

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи
УДК 514.154, 514.745.4,
514.763.337, 514.763.34,
517.938.5, 517.958

Зотьев Дмитрий Борисович

Симплектические многообразия с контактными особенностями.

Специальность 01.01.04 "геометрия и топология"

Диссертация

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант
доктор физ.-мат. наук,
профессор А.В. Болсинов

Москва - 2011

Содержание

Общая характеристика работы.	4
Глава 1. Введение.	11
§ 1.1. Симплектическая и контактная геометрия.	11
§ 1.2. Вырожденные особенности симплектической структуры.	18
1.2.1. Исходные понятия.	18
1.2.2. Первые результаты.	23
§ 1.3. Частный интеграл, связанный с особенностью симплектической структуры инвариантного подмногообразия.	36
Глава 2. Симплектические особенности и теория А.Т. Фоменко.	43
§ 2.1. Теория А.Т. Фоменко.	43
§ 2.2. Поправки на симплектические особенности.	53
§ 2.3. Пример интегрируемой системы с особенностью.	63
2.3.1. Случай Богоявленского.	63
2.3.2. Контактные особенности.	67
2.3.3. Особая поверхность.	70
2.3.4. Обозначения.	79
2.3.5. Метки при $h_1 < h < h_2$	81
2.3.6. Метки при $h_2 < h < h_0$	83
2.3.7. Метки при $h_0 < h < h_3$	84
2.3.8. Метки при $h > h_3$	88
2.3.9. Топология особой поверхности.	89

Глава 3. Симплектические многообразия с контактными особенностями.	91
§ 3.1. Контактные вырождения замкнутых 2-форм.	91
3.1.1. Контактная структура на особой гиперповерхности.	91
3.1.2. Контактные особые точки.	95
3.1.3. Продолжения гамильтоновых полей.	101
3.1.4. Теорема Дарбу.	104
3.1.5. Симплектический объем.	110
§ 3.2. Каноническая структура Ли.	113
3.2.1. Контактные вырождения и структуры Ли.	113
3.2.2. Контактные вырождения и симплектизация.	119
3.2.3. Решения Фридмана.	123
3.2.4. Контактно-связная сумма.	128
§ 3.3. Гамильтоновы системы.	132
3.3.1. Предельные положения.	132
3.3.2. Теорема Лиувилля.	139
Глава 4. Нулевая гиперповерхность электромагнитного поля.	167
§ 4.1. Классическая теория электромагнитного поля в вакууме.	167
§ 4.2. Нулевая гиперповерхность.	173
§ 4.3. Тензор электромагнитного поля вблизи светового конуса.	180
§ 4.4. Плотность токов и зарядов вблизи светового конуса.	188
Список литературы.	196
Рисунки.	204

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертации.

Симплектическая геометрия, также как и риманова, исходит из предположения о невырожденности тензора соответствующей структуры [4, 58]. Это предположение генетически связано с уравнениями У.Р. Гамильтона [67]. Наиболее глубокие приложения симплектической геометрии относятся к небесной механике и динамике твердого тела [2, 36], где фазовые многообразия интегрируемых гамильтоновых систем, будучи кокасательными расслоениями или орбитами коприсоединенных представлений, в самом деле являются симплектическими. Однако, при ограничении гамильтоновой системы на инвариантное подмногообразие симплектический тензор может вырождаться. Есть разумные основания полагать, что, по мере возрастания размерностей исходных фазовых пространств, новые интегрируемые случаи все чаще будут появляться именно на инвариантных подмногообразиях. Первый в динамике твердого тела случай, заданный на многообразии с вырожденными особенностями симплектической структуры, описан О.И. Богоявленским в известной работе [5]. В статье [95], с которой связан генезис представленной теории, были вычислены инварианты Фоменко-Цишанга этой системы и обоснована применимость методов топологического анализа [7, 43, 44], развитых школой А.Т. Фоменко [6, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 42, 59, 81, 89].

С точки зрения математики естественно допустить, что матрица замкнутой 2-формы вырождается — на всем многообразии или в некоторых точках. Первый случай, при условии постоянности ранга, хорошо известен и сравнительно прост [58]. Во втором случае, т.е. при невырожденности почти всюду, симплектическая геометрия имеет особенности, о которых при падении ранга на $2k > 2$ почти ничего не известно. Статья Ж. Мартине содержит первое и, возможно, единственное общее исследование подобных структур [76]. Однако, в этой глубокой работе собственно симплектическая геометрия ограничена простейшим, хотя и наиболее важным случаем вырождений коранга 2. Последующие исследования, в основном, продолжают результаты Мартине и относятся к вырождениям с двумерным ядром [50, 51, 62, 70, 83, 84, 87]. Во многом это связано с объективной сложностью проблемы, т.к., согласно справедливому замечанию В.И. Арнольда: "отсутствие условия невырожденности в определении симплектической структуры делает локальную классификацию таких структур необозримой" [4].

Напротив, вырожденные особенности пуассоновских структур сравнительно легко поддаются изучению, т.к. они не мешают гамильтоновым полям быть корректно определенными [23, 30, 90, 92, 93]. Поэтому несмотря на то, что в невырожденном случае симплектические и пуассоновские многообразия являются изоморфными объектами, их вырождения имеют принципиально разные последствия. Вопрос о корректной определенности гамильтоновых полей является ключевым в работах С. Пневматикоса, где на замкнутые 2-формы накладывается естественное условие *generiques* [82, 83, 84, 85]. Однако, за исключением явно заданных в координатах 2-форм нужного вида, в случае вырождений коранга $2k > 2$ отсутствует способ проверки этого условия. Таким образом, сколько-нибудь общей теории многообразий с симплектическими особенностями сегодня не существует.

В диссертационной работе развита теория симплектических многообразий с вырожденными особенностями, которые удовлетворяют новому условию контактности. Это условие является свойством общего положения для замкнутых 2-форм, каждая из которых вырождается в точках гиперповерхности, будучи невырожденной вне ее. Класс несущих на себе такие структуры многообразий, в определенном смысле, включает в себя симплектизации контактных многообразий и аналогичные конструкции для локальных алгебр Ли [4, 20]. В связи с этим некоторые результаты данной работы, которая не имеет генетических связей с контактной геометрией, соприкасаются с областью исследований ее "вложений" в симплектическую [52, 54, 56, 65, 75, 78]. Для контактно вырождающихся симплектических многообразий оказалось возможным изучить предельное поведение гамильтоновых полей в особых точках, применительно к задаче их продолжения с открытого плотного подмножества $\{\det \omega \neq 0\}$. На этой основе построена теория, которая следует ключевым понятиям и фактам симплектической геометрии, включая аналоги фундаментальных теорем Дарбу и Лиувилля.

Известны содержательные примеры, возникающие в динамике твердого тела в типичном случае $\dim Ker(\omega) = 2$ [14, 15]. Несмотря на то, что язык дифференциальных форм давно применяется в электродинамике [40, 49, 91], а уравнения Гамильтона и канонические преобразования являются важной частью аппарата теории плазмы [35, 47] (как впрочем и всей теоретической физики), собственно симплектическая геометрия, по-видимому, не нашла физически содержательных приложений в классической теории электромагнитного поля. В настоящей работе таковые найдены для случая $\dim Ker(\omega) = 4$.

Цели диссертационной работы.

1. Обосновать применимость теории инвариантов Фоменко-Цишанга к интегрируемым системам, которые возникают на многообразиях с особенностями симплектической структуры.

2. Исследовать вопрос о существовании интегралов гамильтоновых систем, связанных с вырождениями симплектической структуры.

3. Изучить предельное поведение гамильтоновых полей в точках вырождения симплектической структуры и найти условия их корректной определенности.

4. Ввести разумные ограничения на способ вырождения симплектической структуры, позволяющие получить аналог теоремы Дарбу.

5. Найти аналог теоремы Лиувилля для интегрируемых систем на симплектических многообразиях с особенностями, которые удовлетворяют введенным ограничениям.

6. Найти физически содержательные примеры симплектических особенностей коранга $2k > 2$, возникающих на гиперповерхностях.

Научная новизна.

Все результаты диссертационной работы, за исключением справочного материала §§ 1.1, 2.1, 4.1, являются новыми и полученными самостоятельно.

1. Доказано существование замкнутой, почти всюду невырожденной 2-формы на любом четно-мерном многообразии

(теорема 3 § 1.2).

2. На многообразиях с симплектической или почти симплектической структурой, имеющей особенности общего положения, описано типичное предельное поведение гамильтоновых потоков в точках вырождения с двумерным ядром.

(теорема 4, следствие 1, предложение 2 § 1.2)

3. Найден критерий существования частного интеграла гамильтоновой системы, связанного с вырождением симплектической структуры на инвариантном подмногообразии.

(теорема 5, предложение 5 § 1.3, предложение 4 § 2.2)

4. Обоснована применимость теории инвариантов Фоменко-Цишанга к интегрируемым системам общего положения, заданным на многообразиях с

особенностями симплектической структуры.

(теорема 3 § 2.2)

5. В интегрируемом случае О.И. Богдавленского уточнены значения ε - меток в инвариантах Фоменко-Цишанга (рис. 4), доказана контактность всех точек вырождения симплектической структуры, описано предельное поведение потоков интегралов на особой гиперповерхности и установлен ее топологический тип.

(п. 2.3.2, предложение 7 § 2.3)

6. Введено условие контактности особых точек симплектической структуры, которое обобщает типичные вырождения с двумерным ядром и является свойством общего положения для замкнутых 2-форм, вырождающихся в точках гиперповерхности.

(определение 1 § 3.1)

7. Найдено условие контактности точек вырождения симплектической структуры, индуцированной на четно-мерной поверхности в симплектическом многообразии.

(предложение 2 § 3.1)

8. Найден критерий корректной определенности гамильтоновых полей в контактных точках вырождения симплектической структуры.

(теорема 1, предложение 3 § 3.1)

9. Доказана гамильтоновость фазовых потоков, сохраняющих симплектическую форму с контактными особенностями.

(предложения 6, 7 § 3.2)

10. Доказан аналог теоремы Дарбу и найден канонический вид замкнутой 2-формы в окрестности контактной точки.

(теорема 3 § 3.1)

11. Описаны канонические структуры Ли и (или) контактные структуры на гиперповерхностях, состоящих из контактных точек вырождения симплектической структуры.

(теорема 5, следствия 4,5,6 § 3.2, предложение 10 § 3.3)

12. Доказана реализуемость контактных многообразий гиперповерхностями, состоящими из контактных точек вырождения некоторых симплектических структур (конструкция S - симплектизации). Аналогичный локальный результат получен для нечетно-мерных многообразий Ли с нечетно-мерными слоями.

(определение 4, предложение 9 § 3.2), предложение 8 § 3.2)

13. Найдена конструкция контактно-связной суммы симплектических многообразий, которая определяет на связной сумме симплектическую структуру с контактными вырождениями.

(определение 5 § 3.2)

14. Доказана теорема Мозера о нетривиальности 2-мерных когомологий де-Рама (теорема 4 § 3.1).

15. Изучено типичное предельное поведение гамильтоновых полей в контактных точках.

(теорема 6 § 3.3).

16. Доказаны аналоги теоремы Лиувилля для интегрируемых систем, заданных на симплектических многообразиях с контактными особенностями (теоремы 7,8, предложения 15, 16 § 3.3).

17. Доказано, что сферически симметричное электромагнитное поле, независимо от происхождения, имеет нулевую магнитную и радиальную электрическую компоненты.

(предложение 1 § 4.1)

18. Найдены примеры контактных вырождений тензора электромагнитного поля.

(пример 3 § 4.2, примеры 4, 5 § 4.3)

19. Изучена геометрия электромагнитного поля вблизи контактной точки нулевой гиперповерхности.

(теорема 1 § 4.2)

20. Изучена каноническая контактная структура нулевой гиперповерхности электромагнитного поля.

(следствие 1 § 4.2, предложение 4 § 4.3)

21. Для электромагнитных полей со сферическим фронтом введены калибровочные условия на потенциалы, обеспечивающие обнуление зарядов на нулевой гиперповерхности.

(предложение 3 § 4.3, предложение 6 § 4.4)

22. Получены дифференциальные уравнения I порядка для потенциалов поля в бесконечно тонком пространственно-временном слое, прилегающем к световому конусу.

(предложение 5 § 4.3)

Результаты диссертации, выносимые на защиту.

1. В предметную область теории инвариантов Фоменко-Цишанга включены интегрируемые системы общего положения, заданные на 4-мерных симплектических многообразиях с типичными особенностями (теорема 3 § 2.2).
2. Найдены условия вырождения симплектических структур, обеспечивающие корректную определенность гамильтоновых полей при некотором естественном, известном ограничении (определение 1 п. 3.1.2, теорема 1 п. 3.1.3).
3. Найден канонический вид симплектической структуры в окрестности контактной точки (теорема 3 п. 3.1.4).
4. Описано типичное предельное поведение гамильтоновых полей в контактных точках (теорема 6 п. 3.3.1).
5. Для интегрируемых систем, заданных на многообразиях с контактными особенностями, доказаны аналоги теоремы Лиувилля (теоремы 7, 8 п. 3.3.2)
6. Предложена конструкция контактно-связной суммы симплектических многообразий (определение 5 п. 3.2.4).
7. Изучена геометрия электромагнитного поля вблизи контактной точки нулевой гиперповерхности (теорема 1 § 4.2).

Апробация работы.

На протяжении работы (2000 – 2010) результаты периодически докладывались на семинарах А.Т. Фоменко "Современные геометрические методы", а также на семинарах кафедры дифференциальной геометрии и приложений МГУ. Представлялись на следующих конференциях:

1. 8 международная конференция "Устойчивость, управление и динамика твердого тела", ИПММ НАН Украины, г. Донецк, 2002г.,
2. Международная юбилейная конференция "Классические задачи динамики твердого тела", ИПММ НАН Украины, г. Донецк, 2004г.,
3. Международная топологическая конференция "Александровские чтения", г. Москва, МГУ, 2006г.

Публикации по теме диссертации.

1. Zotev D.V. *Fomenko-Zieschang Invariant in the Bogoyavlenskyi Integrable Case*. Regular & chaotic dynamics, **5** (2000), № 4, 437-458.
2. Зотьев Д.Б. *О симплектической геометрии многообразий с почти всюду невырожденной замкнутой 2-формой*. Математические заметки, **76** (2004), вып. 1, 66-77.
3. Зотьев Д.Б. *Фазовая топология волчка Ковалевской в $SO(2)$ - симметричном двойном силовом поле*. Механика твердого тела, **34**(2004), 66-71.
4. Зотьев Д.Б. *Фазовая топология I класса Аппельрота волчка Ковалевской в магнитном поле*. Фундаментальная и прикладная математика, **12** (2006), № 1, 95-128.
5. Зотьев Д.Б. *Об одном частном интеграле, который можно извлечь из матрицы Пуассона*. Нелинейная динамика. **3** (2007) № 1, 75-80.
6. Зотьев Д.Б. *Контактные вырождения замкнутых 2-форм*. Математический сборник, **198** (2007), № 4, 47-78.
7. Zotev D.V. *On a partial integral which can be derived from Poisson Matrix*. Regular & chaotic dynamics, **12** (2007), № 1, 81-85.
8. Зотьев Д.Б. *Контактные вырождения тензора электромагнитного поля*. Вестник МЭИ, (2011), № 2, (в печати).

Структура диссертации.

Объем диссертационной работы составляет 217 страниц в формате LaTeX article, 12 pt. Она состоит из общей характеристики работы, четырех глав основного текста на 184 страницах, списка литературы и 14 рисунков. Определения, теоремы, следствия, предложения, леммы, замечания и примеры имеют нумерацию, которая в каждой главе начинается с № 1. В номере каждой формулы содержится указатель текущей главы. В ссылках за пределы текущей главы указывается глава, параграф или подпункт.

Автор глубоко признателен своему научному консультанту профессору А.В. Болсинову, а также академику А.Т. Фоменко за внимание к работе и неоценимую моральную поддержку на всем ее протяжении.

Глава 1. Введение.

На протяжении работы все объекты (функции, многообразия, поля и т.д.) предполагаются гладкими — класса C^∞ . Подмногообразием называется гомеоморфно вложенное многообразие (гладкая поверхность).

§1.1. Симплектическая и контактная геометрия.

Рассмотрим гладкое многообразие M размерности $2n \geq 2$, на котором задана дифференциальная 2-форма ω . Если в каждой точке M имеет место $d\omega = 0$ и $\det(\omega) \neq 0$, то пара (M, ω) является симплектическим многообразием, а форма ω называется симплектической структурой на M . Согласно теореме Дарбу, в окрестности каждой точки M существуют т.н. канонические координаты (p, q) , в которых

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

В координатах $(p_1, q_1, \dots, p_n, q_n)$ матрица формы ω имеет блочно-диагональный вид

$$\left(\begin{array}{cccc} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & \dots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} \end{array} \right).$$

Гамильтонова система является векторным полем вида

$$X^i = \sum_{j=1}^{2n} \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j}, \quad 1 \leq i \leq 2n,$$

которое определяется гладкой функцией $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ (гамильтонианом) на симплектическом многообразии (M, ω) . Здесь (ω^{ij}) — обратная матрица формы

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j}^{2n} \omega_{ij} dx_i \wedge dx_j.$$

Векторное поле X обозначается $sgrad(H)$ [30] и однозначно определяется свойством

$$\omega(v, X) = dH(v) \quad \forall v \in T_x M \quad \forall x \in M.$$

Гамильтонов поток сохраняет форму ω , т.е. $L_\xi\omega = 0$. Обратно: всякое векторное поле с фазовым потоком, сохраняющим форму ω , локально является гамильтоновым. В канонических координатах векторному полю $sgrad(H)$ отвечают классические уравнения Гамильтона:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Для любой пары гладких функций F и G определена скобка Пуассона:

$$\{F, G\} = \omega(sgrad(F), sgrad(G)) = dG(sgrad(F)) = -dF(sgrad(G)).$$

С ее помощью система $sgrad(H)$ записывается в виде $\dot{x}_i = \{H, x_i\}$. В пространстве $C^\infty(M)$ операция $\{\cdot, \cdot\}$ задает структуру алгебры Ли. В координатах:

$$\{F, G\} = \sum_{i,j=1}^{2n} \omega^{ij} \frac{\partial F}{\partial x^j} \frac{\partial G}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q_k} - \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_k} \right).$$

Функция F является первым интегралом системы $sgrad(H)$ тогда и только тогда, когда $\{F, H\} = 0$. Гамильтониан H всегда является интегралом $sgrad(H)$ (т.к. $\{H, H\} = 0$). Для полного интегрирования системы $sgrad(H)$ на $2n$ -мерном многообразии M достаточно найти такие интегралы F_1, \dots, F_{n-1} , что $\{F_i, F_j\} = 0$ и функции H, F_1, \dots, F_{n-1} почти всюду независимы на M . Если они существуют, то система называется интегрируемой по Лиувиллю. Удобно обозначать $F_n = H$. Все интегралы попарно коммутируют, т.е. $\{F_i, F_j\} = 0$, $1 \leq i, j \leq n$.

Теорема 1 (теорема Лиувилля) *Рассмотрим неособую поверхность*

$$\{x \in M : H(x) = h, F_1(x) = f_1, \dots, F_{n-1}(x) = f_{n-1}\}. \quad (1.1)$$

Компактные, связные компоненты (1.1) являются вложенными торами $T^n \subset M$, оставаясь таковыми при всех, достаточно малых изменениях чисел h, f_i . В некоторой окрестности каждого T^n определены такие регулярные координаты s, φ (действие-угол), что функции s_1, \dots, s_n выражаются через F_1, \dots, F_n , а $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ являются угловыми координатами на торах $s = const$, где $1 \leq \varphi_i \leq 2\pi$. В координатах действие-угол имеет место

$$\omega = \sum_{i=1}^n ds_i \wedge d\varphi_i,$$

и система $sgrad(H)$ записывается в виде:

$$\dot{s}_i = 0 \quad \dot{\varphi}_i = \frac{\partial H}{\partial s_i} \quad (1 \leq i \leq n).$$

Инвариантные торы $T^n \subset M$, являющиеся связными компонентами подмногообразий вида (1.1), называются торами Лиувилля. Из теоремы Лиувилля следует, что интегральная траектория поля $sgrad(H)$, проходящая через точку $(s^0, \varphi^0) \in T^n$, задается уравнениями вида

$$\varphi_k(t) = \varphi_k^0 + \omega_k t, \quad s_k(t) = s_k^0 = const .$$

При этом частоты

$$\omega_k = \frac{\partial H}{\partial s_k}$$

постоянны на торе $\{s = s^0\}$. Если соотношение

$$\sum_{k=1}^n m_k \omega_k = 0, \quad m_k \in \mathbb{Z}$$

невозможно в том случае, когда хотя бы одно $m_k \neq 0$, то каждая траектория на T^n всюду плотна в нем, и тор T^n называется нерезонансным. Иначе существует равная нулю нетривиальная линейная комбинация частот с целыми коэффициентами m_k . Тогда тор T^n называется резонансным. При этом он оказывается расслоенным на инвариантные торы размерности $r < n$, и каждая траектория на T^n является линейной обмоткой одного из "маломерных" торов $T^r \subset T^n$ [58]. Для окончательного интегрирования в квадратурах достаточно выразить гамильтониан H через s_1, \dots, s_n . Решение последней задачи может быть связано со значительными аналитическими трудностями, хотя способ вычисления переменных действия в принципе известен [43].

Теорема 2 (относительная лемма Пуанкаре) Пусть N – подмногообразие в симплектическом многообразии M и ω^k – замкнутая k -форма, равная нулю на TN , т.е. $\omega^k|_N = 0$. Тогда в некоторой окрестности подмногообразия N форма ω^k является дифференциалом $k-1$ -формы, равной нулю в каждой точке N .

Поскольку линейно-независимые векторные поля $sgrad(F_i)$ касаются тора Лиувилля T^n и

$$\omega(sgrad(F_i), sgrad(F_j)) = \{F_i, F_j\} = 0 ,$$

то ограничение формы ω на T^n равно нулю. Из относительной лемме Пуанкаре (теорема 2) следует, что $\omega = d\alpha$ в окрестности изотропного тора T^n . Пусть

$$f_1, \dots, f_n, \varphi_1 \mod 2\pi, \dots, \varphi_n \mod 2\pi$$

есть такие координаты в окрестности T^n , что φ_i являются угловыми координатами тора $\mathbf{f} = \text{const}$. Если γ_i есть любой цикл на торе Лиувилля, гомологичный окружности $\varphi_i = t$, то на этом торе имеет место

$$s_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} \alpha .$$

В общем, неинтегрируемом случае интересно найти инвариантные подмногообразия, на которых система может оказаться интегрируемой. Эквивалентная задача поиска глобальных инвариантных соотношений была сформулирована А. Пуанкаре [25]. Его метафора об островах регулярности в океане хаоса характеризует важность данной проблемы.

Теорема Лиувилля описывает окрестность неособого подмногообразия (1.1), расслоенную инвариантными торами T^n . Этой теоремой не охватывается случай, когда интегральная поверхность (1.1) содержит критические точки *отображения момента*

$$\mathcal{F} : M \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{F}(p) = (H(p), F_1(p), \dots, F_{n-1}(p)).$$

Поэтому интегрируемые случаи на инвариантных поверхностях могут быть интересны и тогда, когда система интегрируема в объемлющем фазовом многообразии. Множество критических точек отображения \mathcal{F} , как правило, является объединением нескольких инвариантных подмногообразий. Множество Σ критических значений \mathcal{F} называется бифуркационной диаграммой.

Пусть $n > 0$. Многообразие K размерности $2n + 1$ называется *контактным*, если на нем фиксировано гладкое поле $2n$ -мерных подпространств Π_ρ , удовлетворяющее следующему условию. Для каждой точки $\rho \in K$ существует такая ее окрестность U и 1-форма θ на U , что

$$\theta_y(\Pi_y) = 0, \quad \theta_y \wedge (\wedge_{i=1}^n d\theta)_y \neq 0 \quad \forall y \in U.$$

Последнее равносильно тому, что $\theta_y \neq 0$ и $d_y\theta$ невырождена на каждом Π_y . В некоторых координатах $(u, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ форма θ приводится к каноническому виду

$$\theta = du - \sum_{i=1}^n p_i dq_i$$

(теорема Дарбу). Интегральное многообразие распределения Π , имеющее максимально возможную размерность n , называется лежандровым.

Если 1-форма θ определена глобально (т.е. $U = K$), то контактное многообразие K называется точным. Тогда соответствие $v \mapsto i_v(\theta)$ между контактными

векторными полями и гладкими функциями на K является биекцией, в силу чего в $C^\infty(K)$ возникает структура алгебры Ли:

$$f = i_v(\theta), \quad g = i_w(\theta) \quad \Rightarrow \quad [f, g] = i_{[v, w]}(\theta).$$

Операция $[\cdot, \cdot]$ называется скобкой Лагранжа. На контактном многообразии, не являющемся точным, эти объекты определены локально. Векторное поле называется контактным, если его локальные потоки сохраняют контактную структуру [4]. Любое контактное поле для некоторой функции f (контактного гамильтониана) в канонических координатах выглядит так:

$$v = v_f = \left(f - \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial u} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}.$$

Рассмотрим пример контактной структуры, которая не является точной. отождествим каждую пару точек $(-\pi, \tau, t)$ и $(\pi, -\tau, -t)$ в многообразии

$$\{ (\varphi, \tau, t) \in \mathbb{R}^3 : -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad -1 < \tau < 1, \quad -1 < t < 1 \}.$$

Получится полноторие $K \cong D_0^2 \times S^1$, где $D_0^2 = D^2 \setminus \partial D^2$. Уравнение

$$(dt + \tau d\varphi)(\Pi_\rho) = 0$$

корректно определяет контактное поле 2-плоскостей $\Pi_\rho \subset T_\rho K$. Обозначим через μ вложенный в K лист Мебиуса $\tau = 0$. В каждой точке ρ осевой окружности S^1 листа μ плоскость Π_ρ пересекается с $T_\rho \mu$ по прямой, натянутой на вектор $\partial/\partial \varphi$. Если бы на полнотории K существовала контактная форма θ , то ее ограничение на μ определяло бы ориентацию листа Мебиуса μ . Поэтому контактная структура $\rho \mapsto \Pi_\rho$ не является точной \square .

Легко доказать, что ориентируемое контактное многообразие является точным тогда и только тогда, когда существует непрерывное поле ориентаций гиперплоскостей $\Pi_\rho \subset T_\rho K$. Если α есть контактная 1-форма точного, ориентированного многообразия (K, Π) , то 2-форма $d\alpha$ задает ориентацию каждой контактной гиперплоскости

$$\Pi_\rho = \alpha_\rho^{-1}(0).$$

Если при этом K является краем симплектического многообразия (M, ω) , то индуцированная на K ориентация края и поле направлений возрастания формы α (на фактор-пространствах $T_\rho K/\Pi_\rho$) определяют непрерывное поле ориентаций плоскостей Π_ρ . В случае совпадения этих ориентаций с теми, которые определяются

формой ω , по определению имеем $\omega|_{\Pi} > 0$. Если же форма ω задает обратную ориентацию каждого Π_ρ , то $\omega|_{\Pi} < 0$.

Существуют различные интерпретации контактных многообразий, как объектов симплектической геометрии [52, 54, 56, 57, 61, 65, 75, 78]. Пусть (K, Π) есть связное, ориентируемое, контактное многообразие, являющееся границей симплектического многообразия (M, ω) , где $\dim M = 4$ и $\dim K = 3$.

1. Если α есть контактная форма на $K = \partial M$ и $\omega|_K = d\alpha$, то (M, ω) называется сильным симплектическим пополнением многообразия (K, Π) . В случае $\omega|_{\Pi} > 0$ говорят о выпуклом, а в случае $\omega|_{\Pi} < 0$ о вогнутом пополнении. Если на $[0; +\infty) \times K$ ввести 2-форму

$$\omega = d((\pi + 1)\pi^*\alpha),$$

где $\pi(t, x) = t$, то получим выпуклое пополнение контактного многообразия $(K, Ker(\alpha))$. Аналогично, форма

$$\omega = d((1 - \pi)\pi^*\alpha)$$

определяет на $[0; 1) \times K$ структуру вогнутого пополнения. В обоих случаях $K \cong \{0\} \times K = \pi^{-1}(0)$.

2. Если $\omega|_{\Pi} > 0$, то (M, ω) называется слабым симплектическим пополнением. Известно, что если 2-форма ω точна в окрестности $K = \partial M$, то ее можно подвергнуть малой деформации в такую форму $\tilde{\omega}$, что $(M, \tilde{\omega})$ является сильным симплектическим пополнением многообразия (K, Π) .

Контактные многообразия могут возникать, как гиперповерхности внутри симплектических. В случае K с контактной формой α достаточно ввести 2-форму

$$\omega = d((\pi + 1)\pi^*\alpha)$$

на многообразии $M = (-1; +\infty) \times K$, чтобы получить искомое вложение $K \cong \{0\} \times K \subset M$. При произвольной размерности $2n > 2$ симплектического многообразия (M, ω) , лиувилевым называется любое векторное поле X на M , удовлетворяющее условию $L_X\omega = \omega$. Если $\omega = d\alpha$, то определяемое $i_X\omega = \alpha$ поле X является лиувилевым. На любой гиперповерхности $K \subset M$, которая в каждой своей точке трансверсальна лиувилевому полю X , 1-форма $i_X\omega$ определяет контактную структуру.

Симплектизацией контактного многообразия K называется многообразие

$$N = \{ \zeta_\rho \in T^*K : \zeta_\rho \neq 0, \quad \zeta_\rho(\Pi_\rho) = 0 \}$$

с канонической симплектической структурой Ω , индуцированной из T^*K [4]. Форма θ определяет в N локальные координаты $(\chi, u, \mathbf{p}, \mathbf{q})$, в которых

$$\zeta = \chi\theta, \quad \Omega_\zeta = d\left(\chi\left(du - \sum_{i=1}^n p_i dq_i\right)\right).$$

Следующее многообразие M мы назовем *замкнутой симплектизацией* :

$$M = N \cup K', \quad K' = \{0 \in T_\rho^*K : \rho \in K\}.$$

Смысл этого термина очевиден. Ограничение симплектической структуры T^*K определяет на M замкнутую 2-форму Ω . Она невырождена на $N = M \setminus K'$, но вырождается в точках гладкой гиперповерхности $K' \subset M$. Последняя локально определена уравнением $\chi = 0$, при этом

$$\Omega|_{K'} = 0, \quad rk(\Omega_\rho) = 2 \quad \forall \rho \in K'.$$

Точные контактные структуры являются примерами более общей конструкции. Пусть в пространстве $C^\infty(L)$ многообразия L задана билинейная, антикоммутативная операция $[\cdot, \cdot]$, удовлетворяющая тождеству Якоби. Предположим, что функция $[\cdot, \cdot]$ непрерывна в стандартной топологии $C^\infty(L)$ и обращается в ноль на каждом открытом подмножестве L , на котором равен нулю хотя бы один из аргументов. Такие структуры были изучены в работе [20], где они определены в пространствах сечений $\Gamma^\infty(L)$ 1-мерных векторных расслоений над L (локальные алгебры Ли с одномерным слоем). В случае тривиального расслоения имеем

$$\Gamma^\infty(L) = C^\infty(L).$$

Следуя [4] будем называть скобку $[\cdot, \cdot]$ структурой Ли, а L — многообразием Ли. На L однозначно определены некоторое векторное поле A и бивекторное поле C , так что:

$$[f, g](\mathbf{x}) = \sum_i A^i \left(f \frac{\partial g}{\partial x_i} - g \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + \sum_{i,j} C^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

Рассмотрим подпространство

$$P(x) = \left\{ v \in T_x L : v^i = \sum_j C^{ij} \beta_j, \beta \in T_x^* L \right\} + \{ \lambda A : \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

Структура Ли $[\cdot, \cdot]$ называется транзитивной, если

$$\dim P(x) = \text{const} = \dim L.$$

[20]. Тогда в случае $\dim L = 2n + 1$ на L существует единственная точная контактная структура, скобка Лагранжа которой совпадает с $[\cdot, \cdot]$. В случае $\dim L = 2n$ для каждой точки $\rho \in L$ найдется ее окрестность U , функция f и такая симплектическая форма Ω на U , что

$$\Omega_\rho = f(\rho)\nu_\rho, \quad f(\rho) \neq 0, \quad A_\rho = sgrad(f)(\rho) \quad \forall \rho \in U,$$

где внешняя 2-форма ν отвечает тензору C^{-1} .

