Глава 5

Многогранники.

План. Многоугольник, ограниченным замкнутой ломаной без самопересечений, внутренность, внешность и граница многоугольника, пространственный многоугольник, плоскость многоугольника, многогранная поверхность, многоугольники, смежные по ребру, цепочка многоугольников, грани, ребра и вершины многогранной поверхности, инцидентные элементы многогранной поверхности, граничные и внутренние ребра многогранной поверхности, теорема Жордана для замкнутой многогранной поверхности, многогранник, ограниченный замкнутой многогранной поверхностью, внутренность, внешность и граница многогранника, граф и двойственный граф многогранной поверхности, выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, выпуклый многоугольник, выпуклый многогранник, геометрическая реализация графа многогранной поверхности с выпуклыми гранями, планарность графа и двойственного графа выпуклого многогранника, формула Эйлера для выпуклых многогранников, правильный многогранник, платоновы тела, ёж выпуклого многогранника, теорема Минковского о еже, многоугольник на поверхности выпуклого многогранника, внутренность, внешность, граница, угол многоугольника на поверхности выпуклого многогранника.

5.1 Многоугольники

Теорема Жордана для ломаных 3.8 утверждает, что для каждой простой замкнутой ломаной $L \subset \mathbb{R}^2$ множество $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$ состоит из двух компонент. Также в доказательстве этой теоремы мы определили функцию $\eta(P)$ точек множества $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$, которая на одной из компонент равна 0, а на другой 1. Обозначим эти компоненты через Ω_k, $k = 0, 1$, так чтобы на Ω_k функция η принимала значение k. Напомним, что для вычисления $\eta(P)$ мы вводили специальные декартовы координаты x, y, в которых все вершины ломаной L имели разные x-координаты.

Следствие 5.1. *Множество Ω_1 ограничено, а множество Ω_0 неограничено.*

Доказательство. Так как ломаная L состоит из конечного числа отрезков, она представляет собой ограниченное подмножество плоскости, т.е. существует открытый круг $U_r(P)$ радиуса $r > 0$ с центром в некоторой точке $P \in \mathbb{R}^2$ такой, что $L \subset U_r(P)$. Выберем точку $Q \in \mathbb{R}^2$ на граничной окружности круга $U_r(P)$ так, чтобы вектор $\overrightarrow{PQ}$ был сонаправлен с осью y. Тогда луч ℓ_Q не имеет с открытым кругом $U_r(P)$ общих точек, а следовательно, не пересекает L, так что $\eta(Q) = 0$ и, значит, $Q \in \Omega_0$. Так как для любой точки $Q' \in \ell_Q$ луч ℓ_Q также не пересекает L, множество Ω_0 содержит луч ℓ_Q и поэтому неограничено.

Дополнение к кругу $U_r(P)$ линейной связно (предъявите в явном виде кривую, соединяющую данные произвольные точки дополнения), поэтому оно содержится в Ω_0. Но тогда Ω_1 содержится в $U_r(P)$ и, следовательно, ограничено. □

Определение 5.2. *Многоугольником F, ограниченным замкнутой ломаной $L \subset \mathbb{R}^2$ без самопересечений*, называется объединение L и ограниченной компоненты Ω_1 множества $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L$. Принято также говорить, что ломаная L *ограничивает* Ω_1. Ограниченная компонента Ω_1 называется *внутренностью F* и обозначается через $\operatorname{Int} F$, неограниченная Ω_0 — *внешностью F* и обозначается через $\operatorname{Out} F$, а ломаная L — *границей F* и обозначается через ∂F. Звенья ломаной L называются *сторонами* или *ребрами многоугольника F*, а вершины ломаной — *вершинами многоугольника F*.

Замечание 5.3. Ломаная — замкнутое подмножество плоскости, компоненты Ω_0 и Ω_1 — открытые. Многоугольник F представляет собой замыкание ограниченной компоненты Ω_1, а ломаная L — это ее топологическая граница $\partial\Omega_1$. Кроме того, $\partial\Omega_1 = \partial\Omega_2 = \partial F$. Многоугольник F — замкнутое подмножество плоскости.

5.2 Многогранные поверхности и многогранники

Пусть π — (аффинная) плоскость в $\mathbb{R}^3$, т.е. множество точек вида $\xi + v$, где v пробегает некоторое двумерное линейное подпространство $V \subset \mathbb{R}^3$, а ξ — фиксированная точка из $\mathbb{R}^3$. Ясно, что все те объекты и построения, которые мы делали в стандартной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, можно проделать и в плоскости π.

Определение 5.4. *Пространственным многоугольником* назовем многоугольник, построенный в некоторой аффинной плоскости $\pi \subset \mathbb{R}^3$, при этом π будем называть *плоскостью многоугольника*.

Замечание 5.5. Аналогичным образом определяется любая плоская фигура, лежащая в пространстве, например, окружность, круг и т.д. Кроме того, говоря про внутренние и внешние точки пространственного многоугольника $F \subset \pi$, мы будем понимать соответствующие точки из $\operatorname{Int} F \subset \pi$ и $\operatorname{Out} F \subset \pi$.

Замечание 5.6. Каждый пространственный многоугольник F, так же, как и его граница ∂F, являются замкнутыми подмножествами не только плоскости, в которой они лежат, но и всего пространства $\mathbb{R}^3$. Однако внутренность $\operatorname{Int} F$ и внешность $\operatorname{Out} F$ открытыми в $\mathbb{R}^3$ не являются (проверьте).

Определение 5.7. *Многогранной поверхностью $\mathcal{F}$ в* $\mathbb{R}^3$ называется конечное семейство $\{F_i\}$ пространственных многоугольников $F_i \subset \mathbb{R}^3$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) для каждой пары различных многоугольников F_i и F_j их пересечение $F_i \cap F_j$ или пусто, или состоит из одной, общей для них вершины, или из одного, общего для них ребра; если F_i и F_j имеют общее ребро e, то они называются *смежными по* e;

(2) для каждого многоугольника F_i и каждого его ребра e существует не более одного многоугольника F_j, смежного с F_i по e;

(3) для каждой пары различных многоугольников F и F' существует последовательность многоугольников $F_{i_1}, \ldots, F_{i_m}$ такая, что $F_{i_1} = F$, $F_{i_m} = F'$, и при каждом $1 < k \leq m$ многоугольники $F_{i_{k-1}}$ и F_{i_k} смежны по некоторому ребру e_k; такую последовательность будем называть *цепочкой многоугольников, соединяющих F и F'*;

(4) для каждой пары многоугольников F и F', пересекающихся по вершине, существует соединяющая их цепочка, все многоугольники которой также содержат эту вершину;

(5) никакие два смежных многоугольника F_i и F_j не лежат в одной плоскости.

Многоугольники F_i называются *гранями* $\mathcal{F}$, отрезки в $\mathbb{R}^3$, совпадающие с ребрами граней, — *ребрами* $\mathcal{F}$, а точки в $\mathbb{R}^3$, совпадающие с концами ребер, — *вершинами* $\mathcal{F}$.

Обратите внимание, что два соседних ребра одной грани многогранной поверхности могут лежать на одной прямой.

Замечание 5.8. Мы дали столь «жесткое» определение многогранной поверхности, чтобы избежать сложной комбинаторики. Тем не менее, в более общей теории многие из требований определения 7.2 опускают или заменяют на более слабые. Так, например, иногда рассматривают многогранные поверхности с самопересечениями, или, скажем, отказываются от условия того, что смежные грани не лежат в одной плоскости (в теории изгибаний это используется в доказательстве теоремы, объясняющей, почему игра на аккордеоне невозможна, если сделать жесткими все грани его меха). Однако такие ослабления требований приводят к усложнению теории, например, отказываясь от условия (5), мы приходим к неоднозначности представления в виде многогранной поверхности: теперь каждую грань можно разбить на еще более мелкие грани.

Определение 5.9. Пусть $\mathcal{F}$ — многогранная поверхность. Если вершина (или ребро) $\mathcal{F}$ принадлежит грани, такие вершина и грань (ребро и грань) называются *инцидентными*. Ребро $\mathcal{F}$, инцидентное только одной грани, называется *граничным*, а инцидентное двум граням — *внутренним* (заметим, что других ребер в многогранной поверхности нет в силу пункта (2) из определения 7.2). Многогранная поверхность без граничных ребер называется *замкнутой*.

Замечание 5.10. Мы будем иногда отождествлять многогранную поверхность $\mathcal{F}$ с подмножеством $\mathbb{R}^3$, равным объединению всех граней из $\mathcal{F}$. Именно в этом смысле будем понимать фразу "пусть $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ — многогранная поверхность". Отметим, что каждая многогранная поверхность, рассматриваемая как подмножество, имеет единственное представление в виде многогранной поверхности — точнее, если две многогранные поверхности задают одно и то же подмножество в $\mathbb{R}^3$, то они совпадают в том смысле, что состоят из одних и тех же многоугольников (докажите это).

