Глава 2

Элементы топологии

План. Непрерывная функция на прямой, база окрестностей, непрерывное в точке отображение, непрерывное отображение, открытое множество, окрестность точки, замкнутые множества, топология, топологическое пространство, база топологического пространства, внутренние точки и точки прикосновения, индуцированная база окрестностей, индуцированная топология, фактор топология, гомеоморфизм, гомеоморфные топологические пространства, связное пространство, связная компонента, непрерывная кривая, линейно связное топологическое пространство, линейно связная компонента, локально постоянная функция, хаусдорфовость, открытое покрытие топологического пространства, открытое покрытие подмножества топологического пространства, подпокрытие, компактность, замкнутое подмножество, ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$.

В данном разделе мы познакомимся с основами топологии — раздела математики, изучающего понятие непрерывности. Вопросы непрерывности очень важны не только при изучении свойств функций, но и более общих и наглядных объектов, таких как кривые и поверхности. Более детальные курсы топологии можно найти, например, в [1] и [2].

2.1 Топологические пространства и непрерывные отображения

Напомним определение непрерывной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ из курса математического анализа. Функция f называется *непрерывной в точке* $x \in \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ (зависящее от ε) такое, что для любой точки x', для которой $|x - x'| < \delta$, выполнено неравенство $\bigl|f(x) - f(x')\bigr| < \varepsilon$.

Обозначим через $U_\varepsilon(x)$ интервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Множество $U_\varepsilon(x)$ принято называть *ε-окрестностью точки x*. Тогда предыдущее определение можно переписать так: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ (зависящее от ε) такое, $f\bigl(U_\delta(x)\bigr) \subset U_\varepsilon(f(x))$, то есть образ δ-окрестности точки x содержится в ε-окрестности точки $f(x)$.

Часто вместо ε-окрестностей некоторой точки бывает удобно рассматривать произвольные интервалы, содержащие эту точку. Следующее определение эквивалентно предыдущему (проверьте). Функция f называется *непрерывной в точке* $x \in \mathbb{R}$, если

$$\forall (a,b) \ni f(x)\ \exists (c,d) \ni x\ :\ f\big((c,d)\big) \subset (a,b).$$

При доказательстве основных свойств непрерывных функций, например, теорем о непрерывности композиции, суммы и произведения непрерывных функций, используются некоторые свойства ε-окрестностей точек. Что это за свойства? Если бы мы могли их выделить и точно сформулировать, можно было бы рассматривать непрерывные функции не только на $\mathbb{R}$ (и не только на отрезках и интервалах).

Оказывается, эти свойства очень простые. Они отражены в следующем определении.

2.1.1 База окрестностей

Определение 2.1. Пусть X — произвольное множество. Семейство множеств β, состоящее из некоторых подмножеств X, называется *базой окрестностей*, если

(1) каждый элемент $x \in X$ содержится в некотором $U \in \beta$, и

(2) для любых двух пересекающихся U, $V \in \beta$ и любого $x \in U \cap V$ найдется такой $W \in \beta$, что $x \in W \subset U \cap V$.

Элементы множества X, на котором задана некоторая база, принято называть *точками*. Каждый элемент базы β, содержащий точку x, будем называть *β-окрестностью точки x* или ее *базовой окрестностью*.

Пример 2.2. (1) Пусть X — вещественная прямая $\mathbb{R}$. В качестве β рассмотрим семейство всех интервалов (a,b). Тогда каждая точка из $\mathbb{R}$ лежит в некотором интервале, и если $(a,b)\cap(c,d) \neq \emptyset$, то это пересечение представляет собой интервал $\big(\max\{a,c\}, \min\{b,d\}\big)$, так что β — база окрестностей.

(2) Пусть теперь X — евклидова плоскость $\mathbb{R}^2$. Напомним, что расстояние между двумя точками $P = (p_1, p_2)$ и $Q = (q_1, q_2)$, заданными своими координатами, вычисляется по теореме Пифагора:

$$|PQ| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}.$$

Будем называть *открытым кругом* $U_r(P)$ множество

$$U_r(P) = \big\{Q \in X : |PQ| < r\big\}.$$

Отметим, что, в отличии от интервалов, пересечение открытых кругов, вообще говоря, не является открытым кругом. Тем не менее, если $S \in U_a(P)\cap U_b(Q)$, то, положив $c = \min\big\{a - |SP|, b - |SQ|\big\}$, получим $S \in U_c(S) \subset U_a(P) \cap U_b(Q)$. Таким образом, семейство открытых кругов образует базу окрестностей плоскости.

(3) Предыдущий пример естественным образом обобщается на случай, когда X — это n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Здесь расстояние определяется с помощью обобщенной теоремы Пифагора: если $P = (p_1, \ldots, p_n)$ и $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, то

$$|PQ| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i)^2}.$$

Определение открытого круга дословно переносятся на этот случай, только теперь множества $U_r(P)$ называются *открытыми шарами*. Рассмотренное в предыдущем примере свойство пересекающихся открытых шаров также сохраняется. Тем самым, семейство открытых шаров в $\mathbb{R}^n$ образует базу окрестностей.

(4) Пусть X — это отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим семейство подмножеств X, состоящее из всех интервалов вида $(c, d) \subset [a, b]$, а также полуинтервалов вида $[a, d) \subset [a, b]$ и $(c, b] \subset [a, b]$. Ясно, что каждое непустое пересечение интервала с интервалом или полуинтервалом также является интервалом; пересечение двух полуинтервалов одного типа, скажем $[a, d_1)$и $[a, d_2)$, — также является полуинтервалом; пересечение полуинтервалов разных типов — интервал. И, конечно же, каждая точка из $[a, b]$ лежит в некотором интервале или полуинтервале. Таким образом, определенное только что семейство образует базу окрестностей отрезка.

Напоминание 2.3. Пусть X — некоторое множество. Напомним, что функция $\rho\colon X \times X \to X$ называется *метрикой* или, иногда, *функцией расстояния*, если она удовлетворяет следующим свойствам

(неотрицательность и невырожденность) для любых x, $y \in X$ выполнено $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0$, если и только если $x = y$,

(симметричность) для любых x, $y \in X$ выполнено $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(неравенство треугольника) для любых x, y, $z \in X$ выполнено неравенство $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Если на множестве X фиксирована функция расстояния ρ, то пара (X, ρ) называется *метрическим пространством*. Пространство $\mathbb{R}^n$ с евклидовым расстоянием — стандартный пример метрического пространства.

Напоминание 2.4. Функция $h\colon L \to \mathbb{R}$ на вещественном линейном пространстве L называется *нормой*, если она удовлетворяет следующим свойствам

(неотрицательность и невырожденность) $h(x) \geq 0$ для любого $x \in L$, причем $h(x) = 0$, если и только если $x = 0$,

(полуоднородность) для любого $x \in L$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $h(\lambda\, x) = |\lambda| h(x)$,

(неравенство треугольника) для любых $x, y \in L$ выполнено неравенство $h(x+y) \le h(x) + h(y)$.

Линейное пространство, на котором задана некоторая норма, называют *нормированным пространством.* Обычно норму $h(x)$ вектора x обозначают через $\|x\|$ или просто $|x|$. Если $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, то функция $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ является нормой (Проверьте!), которая называется *евклидовой нормой.*

Любое нормированное пространство $(L, \|\cdot\|)$ можно превратить в метрическое, взяв в качестве метрики функцию $d(x,y) = \|x-y\|$ (Проверьте аксиомы метрики!).

