ребер и k компонент связности. Тогда $n - m \leq k$.*

Доказательство. Проведем индукцию по количеству ребер. Если $m = 0$, то количество компонент связности равно количеству вершин, поэтому $n - m = k$. Пусть теперь $m > 0$, выберем произвольное ребро e графа G и рассмотрим граф $G \setminus e$. Обозначим через n', m' и k' количество вершин, ребер и компонент связности графа $G \setminus e$. По предположению индукции $n' - m' \geq k'$. Ясно, что $n' = n$, $m' = m - 1$, а количество компонент связности k' или не меняется ($k' = k$), или увеличивается на единицу ($k' = k + 1$). Поэтому $n' - m' = n - m + 1 \leq k'$. В первом случае получаем $n - m + 1 \leq k$, откуда $n - m \leq k - 1 \leq k$, а во втором $n - m + 1 \leq k + 1$, откуда $n - m \leq k$. Лемма доказана. $\square$

Итак, у связного графа $G \setminus e$ имеется $n - 2$ ребра, n вершин, поэтому, по лемме 1.24, число его компонент связности не меньше 2, противоречие.

Покажем, что из (3) следует (4). Очевидно, что если некоторая пара вершин графа соединяется несколькими различными путями, то объединение двух таких путей содержит цикл, противоречие с предположением об отсутствии циклов. Таким образом, достаточно доказать связность. Предположим, что граф G состоит из k компонент связности $G_1, \dots, G_k$. Каждая такая компонента связна и не имеет циклов, то есть является деревом. Обозначим через n_i и m_i количество вершин и количество ребер дерева G_i, $i = 1, \dots, k$. Так как уже доказано, что из (1) следует (2), то $n_i = m_i + 1$, $i = 1, \dots, k$. Имеем:

$$n = n_1 + \dots + n_k = (m_1 + 1) + \dots + (m_k + 1) = (m_1 + \dots + m_k) + k = m + k,$$

но, с другой стороны, $n = m + 1$, поэтому число k связных компонент равно 1, то есть граф связен.

Покажем теперь, что из (4) следует (5). Вершины x и y соединены путем γ в графе G, поэтому граф G' содержит цикл $\gamma \cup xy$. Пусть граф G' содержит несколько циклов, тогда каждый из этих циклов содержит ребро xy (так как исходный граф G циклов не содержит). Пусть C_1 и C_2 — два таких цикла. Тогда $C_1 \cup C_2 \setminus xy$ содержится в G и содержит цикл, противоречие.

Наконец, покажем, что из (5) следует (1). Достаточно показать связность графа G. Возьмем произвольную пару его различных вершин x и y. Если $xy \in E$, то эти две вершины соединены маршрутом из одного ребра. Если же x и y не смежны, то граф $G \cup xy$ содержит цикл C, который должен содержать ребро xy, поскольку исходный граф не имеет циклов. Но тогда $C \setminus xy$ представляет собой маршрут (даже цепь) в графе G, соединяющий x и y, что и требовалось. Теорема доказана. □

Следствие 1.25. *Каждое дерево с $n \geq 2$ вершинами имеет по крайней мере две вершины степени* 1.

Доказательство. Действительно, степень каждой вершины такого дерева не меньше 1. Пусть $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ — множество вершин рассматриваемого дерева. По формуле 1.1 и пункту 2 теоремы 1.22 имеем $\sum_i \deg v_i = 2(n-1)$, поэтому не меньше двух слагаемых равны 1. □

Замечание 1.26. Из доказательства следствия 1.25 вытекает, что если ровно две вершины дерева имеют степень 1, то остальные вершины (если они есть) имеют степень 2, то есть дерево представляет собой путь. Если же вершин степени 1 больше чем две, то есть по крайней мере одна вершина степени больше двух.

Определение 1.27. Пусть $G = (V, E, \partial)$ — произвольный граф, и k — количество его связных компонент. Величина $\nu(G) = |E| - |V| + k$ называется *цикломатическим числом* графа G.