Приведем без доказательства следующий важный результат.

Теорема 5.11 (теорема Жордана для замкнутой многогранной поверхности). *Пусть $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ — замкнутая многогранная поверхность. Тогда $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{F}$ состоит из двух компонент, каждая из которых является открытым подмножеством в $\mathbb{R}^3$, а поверхность $\mathcal{F}$ является границей каждого из этих подмножеств. Одна из этих компонент является ограниченным подмножеством $\mathbb{R}^3$, а другая — нет.*

Определение 5.12. Пусть $\mathcal{F}$ — замкнутая многогранная поверхность, а Ω — ограниченная компонента множества $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{F}$. Тогда $W = \mathcal{F} \cup \Omega$ называется *многогранником, ограниченным* $\mathcal{F}$, или *многогранником с границей* $\mathcal{F}$ (границу $\mathcal{F}$ многогранника W будем также обозначать через ∂W). Кроме того, $\mathcal{F} = \partial W$ называют также *поверхностью многогранника* W. Ограниченная компонента Ω называется *внутренностью многогранника* и обозначается через $\operatorname{Int} W$. Оставшаяся, неограниченная компонента множества $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{F}$ называется *внешностью многогранника* W и обозначается через $\operatorname{Out} W$.

Замечание 5.13. Если Ω — внутренность многогранника W, то W совпадает с замыканием Ω. кроме того, $\partial\Omega = \partial W = \mathcal{F}$, где ∂ здесб оба раза обозначает топологическую границу.

Действуя так же, как в доказательстве теоремы Жордана для ломаных можно показать, что каждая точка P многогранника W обладает «хорошей» шаровой окрестностью $U(P)$, т.е. открытый шар $U(P)$ пересекается только с гранями, ребрами, вершинами содержащими P.

Следствие 5.14. *Многогранная поверхность $\mathcal{F}$ разбивает каждую хорошую окрестность каждой своей точки на две компоненты линейной связности, из которых одна лежит внутри многогранника W, ограниченного $\mathcal{F}$, а другая лежит во внешности этого многогранника.*

5.3 Графы, связанные с многогранными поверхностями

Пусть $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ — многогранная поверхность. Пусть V обозначает множество вершин $\mathcal{F}$, а E — множество ребер $\mathcal{F}$. Так как каждое ребро $\mathcal{F}$ соединяет некоторые вершины $\mathcal{F}$, пара (V, E) является графом, вложенным в $\mathbb{R}^3$.

Определение 5.15. *Графом G многогранной поверхности $\mathcal{F}$* называется построенный выше вложенный в $\mathbb{R}^3$ граф (V, E).

Обозначим через E' множество внутренних ребер многогранной поверхности $\mathcal{F}$. Будем рассматривать $\mathcal{F}$ как множество граней. Напомним, что через $\mathcal{F}^{(2)}$ мы обозначали множество 2-элементных подмножеств $\mathcal{F}$. Определим отображение $\partial\colon E' \to \mathcal{F}^{(2)}$ следующим образом: если ребро $e \in E'$ является пересечением граней F_i и F_j, то положим $\partial(e) = \{F_i, F_j\} \in \mathcal{F}^{(2)}$.

Определение 5.16. *Двойственным графом G_d многогранной поверхности* $\mathcal{F}$ называется построенный только что комбинаторный граф $(\mathcal{F}, E', \partial)$.

Замечание 5.17. Опишем некоторые простейшие свойства графа G многогранной поверхности $\mathcal{F}$.

(1) *Граф G является простым и связным.*

(2) *Степени вершин графа G не меньше* 2. Действительно, каждая вершина $\mathcal{F}$ является вершиной некоторой грани — многоугольника, поэтому из нее выходит не менее двух ребер.

(3) *Вершина v графа G имеет степень* 2, *если и только если оба выходящих из нее ребра e_1 и e_2 — граничные. В частности, степени вершин графа замкнутой многогранной поверхности не меньше* 3. Действительно, никакая пара граней многогранной поверхности не может пересекаться более чем по одному ребру. Поэтому если хотя бы одно из инцидентных v ребер, скажем e_1, — внутреннее, то к e_1 примыкает еще одна грань, в которой имеется ребро e_3, инцидентное v и отличное от e_1 и e_2, так что $\deg v \geq 3$.

Замечание 5.18. Опишем некоторые элементарные свойства двойственного графа G_d многогранной поверхности $\mathcal{F}$.

(1) *Граф G_d является простым и связным.* Действительно, различные вершины графа G_d, соединенные ребром, — это смежные грани. Так как смежные грани имеют ровно одно общее ребро $\mathcal{F}$, то граф G_d не содержит кратных ребер. Связность равносильна условию (3) из определения 7.2.

(2) *Степени вершин графа G_d, соответствующего замкнутой многогранной поверхности, не меньше* 3. Действительно, каждая грань $\mathcal{F}$ содержит не менее 3 ребер.

5.4 Выпуклые многогранники

Определение 5.19. Подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с каждой парой своих точек оно содержит отрезок, соединяющий эти точки.

Пример 5.20. Точка, прямая, плоскость, полупространство, открытый шар, замкнутый шар являются, очевидно, выпуклыми подмножествами пространства. Также любое непустое пересечение выпуклых множеств — выпукло (проверьте).

Определение 5.21. Многоугольник и многогранник называются *выпуклыми*, если они представляют собой выпуклые подмножества пространства.

Теорема 5.22. *Многогранник $W \subset \mathbb{R}^3$ выпуклый, если и только если он равен пересечению замкнутых полупространств, ограниченных плоскостями, проходящими через его грани.*

Доказательство. Пусть $F_1, \ldots, F_m$ — грани многогранника W. Обозначим через π_k плоскость, проходящую через F_k. Предположим сначала, что многогранник равен пересечению замкнутых полупространств, ограниченных плоскостями, проходящими через его грани, т.е. для каждого k существует такое полупространство Π_k, ограниченное плоскостью π_k, что $W = \cap_{k=1}^m \Pi_k$. Так как все полупространства выпуклы, а пересечение выпуклых множеств тоже выпукло, многогранник W — выпуклый.

Пусть теперь W — выпуклый многогранник. Докажем, что он совпадает с пересечением полупространств, ограниченных плоскостями, проходящими через его грани.

Лемма 5.23. *Пусть F — произвольная грань многогранника W, и π — содержащая ее двумерная плоскость. Тогда W лежит в одном из двух замкнутых полупространств, ограниченных плоскостью π.*

Доказательство. Пусть $A \in \operatorname{Int} W$. Тогда существует шаровая окрестность $U(P) \subset \operatorname{Int} W$, а в ней точка B, не лежащая в плоскости π. Обозначим через Π содержащее B ограниченное плоскостью π полупространство и покажем, что $W \subset \Pi$.

Действительно, пусть точка $C \in W$ не лежит в Π. Фиксируем произвольную точку P, лежащую внутри многоугольника $F \subset \pi$. Тогда отрезки $[B, P]$ и $[P, C]$ лежат в W в силу выпуклости, но пересекают разные компоненты множества $U(P) \setminus F$, противоречие. □

Таким образом, W содержится в пересечении полупространств Π_k, ограниченных плоскостями, содержащими грани многогранника.

Лемма 5.24. *Каждая грань выпуклого многогранника W равна пересечению W и содержащей ее плоскости и является выпуклым пространственным многоугольником.*

Доказательство. Пусть F — произвольная грань многогранника W и π — плоскость, содержащая грань F. Очевидно, $F \subset W \cap \pi$. Покажем обратное включение. Пусть $Q \in W \cap \pi$, но $Q \notin F$. Если P — внутри грани F, то отрезок $[P, Q]$, с одной стороны, лежит в многограннике W в силу его выпуклости, а с другой стороны пересекает границу многоугольника F в некоторой точке R. Пусть F' — грань многогранника W, примыкающая к F по ребру, содержащему R. Тогда F лежит также и в полупространстве Π', ограниченном плоскостью, содержащей F'. Значит в этом полупространстве лежит весь W, но точка Q в нем не лежит, противоречие. $\square$

Докажем теперь, что $W = \cap_{k=1}^m \Pi_k$. Предположим противное, т.е. существует точка $P \in \cap_{k=1}^m \Pi_k$ такая, что $P \notin W$. Пусть Q — произвольная точка из $\operatorname{Int} W$. Тогда точки P и Q лежат в разных компонентах множества $\mathbb{R}^3 \setminus \partial W$, поэтому $[P, Q]$ пересекает некоторую грань F_i, а значит и плоскость π_i. При этом Q — внутренняя точка многогранника, поэтому она не лежит в плоскости π_i по лемме 5.24, отрезок $[P, Q]$ пересекает плоскость π_i по точке, поэтому Q и P должны лежать в разных полупространствах относительно π_i. Но $Q \in W \subset \Pi_i$ по доказанному выше, а $P \in \Pi_i$ по условию, противоречие. $\square$

Следующие утверждения оставим в качестве упражнений.