Пример 2.5. Пусть (X, ρ) —метрическое пространство. Для каждой точки $x \in X$ и каждого положительного числа $r > 0$ множество $U_r(x) = \big\{y \in X \mid \rho(x,y) < r\big\}$ назовем *открытым шаром радиуса* r *с центром в точке* x. Семейство $\beta_\rho = \big\{U_r(x) \mid x \in X, r > 0\big\}$ открытых шаров в метрическом пространстве образует базу, которая называется *метрической.*

Задача 2.6. Пусть β — некоторая база окрестностей на множестве X. Пусть конечный набор $V_1, \ldots, V_k$ элементов базы имеет непустое пересечение. Тогда для каждой точки $x \in \cap_{i=1}^k V_i$ существует элемент базы V такой, что $x \in V \subset \cap_{i=1}^k V_i$.

Введенное понятие базы дает возможность в самом общем виде определить понятия непрерывного отображения и открытого множества.

2.1.2 Непрерывные отображения

Дадим определение непрерывного отображения в терминах баз.

Определение 2.7. Пусть β_X и β_Y — некоторые базы на множествах X и Y соответственно. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x \in X$, если выполняется следующее условие: для любой β_Y-окрестности V точки $f(x)$, существует β_X-окрестность U точки x такая, что $f(U) \subset V$. Если отображение f непрерывно во всех точках x, то его называют *непрерывным отображением*.

Замечание 2.8. Свойство отображения $f\colon X \to Y$ быть непрерывным зависит от того, какие базы рассматриваются. Если нужно подчеркнуть, какие именно рассматриваются базы на X и Y, то пишут $f\colon (X, \beta_X) \to (Y, \beta_Y)$ или говорят, что отображение непрерывно относительно выбранных баз.

Замечание 2.9. Базы окрестностей, приведенные в примере 2.2, используются для описания стандартных непрерывных отображений между евклидовыми пространствами из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$, а также для отображений из отрезка в отрезок или пространство $\mathbb{R}^n$.

Замечание 2.10. Рассмотрим отображение $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Это отображение сопоставляет каждому $t \in [a,b]$ точку $\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) \in \mathbb{R}^n$, тем самым задавая функции $x_i(t)$, которые будем называть *координатными функциями отображения* γ. Непосредственно проверяется следующее несложное, но полезное предложение.

Предложение 2.11. *Отображение* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все задаваемые им координатные функции.*

Замечание 2.12. Выбрав подходящим образом базы, можно построить довольно неожиданные примеры непрерывных (или разрывных — не являющихся непрерывными) функций.

Пример 2.13. Рассмотрим множество $\mathbb{R}$ и семейство его подмножеств β, состоящее из всевозможных лучей $(a, +\infty)$. Легко проверить, что β — база. Тогда функция $f(x) = 2x$ непрерывна, но функция $g(x) = -x$ непрерывной не является (проверьте), если рассматривать функции f и g как отображения из $(\mathbb{R}, \beta)$ в $(\mathbb{R}, \beta)$.

2.1.3 Открытые подмножества, замкнутые подмножества и непрерывность

Определение 2.14. Пусть дано множество X с базой β. Будем называть подмножество $A \subset X$ *открытым*, если для любой точки $x \in A$ найдется такое $U \in \beta$, что $x \in U \subset A$ (т.е., каждая точка входит в A вместе с некоторой своей базовой окрестностью). Пустое множество будем считать открытым по определению. Для каждой точки $x \in X$ каждое открытое множество A, содержащее x, будем называть *открытой окрестностью точки* x или просто *окрестностью точки* x.

Как нетрудно заметить, это определение аналогично определению открытого подмножества прямой.

Любой элемент любой базы на X является открытым подмножеством в X (в смысле этой базы).

Утверждение 2.15. *Непустое подмножество* A *множества* X *с базой* β *является открытым, если и только если* $A = \cup_\alpha U_\alpha$ *для некоторого семейства* $\{U_\alpha\} \subset \beta$.

Доказательство. Действительно, если A открыто, то, по определению, для каждой точки $x \in A$ существует $U = U_x \in \beta$ такое, что $x \in U_x \subset A$. Тогда $\cup_{x \in A} U_x = A$, что и требовалось. Обратно, если $A = \cup_\alpha U_\alpha$, где $\{U_\alpha\} \subset \beta$, то для каждого $x \in A$ найдется U_α такое, что $x \in U_\alpha \subset A$, то есть A — открыто. □

Определение 2.16. Пусть дано множество X с базой β. Будем называть подмножество $C \subset X$ *замкнутым*, если его дополнение $X \setminus C$ открыто.

Пример 2.17. Отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}$ — замкнутое подмножество прямой. Действительно, положим $U = \mathbb{R} \setminus [a,b]$. Выберем произвольную точку $x \in U$ и пусть $\varepsilon = \min\bigl\{|x-a|, |x-b|\bigr\}$, тогда интервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ не пересекает $[a,b]$ и, значит, лежит в U, так что U — открыто.

Пример 2.18. Полуинтервал $[a,b)$ не является замкнутым. Действительно, точка b лежит в дополнении $\mathbb{R} \setminus [a,b)$, но для каждого $\varepsilon > 0$ интервал $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ пересекает $[a,b)$.

Заметим, что пустое множество является одновременно открытым и замкнутым. Аналогично, все множество X является одновременно открытым и замкнутым.

Упражнение 2.1. Приведите пример множества X с базой β, у которого есть несобственные (то есть, не совпадающие с X и с $\emptyset$) подмножества, являющиеся открытыми и замкнутыми одновременно.

Еще одно эквивалентное определение непрерывности в терминах открытых множеств выглядит так.

Утверждение 2.19. *Пусть на множествах X и Y фиксированы некоторые базы β_X и β_Y соответсвенно. Отображение $f\colon X \to Y$ является непрерывным в точке $x \in X$ относительно этих баз, если и только если для любой открытой окрестности V точки $f(x)$ найдется открытая окрестность U точки x такая, что $f(U) \subset V$.*

Доказательство. Действительно, пусть отображение f непрерывно в точке x, и V — произвольное открытое множество, содержащее $f(x)$. Тогда существует β_Y-окрестность $\widetilde{V}$ точки $f(x)$ такая, что $\widetilde{V} \subset V$, и в силу непрерывности f в x найдется β_X-окрестность $\widetilde{U}$ точки x такая, что $f(\widetilde{U}) \subset \widetilde{V} \subset V$. Но $\widetilde{U}$ — открытое подмножество в X, то есть для открытой окрестности V точки $f(x)$ нашлась открытая окрестность $U = \widetilde{U}$ точки x такая, что $f(U) \subset V$.

Обратно, выберем произвольную β_Y окрестность $\widetilde{V}$ точки $f(x)$. Тогда $\widetilde{V}$ — открытая окрестность точки $f(x)$, поэтому по предположению существует открытая окрестность U точки x такая, что $f(U) \subset \widetilde{V}$. Но по определению открытого подмножества существует β_X-окрестность $\widetilde{U}$ точки x такая, что $\widetilde{U} \subset U$. Тогда $f(\widetilde{U}) \subset f(U) \subset \widetilde{V}$, то есть f непрерывна в x, что и требовалось. □

В терминах открытых или замкнутых множеств непрерывное отображение можно охарактеризовать следующим образом.

Теорема 2.20 (Критерий непрерывности)**.** *Пусть на множествах X и Y заданы базы β_X и β_Y соответственно. Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно, если и только если для любого открытого подмножества A в Y его полный прообраз $f^{-1}(A)$ при отображении f открыт в X.*

Доказательство. Пусть отображение f непрерывно, A — произвольное открытое подмножество в Y. Рассмотрим произвольную точку $x \in f^{-1}(A)$, ее образ $f(x)$ принадлежит A, и пусть V — произвольная β_Y-окрестность точки $f(x)$ такая, что $V \subset A$. Так как f непрерывно в x, то существует β_X-окрестность U точки x такая, что $f(U) \subset V \subset A$. Но последнее означает, что $U \subset f^{-1}(A)$, поэтому каждая точка $x \in f^{-1}(A)$ входит в $f^{-1}(A)$ с некоторой β_X-окрестностью, то есть $f^{-1}(A)$ открыто по определению.