Следствие 1.28. *Простой связный граф $G = (V, E)$ является деревом тогда и только тогда, когда $\nu(G) = 0$.*

Следствие 1.29. *Пусть $G = (V, E)$ — простой связный граф, $\nu(G) = 1$. Тогда G содержит ровно один цикл.*

Доказательство. Действительно, $\nu(G) = 1$ в этом случае означает, что $|V| = |E|$. Если циклов нет, то G — дерево, что противоречит пункту 2 теоремы 1.22. Пусть e — произвольное ребро произвольного цикла графа G. Граф $G \setminus e$ по-прежнему связен, поэтому он является деревом по теореме 1.22, поэтому цикл в графе G единственен по той же теореме. □

Замечание 1.30. Следствия 1.28 и 1.29 можно обобщить на случай произвольных графов (Сделайте это!).

Задача 1.31. Приведите примеры связных графов G, $\nu(G) = 2$, с двумя и с тремя циклами.

Замечание 1.32. Можно показать, что циклы графа образуют линейное пространство над полем $\mathbb{Z}_2$ (сложение двух циклов — это цикл, образованный симметрической разностью множеств ребер этих циклов), а величина $\nu(G)$ равна размерности этого пространства.

1.5 Веса. МОД. Алгоритм Краскала

В данном разделе мы расскажем об одной оптимизационной задаче, которая относится к задачам об оптимальном соединении и решается на языке теории графов. Общая неформальная постановка задач такого типа состоит в том, что нужно соединить некий набор объектов (например, городов) некоторым оптимальным в том или ином смысле способом (например, кратчайшей сетью дорог).

Пусть $G = (V, E)$ — простой граф, на множестве ребер которого задана положительная функция $\omega\colon E \to \mathbb{R}_{>0}$. Функцию ω будем называть *весовой*, значение $\omega(e)$ весовой функции на ребре e будем называть *весом ребра* e, а граф G, на ребрах которого задана весовая функция, — *взвешенным графом*.

Если (G, ω) — взвешенный граф, то для каждого его подграфа $H \subset G$ определена величина $\omega(H) = \sum_{e \in H} \omega(e)$, которая называется *весом подграфа* H. Здесь сумма берется по всем ребрам графа H.

Напомним, что подграф H графа G называется остовным, если множества вершин графов H и G совпадают. *Остовное дерево* в связном графе G — это остовный подграф в G, являющийся деревом.

Замечание 1.33. Остовное дерево в графе G — это связный подграф, имеющий наименьшее возможное количество ребер. Все остовные деревья в графе G имеют одинаковое количество ребер, а именно, $|V| - 1$ ребро. Но не любой остовный подграф с таким количеством ребер является остовным деревом.

Задача 1.34 (Задача о МОД)**.** Пусть (G, ω) — связный взвешенный граф. Найти остовное дерево в G наименьшего возможного веса.

Каждое решение задачи 1.34 называется *минимальным остовным деревом* в графе (G, ω) или, сокращенно, *МОД*.

Замечание 1.35. Число подграфов в конечном графе G — конечно. Количество остовных деревьев в нем — тоже конечно. Поэтому минимальное остовное дерево всегда существует.

Замечание 1.36. Количество остовных деревьев в графе может быть велико. *Теорема Кэли* утверждает, что в полном графе с n вершинами имеется n^{n-2} остовных дерева. Поэтому прямой перебор не эффективен.

Оказывается, несмотря на то, что количество остовных деревьев в графе может быть экспоненциально велико (как функция от количества вершин), существуют эффективные (полиномиальные по количеству вершин) алгоритмы поиска МОД. Один из них — алгоритм Краскала[1] мы рассмотрим здесь более подробно.

Алгоритм Краскала. Дан связный взвешенный граф $G = (V, E)$ с весовой функцией ω. Положим $n = |V|$.

- Положим $T_0 = (V, \emptyset)$. На каждом следующем шаге будем добавлять по одному ребру.
- Положим $T_k = T_{k-1} \cup e_k$, где e_k — ребро наименьшего веса среди ребер, не вошедших в T_{k-1} и таких, что граф $T_{k-1} \cup \{e\}$ не содержит циклов.
- Алгоритм заканчивает работу, когда построен граф T_{n-1}. Этот граф T_{n-1} и есть результат работы алгоритма.

Теорема 1.37. *Алгоритм Краскала корректен* (*то есть для любого связного взвешенного графа алгоритм закончит работу*). *Построенный алгоритмом граф* T_{n-1} *является минимальным остовным деревом во взвешенном графе* (G, ω).