Следствие 5.25. *Пусть $W \subset \mathbb{R}^3$ — выпуклый многогранник, $F_1, \ldots, F_m$ — его грани, π_i — плоскость, содержащая F_i. Обозначим через Π_i замкнутое полупространство, ограниченное π_i и содержащее W, и пусть Π'_i — внутренность этого полупространства. Пусть P — произвольная точка из W. Тогда*

(1) *P — вершина W, общая для граней $F_{i_1}, \ldots, F_{i_k}$, если и только если $P \in \pi_i$ при $i \in \{i_1, \ldots, i_k\}$, и $P \in \Pi'_i$ при всех остальных i;*

(2) *P — внутренняя точка ребра W, общего для граней F_{i_1} и F_{i_2}, если и только если $P \in \pi_i$ при $i \in \{i_1, i_2\}$, и $P \in \Pi'_i$ при всех остальных i;*

(3) *P — внутренняя точка грани F_{i_1}, т.е. $P \in \operatorname{Int} F_i$, если и только если $P \in \pi_{i_1}$ и $P \in \Pi'_i$ при $i \neq i_1$;*

(4) *P — внутренняя точка многогранника W, если и только если $P \in \Pi'_i$ при всех i.*

Следующая конструкция заимствована нами из [2].

Конструкция 5.26. В обозначениях следствия 5.25, выберем в произвольной грани F_i ее внутреннюю точку P. По этому же следствию, $P \in \Pi'_j$ для всех $j \neq i$, поэтому шаровая окрестность U_P, радиус которой меньше расстояния от P до всех π_j, $j \neq i$, также лежит в каждом таком Π'_j. Пусть Q — произвольная точка из U_P, не лежащая в Π_i, в частности, $Q \notin \pi_i$. Обозначим через $\nu\colon \Pi_i \to \pi_i$ радиальную проекцию из точки Q: каждой точке $S \in \Pi_i$ ставится точка $R = \nu(S) \in \pi_i$ пересечения луча QS с π_i.

Лемма 5.27. *Ограничение радиальной проекции ν на $\partial W \setminus \operatorname{Int} F_i$ является гомеоморфизмом с образом.*

Доказательство. Пусть R — произвольная точка плоскости π_i. Рассмотрим луч QR и выясним, как устроено пересечение $QR \cap \partial W$.

Пусть $R \in \operatorname{Out} F_i$, тогда, по лемме 5.24, $R \notin W$ и, значит, для некоторого $j \neq i$ выполняется $R \notin \Pi_j$, поэтому интервал (Q, R) пересекает плоскость π_j по некоторой точке T. Но тогда открытый луч TR содержится в $R^2 \setminus \Pi_j$, поэтому $TR \cap W = \emptyset$. Кроме того, $[Q, R) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Pi_i$, поэтому $[Q, R) \cap W = \emptyset$, так что в этом случае луч QR не пересекает W.

Пусть $R \in \partial F_i$. По следствию 5.25, точка R лежит в некоторой плоскости π_j, $j \neq i$, поэтому все точки луча QR, следующие за точкой R, лежат в $\mathbb{R}^3 \setminus \Pi_j$, следовательно, все они не принадлежат W. Кроме того, $(Q, R) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Pi_i$, поэтому $(Q, R) \cap W = \emptyset$, так что $QR \cap W$ состоит ровно из одной точки, а именно, точки R.

Наконец, пусть $R \in \operatorname{Int} F_i$. Выберем шаровую окрестность U_R точки R так же, как мы выбирали U_P. Тогда точки из $QR \cap U_R$, следующие на луче QR за точкой R, лежат во всех Π'_j, поэтому все они принадлежат внутренности W. Обозначим через S последнюю точку луча QR, лежащую в W. В силу сказанного выше, $S \neq R$. Покажем, что интервал (R, S) состоит из внутренних точек для W. Действительно, если на нем имеется некоторая точка $T \in \partial W$, то T содержится в некоторой плоскости π_j, но тогда все точки открытого луча TS не содержатся в Π_j и, в частности, в W, поэтому $T \notin W$. Итак, мы доказали, что $QR \cap \partial W$ состоит в рассматриваемом случае из двух точек: R и S. Отсюда и из разобранных выше случаев вытекает, что ограничение ν на $\partial W \setminus \operatorname{Int} F_i$ — взаимно однозначно с образом. Непрерывность этого ограничения и отображения, обратного к нему, следует из непрерывности радиальной проекции. □

Следствие 5.28. *Граф выпуклого многогранника планарен.*

Доказательство. По лемме 5.27, границу ∂W выпуклого многогранника, из которой выкинута внутренность некоторой грани F, можно гомеоморфно отобразить на некоторое подмножество плоскости π, проходящей через F. При таком отображении граф многогранника W отображается на некоторый плоский граф, так что граф многогранника планарен. □

Конструкция 5.29. Построим вложение двойственного графа G_d многогранной поверхности $\mathcal{F}$, все грани которой — выпуклые многоугольники в саму поверхность. Для этого возьмем в каждой грани F_i многогранной поверхности $\mathcal{F}$ по внутренней точке P_i и примем эти точки за образы соответствующих вершин графа. Соединим каждую точку P_i с серединами тех сторон содержащей ее грани, которые соответствуют внутренним ребрам многогранной поверхности. Получим набор отрезков, пересекающихся только по P_i. Точки P_i из смежных граней соединены двузвенными ломаными. Эти ломаные возьмем в качестве образов соответствующих ребер графа.

Замечание 5.30. Несколько более сложно определяется *геометрическая реализация двойственного графа произвольной многогранной поверхности* (дайте соответствующее определение).

Предложение 5.31. *Двойственный граф выпуклого многогранника W планарен.*

Доказательство. Приведем еще одну конструкцию из [2]. В обозначениях следствия 5.25, выберем произвольную точку $P \in \operatorname{Int} W$. Существует шар $U_\varepsilon(P)$, содержащийся в $\operatorname{Int} W$. Уменьшая ε, если необходимо, добьемся того, чтобы сфера $S_\varepsilon(P)$, ограничивающая этот шар, также лежала в $\operatorname{Int} W$.

Пусть $\mu\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{P\} \to S_\varepsilon(P)$ — радиальная проекция на $S_\varepsilon(P)$ с центром в P:

$$\mu(Q) = P + \varepsilon\,\overrightarrow{PQ}/\|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Покажем, что μ отображает ∂W взаимно однозначно на $S_\varepsilon(P)$.

Действительно, если Q — произвольная точка из $S_\varepsilon(P)$, то луч PQ содержит некоторую точку $R \in \operatorname{Out} W$, так как W — ограниченное множество. Но тогда $[P,R]$ пересекает ∂W. Пусть S — некоторая точка из этого пересечения, тогда $\mu(S) = Q$. Таким образом, ограничения μ на ∂W сюръективно.

Покажем теперь, что это ограничение инъективно. Предположим, что S_1 и S_2 — различные точки из ∂W, для которых $Q = \mu(S_1) = \mu(S_2)$. Без ограничения общности, будем считать, что $S_1 \in (Q, S_2)$. Так как $S_1 \in \partial W$, то S_1 лежит в некоторой грани F_i многогранника W. Но тогда, в обозначениях следствия 5.25, $S_1 \in \pi_i$ и $P \in \Pi_i'$, поэтому S_2 лежит вне полупространства Π_i, так что $S_2 \notin W$.

Итак, мы доказали, что μ отображает ∂W взаимно однозначно на S^2. Из непрерывности радиальной проекции и вспомогательных утверждений, доказанных при решении задачи 2.19, вытекает, что это отображение — гомеоморфизм.

Рассмотрим геометрическую реализацию G двойственного графа многогранника W, описанную конструкции 5.29. Выберем произвольную точку T из ∂W, не принадлежащую G. По задаче 2.19, существует гомеоморфизм η между $S_\varepsilon(P) \setminus \{\mu(T)\}$ и плоскостью $\mathbb{R}^2$, поэтому $\eta \circ \mu(G)$ — геометрическая реализация двойственного графа многогранника W, являющаяся плоским графом. $\square$

5.5 Формула Эйлера для многогранников

В данном разделе будем рассматривать выпуклые многогранники W. По следствию 5.28, графы G таких многогранников планарны. Пусть ν — отображение, построенное в конструкции 5.26, тогда $\nu(G)$ — связный плоский граф, имеющий столько же вершин, ребер и граней, сколько и многогранник W, откуда, используя формулу Эйлера из теоремы 4.6, получаем следующий результат.