Обратно, для произвольной точки x рассмотрим ее образ $f(x)$ и произвольную β_Y-окрестность V точки $f(x)$. Элемент базы V открыт, поэтому, по предположению, $f^{-1}(V)$ — открытое подмножество в X, содержащее x. Поэтому существует β_X-окрестность U точки x такая, что $U \subset f^{-1}(V)$. Но тогда $f(U) \subset V$, то есть f непрерывно в точке x, что и требовалось. □

Следующие общие свойства непрерывных отображений легко следуют из теоремы 2.20.

Предложение 2.21. (1) *Тождественное отображение топологического пространства в себя непрерывно.*

(2) *Пусть X, Y и Z — топологические пространства, а $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — непрерывные отображения. Тогда отображение $g \circ f\colon X \to Z$ непрерывно.*

(3) *Если $f\colon X \to \mathbb{R}$ и $g\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, и λ — произвольное вещественное число, то следующие функции также непрерывны: $\lambda f\colon X \to \mathbb{R}$, $f+g\colon X \to \mathbb{R}$, $f\,g\colon X \to \mathbb{R}$, и если $g(x) \neq 0$ при всех $x \in X$, то и $f/g\colon X \to \mathbb{R}$.*

Доказательство. Первое и второе утверждение легко следуют из теоремы 2.20. Третье утверждение следует из второго и непрерывности арифметических операций, доказанной в математическом анализе. □

Следствие 2.22. *Пусть p — произвольная точка в $\mathbb{R}^n$. Для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ положим $\rho_p(x) = |px|$. Тогда ρ_p — непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Действительно, если $p = (p_1, \dots, p_n)$ и $x = (x_1, \dots, x_n)$, то координаты точки x —непрерывные функции на $\mathbb{R}^n$, и $\rho_p(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - p_i)^2}$ является композицией непрерывных функций, откуда и следует непрерывность ρ_p. □

Напоминание 2.23. Напомним несколько свойств полного прообраза. Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольное отображение множеств, и $y \in Y$ — произвольный элемент множества Y. Подмножество $f^{-1}(y) = \bigl\{x \in X \mid f(x) = y\bigr\} \subset X$ называется полным прообразом элемента y. Аналогично, для произвольного $A \subset Y$ множество $f^{-1}(A) = \bigl\{x \in X \mid f(x) \in A\bigr\}$ называется полным прообразом подмножества A. Пусть $A \subset Y$ — произвольное подмножество в Y и $\{U_\alpha\}$ — произвольное семейство подмножеств множества Y. Тогда

- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(Y) = X$;
- $f^{-1}\bigl(\cup_\alpha U_\alpha\bigr) = \cup_\alpha f^{-1}(U_\alpha)$;

- $f^{-1}\big(\cap_\alpha U_\alpha\big) = \cap_\alpha f^{-1}(U_\alpha)$;
- $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

Из свойств прообраза получаем еще один критерий непрерывности.

Следствие 2.24. *Пусть на множествах X и Y заданы базы β_X и β_Y соответственно. Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно, если и только если для любого замкнутого подмножества C в Y его полный прообраз $f^{-1}(C)$ при отображении f замкнут в X.*

2.1.4 Топология и топологические пространства

Итак, открытые подмножества полностью определяют непрерывные отображения. Именно в их терминах естественным образом определяются топологические пространства — наиболее общие объекты, для которых определяются непрерывные отображения.

Определение 2.25. Пусть на множестве X задана база β. Тогда семейство τ_β всех открытых множеств, порожденных этой базой, называется *топологией с базой β* или *топологией, порожденной базой β*. Множество X, на котором задана некоторая топология τ, называется *топологическим пространством*. При этом β называется также *базой топологического пространства X* или *базой топологии τ_β*.

Утверждение 2.26. *Каждая топология τ на множестве X удовлетворяет следующим свойствам.*

(1) *Топология содержит $\emptyset$ и X.*

(2) *Объединение произвольного семейства элементов топологии τ принадлежит τ.*

(3) *Пересечение любого конечного семейства элементов топологии τ принадлежит τ.*

Доказательство. Пустое множество является открытым по определению, каждая точка $x \in X$ содержится в некотором элементе базы, который, очевидно, содержится в X, поэтому X тоже открыто, что доказывает первое свойство.

Пусть $\{U_\alpha\}$ — произвольное семейство открытых множеств, положим $U = \cup_\alpha U_\alpha$, и пусть $x \in U$ — произвольная точка. Тогда $x \in U_\alpha$ для некоторого α; множество U_α открыто, поэтому существует элемент базы V такой, что $x \in V \subset U_\alpha$, откуда $x \in V \subset U$, и, значит, U — открыто.

Наконец, пусть $U_1, \dots, U_k$, $U = \cap_{i=1}^k U_i$, и $x \in U$ — произвольная точка из пересечения. Так как каждое U_i — открыто, то для каждого i существует элемент базы V_i такой, что $x \in V_i \subset U_i$. Поэтому $x \in \cap_i V_i$, и существует элемент базы V, $x \in V \subset \cap_i V_i \subset U$, см. задачу 2.6. Поэтому U — открыто, что и требовалось. $\square$

Свойства из утверждения 2.26 называются *аксиомами топологии* или *аксиомами открытых множеств.*

Замечание 2.27. Отметим, что можно определять топологическое пространство немного по-другому, а именно, начать с определения топологии как семейства подмножеств, удовлетворяющих аксиомам топологии, см. утверждение 2.26, то есть сразу описать все множества, которые будут считаться открытыми. При таком подходе база — это некоторая часть топологии (вообще говоря, она определена неоднозначно), которая порождает всю топологию с помощью операции объединения (см. утверждение 2.15). При таком подходе база — один из удобных способов задавать топологию.

Пример 2.28. Пусть X произвольное непустое множество. Возьмем в качестве топологии на нем семейство всех подмножеств множества X (проверьте, что это семейство удовлетворяет аксиомам топологии). Эта топология называется *дискретной.*

Пример 2.29. Пусть X произвольное непустое множество. Возьмем в качестве топологии на нем семейство $\{\emptyset, X\}$ (проверьте, что это семейство удовлетворяет аксиомам топологии). Эта топология называется *антидискретной.*

Упражнение 2.2. Опишите все замкнутые подмножества множества X с (анти-)дискретной топологией. Как устроены непрерывные отображения из пространства с дискретной топологией в произвольное топологическое пространство? Как устроены непрерывные отображения из произвольного топологического пространства в пространство с антидискретной топологией?

Замечание 2.30. Любая топология, определенная с помощью аксиом топологии, обладает некоторой базой. Например, в качестве базы можно взять всю топологию.

Замечание 2.31. Задавать топологию с помощью базы удобно, так как при решении конкретных задач, например при доказательстве непрерывности, достаточно использовать только базу, а не всю топологию.

Из теоремы 2.20 вытекает важный результат.

Следствие 2.32. *Пусть β_X и β'_X — базы окрестностей на множестве X, порождающие одну и ту же топологию. Пусть β_Y и β'_Y — базы окрестностей на множестве Y, порождающие одну и ту же топологию. Тогда отображение $f\colon (X, \beta_X) \to (Y, \beta_Y)$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно $f\colon (X, \beta'_X) \to (Y, \beta'_Y)$.*

В дальнейшем мы будем работать со стандартными базами в $\mathbb{R}^n$, но определения будем стараться давать для общих топологических пространств.