Структура Ли называется регулярной, если $rk(C) = const$ на L . Тогда L канонически расслоено на инъективно погруженные многообразия L_α , на каждом из которых операция $[\cdot, \cdot]$ индуцирует транзитивную структуру Ли $[\cdot, \cdot]_\alpha$ [20].

Скажем, что регулярное многообразие Ли L имеет *общее положение*, если в каждой точке $p \in L$ вектор A_p не лежит в образе оператора

$$C_p : T_p^*L \rightarrow T_pL, \quad \text{т.е.,} \quad P_p = \mathbb{R}A_p \oplus Im(C_p).$$

В этом случае L расслоено на нечетно-мерные, транзитивные многообразия Ли, на каждом из которых поле плоскостей $Im(C)$ определяет контактную структуру [20].

§1.2. Вырожденные особенности симплектической структуры.

1.2.1. Исходные понятия.

Рассмотрим гладкую поверхность S в симплектическом многообразии M , инвариантную относительно гамильтоновой системы $sgrad(H)$. Касательное векторное поле $sgrad(H)$ определяет на S динамическую систему \mathcal{X} . Пусть ω_0 есть ограничение формы ω на S . Замкнутая форма ω_0 не обязана быть невырожденной, поэтому система \mathcal{X} , вообще говоря, не является гамильтоновой.

Если размерность S нечетна, то форма ω_0 обязательно вырождается. В случае четной размерности S ее вырождение также возможно. Каждое ядро (т.е. нулевое подпространство) формы ω_0 имеет размерность с четностью $\dim S$. Если размерности всех ядер совпадают, то на S возникает интегрируемое распределение \mathcal{Z} :

$$S \ni p \xrightarrow{\mathcal{Z}} Ker(\omega_p).$$

Пусть \mathcal{R} есть отношение принадлежности к общему интегральному подмногообразию этого распределения. Рассмотрим фактор-пространство $\tilde{S} = S/\mathcal{R}$. Если \tilde{S} является гладким многообразием, а фактор-проекция $\pi : S \rightarrow \tilde{S}$ – гладким отображением, то на \tilde{S} существует единственная симплектическая структура $\tilde{\omega}$, так что $\pi^*(\tilde{\omega}) = \omega_0$. На

\tilde{S} существует единственная функция \tilde{H} , так что динамическая система \mathcal{X} корректно проектируется на векторное поле

$$sgrad_{\tilde{\omega}}(\tilde{H}) = \pi_*\mathcal{X}, \quad H|_S = \pi^*(\tilde{H}).$$

Итак, в данном случае возможна редукция к гамильтоновой системе меньшего порядка [58].

При четной размерности S форма ω_0 может оказаться невырожденной. В последнем случае (S, ω_0) – симплектическое многообразие, на котором система \mathcal{X} является гамильтоновой, т.е.

$$\mathcal{X} = sgrad_{\omega_0}(H_0), \quad H_0 = H|_S.$$

Нас интересует случай, когда форма ω_0 невырождена почти всюду, т.е. $\det(\omega_0)(p) \neq 0$ для всех p из открытого, всюду плотного в S подмножества. В этом случае для S подошел бы термин "почти симплектическое многообразие", если бы он не был занят (почти симплектическим называют многообразие с всюду невырожденной 2-формой, которая не предполагается замкнутой). Поэтому в дальнейшем мы будем говорить о симплектических многообразиях с особенностями или, что то же самое, о многообразиях с особенностями симплектической структуры.

Предположим, что подмногообразие $S = F^{-1}(b)$ отвечает регулярному значению $b \in \mathbb{R}^{2m}$ гладкого отображения $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$. Пусть G – матрица Пуассона системы функций F_α , т.е.

$$G_{\alpha\beta} = \{F_\alpha, F_\beta\}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2m.$$

Из теоремы Э. Картана [19,30] следует, что

$$\dim Ker(\omega_0) = 2m - rk(G),$$

поэтому ω_0 вырождается в точках подмножества $\Theta \subset S$, которое определяется равенством $\det(G) = 0$. Мы предполагаем, что Θ не пусто и множество $S \setminus \Theta$ плотно в S . В аналитическом случае это эквивалентно $\emptyset \neq \Theta \neq S$. Такие особенности могут возникать при ограничении гамильтоновых систем на инвариантные подмногообразия. Примером являются обобщенные классы Апфельрота движений волчка Ковалевской в двойном поле. Класс I de facto был найден в известной работе [5], а недавно были открыты классы II, III и IV [71]. На открытом инвариантном подмножестве $S \setminus \Theta$ форма ω_0 определяет симплектическую структуру, в которой $\mathcal{X} = sgrad(H_0)$. Поскольку векторное поле \mathcal{X} определено всюду на S , то динамическая

система $sgrad(H_0)$ корректно определена на S . Однако, для произвольной гладкой функции f на S векторное поле $sgrad(f)$, вообще говоря, не определено в точках множества Θ , которые мы назовем особыми. Разрывы гамильтоновых полей и скобок Пуассона в особых точках, как правило, являются неустранимыми. С точки зрения объемлющего многообразия M особая точка $p \in S$ характеризуется тем, что пространство $T_p S$ не трансверсально своему косоортогональному дополнению $C_p S$. Это означает, что не определена косоортогональная проекция пространства $T_p M$ на подпространство $T_p S$. В тех точках $p \in S$, где $C_p S \oplus T_p S = T_p M$, форма ω_0 невырождена и косоортогональной проекцией вектора $sgrad_\omega(f)(p)$ на $T_p S$ является (корректно определенный) вектор

$$sgrad(f)(p) = sgrad_{\omega_0}(f)(p), \quad \text{где} \quad sgrad_\omega(f)(p) - sgrad(f)(p) \in C_p S.$$

В оставшейся части текста (M, ω) нигде не предполагается симплектическим многообразием (без особенностей), если иное не сказано прямо.

Рассмотрим абстрактный случай. Пусть замкнутая, почти всюду невырожденная 2-форма ω задана на $2n$ -мерном многообразии M и

$$\mathcal{Z}_\rho = Ker(\omega_\rho) = \{v \in T_\rho M \mid i_v \omega_\rho = 0\}, \quad \Theta = \{\rho \in M \mid \mathcal{Z}_\rho \neq \emptyset\}.$$

Заметим, что в данном случае $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k \geq 2$. В дальнейшем $\Theta \subset M$ непусто и имеет нулевую меру Лебега.

Определение 1 Пусть M – многообразие с замкнутой 2-формой ω , вырождающейся в точках подмножества Θ меры ноль в M . Тогда M называется симплектическим многообразием с особенностью. Если $x \in M$ и $rk(\omega_x) < \dim(M)$, то точка x называется особой.

Из определения следует, что M имеет четную размерность. Множество особых точек

$$\Theta = \{x \in M \mid rk(\omega_x) < \dim(M)\}$$

будем называть *особой поверхностью*. В дальнейшем символы M^{2n} и M обозначают симплектические многообразия с особенностью, Θ – особую поверхность, \mathcal{Z}_x – ядро формы в точке $x \in \Theta$,

$$\mathcal{Z}_x = Ker(\omega_x) = \{v \in T_x M \mid \omega_x(v, w) = 0 \quad \forall w \in T_x M\}.$$

Пространство \mathcal{Z}_x имеет четную размерность. Всюду предполагается $\Theta \neq \emptyset$.

Вырожденные особенности дифференциальных форм были исследованы в известной работе Ж. Мартине [76]. В частности, был изучен случай общего положения для замкнутых 2-форм. Он характеризуется тем, что

$$\dim \mathcal{Z}_\rho = 2, \quad \mathcal{Z}_\rho \not\subset T_\rho U, \quad d^2(\det \omega(\mathbf{x})) \neq 0, \quad (1.2)$$

где $U \subset \Theta$ – гладкая гиперповерхность в M и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ – произвольные локальные координаты. Тогда в окрестности точки $\rho \in U$ существуют координаты $(x_1, x_2, \mathbf{p}, \mathbf{q})$, в которых

$$\omega = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + \sum_{i=1}^{n-1} dp_i \wedge dq_i.$$

В работе [76] был также изучен случай, когда замкнутая 2-форма ω задана на \mathbb{R}^4 , а множество Θ является гладкой гиперповерхностью, на которой $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2$ и найдется такая гладкая кривая $\gamma \subset \Theta$, что

$$\mathcal{Z}_\rho \not\subset T_\rho \Theta \quad \forall \rho \in \Theta \setminus \gamma, \quad \mathcal{Z}_\rho \subset T_\rho \Theta \quad \forall \rho \in \gamma.$$

Тогда, если $\rho \in \gamma$ и $T_\rho \gamma \not\subset \mathcal{Z}_\rho$, то в окрестности ρ существуют координаты (x_1, x_2, x_3, x_4) , в которых

$$\omega = d(x_1 - x_3^2/2) \wedge dx_2 + d(x_1 x_3 \pm x_2 x_4 - x_3^3/3) \wedge dx_4.$$

О точках кривой γ , в которых $T_\rho \gamma \subset \mathcal{Z}_\rho$, известно мало [4]. Однако существуют результаты, позволяющие различать неэквивалентные вырождения форм в окрестностях таких точек [62].

За исключением результатов настоящей работы, в случае $\dim \mathcal{Z}_\rho > 2$ о локальной структуре замкнутой 2-формы ничего не известно. Из результатов работы [76] вытекает, что если почти в каждой точке $p \in \Theta$ ядро ω_p имеет размерность 4 (тогда в остальных точках $\dim \mathcal{Z}_p \geq 6$), то в случае общего положения $\text{codim } \Theta = 6$. Такие глубокие вырождения устраняются бесконечно малым шевелением формы ω .

Вырожденные особенности пуассоновых структур изучены значительно лучше, поскольку при вырождении тензора $h^{ij} = \{x_i, x_j\}$ (который на симплектическом многообразии является обратным к тензору формы ω_{ij}) все гамильтоновы поля

$$sgrad(f)^i = \sum_{j=1}^{2n} h^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

остаются корректно определенными на M . По теореме А. Вайнштейна о локальном расщеплении [92, 93], в окрестности каждой точки $\rho \in M$ матрица Пуассона (h^{ij}) приводится к блочно-диагональному виду

$$\left(\begin{array}{cccc} \boxed{\begin{matrix} 0 & A_{1,2} & \dots & A_{1,2k} \\ A_{2,1} & 0 & \dots & A_{2,2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{2k,1} & A_{2k,2} & \dots & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & \dots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} \end{array} \right), \quad (1.3)$$

где A – кососимметрическая матрица, равная нулю в точке ρ . Классическая теорема Дарбу отвечает случаю $\dim A(\rho) = 0 \times 0$.

В точке $\rho \in \Theta$ косые градиенты $sgrad(f)$ и скобки Пуассона

$$\{f, g\} = dg(sgrad(f)) = -df(sgrad(g)) = \sum_{i,j=1}^{2n} h^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_i},$$

как правило, не определены. Неизвестны общие условия существования предела

$$\lim_{\Theta \ni y \rightarrow \rho} sgrad(f)(y), \quad (1.4)$$

а также локальных координат, в которых матрица (ω_{ij}) или $(h^{ij}) = (\omega_{ij})^{-1}$ имеет вид (1.3). В работе [12] был впервые описан случай вырождения, при котором точка $\rho \in \Theta$ удовлетворяет некоторому условию правильности, и позднее такие особые точки получили название *контактных* [16]. При условии контактности точки ρ критерий существования предела (1.4), гладко зависящего от ρ , выглядит следующим образом:

$$df(\mathcal{Z}_y) = 0 \quad \forall y \in \Theta \cap O(\rho), \quad (1.5)$$

где $O(\rho)$ – достаточно малая окрестность ρ [12,16]. Одновременно была доказана теорема о приведении матрицы ω к виду (1.3). Вопрос о корректной определенности гамильтоновых полей в точках подмножества $\Theta = \{\det \omega = 0\}$, по-видимому, впервые исследовал С. Пневматикос [82]. Он доказал критерий (1.5) в предположении, что форма ω удовлетворяет очень естественному, но в случае $\dim Ker(\omega) > 2$ непроверяемому условию "generiques" [83,84]. Это условие состоит в том, что форма локально приводится к виду

$$\omega = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 2k} x_{\tau(\alpha,\beta)} dx_\alpha \wedge dx_\beta + \sum_{i=1}^{n-k} dp_i \wedge dq_i, \quad (1.6)$$

где $\tau(\alpha, \beta) \in \{1, \dots, 2k\}$. В случае $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2$ оно эквивалентно условию (1.2), т.к. вблизи особой точки замкнутые 2-формы общего положения приводятся к виду

$$\omega = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + \sum_{i=1}^{n-1} dp_i \wedge dq_i .$$

Однако, в случае $\dim \mathcal{Z}_\rho > 2$ неизвестен ответ на вопрос: какие замкнутые 2-формы заменой координат приводятся к виду (1.6) ? Поэтому теория С. Пневматикоса, de facto, относится к явно заданным в координатах формам. Заметим, что в случае $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2$ условие контактности точки ρ эквивалентно ее общему положению (1.2).

Тождество $df(Ker(\omega)) \equiv 0$ встречается также в [69, 80], как условие определенности скобки Пуассона $\{f, g\} \forall g$ в ситуации, когда

$$\forall \rho \in M \quad rk(\omega_\rho) = const < \dim M .$$

Без этого условия в работе [80] было доказано только следующее утверждение. При $df(\mathcal{Z}_\rho) = 0$ существует такой вектор v_ρ , определенный по модулю \mathcal{Z}_ρ , что

$$\omega(u, v_\rho) = df(u) \quad \forall u \in T_\rho M .$$

Последнее свойство вектора v_ρ характерно для косоградиента $sgrad(f)(\rho)$. Однако, для корректной определенности поля $sgrad(f)$ или, что эквивалентно, скобки Пуассона $\{f, g\}$ для любой функции g условие $df(Ker(\omega)) \equiv 0$, вообще говоря, не является достаточным (пример 3).

1.2.2. Первые результаты.

Симплектическое многообразие с особенностью может быть неориентируемым. Более того — оно может иметь любую топологию.

Теорема 3 *На любом четно-мерном многообразии M существует замкнутая, почти всюду невырожденная 2-форма.*

Доказательство. Как угодно вложим $2n$ - мерное многообразие M в пространство \mathbb{R}^{4n+2} (теорема Уитни позволяет вложить даже в \mathbb{R}^{4n+1}). Ограничим на M стандартную симплектическую структуру Ω из \mathbb{R}^{4n+2} . Получим замкнутую 2-форму ω . Пусть она вырождается в точке $x \in M$. Выберем в этой точке произвольное $2n$ - мерное подпространство $L_x \subset T_x \mathbb{R}^{4n+2}$, на котором Ω невырождена. В малой окрестности x гладко продеформируем поверхность M так, чтобы добиться $-L_x = T_x M$. Тогда в некоторой окрестности точки x форма ω станет невырожденной.

Очевидно, что после конечного или счетного множества таких деформаций мы избавимся от всех внутренних точек множества $\Theta \subset M$. Поскольку последнее утверждение, строго говоря, не является доказанным, мы дополним его явным построением замкнутой, почти всюду невырожденной 2-формы ω на M .

Рассмотрим стандартный $2n$ -мерный шар $D^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n}$, определяемый неравенством $\sum_{i=1}^{2n} x_i^2 \leq 1$. Введем на нем сферические координаты:

$$0 \leq r \leq 1, \quad -\pi/2 \leq \theta_i \leq \pi/2 \quad (1 \leq i \leq 2n-2), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{2n-3} \cos \theta_{2n-2} \cos \varphi \\ x_2 = r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{2n-3} \cos \theta_{2n-2} \sin \varphi \\ x_3 = r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{2n-3} \sin \theta_{2n-2} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_{2n-2} = r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 \\ x_{2n-1} = r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ x_{2n} = r \sin \theta_1, \end{array} \right.$$

Область регулярности этих координат определяется условиями:

$$0 < r \leq 1, \quad -\pi/2 < \theta_i < \pi/2 \quad \forall i.$$

Дополнение шара D^{2n} до этой области обозначим \mathcal{S} . Коразмерность кусочно-гладкого множества \mathcal{S} равна 2. Возьмем такую гладкую функцию $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$f(r) = -f(1-r) \quad \forall r \in [0; 1], \quad f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0 \quad \forall k \geq 0.$$

Дополнительно потребуем, чтобы $f(r) \neq 0$ в каждой точке $r \in (0; 1)$, кроме $r = 1/2$.

Пусть g – аналогичная функция на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$. Введем первообразные:

$$F(r) = \int_0^r f(\rho) d\rho, \quad G(\theta) = \int_{-\pi/2}^{\theta} g(\xi) d\xi.$$

Легко видеть, что для каждого $k \geq 0$

$$F^{(k)}(0) = F^{(k)}(1) = 0, \quad G^{(k)}(-\pi/2) = G^{(k)}(\pi/2) = 0.$$

Обозначим координату φ через θ_{2n-1} . Следующее выражение корректно определяет на шаре D^{2n} гладкую замкнутую 2-форму ω_0 :

$$\begin{aligned} \omega_0 = & f(r)g(\theta_1)dr \wedge d\theta_1 + f(r)dr \wedge \sum_{j=1}^{n-1} \left(g(\theta_{2j})d\theta_{2j} + G(\theta_{2j})d\theta_{2j+1} \right) + \\ & + F(r) \cdot \sum_{j=1}^{n-1} g(\theta_{2j})d\theta_{2j} \wedge d\theta_{2j+1}, \end{aligned}$$

которая обращается в ноль в точках \mathcal{S} и граничной сферы $S^{2n-1} = \partial D^{2n}$. Так как

$$\sqrt{\det(\omega_0)} = f(r)F(r)^{n-1} \cdot g(\theta_1)g(\theta_2) \cdot \dots \cdot g(\theta_{2n-2}),$$

то форма ω_0 невырождена почти всюду. Она также вырождается в тех точках шара D^{2n} , где $r = 1/2$ или $\theta_i = 0$ для некоторого $i \leq 2n - 2$.

Существует такое счетное семейство шаров $D_i^{2n} \subset M$, попарно пересекающихся разве лишь в граничных точках, что множество $Z = M \setminus \cup_i D_i^{2n}$ имеет меру ноль в M . Для каждого шара зафиксируем любой диффеоморфизм

$$\chi_i : D_i^{2n} \rightarrow D^{2n}.$$

Легко видеть, что на многообразии M однозначно и корректно определена гладкая (класса C^∞ !), замкнутая, почти всюду невырожденная 2-форма ω , которая совпадает с $\chi_i^*(\omega_0)$ на каждом шаре D_i^{2n} и равна нулю на множестве Z . То обстоятельство, что форма ω равна нулю в каждой точке множества $Z \cup \cup_i \partial D_i^{2n}$, является причиной ее гладкости на всем M , а не только внутри шаров D_i^{2n} \square .

Пример 1. В квадрате $\{(\varphi, \psi) : |\varphi| \leq \pi, |\psi| \leq \pi\}$ отождествим пары точек

$$(-\varphi, -\pi) \cong (\varphi, \pi), \quad (-\pi, \psi) \cong (\pi, \psi).$$

Получим многообразие K^2 — бутылку Клейна. Выражение $\sin \varphi d\varphi \wedge d\psi$ определяет гладкую замкнутую 2-форму ω на K^2 , невырожденную при $\varphi \notin \{0, \pm\pi\}$. Очевидно, что $\omega = 0$ в точках окружностей $\varphi = \pm\pi$ и $\varphi = 0$ \square .

Следующее утверждение играет ключевую роль в теории контактных особенностей симплектических структур, а также представляет самостоятельный интерес.

Лемма 1 Пусть (M, ω) есть симплектическое многообразие с особенностью, $\dim \mathcal{Z}_p = 2k \geq 2$ и для некоторой окрестности $O(p)$ точки $p \in \Theta \subset M$ множество $\Theta \cap O(p)$ является подмногообразием. Тогда, если

$$\mathcal{Z}_p + T_p\Theta = T_pM, \quad \dim \mathcal{Z}_y = 2k \quad \forall y \in \Theta \cap O(p)$$

и окрестность $O(p)$ достаточно мала, то существует такое $2k$ -мерное интегрируемое распределение Z на $O(p)$, что

$$Z(y) = \mathcal{Z}_y \quad \forall y \in \Theta \cap O(p).$$

Доказательство. Пусть $\dim \Theta \cap O(p) = m$ и $\dim M = 2n$, тогда $m < 2n$. Рассмотрим $m + 2k - 2n$ - мерное распределение

$$Z_0 : y \longmapsto \mathcal{Z}_y \cap T_y \Theta,$$

определенное на m - мерном подмногообразии $\Theta \cap O(p)$, и докажем его интегрируемость. Сначала мы должны проверить гладкость этого распределения. Выберем координаты $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{2n})$ так, чтобы ядро \mathcal{Z}_p было натянуто на векторы

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{2k}}(p).$$

Тогда в некоторой окрестности $O(p)$ отличен от нуля минор

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_{2k+1,2k+2} & \dots & \omega_{2k+1,2n-1} & \omega_{2k+1,2n} \\ \omega_{2k+2,2k+1} & 0 & \dots & \omega_{2k+2,2n-1} & \omega_{2k+2,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{2n-1,2k+1} & \omega_{2n-1,2k+2} & \dots & 0 & \omega_{2n-1,2n} \\ \omega_{2n,2k+1} & \omega_{2n,2k+2} & \dots & \omega_{2n,2n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

следовательно в каждой точке $y \in \Theta \cap O(p)$ ядро определяется системой уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{2k+1,2}v^2 + \dots \dots \dots + -\omega_{2k+1,2n-1}v^{2n-1} + \omega_{2k+1,2n}v^{2n} = 0 \\ \omega_{2k+2,1}v^1 + \omega_{2k+2,2}v^2 + \dots \dots \dots + \omega_{2k+2,2n-1}v^{2n-1} + \omega_{2k+2,2n}v^{2n} = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \omega_{2n-1,1}v^1 + \omega_{2n-1,2}v^2 + \dots + \omega_{2n-1,2n-2}v^{2n-2} + \omega_{2n-1,2n}v^{2n} = 0 \\ \omega_{2n,1}v^1 + \omega_{2n,2}v^2 + \dots + \omega_{2n,2n-2}v^{2n-2} + \omega_{2n,2n-1}v^{2n-1} = 0, \end{array} \right.$$

где координаты v^1, v^2, \dots, v^{2k} изменяются в \mathbb{R}^{2k} , а v^{2k+1}, \dots, v^{2n} явно через них выражаются. Поскольку элементы ω_{ij} гладко зависят от точки $y \in \Theta \cap O(p)$, то и ядро \mathcal{Z}_y гладко зависит от y .

Пусть векторные поля u и v на $\Theta \cap O(p)$ таковы, что $u_y \in \mathcal{Z}_y$ и $v_y \in \mathcal{Z}_y$ для всех y . Обозначим Ω ограничение формы ω на $\Theta \cap O(p)$. Используя формулу

$$L_u(\Omega) = i_u(d\Omega) + d(i_u(\Omega)) = 0$$

и обозначая w коммутатор полей u, v , получим

$$i_w(\Omega) = L_u(i_v(\Omega)) - i_v(L_u(\Omega)) = 0,$$

т.е. вектор w_y косоортогонален $T_y\Theta$. По условию $\mathcal{Z}_y + T_y\Theta = T_yM$, поэтому $w_y \in \mathcal{Z}_y$ и, следовательно, $w_y \in Z_0(y)$ в каждой точке $y \in \Theta \cap O(p)$. В силу критерия Фробениуса распределение Z_0 интегрируемо.

Фиксируем на $O(p)$ такое векторное поле z_1 , что

$$(z_1)_y \in \mathcal{Z}_y, \quad (z_1)_y \notin T_y\Theta \quad \forall y \in \Theta \cap O(p).$$

Тогда интегральные подмногообразия распределения Z_0 , увлекаемые потоком z_1 , заматают интегральные подмногообразия некоторого $m + 2k - 2n + 1$ - мерного распределения Z_1 . Оно определено на $m + 1$ - мерной поверхности Θ_1 , которую в потоке z_1 заматает $O(p) \cap \Theta$. Фиксируем на $O(p)$ такое векторное поле z_2 , что

$$(z_2)_y \in \mathcal{Z}_y, \quad (z_2)_y \notin T_y\Theta_1 \quad \forall y \in \Theta_1 \cap O(p).$$

Тогда интегральные подмногообразия распределения Z_1 , увлекаемые потоком z_2 , заматают интегральные подмногообразия некоторого $m + 2k - 2n + 2$ - мерного распределения Z_2 , определенного на $m + 2$ - мерной поверхности Θ_2 . Продолжая процесс, еще через $2n - m - 2$ шагов получим интегрируемое $2k$ - мерное распределение Z_{2n-m} , определенное в некоторой окрестности точки p . Осталось обозначить Z_{2n-m} через Z \square .

В рассматриваемом ниже примере 2 распределение $Z_0 : p \mapsto \mathcal{Z}_p$ неинтегрируемо, что легко проверяется с помощью критерия Фробениуса. Поэтому условие трансверсальности в лемме 1 существенно. Однако, аналогичное распределение в примере 3 оказалось интегрируемым. Поэтому отсутствие трансверсальности, само по себе, не влечет неинтегрируемость распределения Z_0 .

Обозначим $[v]_+$ направление вектора $v \neq 0$. Можно считать, что

$$[v]_+ = \{\lambda v : \lambda > 0\}.$$

При этом пусть $[v]$ обозначает прямую $\{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

В общем случае о предельном поведении гамильтоновых полей в особых точках ничего не известно.

Определение 2 Пусть на симплектическом многообразии с особенностью (M, ω) задана гладкая функция f , и точка p лежит в множестве Θ .

1. Вектор $w \in T_pM$ называется (собственным) предельным положением $\text{sgrad}(f)$ в точке p , если для некоторой последовательности точек $y_n \in M \setminus \Theta$,

сходящейся к ρ , существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgrad}(f)(y_n) = w .$$

2. Направление $l_\rho^+ \subset T_\rho M$ называется *несобственным предельным положением* $\operatorname{sgrad}(f)$ в точке ρ , если для некоторой последовательности точек $y_n \in M \setminus \Theta$, сходящейся к ρ , существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\operatorname{sgrad}(f)(y_n)]_+ = l^+ \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\operatorname{sgrad}(f)(y_n)| = +\infty .$$

Здесь $|\cdot|$ обозначает норму вектора в произвольной евклидовой метрике, например

$$|v| = \sqrt{\sum_{i=1}^{2n} (v^i)^2} .$$

Предельные положения $w \in T_x M$ будем также называть *собственными*, чтобы отличать их от несобственных предельных положений, которые представляют собой направления в пространстве $T_x M$. Следует различать предел и предельное положение. Последнее является предельной точкой множества косых градиентов или их направлений (в несобственном случае). Если в точке $x \in \Theta$ существует

$$\lim_{y \rightarrow x, y \notin \Theta} \operatorname{sgrad}(f)(y),$$

то поле $\operatorname{sgrad}(f)$ имеет только одно предельное положение в x , и оно является собственным. Если же

$$\lim_{y \rightarrow x, y \notin \Theta} |\operatorname{sgrad}(f)(y)| = +\infty, \quad \exists \lim_{y \rightarrow x, y \notin \Theta} [\operatorname{sgrad}(f)(y)]_+ ,$$

то единственное предельное положение $\operatorname{sgrad}(f)$ в точке x является несобственным.

Рассмотрим прямые следствия определения 2. Предполагая $d_x f \neq 0$ обозначим $\mathcal{H}_x(f)$ гиперплоскость, касательную к поверхности $f^{-1}(f(x))$ в точке x . Пусть $\mathcal{Z}_x(f)$ есть ядро формы ω , рассматриваемой на $\mathcal{H}_x(f)$. Его размерность является нечетной.

Предложение 1 *Если $d_x f \neq 0$ в особой точке x , то имеет место следующее.*

1. Все предельные положения $\operatorname{sgrad}(f)$ в точке x инцидентны $\mathcal{Z}_x(f)$.
2. Все несобственные предельные положения $\operatorname{sgrad}(f)$ в точке x инцидентны \mathcal{Z}_x , и ни одно из собственных предельных положений не принадлежит \mathcal{Z}_x .
- 3.1. Если $df(\mathcal{Z}_x) \neq 0$, то собственных предельных положений нет и

$$\mathcal{Z}_x(f) = \mathcal{Z}_x \cap \mathcal{H}_x(f), \quad \dim \mathcal{Z}_x(f) = \dim \mathcal{Z}_x - 1.$$

3.2. Если $df(\mathcal{Z}_x) = 0$ и $\dim \mathcal{Z}_x < \dim M$, то

$$\mathcal{Z}_x(f) \supset \mathcal{Z}_x, \quad \dim \mathcal{Z}_x(f) = \dim \mathcal{Z}_x + 1.$$

Доказательство. Поскольку

$$df(sgrad(f)) = \{f, f\} = 0 \quad \text{и} \quad \omega(v, sgrad(f)) = df(v),$$

то $sgrad(f)(y) \in \mathcal{Z}_y(f)$ в каждой точке $y \notin \Theta$, достаточно близкой к x . Отсюда следует п.1.

Пусть $\{x_n\}$ – последовательность из определения 2. Если $[u]_+$ есть соответствующее ей несобственное предельное положение, то $sgrad(f)(x_n) = \lambda_n u_n$, $\lambda_n \rightarrow +\infty$ для некоторой последовательности $u_n \in T_{x_n}M$, сходящейся к u . Тогда для произвольных $v \in T_x M$ и последовательности $v_n \in T_{x_n}M$, сходящейся к v , имеем:

$$\begin{aligned} \omega(v, u) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(v_n, u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n)^{-1} \cdot \omega(v_n, sgrad(f)(x_n)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n)^{-1} \cdot df_{x_n}(v_n) = 0 \cdot df_x(v) = 0. \end{aligned}$$

Итак $u \in \mathcal{Z}_x$, следовательно $[u]_+ \subset \mathcal{Z}_x$.