Теорема 5.32 (Формула Эйлера для выпуклых многогранников)**.** *Пусть W — выпуклый многогранник, и пусть f, e и v — количества его граней, ребер и вершин. Тогда*

$$v - e + f = 2.$$

5.6 Правильные многогранники

Определение 5.33. Выпуклый многогранник назовем *правильным*, если все его грани — равные правильные пространственные многоугольники, стыкующиеся в вершинах в одном и том же количестве и образующие равные двугранные углы при всех ребрах.

Пусть W — правильный многогранник, G — его граф, и ν, как и выше, — отображение, построенное в конструкции 5.26. Положим $G_\nu = \nu(G)$. Тогда, как уже было отмечено, граф G_ν имеет столько же вершин, ребер и граней, сколько и многогранник W. Из определения правильного многогранника вытекает, что

(1) G_ν — плоский простой связный граф;

(2) степени вершин графа G_ν одинаковы и не меньше 3;

(3) каждая грань графа G_ν ограничена один и тем же числом ребер, также не меньшим 3;

(4) каждое ребро графа G_ν лежит ровно в двух гранях.

Такие графы мы описали в задаче 4.8. Приведем ответ.

Пусть (v, e, f) — вектор, компоненты которого равны соответственно количествам вершин, ребер и граней графа G_ν, а, значит, и правильного многогранника W. Тогда эти векторы могут быть только следующих пяти типов: $(4, 6, 4)$, $(6, 12, 8)$, $(8, 12, 6)$, $(12, 30, 20)$ и $(20, 30, 12)$. Оказывается, правильные многогранники каждого из этих пяти типов существуют. Они называются *платоновыми телами*. Доказательство существования каждого из этих платоновых тел можно найти, например, в [2].

5.7 Теорема о «еже» выпуклого многогранника

Пусть $W \subset \mathbb{R}^3$ — произвольный выпуклый многогранник. Обозначим через $F_1, \ldots, F_m$ все его грани, через N_i — единичный вектор, перпендикулярный грани F_i и направленный наружу многогранника W, а через S_i — площадь грани F_i. Положим $\xi_i = S_i\, N_i$. Семейство векторов $\{\xi_i\}$ назовем *ежом многогранника* W. Мы хотим понять, какими свойствами обладают ежи многогранников и сколь однозначно они определяют многогранник. Подробности см. в [4].

Теорема 5.34. *Пусть $\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ — ёж выпуклого многогранника W. Тогда векторы ξ_i некомпланарны и выполняется $\sum_{i=1}^m \xi_i = 0$.*

Доказательство. Если бы векторы ξ_i лежали в одной плоскости π, то, по теореме 5.22, многогранник W был бы равен пересечению полупространств Π_i, ограниченных плоскостями π_i, параллельными прямой, перпендикулярной π, так что W не был бы ограниченным. Докажем теперь вторую часть теоремы.

Отметим сначала, что величина $\xi = \sum_i \xi_i$ не меняется при сдвигах многогранника W. Это дает нам возможность считать, не ограничивая общности, что начало координат O лежит во внутренности многогранника W.

Пусть P — произвольная точка из W, а P_i — точка, лежащая в грани F_i. Тогда расстояние h_i от точки P до плоскости, проходящей через грань F_i, равно $\langle N_i, P_i - P\rangle$, где $\langle a, b\rangle$ обозначает стандартное скалярное произведение векторов a и b.

Обозначим через V_i пирамиду с основанием F_i и вершиной P, через v_i — объем этой пирамиды, а через v — объем многогранника W. Тогда $v = \sum_i v_i$. С другой стороны,

$$v_i = \frac{1}{3}\, h_i\, S_i = \frac{1}{3}\, \langle N_i, P_i - P\rangle\, S_i = \frac{1}{3}\, \langle \xi_i, P_i - P\rangle,$$

поэтому

$$v = \sum_i \frac{1}{3}\, \langle \xi_i, P_i - P\rangle = \sum_i \frac{1}{3}\, \langle \xi_i, P_i\rangle - \sum_i \frac{1}{3}\, \langle \xi_i, P\rangle = \\ = \sum_i \frac{1}{3}\, \langle \xi_i, P_i\rangle - \frac{1}{3}\, \Big\langle \sum_i \xi_i, P\Big\rangle = \sum_i \frac{1}{3}\, \langle \xi_i, P_i\rangle - \frac{1}{3}\, \langle \xi, P\rangle.$$

Заметим, что вектор ξ, величина v и величина $\sum_i \frac{1}{3}\langle \xi_i, P_i\rangle$ не зависят от выбора точки P, поэтому от выбора P не зависит также и величина $\langle \xi, P\rangle$. Так как начало координат O лежит внутри W, то некоторая шаровая окрестность $U_\varepsilon(O)$ точки O также лежит внутри W. Значит, для любой точки P из $U_\varepsilon(O)$ величина $\langle \xi, P\rangle$ постоянна и равна $\langle \xi, O\rangle = 0$. Покажем, как отсюда вытекает, что $\xi = 0$. Предположим противное, т.е. что $\xi \neq 0$. Положим $\lambda = \varepsilon / \big(2\|\xi\|\big)$, тогда $\lambda\, \xi \in U_\varepsilon(O)$, поэтому $\langle \xi, \lambda\, \xi\rangle = 0$, откуда, так как $\lambda \neq 0$, имеем $\langle \xi, \xi\rangle = 0$, следовательно $\xi = 0$. $\square$

Оказывается, имеет место и обратный результат, доказательство которого сложнее и опирается на теоремы, которые вы будете изучать на следующих курсах.

Теорема 5.35 (Г. Минковский [5])**.** *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — ненулевые некомпланарные векторы в $\mathbb{R}^3$, причем $\sum_i \xi_i = 0$. Тогда существует единственный, с точностью до параллельного переноса, выпуклый многогранник, ёж которого равен $\{\xi_i\}$.*

У теоремы 5.35 имеются обобщения как на многомерный случай, так и на невыпуклые многогранники (см. например [6]).

Следствие 5.36. *Выпуклый многогранник центрально симметричен, если и только если для каждой его грани существует параллельная ей грань той же площади.*

Доказательство. Если многогранник центрально симметричен, то каждая его грань центрально симметрична некоторой другой его грани, а такие грани параллельны и имеют одинаковые площади.

Пусть теперь у каждой грани выпуклого многогранника имеется параллельная ей грань той же площади.

Лемма 5.37. *В сделанных предположениях еж многогранника симметричен.*

Доказательство. Так как мы предполагаем, что смежные грани не параллельны, внешние нормали к таким граням противоположно направлены. Действительно, пусть это не так, т.е. для некоторых параллельных граней F_i и F_j внешние нормали сонаправлены. Выпуклый многогранник лежит в пересечении полупространств Π_i и Π_j, ограниченных плоскостями π_i и π_j, проходящими через F_i и F_j соответственно. Плоскости π_i и π_j обязаны совпадать, иначе одна из граней не принадлежит многограннику. В силу выпуклости, выпуклая оболочка этих граней также принадлежит многограннику, но тогда в плоскости $\pi_i = \pi_j$ имеется грань, смежная с F_i или F_j, противоречие.

Из только-что доказанного вытекает, что грань вместе с параллельной ей гранью той же площади порождают пару противоположных векторов в еже многогранника. Такие пары не могут пересекаться, иначе получим пару параллельных граней с сонаправленными внешними нормалями. □

Итак, еж многогранника симметричен. По теореме Минковского, ему соответствует единственный, с точностью до сдвига, многогранник. Но если этот многогранник не является центрально-симметричным, то его центрально-симметрическая копия имеет ровно такой же еж, но не может быть переведена в исходный многогранник параллельным переносом. Доказательство закончено. □

Литература к главе 5

[1] Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.Л. *Многогранники, графы, оптимизация.* М.: Наука, 1981.

[2] Берже М. *Геометрия*, тт. 1-2, М.: Мир, 1984.

[3] Долбилин Н.П. *Три теоремы о выпуклых многогранниках.* Квант, 2001, N 5, 7—12.

[4] Долбилин Н.П. *Теорема Минковского о многогранниках.* Квант, 2006, N 4, 3—8.

[5] Минковский Г. *Общие теоремы о выпуклых многогранниках.* Успехи мат. наук, 1936, вып. 2, 55—71.

[6] Alexandrov V. *Minkowski-type and Alexandrov-type theorems for polyhedral herissons*, 2002, arXiv:math/0211286v1.

Упражнения к главе 5.