Следующее утверждение является простым следствием утверждения 2.26 и простейших свойств теоретико-множественных операций.

Утверждение 2.33. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Тогда его замкнутые подмножества обладают следующими свойствами.*

(1) *Множества $\emptyset$ и X являются замкнутыми.*

(2) *Пересечение произвольного семейства замкнутых подмножеств пространства X замкнуто в X.*

(3) *Объединение любого конечного семейства замкнутых подмножеств пространства X замкнуто в X.*

Замечание 2.34. Свойства замкнутых множеств из утверждения 2.33 иногда называют *аксиомами замкнутых множеств*. Если фиксировать семейство подмножеств некоторого множества X, удовлетворяющее этим свойствам, и объявить их замкнутыми подмножествами в X, а дополнения до них объявить открытыми, то так определенная система открытых подмножеств будет удовлетворять аксиомам открытых множеств и, следовательно, задаст некоторую топологию на X.

2.1.5 Внутренние точки и точки прикосновения

Определение 2.35. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Точка a множества $A \subset X$ называется *внутренней точкой для* A, если в A содержится некоторая окрестность U точки a. Множество всех внутренних точек множества A называется *внутренностью множества* A и обозначается через $\operatorname{Int} A$.

Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения множества* $A \subset X$, если любая окрестность точки x пересекается с A. *Замыканием* $\operatorname{Cl} A$ множества A называется множество всех его точек прикосновения.

Заметим, что $\operatorname{Int} A \subset A \subset \operatorname{Cl} A$.

Утверждение 2.36. *Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Множество $A \subset X$ является открытым, если и только если* $\operatorname{Int} A = A$. *Множество $A \subset X$ является замкнутым, если и только если* $\operatorname{Cl} A = A$.

Доказательство. Каждое открытое множество само является окрестностью каждой своей точки, поэтому совпадает со своей внутренностью. Обратно, если каждая точка множества A является внутренней, то для каждой точки $a \in A$ существует открытое множество $U(a) \subset A$, содержащее a. Возьмем объединение $U = \cup_{a \in A} U(a)$. По определению, U — открыто. Кроме того, так как каждое $U(a) \subset A$, то само множество U содержится в A. В то же время $A \subset U$, так как каждая точка $a \in U(a)$. Поэтому $U = A$ и, в частности, A — открыто.

Далее, множество A — замкнуто, если и только если $X \setminus A$ открыто. Последнее, как мы только что показали, равносильно тому, что каждая точка из $X \setminus A$ обладает окрестностью, не пересекающейся с A, что, в свою очередь, равносильно включению $\operatorname{Cl} A \subset A$, т.е. $\operatorname{Cl} A = A$. Доказательство закончено. $\square$

Следствие 2.37. *Пусть A — произвольное подмножество топологического пространства (X, ρ). Тогда внутренность* $\operatorname{Int} A$ *множества A открыта, а замыкание* $\operatorname{Cl} A$ *множества A — замкнуто.*

Определение 2.38. Топологической *границей* множества $A \subset X$ называется множество $\partial A = \operatorname{Cl} A \setminus \operatorname{Int} A$.

Заметим, что граница ∂A произвольного множества A замкнута как пересечение двух замкнутых множеств $\operatorname{Cl} A$ и $X \setminus \operatorname{Int} A$.

В следующих параграфах мы обсудим понятие связности, линейной связности, а также еще одну топологическую характеристику — компактность.

2.1.6 Конструкции

В данном разделе мы опишем несколько стандартных конструкций, позволяющих построить новые топологии из имеющихся.

Метрическая топология

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Как мы уже видели, см. пример 2.5, семейство всех открытых шаров образует базу окрестностей на множестве X. Соответствующая топология τ_ρ называется *метрической топологией*, порожденной метрикой ρ. Далее, топология τ на множестве X называется *метрической*, если существует метрика ρ на X такая, что $\tau_\rho = \tau$.

Примером метрической топологии является стандартная топология на $\mathbb{R}^n$.

Упражнение 2.3. Является ли дискретная топология на множестве X метрической?

Упражнение 2.4. Любая ли топология является метрической?

Дизъюнктное объединение

Пусть X и Y — топологические пространства с базами β_X и β_Y, причем множества X и Y не пересекаются. Тогда на множестве $X \cup Y$ определена топология с базой $\beta_X \cup \beta_Y$. Другими словами, множество $U \subset X \cup Y$ открыто в этой топологии, если и только если $U \cap X$ и $U \cap Y$ открыты в X и Y соответственно, или, что все равно, $U = V_X \cup V_Y$ — объединение открытых множеств $V_X \subset X$ и $V_Y \subset Y$.

Индуцированная топология

Пусть X — произвольное топологическое пространство с базой β топологии τ. Опишем естественный способ превратить произвольное подмножество $Y \subset X$ в топологическое пространство. Для этого заметим, что семейство $\beta_Y = \{Y \cap B : B \in \beta\}$ представляет собой базу окрестностей на множестве Y (проверьте это) и, значит, порождает на Y некоторую топологию τ_Y.

Определение 2.39. Пусть $Y \subset X$ — произвольное подмножество топологического пространства X с базой β топологии τ. Тогда семейство $\beta_Y = \{Y \cap B : B \in \beta\}$ называется базой окрестностей, *индуцированной из* X. Порожденная этой базой топология τ_Y на Y также называется *индуцированной из* X.

Замечание 2.40. Индуцированная топология τ_Y может быть получена непосредственно из топологии τ, а именно, $\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}$ (проверьте).

Пример 2.41. Будем рассматривать плоскость как модель листа бумаги, тогда каждый рисунок можно рассматривать как подмножество в $\mathbb{R}^2$. В частности, так можно представлять себе буквы. Описанная выше конструкция индуцированной топологии превращает все такие рисунки в топологические пространства. Также получаются топологические пространства, соответствующие геометрическим фигурам, например ломаной, треугольнику, окружности, кругу и т.д.

Пример 2.42. Рассмотрим, как выглядит база окрестностей β отрезка $[a, b]$, индуцированная из стандартной базы окрестностей прямой $\mathbb{R}$. По определению, элементы из β получаются пересечениями интервалов прямой $\mathbb{R}$ с отрезком $[a, b]$. Таким образом, β состоит из всех множеств, описанных в примере 2.2, а также из самого отрезка $[a, b]$, поэтому эта база окрестностей и база окрестностей из примера 2.2 порождают одинаковые топологии.

Пример 2.43. Пусть X — окружность $x^2 + y^2 = 1$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y. Тогда индуцированную базу окрестностей будут составлять всевозможные пересечения окружности с открытыми кругами, т.е. открытые дуги окружности, и сама окружность.

Фактор топология

Опишем еще одну важную конструкцию, позволяющую строить новые топологические пространства (см. необходимые понятия в напоминании 1.19).

Пусть (X, τ) — топологическое пространство с топологией τ, и предположим, что на множестве X задано некоторое отношение эквивалентности. Рассмотрим следующее семейство подмножеств фактор множества X/R:

$$\tau_R = \big\{U \subset X/R \mid \pi^{-1}(U) \in \tau\big\},$$

где $\pi\colon X \to X/R$ — каноническая проекция.

Следующее утверждение — простое упражнение на свойства полного прообраза.