Т.к. при $df(\mathcal{Z}_x) \neq 0$ ядро \mathcal{Z}_x трансверсально $\mathcal{H}_x(f)$, то из $u \in \mathcal{Z}_x(f)$ следует, что вектор u косоортогонален $T_x M$, т.е. $u \in \mathcal{Z}_x$. Последнее несовместимо с условием $d_x f \neq 0$. Следовательно, если $df(\mathcal{Z}_x) \neq 0$, то предельных положений нет. Отношения между подпространствами \mathcal{Z}_x и $\mathcal{Z}_x(f)$ очевидны \square .

Следующее предложение показывает, что вблизи особой точки скорость потока $sgrad(f)$ может неограниченно расти, бесконечно меняя свое направление. Так могут вести себя, например, наматывающиеся на подмногообразии $P \subset \Theta$ траектории.

Предложение 2 Пусть $\dim \mathcal{Z}_x = 2$ и $df(\mathcal{Z}_x) = 0$. Предположим, что для некоторой окрестности $U(x)$ множество $S = \Theta \cap U(x)$ является гладкой поверхностью. Для каждого $y \in S$ введем в подпространстве \mathcal{Z}_y базис $(u(y), v(y))$, гладко зависящий от y . Рассмотрим на подмногообразии S функции

$$\varphi(y) = df(u(y)), \quad \psi(y) = df(v(y)).$$

Если ковекторы $d_x \varphi$ и $d_x \psi$ линейно независимы, то каждое одномерное подпространство в \mathcal{Z}_x инцидентно некоторому несобственному предельному положению поля $sgrad(f)$.

Доказательство. Так как $df(\mathcal{Z}_y) = 0$ эквивалентно $\varphi(y) = \psi(y) = 0$, то множество

$$P = \{y \in S : df(\mathcal{Z}_y) = 0\}$$

является гладким подмногообразием коразмерности 2 в S . Если x_1, \dots, x_m – координаты в S , в которых $\varphi(x) = x_1$ и $\psi(x) = x_2$, то P определяется уравнением $x_1 = x_2 = 0$. Пусть $\chi(t)$ – произвольная гладкая кривая в Θ , не соприкасающаяся с P в точке $x = \chi(0)$. Несобственные предельные положения $sgrad(f)$ в точке $\chi(t)$ определяют единственную прямую $l_t = \mathcal{Z}_{\chi(t)} \cap \mathcal{H}_{\chi(t)}(f)$ (предложение 1). Легко проверить, что прямая l_t имеет уравнение

$$\lambda_1 \chi_1(t) + \lambda_2 \chi_2(t) = 0$$

в координатах λ_1, λ_2 базиса $(u(\chi(t)), v(\chi(t)))$. Так как кривая $\chi(t)$ не соприкасается с P , то одно из чисел $\dot{\chi}_i(0)$, например $\dot{\chi}_1(0)$, отлично от нуля. Следовательно, в координатах λ_1, λ_2 базиса $(u(x), v(x))$ предельное положение l_t при $t \rightarrow 0$ определяется уравнением

$$\lambda_1 + \lambda_2 \dot{\chi}_2(0) / \dot{\chi}_1(0) = 0.$$

Очевидно, что так можно получить любое одномерное подпространство в \mathcal{Z}_x \square .

Пример 2. Пусть $M = \mathbb{R}^4$ и $\omega = x_3 dx_1 \wedge dx_2 + x_2 dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4$. Матрица формы ω имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & -1 \\ -x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество Θ совпадает с гиперплоскостью $x_2 = 0$. В каждой особой точке x ядро \mathcal{Z}_x натянуто на векторы

$$\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4},$$

в силу чего оно касается поверхности Θ . Рассмотрим функцию $f(x) = x_1 x_3 + x_2$. Прямая $\sigma \subset \Theta$, определяемая уравнением $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, состоит из таких точек x , в которых имеет место $df(\mathcal{Z}_x) = 0$, но как угодно близко к x найдется такая точка $y \in \Theta$, в которой $df(\mathcal{Z}_y) \neq 0$. В самом деле:

$$df \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right) = (x_1 dx_3 + x_3 dx_1 + dx_2) \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right) = x_1, \quad df \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} \right) = x_3.$$

Заметим, что в 3-мерном евклидовом пространстве Θ плоскость \mathcal{Z}_x ортогональна прямой σ в каждой точке $x \in \sigma$. Применим предложение 2 к исследованию предельного поведения поля $sgrad(f)$. В координатах x_1, x_3, x_4 на $S = \Theta$ имеем:

$$\varphi(x) = x_1, \quad \psi(x) = x_3.$$

Ковекторы $d\varphi_x$ и $d\psi_x$ линейно независимы в каждой точке $x \in \Theta$. Согласно предложению 2, каждое направление в \mathcal{Z}_x является несобственным предельным положением $sgrad(f)$. Легко найти интегральную траекторию поля $sgrad(f)$, удовлетворяющую начальным условиям

$$x_1(0) = a_1, \quad x_2(0) = a_2 \neq 0, \quad x_3(0) = a_3, \quad x_4(0) = a_4 .$$

Она определяется следующими уравнениями, где t – время:

$$x_1(t) = a_1 e^{-t/a_2}, \quad x_2(t) = a_2, \quad x_3(t) = a_3 e^{t/a_2}, \quad x_4(t) = a_4 + \left(\frac{a_1 a_3}{a_2} - 1 \right) t.$$

Интересно, что если прямую σ параметризовать параметром t так, что $x_4(t) = -t$, то каждый вектор скорости $\dot{\sigma}(t)$ будет предельным положением поля $sgrad(f)$ в точке $\sigma(t)$. В этом смысле прямую $\sigma(t)$, состоящую из особых точек, можно считать интегральной траекторией поля $sgrad(f)$ \square .

В фокусе внимания данной работы находятся гамильтоновы потоки, корректно определенные на некоторой окрестности $O(p)$ особой точки p или, по крайней мере, имеющие бесконечную фазовую скорость на поверхности $\Theta \cap O(p)$ и гладкое поле направлений на $O(p)$. Если поле $sgrad(f)$ гладко продолжается на $O(p)$, то из предложения 1 следует, что $df(\mathcal{Z}_q) = 0$ для каждого $q \in \Theta \cap O(p)$. Следующий пример показывает, что данное условие не является достаточным.

Пример 3. Пусть $f_1(u, v) = u_1 v_1 + u_3$, $f_2(u, v) = u_2 + v_1^2$, где $(u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Тогда уравнения $f_1(u, v) = f_2(u, v) = 0$ определяют 4-мерное подмногообразие $M \subset \mathbb{R}^6$. Пусть ω – ограничение на M стандартной формы $d\mathbf{u} \wedge d\mathbf{v}$, тогда (M, ω) – симплектическое многообразие с особенностью. Особая поверхность $\Theta \subset M$ является 3-мерной плоскостью, и определяется уравнениями $u_2 = u_3 = v_1 = 0$. В каждой точке $x = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \Theta$ ядро \mathcal{Z}_x натянуто на векторы

$$\frac{\partial}{\partial v_2}, \quad \frac{\partial}{\partial v_3} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} .$$

Для проверки этого вычислим форму

$$\omega = \sum_{i=1}^3 (du_i \wedge dv_i) |_M = du_1 \wedge dv_1 - 2v_1 dv_1 \wedge dv_2 - u_1 dv_1 \wedge dv_3 - v_1 du_1 \wedge dv_3.$$

В особой точке x имеем $\omega = du_1 \wedge dv_1 - u_1 dv_1 \wedge dv_3$ и, далее,

$$\forall X \in T_x M : \quad \omega \left(\frac{\partial}{\partial v_2}, X \right) = 0 ,$$

$$\begin{aligned}
\omega\left(\frac{\partial}{\partial v_3} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_1}, X\right) &= -(dv_1 \wedge (du_1 + u_1 dv_3))\left(\frac{\partial}{\partial v_3} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_1}, X\right), \\
(dv_1 \wedge (du_1 + u_1 dv_3))\left(\frac{\partial}{\partial v_3} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_1}\right) &= -u_1 + u_1 = 0 \quad \Rightarrow \\
\Rightarrow \omega\left(\frac{\partial}{\partial v_3} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_1}, X\right) &= \begin{vmatrix} 0 & X^{u_1} + u_1 X^{v_3} \\ 0 & X^{v_1} \end{vmatrix} = 0,
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. В координатах (u_1, v_1, v_2, v_3) матрица формы ω выглядит так:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -v_1 \\ -1 & 0 & -2v_1 & -u_1 \\ 0 & 2v_1 & 0 & 0 \\ v_1 & u_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Функция $f(u, v) = v_1$, очевидно, удовлетворяет условию $df(\mathcal{Z}_x) \equiv 0$, однако

$$\lim_{\Theta \ni y \rightarrow x} |sgrad(f)(y)| = +\infty \quad \forall x \in \Theta.$$

Для проверки достаточно найти компоненту $sgrad(f)$, которая в особой точке обращается в ∞ . Таковой является, например

$$(sgrad(f))^{v_2} = (sgrad(f))^3 = (\Omega^{-1})^{3,2} = \frac{1}{2v_1} \quad \square.$$

Из предложения 1 следует, что если $dx f \neq 0$ и 2-мерное ядро \mathcal{Z}_x трансверсально гиперплоскости $\mathcal{H}_x(f)$, то все предельные положения поля $sgrad(f)$ инцидентны прямой $\mathcal{Z}_x \cap \mathcal{H}_x(f)$ и являются несобственными. Очевидно, что существует не более двух таких предельных положений.

Теорема 4 Пусть на многообразии M заданы почти всюду невырожденная 2-форма ω и функция F , гладкая в окрестности точки $\theta \in \Theta$. Предположим, что $\dim \mathcal{Z}_\theta = 2$ и $dF(\mathcal{Z}_\theta) \neq 0$. Тогда

$$\lim_{\Theta \ni \theta' \rightarrow \theta} |sgrad(F)(\theta')| = +\infty$$

и в любых координатах \mathbf{x} в окрестности θ при $\theta' \rightarrow \theta$ существуют пределы

$$\lim_{Pf(\omega_{\theta'}) > 0} [sgrad(F)(\theta')]_+ = l_+, \quad \lim_{Pf(\omega_{\theta'}) < 0} [sgrad(F)(\theta')]_+ = l_-,$$

инцидентные прямой $\mathcal{Z}_\theta \cap \mathcal{H}_\theta(F)$. При этом, если в любой окрестности точки θ пфаффин $Pf(\omega)(\mathbf{x})$ принимает значения противоположных знаков, то $l_+ = -l_-$, иначе $l_+ = l_-$.

Доказательство Напомним, что $Pf(\omega) = \sqrt{\det \omega}$ – это любой из двух (отличающихся знаками) многочленов с целыми коэффициентами от элементов матрицы ω . Его можно записать в виде:

$$Pf(\omega) = \sum_{\sigma=(i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_n, j_n)} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_{i_1 j_1} \omega_{i_2 j_2} \dots \omega_{i_n j_n},$$

где в каждой перестановке σ все $i_s < j_s$ и $i_s < i_{s+1}$. При замене координат пфаффиан умножается на определитель матрицы Якоби.

Введем в окрестности $U(\theta)$ такие координаты $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{2n})$, что $\mathbf{x}(\theta) = \mathbf{0}$ и плоскость \mathcal{Z}_θ натянута на векторы $\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2$ в точке θ . В координатах \mathbf{x} имеем:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \operatorname{sgrad}(F)(\mathbf{x}) \cdot Pf(\omega)(\mathbf{x}), \quad D^i(\mathbf{x}) = - \sum_{j \neq i}^{2n} A_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial F}{\partial x_j},$$

$$A_{ij} = \sum_{\sigma=(i, j, i_2, j_2, \dots, i_n, j_n)} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_{i_2 j_2} \dots \omega_{i_n j_n}.$$

Поскольку при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ матрица ω в пределе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_{1,2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\omega_{1,2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{3,4} & \dots & \omega_{3,2n-1} & \omega_{3,2n} \\ 0 & 0 & \omega_{4,3} & 0 & \dots & \omega_{4,2n-1} & \omega_{4,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \omega_{2n,3} & \omega_{2n,4} & \dots & \omega_{2n,2n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

то из всех величин $A_{ij}(\mathbf{0})$ только $A_{1,2}(\mathbf{0})$ и $A_{2,1}(\mathbf{0})$ могут быть отличными от нуля. В самом деле, если хотя бы одно из чисел i или j превышает 2, то в каждой перестановке вида

$$(i, j, i_2, j_2, \dots, i_n, j_n),$$

где все $i_s < j_s$, хотя бы одна из пар i_s, j_s удовлетворяет условию $i_s \leq 2, j_s > 2$. Тогда $\omega_{i_s j_s}(\mathbf{0}) = 0$, поэтому все слагаемые величины $A_{ij}(\mathbf{0})$ равны нулю. Следовательно $D^i(\mathbf{0}) = 0$ для всех $i > 2$. Далее

$$A_{1,2}(\mathbf{0}) = \sum_{\sigma=(1,2,i_2,j_2,\dots,i_n,j_n)} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_{i_2 j_2} \dots \omega_{i_n j_n} = Pf(\tilde{\omega}),$$

$$i_s < j_s, \quad i_s < i_{s+1}, \quad A_{1,2}(\mathbf{0}) = -A_{2,1}(\mathbf{0}),$$

$$\tilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{3,4} & \dots & \omega_{3,2n-1} & \omega_{3,2n} \\ \omega_{4,3} & 0 & \dots & \omega_{4,2n-1} & \omega_{4,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{2n-1,3} & \omega_{2n-1,4} & \dots & 0 & \omega_{2n-1,2n} \\ \omega_{2n,3} & \omega_{2n,4} & \dots & \omega_{2n,2n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $D^1(\mathbf{0}) = -A_{1,2}(\mathbf{0})\partial F/\partial x_2$, $D^2(\mathbf{0}) = A_{1,2}(\mathbf{0})\partial F/\partial x_1$ и

$$\begin{aligned} \lim_{\theta' \rightarrow \theta} \text{sgrad}(F)(\theta') &= \lim_{\theta' \rightarrow \theta} \frac{1}{Pf(\omega)} \left(-Pf(\tilde{\omega}) \frac{\partial F}{\partial x_2}, Pf(\tilde{\omega}) \frac{\partial F}{\partial x_1}, 0, \dots, 0 \right) = \\ &= \lim_{\theta' \rightarrow \theta} \frac{1}{\omega_{1,2}} \left(-\frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_1}, 0, \dots, 0 \right). \end{aligned}$$

По условию $dF(\mathcal{Z}_\theta) \neq 0$, поэтому вектор-сомножитель отличен от нуля в точке θ . В силу $\dim \mathcal{Z}_\theta = 2$ матрица $\tilde{\omega}(\mathbf{0})$ невырождена, поэтому знак $Pf(\omega)(\mathbf{x})$ вблизи θ определяется знаком $\omega_{1,2}$. Отсюда сразу следует утверждение теоремы. Условие знакопостоянства $Pf(\omega)$ инвариантно, но его знак неинвариантен, поэтому направления l_\pm при заменах координат могут меняться местами \square .

В теореме 4 не предполагается замкнутость ω , поэтому она может быть использована для изучения вырожденных особенностей т.н. почти симплектических многообразий [90]. Из теоремы 4 вытекает общее утверждение о типичном поведении гамильтоновых потоков вблизи особой точки p . Единственным предположением о почти всюду невырожденной 2-форме ω является максимальность ее ранга в точке вырождения p , что эквивалентно $\dim \text{Ker}(\omega_p) = 2$.

Следствие 1 Пусть (M, ω) – симплектическое (или почти симплектическое) многообразие с особенностью и f – гладкая функция на некоторой окрестности $U(p)$ такой точки $p \in \Theta$, что $\dim(\mathcal{Z}_p) = 2$. Если $df(\mathcal{Z}_p) \neq 0$ и вблизи точки p множество Θ является гладким подмногообразием, то для некоторой шаровой окрестности $O \ni p$ и связного подмногообразия $S = O \cap \Theta$ имеет место следующее.

1. При $\text{codim } S > 1$ поле направлений $\text{sgrad}(f)$ гладко продолжается на O .
2. При $\text{codim } S = 1$ гиперповерхность S разрезает O на полушария O_+ и O_- так, что $O = O_+ \cup O_-$ и $O_+ \cap O_- = S$. Если пфафффиан $Pf(\omega)$ имеет постоянный знак на множестве $O \setminus S$, то поле направлений $\text{sgrad}(f)$ гладко продолжается на O , иначе оно гладко продолжается только на каждое из полушарий O_\pm . В последнем случае в каждой точке S предельные направления $\text{sgrad}(f)$ из O_+ и O_- являются противоположными.

3. В бесконечной близости от S фазовая скорость потока $\text{sgrad}(f)$ бесконечно велика.

Возникающая в случае $\text{codim } S = 1$ альтернатива связана со знаком $Pf(\omega)$ в бесконечно тонком слое, прилегающем к гиперповерхности S . Если при переходе из полушария $O_+(p)$ в полушарие $O_-(p)$ через их общую границу S знак $Pf(\omega)$ не меняется, то поле направлений $sgrad(f)$ гладко продолжается на весь шар $O(p)$. Иначе на каждом из полушарий оно продолжается так, что в точках S предельные направления из разных полушарий оказываются противоположными.

В дальнейшем, накладывая на особые точки условие контактности, мы узнаем о предельном поведении гамильтоновых полей существенно больше. Это позволит доказать аналог теоремы Дарбу для многообразий с контактными особенностями симплектической структуры, т.е. доказать существование локальных координат, в которых матрица формы ω приводится к блочно-диагональному виду (1.3). Этот результат получен ценою жесткого ограничения возможных вырождений формы. Однако легко видеть, что для симплектических многообразий с особенностями общность формулировки теоремы Вайнштейна недостижима.

Предложение 3 Пусть матрица замкнутой, почти всюду невырожденной 2-формы ω в локальных координатах $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{2k}, x_{2k+1}, \dots, x_{2n})$, заданных в окрестности точки $\rho \in \Theta$, имеет блочно-диагональный вид

$$\left(\begin{array}{cccc|cc|c} \hline 0 & \omega_{1,2} & \dots & \omega_{1,2k} & & & \\ \omega_{2,1} & 0 & \dots & \omega_{2,2k} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ \omega_{2k,1} & \omega_{2k,2} & \dots & 0 & & & \\ \hline & & & & \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}} & & \\ & & & & & \dots & \\ \hline \end{array} \right)$$

где подматрица Ω равна нулю в точке ρ . Тогда, если для некоторой окрестности $U(\rho)$ множество $S = \Theta \cap U(\rho)$ является гладким подмногообразием, то ядро \mathcal{Z}_ρ формы ω в точке ρ трансверсально $T_\rho S$.

Доказательство. В силу замкнутости формы ω матрица Ω в левом верхнем углу не зависит от координат x_{2k+1}, \dots, x_{2n} . В самом деле, при $1 \leq i, j \leq 2k$ имеем

$$\frac{\partial \omega_{i,j}}{\partial x_{2k+s}} - \frac{\partial \omega_{2k+s,j}}{\partial x_i} + \frac{\partial \omega_{2k+s,i}}{\partial x_j} = 0, \quad \omega_{2k+s,j} \equiv 0, \quad \omega_{2k+s,i} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \omega_{i,j}}{\partial x_{2k+s}} = 0.$$

Поэтому в координатах \mathbf{x} подмногообразия S определяется некоторой системой уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_{2k}) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_{2k}) = 0. \end{cases}$$

Поскольку ядро \mathcal{Z}_ρ натянуто на векторы

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{2k}},$$

его трансверсальность подпространству $T_\rho S$ очевидна \square .

Из предложения 3 вытекает, что в примерах 2 и 3, где ядра форм касаются особых гиперповерхностей, в окрестностях особых точек их матрицы нельзя привести к блочно-диагональному виду.

§1.3. Частный интеграл, связанный с особенностью симплектической структуры инвариантного подмногообразия.

Пусть поверхность $M \subset N$, которая инвариантна относительно гамильтоновой системы $sgrad(H)$, задана как совместный уровень некоторых функций на симплектическом многообразии (N, Ω) . Существует ли частный интеграл, который можно явно получить из матрицы Пуассона этих функций? Четно-мерная, инвариантная поверхность M может оказаться симплектическим многообразием, однако разумнее ожидать, что индуцированная на ней форма имеет вырожденную особенность. Особая поверхность $\Theta \subset M$ всегда инвариантна относительно потока $sgrad_{\Omega|_M}(H)$, если таковой корректно определен на M . Поэтому естественно, что в некоторых случаях поверхность

$$\Theta = \{x \in M : \det(\Omega|_M(x)) \neq 0\}$$

является нулевым уровнем некоторого интеграла $sgrad(H)$. Можно предположить, что он равен определителю матрицы Пуассона функций, определяющих вложение $M \subset N$. Дело в том, что особая поверхность Θ является нулевым уровнем этого определителя (рассматриваемого на M). В данном параграфе найдено необходимое и достаточное условие такого события. Возникающий частный интеграл нетривиален, если и только если индуцированная симплектическая структура невырождена хотя бы в одной точке. Поэтому инвариантная поверхность должна быть четно-мерной.

Рассмотрим симплектическое многообразие (N, ω) и гладкую функцию H на N .

Определение 3 Если $\{f, H\}(x) = 0$ для всех $x \in M$, т.е. $f|_M$ является первым интегралом $(sgrad(H))|_M$, то функция f называется частным интегралом $sgrad(H)$ на M .

Для некоторых независимых гладких функций $f_j : N \rightarrow \mathbb{R}$ рассмотрим регулярное подмногообразие

$$M = \left\{ x \in N \mid f_1(x) = \dots = f_{2n}(x) = 0 \right\}, \quad (1.7)$$

которое инвариантно относительно $sgrad(H)$, т.е. $sgrad(H)(x) \in T_x M$ для всех $x \in M$. Следующее предложение является хорошо известным фактом [30].

Предложение 4 Поверхность M инвариантна относительно $sgrad(H)$, если и только если

$$\{H, f_j\} = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_{j,k} f_k \quad (1 \leq j \leq 2n) \quad (1.8)$$

для некоторых гладких функций $\alpha_{j,k}$, которые определены в окрестности M .

Почти все известные интегрируемые гамильтоновы системы заданы на кокасательных расслоениях или на орбитах коприсоединенного действия. Однако представляется, что в будущем станут более актуальными системы, которые удастся проинтегрировать только на инвариантных подмногообразиях. По-видимому первый содержательный пример такой задачи был описан в [5], а ее фазовая топология исследована в работе [95]. Эта система задана на подмногообразии

$$M = \left\{ x \in N \mid f_1(x) = 0, f_2(x) = 0 \right\}, \quad (1.9)$$

где N является регулярной 6-мерной орбитой коприсоединенного действия, и она описывает волчок Ковалевской в двух силовых полях. Фазовое многообразие M является поверхностью нулевого уровня общего интеграла вида $f_1^2 + f_2^2$. Последний представляет собой такое обобщение интеграла Ковалевской, что M соответствует 1 классу Аппельрота классической задачи (см. § 2.3). Другие 4-мерные инвариантные подмногообразия вида (1.9), которые аналогичны 2, 3 и 4 классам Аппельрота, были недавно найдены в [71]. Во всех вышеуказанных случаях возникают частные интегралы вида $\{f_1, f_2\}$, которые наблюдались и в других задачах механики твердого тела. Известно и легко проверить, что при

$$\{H, f_1\} = \varphi f_2, \quad \{H, f_2\} = \psi f_1$$

Функция $\{f_1, f_2\}$ является частным интегралом системы $sgrad(H)$ на подмногообразии (1.9). Другое хорошо известное условие :

$$\{H, f_1\} = gf_1, \quad \{H, f_2\} = -gf_2 .$$

В обоих случаях имеем тождество

$$trace(\alpha)(x) = \alpha_{1,1} + \alpha_{2,2} = 0 \quad \forall x \in M,$$

где матрица α определяется посредством (1.8) и $n = 1$. Оказывается, что верно обратное: при условии

$$trace(\alpha)(x) = 0$$

всегда существует частный интеграл вида $\{f_1, f_2\}$ (т.к. по предложению 5 функция $4\{f_1, f_2\}^2$ является частным интегралом). В данной работе этот, по-видимому, впервые сформулированный критерий доказан и обобщен для любого $n \geq 1$.

Лемма 2 Пусть $1 \leq i, j \leq 2n$ и $Pf(\mathcal{P})$ есть пфафффиан матрицы Пуассона

$$\mathcal{P} = (\{f_i, f_j\}),$$

где функции f_i заданы на M (1.7). Тогда $\forall x \in M$ имеет место:

$$\{Pf(\mathcal{P}), H\}(x) = -trace(\alpha_{i,j})(x) \cdot Pf(\mathcal{P})(x) .$$

Доказательство. Если $(\omega_{i,j})$ есть кососимметрическая $2n \times 2n$ - матрица, то многочлен

$$Pf(\omega) \in \mathbf{Z}[\omega_{1,2}, \dots, \omega_{i,j}, \dots, \omega_{2n-1,2n}],$$

удовлетворяющий условию

$$(Pf(\omega))^2 = \det(\omega),$$

называется пфафффианом матрицы $(\omega_{i,j})$. Возьмем множество S_{2n} всех перестановок набора $(1, \dots, 2n)$ и выберем подмножество

$$\tilde{S}_{2n} = \left\{ (i_1, j_1, \dots, i_n, j_n) \in S_{2n} \mid \forall t \quad i_t < j_t, i_t < i_{t+1} \right\}.$$

Легко проверить, что

$$Pf(\omega) = \sum_{\sigma=(i_1, j_1, \dots, i_n, j_n) \in \tilde{S}_{2n}} sgn(\sigma) \cdot \omega_{i_1, j_1} \cdot \dots \cdot \omega_{i_n, j_n},$$

где $sgn(\sigma) = |\sigma|$ – знак перестановки. Следовательно

$$Pf(\mathcal{P}) = \sum_{\sigma \in \tilde{S}_{2n}} sgn(\sigma) \cdot \{f_{i_1}, f_{j_1}\} \cdots \{f_{i_n}, f_{j_n}\}.$$

Используя тождество Якоби $\{\{f_i, f_j\}, H\} = \{H, f_j\}, f_i\} - \{\{H, f_i\}, f_j\}$ получаем следующее выражение для $\{Pf(\mathcal{P}), H\}$ в любой точке $x \in M$:

$$\sum_{\sigma \in \tilde{S}_{2n}} sgn(\sigma) \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^{2n} \alpha_{j_1, s} \{f_s, f_{i_1}\} \{f_{i_2}, f_{j_2}\} \cdots \{f_{i_n}, f_{j_n}\} \\ - \sum_{s=1}^{2n} \alpha_{i_1, s} \{f_s, f_{j_1}\} \{f_{i_2}, f_{j_2}\} \cdots \{f_{i_n}, f_{j_n}\} \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ + \sum_{s=1}^{2n} \alpha_{j_n, s} \{f_s, f_{i_n}\} \{f_{i_1}, f_{j_1}\} \cdots \{f_{i_{n-1}}, f_{j_{n-1}}\} \\ - \sum_{s=1}^{2n} \alpha_{i_n, s} \{f_s, f_{j_n}\} \{f_{i_1}, f_{j_1}\} \cdots \{f_{i_{n-1}}, f_{j_{n-1}}\}. \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Из суммы (1.10) возьмем ненулевое слагаемое вида

$$sgn(\sigma) \alpha_{j_p, s} \{f_s, f_{i_p}\} \{f_{i_1}, f_{j_1}\} \cdots \{f_{i_{p-1}}, f_{j_{p-1}}\} \{f_{i_{p+1}}, f_{j_{p+1}}\} \cdots \{f_{i_n}, f_{j_n}\}. \quad (1.11)$$

Очевидно, что $s = i_q$ или $s = j_q$. Если $s = i_q$ и

$$\sigma = (i_1, j_1, \dots, i_p, j_p, \dots, i_q, j_q, \dots, i_n, j_n)$$

то рассмотрим следующие перестановки:

$$\sigma' = (i_1, j_1, \dots, i_p, i_q, \dots, j_q, j_p, \dots, i_n, j_n) \quad \text{если } j_q < j_p,$$

$$\sigma' = (i_1, j_1, \dots, i_p, i_q, \dots, j_p, j_q, \dots, i_n, j_n) \quad \text{если } j_q > j_p$$

(взяты из \tilde{S}_{2n}). Выберем из (1.10) следующее слагаемое

$$sgn(\sigma') \alpha_{j_p, s} \{f_s, f_{j_q}\} \{f_{i_1}, f_{j_1}\} \cdots \{f_{i_p}, f_{i_q=s}\} \cdots \{f_{i_n}, f_{j_n}\}$$

или, соответственно,

$$-sgn(\sigma') \alpha_{j_p, s} \{f_s, f_{j_q}\} \{f_{i_1}, f_{j_1}\} \cdots \{f_{i_p}, f_{i_q=s}\} \cdots \{f_{i_n}, f_{j_n}\},$$

которое отличается от (1.11) только знаком. Если $s = j_q$ и

$$\sigma = (i_1, j_1, \dots, i_p, j_p, \dots, i_q, j_q, \dots, i_n, j_n),$$

то рассмотрим следующие перестановки:

$$\sigma' = (i_1, j_1, \dots, i_p, j_q, \dots, i_q, j_p, \dots, i_n, j_n) \quad \text{если } i_q < j_p,$$

$$\sigma' = (i_1, j_1, \dots, i_p, j_q, \dots, j_p, i_q, \dots, i_n, j_n) \quad \text{если } i_q > j_p$$

(взяты из \tilde{S}_{2n}). Выберем из (1.10) следующее слагаемое

$$\operatorname{sgn}(\sigma') \alpha_{j_p, s} \{f_s, f_{i_q}\} \{f_{i_1}, f_{j_1}\} \cdots \{f_{i_p}, f_{j_q=s}\} \cdots \{f_{i_n}, f_{j_n}\},$$

или, соответственно,

$$-\operatorname{sgn}(\sigma') \alpha_{j_p, s} \{f_s, f_{i_q}\} \{f_{i_1}, f_{j_1}\} \cdots \{f_{i_p}, f_{j_q=s}\} \cdots \{f_{i_n}, f_{j_n}\},$$

которое отличается от (1.11) только знаком.

Опуская аналогичные рассуждения можно заключить следующее. Предположим, что некоторое слагаемое суммы (1.10) отлично от нуля и соответствующий ему множитель $\alpha_{j_p, s}$ или $\alpha_{i_p, s}$ не является диагональным. Тогда в сумме (1.10) всегда найдется слагаемое, которое отличается только знаком. Поэтому сумма (1.10) равна

$$-\sum_{\sigma \in \tilde{S}_{2n}} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\begin{array}{c} (\alpha_{i_1, i_1} + \alpha_{j_1, j_1} + \cdots + \alpha_{i_n, i_n} + \alpha_{j_n, j_n}) \cdot \\ \cdot \{f_{i_1}, f_{j_1}\} \cdots \cdots \{f_{i_n}, f_{j_n}\} \end{array} \right).$$

Первый множитель внутри больших скобок равен $\operatorname{trace}(\alpha_{i, j})$ \square .

