

Глава 7

Замкнутые двумерные поверхности.

План. Топология многогранной поверхности, склейки из многоугольника, слово склейки, вырезание и заклейка дырки, вклейка ручки, вклейка пленки Мебиуса, ориентированные и неориентированные поверхности, Эйлерова характеристика, классификация двумерных поверхностей.

Задачи классификации как правило очень не просты. Тут многое зависит от класса рассматриваемых объектов и от отношения эквивалентности, которое на этих объектах рассматривается. Здесь мы рассмотрим двумерные замкнутые многогранные поверхности, которые будем классифицировать с точностью до гомеоморфизма. Отметим также, что разумной классификации k -мерных поверхностей, $k \geq 3$, в настоящий момент не известно.

Замечание 7.1. Эта классификация практически не отличается от классификации двумерных замкнутых многообразий, которые изучаются в курсе дифференциальной геометрии. Многообразия — топологические пространства, склеенные из дисков примерно так же как многогранные поверхности из многоугольников.

7.1 Топология многогранной поверхности

Напомним определение многогранной поверхности.

Определение 7.2. Связной многогранной поверхностью $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}^n$ называется конечное семейство $\{F_i\}$ пространственных многоугольников $F_i \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее следующим условиям:

- (1) для каждой пары различных многоугольников F_i и F_j их пересечение $F_i \cap F_j$ или пусто, или состоит из одной, общей для них вершины, или из одного, общего для них ребра; если F_i и F_j имеют общее ребро e , то они называются *смежными по e* ;

- (2) для каждого многоугольника F_i и каждого его ребра e существует не более одного многоугольника F_j , смежного с F_i по e ;
- (3) для каждой пары различных многоугольников F и F' существует последовательность многоугольников $F_{i_1}, \dots, F_{i_m}$ такая, что $F_{i_1} = F$, $F_{i_m} = F'$, и при каждом $1 < k \leq m$ многоугольники $F_{i_{k-1}}$ и F_{i_k} смежны по некоторому ребру e_k ;
- (4) для каждой пары многоугольников F и F' , пересекающихся по вершине, существует соединяющая их цепочка, все многоугольники которой также содержат эту вершину.

Многоугольники F_i называются *гранями* $\mathcal{F}$, отрезки в $\mathbb{R}^n$, совпадающие с ребрами граней, — *ребрами* $\mathcal{F}$, а точки в $\mathbb{R}^n$, совпадающие с концами ребер, — *вершинами* $\mathcal{F}$. Ребро называется *граничным*, если оно является ребром ровно одной грани. Объединение граничных ребер называется *границей* поверхности или ее *краем*. Поверхность, у которой нет граничных ребер, называется *замкнутой*.

Поверхность $\mathcal{F}$ — подмножество в $\mathbb{R}^n$, поэтому на нем индуцируется топология. Топологию на $\mathcal{F}$ можно получить и по-другому. Каждая грань — многоугольник, на нем индуцирована топология из плоскости, поэтому на объединении граней есть топология дизъюнктного объединения. Теперь введем отношение эквивалентности, отождествив общие точки ребер смежных граней. Возникает фактор-топология на объединении граней.

Упражнение 7.1. Проверьте, что эта топология на $\mathcal{F}$ совпадает с индуцированной из $\mathbb{R}^n$.

Упражнение 7.2. Проверьте следующие свойства поверхности.

- Каждая грань (многоугольник) гомеоморфна диску.
- Поверхность $\mathcal{F}$ — замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$.
- Топологическая граница $\mathcal{F}$ совпадает с границей $\mathcal{F}$ как многогранной поверхности.
- Каждая внутренняя точка многогранной поверхности обладает окрестностью, гомеоморфной двумерной плоскости (или, что все равно, открытому кругу на плоскости).
- Каждая граничная точка многогранной поверхности обладает окрестностью, гомеоморфной замкнутой двумерной полуплоскости.
- Граница поверхности гомеоморфна объединению окружностей.

Замечание 7.3. Каждый многоугольник можно разбить на треугольники. Так как здесь мы не требуем, чтобы смежные грани поверхности не лежали в одной двумерной плоскости, то без ограничения общности можно предполагать, что все гранит поверхности — треугольники. Такие поверхности называются *триангулированными*, т.е. разбитыми на треугольники.