Лемма 2.44. *Семейство τ_R удовлетворяет аксиомам топологии.*

Доказательство. Действительно, $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$ и $\pi^{-1}(X/R) = X \in \tau$, поэтому выполнена первая аксиома топологии. Далее, пусть $\{U_\alpha\} \subset \tau_R$ произвольное семейство элементов τ_R. Тогда $\pi^{-1}(U_\alpha) \in \tau$ для каждого α.

С другой стороны, по упоминавшимся уже свойствам полного прообраза, $\pi^{-1}\big(\cup_\alpha U_\alpha\big) = \cup_\alpha \pi^{-1}(U_\alpha) \in \tau$. Наконец, пусть $\{U_i\} \subset \tau_R$ произвольное конечное семейство элементов τ_R. Тогда $\pi^{-1}(U_i) \in \tau$ для каждого i, и $\pi^{-1}\big(\cap_i U_i\big) = \cap_i \pi^{-1}(U_i) \in \tau$. $\square$

Топология τ_R называется *фактор-топологией*, а топологическое пространство $(X/R, \tau_R)$ — *фактор-пространством*.

Пример 2.45 (Склеивание пары точек)**.** Пусть X — топологическое пространство, x, $y \in X$ — пара его различных точек. Определим отношение эквивалентности R на X, положив $a \sim b$, если и только если $a = b$, или $a = x$ и $b = y$, или $b = x$ и $a = y$. Тогда про пространство X/R говорят, что оно получено из X *склейкой точек x и y*.

Пример 2.46 (Букет)**.** Пусть X и Y — топологические пространства, $x \in X$, $y \in Y$ — фиксированные точки в них, и $X \sqcup Y$ — дизъюнктное объединение. Тогда склейка $X \sqcup Y$ по точкам x и y называется *букетом* пространств X и Y (с отмеченными точками x и y).

Пример 2.47 (Склеивание концов отрезка)**.** Пусть $X = [a, b]$. Рассмотрим пространство Y, полученное из X склейкой точек a и b, см. пример 2.45. Точки этого пространства — это одноэлементные классы эквивалентности точек интервала (a, b), которые естественно отождествлять с самими точками интервала, и еще один класс эквивалентности $[a] = [b] = \{a, b\}$, состоящий из двух склеенных точек. В качестве окрестности точки $x \in (a, b) \subset Y$ можно взять любой интервал вида $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_2) \subset (a, b)$, а в качестве окрестности точки $[a]$ можно взять образ объединения $[a, a + \varepsilon_1) \cup (b - \varepsilon_2, b]$ двух открытых в $[a, b]$ полуинтервалов при канонической проекции $\pi\colon X \to Y$. При этой проекции точки a, $b \in X$ переходят в один и тот же класс $[a] \in Y$ («точки a и b склеиваются»).

Пример 2.48 (Факторизация по подмножеству)**.** Более общо, пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$ — его непустое подмножество. Определим отношение эквивалентности R_A на X, положив $a \sim b$, если и только если $a = b$, или a, $b \in A$. Тогда про пространство X/R_A говорят, что оно получено из X *факторизацией по множеству* A. Будем обозначать его через X/A. Если $A = \{x, y\}$, то получаем пространство со склеенными точками x и y, см. пример 2.45.

Пример 2.49 (Топологический граф)**.** Пусть $G = (V, E, \partial)$ — некоторый граф. Используем операцию склеивания точек для построения по графу G топологического пространства X_G, которое будем называть *топологическим графом*, соответствующим G. Каждому ребру $e \in E$ графа G поставим в соответствие отрезок $[a_e, b_e]$, будем считать, что отрезки попарно не пересекаются, тогда их объединение $\sqcup_{e\in E}[a_e, b_e]$ представляет собой топологическое пространство. Добавим к полученному пространству множество вершин графа, каждая из которых рассматривается как одноточечное пространство: $Y = V \cup \big(\sqcup_{e\in E}[a_e, b_e]\big)$. Склеим теперь некоторые точки из Y

так. Для каждого $e \in E$, если $\partial^{-1}(e)$ состоит из одной вершины, то склеим концы отрезка $[a_e, b_e]$ с этой вершиной, а если $\partial^{-1}(e)$ состоит из двух вершин, то склеим один конец отрезка $[a_e, b_e]$ с одной из них, а второй — со второй.

2.1.7 Гомеоморфизм

Какие топологические пространства следует считать «одинаковыми»? Например, два линейных пространства изоморфны, если между существует линейная биекция. В случае топологических пространств ключевым свойством является непрерывность.

Определение 2.50. Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств называется *гомеоморфизмом*, если f взаимно однозначно, и оба отображения f и f^{-1} непрерывны. Топологические пространства X и Y называются *гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм $f\colon X \to Y$.

Замечание 2.51. Из теоремы 2.20 вытекает, что если $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм, то множество $U \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда открыто множество $f(U) \subset Y$. Поэтому гомеоморфизм устанавливает биекцию между топологиями.

Замечание 2.52. На гомеоморфизм f можно смотреть как на “переименование точек” в пространстве Y: если $f(x) = y$, то x можно воспринимать как новое имя точки y. При таком взгляде становится очевидно, что все топологические свойства гомеоморфных топологических пространств одинаковы.

Топологические пространства принято рассматривать с точностью до гомеоморфизма.

Замечание 2.53. Из предложения 2.21 вытекает, что

- каждое пространство гомеоморфно само себе,
- X гомеоморфно Y, если и только если Y гомеоморфно X,
- если X гомеоморфно Y, а Y гомеоморфно Z, то и X гомеоморфно Z.

Таким образом, отношение гомеоморфности — это отношение эквивалентности (рефлексивно, симметрично, транзитивно).

Обычно гомеоморфность двух пространств проще всего устанавливается явным предъявлением подходящего гомеоморфизма.

Пример 2.54. Покажем, что прямая $\mathbb{R}$ и интервал (a, b) гомеоморфны. Действительно, в частном случае, когда $(a, b) = (-\pi/2, \pi/2)$, гомеоморфизм устанавливается функцией $y = \operatorname{arctg} x$, так как она и обратная к ней, равная ограничению функции $x = \operatorname{tg} y$ на $(-\pi/2, \pi/2)$, являются непрерывными функциями.

В общем случае, интервал (a, b) сначала переводится гомеоморфно на интервал $(-\pi/2, \pi/2)$ с помощью отображения вида $y = kx + c$, где k и c — некоторые вещественные числа (найдите явные выражения для k и c); затем можно воспользоваться замечанием 2.53.

Пример 2.55. Рассмотрим на плоскости с координатами x, y окружность $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, и пусть $X = S^1 \cap \{(x, y) : y \geq 0\}$ — замкнутая полуокружность. Тогда X гомеоморфно отрезку $[-1, 1]$. Для проверки достаточно представить отрезок $[-1, 1]$ как подмножество оси x, рассмотреть взаимно однозначное отображение $f\colon X \to [-1, 1]$, положив $f\colon (x, y) \mapsto x$, и показать, что f — гомеоморфизм (сделайте это).

Пример 2.56. Если в примере 2.55 рассмотреть открытую полуокружность $X = S^1 \cap \{(x, y) : y > 0\}$, то аналогичное построение покажет, что X гомеоморфно интервалу $(-1, 1)$, а, значит, в силу примера 2.54 и замечания 2.53, открытая полуокружность гомеоморфна прямой.

Пример 2.57. На плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y рассмотрим кольцо $X = \left\{(x, y) : a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq b\right\}$, где $0 < a < b < \infty$. Также в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами (x, y, z) рассмотрим цилиндр $Y = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1,\ a \leq z \leq b\}$. Тогда X и Y гомеоморфны. Для доказательства достаточно показать, что отображение $f\colon X \to Y$, заданное так:

$$f\colon (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

является гомеоморфизмом (сделайте это).