Теорема 5 *Рассмотрим симплектическое многообразие N и гладкую функцию H на нем. Пусть $M \subset N$ есть регулярное подмногообразие вида (1.7), которое инвариантно относительно $\operatorname{sgrad}(H)$. Тогда функция*

$$\det(\{f_i, f_j\})$$

является частным интегралом системы $\operatorname{sgrad}(H)$ на M , если и только если

$$\forall x \in M \quad \operatorname{trace}(\alpha_{i, j})(x) = 0, \quad (1.12)$$

где матрица $(\alpha_{i, j})$ определена посредством (1.8) и $1 \leq i, j \leq 2n$.

Доказательство является прямым следствием леммы 2. Если функции f_i заменить на независимые функции $\tilde{f}_j(f_1, \dots, f_{2n})$ то

$$\tilde{\alpha}_{k, l}(x) = \sum_{i, j=1}^{2n} \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial f_i} \alpha_{i, j}(x) \frac{\partial f_j}{\partial \tilde{f}_l} \quad \forall x \in M.$$

Следовательно $(\alpha_{i, j})$ есть матрица некоторого линейного оператора, и условие $\operatorname{trace}(\alpha_{i, j}) = 0$ не зависит от выбора уравнений (1.7) \square .

Существует интересный случай, когда условие (1.12) выполнено. Рассмотрим симплектическое многообразие N и гладкую функцию $f : N \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть $M \subset N$ – гладкая, связная компонента множества

$$\{x \in N : d_x f = 0\}. \quad (1.13)$$

Такое многообразие M называется *критическим* для f . Если f является общим интегралом $sgrad(H)$, т.е. $\{f, H\} \equiv 0$, то M инвариантно относительно $sgrad(H)$.

Определение 4 Пусть M – критическое многообразие для функции $f : N \rightarrow \mathbb{R}$. Если $\forall x \in M$ функция $f|_{D(x)}$ является функцией Морса, где $D(x) \subset N$ есть произвольный, достаточно малый 2-диск, который трансверсален M , то M называется невырожденным.

Чтобы проверить это условие достаточно ограничить гессиан $d^2 f(x)$ на произвольное пространство $L_x \subset T_x N$, которое трансверсально $T_x M$. Если получается невырожденная билинейная форма $\forall x \in M$, то многообразие M является невырожденным критическим для f . Если каждая связная компонента множества (1.13) обладает этим свойством, то f называется функцией Ботта [30,46].

Предложение 5 Рассмотрим симплектическое многообразие N и такие гладкие функции H, f на нем, что $\{H, f\} \equiv 0$. Пусть $M \subset N$ есть регулярное подмногообразие вида (1.7), которое является невырожденным критическим для f . Тогда существует такой частный интеграл Φ поля $sgrad(H)$ на M , что в произвольных локальных координатах вида

$$(\mathbf{f}, \mathbf{x}) = (f_1, \dots, f_{2n}, x_1, \dots, x_{2m})$$

выполнено следующее равенство :

$$\Phi(\mathbf{f}, \mathbf{x}) = \det(\{f_i, f_j\}) \cdot \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial f_i \partial f_j}\right) \quad (1 \leq i, j \leq 2n). \quad (1.14)$$

Доказательство. Из леммы Морса следует, что в некоторой окрестности U_x каждой точки $x \in M$ существуют такие независимые функции $g_j(f_1, \dots, f_{2n})$, что

$$f = \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j g_j^2 \quad \varepsilon_j = \pm 1, \quad \{H, g_i\} = \sum_{j=1}^{2n} \beta_{i,j} g_j$$

и подмногообразие $M \cap U_x$ можно определить уравнением

$$g_1 = \dots = g_{2n} = 0 .$$

Далее мы имеем:

$$0 = \{H, f\} = \left\{H, \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j g_j^2\right\} = 2 \sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_j g_j \{H, g_j\} = 2 \sum_{i,j=1}^{2n} \varepsilon_j \beta_{j,i} g_j g_i.$$

Фиксируем число $k \in \{1, \dots, 2n\}$ и предположим, что $g_j(z) = 0$ для всех $j \neq k$, но $g_k(z) \neq 0$. Поскольку мы имеем

$$\varepsilon_k \beta_{k,k}(z) g_k^2(z) = 0$$

то $\beta_{k,k}(z) = 0$. Следовательно $\text{trace}(\beta_{i,j})(x) = 0$ для всех $x \in M$. Поэтому функция $\det(\{g_i, g_j\})$ является частным интегралом системы $\text{sgrad}(H)$ на M (теорема 5).

Легко видеть, что гессиан

$$d^2 f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial g_i \partial g_j} \right) = \text{diag}(2\varepsilon_1, \dots, 2\varepsilon_{2n}).$$

При замене функций g_1, \dots, g_{2n} матрицы $d^2 f(x)$ и $(\{g_i, g_j\})$ ведут себя, как ковариантный и контравариантный тензоры. Поэтому их произведение является матрицей некоторого линейного оператора. Один из его инвариантов есть детерминант. Он равен

$$\pm 2^{2n} \cdot \det(\{g_i, g_j\}).$$

Поскольку эта функция является частным интегралом, то и функция (1.14) является частным интегралом \square .

Глава 2. Симплектические особенности и теория А.Т.

Фоменко.

§2.1. Теория А.Т. Фоменко.

Для функции F на многообразии N обозначим C_F множество $\{p \in N : d_p F = 0\}$.

Определение 1 Гладкая функция $F : N \rightarrow \mathbb{R}$ называется боттовской (функцией Ботта), если каждая связная компонента множества C_F является подмногообразием положительной коразмерности, и в каждой точке $p \in C_F$ для некоторого (и тогда любого) подпространства $L_p \subset T_p N$, трансверсального $T_p C_F$, ограничение гессиана $d_p^2 F$ на L_p является невырожденным.

Пусть на 4 - мерном, симплектическом многообразии M^4 дана гамильтонова система $sgrad H$. Ее интегрируемость по Лиувиллю означает, что существует независимая от H , гладкая функция $F_1 : M^4 \rightarrow \mathbb{R}$, являющаяся интегралом. Последнее эквивалентно $\{F_1, H\} = 0$. Подмногообразии $Q_h^3 = H^{-1}(h)$, отвечающее регулярному значению h гамильтониана $H : M^4 \rightarrow \mathbb{R}$, называется изоэнергетическим. Обозначим F ограничение интеграла F_1 на $Q_h^3 \subset M^4$. Для всех его регулярных значений f каждая компактная, связная компонента $F^{-1}(f)$ является вложенным тором $T^2 \subset Q_h^3$ (тором Лиувилля). В дальнейшем многообразии Q_h^3 предполагается замкнутым (т.е. компактным и не имеющим края), а интеграл $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$ является функцией Ботта. Тогда критические точки F составляют подмногообразия, связные компоненты которых относятся к следующим трем типам: окружность S^1 , тор T^2 и бутылка Клейна K^2 .

Критические торы T^2 (если они есть) обычно игнорируют, поскольку с точки зрения фазовой топологии они ничем не отличаются от торов Лиувилля. Кроме этого, на любом критическом торе $T^2 \subset Q_h^3$ боттовская функция $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$ достигает локального максимума или минимума $f_0 = F(T^2)$, в силу чего вблизи T^2 можно заменить F на интеграл $F_0 = \pm \sqrt{|F - f_0|}$. Тогда тор T^2 отвечает регулярному значению 0 интеграла F_0 (определенного локально). Поэтому поток $sgrad H$ на торе T^2 не имеет качественных различий с потоками на близких торах Лиувилля. Теория допускает наличие критических многообразий типа K^2 , и они возникали в связи с геодезическими потоками на бутылке Клейна [7]. Последние не встречаются в математической физике, поэтому они исключены из рассмотрения. В дальнейшем предполагается, что все критические многообразия интеграла $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$ являются вложенными окружностями S_c^1 .

Условие боттовости подразделяет критические окружности S_c^1 на два типа. Каждый из них определяется индексом критической точки p функции F , рассматриваемой на произвольном, достаточно малом, трансверсальном к S_c^1 диске $D^2 \subset Q_h^3$ с центром $p \in S_c^1$. Поскольку окружность S_c^1 является замкнутой траекторией $sgrad H$, индекс не зависит от точки $p \in S_c^1$. Заметим, что $F : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ есть функция Морса. Если индекс критической точки p равен 0 или 2, то $f_c = F(S_c^1)$ является (локальным) минимумом или максимумом интеграла $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Такую окружность S_c^1 назовем экстремальной. Если индекс точки p равен 1, то f_c есть седловое критическое значение, и окружность S_c^1 называется седловой.

Седловые критические окружности, в свою очередь, подразделяются на два класса. Каждому из них соответствует одна из двух возможных топологий т.н. сепаратрисной диаграммы. Она представляет собой объединение интегральных траекторий поля $grad F$, входящих в окружность S_c^1 при $t \rightarrow +\infty$ и выходящих из нее при $t \rightarrow -\infty$, рассматриваемых в как угодно малой окрестности S_c^1 [58]. Градиент $grad$ вычисляется в произвольной римановой метрике на Q_h^3 . Сепаратрисная диаграмма состоит из двух поверхностей, трансверсально пересекающихся по окружности S_c^1 . Обе эти поверхности диффеоморфны кольцу $S^1 \times D^1$ или обе диффеоморфны листу Мебиуса $S^1 \tilde{\times} D^1$. В первом случае сепаратрисная диаграмма называется ориентируемой, а во втором — неориентируемой.

Пусть f_c есть любое критическое значение интеграла $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Обозначим \mathcal{N}_c связную компоненту $F^{-1}(f_c)$, которая содержит хотя бы одну критическую точку. Пусть число $\varepsilon > 0$ настолько мало, что на промежутке $[f_c - \varepsilon; f_c + \varepsilon]$ нет критических значений F кроме f_c . Обозначим $U(\mathcal{N}_c)$ связную компоненту $F^{-1}[f_c - \varepsilon; f_c + \varepsilon]$, которая содержит множество \mathcal{N}_c . Компоненты края $U(\mathcal{N}_c)$ являются торами Лиувилля.

В дальнейшем предполагается, что система $sgrad H$ на изоэнергетическом многообразии Q_h^3 является топологически устойчивой. Это означает, что при малом возмущении h фазовая топология Q_h^3 не меняется. В частности, число критических окружностей на любом *особом слое* $\mathcal{N}_c \subset Q_h^3$ остается постоянным. При этом почти все торы Лиувилля $T^2 \subset Q_h^3$ предполагаются нерезонансными. Иначе система вырождается до одной степени свободы, а слоение многообразия Q_h^3 на инвариантные торы (*слоение Лиувилля*) определено неоднозначно и зависит от выбора интеграла F . Как правило топологическая устойчивость имеет место, если прямая $\{(h, f_1) : f_1 \in \mathbb{R}\}$ только трансверсально и во внутренних точках пересекает гладкие отрезки бифуркационной диаграммы отображения $(H, F_1) : M^4 \rightarrow \mathbb{R}$ [7].

Предположим, что на $U(\mathcal{N}_c)$ задана ориентация, и на всех критических окружностях в \mathcal{N}_c фиксированы ориентации, определяемые направлениями потока $sgrad H$. Пусть $U(\mathcal{N}_c')$ есть компактная окрестность особого слоя $\mathcal{N}_c' \subset F'^{-1}(f')$ для какой-нибудь интегрируемой системы $sgrad H'$ с интегралом $F' : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей аналогичным условиям. Пусть существует такой диффеоморфизм $j : U(\mathcal{N}_c) \rightarrow U(\mathcal{N}_c')$, что

$$\begin{aligned} \forall f \in [f_c - \varepsilon; f_c + \varepsilon] \quad \exists f' \in [f'_c - \varepsilon'; f'_c + \varepsilon'] \\ j(F^{-1}(f) \cap U(\mathcal{N}_c)) = F'^{-1}(f') \cap U(\mathcal{N}_c') . \end{aligned}$$

Проще говоря, диффеоморфизм j переводит одно слоение Лиувилля в другое (совмещает слоения на атомах). Заметим, что $j(\mathcal{N}_c) = \mathcal{N}_c'$ и отображения j, j^{-1} совмещают между собой критические окружности интегралов F, F' . При этом экстремальные окружности отображаются на экстремальные, а седловые — на седловые. Предположим, что j сохраняет ориентации многообразий $U(\mathcal{N}_c)$ и $U(\mathcal{N}_c')$, а также ориентации всех критических окружностей. Тогда назовем многообразия $U(\mathcal{N}_c)$ и $U(\mathcal{N}_c')$ топологически эквивалентными.

Определение 2 *Атомом называется любой класс эквивалентности многообразий $U(\mathcal{N}_c)$ по отношению топологической эквивалентности.*

Атомом также называется любой представитель $U(\mathcal{N}_c)$ класса топологической эквивалентности. Несмотря на *техническое* использование интеграла F , структура атома от его выбора не зависит. Дело в том, что нерезонансная система $sgrad H$ однозначно определяет слоение Лиувилля на Q_h^3 и, стало быть, на любом подмногообразии $U(\mathcal{N}_c)$. Последнее однозначно определяет топологический тип кусочно-гладкого многообразия \mathcal{N}_c . Поэтому при замене интеграла F на любой боттовский интеграл F' ни один из атомов $U(\mathcal{N}_c)$ не изменится.

Без учета ориентаций атомы удобно воспринимать, как бифуркации слоений Лиувилля. Если наглядно представить бифуркацию в виде процесса деформации поверхности $F^{-1}(f)$, происходящей при изменении f от $f_c - \varepsilon$ до $f_c + \varepsilon$ или обратно, то атом $U(\mathcal{N}_c)$ состоит из ее промежуточных положений $U(\mathcal{N}_c) \cap F^{-1}(f)$. Сложностью атома называется число критических окружностей любого боттовского интеграла $F : U(\mathcal{N}_c) \rightarrow \mathbb{R}$. Существует стандартная система обозначений атомов, а также алгоритмы построения и распознавания всех атомов данной сложности [7]. В механике наиболее часто встречались атомы A, B, A^* и C_2 .

Атом A отвечает особому слою \mathcal{N}_c , который совпадает с некоторой, экстремальной окружностью S_c^1 интеграла $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Существует диффеоморфизм Φ многообразия $U(\mathcal{N}_c)$ на полноторие $S^1 \times D^2$, отображающий каждый тор Лиувилля на тор $S^1 \times S_0^1$, где $S_0^1 \subset D^2$ есть некоторая окружность с центром 0 . При этом $\Phi(\partial U(\mathcal{N}_c)) = S^1 \times \partial D^2$ и $\Phi(S_c^1) = S^1 \times 0$, где 0 — центр диска D^2 (рис. 1).

Обозначим E^1 восьмерку $S^1 \vee S^1$ (букет двух окружностей) и N^2 — диск с двумя дырками. Граф E^1 будем считать вложенным внутрь N^2 , так что восьмерка симметрична относительно своего центра $0 \in N^2 \subset D^2$ (рис. 2). Атом B отвечает особому слою \mathcal{N}_c , содержащему седловую критическую окружность S_c^1 с ориентируемой сепаратрисной диаграммой. Существует диффеоморфизм Φ многообразия $U(\mathcal{N}_c)$ на произведение $S^1 \times N^2$ (т.н. ориентируемое седло), который отображает каждый тор Лиувилля на тор $S^1 \times C^1$, где $C^1 \subset N^2$ есть некоторая замкнутая кривая (рис. 4). При этом

$$\Phi(\mathcal{N}_c) = S^1 \times E^1, \quad \Phi(\partial U(\mathcal{N}_c)) = S^1 \times \partial N^2, \quad \Phi(S_c^1) = S^1 \times 0.$$

Атом A^* отвечает особому слою \mathcal{N}_c , содержащему седловую критическую окружность S_c^1 с неориентируемой сепаратрисной диаграммой. Предполагая дырки в N^2 симметричными относительно центра 0 , основания цилиндра $[0; 1] \times N^2$ склеим по отображению $(0, z) \mapsto (1, -z)$. Получим т.н. неориентируемое седло $S^1 \tilde{\times} N^2$, которое является топологическим типом многообразия $U(\mathcal{N}_c)$ атома A^* . Существует диффеоморфизм Φ многообразия $U(\mathcal{N}_c)$ на косое произведение $S^1 \tilde{\times} N^2$, отображающий каждый тор Лиувилля на тор $S^1 \tilde{\times} C^1$, где $C^1 \subset N^2$ есть замкнутая кривая или пара замкнутых, непересекающихся кривых (рис. 2). При этом

$$\Phi(\mathcal{N}_c) = S^1 \tilde{\times} E^1, \quad \Phi(\partial U(\mathcal{N}_c)) = S^1 \tilde{\times} \partial N^2, \quad \Phi(S_c^1) = S^1 \tilde{\times} 0 = S^1 \times 0.$$

Заметим, что край $S^1 \times N^2$ состоит из трех торов, а край $S^1 \tilde{\times} N^2$ — из двух. Особые слои $S^1 \times E^1$ и $S^1 \tilde{\times} E^1$ изображены на рис. 3. Атомы A , B и A^* являются единственными атомами сложности 1. Каждая бифуркация является композицией бифуркаций A , B и A^* , однако атомы считаются неделимыми объектами. Примером атома сложности 2 является C_2 . Вырезая в центре поверхности N^2 дырку, получим N_0^2 . Многообразие $U(\mathcal{N}_c)$ атома атома C_2 является произведением $S^1 \times N_0^2$.

В дальнейшем будем называть атомами расслоенные, ориентированные многообразия $U(\mathcal{N}_c)$ с фиксированными ориентациями критических окружностей, т.е., представители некоторых классов топологической эквивалентности. Атом A является, по сути, нормальной, компактной окрестностью экстремальной

окружности произвольного боттовского интеграла $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Любой другой атом включает в себя только седловые окружности, в силу чего называется седловым.

Введем понятие допустимой системы координат на границе атома. Она представляет собой набор базисов (λ, μ) в группах гомологий $\mathbf{H}_1(T^2, \mathbb{Z})$ граничных торов данного атома, по одному базису на каждом торе $T^2 \subset \partial U(\mathcal{N}_c)$. Все эти базисы также называются *допустимыми*. Базисом (λ, μ) является упорядоченная пара нетривиальных циклов, имеющих индекс пересечения ± 1 . Можно говорить о паре ориентированных окружностей λ и μ , вложенных в тор T^2 и не стягиваемых на нем в точку, трансверсально пересекающихся в единственной точке и рассматриваемых с точностью до любых изотопий (на торе). Индексом пересечения $i(\gamma_1, \gamma_2)$ пары замкнутых, гладких кривых $\gamma_1(t_1)$ и $\gamma_2(t_2)$ на ориентированном торе T^2 является "алгебраическое число" $\sum_p \pm 1$ точек пересечения p этих кривых. Каждой точке $p = \gamma_1(t'_1) = \gamma_2(t'_2)$ отвечает слагаемое ± 1 в зависимости от того, положительно или отрицательно ориентированным является базис из векторов скорости $\dot{\gamma}_1(t'_1)$ и $\dot{\gamma}_2(t'_2)$ в касательной плоскости $T_p T^2$. Отметим следующее свойство индекса пересечения. Пусть $i(\alpha, \beta) = 1$ и $\gamma = m\alpha + n\beta$ для некоторых циклов $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{H}_1(T^2, \mathbb{Z})$, где $m, n \in \mathbb{Z}$. Тогда $i(\gamma, \alpha) = -n$ и $i(\gamma, \beta) = m$. Этих соотношений достаточно, чтобы использовать операции в группе $\mathbf{H}_1(T^2, \mathbb{Z})$ чисто формально.

Зафиксируем любую ориентацию Q_h^3 и, тем самым, введем ориентации на атомах. На всех критических окружностях интеграла $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (которые de' facto от него не зависят) заданы ориентации, определяемые фазовым потоком $sgrad H$. На каждом граничном торе T^2 рассматриваемого атома $U(\mathcal{N}_c) \subset Q_h^3$ зафиксируем ориентацию края и выберем базис (λ, μ) , который является положительно ориентированным (т.е. $i(\lambda, \mu) = 1$), руководствуясь следующими правилами.

Цикл λ на граничном торе атома A является меридианом, т.е., представляющая его окружность стягивается внутри полнотория в точку (рис. 1). С точностью до ориентации такой цикл определен однозначно. О выборе его ориентации будет сказано ниже. В отношении цикла λ на граничном торе $T^2 \subset F^{-1}(f_c \pm \varepsilon)$ седлового атома $U(\mathcal{N}_c)$ предположим следующее. При $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е., по мере приближения тора T^2 к особому слою $\mathcal{N}_c \subset F^{-1}(f_c)$ окружность λ равномерно стремится к некоторой седловой окружности $S_c^1 \subset \mathcal{N}_c$. Такой цикл λ на граничном торе T^2 всегда существует и определен однозначно. Представляющую его окружность можно выбрать, как любую из связных компонент пересечения тора с сепаратрисной диаграммой окружности S_c^1 . При этом ориентацию цикла λ

однозначно определяет траектория $sgrad H$, порождающая критическую окружность S_c^1 . Если ее сепаратрисная диаграмма ориентируема, то в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ окружность λ совпадает с S_c^1 . Если сепаратрисная диаграмма неориентируема, то в пределе окружность λ склеивается вдвое, двулистно накрывая S_c^1 . Именно так граница листа Мебиуса $D^1 \tilde{\times} S^1$ накрывает осевую окружность $0 \times S^1$, когда отрезок $D^1 = [-1; 1]$ стягивается в точку 0. В любом случае направление периодической траектории поля $sgrad H$, порождающей окружность S_c^1 , переносится на цикл λ . Таким образом, первый цикл λ на границе седлового атома определен однозначно.

Цикл μ всегда дополняет цикл λ до положительно ориентированного базиса, так что $i(\lambda, \mu) = 1$. Цикл μ определен неоднозначно, т.к. этим же свойством обладает цикл $k\lambda + \mu$ для любого $k \in \mathbb{Z}$. На границе атома A такой цикл μ можно выбрать произвольно, однако его ориентация должна определяться экстремальной критической окружностью S_c^1 , которая является осью полнотория A . Поскольку при $\varepsilon \rightarrow 0$ окружность $\mu \subset F^{-1}(f_c \pm \varepsilon)$ гомотопируется на S_c^1 , направление порождающей S_c^1 траектории $sgrad H$ определяет ориентацию цикла μ . Заметим, что хотя представляющая цикл μ окружность может несколько раз наматываться на полноторие вокруг его оси, при стягивании полнотория она стягивается на осевую окружность. Таким образом, ориентация цикла μ на границе атома A определена однозначно. При этом ориентация цикла λ выбирается из условия $i(\lambda, \mu) = 1$.

Рассмотрим седловой атом $U(\mathcal{N}_c)$, не содержащий окружностей с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами. В отношении циклов μ на граничных торах этого атома требуется, чтобы некоторые, представляющие их окружности *все вместе* составляли край некоторой поверхности $P^2 \subset U(\mathcal{N}_c)$, которая трансверсально пересекает каждую критическую окружность в единственной точке. При этом многообразие $U(\mathcal{N}_c)$ должно быть гомеоморфно $S^1 \times P^2$, так что его граничным торами отвечают произведения S^1 на граничные окружности P^2 , а каждая критическая окружность отображается на окружность вида $S^1 \times p$. Такая поверхность всегда существует и она называется сечением (расслоения Зейферта на данном атоме [7]). Поверхности N_0^2 на рис. 1 и N^2 на рис. 2 являются сечениями атомов C_2 и B соответственно. Итак, циклы μ на граничных торах данного атома являются ориентированными компонентами границы сечения P^2 . Заметим, что они необходимо несут на себе ориентацию края P^2 , если ориентация поверхности $P^2 \subset U(\mathcal{N}_c)$ определяется направлением *любой* критической окружности, рассматриваемой в качестве нормали к P^2 . Поскольку

существуют различные, негомотопные между собой сечения P^2 , остается некоторая свобода в выборе циклов μ . Полученный набор базисов (λ, μ) на граничных торах атома $U(\mathcal{N}_c)$ называется допустимой системой координат, а базисы из любого такого набора называются допустимыми.

Теперь рассмотрим атом $U(\mathcal{N}_c)$, содержащий хотя бы одну окружность с неориентируемой сепаратрисной диаграммой ($*$ – окружность). В его символическом обозначении каждой такой окружности отвечает звездочка $*$ [7]. В данном случае не существует аналогичных сечений P^2 , хотя существует такая поверхность $\tilde{P}^2 \subset U(\mathcal{N}_c)$, что $U(\mathcal{N}_c)$ гомеоморфно косому произведению $S^1 \tilde{\times} \tilde{P}^2$. Для произвольной $*$ – окружности S_c^1 в $U(\mathcal{N}_c)$ рассмотрим любую ее нормальную, компактную, не пересекающую край $U(\mathcal{N}_c)$ окрестность V_c^3 , в которой нет других критических окружностей. Окружность S_c^1 однозначно определяет цикл λ на граничном торе T_c^2 полнотория V_c^3 . С точностью до ориентации на T_c^2 определен цикл κ , являющийся меридианом полнотория V_c^3 . Ориентируем цикл κ так, чтобы пара (λ, κ) определяла ориентацию края V_c^3 (которое несет на себе ориентацию атома). Тогда равенство $\lambda = \kappa - 2\mu_c$ однозначно определяет на T_c^2 цикл μ_c , дополнительный к λ (рис. 1). При стягивании полнотория V_c^3 на ось $S_c^1 \subset V_c^3$ окружность μ_c изотопируется на S_c^1 , и относительно ориентации края V_c^3 имеет место $i(\lambda, \mu_c) = 1$. Аналогично, зафиксируем циклы μ_c на всех остальных полноториях малого радиуса, являющихся нормальными окрестностями $*$ – окружностей. Затем удалим из атома $U(\mathcal{N}_c)$ внутренности всех этих полноторий. Получится некоторое многообразие $U_0(\mathcal{N}_c)$ с торическим краем, гомеоморфное $S^1 \times P^2$, у которого существует сечение $P^2 \subset U_0(\mathcal{N}_c)$. Сечение P^2 следует (и можно) выбрать так, чтобы оно высекало окружность μ_c на граничном торе T_c^2 каждого удаленного полнотория V_c^3 . Тогда на каждом из граничных торов многообразия $U(\mathcal{N}_c)$ поверхность P^2 определяет цикл μ , дополняющий λ до базиса. Фиксируя ориентации всех таких циклов μ из условия $i(\lambda, \mu) = 1$, получим допустимую систему координат на границе атома $U(\mathcal{N}_c)$.

Следующее утверждение регулирует возможность замены допустимых системах координат. Пусть $\{(\lambda_j, \mu_j)\}$ есть допустимая система координат на границе атома, где $j \in J$. Для любых целых чисел k_j набор базисов $\{(\lambda_j, \mu_j + k_j \lambda_j)\}_{j \in J}$ является допустимой системой координат тогда и только тогда, когда $\sum_{j \in J} k_j = 0$ [7].

Многообразие Q_h^3 можно склеить из атомов $U(\mathcal{N}_c)$, являющихся нормальными, компактными окрестностями особых слоев $\mathcal{N}_c \subset Q_h^3$, отвечающих критическим значениям f_c любого боттовского интеграла $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Склеивание осуществляется

диффеоморфизмами $\varphi : T_0^2 \rightarrow T_1^2$ граничных торов тех атомов, которые связаны между собой непрерывными семействами торов Лиувилля $T_\tau^2 \subset Q_h^3$, где $\tau \in [0; 1]$. Каждый такой диффеоморфизм называется *склеивающим* и определяется произвольной изотопией $G : [0; 1] \times T^2 \rightarrow Q_h^3$ тора T_0^2 на T_1^2 , при которой каждое подмногообразие $G(\tau, T^2)$ является тором Лиувилля. Тогда

$$\forall \tau \in [0; 1] \quad G(\tau, T^2) = T_\tau^2, \quad \varphi \circ G(0, \cdot) = G(1, \cdot).$$

Многообразию Q_h^3 сопоставляется граф, в вершинах которого расположены атомы, а ребра отвечают семействам торов Лиувилля T_τ^2 , соединяющим атомы $U(\mathcal{N}_c) \subset Q_h^3$ между собой. Такой граф называется молекулой и обозначается $W(Q_h^3)$. На ребрах молекулы должны быть фиксированы ориентации, по которым определяются направления склеивающих диффеоморфизмов $\varphi : T_0^2 \rightarrow T_1^2$. Обычно эти ориентации изображаются стрелками-, но часто направления склеек не влияют на значения меток, поэтому ориентации ребер не фиксируются (рис. 4).

Топологическая информация о склеивающих диффеоморфизмах отражается в изоморфизмах $\varphi_* : \mathbf{H}_1(T_0^2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbf{H}_1(T_1^2, \mathbb{Z})$ гомологий склеиваемых торов. Эти изоморфизмы определяются т.н. матрицами склейки

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = -1, \\ \lambda_1 = \alpha\varphi_*(\lambda_0) + \beta\varphi_*(\mu_0), \quad \mu_1 = \gamma\varphi_*(\lambda_0) + \delta\varphi_*(\mu_0), \quad (2.1)$$

которые вычисляются только в допустимых базисах циклов (λ, μ) на граничных торах склеиваемых атомов. Для вычисления элементов матрицы склейки достаточно найти индексы пересечения циклов $\lambda_1, \mu_1, \varphi(\lambda_0), \varphi(\mu_0)$ на торе T_1^2 (см. выше замечание об индексах пересечения и операциях в $\mathbf{H}_1(T^2, \mathbb{Z})$).

Чтобы определить склеиваемые пары граничных торов, для каждого атома следует также задать соответствие между его граничными торами и теми ребрами молекулы $W(Q_h^3)$, которые связывают этот атом с соседями. Например, одинаково пронумеровать их. Часто такое соответствие однозначно определено структурой молекулы или несущественно в силу симметрии атома. В таком случае соответствие между граничными торами и ребрами молекулы не фиксируется (рис. 4).

На каждом ребре молекулы определена пара чисел, называемых метками:

$$r = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} \bmod 1, & \beta \neq 0 \\ \infty, & \beta = 0 \end{cases} \quad \varepsilon = \pm 1 = \begin{cases} \text{sign } \beta, & \beta \neq 0 \\ \text{sign } \alpha, & \beta = 0 \end{cases}$$

Несколько связанных между собой седловых атомов могут составлять *семью*. Смысл этого термина восходит к понятию многообразия Зейферта, каковым является каждый атом. Если несколько седловых атомов склеиваются в максимальное многообразие Зейферта, то они образуют семью. Для практических вычислений достаточно следующих фактов. Для каждой пары атомов семьи, связанных в молекуле $W(Q_h^3)$ хотя бы одним ребром, должно существовать соединяющее их ребро с меткой $r = \infty$. Любой максимальный набор таких седловых атомов является семьей при условии, что ни один из них не соединяется с атомом A ребром с меткой $r = \infty$. Седловой атом, граничащий только с атомами A , является семьей тогда и только тогда, когда все r -метки на инцидентных ему ребрах отличны от ∞ . На рисунках семьи атомов выделяются пунктирными линиями (рис. 4).