Замечание 7.4. Так как мы классифицируем поверхности с точностью до гомеоморфизма, то, в итоге, нас не интересует ни конкретное разбиение поверхности на грани, ни форма этих граней, а только топология поверхности. С нашей точки зрения куб и тетраэдр (как многогранные поверхности) гомеоморфны друг другу и гомеоморфны двумерной сфере (которая хоть и не является многогранной поверхностью, но будет использоваться нами как модельное пространство).

Наша цель — классификация многогранных поверхностей с точностью до гомеоморфизма. Мы покажем, что каждая из многогранных поверхностей гомеоморфна одной из построенных нами ниже топологической поверхности, которые мы будем называть модельными.

7.2 Склейки из квадрата

Простейшие примеры двумерных поверхностей можно получить, склеивая по различным правилам стороны квадрата.

Задача 7.5. Построить триангуляции цилиндра, тора, проективной плоскости и бутылки Клейна.

Задача 7.6. Докажите, что цилиндр и тор ориентируемы, а проективная плоскость и бутылка Клейна — нет.

Ясно, что край пленки Мебиуса состоит из одной окружности, цилиндра — из двух, а у остальных поверхностей край пуст.

7.3 Склейки из многоугольника

Оказывается, приведенные примеры являются, в некотором смысле, универсальными.

Утверждение 7.7. *Любая связная замкнутая многогранная поверхность гомеоморфна поверхности, полученной из многоугольника некоторой склейкой пар его сторон.*

Доказательство. Пометим все ребра буквами и стрелками. Разрежем поверхность на грани. Получим объединение многоугольников с размеченными сторонами. Будем последовательно склеивать грани, приклеивая на каждом шаге ровно одну грань ровно по одному ребру. На каждом шаге будем получать многоугольник, стороны которого помечены буквами и стрелками. Так как мы все рассматриваем с точностью до гомеоморфизма, то можно каждый раз деформировать многоугольник так, чтобы очередная грань пересекалась с многоугольником, построенным на предыдущем шаге только по общему ребру. Утверждение доказано. $\square$

Будем кодировать многоугольник P с размеченной границей так называемым *словом склейки* так. Выберем одно из двух направлений обхода границы многоугольника, начнем с произвольной его вершины и будем последовательно выписывать буквы, которыми помечены последовательные (в соответствии с обходом) стороны многоугольника, причем если направление стороны совпадает с направлением обхода, то просто записываем букву, а если направление противоположно, то записываем букву в степени -1 .

Пример 7.8. Например, тор может быть получен склейкой прямоугольника по слову $aba^{-1}b^{-1}$. Заметим, что слово склейки определено неоднозначно, например, та же склейка тора может быть описана словом $ba^{-1}b^{-1}a$. Более того, тор может быть склеен и из других многоугольников, например, из шестиугольника по слову $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$ (проверьте).

7.4 Модельные поверхности

Чтобы сформулировать основную теорему, нам понадобится набор модельных поверхностей. Они не будут многогранными поверхностями, а будут получены из сферы с помощью трех элементарных операций.

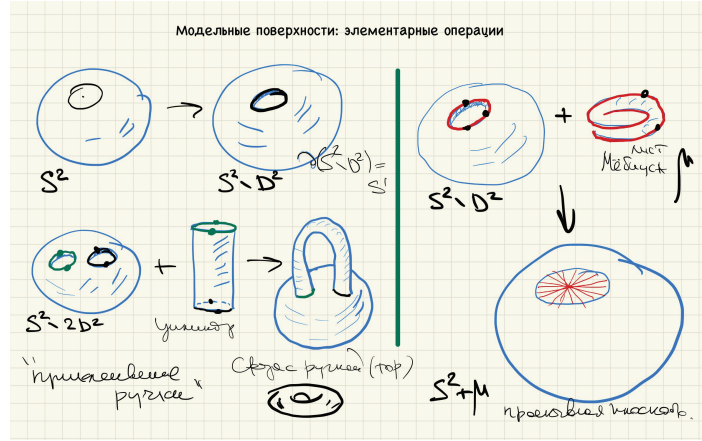


Рис. 7.1: Элементарные операции: вырезание диска, приклейка ручки и приклейка листа Мебиуса.

- вырезание диска,
- приклейка ручки,
- приклейка листа Мебиуса.