Пример 2.58. Вырежем из бумаги прямоугольную ленту и склеим две противоположных стороны, предварительно перекрутив ленту на 360°. Тогда полученное топологическое пространство будет гомеоморфно обычному цилиндру (попробуйте это показать).

Проверка того, что данное отображение не является гомеоморфизмом, тоже обычно несложно. Следующий пример демонстрирует, что для гомеоморфности отображения может оказаться недостаточно его взаимной однозначности и непрерывности.

Пример 2.59. Отображение f из полуинтервала $[0, 2\pi)$ в окружность $\{x^2 + y^2 = 1\}$, заданное формулой $h : t \mapsto (\cos t, \sin t)$, взаимно однозначно и непрерывно (проверьте!), но обратное к нему непрерывным не является, поэтому отображение f — не гомеоморфизм.

Пример 2.60. Рассмотрим пространство $X = [a, b]/\{a, b\}$, полученное из отрезка $[a, b]$ склейкой его концов a и b, см. пример 2.47. Тогда X гомеоморфно окружности (проверьте!).

Пример 2.61. Пусть $X = D^n$ — замкнутый n-мерный диск, и $A \subset X$ — граничная сфера. Рассмотрим пространство $Y = X/A$, полученное из D^n факторизацией по граничной сфере, см. пример 2.48. Тогда Y гомеоморфно n-мерной сфере (проверьте!).

А вот доказать, что гомеоморфизма не существует вообще — это довольно непростая задача. По большому счету, единственный способ состоит в том, чтобы сравнивать какие-то свойства или характеристики рассматриваемых пространств, которые у гомеоморфных пространств должны быть одинаковыми. Такие свойства или характеристики называются *топологическими инвариантами*. Если какая-то из таких характеристик у двух данных пространств различается, то пространства не гомеоморфны. Если же эти характеристики совпадают, то ничего определенного сказать нельзя.

Пример 2.62. Приведем идею доказательства того, что буквы Т и Г не гомеоморфны (детали станут понятны позже, после того, как мы обсудим понятие линейной связности). Действительно, если бы существовал гомеоморфизм $f\colon \mathrm{T} \to \Gamma$, то для любой точки $x \in \mathrm{T}$ ограничение f на $\mathrm{T} \setminus \{x\}$ было бы гомеоморфизмом с $\Gamma \setminus \big\{f(x)\big\}$. Однако если из Т выкинуть точку крепления горизонтальной перекладины, то Т распадется на три куска. Буква Г, после выкидывания любой точки, распадается не более чем на два куска. "Количество кусков", из которых состоит топологическое пространство, является топологическим инвариантом. Тем самым, буквы Т и Г не гомеоморфны.

2.2 Связность и линейная связность

Определение 2.63. Топологическое пространство X называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых подмножеств A_1 и A_2, каждое из которых является открытым в X. Если такое представление возможно, то пространство X называется *несвязным*.

Замечание 2.64. Если $X = A_1 \cup A_2$, где A_i — открытые непустые подмножества X, и $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то каждое A_i является дополнением открытого множества A_j, $j \neq i$, и поэтому замкнуто в X. Такие одновременно открытые и замкнутые подмножества топологического пространства иногда называют *открыто-замкнутыми*.

Определение 2.65. Подмножество A топологического пространства X называется *связным*, если связным является топологическое пространство A с топологией, индуцированной из X.

Утверждение 2.66. *Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ — связен.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть $[a, b] = A \cup B$, где множества A и B открыты, непусты и не пересекаются. Предположим для определенности, что $a \in A$. Рассмотрим множество всех таких ε, что полуинтервал $[a, a + \varepsilon)$ содержится в A, и пусть ε_0 — точная верхняя грань этого множества. Тогда, так как A — открыто, $\varepsilon_0 > 0$. Поскольку множество A замкнуто, точка $a + \varepsilon_0$ принадлежит A. Но тогда, если только $a + \varepsilon_0 \neq b$, существует открытый интервал $(a+\varepsilon_0-\delta, a+\varepsilon_0+\delta)$, целиком лежащий в A, и поэтому полуинтервал $[a, a + (\varepsilon_0 + \delta))$ содержится в A, что противоречит выбору ε_0. Поэтому $a + \varepsilon_0 = b$. Но тогда $A = [a, b]$ и множество B пусто. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Упражнение 2.5. Показать, что интервал (a, b) связен.

Упражнение 2.6. Пусть $X \cup Y$ — несвязная сумма произвольных топологических пространств. Показать, что пространство $X \cup Y$ несвязно.

Упражнение 2.7. Показать, что букет (см. пример 2.46) связных топологических пространств по любой паре точек является связным.

Приведем несколько утверждений, позволяющих проверять связность топологического пространства.

Определение 2.67. Максимальное по включению связное подпространство пространства X называется его *связной компонентой* или *компонентой связности.*

Замечание 2.68. Максимальность означает, что если связная компонента C пространства X содержится в связном подмножестве $Y \subset X$, то $Y = C$.

Утверждение 2.69. *Связные компоненты пространства X попарно не пересекаются и являются замкнутыми подмножествами пространства X.*

Доказательство. Пусть X_1 и X_2 — разные связные компоненты пространства X. Рассмотрим их объединение $Y = X_1 \cup X_2$. Оно не может быть связным (иначе получаем противоречие с максимальностью). Тогда $Y = A \cup B$, где A и B — непустые непересекающиеся открытые подмножества. Но $X_i \cap A$ и $X_i \cap B$ открыты в X_i, поэтому не могут быть одновременно не пусты (иначе X_i будет не связным). Следовательно каждая компонента X_i содержится или в A, или B. При этом, если $X_1 \subset A$, то $X_2 \subset B$ так как иначе B пусто. Поэтому X_1 и X_2 не пересекаются.

Далее, пусть X_1 — не замкнутая связная компонента, и $x \in X$ — ее точка прикосновения, которая не входит в X_1. Рассмотрим $Y = X_1 \cup \{x\} \subset X$. Множество Y не может быть связным (иначе получаем противоречие с максимальностью X_1). Тогда $Y = A \cup B$, где A и B — непустые непересекающиеся открытые подмножества. Так же как и выше проверяется, что X_1 целиком содержится или в A, или в B, и если $X \subset A$ для определенности, то $x \in B$. Но тогда B — открытая окрестность точки x, которая не пересекается с X_1, поэтому x не является точкой прикосновения для X_1, противоречие. Утверждение доказано. □

Замечание 2.70. Связные компоненты не обязаны быть открытыми подмножествами. В качестве примера достаточно рассмотреть подмножество X вещественной прямой, полученное из отрезка $[0, 1]$ выбрасыванием последовательности $\{1/n\}$. Тогда $\{0\} \subset X$ — связная компонента пространства X.

Упражнение 2.8. Показать, что пространство X связно, если и только если каждое его открыто-замкнутое подмножество или пусто, или совпадает со всем X.

Упражнение 2.9. Сколько компонент связности имеет пространство X, наделенное дискретной топологией?