Упражнение 5.1. Пусть W — выпуклый многогранник, и пусть v, e и f обозначают количества вершин, ребер и граней этого многогранника. Докажите, что

(1) $e + 6 \le 3v$;

(2) $e + 6 \le 3f$;

(3) $f + 4 \le 2v$;

(4) $v + 4 \le 2f$;

(5) многогранник W имеет хотя бы одну треугольную, четырехугольную или пятиугольную грань;

(6) многогранник W имеет хотя бы один трехгранный, четырехгранный или пятигранный пространственный угол (т.е. вершину, в которой стыкуются 3, 4 или 5 граней);

(7) многогранник W имеет или хотя бы одну треугольную грань, или один трехгранный пространственный угол;

(8) сумма всех плоских углов граней многогранника W равна $2\pi(v - 2)$.

Упражнение 5.2.

(a) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что все его грани имеют не меньше 5 ребер?

(b) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что в каждой его вершине сходится не меньше 5 ребер?

(c) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что все его грани имеют не меньше 4 ребер?

(d) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что в каждой его вершине сходится не меньше 4 ребер?

(e) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что все его грани имеют не меньше 3 ребер?

(f) Какое минимальное число ребер может иметь многогранник, если известно, что в каждой его вершине сходится не меньше 3 ребер?

Определение 5.38. Пусть P — вершина произвольного многогранника W, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — величины углов всех граней W при этой вершине. Тогда *кривизной в вершине* P называется величина $K(P) = 2\pi - \sum_i \alpha_i$.

Упражнение 5.3. Докажите, что у выпуклого многогранника сумма кривизн $K(P)$ по всем его вершинам P равна 4π.

Упражнение 5.4. Пусть $L \subset \mathbb{R}^3$ — замкнутая ломаная без самопересечений, лежащая на границе ∂W выпуклого многогранника W. Докажите, что $\partial W \setminus L$ состоит из двух компонент.

Определение 5.39. Пусть $L \subset \mathbb{R}^3$ — замкнутая ломаная без самопересечений, лежащая на границе ∂W выпуклого многогранника W, а Ω_1 и Ω_2 — компоненты множества $\partial W \setminus L$. Тогда множества $M_i = L \cup \Omega_i$ называются *многоугольниками на* ∂W. Для многоугольника M_i точки из Ω_i называются *внутренними*, из Ω_j — *внешними*, а из L — *граничными*, где $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Положим $\operatorname{Int} M_i = \Omega_i$, $\operatorname{Out} M_i = \Omega_j$ и $\partial M_i = L$.

Определение 5.40. Пусть X — многоугольник на поверхности ∂W выпуклого многогранника W, а P — некоторая вершина многоугольника X. Тогда *угол* α_P *многоугольника* X *в вершине* P определяется так. Если P лежит внутри грани, то α_P — это угол на плоскости, содержащей эту грань. Если же P попала или на ребро, или в вершину из ∂W, то угол в этой вершине складывается из всех углов многоугольников, полученных пересечением X и содержащих эту вершину граней (конечно, углы рассматриваются в этой вершине).

Упражнение 5.5. Рассмотрим n-угольник X, лежащий на границе выпуклого многогранника. Докажите, что его сумма углов равна $\pi(n-2)$ плюс сумма кривизн $K(P)$ по всем вершинам многогранника, попавшим внутрь X.

Упражнение 5.6. Сформулируйте и докажите аналог теоремы Минковского для выпуклых многоугольников.

Упражнение 5.7. Существует ли тетраэдр с гранями $F_1, \dots, F_4$ такой, что площадь каждой F_i равна 1, грани F_1 и F_2 перпендикулярны друг другу, грани F_3 и F_4 также перпендикулярны друг другу, а угол между ребром $e_{12} = F_1 \cap F_2$ и $e_{34} = F_3 \cap F_4$ равен $37°$? Указание: воспользуйтесь теоремой Минковского.

Упражнение 5.8. Докажите, что выпуклый многогранник центрально симметричен, если и только если для каждой его грани существует параллельная ей грань той же площади. Указание: воспользуйтесь теоремой Минковского.

Определение 5.41. Пусть X — произвольное подмножество $\mathbb{R}^n$. Наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее X, называется *выпуклой оболочкой* X и обозначается через $\operatorname{conv} X$. Иными словами, $\operatorname{conv} X$ — это такое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, что $X \subset \operatorname{conv} X$, и если $Y \supset X$ — выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{conv} X \subset Y$.

Замечание 5.42. Определение 5.41 и тот факт, что пересечение выпуклых множеств — выпукло, мгновенно влекут, что $\operatorname{conv} X$ совпадает с пересечением всех выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$, содержащих X.

Упражнение 5.9. Докажите, что выпуклый многогранник совпадает с выпуклой оболочкой множества своих вершин.

Глава 6

Равновеликость и равносоставленность. Третья проблема Гильберта.

План. Площади и объемы, их инвариантность и аддитивность, разрезание многоугольников, равносоставленные многоугольники, равновеликие многоугольники, теорема Бойяи–Уоллеса–Гервина, разрезание многогранников, равносоставленные многогранники, равновеликие многогранники, третья проблема Гильберта, зависимость на множестве вещественных чисел, аддитивная функция, функция Дена многогранника, инвариант Дена, теорема Дена, тетраэдр Хилла, равнодополняемые многогранники, координатный тетраэдр, решение Третьей проблемы Гильберта, теорема Дена–Сидлера.

Проблемы, обсуждаемые в этой главе, имеют непосредственное отношение к вычислению площадей и объемов. Известное из курса математического анализа определение этих понятий, основанное на предельном переходе, часто приводит к сложным вычислениям, сводящимся фактически к взятию соответствующего интеграла. Однако в некоторых случаях вычисления можно существенно упростить, если воспользоваться следующими соображениями (мы сформулируем их для плоского случая; пространственный случай получается заменой слова "площадь" на слово "объем"): (1) площади равных фигур одинаковы (инвариантность площади); (2) если фигура F представлена в виде объединения конечного числа фигур $F_1, \ldots, F_n$, не имеющих общих внутренних точек, то площадь фигуры F равна сумме площадей фигур F_i (аддитивность площади). Таким образом, если для фигур F и G заданы такие представления с помощью фигур $F_1, \ldots, F_n$ и $G_1, \ldots, G_n$ соответственно, и при каждом i фигуры F_i и G_i равны, то F и G имеют одинаковые площади.

Хорошо известный пример применения изложенной идеи — вычисление площади параллелограмма через площадь прямоугольника, а также площади треугольника через площадь параллелограмма.

Отметим, что для многоугольников F в качестве фигур F_i принято также рассматривать многоугольники. Приведем теперь необходимые формальные определения.

Определение 6.1. Пусть F и $F_1, \dots, F_n$ — многоугольники, для которых выполняются следующие условия:

(1) при каждом i и $j \neq i$ многоугольники F_i и F_j не имеют общих внутренних точек;

(2) $F = \cup_{i=1}^n F_i$.

Тогда говорят, что F *разрезан на многоугольники* F_i.

Определение 6.2. Пусть F и G — два многоугольника. Если F и G можно так разрезать на многоугольники $F_1, \dots, F_n$ и $G_1, \dots, G_n$ соответственно, что при каждом $i = 1, \dots, n$ многоугольники F_i и G_i равны, то F и G называются *равносоставленными*.

Определение 6.3. Многоугольники F и G называются *равновеликими*, если их площади равны.

Как уже отмечалось, равносоставленные многоугольники равновелики. Верно ли обратное? Замечательно, что ответ положительный. Соответствующий результат называется *теоремой Бойяи–Уоллеса–Гервина*.

Теорема 6.4 (Бойяи, Уоллес, Гервин [3])**.** *Два многоугольника равновелики в том и только том случае, когда они равносоставлены.*

Замечание 6.5. Бойяи (Farkas Bolyai) в 1790 году сформулировал проблему (это — отец Яноша Бойяи, Janos Bollyai, одного из первооткрывателей неевклидовой геометрии), Уоллес (William Wallace) решил ее в 1807 году, Гервин (Paul Gerwien) решил ее вновь в 1833 году, и, наконец, Бойяи, не зная о существовании этих решений, дал свое в 1835 году, см. [1]. Схема доказательства этой теоремы приведена в виде упражнений в конце раздела.

Следующий шаг — попробовать обобщить полученные результаты на многогранники. Начнем с соответствующих определений (дословно повторяющих определения 6.1, 6.2 и 6.3 с заменой слов “многоугольник” на “многогранник” и “площадь” на “объем”).

Определение 6.6. Пусть W и $W_1, \dots, W_n$ — многогранники, для которых выполняются следующие условия:

(1) при каждом i и $j \neq i$ многогранники W_i и W_j не имеют общих внутренних точек;

(2) $W = \cup_{i=1}^n W_i$.