Ребра с меткой $r = \infty$, соединяющие атомы данной семьи, назовем внутренними ребрами. Все ребра, граничащие с атомами семьи, пронумеруем индексом i и сопоставим каждому ребру e_i целое число

$$\theta_i = \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \alpha_i \\ \beta_i \end{array} \right], & \text{если } e_i \text{ — выходящее ребро,} \\ -\frac{\gamma_i}{\alpha_i}, & \text{если } e_i \text{ — внутреннее ребро,} \\ \left[-\frac{\delta_i}{\beta_i} \right], & \text{если } e_i \text{ — входящее ребро,} \end{cases}$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. Для внутреннего ребра $\alpha_i = \pm 1$, поэтому $\theta_i \in \mathbb{Z}$. Еще одна метка, характеризующая топологию склеенного из атомов семьи многообразия (максимальной Зейфертовой компоненты), определяется так:

$$n = \sum_i \theta_i .$$

Молекула $W(Q_h^3)$ с набором меток r, ε на каждом ребре и метками n для каждой семьи атомов обозначается $W^*(Q_h^3)$ и называется меченой молекулой.

Метки не зависят от выбора допустимых систем координат, однако зависят от ориентации многообразия Q_h^3 и направлений, заданных на ребрах молекулы. Меченые молекулы $W^*(Q_h^3)$, которые отличаются только в силу этих причин, отвечают лиувиллево эквивалентным слоениям Лиувилля.

Определение 3 *Интегрируемые системы $sgrad H_1$ и $sgrad H_2$, рассматриваемые на изоэнергетических многообразиях $Q_1^3 \subset M_1^4$ и $Q_2^3 \subset M_2^4$, называются лиувиллево эквивалентными, если существует послойный диффеоморфизм $j : Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$.*

Послойный диффеоморфизм j совмещает между собой слоения Лиувилля многообразий Q_1^3 и Q_2^3 . Поэтому, с точки зрения фазовой топологии, лиувиллево

эквивалентные системы ничем не отличаются. При совпадении молекул $W^*(Q^3)$ системы являются Лиувиллево эквивалентными, но обратное неверно.

Определение 4 *Даны интегрируемые системы $sgrad H_1$ и $sgrad H_2$ на ориентированных, изоэнергетических многообразиях Q_1^3 и Q_2^3 . Эти системы называются топологически эквивалентными, если существует диффеоморфизм $j : Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$, который совмещает слоения Лиувилля на Q_1^3 и Q_2^3 , ориентации критических окружностей, индуцированные потоками $sgrad H_1$ и $sgrad H_2$, а также ориентации многообразий Q_1^3 и Q_2^3 .*

Очевидно, что топологически эквивалентные системы Лиувиллево эквивалентны. Обратное неверно. При отождествлении $Q_1^3 \cong Q_2^3$, совмещающем слоения Лиувилля, направления потоков на критических окружностях, а также ориентации многообразий могут оказаться различными.

При изменении ориентаций ребер значения меток могут измениться. Меняются только r - метки на конечных ребрах ($r \neq \infty$), так что новое значение $r = \delta/\beta \pmod 1$. Для вычисления матриц склейки ориентации ребер задаются из соображений удобства или случайно, и при сравнении молекул $W^*(Q^3)$ это необходимо учитывать.

Теорема 1 *Гамильтоновы системы $sgrad H_1$ и $sgrad H_2$, интегрируемые в боттовских интегралах и нерезонансные на неособых, связных, замкнутых изоэнергетических многообразиях Q_1^3 и Q_2^3 , топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда молекулы $W^*(Q_1^3)$ и $W^*(Q_2^3)$ равны или могут быть сделаны равными после изменения ориентаций некоторых ребер.*

Равенство $W^*(Q_1^3) = W^*(Q_2^3)$ означает существование гомеоморфизма графов $W(Q_1^3)$ и $W(Q_2^3)$, при котором совпадают отображаемые друг в друга вершины — атомы, а также все метки на соответствующих ребрах и семьях. При этом ориентации ребер также должны совпадать.

При обращении ориентации Q_h^3 с метками происходят определенные, явно описанные изменения [7].

Обозначим $G(Q_h^3)$ граф, который получится из молекулы $W(Q_h^3)$, если каждый ее атом — вершину считать точкой.

Инвариантом Фоменко-Цишанга $I^*(Q_h^3)$ называется молекула $W(Q_h^3)$ с ориентированными ребрами, снабженная теми же метками r , n , что и меченая молекула $W^*(Q_h^3)$, а также коциклом $[\varepsilon] \in \mathbf{H}^1(G(Q_h^3), \mathbb{Z}_2)$, который определяется значениями ε - меток в $W^*(Q_h^3)$.

Замена коцепи $\varepsilon \in C^1(G(Q_h^3), \mathbb{Z}_2)$ на когомологичную коцепь ε' отвечает изменению значений ε - меток следующего вида. Для некоторых вершин графа $G(Q_h^3)$ обратим значения ε - меток всех ребер, входящих и выходящих из соответствующих атомов (на внутренних ребрах атомов ε - метки не меняются). Такая операция над ε - метками отвечает изменению направлений фазовых потоков на некоторых атомах, что всегда можно сделать подходящей заменой гамильтониана в классе гладких функций. Таким образом, рассматривая $[\varepsilon]$ - коциклы вместо ε - меток, мы de' facto абстрагируемся от направлений потоков на критических окружностях.

Инварианты $I^*(Q^3)$ считаются равными, если молекулы $W^*(Q^3)$ равны без учета ε - меток, и при этом совпадают $[\varepsilon]$ - коциклы. Равенство $[\varepsilon]$ - коциклов проверяется просто. На любой из молекул $W^*(Q_h^3)$ следует выбрать атом или несколько атомов и обратить значения ε - меток на всех ребрах, примыкающих к этим атомам, так чтобы совпали ε - метки на отвечающих друг другу (при гомеоморфизме графов $W(Q^3)$) ребрах молекул. Последние при этом должны быть одинаково ориентированы.

Теорема 2 *Гамильтоновы системы $sgrad H_1$ и $sgrad H_2$, интегрируемые в боттовских интегралах и нерезонансные на неособых, связных, замкнутых изоэнергетических многообразиях Q_1^3 и Q_2^3 , лувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда инварианты $I^*(Q_1^3)$ и $I^*(Q_2^3)$ равны или могут быть сделаны равными после изменения ориентаций некоторых ребер или многообразий.*

§2.2. Поправки на симплектические особенности.

Следующее определение обобщает ситуацию, когда гамильтонова система рассматривается на инвариантном подмногообразии четной размерности, на котором индуцированная симплектическая структура имеет вырожденные особенности.

Определение 5 *Пусть M есть симплектическое многообразие с особенностью, на котором задана гладкая функция H . Если существует такое гладкое векторное поле X на M , что $X_p = sgrad H(p)$ для всех $p \in M \setminus \Theta$, то X называется гамильтоновой системой, корректно определенной на M . При этом в каждой точке $p \in M$ вектор X_p обозначается $sgrad H(p)$.*

В дальнейшем M обозначает симплектическое многообразие с особенностью. Поскольку $i_{sgrad H(\rho)}\omega = -d_\rho H$, то необходимым условием определенности гладкого поля $sgrad H$ на M является тождество $dH(Ker \omega) \equiv 0$. В случае типичных симплектических особенностей оно является достаточным, но в общем — нет [16].

Предложение 1 Пусть на M задана гладкая (класса C^∞) функция H . Если в каждой точке $\rho \in \Theta$ справедливо (1.2) и $dH(\mathcal{Z}_\rho) = 0$, то гамильтонова система $sgrad H$ корректно определена на M .

Доказательство. Следует из теоремы 1 § 3.1, где условие (1.2) обобщено на случай произвольной размерности ядра формы (при этом типичные особенности перестают быть типичными и становятся *контактными*) \square .

Аналогичное утверждение было сформулировано в [82], при эквивалентном (1.2) условии локальной приводимости формы ω к виду $x_1 dx_1 \wedge dx_2 + d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}$.

В практически важном случае многообразие M является регулярной поверхностью совместного уровня функций F_1 и F_2 , заданных на симплектическом многообразии $\mathcal{M} \supset M$. Тогда подмножество $\Theta \subset M$ определяется уравнением $\{F_1, F_2\} = 0$, где скобка Пуассона вычисляется в \mathcal{M} . Точка $\rho \in \Theta$ удовлетворяет (1.2) тогда и только тогда, когда $\{\{F_1, F_2\}, F_1\}(\rho) \neq 0$ или $\{\{F_1, F_2\}, F_2\}(\rho) \neq 0$ [16].

Определение 6 Пусть $\dim M = 2n$ и на M корректно определена гамильтонова система $sgrad H$, имеющая первые интегралы F_1, \dots, F_{n-1} , которые являются такими гладкими функциями на M , что $\{F_i, F_j\} = 0$ на симплектическом многообразии $M \setminus \Theta$. Если ковекторы $dH, dF_1, \dots, dF_{n-1}$ линейно независимы почти всюду на M , и все регулярные поверхности уровня интегралов H, F_1, \dots, F_{n-1} являются компактными, то система $sgrad H$ называется интегрируемой.

Интегрируемой системе отвечает отображение момента $\mathcal{F} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $\mathcal{F}(p) = (H(p), F_1(p), \dots, F_{n-1}(p)) = (h, \mathbf{f})$. Его бифуркационная диаграмма обозначается Σ .

Определение 7 Пусть на M корректно определена интегрируемая система $sgrad H$ с отображением момента \mathcal{F} . Если множество $\mathcal{F}(\Theta) \subset \mathbb{R}^n(h, \mathbf{f})$ имеет меру ноль, и почти все торы Лиувилля $T^n \subset M \setminus \Theta$ являются нерезонансными, то система $sgrad H$ называется нерезонансной.

Заметим, что из каждой $p \in \Theta$ выходит траектория, состоящая из точек Θ . Если она всюду плотна на торе T^n , то $T^n \subset \Theta$. Условие $\mu(\mathcal{F}(\Theta)) = 0$ исключает существование подмножеств $V \subset \mathcal{F}(\Theta)$, являющихся открытыми в \mathbb{R}^n . Допуская обратное, почти все торы $T^n \subset \mathcal{F}^{-1}(h, \mathbf{f})$ при $(h, \mathbf{f}) \in V$ и $T^n \cap \Theta \neq \emptyset$ следует считать замыканиями траекторий $sgrad H$ (нерезонансность). Но $T^n \subset \Theta$ невозможно для почти всех $(h, \mathbf{f}) \in V$, т.к. множество Θ имеет нулевую меру в M .

Предложение 2 Пусть $\dim M = 2n$ и на M корректно определена нерезонансная, интегрируемая система $sgrad H$. Тогда для любого регулярного значения (h, \mathbf{f}) отображения момента \mathcal{F} каждая связная компонента подмногообразия $\mathcal{F}^{-1}(h, \mathbf{f})$, имеющая непустое пересечение с Θ , является вложенным в M тором T^n .

Доказательство. Возьмем любой тор Лиувилля, не пересекающий множество Θ и находящийся в бесконечно малой, трубчатой окрестности U связной компоненты $\mathcal{F}^{-1}(h, \mathbf{f})$. Существование данного тора вытекает из того, что множество $\mathcal{F}(\Theta)$ имеет меру ноль в \mathbb{R}^n . Очевидно, что все компоненты \mathcal{F} -прообразов точек (h, \mathbf{f}) , которые находятся внутри U , диффеоморфны между собой. Поэтому данная компонента $\mathcal{F}^{-1}(h, \mathbf{f})$ является вложенным тором T^n \square .

При условиях предложения 2, для любого регулярного значения (h, \mathbf{f}) каждую компоненту $\mathcal{F}^{-1}(h, \mathbf{f})$ (в т.ч. содержащую точки Θ) будем называть *тором Лиувилля*.

Предложение 3 Пусть на M корректно определена нерезонансная, интегрируемая система $sgrad H$, и множество $\Theta = \{p \in M : \det \omega_p = 0\}$ является гладкой гиперповерхностью. Тогда для любого $(h, \mathbf{f}) \in \mathcal{F}(M)$ каждое связное множество S , лежащее в $\mathcal{F}^{-1}(h, \mathbf{f})$ и не содержащее критических точек отображения \mathcal{F} , не пересекается с множеством Θ или целиком лежит в нем.

Доказательство. Пусть $\dim M = 2n$ и $F'_i = F_i|_{\Theta}$, где $1 \leq i \leq n$. Из условия, что $\mathcal{F}(\Theta)$ имеет меру ноль следует функциональная зависимость функций F'_1, \dots, F'_n на Θ . Пусть $p \in S \cap \Theta$, тогда в некоторой окрестности $O(p) \cap \Theta$ одна из функций F'_i выражается через остальные, например $F'_n = G(F'_1, \dots, F'_{n-1})$. Следовательно интеграл $F = F_n - G(F_1, \dots, F_{n-1})$ обращается в ноль на $O(p) \cap \Theta$, но $d_p F \neq 0$ в силу $F(p) \notin \Sigma$. Так как $F = const$ на S , то $O(p) \cap S \subset \Theta$, если окрестность $O(p)$ достаточно мала. В силу произвольности точки $p \in S \cap \Theta$ и связности множества S , каждая точка S лежит в Θ \square .

Основной результат статьи относится к случаю $\dim M = 4$, который наиболее изучен с точки зрения классификации интегрируемых систем [7]. Заметим, что определение 5 применимо к системам, корректно определенным на симплектических 4-многообразиях с особенностью и ограниченным на подмногообразия $Q_h^3 \subset H^{-1}(h)$.

Назовем *гладким комплексом* такое подмножество многообразия M , имеющее конечное число связных компонент, что все его компоненты являются гладкими подмногообразиями. Размерности последних могут быть различными. Связный гладкий комплекс, в частности, это просто гладкое подмногообразие.

Теорема 3 Пусть на симплектическом многообразии с особенностью (M^4, ω) корректно определена нерезонансная, интегрируемая система $sgrad H$ с интегралом F и дано замкнутое, связное, регулярное, ориентированное подмногообразие $Q_h^3 \subset H^{-1}(h)$. Пусть Q_h^3 трансверсально пересекается с некоторым гладким комплексом \mathcal{S} , который состоит из точек множества $\Theta = \{\rho \in M^4 : \det \omega_\rho = 0\}$, так что $Q_h^3 \cap \Theta = Q_h^3 \cap \mathcal{S}$ является гладким комплексом. Предположим также следующее.

1. Почти все торы Лиувилля $T^2 \subset Q_h^3$ являются нерезонансными.
2. Интеграл $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$ является такой функцией Ботта, что все ее критические подмногообразия являются вложенными окружностями.
3. Для некоторого $\varepsilon > 0$ и целого $m > 1$ при любом $h' \in [h - \varepsilon; h + \varepsilon]$ множество критических точек интеграла $F : Q_{h'}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ является несвязным объединением m вложенных окружностей $S_1^1(h'), S_2^1(h'), \dots, S_m^1(h')$. При этом каждая окружность $S_i^1(h')$ гладко зависит от h' , и образом цилиндра

$$\bigcup \{S_i^1(h') : h - \varepsilon \leq h' \leq h + \varepsilon\}$$

относительно отображения $\mathcal{F} = (H, F)$ является регулярная кривая σ_i , которая трансверсально пересекает отрезок $\mathcal{F}(Q_h^3)$ в точке $(h, F(S_i^1(h)))$. Любые две кривые σ_i и σ_j не пересекаются или совпадают, где $1 \leq i, j \leq m$.

Тогда любая связная компонента \mathcal{S}' гладкого комплекса \mathcal{S} имеет размерность 3 или 2. Если $\dim \mathcal{S}' = 3$, то каждая связная компонента $Q_h^3 \cap \mathcal{S}'$ представляет собой тор Лиувилля или гладкое многообразие, которое является подмножеством некоторого, критического уровня интеграла $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Если $\dim \mathcal{S}' = 2$, то связные компоненты $Q_h^3 \cap \mathcal{S}'$ представляют собой вложенные окружности, которые являются критическими или состоят из регулярных точек интеграла $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Для любого, достаточно малого $\varepsilon > 0$ многообразие Q_h^3 склеено из связных компонент $U(\mathcal{N}_c)$ подмногообразий $F^{-1}[f_c - \varepsilon; f_c + \varepsilon]$, выбранных по всем критическим значениям f_c интеграла $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$. При этом каждое подмногообразие $U(\mathcal{N}_c)$ несет на себе структуру атома, который топологически эквивалентен атому некоторой интегрируемой системы на симплектическом многообразии без особенностей, и определена меченая молекула $W^*(Q_h^3)$. Любая интегрируемая система $sgrad \tilde{H}$ на многообразии \tilde{Q}^3 с меченой молекулой $W^*(\tilde{Q}^3)$ топологически эквивалентна системе $sgrad H$ на Q_h^3 тогда и только тогда, когда $W^*(\tilde{Q}^3) = W^*(Q_h^3)$ или эти молекулы могут быть сделаны равными после изменения ориентаций некоторых ребер.

Доказательство. Многообразие $Q_h^3 \subset H^{-1}(h)$ предполагается регулярным, т.е., h есть регулярное значение гамильтониана $H : M^4 \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда в каждой точке $p \in Q_h^3$ вектор $sgrad H(p)$ отличен от нуля, поскольку из $sgrad H(p) = 0$ следует $d_p H = 0$. Заметим также, что в ε -окрестности любого критического значения f_c функции $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$ не должно быть других ее критических значений.

Случай $\dim \mathcal{S}' = 1$ невозможен, т.к. из любой точки $Q_h^3 \cap \mathcal{S}'$ выходит нестационарная траектория $sgrad H$, целиком лежащая в множестве $Q_h^3 \cap \Theta$ (корректно определенный гамильтонов поток сохраняет 2-форму ω).

Пусть в случае $\dim \mathcal{S}' = 3$ гладкое подмногообразие L^2 является связной компонентой $Q_h^3 \cap \mathcal{S}'$. Если некоторый тор Лиувилля T^2 пересекается с L^2 , то в силу предложения 3 имеет место $T^2 \subset L^2$, следовательно $L^2 = T^2$. В этом случае не возникает никаких трудностей с корректным определением молекулы $W^*(Q_h^3)$. Дело в том, что склеивающие изотопии между граничными торами атомов $U(\mathcal{N}_c)$ определяются вне связи с симплектической структурой, как сдвиги вдоль траекторий поля $grad F$ (в любой римановой метрике).

Возможен случай, когда L^2 является подмножеством некоторого, критического слоя $\mathcal{N}_c \subset F^{-1}(f_c)$. Тогда гладкая поверхность L^2 склеена из нескольких колец $S^1 \times D^1$ по граничным окружностям, которые являются седловыми, критическими для функции $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Этот случай будет рассмотрен ниже.

Пусть $\dim \mathcal{S}' = 2$. Тогда каждая связная компонента подмногообразия $\mathcal{S}' \cap Q_h^3$ является вложенной окружностью — периодической траекторией $sgrad H$, которая лежит на некоторой поверхности уровня функции $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Если такие окружности вложены в торы Лиувилля, то они не препятствуют корректной определенности молекулы $W^*(Q_h^3)$. Обоснование не отличается от рассмотренного выше случая $\dim \mathcal{S}' = 3$.

Пусть некоторый, критический слой \mathcal{N}_c пересекается с подмногообразием \mathcal{S}' по одной или нескольким окружностям. Любая из этих окружностей является критической или не содержит критических точек функции $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$. При этом возможно, что некоторые критические окружности в \mathcal{N}_c не содержат точек из Θ .

Нам нужно убедиться, что достаточно малая, нормальная окрестность $U(\mathcal{N}_c)$ слоя \mathcal{N}_c имеет все свойства атома, которые существенны с точки зрения теории А.Т. Фоменко. Окружности S_r^1 , которые лежат в множестве $\mathcal{N}_c \cap \Theta$ и не являются критическими для F , представляют собой замкнутые траектории поля $sgrad H$. Заметим, что они не стягиваются на \mathcal{N}_c , т.к. иначе в некоторой точке $sgrad H = 0$.

Рассмотрим существенные предположения теории, относящиеся к критическим окружностям S_c^1 интеграла $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Первым является условие боттовости F , что в данном случае имеет место. Второе: сепаратрисные диаграммы седловых окружностей должны определять нетривиальные циклы на близких к ним торах Лиувилля. Для проверки этого заметим, что любой тор Лиувилля $T^2 \subset Q_h^3$, достаточно близкий к окружности $S_c^1 \subset \mathcal{S}'$, не пересекается с множеством Θ . Поэтому поток $sgrad H$ на торе T^2 выпрямляется, и дальше можно дословно повторить доказательство леммы 3.2 [7].

Третье: ориентации всех критических траекторий $S_c^1 \subset \mathcal{N}_c$ должны быть согласованы между собой (см. ниже). Следуя идее предложения 3.8 [7] докажем существование такого интеграла \tilde{F} на V , что все траектории (корректно определенного) поля $sgrad \tilde{F}$ являются периодическими.

Кусочно-гладкая поверхность \mathcal{N}_c имеет трансверсальные самопересечения в точках критических окружностей $S_c^1 \subset \mathcal{N}_c$. В некоторой окрестности каждой из таких окружностей форма ω точна в силу относительной леммы Пуанкаре. Она точна и в некоторой окрестности *изотропного* слоя \mathcal{N}_c , из которого удалены все критические окружности вместе с их малыми, нормальными 4 – окрестностями. Любые две из первообразных ω отличаются на точную 1-форму. Поскольку мы будем интегрировать эти первообразные по циклам, можно считать, что на некоторой окрестности V слоя \mathcal{N}_c для некоторой 1-формы α на V имеет место $\omega|_V = d\alpha$.

Рассуждая по аналогии с доказательством теоремы 3.2 [7] проверим, что, с точностью до знака, интеграл \tilde{F} может быть определен формулой

$$\tilde{F}(\mathcal{N}_c) = 0, \quad \tilde{F}(T^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \alpha, \quad \gamma \subset T^2.$$

На любом торе Лиувилля $T^2 \subset V$, с точностью до ориентации, цикл γ определяется сепаратрисной диаграммой любой из критических окружностей $S_c^1 \subset \mathcal{N}_c$, которые достаточно близки к тору T^2 . Вблизи любой точки $p \in \mathcal{N}_c \setminus \Theta$ локально определена пара векторных полей $sgrad \tilde{F}$, отличающихся лишь знаком. Неопределенность знака связана с тем, что а priori циклы γ могут получать различные ориентации от различных траекторий S_c^1 , близких к данному тору [7]. Легко понять, что эти локальные поля имеют 2π -периодические траектории. Следовательно, для любой окружности $S_0^1 \subset \mathcal{N}_c \cap \Theta$ в каждой точке $p \in S_0^1$ определена пара векторов $\lim_{\Theta \ni q \rightarrow p} sgrad \tilde{F}(q) \neq 0$, которые необходимо коллинеарны вектору $sgrad H(p)$.

Далее, в любой точке подмногообразия $\mathcal{N}_c \setminus \Theta$ имеет место

$$sgrad \tilde{F} = \pm a \cdot sgrad F \pm b \cdot sgrad H . \quad (2.2)$$

Зависимость вида (2.2) также имеет место на любом, достаточно близком к \mathcal{N}_c торе Лиувилля, при этом числа a и b являются константами. Следовательно, коэффициенты a и b постоянны на всем слое \mathcal{N}_c .

Если хотя бы в одной точке ρ какой-нибудь критической окружности $S_c^1 \subset \mathcal{N}_c \cap \Theta$ не существует предел $\lim_{\Theta \ni y \rightarrow \rho} sgrad F(y)$, то коэффициент a в точке ρ должен быть равен нулю. Это верно в силу того, в точке ρ определены два других вектора из уравнения (2.2). Тогда $a = 0$ на \mathcal{N}_c , поэтому если как угодно фиксировать знак коэффициента $\pm b \neq 0$, то на всем слое \mathcal{N}_c будет определено однозначное поле $sgrad \tilde{F}$, так что (2.2) станет тождеством на \mathcal{N}_c . Другой а priori возможный случай состоит в том, что поле $sgrad F$ определено и непрерывно на всем слое \mathcal{N}_c . Тогда хотя бы одно из чисел a и b отлично от нуля. Если, например, $b \neq 0$, то можно зафиксировать знак $\pm b$, после чего поле $sgrad \tilde{F}$ будет однозначно определено на всем слое \mathcal{N}_c .

Последние рассуждения применимы также и в случае, когда некоторое, гладкое, замкнутое многообразие L^2 , являющееся подмножеством \mathcal{N}_c , целиком лежит в Θ . Тогда некоторые из критических окружностей S_c^1 вложены в L^2 . В силу боттовости функции $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$ вблизи каждой критической окружности $S_c^1 \subset L^2$ найдется такая гладкая поверхность $K^2 \cong S^1 \times D^1$, трансверсально пересекающая L^2 по окружности S_c^1 , что $(K^2 \setminus S_c^1) \cap \Theta = \emptyset$. Поверхность K^2 легко выбрать так, чтобы на ней была определена пара полей $sgrad \tilde{F}$, имеющих 2π -периодические траектории. Одной из таких траекторий является S_c^1 . Таким образом, каждая критическая окружность $S_c^1 \subset L^2$ является траекторией любого из пары полей $sgrad \tilde{F}$. Учитывая последнее обстоятельство, а также строение локальных потоков $sgrad \tilde{F}$ вне особого слоя \mathcal{N}_c легко понять, что эти 2π -периодические потоки локально определены и на поверхности L^2 . Рассуждая аналогично, в рассматриваемом случае можно определить однозначное поле $sgrad \tilde{F}$ на \mathcal{N}_c , так что (2.2) является тождеством для некоторого, постоянного на \mathcal{N}_c значения коэффициента $\pm b$. При этом $a = 0$, т.к. ни в одной из не критических точек $p \in L^2$ вектор $sgrad F(p)$ не определен в силу $dF(\mathcal{Z}_p) \neq 0$ (иначе было бы $sgrad H(p) \in \mathcal{Z}_p$ и $d_p H = 0$). Поэтому ни в одной из точек $\rho \in S_c^1 \subset L^2$ не существует $\lim_{\Theta \ni y \rightarrow \rho} sgrad F(y)$, следовательно коэффициент $a = a(\rho) = a(\mathcal{N}_c)$ равен нулю в силу уравнения (2.2).

Существует еще одно поле $sgrad \tilde{F}$ (с противоположным знаком), и нас устроит любое из этих двух. Ясно, что однозначное поле $sgrad \tilde{F}$ определено на некоторой,

инвариантной окрестности V слоя N_c . На каждой критической окружности $S_c^1 \subset N_c$ имеет место

$$sgrad \tilde{F} = (ak + b) \cdot sgrad H, \quad (2.3)$$

где $dF = k \cdot dH$ в каждой точке S_c^1 , причем в случае L^2 имеем $a = 0$. Из пп. 3 следует, что S_c^1 включается в гладкое, 1-параметрическое семейство критических окружностей, возникающее при возмущении h . Соответствующий цилиндр отображается посредством \mathcal{F} на регулярную кривую $\sigma_i \subset \Sigma$, трансверсально пересекающую отрезок $\mathcal{F}(Q_h^3)$ в некоторой точке (h, f_c) . Легко проверить, что k есть угловой коэффициент касательной к кривой σ_i в данной точке. Поскольку других кривых σ_j через (h, f_c) не проходит (пп. 3), то числа k на всех окружностях $S_c^1 \subset N_c$ равны между собой. Тогда из (2.3) следует согласованность направлений потока $sgrad H$ на критических окружностях в N_c , т.к. последние связаны между собой 2π -периодическими траекториями поля $sgrad \tilde{F}$.

Итак, каждое подмногообразие $U(N_c)$ имеет все свойства атома, которые являются существенными с точки зрения теории А.Т. Фоменко. Поэтому корректно определена меченая молекула $W^*(Q_h^3)$. Теорема 3 доказана \square .

Заметим, что в пп. 1, 2, 3 условия теоремы содержит стандартный набор предположений, в которых вычисляются меченые молекулы, включая топологическую устойчивость системы на Q_h^3 . По существу теорема 3 означает, что в процессе вычисления молекул $W^*(Q_h^3)$ можно *игнорировать* симплектические особенности, если подмногообразие Q_h^3 трансверсально пересекается с гладкими кусками множества Θ (случай общего положения). Условия теоремы 3, например, выполняются в случае О.И. Богоявленского [5]. Здесь каждое регулярное подмногообразие Q_h^3 пересекается с гладкой гиперповерхностью Θ по одному, двум или четырем торам Лиувилля, лежащим на нулевом уровне интеграла F .

Если кривая $\mathcal{F}(\Theta)$ не содержит особых точек бифуркационной диаграммы и только трансверсально пересекается с ее гладкими дугами, то, по-видимому, в ситуации теоремы 3 нет формальных препятствий для использования метода круговых молекул при вычислении меток r, ε, n [7, 44]. Однако, этот вопрос нуждается в дополнительном изучении. В случае О.И. Богоявленского метки были вычислены без помощи метода круговых молекул, который оказался неприменимым из-за отсутствия у бифуркационной диаграммы Σ особых точек ранга 0 [14]. Такие точки являются образами стационарных траекторий $sgrad H$ при отображении момента \mathcal{F} . В обычной ситуации (без особенностей) любая критическая для H

точка является стационарной траекторией, поэтому из нее не может выходить периодическая траектория $sgrad H$. Но в случае О.И. Богоявленского дело обстоит именно так: стационарных траекторий нет совсем, а обращение в ноль ковектора dH в каждой точке критической для H траектории обусловлено попаданием вектора $sgrad H \neq 0$ в ядро формы ω . Заметим, что в ситуации теоремы 3 в каждой точке ρ любой критической окружности $S_c^1 \subset \mathcal{N}_c \cap \Theta$ ядро \mathcal{Z}_ρ трансверсально S_c^1 , поэтому $sgrad H(\rho) \notin \mathcal{Z}_\rho$.

Пример 1. Следующие примеры иллюстрируют ситуации, которые описаны в теореме 3. Легко модифицировать их так, чтобы координаты (x, y, p, q) были угловыми на торе T^4 , но формулы станут более громоздкими. Поэтому ограничимся локальными конструкциями, которые проясняют существо дела.

В случае $\dim S' = 3$ рассмотрим форму $\omega = xdx \wedge dy + dp \wedge dq$ и пару коммутирующих интегралов $H = p + qx^2$ и $F = x$. Система $sgrad H$ в координатах (x, y, p, q) выглядит так:

$$sgrad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 2q \\ -x^2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Она корректно определена всюду и является нерезонансной, поскольку проекция интегральной траектории на "тор" с координатами y, p имеет число вращения $-2q/x^2$. Гиперповерхность $S' = \Theta$ определяется уравнением $x = 0$ и трансверсально пересекается с Q_h^3 по "тору Лиувилля" $p = h, x = 0$.

Пара интегралов $H = p + x^2y^2$ и $F = xy$ отвечает случаю, когда гладкий кусок особого слоя попадает в множество Θ . В этом локальном описании ему отвечает поверхность $x = 0$, лежащая в особом слое $xy = 0$.