Утверждение 2.71. *Предположим, что в топологическом пространстве X для каждой пары его различных точек (x, y) найдется связное подмножество C_{xy}, содержащее x и y. Тогда пространство X связно.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть $X = A \cup B$, где A и B — открыты, непусты, причем $A \cap B = \emptyset$. Выберем точки $a \in A$, $b \in B$ и рассмотрим связное множество C_{ab}, содержащее a и b. Однако множество C_{ab} разлагается в объединение двух своих непустых, открытых и непересекающихся подмножеств $C_{ab} \cap A$ и $C_{ab} \cap B$, что противоречит связности C_{ab}. Доказательство закончено. $\square$

Утверждение 2.72. *Образ связного подмножества топологического пространства при непрерывном отображении связен.*

Доказательство. В самом деле, если образ $Y = f(X)$ связного множества X при непрерывном отображении f несвязен, то, по определению, $Y = A \cup B$, где A и B — открыты, непусты и не пересекаются. Но тогда $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, причем множества $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$ непусты, открыты и не пересекаются, т.е. X несвязно. Полученное противоречие и завершает доказательство. $\square$

Следствие 2.73 (B. P. J. N. Bolzano, A. L. Cauchy)**.** *Непрерывная функция, заданная на связном топологическом пространстве X, принимает все промежуточные значения.*

Доказательство. Действительно, если, скажем, значение y_0 не принимается непрерывной функцией $f\colon X \to \mathbb{R}$, но принимаются некоторые значения больше и меньше y_0, то образ $f(X)$ распадается в объединение двух открытых, непустых, непересекающихся подмножеств $f(X) \cap (y_0, +\infty)$ и $f(X) \cap (-\infty, y_0)$. Последнее противоречит утверждению 2.72. Следствие доказано. $\square$

Определение 2.74. *Непрерывной кривой* в топологическом пространстве X называется любое непрерывное отображение γ отрезка $[a, b]$ в X. При этом говорят, что эта непрерывная кривая *соединяет точки* $\gamma(a)$ *и* $\gamma(b)$.

Определение 2.75. Топологическое пространство X называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой.

Так как композиция непрерывных отображений — тоже непрерывное отображение, мгновенно получаем следующий результат.

Утверждение 2.76. *Образ при непрерывном отображении линейно связного пространства — линейно связен. В частности, линейная связность — топологический инвариант.*

Из утверждений 2.66, 2.71 и 2.72 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2.77. *Линейно-связное топологическое пространство связно.*

Замечание 2.78. Обратное, вообще говоря, не верно. Приведите пример.

Лемма 2.79. *Пусть в топологическом пространстве X даны две непрерывные кривые $\gamma_1 : [a,b] \to X$ и $\gamma_2 : [b,c] \to X$, причем $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Тогда отображение $g : [a,c] \to X$, которое на $[a,b]$ совпадает с γ_1, а на $[b,c]$ с γ_2, тоже является непрерывной кривой.*

Доказательство. Пусть β_X — какая-нибудь база топологии пространства X. Нам достаточно показать, что отображение γ непрерывно в точке b, т.е. для любого $B \in \beta_X$, содержащего $\gamma(b)$, существует такой интервал $(b-\delta, b+\delta) \subset [a,c]$, что его γ-образ содержится в B. Так как γ_i непрерывны в b, существуют полуинтервалы $(b-\delta_1, b]$ и $[b, b+\delta_2)$, которые отображаются γ_1 и γ_2 соответственно в B. Но тогда достаточно положить $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. □

Лемма 2.80. *Пусть $\gamma : [a,b] \to X$ — непрерывная кривая в топологическом пространстве X, соединяющая точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$, и пусть $[c,d]$ — произвольный отрезок. Тогда существует непрерывная кривая $\gamma' \colon [c,d] \to X$, соединяющая те же точки такая, что $\gamma'(c) = \gamma(a)$, $\gamma'(d) = \gamma(b)$, а также непрерывная кривая $\gamma'' \colon [c,d] \to X$, соединяющая те же точки и такая, что $\gamma''(c) = \gamma(b)$, $\gamma''(d) = \gamma(a)$.*

Доказательство. Действительно, достаточно рассмотреть композицию $\gamma' = \gamma \circ f$, где $f \colon [c,d] \to [a,b]$ линейное отображение

$$f(t) = \frac{(b-a)t + ad - bc}{d-c}, \qquad t \in [c,b].$$

Тогда $f(c) = a$, $f(d) = b$, поэтому γ' — непрерывная кривая, и $\gamma'(c) = \gamma\bigl(f(c)\bigr) = \gamma(a)$ и $\gamma'(d) = \gamma\bigl(f(d)\bigr) = \gamma(b)$. Аналогично, если положить

$$h(t) = \frac{(a-b)t + bd - ac}{d-c}, \qquad t \in [c,b],$$

то $h(c) = b$, $h(d) = a$, и если $\gamma'' = \gamma \circ h$, то $\gamma''(c) = \gamma\bigl(h(c)\bigr) = \gamma(b)$ и $\gamma''(d) = \gamma\bigl(h(d)\bigr) = \gamma(a)$, что и требовалось. □

Теорема 2.81. *Зафиксируем в топологическом пространстве X некоторую точку x_0. Тогда X линейно связно, если и только если любую точку можно соединить непрерывной кривой с x_0.*

Доказательство. Если X линейно связно, то утверждение теоремы мгновенно следует из определения линейной связности. Обратно, пусть y_1 и y_2 — произвольные точки из X, и пусть $\gamma_i\colon [a_i, b_i] \to X$, $\gamma_i(a_i) = y_i$, $\gamma(b_i) = x_0$, $i = 1, 2$, — непрерывные кривые, соединяющие y_1 и y_2 с точкой x_0. По лемме 2.80 можно заменить кривую γ_2 на кривую $\gamma_2'\colon [b_1, c] \to X$, соединяющую те же точки, что и γ_2, причем $\gamma'(b_1) = x_0$, $\gamma_2'(c) = y_2$. Применяя лемму 2.79, получаем непрерывную кривую, соединяющую y_1 и y_2. Таким образом, пространство X — линейно связно. □

Определение 2.82. Линейно связное подмножество топологического пространства X, не содержащееся в отличном от него самого линейно связном подмножестве X, то есть максимальное по включению линейно связное подмножество, называется *линейно связной компонентой пространства* X или *компонентой линейной связности пространства* X.

Разбор следующих примеров оставим в качестве упражнений.

Пример 2.83. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из $\mathbb{R}^2$ выбрасыванием оси x. Тогда X состоит из двух компонент — открытых полуплоскостей $\big\{(x, y) : y < 0\big\}$ и $\big\{(x, y) : y > 0\big\}$.

Пример 2.84. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из $\mathbb{R}^2$ выбрасыванием двух лучей, выходящих из одной точки. Тогда X состоит из двух компонент.

Пример 2.85. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из некоторого круга $U_r(A)$ выбрасыванием произвольного его радиуса AC. Тогда X — линейно связное пространство.

Пример 2.86. Пусть X — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, которое получается из некоторого круга $U_r(A)$ выбрасыванием двух различных его радиусов AC и AD. Тогда X состоит из двух компонент.

2.3 Хаусдорфовость

Еще одной важной характеристикой топологического пространства являются свойства отделимости. Мы здесь приведем только одну из многих так называемых аксиом отделимости, аксиому Хаусдорфа[1].

Определение 2.87. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым*, если для любых двух его различных точек существуют непересекающиеся открытые окрестности.

---

[1] Felix Hausdorff (1868–1942), замечательный немецкий математик, один из основателей топологии, теории размерностей, метрической геометрии. Служил профессором в Лейпциге, Грейфсвальде и Бонне. В 1935 году был отстранен от преподавания, в 1942 перед отправкой в лагерь принял яд вместе с женой и ее сестрой.

Очевидно, не любое пространство является хаусдорфовым. Простейший пример нехаусдорфова — пространство X, состоящее из двух и более точек, с тривиальной топологией $\{X, \emptyset\}$. Стандартный пример хаусдорфова пространства — пространство с метрической топологией.