Тогда говорят, что W *разрезан на многогранники* W_i.

Определение 6.7. Пусть A и B — два многогранника. Если A и B можно так разрезать на многогранники $A_1, \dots, A_n$ и $B_1, \dots, B_n$ соответственно, что при каждом $i = 1, \dots, n$ многогранники A_i и B_i равны, то A и B называются *равносоставленными*.

Определение 6.8. Многогранники A и B называются *равновеликими*, если их объемы равны.

Верно ли, что равновеликие многогранники равносоставлены? Ответ на этот вопрос оказался отрицательным, что было показано Деном (Max Dehn) [2], построившим специальные функции от длин ребер и величин двугранных углов многогранника, которые не меняются при замене многогранника на любой другой, равносоставленный с ним. Такие функции называются теперь *инвариантами Дена*. Оказалось, что для куба и равновеликого ему правильного тетраэдра можно построить такой инвариант Дена, который на кубе и на правильном тетраэдре принимает разные значения, поэтому такие куб и тетраэдр не равносоставлены. Более того, можно показать, что они также и не *равнодополняемы*, т.е. не могут быть дополнены равными многогранниками до равных многогранников. Кроме того, инварианты Дена позволили доказать существование тетраэдров с равными основаниями и равными высотами, которые не являются равнодополняемыми (в частности, равносоставленными). Таким образом, была решена *третья проблема Гильберта*, в которой поднимался вопрос о существовании таких тетраэдров.

Отметим, что инварианты Дена и сама его работа [2] были трудны для понимания. Ряд математиков упростили доказательство Дена (см. историю вопроса в [3]). Возможно, наиболее простой подход к равносоставленности изложен в [4]. Именно его мы и будем обсуждать. Материалы этой главы частично опираются на [3] и на [5].

6.1 Критерий равносоставленности многогранников

В этом параграфе мы определим инварианты Дена и покажем, как можно их использовать для ответа на вопрос о том, являются ли данные многогранники равносоставленными.

Рассмотрим множество вещественных числе $\mathbb{R}$ как линейное пространство над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (проверьте, что это действительно линейное пространство). Обозначим это пространство через $\mathbb{R}_Q$. Конечный набор векторов $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_Q$ (т.е. вещественных чисел) является *линейно зависимым*, если существуют рациональные числа $q_1, \dots, q_n$ такие, что $q_1x_1 + \dots + q_nx_n = 0$. Отметим, что это последнее условие равносильно существованию целых чисел n_i таких, что $n_1x_1 + \dots + n_kx_k = 0$.

Каждое конечное множество $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ порождает линейное подпространство $L(X)$ — линейную оболочку множества X в $\mathbb{R}$. Ясно, что $L(X) \subset \mathbb{R}_Q$ — конечномерное линейное пространство, размерность которого не превышает n.

Пример 6.9. Если $X = \{1, \sqrt{2}\}$, то размерность $L(X)$ в равна 2.

Пусть W — некоторый многогранник, и E — множество его ребер. Для каждого $e \in E$ через $|e|$ обозначим длину ребра e, а через α_e — величину двугранного угла многогранника W при этом ребре.

Положим $\alpha(W) = \{\alpha_e : e \in E\}$.

Определение 6.10. Пусть X — произвольное конечное множество вещественных чисел, содержащее $\alpha(W)$ и число π. Каждую линейную функцию $f\colon L(X) \to \mathbb{R}$, для которой $f(\pi) = 0$, будем называть *функцией Дена многогранника* W, а число $\Delta_f(W) = \sum_{e\in E} |e|\, f(\alpha_e)$ — *инвариантом Дена*, отвечающим f.

Замечание 6.11. Так как $f\colon L(X) \to \mathbb{R}$ — линейная функция, то $f(0) = 0$.

Замечание 6.12. Если множество X содержит π и все множества $\alpha(W_i)$, где $W_1, \ldots, W_k$ — некоторое семейство многогранников, тогда линейная функция $f\colon L(X) \to \mathbb{R}$, зануляющаяся на π, является функцией Дена одновременно для всех W_i.

Теорема 6.13. *Пусть A и B — равносоставленные многогранники, а f — произвольная функция Дена для A и B. Тогда $\Delta_f(A) = \Delta_f(B)$.*

Прежде, чем доказывать эту теорему, приведем некоторые ее следствия.

6.2 Примеры вычисления инвариантов Дена

Утверждение 6.14. *Каждый инвариант Дена для куба равен нулю.*

Доказательство. Обозначим рассматриваемый куб через K, и пусть a — длина его стороны. Пусть f — произвольная функция Дена для куба K. Так как все двугранные углы куба равны $\pi/2$, и $2 \cdot \pi/2 - \pi = 0$, то $0 = f(0) = 2f(\pi/2) - f(\pi) = 2f(\pi/2)$. Следовательно, $f(K) = \sum_{i=1}^{12} a \cdot f(\pi/2) = 0$. $\square$

Предложение 6.15. *Каждый инвариант Дена для призмы равен нулю.*

Доказательство. Обозначим рассматриваемую призму через P, и пусть f — произвольная функция Дена для этой призмы. Обозначим через $e_1, \ldots, e_n$ ребра нижнего основания призмы P, через $e'_1, \ldots, e'_n$ — соответствующие ребра верхнего основания призмы, и через $h_1, \ldots, h_n$ — боковые ребра призмы P. Тогда при каждом i выполняется $|e_i| = |e'_i|$ и $\alpha_{e_i} + \alpha_{e'_i} = \pi$. Кроме того, $|h_1| = \cdots = |h_n|$ и $\sum_i \alpha_{h_i} = \pi(n-2)$ (плоское сечение соответствующего призме цилиндра, перпендикулярное образующим, является плоским n-угольником). Отсюда вытекает, что

$$0 = f(0) = f(\alpha_{e_i}) + f(\alpha_{e'_i}) - f(\pi) = f(\alpha_{e_i}) + f(\alpha_{e'_i}),$$
$$0 = f(0) = \sum_i f(\alpha_{h_i}) - (n-2)f(\pi) = \sum_i f(\alpha_{h_i}).$$

Используем приведенные только что формулы для вычисления $f(P)$:

$$f(P) = \sum_{i=1}^{n} |e_i| f(\alpha_{e_i}) + \sum_{i=1}^{n} |e'_i| f(\alpha_{e'_i}) + \sum_{i=1}^{n} |h_i| f(\alpha_{h_i}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |e_i| \big(f(\alpha_{e_i}) + f(\alpha_{e'_i}) \big) + |h_1| \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_{h_i}) = 0.$$

□

6.3 Некоторые следствия из теоремы Дена

Следствие 6.16. *Правильный тетраэдр и куб не равносоставлены.*

Доказательство. Легко видеть, что все двугранные углы α правильного тетраэдра равны $\arccos(1/3)$. У куба двугранные углы равны $\pi/2$.

Лемма 6.17. *Число* $\frac{1}{\pi}\arccos(1/3)$ *— иррационально, поэтому* α *и* π *линейно независимы над* $\mathbb{Q}$.

Доказательство. Покажем сначала, что если $\alpha = \arccos(1/3)$, то $\cos(k\alpha)$ при натуральных k имеет вид $a_k/3^k$, где a_k — целое, не делящееся на 3. Доказательство проведем индукцией по k. Для $k = 1$ это так. Для $k = 2$ это тоже так в силу того, что $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = -7/9$. Предположим, что утверждение доказано для всех $k < n$, где $n \geq 3$. Тогда

$$\cos(n\alpha) + \cos\big((n-2)\alpha\big) = 2\cos\big((n-1)\alpha\big)\cos\alpha = 2a_{n-1}/3^n,$$

откуда $\cos(n\alpha) = 2a_{n-1}/3^n - a_{n-2}/3^{n-2} = (2a_{n-1} - 9a_{n-2})/3^n$. Осталось заметить, что числитель не делится на 3, так как a_{n-1} не делится на 3 по предположению.

Покажем теперь, что α/π иррационально. Предположим противное, т.е. $\alpha = \frac{p}{q}\pi$, где $p \neq 0$ и $q > 0$ — целые числа, тогда $\cos(q\alpha) = \pm 1$, чего не может быть в силу того, что мы доказали выше. □

Рассмотрим множество $X = \{\alpha, \pi\}$, тогда $L(X)$ — двумерно, α и π — базис в $L(X)$, причем $\pi/2 \in L(X)$. Зададим на $L(X)$ линейную функцию f, положив $f(\alpha) = 1$, $f(\pi) = 0$ и продолжив ее по линейности. Тогда f — функция Дена для тетраэдра и куба.