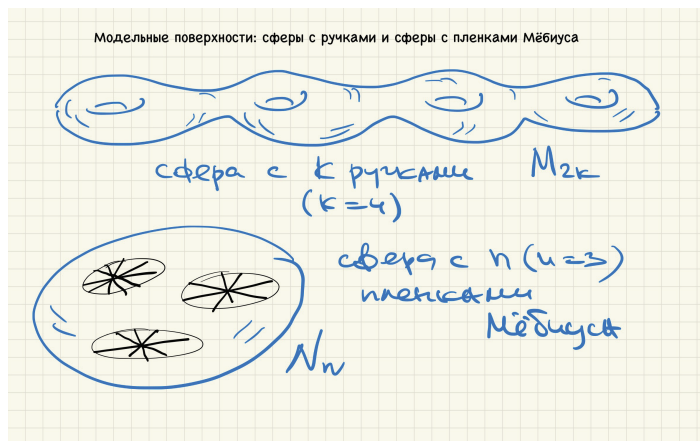


Рис. 7.2: Модельные поверхности. Слово склейки для M_{2k} имеет вид $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1}$, слово склейки для N_m имеет вид $a_1^2 \dots a_m^2$.

7.5 Теорема классификации — переклейка

Теорема 7.9. Каждая связная замкнутая двумерная многогранная поверхность гомеоморфна одной из модельных поверхностей.

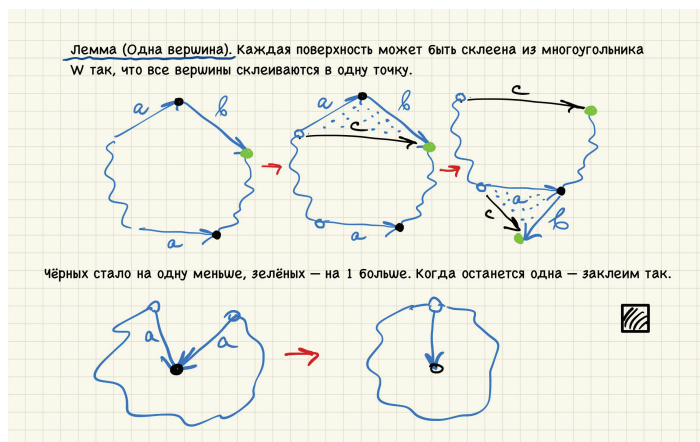


Рис. 7.3: Лемма об одной вершине.

План доказательства такой: мы начнем с произвольной замкнутой связной двумерной поверхности, склеенной из многоугольника, и будем разрезать и переклеивать этот многоугольник, меняя при этом слово склейки, но не меняя поверхность (такие преобразования соответствуют гомеоморфиз-

мам поверхности). В результате получим многоугольник с одним из трех стандартных слов склейки: $a a^{-1}$, $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1}$ или $a_1^2 \dots a_m^2$. Таким образом, будет показано, что исходная поверхность гомеоморфна или сфере, или сфере с $k \geq 1$ ручками, или сфере с $m \geq 1$ пленками Мебиуса.

Разобьем доказательство на несколько лемм, формулировки и доказательства которых приведены на рисунках.

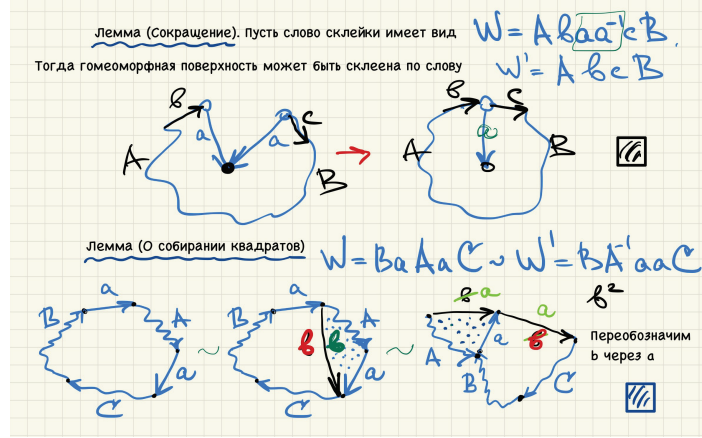


Рис. 7.4: Леммы о сокращении слов и о собирании квадратов.