Утверждение 2.88. *Любая метрическая топология — хаусдорфова.*

Доказательство. Пусть (X, d) — метрическое пространство, и x, y — любые две его различные точки. Положим $r = d(x, y)/3$. Тогда открытые шаровые окрестности $U_r(x)$ и $U_r(y)$ не пересекаются. Действительно, пусть $z \in U_r(x) \cap U_r(y)$. Тогда по неравенству треугольника имеем: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2r = 2d(x, y)/3$, противоречие. $\square$

Следствие 2.89. *Нехаусдорфова топология не является метрической.*

2.4 Компактность

Определение 2.90. *Открытым покрытием топологического пространства* X называется семейство $\{U_\alpha\}$ открытых в X множеств U_α такое, что $X = \cup_\alpha U_\alpha$. *Открытым покрытием подмножества* Y *топологического пространства* X называется семейство $\{U_\alpha\}$ открытых в X множеств U_α такое, что $Y \subset \cup_\alpha U_\alpha$. *Подпокрытием* называется произвольное подсемейство покрытия, само являющееся покрытием.

Определение 2.91. Топологическое пространство X (подмножество Y топологического пространства X) называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Пример 2.92. Как показывается в математическом анализе (Теорема Бореля), отрезок $[a, b]$ компактен.

Определение 2.93. Подмножество $Y \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если оно лежит в некотором шаре $U_r(P)$.

Следующее важное утверждение (Теорема Гейне–Бореля–Лебега), являющееся критерием компактности подмножества евклидова пространства, доказано в курсе математического анализа.

Теорема 2.94 (E. Borel, E. Heine, H.-L. Lebesgue)**.** *Подмножество* Y *в* $\mathbb{R}^n$ *компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Нам понадобятся некоторые общие свойства компактных пространств.

Предложение 2.95. *Пусть* $f \colon X \to Y$ *— непрерывное отображение топологических пространств. Предположим, что* X *компактно. Тогда* $f(X)$ *— компактное подмножество* Y*.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}$ — произвольное открытое покрытие множества $f(X)$, тогда $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ — открытое покрытие компакта X, поэтому в нем существует некоторое конечное подпокрытие. Но тогда те U_β, для которых множества $f^{-1}(U_\beta)$ образуют это конечное подпокрытие, сами образуют конечное подпокрытие покрытия $\{U_\alpha\}$ множества $f(X)$. $\square$

Следствие 2.96. *Образ непрерывной кривой в $\mathbb{R}^n$ компактен и, значит, замкнут и ограничен.*

Доказательство. Это следует из компактности отрезка (пример 2.92), предложения 2.95 и теоремы 2.94. $\square$

Следствие 2.97 (K. Th. W. Weierstraß)**.** *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на компактном топологическом пространстве. Тогда функция f ограничена и принимает свои наименьшее и наибольшее значения.*

Доказательство. Действительно, по предложению 2.95, множество $f(X) \subset \mathbb{R}$ компактно, следовательно, по теореме 2.94, оно замкнуто и ограничено. Ограниченность множества $f(X)$ означает ограниченность функции f. Замкнутость множества $f(X)$ означает, что $\inf f(X)$ и $\sup f(X)$ лежат в $f(X)$, т.е. функция достигает своего наименьшего и наибольшего значений. $\square$

Следствие 2.98. *Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная кривая, и $P \in \mathbb{R}^n$ — точка, не лежащая на этой кривой, т.е. не принадлежащая образу отображения γ. Тогда функция $f(t) = |P\gamma(t)|$ расстояния от P до точек кривой $\gamma(t)$ достигает своего минимума, и этот минимум положителен.*

Доказательство. Действительно, функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, поэтому, в силу следствия 2.97, функция f достигает своего наименьшего значения в некоторой точке $t_0 \in [a,b]$. Но тогда $f(t_0) = |P\gamma(t_0)| > 0$, так как P не лежит на γ. $\square$

Определение 2.99. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, заданная на топологическом пространстве, называется *локально постоянной*, если для каждой точки $x \in X$ существует такая окрестность U, что f постоянна на U.

Предложение 2.100. *Локально постоянная функция непрерывна.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — локально постоянная функция, и β — некоторая база топологии на X. Тогда для каждой $x \in X$ существует окрестность $B \in \beta$ точки x, на которой f постоянно. Но это означает, что для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое B, что $f(B) = \{f(x)\} \subset \big(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon\big)$, поэтому f непрерывна. $\square$

Следствие 2.101. *Локально постоянная функция f постоянна на каждой компоненте линейной связности.*

Доказательство. Пусть x и y — произвольные точки из компоненты линейной связности, т.е. существует непрерывная кривая $\gamma\colon [a,b] \to X$, для которой $x = \gamma(a)$ и $y = \gamma(b)$. Образ $\Gamma = \gamma\big([a,b]\big)$ кривой γ компактен в силу предложения 2.95. Для каждой точки $t \in \Gamma$ существует окрестность $U(t)$ на которой функция f постоянна. Выберем конечное подпокрытие открытого покрытия $\big\{U(t)\big\}$ компакта Γ. Из существования этого конечного покрытия следует, что функция f принимает конечное число значений на Γ. С другой стороны, если среди этих значений есть пара различных, то, по теореме Больцано–Коши (см. следствие 2.73) таких значений континуум, противоречие. □

Утверждение 2.102. *Замкнутое подмножество компактного пространства компактно.*

Доказательство. Пусть A — замкнутое подмножество компактного пространства X, и $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие множества A. Так как $X \setminus A$ — открытое подмножество в X, то семейство $\{U_\alpha\} \cup \{X \setminus A\}$ является открытым покрытием всего пространства X. Пространство X компактно, поэтому у этого покрытия существует конечное подпокрытие $\{X \setminus A, U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k}\}$. Но тогда $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k}\}$ — это конечное покрытие множества A. Доказательство закончено. □

В общем случае замкнутость не является необходимым условием компактности. Однако справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.103. *Компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.*

Доказательство. Пусть K — компактное подмножество хаусдорфова пространства X. Покажем, что произвольная точка $x \in X \setminus K$ не является точкой прикосновения для K. Действительно, в силу хаусдорфовости, для каждой точки $y \in K$ существует пара непересекающихся открытых окрестностей $U(x,y)$ и $V(y)$ точек x и y соответственно, причем окрестность точки x зависит, вообще говоря, от y. Воспользуемся компактностью K и выберем его конечное покрытие окрестностями $\big\{V(y_i)\big\}_{i=1}^k$. Тогда $U(x) = \cap_i U(x,y_i)$ — конечное пересечение открытых окрестностей точки x, которое само является окрестностью точки x. Таким образом, $U(x)$ — открытая окрестность точки x, которая не пересекается с K, что и требовалось. □

Компактность — сильное условие, позволяющее упростить, в том числе, доказательство гомеоморфности.

Теорема 2.104. *Пусть $f\colon X \to Y$ непрерывное взаимно однозначное с образом отображение компактного пространства X в хаусдорфово пространство Y. Тогда f — гомеоморфизм с образом.*

Доказательство. Положим $A = f(X)$. Обратное отображение $f^{-1}\colon A \to X$ определено благодаря взаимной однозначности. Остается доказать его непрерывность. Пусть $F \subset X$ — произвольное замкнутое подмножество. Тогда F компактно (утверждение 2.102). Прообраз $\left(f^{-1}\right)^{-1}(F)$ при отображении f^{-1} равен $f(F)$ — компактному подмножеству в Y (предложение 2.95). Но компактное подмножество в хаусдорфовом пространстве Y замкнуто (утверждение 2.103), значит прообраз любого замкнутого подмножества $F \subset X$ при отображении f^{-1} замкнут. Осталось применить критерий непрерывности. $\square$