Вычислим теперь инварианты Дена, соответствующие функции f. По утверждению 6.14, каждый инвариант Дена для куба равен нулю. Пусть T — рассматриваемый правильный тетраэдр, и a — длина его стороны. Тогда $\Delta_f(T) = \sum_{i=1}^{6} a\, f(\alpha) = 6a \neq 0$, поэтому, в силу теоремы 6.13, тетраэдр T и куб не равносоставлены. □

6.4 Доказательство теоремы 6.13

На понадобится следующий технический результат.

Лемма 6.18. *Пусть $X = \{x_i\}$ — конечное множество вещественных чисел и $y \in \mathbb{R}$. Положим $Y = X \cup \{y\}$. Тогда каждая линейная функция $f\colon L(X) \to \mathbb{R}$ продолжается до некоторой линейной функции на $L(Y)$.*

Доказательство. Если вектор $y \in \mathbb{R}$ линейно независим с векторами из X, то можно продолжить функцию f, выбрав произвольное значение $f(y)$, и далее по линейности. Если же $y \in L(X)$, то значение функции и так определено. А именно, если для некоторых целых n_i и $n \neq 0$ имеем $n\,y + \sum n_i x_i = 0$, то $f(y) = -\frac{1}{n}\sum n_i f(x_i)$. □

Следствие 6.19. *Пусть W — некоторый многогранник и f — его функция Дена. Рассмотрим произвольные многогранники $W_1, \ldots, W_n$. Тогда f продолжается до функции Дена для всех многогранников W_i.*

В формулировке следующего предложения также используется следствие 6.19.

Предложение 6.20 (аддитивность инварианта Дена)**.** *Пусть W — произвольный многогранник, разбитый на многогранники $W_1, \ldots, W_n$, и f — некоторая функция Дена для W. Обозначим той же буквой произвольное продолжение f до функции Дена для всех многогранников $W_1, \ldots, W_n$. Тогда $\Delta_f(W) = \sum_{i=1}^n \Delta_f(W_i)$.*

Доказательство. Пусть e — ребро одного из многогранников $W, W_1, \ldots, W_n$. Рассмотрим все вершины этих многогранников, попавшие на e, а также все точки пересечения ребра e с другими ребрами этих многогранников. Тогда ребро e разобьется этими точками на отрезки, которые будем называть *звеньями.* Звено может входить в ребра нескольких многогранников, в каждом из них определен двугранный угол при ребре, содержащем это звено. Если это угол в W_i, то обозначим его α_ε^i, а если это угол в W, то через α_ε.

Обозначим через $\mathcal{E}$ множество всех звеньев, каждое из которых лежит в некотором ребре многогранника W.

Лемма 6.21. *В сделанных обозначениях,*

$$\Delta_f(W) = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} |\varepsilon|\, f(\alpha_\varepsilon). \tag{6.1}$$

Доказательство. Действительно, ребро e многогранника W дает вклад $|e|\, f(\alpha_e)$ в левую часть формулы (6.1), т.е. в $\Delta_f(W)$, а все звенья $\varepsilon \in \mathcal{E}$, лежащие в e, дают вклад в правую часть формулы (6.1), равный

$$\sum_{\varepsilon \subset e} |\varepsilon|\, f(\alpha_\varepsilon) = \sum_{\varepsilon \subset e} |\varepsilon|\, f(\alpha_e) = f(\alpha_e) \sum_{\varepsilon \subset e} |\varepsilon| = f(\alpha_e)\, |e|,$$

что и требовалось. □

Покажем теперь, что величина $\sum_{i=1}^n \Delta_f(W_i)$ равна правой части формулы (6.1). Из леммы 6.21, примененной к многогранникам W_i следует, что

$$\Delta_f(W_i) = \sum_{\varepsilon} |\varepsilon|\, f(\alpha^i_\varepsilon),$$

где суммирование берется по всем звеньям всех ребер многогранника W_i, поэтому

$$\sum_{i=1}^n \Delta_f(W_i) = \sum_{\varepsilon,i} |\varepsilon|\, f(\alpha^i_\varepsilon).$$

Рассмотрим сначала все звенья, не попавшие в $\mathcal{E}$, и покажем, что они дают нулевой вклад в эту сумму. Действительно, такие звенья могут быть двух типов: (1) звенья, лежащие в гранях многогранника W, и (2) звенья, внутренности которых лежат внутри многогранника W.

Пусть ε — звено первого типа, и пусть $W_{i_1}, \dots, W_{i_k}$ — все многогранники W_i, в ребрах которых лежит ε, тогда $\sum_j \alpha^{i_j}_\varepsilon = \pi$, поэтому $0 = f(0) = \sum_j f(\alpha^{i_j}_\varepsilon) - f(\pi) = \sum_j f(\alpha^{i_j}_\varepsilon)$. Отсюда вытекает, что вклад звена ε в величину $\sum_i \Delta_f(W_i)$ равен

$$\sum_j |\varepsilon|\, f(\alpha^{i_j}_\varepsilon) = |\varepsilon| \sum_j f(\alpha^{i_j}_\varepsilon) = 0.$$

Если ввести такие же обозначения для ребра ε второго типа, то получим $\sum_j \alpha^{i_j}_\varepsilon = 2\pi$ и, из тех же самых соображений, его вклад в $\sum_i \Delta_f(W_i)$ равен нулю.

Осталось выяснить, какой вклад в величину $\sum_i \Delta_f(W_i)$ дают звенья из $\mathcal{E}$. Пусть ε — такое звено. Опять, в тех же самых обозначениях, имеем $\sum_j \alpha^{i_j}_\varepsilon = \alpha_\varepsilon$, поэтому $0 = f(0) = \sum_j f(\alpha^{i_j}_\varepsilon) - f(\alpha_\varepsilon)$. Отсюда вытекает, что вклад звена ε в величину $\sum_i \Delta_f(W_i)$ равен

$$\sum_j |\varepsilon|\, f(\alpha^{i_j}_\varepsilon) = |\varepsilon| \sum_j f(\alpha^{i_j}_\varepsilon) = |\varepsilon|\, f(\alpha_\varepsilon),$$

т.е. он равен вкладу этого же звена в величину $\Delta_f(W)$. Отсюда вытекает, что $\Delta_f(W) = \sum_i \Delta_f(W_i)$. $\square$

Доказательство теоремы 6.13. Так как A и B — равносоставленные многогранники, их можно разрезать на многогранники $A_1, \dots, A_n$ и $B_1, \dots, B_n$ соответственно так, что A_i равен B_i при всех $i = 1, \dots, n$. Продолжим f до функции Дена для всех многогранников A_i (а, значит, и всех B_i). Так как у равных многогранников инварианты Дена равны, имеем $\Delta_f(A_i) = \Delta_f(B_i)$. Кроме того, по предложению 6.20 имеем

$$\Delta_f(A) = \sum_{i=1}^n \Delta_f(A_i) = \sum_{i=1}^n \Delta_f(B_i) = \Delta_f(B).$$

$\square$

6.5 Решение Третьей проблемы Гильберта

Третья проблема Гильберта — это вопрос о существовании тетраэдров с равными основаниями и равными высотами, которые не являются равнодополняемыми (в частности, равносоставленными). Немецкий математик Давид Гильберт (David Hilbert) сформулировал 23 проблемы на 2-ом Международном математическом конгрессе (1900 год, Париж).

Приведем формальное определение.

Определение 6.22. Многогранники A и B называются *равнодополняемыми*, если они имеют одинаковые объемы и существуют равносоставленные многогранники W^A и W^B, которые можно так разрезать на многогранники $W_0^A, W_1^A, \dots, W_n^A$ и $W_0^B, W_1^B, \dots, W_n^B$, что многогранник W_0^A равен A, многогранник W_0^B равен B, а при всех $i = 1, \dots, n$ многогранники W_i^A и W_i^B равны.

Замечание 6.23. Если многогранники A и B равносоставлены, то они и равнодополняемы. Действительно, в качестве W^A и W^B можно взять их самих. Таким образом, равнодополняемость действительно является обобщением равносоставленности.

Следствие 6.24. *У равнодополняемых многогранников все инварианты Дена совпадают.*

Доказательство. В обозначениях определения 6.22, пусть f — произвольная функция Дена для A и B, продолженная до функции Дена для всех W_i^A и W_j^B. Тогда $\Delta_f(A) = \Delta_f(W_0^A)$, $\Delta_f(B) = \Delta_f(W_0^B)$, и $\Delta_f(W_i^A) = \Delta_f(W_i^B)$ при всех $i = 1, \dots, n$. По предложению 6.20, $\Delta_f(W^A) = \sum_{i=0}^n \Delta_f(W_i^A)$ и $\Delta_f(W^B) = \sum_{i=0}^n \Delta_f(W_i^B)$. Так как W^A и W^B равносоставлены, то, по теореме 6.13, имеем $\Delta_f(W^A) = \Delta_f(W^B)$, откуда

$$\Delta_f(A) = \Delta_f(W_0^A) = \Delta_f(W^A) - \sum_{i=1}^n \Delta_f(W_i^A) = \Delta_f(W^B) - \sum_{i=1}^n \Delta_f(W_i^B) = \\ = \Delta_f(W_0^B) = \Delta_f(B).$$

□

Ответ на вопрос Гильберта оказался положительным. Приведем соотвествующий пример. Рассмотрим тетраэдр T_1, основание которого — равнобедренный прямоугольный треугольник, а высота равна катету основания и падает в один из концов гипотенузы основания, см. рис. 6.1, слева.