В случае $\dim S' = 2$ рассмотрим форму $\omega = (x^2 + y^2)dx \wedge dy + dp \wedge dq$ и пару коммутирующих интегралов $H = p + qx^3y^3$ и $F = xy$. Тогда поверхность $S' = \Theta$ определяется уравнением $x = y = 0$. Система $sgrad H$ корректно определена всюду и является нерезонансной. Подмногообразие Q_h^3 трансверсально пересекается с поверхностью S' по седловой "окружности" $p = h, x = y = 0$ (гиперболическая траектория), которая лежит в слое $p = h, xy = 0$.

Рассматривая пару интегралов $H = p + q(x^2 + y^2)^2$ и $F = x^2 + y^2$ получим корректно определенную, нерезонансную систему $sgrad H$. При этом подмногообразие Q_h^3 трансверсально пересекается с поверхностью S' по минимальной

"окружности" $p = h, x = y = 0$ (эллиптическая траектория).

Рассматривая пару интегралов $H = p + qx^4$ и $F = x$ получим корректно определенную, нерезонансную систему $sgrad H$. Подмногообразии Q_h^3 трансверсально пересекается с поверхностью S' по "окружности" $p = h, x = y = 0$, вложенной в "тор Лиувилля" $p = h, x = 0$

Предложение 4 Пусть M есть ориентируемое симплектическое многообразие с особенностью и $\dim M = 2n$. Предположим, что на M корректно определена интегрируемая по Лиувиллю, нерезонансная гамильтонова система $sgrad(H)$, и Θ является гладкой гиперповерхностью.

Тогда для любого тора Лиувилля $T^n \subset \Theta$ найдется его окрестность U и такой интеграл F системы $sgrad(H)$, что

$$x \in U \cap \Theta \Leftrightarrow F(x) = 0, \quad dF(x) \neq 0 \quad \forall x \in U \cap \Theta.$$

Доказательство. Пусть $T_0^n \subset \Theta$ и $H(T_0^n) = 0, F_k(T_0^n) = 0$ для всех $1 \leq k \leq n - 1$. Некоторая окрестность U тора T_0^n диффеоморфна $T^n \times D^n$ (здесь мы используем ориентируемость M), при этом в диске D^n изменяются координаты (h, f_1, \dots, f_{n-1}) , являющиеся значениями интегралов H, F_k . Точка $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ является центром диска $D^n \subset \mathbb{R}^n$. Если при диффеоморфизме $i : U \rightarrow T^n \times D^n$ точке $p \in U$ отвечает пара (x, \mathbf{y}) , то

$$\mathbf{y} = (h, f_1, \dots, f_{n-1}) \in D^n, \quad h = H(p), \quad f_k = F_k(p).$$

Заметим, что $i^{-1}(x, \mathbf{0})$ – центр диска $D_x^n = i^{-1}(x \times D^n)$, трансверсального тору T_0^n . Пусть $p \in T_0^n$, тогда $i(p) = (x, \mathbf{0})$. Так как D_x^n трансверсален Θ , то $D_x^n \cap \Theta$ есть вложенный диск D_x^{n-1} с центром p . Диффеоморфизм $i : D_x^n \rightarrow x \times D^n$ индуцирует на D_x^n координаты (h, f_1, \dots, f_{n-1}) из D^n . В этих координатах подмногообразии $D_x^{n-1} \subset D_x^n$ определяется уравнением $F = 0$ для некоторой функции $F(h, f_1, \dots, f_{n-1})$. Функция $F = F(H, F_1, \dots, F_{n-1})$ на U является интегралом $sgrad(H)$. Докажем, что $F^{-1}(0) = U \cap \Theta$. Пусть $\tilde{p} \in U \cap \Theta$ и $i(\tilde{p}) = (\tilde{x}, \tilde{\mathbf{y}})$, тогда

$$F(\tilde{p}) = F(H(\tilde{p}), \mathbf{F}(\tilde{p})) = F(h, \mathbf{f}),$$

где $(h, \mathbf{f}) = \tilde{\mathbf{y}}$. Так как точка $i^{-1}(x, \tilde{\mathbf{y}}) \in D_x^n$ лежит на том же торе Лиувилля, что и \tilde{p} , то она лежит в Θ . Следовательно $F(h, \mathbf{f}) = 0$, т.е. $F(\tilde{p}) = 0$. Итак $U \cap \Theta \subset F^{-1}(0)$, обратное включение доказывается аналогично \square .

Итак, причиной резонансного вырождения потока на торе Лиувилля T^n могут быть особые точки $x \in T^n$, если $T^n \not\subset \Theta$. Так как поток $sgrad(H)$ сохраняет форму ω , то проходящая через x траектория не может быть всюду плотна на этом торе.

Пример 2. Рассмотрим бутылку Клейна K^2 из примера 1 § 1.2, на которой корректно определена 1-форма $\sin \varphi d\varphi$. Пусть $M^4 = K^2 \times T^2$ и на торе T^2 введены угловые координаты $\alpha, \beta \pmod{2\pi}$. Следующее выражение

$$d\alpha \wedge d\psi + \sin \varphi d\alpha \wedge d\varphi + d\psi \wedge d\beta + \sin \varphi d\beta \wedge d\varphi$$

корректно определяет на M^4 замкнутую 2-форму ω , невырожденную всюду, кроме точек подмногообразия $\Theta = \{\varphi = 0, \pm\pi\}$. Последнее имеет две связных компоненты, каждая из которых диффеоморфна тору T^3 . Вычисляя обратную матрицу формы ω легко проверить, что $\{\alpha, \beta\} = 0$. Пусть $H = \sin \alpha$ или $H = \cos \alpha$, а $F = \sin \beta$ или $F = \cos \beta$. Очевидно, что гамильтонова система $sgrad(H)$ интегрируема посредством интеграла F . Однако, она не является корректно определенной на M^4 , т.к. в каждой точке $x \in \Theta$ поле $sgrad(H)$ обращается в бесконечность и имеет ровно два предельных направления на прямой $\mathcal{Z}_x \cap T_x\Theta$. Такое поведение потока было предсказано следствием 1 п. 1.2.3. Каждое интегральное подмногообразие $\mathcal{F}^{-1}(h, f)$ отвечает фиксированным значениям α и β . Очевидно, что оно диффеоморфно бутылке Клейна K^2 . Причина данного явления в том, что подмногообразие $\mathcal{F}^{-1}(h, f)$ не лежит в множестве Θ , но пересекается с ним по паре окружностей \square .

§ 2.3. Пример интегрируемой системы с особенностью.

Рассмотрим пример системы, удовлетворяющей условиям теоремы 3. Задача описания ее фазовой топологии, поставленная А.Т. Фоменко в 1990г., дала толчок к исследованиям симплектических особенностей, которые представлены в настоящей работе.

2.3.1. Случай Богоявленского.

Дано твердое тело с неподвижной точкой, движущееся в двух однородных и стационарных силовых полях. Например, в гравитационном и магнитном. В подвижной системе отсчета динамику тела определяют следующие уравнения Эйлера-Пуассона:

$$\dot{M} = [M, \omega] + mg[r, \gamma] + B[d, \delta], \quad \dot{\gamma} = [\gamma, \omega], \quad \dot{\delta} = [\delta, \omega],$$

где m – масса, M – кинетический момент, ω – угловая скорость, I_1, I_2, I_3 – главные моменты инерции ($M_i = I_i\omega_i$), r – радиус-вектор центра масс ($r = const$), $g\gamma$ – вектор гравитационного поля, $B\delta$ – вектор магнитного поля, d – магнитный момент тела ($d = const$).

Данная система имеет геометрические интегралы

$$J_1 = (\gamma, \gamma) = 1, \quad J_2 = (\gamma, \delta) = c, \quad J_3 = (\delta, \delta) = 1,$$

функционально порождающие центр алгебры Ли $C^\infty(M^4)$ (функции Казимира). Она также имеет интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2}(M, \omega) - mg(r, \gamma) - B(d, \delta).$$

Предположим что, в дополнение к условиям С.В. Ковалевской, вектор d ортогонален r и параллелен экваториальной плоскости эллипсоида инерции, т.е.

$$I_1 = I_2 = 2I_3, \quad r = (r_1, 0, 0), \quad d = (0, d_2, 0).$$

При этих условиях система имеет интеграл $Z = Z_1^2 + Z_2^2$, где

$$Z_1 = M_1^2 - M_2^2 + 4I_3 mgr_1 \gamma_1 - 4I_3 B d_2 \delta_2, \quad Z_2 = 2M_1 M_2 + 4I_3 mgr_1 \gamma_2 + 4I_3 B d_2 \delta_1,$$

который обобщает интеграл С.В. Ковалевской [21]. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \xi_i &= \sqrt{c_1} \cdot \gamma_i, & \eta_i &= \sqrt{c_3} \cdot \delta_i & (1 \leq i \leq 3), \\ c_1 &= (4I_3 mgr_1)^2, & c_3 &= (4I_3 B d_2)^2, & c_2 &= (4I_3)^2 mgr_1 B d_2 c, \end{aligned}$$

и перепишем исходную систему в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{M}_1 &= \frac{2M_2 M_3 + \eta_3}{4I_3} & \dot{M}_2 &= -\frac{2M_1 M_3 + \xi_3}{4I_3} & \dot{M}_3 &= \frac{\xi_2 - \eta_1}{4I_3} \\ \dot{\xi}_1 &= \frac{2M_3 \xi_2 - M_2 \xi_3}{2I_3} & \dot{\xi}_2 &= \frac{M_1 \xi_3 - 2M_3 \xi_1}{2I_3} & \dot{\xi}_3 &= \frac{M_2 \xi_1 - M_1 \xi_2}{2I_3} \\ \dot{\eta}_1 &= \frac{2M_3 \eta_2 - M_2 \eta_3}{2I_3} & \dot{\eta}_2 &= \frac{M_1 \eta_3 - 2M_3 \eta_1}{2I_3} & \dot{\eta}_3 &= \frac{M_2 \eta_1 - M_1 \eta_2}{2I_3}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В новых обозначениях интегралы имеют вид:

$$\begin{aligned} H &= (4I_3)^{-1} \cdot (M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 - \xi_1 - \eta_2), \\ Z &= (M_1^2 - M_2^2 + \xi_1 - \eta_2)^2 + (2M_1 M_2 + \xi_2 + \eta_1)^2. \end{aligned}$$

Пусть G – полупрямое произведение $SO(3)$ с двумя экземплярами \mathbb{R}^3 , и \mathcal{G} – алгебра Ли группы G . Канонический изоморфизм

$$T_e G \cong so(3) \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^9(M^1, M^2, M^3, \xi^1, \xi^2, \xi^3, \eta^1, \eta^2, \eta^3)$$

порождает в \mathcal{G} координаты M^i, ξ^i, η^i , где $i \in \{1, 2, 3\}$. Пусть M_i, ξ_i, η_i – двойственные координаты в коалгебре \mathcal{G}^* , тогда

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= \varepsilon_{ijk} M_k, & \{M_i, \xi_j\} &= \varepsilon_{ijk} \xi_k, & \{M_i, \eta_j\} &= \varepsilon_{ijk} \eta_k, \\ \{\xi_i, \xi_j\} &= 0, & \{\xi_i, \eta_j\} &= 0, & \{\eta_i, \eta_j\} &= 0, \end{aligned}$$

а система (2.4) задана в пространстве \mathcal{G}^* уравнениями Эйлера [5]:

$$\dot{M}_i = \{H, M_i\}, \quad \dot{\xi}_i = \{H, \xi_i\}, \quad \dot{\eta}_i = \{H, \eta_i\}.$$

Инвариантное подмногообразие $\mathcal{O} \subset \mathcal{G}^*$ совместного уровня интегралов $J_1 = J_3 = 1$ и $J_2 = c$ определяется системой уравнений $\sum_{i=1}^3 \xi_i^2 = c_1$, $\sum_{i=1}^3 \xi_i \eta_i = c_2$, $\sum_{i=1}^3 \eta_i^2 = c_3$, которая совместна только при $c_2^2 \leq c_1 c_3$, что равносильно $|c| \leq 1$. Множество \mathcal{O} инвариантно относительно коприсоединенного представления группы G . Если $c_2^2 = c_1 c_3$, то подмногообразие \mathcal{O} имеет две связных компоненты, диффеоморфных $S^2 \times \mathbb{R}^3$, на каждой из которых исходная система вырождается в случай Ковалевской. При этом \mathcal{O} расслоено сингулярными орбитами коприсоединенного представления группы G . Легко проверить, что подмногообразие \mathcal{O} тогда и только тогда является регулярной орбитой, когда $c_2^2 < c_1 c_3$. В последнем случае $\mathcal{O} = \mathcal{O}^6 \cong \mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}^3$. Каждая орбита обладает стандартной симплектической структурой, которая определяется формой Кириллова [30, 58]. Ограничение системы (2.4) на симплектическое многообразие \mathcal{O}^6 является гамильтоновой системой $\dot{x} = \{H, x\} = sgrad(H)(x)$. Ограничим ее на инвариантное подмножество

$$\mathcal{M}^4 = Z^{-1}(0) \cap \mathcal{O}^6 = \{x \in \mathcal{O}^6 : Z_1(x) = Z_2(x) = 0\},$$

состоящее из точек минимума интеграла $Z : \mathcal{O}^6 \rightarrow \mathbb{R}$. Если $c_1 = c_3$ и $c_2 = 0$, то кусочно-гладкая поверхность \mathcal{M}^4 имеет трансверсальное самопересечение по цилиндру $S^1 \times \mathbb{R}$, который определяется условиями:

$$M_1 = M_2 = \xi_3 = \eta_3 = \xi_1 - \eta_2 = \xi_2 + \eta_1 = 0, \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 = c_3.$$

Тогда каждая изоэнергетическая поверхность Q_h^3 имеет трансверсальное самопересечение. Топология этого особого случая описана в [13]. Подмножество $\mathcal{M}^4 \subset \mathcal{O}^6$ является 4-мерным гладким многообразием тогда и только тогда, когда

$$c_2^2 < c_1 c_3, \quad (c_1 - c_3)^2 + c_2^2 \neq 0.$$

Эти неравенства предполагаются выполненными. Вложение $\mathcal{M}^4 \subset \mathcal{G}^* \cong \mathbb{R}^9(M, \xi, \eta)$ определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} M_1^2 - M_2^2 + \xi_1 - \eta_2 = 0 \\ 2M_1 M_2 + \xi_2 + \eta_1 = 0 \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = c_1 \\ \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3 = c_2 \\ \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = c_3. \end{cases}$$

Ограничение системы $sgrad(H)$ на инвариантное многообразие \mathcal{M}^4 называется *случаем Богоявленского*. Корректно определенная гамильтонова система $sgrad(H)$ на \mathcal{M}^4 не имеет стационарных точек. Это обстоятельство прямо связано с вырожденными особенностями симплектической структуры. Если бы \mathcal{M}^4 было симплектическим многообразием, то в критических точках p функции $H : \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ необходимо имело бы место $sgrad(H)(p) = 0$. В данном же случае *ненулевой вектор* $sgrad(H)(p)$ лежит в 2-мерном ядре \mathcal{Z}_p , в силу чего $d_p H = -i_{sgrad(H)(p)}\omega = 0$. Гамильтониан $H : \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ принимает следующие критические значения:

$$h_1 = H(\gamma_1) = -\frac{1}{4I_3}\sqrt{2c_0 - 2\tilde{c}}, \quad h_2 = H(\gamma_2) = \frac{1}{4I_3}\sqrt{2c_0 - 2\tilde{c}},$$

$$h_3 = H(\gamma_3^+) = H(\gamma_3^-) = \frac{1}{4I_3}\sqrt{2c_0 + 2\tilde{c}},$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3^+, \gamma_3^-$ – соответствующие периодические траектории поля $sgrad(H)$ [14]. Поскольку система $sgrad(H)$ имеет независимый интеграл F , являющийся ограничением на \mathcal{M}^4 функции

$$F = \frac{1}{4}\{Z_1, Z_2\} = M_3(M_1^2 + M_2^2) + M_1\xi_3 + M_2\eta_3,$$

то она является интегрируемой по Лиувиллю.

Обозначим ω ограничение формы Кириллова с орбиты \mathcal{O}^6 на подмногообразии \mathcal{M}^4 , тогда гладкая поверхность $\mathcal{M}^3 = F^{-1}(0)$ состоит из точек, в которых $det(\omega_p) = 0$. В самом деле, интеграл $F : \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ получен ограничением функции $\{Z_1, Z_2\}/4$ на $\mathcal{M}^4 \subset \mathcal{O}^6$. Так как $\forall v \in T_p\mathcal{M}^4 \quad \omega_p(v, sgrad(Z_i)) = d_p Z_i(v) = 0$, где $1 \leq i \leq 2$, то подпространство \mathcal{Z}_p , натянутое на векторы $sgrad(Z_i)(p)$, косоортогонально $T_p\mathcal{M}^4$. А т.к. $\{Z_1, Z_2\} = 0$ влечет за собой $dZ_2(sgrad(Z_1)) = 0$ и $dZ_1(sgrad(Z_2)) = 0$, то в каждой точке $p \in \mathcal{M}^3$ векторы $sgrad(Z_i)$, вычисленные в симплектической структуре орбиты \mathcal{O}^6 , порождают 2-мерное ядро \mathcal{Z}_p формы ω_p . Интересно, что у функции $F : \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ нет критических точек [14]. Поэтому особая поверхность Θ является гладким (некомпактным) 3-многообразием

$$\mathcal{M}^3 = \{p \in \mathcal{M}^4 : F(p) = 0\},$$

расслоенным на торы Лиувилля $T^2 \subset \mathcal{M}^3 \cap Q_h^3$. Это слоение было впервые исследовано в работе [95], и оно сыграло важную роль при вычислении меток инвариантов Фоменко-Цишанга. Топология многообразия \mathcal{M}^3 будет описана ниже.

Проверим, что вырожденные особенности формы ω не препятствуют корректному применению теории топологической классификации. Дело в том, что

при любом регулярном $h \in \mathcal{F}(\mathcal{M}^4)$ число 0 является регулярным значением функции $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$, поэтому подмногообразие $\mathcal{M}^3 \cap Q_h^3$ состоит из нескольких торов Лиувилля T^2 (1,2 или 4). Следовательно, слоение Лиувилля симплектического многообразия $\mathcal{M}^4 \setminus \mathcal{M}^3$ гладко продолжается инвариантными торами $T^2 \subset \mathcal{M}^3$.

Выполнение условий теоремы 3 очевидно (рис. 5). Заметим, что горизонтальный луч $(H \times F)(\Theta)$, отвечающий нулевому значению интеграла F и являющийся \mathcal{F} -образом подмногообразия $\Theta = \mathcal{M}^3$, не является частью бифуркационной диаграммы Σ и лишь пересекается с ней в точках $(h_1, 0), (h_2, 0), (h_3, 0)$.

Проверим нерезонансность интегрируемой системы $sgrad(H)$ на \mathcal{M}^4 . Поскольку данная задача является аналитической, то резонансность системы означала бы, что все торы Лиувилля есть резонансные [7]. Пусть $h_0 < h < h_3$. Предполагая систему резонансной на Q_h^3 легко прийти к тому, что расслоение многообразия Q_h^3 на замкнутые траектории индуцирует гомотопии между λ -циклами на граничных торах \mathbf{B} -атомов. В этом случае r -метка на соответствующем ребре равнялась бы $1/0 = \infty$, однако фактически $r = 0$ (рис. 4). Итак, при $h \in (h_0; h_3)$ система $sgrad(H)$ является нерезонансной на $Q_h^3 \setminus \Theta$. Множество $\mathcal{F}(\Theta) \subset \mathbb{R}^2$ лежит на горизонтальной прямой $f = 0$, поэтому его мера Лебега равна нулю \square .

Таким образом, по теореме 3 случай О.И. Богоявленского корректно включается в предметную область теории топологической классификации интегрируемых систем с двумя степенями свободы. Топологию слоения Лиувилля на подмногообразиях Q_h^3 характеризуют инварианты Фоменко-Цишанга, изображенные на рис. 4. Ниже описана техника вычисления меток, не связанная с методом круговых молекул и существенно использующая топологию слоения Лиувилля на гладкой особой поверхности \mathcal{M}^3 . Она была разработана еще в [95], однако только в более поздней работе [14] эта техника изложена в виде, пригодном для практического использования.

С точки зрения топологии слоения Лиувилля симплектические особенности данной задачи ничем себя не проявляют. При этом они повлияли на значения некоторых ε -меток, что в данном случае связано только с поведением фазового потока. В целом случай Богоявленского не эквивалентен ни одной из известных сегодня интегрируемых задач.

2.3.2. Контактные особенности.

Для того, чтобы в дальнейшем установить факт контактности всех особых точек

в случае Богдавленского, проверим выполнение условий:

$$\forall x \in \mathcal{M}^4 \quad \{Z_1, F\}(x) \neq 0 \quad \text{или} \quad \{Z_2, F\}(x) \neq 0. \quad (2.5)$$

Прямые вычисления (вырожденных) скобок Пуассона, заданных в исходном фазовом пространстве $\mathbb{R}^9(M, \xi, \eta)$, не вызывают затруднений. Однако, при этом получаются громоздкие выражения. Поэтому мы поступим иначе и докажем (2.5) из более общих соображений.

Все косые градиенты вычисляются в симплектической структуре многообразия \mathcal{M}^4 . Поле $sgrad(H)$ корректно определено на \mathcal{M}^4 , следовательно $dH(\mathcal{Z}_x) = 0$. Условие (2.5) эквивалентно $dF(\mathcal{Z}_x) \neq 0$, поэтому для доказательства предположим противное: в некоторой точке $x \in \mathcal{M}^3$ имеет место $dF(\mathcal{Z}_x) = 0$. Тогда в точке x существует хотя бы одно собственное предельное положение поля $sgrad(F)$. В самом деле, пусть в локальных координатах \mathbf{x} гиперповерхность $\Theta = \mathcal{M}^3$ имеет уравнение $x_1 = 0$. С точностью до непрерывного множителя, конечного и отличного от нуля в точке x (см. формулу (3.7), § 3.1), можно принять, что $Pf(\omega) = \{Z_1, Z_2\} = 4F$. Так как $dF \neq 0$ в каждой точке многообразия \mathcal{M}^4 , то можно считать, что локально $F \equiv x_1$. Воспользуемся формулами

$$(sgrad(F)(\mathbf{x}))^i = - \left(\sum_j \omega_{ij} A_{ij} \right)^{-1} \sum_{j \neq i} A_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_j}, \quad \text{где}$$

$$A_{ij} = \sum_{\substack{\sigma = (i, j, i_2, j_2, \dots, i_n, j_n) \in S_{2n} \\ i_s < j_s, \quad i_s < i_{s+1}}} sgn(\sigma) \omega_{i_2 j_2} \dots \omega_{i_n j_n},$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = sgrad(f)(\mathbf{x}) \cdot Pf(\omega)(\mathbf{x}), \quad F^i(\mathbf{x}) = - \sum_{j=1, j \neq i}^{2n} A_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i \leq 2n.$$

Координаты \mathbf{x} можно выбрать так, чтобы в точке x ядро \mathcal{Z}_x было натянуто на 2-й и 3-й координатные векторы. Тогда каждое слагаемое величины $A_{i,1}$ в точке x содержит хотя бы один такой сомножитель ω_{i_s, j_s} , что одно из чисел i_s или j_s равно 2 или 3. Тогда в точке x имеем $\omega_{i_s, j_s} = 0$. Каждая величина $A_{i,j}$ при $j > 1$ входит в F^i с множителем $\partial F / \partial x_j$, равным нулю. Таким образом, вектор \mathbf{F} равен нулю в точке x . Воспользуемся конечными рядами Тейлора и, пренебрегая конечным множителем, будем искать предел:

$$\lim_{\Theta \ni y \rightarrow x} sgrad(F)(y) = \lim_{y_1 \rightarrow 0} \frac{1}{y_1} \sum_j \frac{\partial \mathbf{F}(\theta \mathbf{y})}{\partial x_j} y_j.$$

Предельное положение $sgrad(F)$ можно получить, например, полагая $y_j = y_1$ для каждого j . Обозначим полученный вектор через X . Тогда $X \in T_x\mathcal{M}^3$ и, в силу $\{H, F\} = 0$, имеем $X \in T_xQ_h^3$. Поскольку подмногообразия \mathcal{M}^3 и Q_h^3 пересекаются трансверсально, то

$$\dim T_x\mathcal{M}^3 \cap T_xQ_h^3 = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}_x = T_x\mathcal{M}^3 \cap T_xQ_h^3 \quad \Rightarrow \quad X \in \mathcal{Z}_x,$$

что противоречит $d_xF \neq 0$.

Доказано (2.5), откуда следует, что в каждой точке $x \in \Theta$ 2-мерное ядро \mathcal{Z}_x трансверсально $\Theta = \mathcal{M}^3$. В силу п. 3.1 предложения 1 § 1.2 поле $sgrad(F)$ имеет только несобственные предельные положения в каждой точке $x \in \mathcal{M}^3$, инцидентные прямой $\mathcal{Z}_x \cap T_x\mathcal{M}^3$. Поскольку $Pf(\omega)$ меняет знак при переходе с одной стороны Θ на другую, то этих предельных направлений ровно 2 (см. следствие 1 § 1.2). Используем найденные молекулы $W^*(Q_h^3)$ для доказательства следующего факта.

Предложение 5 *Для почти каждого тора Лиувилля $T^2 \subset \mathcal{M}^3$ интегральные многообразия распределения прямых*

$$\mathcal{M}^3 \ni x \longmapsto \mathcal{Z}_x \cap T_x\mathcal{M}^3,$$

а также интегральные траектории поля $sgrad(H)$ являются квазипериодическими, всюду плотными обмотками T^2 . В каждой точке произвольного тора Лиувилля $T^2 \subset \mathcal{M}^3$ эти кривые пересекаются трансверсально.

Доказательство. Поскольку задача является аналитической, то обратное означало бы, что все вышеуказанные кривые замкнуты на своих торах. Тогда они определяли бы расслоение подмногообразия \mathcal{M}^3 на окружности, которое индуцировало бы гомотопии между λ -циклами на граничных торах B -атомов в \mathcal{M}^3 (без учета ориентаций). В этом случае r -метка на ребре равнялась бы $1/0 = \infty$, однако в данном случае $r = 0$ (рис. 4) \square .

Полученная информация о поведении потока $sgrad(H)$ и поля $sgrad(F)$ на торах Лиувилля $T^2 \subset \mathcal{M}^3$, за исключением факта незамкнутости (т.е. плотности на торе) траекторий $sgrad(H)$ и предельных траекторий $sgrad(F)$, вытекает из теоремы 7 в главе 3. Вместо этой теоремы, однако, в случае систем с двумя степенями свободы можно использовать ее частный случай, относящийся только к двум гамильтоновым полям и сравнительно легко доказываемый. Следует умножить поле $sgrad(F)$ на координату $x_1 = F$, и перейти к пределу при $x_1 \rightarrow 0$. Полученное векторное поле будет отлично от нуля в каждой точке гиперповерхности $x_1 = 0$ (состоящей из

особых точек). Поскольку функция F есть первый интеграл системы $sgrad(H)$, то полученное векторное поле коммутирует с полем $sgrad(H)$. Их независимость на торе $T^2 \subset \Theta$ следует из того, что

$$sgrad(H)(x) \notin \mathcal{Z}_x \ni \lim_{\Theta \ni y \rightarrow x} x_1 sgrad(F)(y) = \frac{1}{2} \lim_{\Theta \ni y \rightarrow x} sgrad(F^2)(y).$$

2.3.3. Особая поверхность.

Для вычислений будут удобны следующие криволинейные координаты:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 - \eta_2 = \rho \cos \theta \\ \xi_2 + \eta_1 = \rho \sin \theta \\ -\xi_2 + \eta_1 = x \\ \xi_1 + \eta_2 = y \\ \xi_3 = r \cos \psi \\ \eta_3 = r \sin \psi, \\ -\pi < \psi, \theta < \pi \quad r, \rho > 0 \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Следующая система уравнений задает вложение $\mathcal{M}^4 \subset \mathbb{R}^9 \cong \mathcal{G}^*$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x\rho = -\tilde{c} \sin(\theta - \alpha_0) - r^2 \sin(2\psi - \theta) \\ y\rho = \tilde{c} \cos(\theta - \alpha_0) - r^2 \cos(2\psi - \theta) \\ x^2 + y^2 + \rho^2 + 2r^2 = 2c_0 \\ M_1 = \mp \sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2} \\ M_2 = \pm \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2}, \end{array} \right.$$

где константы определяются из соотношений:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = c_1 + c_3, \quad \tilde{c} = \sqrt{(c_1 - c_3)^2 + 4c_2^2}, \\ \cos \alpha_0 = (c_1 - c_3)/\tilde{c}, \quad \sin \alpha_0 = 2c_2/\tilde{c}. \end{array} \right.$$

Условие $c_0 > \tilde{c} > 0$ эквивалентно : $c_2^2 < c_1 c_3$ и $(c_1 - c_3)^2 + c_2^2 \neq 0$. Проекция \mathcal{M}^4 на плоскость $\mathbb{R}^2(y, \rho)$ ограничена шестиугольником $ABCDEF$:

$$\begin{aligned} [AB] &= \{\rho = -y - \sqrt{2c_0 - 2\tilde{c}}, -\rho_2 \leq y \leq -\sqrt{2c_0 - 2\tilde{c}}\}, \\ [BC] &= \{\rho = y + \sqrt{2c_0 + 2\tilde{c}}, -\rho_2 \leq y \leq -\rho_1\}, \\ [CD] &= \{\rho = \rho_2, -\rho_1 \leq y \leq \rho_1\}, \\ [DE] &= \{\rho = -y + \sqrt{2c_0 + 2\tilde{c}}, \rho_1 \leq y \leq \rho_2\}, \\ [EF] &= \{\rho = y - \sqrt{2c_0 - 2\tilde{c}}, \sqrt{2c_0 - 2\tilde{c}} \leq y \leq \rho_2\}, \\ [AF] &= \{\rho = 0, -\sqrt{2c_0 - 2\tilde{c}} \leq y \leq \sqrt{2c_0 - 2\tilde{c}}\}, \end{aligned}$$

где $\rho_1 = \sqrt{c_0 - \sqrt{c_0^2 - \tilde{c}^2}}$, $\rho_2 = \sqrt{c_0 + \sqrt{c_0^2 - \tilde{c}^2}}$. Темным цветом на рис. 6 изображены проекции $H^{-1}(h)$ при различных h , где $4I_3H = 2M_3^2 + \rho - y$.

Докажем, что подмногообразие $\mathcal{M}_h^2 = \mathcal{M}^3 \cap H^{-1}(h)$ имеет следующее число связных компонент: одну при $h_1 < h < h_2$, две при $h_2 < h < h_3$ и четыре при $h > h_3$.