Доказательство. Покажем сначала, что каждый граф T_k, $0 \le k \le n-1$ может быть построен. Проведем индукцию по k. При $k = 0$ граф T_0 — это граф без ребер с множеством вершин V. Он, очевидно, не имеет циклов. Предположим, что граф T_k, $0 \le k \le n-2$, уже построен. По построению, он не имеет циклов и содержит $k \le n-2$ ребра. По лемме 1.24 граф T_k не может быть связным, то есть это — несвязный остовный подграф в связном графе G. Поэтому в графе G найдется ребро e, вершины которого лежат в разных компонентах связности графа T_k, и поэтому e не принадлежит T_k и граф $T_k \cup e$ не имеет циклов. Выбрав среди таких ребер ребро e_{k+1} наименьшего веса, мы построим искомый граф $T_{k+1} = T_k \cup e_k$, что и требовалось.

Далее, все подграфы $T_k \subset G$ — остовные и не содержат циклов, а граф T_{n-1} имеет ровно $n-1$ ребро, поэтому он является остовным деревом по пункту 3 теоремы 1.22. Остается показать, что T_{n-1} — это минимальное остовное дерево.

[1] Joseph Kruskal (1928-2010), американский математик, статистик, программист. Долгое время работал в Bell Labs. Известен также своими трудами в математической логике и лингвистике. Алгоритм опубликован в Proc. AMS в 1956 году.

Как уже отмечалось выше, некоторое минимальное остовное дерево существует всегда. Мы покажем, что произвольное МОД может быть перестроено в дерево T_{n-1} за конечное число шагов с сохранением веса. Отсюда будет следовать, что вес T_{n-1} такой же, как у любого другого МОД, поэтому оно само тоже является МОД.

Итак, пусть Δ — некоторое МОД в графе G. Предположим, что $\Delta \neq T_{n-1}$. Напомним, что ребра дерева T_{n-1} занумерованы в процессе работы алгоритма, обозначим их через $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$, и пусть e_k — первое ребро дерева T_{n-1} (в этой нумерации), которое не принадлежит дереву Δ. Рассмотрим граф $\Delta \cup e_k$. По пункту 5 теоремы 1.22 этот граф содержит единственный цикл, который мы обозначим через C. Ясно, что $e_k \in C$ (иначе цикл содержится в дереве Δ, противоречие), а также в цикле C содержится некоторое ребро e, непринадлежащее T_{n-1} (иначе цикл C содержится в дереве T_{n-1}, противоречие). Рассмотрим граф $\Delta' = \Delta \cup e_k \setminus e$. В этом графе нет циклов, его множество вершин совпадает с V, и у него $n-1$ ребро, поэтому Δ' — остовное дерево. Так как Δ — минимальное остовное дерево, то $\omega(\Delta) \leq \omega(\Delta')$, откуда, по определению Δ' имеем:

$$\omega(\Delta) \leq \omega(\Delta') = \omega(\Delta) + \omega(e_k) - \omega(e),$$

поэтому $\omega(e) \leq \omega(e_k)$.

С другой стороны, ребра $e_1, \ldots, e_{k-1}$ принадлежат и Δ и T_{n-1} по предположению. Они — это в точности ребра графа T_{k-1}. Ребро e не принадлежит T_{n-1}, поэтому, в частности, не принадлежит T_{k-1}. Кроме того, ребра $e_1, \ldots, e_{k-1}, e$ входят в дерево Δ, поэтому граф $T_{k-1} \cup e \subset \Delta$ и, следовательно, не содержит циклов. Это значит, что при построении графа T_k алгоритм выбрал ребро e_k, сравнив его вес, в частности, с весом ребра e, потому $\omega(e_k) \leq \omega(e)$. Итак, $\omega(e_k) = \omega(e)$, откуда $\omega(\Delta) = \omega(\Delta')$. Таким образом, мы построили новое МОД Δ', которое содержит на одно ребро дерева T_{n-1} больше, чем содержало дерево Δ. Повторяя эту процедуру, мы перестроим дерево Δ в дерево T_{n-1}, переходя от одного остовного дерева к другому и сохраняя вес, то есть переходя от одного МОД к другому. В частности, T_{n-1} является минимальным остовным деревом в графе G. Теорема доказана. $\square$

Литература к главе 1

[1] Емеличев В.А. и др. *Лекции по теории графов*, М.: Наука, 1990.

[2] Graham R.L., Groetschel M., Lovasz L. *Handbook of combinatorics*, Elsevier, 1995, vol. 1.