Многогранник T_1 называется *тетраэдром Хилла* (Micaiah John Muller Hill).

Предложение 6.25. *Тетраэдр Хилла равносоставлен с некоторой призмой.*

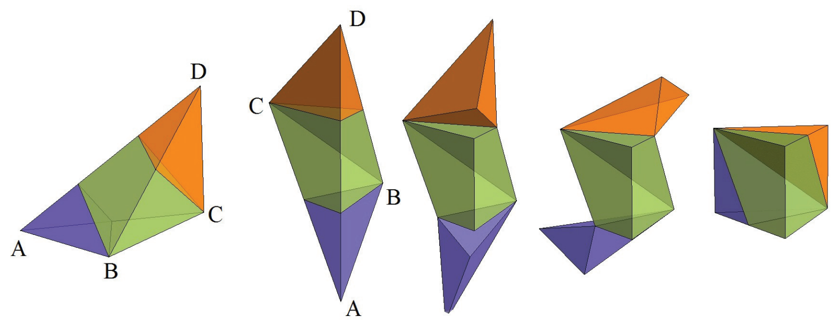

Рис. 6.1: Тетраэдр Хилла равносоставлен с прямоугольной призмой.

Доказательство. Разрезание тетраэдра Хилла на три части, из которых составляется прямоугольника призма, также представлено на рис. 6.1 (отметим, что у Хилла было другое разбиение). □

Следствие 6.26. *Каждый инвариант Дена тетраэдра Хилла равен нулю.*

Доказательство. Из утверждению 6.25 и теоремы 6.13 вытекает, что у тетраэдра Хилла каждый инвариант Дена — такой же, как и у призмы. Следовательно, по предложению 6.15, каждый инвариант Дена тетраэдра Хилла равен нулю. □

Следствие 6.27. *Правильный тетраэдр не является равнодополняемым ни с кубом, ни с тетраэдром Хилла.*

Второй участник примера — это *координатный тетраэдр*, то есть тетраэдр с вершинами $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$ или тетраэдр подобный этому.

Предложение 6.28. *У координатного тетраэдра имеется ненулевой инвариант Дена.*

Доказательство. Обозначим через β величину двугранных углов координатного тетраэдра при ребрах грани, являющейся правильным треугольником. Тогда, как легко видеть, $\cos\beta = 1/\sqrt{3}$. Дословно повторяя рассуждения из доказательства леммы 6.17, можно показать, что при любом натуральном k имеем $\cos(k\beta) = a_k/(\sqrt{3})^k$, где a_k — целое число, не делящееся на 3, откуда тем же способом заключаем, что число $\frac{1}{\pi}\arccos(1/\sqrt{3})$ — иррационально. Отсюда вытекает, что α и π линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Поэтому, положив $f(\beta) = 1$, $f(\pi) = 0$ и продолжив на $L(X)$, где $X = \{\beta, \pi\}$, по линейности, мы получи функцию Дена для координатного тетраэдра. Легко видеть, что соответствующий ей инвариант Дена отличен от нуля. □

Замечание 6.29. Если в качестве основания координатного тетраэдра взять прямоугольный треугольник, то он будет отличаться от тетраэдра Хилла с таким же основанием лишь тем, что высота последнего падает не в вершину прямого угла основания, а в вершину острого. При этом высоты у таких тетраэдров будут равны.

Следствие 6.30 (решение Третьей проблемы Гильберта)**.** *Тетраэдр Хилла и координатный тетраэдр не являются равнодополняемыми.*

Доказательство. Пусть f — функция Дена, построенная в доказательстве предложения 6.28. Тогда ее значение на координатном тетраэдре отлично от нуля. Продолжим f до функции Дена для тетраэдра Хилла. По следствию 6.26, значение f на тетраэдре Хилла равно нулю. Поэтому, в силу следствия 6.24, рассматриваемые тетраэдры не являются равнодополняемыми. □

6.6 Дальнейшее развитие

В 1965 Сидлер (Jean-Pierre Sydler) [7] доказал, что равенство инвариантов Дена достаточно для равносоставленности многогранников в $\mathbb{R}^3$. Тем самым, имеет место следующая теорема.

Теорема 6.31 (Ден–Сидлер)**.** *Для равносоставленности многогранников в $\mathbb{R}^3$ необходимо и достаточно, чтобы совпадали их объемы и все инварианты Дена.*

Замечание 6.32. Теорему Дена–Сидлера на четырехмерный случай обобщили Б. Джессен (B. Jessen) и А. Торуп (A. Thorup), см. [9].

Литература к главе 6

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Bolyai%E2%80%93Gerwien_theorem

[2] Dehn M. *Uber den Rauminhalt*. Göttingen Nachr. Math. Phys., 1900, pp. 345–354; Math. Ann., 1902, v. 55, pp. 465–478.

[3] Болтянский В.Г. *Третья проблема Гильберта*. М.:Наука, 1977.

[4] Болтянский В.Г. Равновеликие и равносоставленные фигуры. Гостехиздат, 1956.

[5] http://ium.mccme.ru/f10/teoriyamery.html

[6] Hadwiger H. Zum Problem der Zerlegungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder. Math. Ann. 1954, 127, 170–174.

[7] Sydler J.-P. Conditions nécessaries et sufficantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions. Comment. math. Helv. 1965, v. 40, pp. 43–80.

[8] http://demonstrations.wolfram.com/DissectionOfHillsTetrahedronOfType1/

[9] Jessen B., Thorup A. *The Algebra of Polytopes in Affine Spaces*. Math. Scand., 1978, v. 43, pp. 211—240.

Упражнения к главе 6.

Упражнение 6.1. Пусть W — многоугольник, разрезанный двумя способами, а именно, на многоугольники $F_1, \ldots, F_n$, а также на многоугольники $G_1, \ldots, G_m$. Докажите следующее утверждение: многоугольник W можно разрезать на многоугольники W_i так, что каждый W_i лежит в некотором F_j и G_k. В частности, каждый F_j и G_k разрезается на некоторые из многоугольников W_i.

Упражнение 6.2. Выведите из упражнения 6.1, что из равносоставленности многоугольников A и B, а также многоугольников B и C, вытекает равносоставленность многоугольников A и C. Покажите, что отношение равносоставленности на плоских многоугольниках является эквивалентностью.

Упражнение 6.3. Докажите, что любой плоский многоугольник можно разрезать на выпуклые многоугольники (а затем на треугольники).

Упражнение 6.4. Докажите, что любой треугольник равносоставлен с некоторым параллелограммом.

Упражнение 6.5. Докажите, что два параллелограмма, у которых соответственно одинаковы основания и проведенные к ним высоты, равносоставлены.

Упражнение 6.6. Из упражнения 6.5 выведите, что любые два прямоугольника равных площадей равносоставлены.

Упражнение 6.7. Докажите, что конечный набор прямоугольников равносоставлен с любым прямоугольником суммарной площади.

Упражнение 6.8. Докажите теорему Бойяи–Валласа–Гервина.

Упражнение 6.9. Выведите из теоремы Бойяи–Валласа–Гервина, что любая прямоугольная призма равносоставлена с прямоугольным параллелепипедом, а последний равносоставлен с кубом.

Определение 6.33. Пусть W — многогранник с множеством ребер E, и M — некоторое множество вещественных чисел, содержащее длины всех ребер из E. Пусть f — произвольная функция Дена для W, и $g\colon M \to \mathbb{R}$ — произвольная аддитивная функция. Тогда *обобщенным инвариантом Дена многогранника* W, соответствующим паре (f, g), назовем число $\sum_{e\in E} g\big(|e|\big) f(\alpha_e)$, где $|e|$ и α_e — длина ребра e и величина двугранного угла при этом ребре соответственно.

Упражнение 6.10. Докажите, что у равносоставленных многогранников обобщенные инварианты Дена равны.

Упражнение 6.11. Докажите, не пользуясь иррациональностью конкретных чисел, что среди правильных пирамид (основание — правильный многоугольник, а высота попадает в центр основания) имеются неравносоставленные с равновеликим кубом.