Положим $4I_3 = 1$. Поскольку $dF \neq 0$ в каждой точке \mathcal{M}^4 , то \mathcal{M}^3 – многообразие. Выше указаны критические значения боттовской функции $H : \mathcal{M}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ и соответствующие (невырожденные) критические окружности γ_1 , γ_2 и γ_3^\pm . Проекциями на плоскость $\mathbb{R}^2(y, \rho)$ являются, соответственно, отрезки $[EF]$, $[AD]$ и $[BC]$ (рис. 6). При $h > h_1$ и $h \neq h_2, h_3$ каждая из этих компонент является вложенным тором T^2 . Подмногообразие $\mathcal{M}_h^2 \subset \mathbb{R}^9$ определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} x\rho = -\tilde{c} \sin(\theta - \alpha_0) - r^2 \sin(2\psi - \theta) \\ y\rho = \tilde{c} \cos(\theta - \alpha_0) - r^2 \cos(2\psi - \theta) \\ r^2 = \tilde{c} \cos(\theta - \alpha_0) + h\rho - \rho^2 \\ \rho^2(y - \rho + h) = r^2\rho(1 - \cos(2\psi - \theta)) \\ M_1 = \mp\sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2}, \quad M_2 = \pm\sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2}, \quad M_3^2 = (y - \rho + h)/2 \end{cases} \quad (2.7)$$

Уравнение 4 следует из $F = 0$. Нам потребуются две симметрии многообразия \mathcal{M}^4 :

$$\sigma(M_1, M_2, M_3, \rho, \theta, x, y, r, \psi) = (-M_1, -M_2, -M_3, \rho, \theta, x, y, r, \psi),$$

$$s(M_1, M_2, M_3, \rho, \theta, x, y, r, \psi) = (M_1^*, M_2^*, -M_3, \rho, \theta^*, -x, y, r, \psi^*),$$

$$\text{где } \theta^* - \alpha_0 = \alpha_0 - \theta \quad \text{и} \quad \psi^* - \frac{\alpha_0}{2} = \frac{\alpha_0}{2} - \psi.$$

Если $h_1 < h < h_2$, то боттовская функция $F : H^{-1}(h) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет только два критических значения – \max и \min . Очевидно что, многообразие $\mathcal{M}_h^2 = F^{-1}(0)$ имеет одну связную компоненту – тор T^2 .

При каждом $h \in (h_1; h_2)$ уравнение $\theta = \alpha_0$ определяет в \mathcal{M}_h^2 пару непересекающихся s -симметричных окружностей $\gamma_\pm(h)$, непрерывно зависящих от h . Они проектируются на отрезок $[KQ]$ прямой

$$y = \frac{2c_0 - h^2}{2\tilde{c}}\rho - h,$$

заключенный между точкой K и отрезком $[DE]$ (рис. 6). При $h \rightarrow h_1 + 0$ окружности $\gamma_\pm(h)$ сближаются, и в пределе совпадают с γ_1 . Аналогично, окружности $\gamma_\pm(h_2)$ совпадают с γ_2 . Очевидно, что $\gamma_+(h)$ и $\gamma_-(h)$ гомотопны на торе \mathcal{M}_h^2 . В соответствии с теорией А.Т. Фоменко, при переходе через критический уровень $h = h_2$ возможны только две различные бифуркации тора \mathcal{M}_h^2 , в зависимости от типа сепаратрисной

диаграммы. Им соответствуют атомы A^* и B . Только при одной из этих бифуркаций (типа B) тор распадается на два. Из поведения окружностей $\gamma_{\pm}(h)$ видно, что именно эта бифуркация имеет место. Следовательно, при $h_2 < h < h_3$ подмногообразие \mathcal{M}_h^2 имеет 2 связных компоненты.

При $h \in (h_1; h_2)$ уравнение $M_1 = M_2 = 0$ определяет в \mathcal{M}_h^2 пару непересекающихся окружностей, проектирующихся на отрезок $[KF]$ и непрерывно зависящих от h . На первой из них $\psi \equiv \alpha_0/2$, а на второй $\psi \equiv \alpha_0/2 \pm \pi$. Первую окружность обозначим $\delta(h)$. Прообраз точки K пересекается с $H^{-1}(h)$ по двум s -симметричным точкам. В одной из них окружности $\delta(h)$ и $\gamma_+(h)$ трансверсально пересекаются и других пересечений у них нет. Следовательно, каждая из окружностей негомотопна нулю на торе \mathcal{M}_h^2 . Обозначим $P(h)$ точку $\delta(h) \cap \gamma_+(h)$. При $h \rightarrow h_1 + 0$ окружность $\delta(h)$ стягивается в точку $P(h_1)$, которая проектируется в F , а при $h \rightarrow h_2 - 0$ окружность $\delta(h)$ склеивается в восьмерку $S^1 \vee S^1$. Вершиной этой восьмерки является точка $P(h_2)$, проектирующаяся в A . При $h > h_2$ восьмерка распадается на пару непересекающихся σ -симметричных окружностей $\delta_{\pm}(h)$. Они проектируются на отрезок $[AF]$. Ясно, что связные компоненты \mathcal{M}_h^2 , содержащие эти окружности, также σ -симметричны. Пусть T_h^2 есть такая компонента \mathcal{M}_h^2 , что $\delta_+(h) \subset T_h^2$, тогда $\delta_-(h) \subset \sigma(T_h^2)$.

При каждом $h \in (h_2; h_3)$ уравнение $\psi = \alpha_0/2 + \pi n$ (где $n \in \mathbf{Z}$) определяет пару непересекающихся, σ -симметричных окружностей $\beta_{\pm}(h)$, таких что $\beta_+(h) \subset T_h^2$ и $\beta_-(h) \subset \sigma(T_h^2)$. Каждая из этих окружностей непрерывно зависит от h и проектируется на сегмент параболы

$$\tilde{c}y = (\rho - h_2)(\tilde{c} - (h - h_2)\rho),$$

заклученный внутри шестиугольника $AKLDEF$. Данный сегмент проходит через точки A , G и L . При $h \rightarrow h_2 + 0$ окружности $\beta_{\pm}(h)$ сближаются, и в пределе обе совпадают с γ_2 . При $h \rightarrow h_3 - 0$ каждая из этих окружностей склеивается в восьмерку. Вершинами этих восьмерок являются точки P_{\pm} , проектирующиеся в C (рис. 6).

При каждом $h \in (h_2; h_3)$ уравнение $\psi = \alpha_0/2 \pm \pi/2$ определяет четыре непересекающихся окружности $\alpha_{1,\pm}(h)$, $\alpha_{2,\pm}(h)$. Окружности $\alpha_{b,+}(h)$ и $\alpha_{b,-}(h)$ являются σ -симметричными $\forall b \in \{1, 2\}$. Окружности $\alpha_{1,+}(h)$ и $\alpha_{2,+}(h)$ являются s -симметричными, то же самое относится к $\alpha_{1,-}(h)$ и $\alpha_{2,-}(h)$. Все они проектируются на сегмент параболы

$$\tilde{c}y = (\rho - h_3)(\tilde{c} + (h - h_3)\rho),$$

заклученный внутри шестиугольника $AKLDEF$. Данный сегмент проходит через точки N и L . Пересечение прообраза точки L с поверхностью $H^{-1}(h)$ состоит из 4-х точек. В одной из этих точек трансверсально пересекаются окружности $\alpha_{1,+}(h)$ и $\beta_+(h)$, и в другой (s - симметричной) точке трансверсально пересекаются $\alpha_{2,+}(h)$ и $\beta_+(h)$. Никаких других пересечений у них нет. Следовательно: все эти окружности негомотопны нулю, $\alpha_{1,+}(h)$ гомотопна $\alpha_{2,+}(h)$ в T_h^2 и $\alpha_{1,-}(h)$ гомотопна $\alpha_{2,-}(h)$ в $\sigma(T_h^2)$. В пределе при $h \rightarrow h_3 - 0$ окружности $\alpha_{1,+}(h)$ и $\alpha_{2,+}(h)$ сливаются с γ_3^+ . Аналогично, окружности $\alpha_{1,-}(h_3)$ и $\alpha_{2,-}(h_3)$ совпадают с γ_3^- . Поэтому, при переходе через критический уровень $h = h_3$ с каждым из торов T_h^2 и $\sigma(T_h^2)$ происходит бифуркация типа B . Следовательно при $h > h_3$ подмногообразие \mathcal{M}_h^2 имеет 4 связных компоненты. Утверждение о связных компонентах многообразия \mathcal{M}_h^2 доказано. Результат представлен на рис. 7, где h возрастает сверху-вниз.

В дальнейшем, рассматривая на фиксированном торе T^2 ориентированные окружности, мы будем называть их *циклами*, не различая гомотопные (гомологичные) циклы. Термин *окружность* мы используем только для вложенных окружностей, рассматриваемых без ориентаций.

На многообразии $\mathcal{M}^3 = F^{-1}(0)$ фиксируем ориентацию, определяемую любой ориентацией \mathcal{M}^4 и полем $grad(F)$. Ограничим гамильтониан H на \mathcal{M}^3 . Многообразие \mathcal{M}^3 расслоено на торы, являющиеся компонентами $\mathcal{M}_h^2 = H^{-1}(h)$. Пусть ε - достаточно малое положительное число. Подмногообразие $H^{-1}[h_i - \varepsilon; h_i + \varepsilon]$ при $i = 1$ диффеоморфно полноторию, а при $i \in \{2, 3\}$ - ориентированному седлу $N^2 \times S^1$ или паре таких седел. Слоение \mathcal{M}^3 на торы можно изобразить некомпактным графом, у которого вершина **A** изображает полноторие, а вершины **B** изображают седла (рис. 7). Подобные графы были введены А.Т. Фоменко для изображения топологических инвариантов до того, как последние стали представлять молекулами [27, 28, 30]. На каждом граничном торе многообразия $H^{-1}[h_i - \varepsilon; h_i + \varepsilon]$ фиксируем ориентацию края. Сдвиги вдоль траекторий поля $grad(H)$ очевидным образом определяют *склеивающие диффеоморфизмы*, которые позволяют отождествлять (т.е. склеивать между собой) торы $\mathcal{M}_{h_1+\varepsilon}^2$ и $\mathcal{M}_{h_2-\varepsilon}^2$, а также пары торов, являющихся связными компонентами подмногообразий $\mathcal{M}_{h_2+\varepsilon}^2$ и $\mathcal{M}_{h_3-\varepsilon}^2$.

Обсудим важное понятие склеивающего диффеоморфизма $\varphi_{ij} : T_i^2 \rightarrow T_j^2$, где T_i^2 и T_j^2 - компоненты границ некоторых атомов, которые связаны непрерывным семейством торов Лиувилля. Торы T_i^2 и T_j^2 являются "крайними" в этом семействе. В теории предполагается, что диффеоморфизм φ_{ij} сопоставляет точке $p \in T_i^2$ такую

точку $q \in T_j^2$, в которой выпущенная из p интегральная траектория поля $grad(F)$ протыкает тор T_j^2 . При этом нет никакой информации о римановой метрике на Q_h^3 , которая необходима для вычисления градиента. Это неудивительно, т.к. при решении конкретных задач поле $grad(F)$ никогда не вычисляют. В методе круговых молекул о нем даже не упоминают. Важно то, что тор T_i^2 подвергается непрерывной деформации, поднимаясь на более высокий уровень интеграла $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$ и проходя через все промежуточные торы. При отображении момента $\mathcal{F} = H \times F$ данному семейству торов отвечает вертикальный отрезок $I \subset \mathcal{F}(\mathcal{M}^4) \setminus \Sigma$. Можно рассмотреть более общую ситуацию, гладко деформируя этот отрезок так, чтобы он по-прежнему состоял из регулярных значений \mathcal{F} . Получится некоторая гладкая кривая $I : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2(h, f)$. Будем считать, что $\mathcal{F}(T_i^2) = I(0)$ и $\mathcal{F}(T_j^2) = I(1)$, а объединение P^3 всех торов непрерывного семейства σ , связывающего между собой T_i^2 и T_j^2 , является связной компонентой множества $\mathcal{F}^{-1}(I[0; 1])$. Предположим, что $P^3 \subset M^3$ для некоторого подмногообразия $M^3 \subset \mathcal{M}^4$, инвариантного относительно потока $sgrad(H)$. Поскольку мы считаем систему нерезонансной, то на M^3 однозначно определено некоторое слоение на инвариантные торы. Очевидно, что слоение цилиндра $P^3 \cong [0; 1] \times T^2$ на торы, являющиеся компонентами $\mathcal{F}^{-1}(I(t))$, индуцировано из многообразия M^3 .

Рассмотрим произвольную изотопию $G : [0; 1] \times T^2 \rightarrow P^3$, связывающую граничные торы $T_i^2 = G(0, T^2)$ и $T_j^2 = G(1, T^2)$, и удовлетворяющую условию

$$G(t, T^2) \subset \mathcal{F}^{-1}(I(t)) \quad \forall t \in [0; 1].$$

Пусть $\varphi_{ij} : T_i^2 \rightarrow T_j^2$ – диффеоморфизм, для каждого $p \in T^2$ сопоставляющий точке $G(0, p)$ точку $G(1, p)$. Вырежем из многообразия M^3 цилиндр P^3 , и склеим края разреза по диффеоморфизму φ_{ij} . Тем самым мы отождествляем торы T_i^2 и T_j^2 , и получаем некоторое новое многообразие \widetilde{M}^3 , послойно диффеоморфное M^3 . Послойный диффеоморфизм определяет взаимно-однозначное соответствие между атомами, являющееся по-сути отношением их *равенства*. Поэтому инвариант Фоменко-Цишанга при этой операции вырезания-склеивания не изменится [7,43]. Следовательно, расслоенное многообразие M^3 можно считать склеенным из атомов по диффеоморфизмам φ_{ij} граничных торов. Такие диффеоморфизмы, возникающие de-facto из изотопий, а также сами порождающие их изотопии называются склеивающими. Для построения склеивающих изотопий на Q_h^3 годится в т.ч. поле $grad(F)$, вдоль траекторий которого гомотопируются торы Лиувилля. Из приведенных выше рассуждений легко понять, что если два диффеоморфизма

$\varphi_{ij} : T_i^2 \rightarrow T_j^2$ и $\psi_{ij} : T_i^2 \rightarrow T_j^2$ гомотопны, то в результате определяемых ими склеиваний $T_i^2 \cong T_j^2$ получатся послойно диффеоморфные многообразия. Таким образом, конкретный вид склеивающей изотопии внутри M^3 имеет значение только с технической точки зрения.

Вернемся к многообразию M^3 , в котором присутствуют три атома типа B и один атом A (рис. 7). Образы кривых $I : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2(h, f)$, отвечающих непрерывным семействам торов в M^3 , являются горизонтальными отрезками (рис. 8). Исходя из вышесказанного, достаточно построить произвольную изотопию $G : [h'; h''] \times T^2 \rightarrow M^3$, связывающую граничные торы атомов $G(h', T^2)$ и $G(h'', T^2)$ и удовлетворяющую условию

$$G(h, T^2) \subset H^{-1}(h) \quad \forall h \in [h'; h''].$$

Сейчас мы сделаем это и построим склеивающие изотопии между атомами многообразия M^3 , которые будут играть ключевую роль в процессе вычисления меток молекул $W^*(Q_h^3)$.

Предложение 6 Пусть $\varepsilon > 0$ бесконечно мало.

1. На торах $M_{h_1+\varepsilon}^2$ и $M_{h_2-\varepsilon}^2$ существуют такие допустимые базисы (λ_1, μ_1) и (λ_2, μ_2) , в которых матрица склейки (2.1) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

2. На торах, являющихся компонентами $M_{h_2+\varepsilon}^2$ и $M_{h_3-\varepsilon}^2$, существуют допустимые базисы $(\lambda_2^\pm, \mu_2^\pm)$ и $(\lambda_3^\pm, \mu_3^\pm)$ соответственно, в которых матрицы склейки совпадают и имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Доказательство. Рассматриваем боттовский интеграл $H : M^3 \rightarrow \mathbb{R}$, являющийся ограничением гамильтониана H на инвариантное многообразие M^3 . Используем окружности, которые мы определили выше, и введем обозначения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \delta(h_1 + \varepsilon), & \mu_1 &= \gamma_+(h_1 + \varepsilon) \\ \lambda_2 &= \gamma_+(h_2 - \varepsilon), & \mu_2 &= \delta(h_2 - \varepsilon) \\ \lambda_2^\pm &= \beta_\pm(h_2 + \varepsilon), & \mu_2^\pm &= \alpha_{1,\pm}(h_2 + \varepsilon) \\ \lambda_3^\pm &= \alpha_{1,\pm}(h_3 - \varepsilon), & \mu_3^\pm &= \beta_\pm(h_3 - \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.10)$$

При $\varepsilon \rightarrow +0$ окружность λ_1 стягивается в точку, в силу чего она является меридианом полнотория $H^{-1}[h_1; h_1 + \varepsilon]$. Одновременно окружность μ_1 сливается с критической траекторией γ_1 . Направление потока $sgrad(H)$ на этой траектории определяет ориентацию слоев любого (из \mathbf{Z}) расслоений Зейферта на полнотории [7]. Поэтому ориентация μ_1 , по непрерывности определенная направлением траектории γ_1 , отвечает требованию к ориентации цикла μ на границе атома A . Поскольку окружность λ_1 является меридианом полнотория $H^{-1}[h_1; h_1 + \varepsilon]$, она может представлять собой цикл λ . Фиксируя ее ориентацию так, чтобы пара (λ_1, μ_1) определяла на торе $\mathcal{M}_{h_1+\varepsilon}^2$ ориентацию края полнотория, получим допустимый базис циклов (λ_1, μ_1) на границе атома $A = H^{-1}[h_1; h_1 + \varepsilon]$.

В пределе при $\varepsilon \rightarrow +0$ окружность λ_2 , а также каждая из окружностей λ_2^\pm совпадают с γ_2 . Зафиксируем их ориентации, которые по непрерывности определяет периодическая траектория γ_2 . Это именно те ориентации, которые данные окружности имеют в качестве слоев (гомотопически единственного) расслоения Зейферта, заданного на седле $H^{-1}[h_2 - \varepsilon; h_2 + \varepsilon]$ и имеющего согласованные с направлением $sgrad(H)$ ориентации слоев. Поэтому они могут представлять собой циклы λ на границе атома B . Окружность $\delta(h)$ склеивается в восьмерку, затем распадается на две окружности $\delta_\pm(h)$, когда h возрастает от $h_2 - \varepsilon$ до $h_2 + \varepsilon$. Ясно, что в результате получится вложенный диск с двумя дырками N^2 . Окружность $\delta_+(h_2 + \varepsilon)$ гомотопна μ_2^+ в $T_{h_2+\varepsilon}^2$, а окружность $\delta_-(h_2 + \varepsilon)$ гомотопна μ_2^- в $\sigma(T_{h_2+\varepsilon}^2)$. Это следует из того, что их проекции, каковыми являются сегмент параболы NL и отрезок $[AF]$, не пересекаются (рис. 6). Таким образом, окружности μ_2 и μ_2^\pm являются компонентами границы некоторого сечения расслоения Зейферта. Фиксируем их ориентации так, чтобы пара циклов (λ_2, μ_2) на торе $\mathcal{M}_{h_2-\varepsilon}^2$, а также пары $(\lambda_2^\pm, \mu_2^\pm)$ на торах, являющихся связными компонентами $\mathcal{M}_{h_2+\varepsilon}^2$, определяли бы ориентации края седла. Получим допустимые базисы (λ_2, μ_2) и $(\lambda_2^\pm, \mu_2^\pm)$ на границе атома $B = H^{-1}[h_2 - \varepsilon; h_2 + \varepsilon]$.

При $\varepsilon \rightarrow +0$ пара окружностей λ_3^\pm сливается с парой периодических траекторий γ_3^\pm , а каждая из окружностей μ_3^\pm склеивается в восьмерку. Обозначим $\mu_3^{\pm,1}$ и $\mu_3^{\pm,2}$ произвольные окружности в $\mathcal{M}_{h_3+\varepsilon}^2$, попарно склеивающиеся в эти же восьмерки так, что в пределе, т.е. при $\varepsilon = 0$ имеет место:

$$\mu_3^{+,1} \cup \mu_3^{+,2} = \mu_3^+, \quad \mu_3^{-,1} \cup \mu_3^{-,2} = \mu_3^-.$$

Заметим, что окружности $\mu_3^{\pm,1}$, $\mu_3^{\pm,2}$ вложены в четыре тора, являющиеся компонентами подмногообразия $\mathcal{M}_{h_3+\varepsilon}^2$. Фиксируем однозначно определенные циклы

$\lambda_3^{\pm,1}$ и $\lambda_3^{\pm,2}$. Всегда можно считать, что они получаются из седловых критических траекторий поля $sgrad(H)$, сдвинутых на граничные торы. Циклы λ также определяются пересечениями сепаратрисной диаграммы с граничными торами атома. При этом их ориентации, по непрерывности, заданы направлениями критических траекторий. Это означает следующее. Седловая окружность и окружность λ на граничном торе, вырезанная сепаратрисной диаграммой, ограничивают "тонкую" ленту, которая диффеоморфна кольцу $S^1 \times D^1$. Его края $S^1 \times \{0\}$ и $S^1 \times \{1\}$ соответствуют этим двум окружностям, а поскольку на один край диффеоморфизм переносит ориентацию седловой окружности, на другом крае также возникает ориентация. Эти две связаны между собой непрерывным полем направлений окружностей $S^1 \times \{t\}$, где $0 \leq t \leq 1$. Обратный диффеоморфизм индуцирует искомую ориентацию цикла λ .

Далее мы зафиксируем ориентации всех дополнительных циклов μ так, чтобы получить допустимые системы координат на границах двух атомов B , являющихся компонентами $H^{-1}[h_3 - \varepsilon; h_3 + \varepsilon]$.

Итак, все допустимые базисы определены. Для того, чтобы построить склеивающие изотопии, достаточно для любой пары соседних атомов прогомоторировать циклы λ и μ от границы одного атома до границы другого. При этом требуется, чтобы в каждом промежуточном положении эти циклы лежали на торе Лиувилля и являлись на нем взаимно дополнительными, т.е. трансверсально пересекающимися в единственной общей точке. Поскольку циклы рассматриваются с точностью до гомотопий на торах, последнее условие имеет гомотопически инвариантную формулировку: индекс пересечения циклов равен ± 1 . Поскольку любая пара взаимно дополнительных циклов определяет диффеоморфизм тора Лиувилля на стандартный тор $T^2 = S^1 \times S^1$, гомотопируя указанным образом базис (λ, μ) мы автоматически конструируем склеивающую изотопию. Формулы (2.10) уже содержат в себе все необходимое. При монотонном изменении параметра ε каждый из циклов гомотопируется именно так, как нужно для определения склеивающей изотопии.

Чтобы выписать матрицы склейки можно поступить следующим образом. Пусть $\varphi_{ij} : T_i^2 \rightarrow T_j^2$ – склеивающий диффеоморфизм. Следуя склеивающей изотопии, прогомоторируем допустимые базисы (λ_i, μ_i) и (λ_j, μ_j) с торов T_i^2 и T_j^2 на любой из торов непрерывного семейства σ , соединяющего T_i^2 и T_j^2 . Когда все циклы окажутся в фундаментальной группе этого тора, нам останется только выразить базис (λ_j, μ_j)

через базис (λ_i, μ_i) . Для реализации этого подхода положим $\varepsilon = (h_2 - h_1)/2$ в первых двух формулах (2.10). Тогда имеют место следующие соотношения между окружностями:

$$\lambda_1(\varepsilon_0) = \mu_2(\varepsilon_0), \quad \mu_1(\varepsilon_0) = \lambda_2(\varepsilon_0), \quad \varepsilon_0 = (h_2 - h_1)/2.$$

Эти равенства означают совпадение окружностей без учета ориентаций. Следовательно, рассматривая их как *циклы*, в фундаментальной группе π_1 тора $\mathcal{M}_\varepsilon^2$ имеем:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(\varepsilon_0) \\ \mu_1(\varepsilon_0) \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2(\varepsilon_0) \\ \mu_2(\varepsilon_0) \end{pmatrix}.$$

Поскольку склеивающая изотопия связывает $(\lambda_1(\varepsilon_0), \mu_1(\varepsilon_0))$ с допустимым базисом (λ_1, μ_1) атома A , а также $(\lambda_2(\varepsilon_0), \mu_2(\varepsilon_0))$ с допустимым базисом (λ_2, μ_2) атома B , то с точностью до знака матрица склейки имеет вид (2.8).

Докажем, что ориентации циклов μ_1 и λ_2 сохраняются при гомотопии. Проведем отрезок $[SR]$, достаточно близко к $[KF]$ (рис. 6). Для каждого $h \in [h_1; h_2]$ на окружности $\gamma_+(h)$ выберем такую непрерывно зависящую от h точку $\tilde{P}(h)$, что проекция точки $\tilde{P}(h)$ принадлежит $[SR]$ и проекция $\tilde{P}(h)$ есть точка $[KQ] \cap [SR]$. Из (2.7) следует, что если ρ достаточно мало, то в каждой точке $\tilde{P}(h)$ имеем:

$$M_1\eta_3 - M_2\xi_3 = \pm r\sqrt{\rho} \cos\left(\psi - \frac{\alpha_0}{2}\right) \neq 0.$$

Следовательно можно считать, что $M_1\eta_3 - M_2\xi_3 > 0$ в каждой $\tilde{P}(h)$. Пусть τ натуральный параметр на окружности $\gamma_+(h)$, задающий направление от $P(h)$ к $\tilde{P}(h)$. Пусть t время движения вдоль траектории, порождающей окружность $\gamma_+(h_i)$, где $i = 1$ или $i = 2$. Пусть $\tau = \tau_i$ и $t = t_i$ в точке $\tilde{P}(h_i)$. Из (2.7) следует, что $M_1 = M_2 = M_3 = 0$ в каждой точке $P(h)$ и $x = 0$ в точках $P(h_i)$. По рис. 6 видно, что $\dot{\rho}(\tau) > 0$. Из (2.4) и (2.6) следует, что знак $\dot{y}(t_i)$ совпадает со знаком $M_1\eta_3 - M_2\xi_3$ в точке $\tilde{P}(h_i)$, если ρ достаточно мало. Поскольку ρ мало, то $\dot{y}(t_i) > 0$ при каждом $i \in \{1, 2\}$. Очевидно, что $\dot{y}(\rho) > 0$ на каждой из окружностей $\gamma_+(h_i)$. Окончательно получаем, что $\dot{\tau}(t_i) > 0$ при каждом $i \in \{1, 2\}$. Это значит, что на каждой из окружностей $\gamma_+(h_i)$ параметры t и τ задают одинаковые ориентации. Очевидно, что склеивающая изотопия сохраняет ориентации, порожденные параметром τ . А так как ориентации циклов μ_1 и λ_2 порождаются параметром t , то склеивающая изотопия сохраняет эти ориентации. Следовательно, в допустимых базисах (λ_1, μ_1) и (λ_2, μ_2) матрица склейки имеет вид (2.8).

Аналогично из формул (2.10) следует, что в базисах (λ_2^+, μ_2^+) и (λ_3^+, μ_3^+) , а также в базисах (λ_2^-, μ_2^-) и (λ_3^-, μ_3^-) матрицы склейки имеют вид (2.9). Докажем, что эти две матрицы совпадают.

Лемма 1 *Симметрия σ обращает ориентации подмногообразий \mathcal{M}^4 и Q_h^3 , и сохраняет ориентацию \mathcal{M}^3 . Динамическая система, σ - симметричная системе (2.4), отличается от нее только направлением времени.*

Доказательство очевидно.

Из леммы 1 следует, что симметрия $\sigma : \mathcal{M}^3 \rightarrow \mathcal{M}^3$ сохраняет ориентацию края седла $H^{-1}[h_2 - \varepsilon; h_2 + \varepsilon]$, а также ориентацию края каждого из двух седел, составляющих $H^{-1}[h_3 - \varepsilon; h_3 + \varepsilon]$. Каждая из следующих пар окружностей является σ - симметричной:

$$\lambda_2^\pm, \quad \lambda_3^\pm, \quad \mu_2^\pm, \quad \mu_3^\pm.$$

При $\varepsilon \rightarrow +0$ каждая из окружностей λ_2^\pm равномерно сближается с критической траекторией γ_2 . Одновременно пара окружностей λ_3^\pm стремится к σ - симметричной паре траекторий γ_3^\pm . Отсюда и из леммы 1 следует, что σ обращает ориентации циклов λ_2^\pm и λ_3^\pm . Поэтому, сохраняя ориентации граничных торов, симметрия σ обращает ориентации циклов μ_2^\pm и μ_3^\pm . Очевидно, что σ - симметрия склеивающей изотопии также является склеивающей изотопией. Следовательно, матрица склейки в базисах (λ_2^-, μ_2^-) и (λ_3^-, μ_3^-) совпадает с матрицей склейки в базисах (λ_2^+, μ_2^+) и (λ_3^+, μ_3^+) . Поясним это. Предположим для примера, что склеивающая изотопия переводит цикл λ_2^+ в цикл μ_3^+ , а цикл μ_2^+ в цикл λ_3^+ . Следовательно, некоторая склеивающая изотопия переводит цикл $\sigma(\lambda_2^+) = -\lambda_2^-$ в цикл $\sigma(\mu_3^+) = -\mu_3^-$, а цикл $\sigma(\mu_2^+) = -\mu_2^-$ в цикл $\sigma(\lambda_3^+) = -\lambda_3^-$. Но тогда она совмещает циклы λ_2^- и μ_3^- , а также μ_2^- и λ_3^- . Это означает, что каждая из двух матриц склейки имеет одинаковый вид \square .

2.3.4. Обозначения.

В дальнейшем отображение момента $\mathcal{F} = H \times F : \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ будем просто называть *проекцией*, также как и различные образы этого отображения. Значения функции $F : \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ будем обозначать f . Пусть $\mathcal{M}_f^3 = F^{-1}(f)$ и $Q_h^3 = H^{-1}(h)$. Первое из этих подмногообразий ориентировано полем нормалей $grad(F)$, которое в каждой точке отлично от нуля. Второе ориентировано полем нормалей $grad(H)$, отличным от нуля в каждой точке неособого подмногообразия Q_h^3 . На \mathcal{M}^4 фиксирована произвольная ориентация (\mathcal{M}^4 ориентируемо, будучи поверхностью

уровня $Z_1 = Z_2 = 0$ в ориентируемом \mathcal{O}^6). Обозначим F_h функцию $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$ и H_f функцию $H : \mathcal{M}_f^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Критические значения F_h будем обозначать f_i^\pm или $f_i^\pm(h)$. Пусть ∇H_f – векторное поле $grad(H_f)$, вычисленное в метрике на \mathcal{M}_f^3 , индуцированной любой римановой метрикой на \mathcal{M}^4 . Проекции интегральных траекторий поля ∇H_f изображены горизонтальными стрелками. Эти траектории играют важную роль в дальнейших рассуждениях. Бифуркационную диаграмму Σ будем рассматривать, как объединение четырех кривых, обозначаемых f_1, f_2, f_3, f_4 (рис. 8). Эти кривые f_i мы будем называть *ветвями*. Заметим, что ветвь f_3 состоит из двух кривых, симметричных относительно горизонтальной прямой $f = 0$. Ветви ограничивают регулярные области, которые отмечены цифрами 1, 2, 4 – согласно числу торов Лиувилля над каждой точкой (h, f) . Каждый из этих торов мы обозначаем $T^2(h, f)$. Он является связной компонентой подмногообразия $\{H = h, F = f\}$, которое мы будем обозначать $\mathcal{M}^2(h, f)$. Будем говорить, что точка $q = (h, f) \notin \Sigma$ бесконечно близка к бифуркационной диаграмме (или к ветви f_i), если расстояние от q до некоторой ветви f_i можно считать как угодно малым.