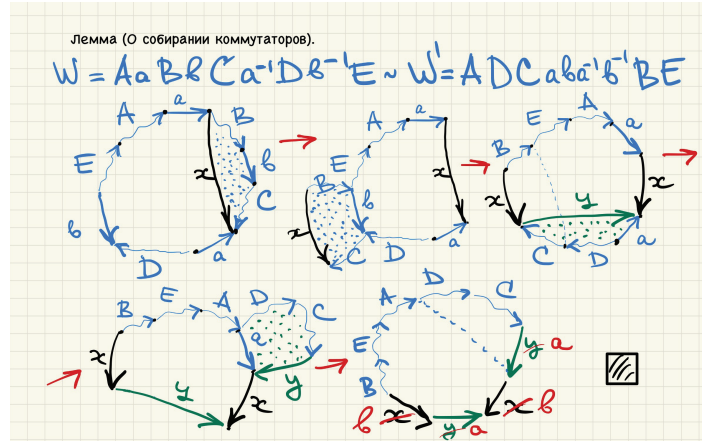


Рис. 7.5: Лемма о собирании коммутаторов.

Последовательно применяя преобразования, описанные в приведенных выше леммах, мы получим искомым многоугольник с одним из стандартных слов склейки.

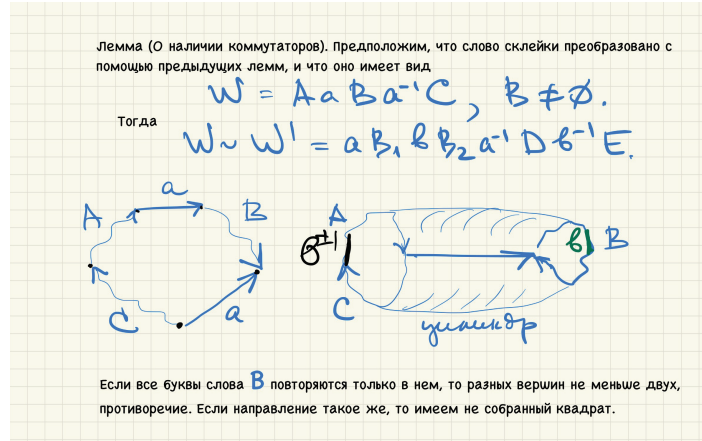


Рис. 7.6: Лемма о существовании коммутатора.

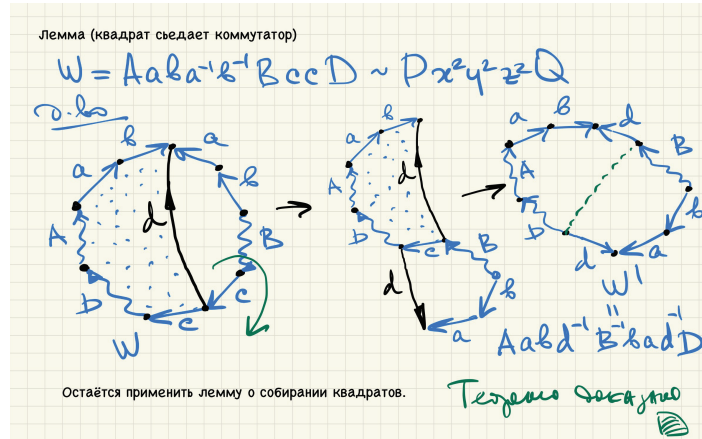


Рис. 7.7: Лемма о коммутаторе и квадрате.

7.6 Ориентация многогранной поверхности

Напомним, что *задать ориентацию на плоскости* означает фиксировать некоторый базис, который объявляется положительно ориентированным вместе со всеми другими базисами, которые получаются из него умножением на матрицу с положительным определителем. Все остальные базисы объявляются отрицательно ориентированными. Если фиксирована ориентация плоскости, то поворот от первого вектора положительно ориентированного базиса ко второму называется положительным (против часовой стрелки или налево), а поворот в противоположную сторону — отрицательным, по

часовой стрелке или направо.

Каждый многоугольник F_i многогранной поверхности можно *ориентировать*, задав одно из двух возможных направлений циклического обхода его вершин и ребер. Другими словами, на каждой стороне многоугольника должно быть указано направление, причем в каждой вершине встречаются одно входящее и одно выходящее направления.

Рассмотрим теперь многогранную поверхность. Ее ориентация получается из ориентации входящих в нее многоугольников-граней, при условии правильного согласования ориентаций на их пересечениях.

Пусть две грани F_i и F_j пересекаются по ребру e . Предположим, что обе грани ориентированы. Это, в частности, означает что на ребре e указаны два направления, одно порождено ориентацией грани F_i , а другое — ориентацией грани F_j . Будем говорить, что ориентации смежных граней F_i и F_j *согласованы*, если эти направления противоположны. Заметим, что в этом и только в этом случае обходы границ граней F_i и F_j , порожденные ориентацией, задают обход многоугольника, который получается склейкой F_i и F_j по общему ребру. (Этот многоугольник можно представлять себе в общей плоскости, в которую помещены F_i и F_j . Возможные пересечения устраняются с помощью гомеоморфизмов многоугольников.) Кроме того, если две грани смежны и на одной из них задана ориентация, то согласованная ориентация второй грани определена однозначно направлением общего ребра.

Определение 7.10. Многогранная поверхность называется *ориентированной*, если на каждой ее грани задана ориентация, причем эти ориентации согласованы на каждой паре смежных граней поверхности. Поверхность называется *ориентируемой*, если на ней существует ориентация.

Замечание 7.11. Рассмотрим на поверхности замкнутую цепочку смежных граней, т.е. такой набор $F_1, \dots, F_n$ граней, где грань F_i является смежной с F_{i+1} , а F_n смежна также с гранью F_1 . Зададим ориентацию на первой грани F_1 ; правило согласования однозначно определяет ориентацию грани F_2 , она, в свою очередь, — ориентацию на F_3 и далее по цепочке до F_n , а затем — снова на F_1 . Таким образом, на первой грани возникает две ориентации. Будем говорить, что цепочка граней *сохраняет ориентацию*, если эти две ориентации совпадают, и *обращает ориентацию*, если они противоположны. Если на поверхности существует обращающая ориентацию цепочка граней, то поверхность неориентируема; легко проверить (докажите!), что верно и обратное утверждение. Таким образом, ориентируемость поверхности эквивалентна отсутствию на ней обращающих ориентацию замкнутых цепочек граней.

Замечание 7.12. Замкнутая выпуклая многогранная поверхность в трехмерном пространстве — ориентируемая. Действительно, эта поверхность разделяет пространство на две части, на каждой грани выберем внешнюю нормаль (нормаль, направленную в неограниченную область), и выберем направление обхода границы грани, например, по правилу правого винта (выберем базис в плоскости грани так, чтобы полученный из него добавлением нормали базис в $\mathbb{R}^3$ был бы положительно ориентирован).

Замечание 7.13. Не любая многогранная поверхность ориентируема. Пример — пленка Мебиуса.

Задача 7.14. Предъявить на пленке Мебиуса цепочку граней, обращающую ориентацию.

Утверждение 7.15. *Гомеоморфные многогранные поверхности ориентируемы или неориентируемы одновременно.*

7.7 Теорема классификации — Эйлерова характеристика

Чтобы проверить попарную негомеоморфность нужна некая характеристика поверхностей, которая сохраняется при гомеоморфизмах. Мы уже видели, что одной из таких характеристик может служить ориентируемость. В качестве еще одной такой характеристики многогранной поверхности мы возьмем Эйлерову характеристику. Каждая многогранная поверхность разбита на грани, ребра и вершины. *Эйлеровой характеристикой* многогранной поверхности $\mathcal{F}$ назовем величину $G - P + B$, где G , P , B — количество граней, ребер и вершин поверхности.

Утверждение 7.16. *Эйлерова характеристика поверхности не зависит от разбиения ее на грани и не меняется при гомеоморфизмах.*

Утверждение 7.17. *Эйлерова характеристика сферы с $k \geq 0$ ручками равна $2 - 2k$. Эйлерова характеристика сферы с t пленками Мебиуса равна $2 - t$.*

Из утверждений 7.17 и 7.15 следует следующий результат.

Теорема 7.18. *Если многогранные поверхности гомеоморфны разным модельным поверхностям, то они не гомеоморфны.*

Тем самым, классификация двумерных поверхностей завершена.