Сделаем некоторые замечания. Возьмем точку $q = (h, f)$, бесконечно близкую к ветви f_i , где $i \in \{2, 4\}$. Очевидно, что на ветви f_i найдется такая пара точек p и \tilde{p} , что p и q лежат на одной вертикали, а \tilde{p} и q на одной горизонтали. Значения $f_2^\pm(h)$ и $f_4^\pm(h)$ являются седловыми, поэтому точка p является проекцией окружности S^1 – седловой, критической для функции F_h . Одновременно точка \tilde{p} является проекцией окружности \tilde{S}^1 – седловой, критической для функции H_f . Сепаратрисные диаграммы окружностей S^1 и \tilde{S}^1 определяют на торе $T^2(h, f)$ циклы λ и $\tilde{\lambda}$. Окружность λ бесконечно близка к S^1 , а окружность $\tilde{\lambda}$ бесконечно близка к \tilde{S}^1 . Интегральные траектории, порождающие седловые окружности S^1 и \tilde{S}^1 , также бесконечно близки друг к другу. Следовательно, циклы λ и $\tilde{\lambda}$ гомотопны на торе $T^2(h, f)$.

Аналогично, пусть точка $q = (h, f)$ бесконечно близка к ветви f_i , где $i \in \{1, 3\}$. Циклы λ и $\tilde{\lambda}$, возникающие на торе $T^2(h, f)$ являются меридианами двух полноторий, одно из которых вложено в Q_h^3 , а другое в \mathcal{M}_f^3 . На рис. 8 первому полноторию отвечает отрезок $[p; q]$, а второму отрезок $[\tilde{p}; q]$. Очевидно, что одно из полноторий можно гомотопировать в другое так, чтобы тор $T^2(h, f)$ оставался неподвижным. При этом отрезок $[p; q]$ гомотопируется на $[\tilde{p}; q]$, а точка p движется по ветви f_i до совпадения с точкой \tilde{p} . Поскольку окружности λ и $\tilde{\lambda}$ являются меридианами общего полнотория, то они гомотопны на торе $T^2(h, f)$. Однако, их ориентации могут оказаться различными, т.е. соответствующие циклы равны с точностью до знака.

Мы многократно будем использовать следующее утверждение.

Пусть $f \neq 0$ и точка $q = (h, f)$ одной из регулярных областей бесконечно близка к ветви f_i . Соединим q с f_i двумя отрезками – вертикальным $[p; q]$ и горизонтальным $[\tilde{p}; q]$. Пусть k есть угловой коэффициент касательной к кривой f_i в произвольной точке, лежащей между p и \tilde{p} . Тогда две ориентации края, индуцированные на торе $T^2(h, f)$ из многообразий Q_h^3 и M_f^3 , совпадают при $k > 0$ и являются противоположными при $k < 0$.

Очевидно, что $k \neq 0$ в любой точке каждой ветви f_i (рис. 8). Возьмем произвольную точку тора $T^2(h, f)$ и вычислим в ней векторы $grad(F)$, $grad(H)$. Зафиксируем в этой точке векторы n и \tilde{n} внутренних нормалей к тору, рассматриваемому в качестве компоненты границ атомов в Q_h^3 и M_f^3 , которые проектируются на отрезки $[p; q]$ и $[\tilde{p}; q]$ соответственно. Пары векторов $(grad(H), n)$ и $(grad(F), \tilde{n})$ определяют на торе $T^2(h, f)$ ориентации границ этих двух атомов. При любом k проекция вектора $grad(F)$ направлена вверх, а проекция вектора $grad(H)$ направлена вправо. Проекция вектора \tilde{n} всегда горизонтальна, а вектор n имеет вертикальную проекцию, однако направления этих проекций могут быть различными для противоположных знаков числа k . Они также зависят от положения точки q по отношению к ветви f_i – с одной стороны от нее или с другой. Заметим, что проекции векторов n и \tilde{n} всегда направлены в сторону ветви f_i . Рассматривая все варианты легко проверить, что проекции пар $(grad(H), n)$ и $(grad(F), \tilde{n})$ при $k > 0$ всегда имеют одинаковую ориентацию в $\mathbb{R}^2(h, f)$, а при $k < 0$ их ориентации всегда различны.

С практической точки зрения эти рассуждения позволят определять λ - циклы на границах атомов в Q_h^3 , используя гомотопные им циклы $\tilde{\lambda}$. В дальнейшем мы будем делать это без оговорок. Заметим, что с формальной точки зрения гомотопные циклы совпадают, но мы называем циклами также и представляющие их ориентированные окружности. Используя склеивающие изотопии на подмногообразии M^3 , которые были сконструированы при доказательстве предложения 6, мы построим склеивающие изотопии на каждом многообразии Q_h^3 . Одновременно, допустимые базисы из предложения 6 помогут нам задать допустимые системы координат на всех атомах, составляющих Q_h^3 . Будем обозначать δ произвольное положительное число, считая его настолько малым, насколько это необходимо в конкретной ситуации.

2.3.5. Метки при $h_1 < h < h_2$.

Многообразиие Q_h^3 склеено из двух атомов A – полноторий

$$F_h^{-1}[f_+; f_1^+(h)] \quad \text{и} \quad F_h^{-1}[f_1^-(h); f_-],$$

проектирующихся на отрезки $[a_+; b_+]$ и $[b_-; a_-]$. Окружность γ_1 порождена замкнутой интегральной траекторией поля $sgrad(H)$. Его критические траектории, отвечающие всевозможным значениям $f_1^\pm(h)$, вместе с γ_1 организованы в непрерывное семейство, проектирующееся на ветвь f_1 (рис. 8). Окружность γ_1 проектируется в точку 1. Кривая a_-a_+ получена сдвигом f_1 на δ вправо.

На каждом торе $T^2(h, f)$, проектирующемся в точку кривой a_-a_+ , существует допустимый в \mathcal{M}_f^3 и непрерывно зависящий от f базис $(\lambda_1(f), \mu_1(f))$, так что

$$(\lambda_1(0), \mu_1(0)) = (\lambda_1, \mu_1).$$

Напомним, что λ -циклы $\lambda_1(f)$ на торах $T^2(h, f)$ являются меридианами полноторий $H_f^{-1}[h - \delta; h]$, в силу чего определены с точностью до ориентаций. Для того, чтобы задать указанное семейство базисов, следует произвольным образом гомотопировать цикл μ_1 вдоль семейства торов $T^2(h, f)$ над кривой a_-a_+ так, чтобы сохранялась его дополнителность по отношению к λ_1 . Ограничивая интеграл F на цилиндр $\cup_f T^2(h, f)$, данную изотопию можно осуществить с помощью поля градиентов. Возникает непрерывное семейство циклов $\mu_1(f)$. Поскольку индекс пересечения $\mu_1(f)$ и $\lambda_1(f)$ сохраняется при любых, достаточно малых возмущениях параметра f , из связности множества значений этого параметра следует, что при всех f индекс пересечения равен ± 1 . Ориентации циклов $\mu_1(f)$, определяемые критическими траекториями над f_1 , образуют непрерывное поле. Следовательно, непрерывное поле ориентаций торов $T^2(h, f)$ – границ полноторий определяет непрерывное поле ориентаций циклов $\lambda_1(f)$.

При $h' \leq h$ и $f_- \leq f \leq f_+$ каждый тор $T^2(h', f)$, проектирующийся в точку кривой a_-a_+ , сдвинем вдоль траекторий поля ∇H_f на уровень $H = h$. Очевидно, что так мы построим склеивающую изотопию в Q_h^3 , проектирующуюся на отрезок $[a_-; a_+]$, которая переводит тор $T^2(h, f_-)$ в тор $T^2(h, f_+)$. При этой изотопии базис $(\lambda_1(f_-), \mu_1(f_-))$ совмещается с базисом $(\lambda_1(f_+), \mu_1(f_+))$. Тогда пара $(-\lambda_1(f_-), \mu_1(f_-))$ на торе $T^2(h, f_-)$ и пара $(\lambda_1(f_+), \mu_1(f_+))$ на торе $T^2(h, f_+)$ являются допустимыми базисами в Q_h^3 . В этих базисах матрица склейки имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим метки : $r = -1/0 = \infty$, $\varepsilon = \text{sgn}(-1) = -1$. В данном случае n - меток нет, поскольку отсутствуют семьи.

2.3.6. Метки при $h_2 < h < h_0$.

В данном случае многообразие Q_h^3 склеено из двух атомов A – полноторий, проектирующихся на отрезки $[c_+; d_+]$ и $[d_-; c_-]$, и двух атомов B – седел, проекциями которых являются отрезки $[e_+; j_+]$ и $[j_-; e_-]$ (рис. 8). Обозначим $T^2(h, f)$ тор $\mathcal{M}^2(h, f)$ для точки (h, f) из регулярной области 1, и $T_{\pm}^2(h, f)$ – связные компоненты $\mathcal{M}^2(h, f)$ для точки (h, f) из области 2. Нетрудно проверить σ -симметричность торов $T_{\pm}^2(h, f)$.

Окружность γ_2 порождена замкнутой интегральной траекторией поля $\text{sgrad}(H)$. Его критические траектории, отвечающие всевозможным значениям $f_2^{\pm}(h)$, вместе с γ_2 организованы в непрерывное семейство, проектирующееся на ветвь f_2 . Окружность γ_2 проектируется в точку 2. Кривые j_-j_+ и e_-e_+ получены из f_2 посредством сдвига на δ влево и вправо.

На каждом торе $T^2(h, f)$, проектирующемся в точку кривой j_-j_+ , существует допустимый в \mathcal{M}_f^3 и непрерывно зависящий от f базис $(\lambda_2(f), \mu_2(f))$, так что

$$(\lambda_2(0), \mu_2(0)) = (\lambda_2, \mu_2).$$

Нам потребуются еще два непрерывных семейства допустимых в \mathcal{M}_f^3 базисов $(\lambda_2^{\pm}(f), \mu_2^{\pm}(f))$, расположенных с другой стороны от ветви f_2 . Они заданы на торах $T_{\pm}^2(h, f)$, проектирующихся в точки кривой e_-e_+ , при этом

$$(\lambda_2^{\pm}(0), \mu_2^{\pm}(0)) = (\lambda_2^{\pm}, \mu_2^{\pm}).$$

Найдем матрицы склейки атомов B между собой. Существуют две склеивающие изотопии в Q_h^3 , проектирующиеся на отрезок $[e_-; e_+]$. Они переводят пару базисов $(\lambda_2^{\pm}(f_-), \mu_2^{\pm}(f_-))$ над точкой e_- в пару базисов $(\lambda_2^{\pm}(f_+), \mu_2^{\pm}(f_+))$ над точкой e_+ . Тогда пары $(\lambda_2^{\pm}(f_-), -\mu_2^{\pm}(f_-))$ на торах $T_{\pm}^2(h, f_-)$ и пары $(\lambda_2^{\pm}(f_+), \mu_2^{\pm}(f_+))$ на торах $T_{\pm}^2(h, f_+)$ являются допустимыми базисами в Q_h^3 . В этих базисах обе матрицы склейки имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Отсюда находим метки: $r = 1/0 = \infty$, $\varepsilon = \text{sgn}(1) = 1$.

Найдем матрицы склейки седел с полноториями, отвечающие парам $A-B$. Пусть $j_+ = (h, f_1)$ и $c_+ = (h, f_2)$ (рис. 8). При $h' \leq h$ и $f_1 \leq f \leq f_2$ каждый тор $T^2(h', f)$, проектирующийся в точку кривой a_-a_+ , сдвинем вдоль траекторий ∇H_f

на уровень $H = h$. Очевидно, что так мы получим склеивающую изотопию в Q_h^3 , проектирующуюся на отрезок $[j_+; c_+]$, которая переводит тор $T^2(h, f_1)$ в тор $T^2(h, f_2)$. Из предложения 6 следует, что при сдвиге вдоль траекторий поля ∇H_0 базис (λ_1, μ_1) совмещается с базисом (μ_2, λ_2) . Из связности ветви f_1 вытекает, что при сдвиге вдоль траекторий ∇H_f *каждый* базис $(\lambda_1(f), \mu_1(f))$ совмещается с базисом $(\mu_2(f), \lambda_2(f))$. Следовательно, при склеивающей изотопии $(\lambda_2(f_1), \mu_2(f_1))$ переходит в $(\mu_1(f_2), \lambda_1(f_2))$. Тогда базисы $(\lambda_2(f_1), \mu_2(f_1))$ и $(\lambda_1(f_2), \mu_1(f_2))$ являются допустимыми в Q_h^3 . В этих базисах матрица склейки имеет вид (2.8).

Для второй пары A – B рассуждения аналогичны, и склеивающая изотопия проектируется на отрезок $[c_-; j_-]$. При этой изотопии базис $(\mu_1(f_2), \lambda_1(f_2))$ над точкой c_- совмещается с базисом $(\lambda_2(f_1), \mu_2(f_1))$ над точкой j_- . Базисы $(-\lambda_1(f_2), \mu_1(f_2))$ и $(\lambda_2(f_1), -\mu_2(f_1))$ являются допустимыми в Q_h^3 , следовательно матрица склейки также имеет вид (2.8). Отсюда метки: $r = 0/1 = 0$ и $\varepsilon = \text{sgn}(1) = 1$. Единственная семья состоит из двух B -атомов, и на рис. 4 она выделена пунктиром. Из вида матриц склейки следует, что соответствующая n -метка равна нулю.

2.3.7. Метки при $h_0 < h < h_3$.

При переходе через уровень $h = h_0$ многообразие Q_h^3 не испытывает топологической перестройки, так как h_0 не является критическим значением H . Однако, его слоение Лиувилля перестраивается: "из ничего" появляются четыре новых атома типа A (рис. 4). Окружности γ_3^\pm порождены замкнутыми интегральными траекториями поля $\text{sgrad}(H)$. Точки g_\pm на рис. 8 являются проекциями вырожденных критических окружностей на уровне $F_{h_0} = f_0^\pm$. Критические траектории $\text{sgrad}(H)$, отвечающие всевозможным значениям $f_4^\pm(h)$, вместе с γ_3^\pm организованы в два непрерывных семейства, проектирующихся на ветвь f_4 , т.е. на кривую g_-g_+ . Выберем сегмент кривой g_-g_+ , заключенный между двумя произвольными точками, расположенными бесконечно близко к g_+ и g_- . Кривые l_-l_+ и i_-i_+ получены из этого сегмента сдвигами влево и вправо на δ .

На каждом торе $T_\pm^2(h, f)$, проектирующемся в точку кривой l_-l_+ , существует допустимый в \mathcal{M}_f^3 и непрерывно зависящий от f базис $(\lambda_3^\pm(f), \mu_3^\pm(f))$, так что

$$(\lambda_3^\pm(0), \mu_3^\pm(0)) = (\lambda_3^\pm, \mu_3^\pm).$$

Пусть $f \neq 0$ и точка (h, f) из области 2, движущаяся в область 4, пересекает ветвь f_4 . Тогда каждый из торов $T_\pm^2(h, f)$ распадается на два, один из которых непрерывным семейством торов связан с полноторием – новым атомом A . Обозначим этот тор

$T_{\pm, m}^2(h, f)$, где "m" указывает на связь с минимаксной окружностью. Объединяя связывающее его семейство торов с полноторием, получим "толстое" полноторие, которое при $f > 0$ проектируется на отрезок $[i_+; k_+]$, а при $f < 0$ на отрезок $[i_-; k_-]$. Торы $T_{\pm, m}^2(h, f)$ являются границами этих двух "толстых" атомов A . Обозначим $T_{\pm, s}^2(h, f)$ второй из двух торов, на которые распался тор $T_{\pm}^2(h, f)$ в результате бифуркации B над ветвью f_4 . Значок "s" указывает на то, что данный тор связан только с седлами. По непрерывности эти обозначения распространяются на торы Лиувилля, которые отвечают нулевым значениям f . Таким образом, каждой точке (h, f) из регулярной области 4 соответствуют связные компоненты $\mathcal{M}^2(h, f)$, которые обозначаются $T_{\pm, m}^2(h, f)$ и $T_{\pm, s}^2(h, f)$. Заметим, что торы $T_{\pm, m}^2(h, f)$ являются σ -симметричными, также как и торы $T_{\pm, s}^2(h, -f)$.

На каждом торе $T_{\pm, m}^2(h, f)$, проектирующемся в точку кривой i_-i_+ , существует допустимый в \mathcal{M}_f^3 и непрерывно зависящий от f базис $(\lambda_3^{\pm, m}(f), \mu_3^{\pm, m}(f))$, так что

$$(\lambda_3^{\pm, m}(0), \mu_3^{\pm, m}(0)) = (\lambda_3^{\pm, m}, \mu_3^{\pm, m}).$$

Аналогично, на каждом торе $T_{\pm, s}^2(h, f)$ из непрерывного семейства, проектирующегося на кривую i_-i_+ , существует непрерывное семейство допустимых в \mathcal{M}_f^3 базисов $(\lambda_3^{\pm, s}(f), \mu_3^{\pm, s}(f))$, так что

$$(\lambda_3^{\pm, s}(0), \mu_3^{\pm, s}(0)) = (\lambda_3^{\pm, s}, \mu_3^{\pm, s}).$$

При $\delta \rightarrow +0$ окружности $\mu_3^{+, m}(f)$ и $\mu_3^{+, s}(f)$, следуя бифуркации B , склеиваются в восьмерку. Одновременно окружность $\mu_3^+(f)$ склеивается в ту же самую восьмерку (рис. 8). Аналогично, при $\delta \rightarrow +0$ пара окружностей $\mu_3^{-, m}(f)$ и $\mu_3^{-, s}(f)$ образует восьмерку, в которую одновременно склеивается $\mu_3^-(f)$. В итоге получаются две различных восьмерки. На торах $T_{\pm, m}^2(h, f)$ и $T_{\pm, s}^2(h, f)$ возникают допустимые в \mathcal{M}_f^3 и непрерывно зависящие от f базисы $(\lambda_3^{\pm, m}(f), \mu_3^{\pm, m}(f))$ и $(\lambda_3^{\pm, s}(f), \mu_3^{\pm, s}(f))$ соответственно.

Согласно предложению 6, при сдвиге вдоль траекторий поля ∇H_0 базис $(\lambda_2^{\pm}, \mu_2^{\pm})$ совмещается с базисом $\{\pm\}(\mu_3^{\pm}, \lambda_3^{\pm})$. Поскольку точное значение $\{\pm\}$ неизвестно, то будем считать, что имеет место знак "+". На окончательный ответ это предположение не повлияет, поэтому мы не станем уточнять. Следовательно, при $f_0^- < f < f_0^+$ сдвиг вдоль траекторий ∇H_f совмещает базис $(\lambda_2^{\pm}(f), \mu_2^{\pm}(f))$ с базисом $(\mu_3^{\pm}(f), \lambda_3^{\pm}(f))$. Однако, в данном случае сдвиг на уровень $H = h$ не является изотопией, поскольку над кривой g_-g_+ тор $T_{\pm}^2(h', f)$ претерпевает бифуркацию B и распадается на два. Один из этих торов стягивается на минимаксную окружность,

отвечающую ветви f_3 , а другой уходит в бесконечность, дрейфуя в потоке ∇H_f . Этот последний тор, пришедший на уровень $H = h$, мы будем называть *трансформацией* тора $T_{\pm}^2(h', f)$. Очевидно, что в случае $|f| > f_0^+$ при трансформации не происходит никакой топологической перестройки (рис. 8). При $f = f_0^{\pm}$ у каждого тора $T_{\pm}^2(h_0, f)$ появляется негладкая особенность в виде ребра. Оно образовано вырожденной критической окружностью, которая отвечает значению f_0^{\pm} интеграла F_{h_0} . Заметим, что две точки $(h_0, f_0^{\pm}) \in \mathbb{R}^2(h, f)$ являются единственными особыми точкам бифуркационной диаграммы Σ . Обе относятся к вырожденному типу *исчезающее седло* [7,43].

Склеим пару седел, являющихся связными компонентами подмногообразия $F_h^{-1}[f_4^+(h) - \delta; f_4^+(h) + \delta]$, с седлом $F_h^{-1}[f_2^+(h) - \delta; f_2^+(h) + \delta]$. Последнее проектируется на отрезок $[n_+; m_+]$. При склейке пара торов над точкой i_+ – граничных для "нижних" седел отождествляется с парой торов над точкой n_+ – граничных для "верхнего" седла. Можно считать, что точки i_+ и n_+ имеют координаты (h, f_1) и (h, f_2) , где

$$f_1 = f_4^+(h) + \delta, \quad f_2 = f_2^+(h) - \delta.$$

При $h' \leq h$ и $f_1 \leq f \leq f_2$ каждый тор $T_{\pm}^2(h', f)$, проектирующийся в точку кривой e_-e_+ , подвергнем трансформации на уровень $H = h$. Тогда мы снова получим в Q_h^3 склеивающую изотопию, проектирующуюся на отрезок $[i_+; n_+]$, которая переводит тор $T_{\pm, s}^2(h, f_1)$ в тор $T_{\pm}^2(h, f_2)$. Очевидно, что при этой изотопии цикл $\mu_3^{\pm}(f)$ совмещается с циклом $-\mu_3^{\pm, s}(f)$, а цикл $\lambda_3^{\pm}(f)$ совмещается с $\lambda_3^{\pm, s}(f)$. Следовательно, склеивающая изотопия переводит базис $(\lambda_3^{\pm, s}(f_1), -\mu_3^{\pm, s}(f_1))$ в базис $(\mu_2^{\pm}(f_2), \lambda_2^{\pm}(f_2))$. Тогда базисы $(\lambda_3^{\pm, s}(f_1), -\mu_3^{\pm, s}(f_1))$ и $(\lambda_2^{\pm}(f_2), \mu_2^{\pm}(f_2))$ являются допустимыми в Q_h^3 . В этих базисах матрицы склейки имеют вид (2.8).

Аналогичные изотопии над отрезком $[i_-; n_-]$ склеивают пару седел $F_h^{-1}[f_4^-(h) - \delta; f_4^-(h) + \delta]$ с седлом $F_h^{-1}[f_2^-(h) - \delta; f_2^-(h) + \delta]$. Проекцией последнего является отрезок $[m_-; n_-]$. При этом базис $(\lambda_3^{\pm, s}(f_1), -\mu_3^{\pm, s}(f_1))$ переходит в базис $(\mu_2^{\pm}(f_2), \lambda_2^{\pm}(f_2))$. Тогда базисы $(\lambda_3^{\pm, s}(f_1), \mu_3^{\pm, s}(f_1))$ и $(\lambda_2^{\pm}(f_2), -\mu_2^{\pm}(f_2))$, являются допустимыми в Q_h^3 . В этих базисах матрицы склейки отличаются от (2.8) только знаками.

Пусть точка (h, f) принадлежит кривой i_-i_+ . Докажем, что цикл $\mu_3^{\pm, m}(f)$ представляет меридиан полнотория \mathcal{A}_{\pm}^3 , проектирующийся на отрезок $[i_+; k_+]$ и являющийся малой нормальной окрестностью критической окружности $f_3^{\pm}(h)$.

Окружность $\mu_3^{\pm, m}(f)$ проектируется в точку i_+ . Если отрезок $[i_+; k_+]$ стягивается в точку $k_+ \in f_3$, то полноторие \mathcal{A}_{\pm}^3 стягивается на максимальную окружность S_{\pm}^1 , отвечающую критическому значению $f_3^{\pm}(h)$ интеграла F_h . Предположим, что при

этом окружность $\mu_3^{+,m}(f) \subset \partial\mathcal{A}_+^3$ не стягивается в точку окружности S_+^1 . Тогда она стягивается на окружность S_+^1 , накрывая ее $n > 0$ раз. Очевидно, что то же самое происходит с окружностью $\mu_3^{+,m}(f)$ в потоке ∇H_f . Она накрывает критическую окружность, которая проектируется в некоторую точку (h', f) ветви f_3 . Заметим, что при $h \rightarrow +\infty$ обе ветви f_3 неограниченно приближаются к горизонтальной прямой $f = 0$.

Как мы видели выше, окружность $\beta_+(h)$ склеивается в восьмерку при $h \rightarrow h_3 - 0$ и распадается на две при $h > h_3$. Эта восьмерка проектируется на сегмент параболы, проходящий через точки A , G и C (рис. 6). Если f достаточно мало, то проекция окружности $\mu_3^{+,m}(f)$ представляет собой кривую внутри шестиугольника $ABCDEF$, как угодно близкую к этому сегменту. В то время, как окружность $\mu_3^{+,m}(f)$ дрейфует в потоке ∇H_f , ее проекция удаляется от отрезка $[AF]$ в направлении отрезка $[BC]$. При этом проекция максимальной окружности $f_3^+(h)$ равномерно стремится к отрезку $[AF]$, так как $\rho \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +\infty$. Следовательно, при достаточно малом f окружность $\mu_3^{+,m}(f)$, дрейфуя в потоке ∇H_f , не может накрывать максимальную окружность над ветвью f_3 . Из соображений связности легко заключить, что это же имеет место при любом f . Доказано, что цикл $\mu_3^{\pm,m}(f)$ является меридианом "своего" полнотория.

Теперь мы найдем матрицы склейки седел с полноториями, которые появились при $h > h_0$ вместе с новыми атомами A (рис. 4). Цикл $\mu_3^{\pm,m}(f)$ можно включить в допустимый базис минимаксного полнотория в Q_h^3 , отвечающего ветви f_3 (рис. 8). Возьмем произвольное полноторие над отрезком $[i_+; k_+]$, являющееся компонентой $F_h^{-1}[f_3^+(h) - \delta; f_3^+(h)]$, и склеенное с ним седло, являющееся компонентой $F_h^{-1}[f_4^+(h) - \delta; f_4^+(h) + \delta]$. Можно считать, что тор $T_+^2(h, f_0)$ над точкой i_+ одновременно граничит с полноторием и седлом, т.е. что

$$f_0 = f_3^+(h) - \delta = f_4^+(h) + \delta.$$

Тогда базис $(\lambda_3^{+,m}(f_0), -\mu_3^{+,m}(f_0))$ является допустимым на торе $T_+^2(h, f_0)$, как на крае седла, а базис $(-\mu_3^{+,m}(f_0), \lambda_3^{+,m}(f_0))$ является допустимым на этом же торе, как на крае полнотория. Следовательно, матрица склейки имеет вид (2.8). В точке i_- получим тот же результат.

Склеивающие изотопии, которые попарно соединяют между собой атомы B и проходят через нулевой уровень интеграла F , вполне аналогичны предшествующим. Они также определяются матрицами склейки (2.11), поэтому здесь мы не останавливаемся.

2.3.8. Метки при $h > h_3$.

При $h < h_3$ проекцией множества $Q_h^3 \cap \{M_3 = 0\}$ является отрезок $[KL]$ (рис. 6). Если значение h проходит через h_3 , то подмногообразие Q_h^3 разрывается вдоль пары окружностей γ_3^\pm . При $h > h_3$ оно имеет две связных компоненты, отвечающих противоположным знакам координаты M_3 . Эти две компоненты являются σ -симметричными. Компонента $\{M_3 > 0\}$ содержит критические окружности $f_1^+(h)$, $f_2^+(h)$ и пару окружностей $f_3^-(h)$. При этом компонента $\{M_3 < 0\}$ содержит $f_1^-(h)$, $f_2^-(h)$ и пару $f_3^+(h)$. Двум компонентам Q_h^3 отвечают две различных молекулы (рис. 4).

Рассмотрим компоненту $M_3 > 0$ и вычислим матрицы склейки седла $F_h^{-1}[f_2^+(h) - \delta; f_2^+(h) + \delta]$ с двумя полноториями, являющимися связными компонентами подмногообразия $F_h^{-1}[f_3^-(h); f_3^-(h) + \delta]$. Граничные торы этих полноторий проектируются в точку i_- , а склеенные с ними граничные торы седла проектируются в точку n_+ (рис. 9). Будем считать, что точки i_- и n_+ имеют координаты (h, f_1) и (h, f_2) , где

$$f_1 = f_3^-(h) + \delta, \quad f_2 = f_2^+(h) - \delta.$$

В пределе при $f \rightarrow +0$ тор $T_{+,s}^2(h', f)$ совпадает с тором $T_{+,m}^2(h_3 + \delta, 0)$ или $T_{+,s}^2(h_3 + \delta, 0)$. Обозначим его T_0^2 . Семейство всех торов $T_{+,s}^2(h', f)$, где $f > 0$, непрерывно продолжается тором T_0^2 и торами $T_{+,m}^2(h', f)$ при $f < 0$. Если $f < 0$, то сдвинем каждый цикл $\mu_3^{+,m}(f)$ вдоль траекторий ∇H_f . Так мы получим меридиан полнотория в Q_h^3 , отвечающего минимальной окружности $f_3^-(h)$. Это полноторие проектируется на отрезок $[i_-; k_-]$ (рис. 9).

Определенная выше трансформация может быть продолжена на семейство торов $T_+^2(h', f)$ над кривой n_-n_+ , где $f_1 \leq f \leq f_2$. Получим склеивающую изотопию тора $T_{+,m}^2(h, f_1)$ на тор $T_+^2(h, f_2)$, которая проектируется на отрезок $[i_-; n_+]$. Если $f > 0$, то при изотопии цикл $\mu_3^+(f)$ переходит в цикл $-\mu_3^{+,s}(f)$, а цикл $\lambda_3^+(f)$ переходит в цикл $\lambda_3^{+,s}(f)$. Если же $f < 0$, то цикл $\mu_3^+(f)$ совмещается с циклом $-\mu_3^{+,m}(f)$, а цикл $\lambda_3^+(f)$ совмещается с циклом $\lambda_3^{+,m}(f)$. Следовательно, при склеивающей изотопии базис $(\lambda_3^{+,m}(f_1), -\mu_3^{+,m}(f_1))$ переходит в базис $(\mu_2^+(f_2), \lambda_2^+(f_2))$. Тогда базисы $(\mu_3^{+,m}(f_1), \lambda_3^{+,m}(f_1))$ и $(\lambda_2^+(f_2), \mu_2^+(f_2))$ являются допустимыми в Q_h^3 . В этих базисах матрица склейки выглядит, как первая из матриц (2.12):

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Точно такая матрица отвечает второму полноторию над $[i_-; k_-]$. Метки: $r = -1/0 = \infty$ и $\varepsilon = \text{sgn}(-1) = -1$. Семей в данном случае нет.

В компоненте $\{M_3 < 0\}$ аналогичная изотопия проектируется на отрезок $[i_+; n_-]$ (рис. 9). Пусть $i_+ = (h, f_1)$ и $n_- = (h, f_2)$. Базисы $(-\mu_3^{\pm, m}(f_1), \lambda_3^{\pm, m}(f_1))$ и $(\lambda_2^{\pm}(f_2), -\mu_2^{\pm}(f_2))$ являются допустимыми в Q_h^3 . По этой причине две "нижние" матрицы склейки на ребрах $B-B$ имеют противоположные знаки и выглядят, как вторая из матриц (2.12). Из-за этого две ε -метки изменились на противоположные \square .

2.3.9. Топология особой поверхности.

В пп. 2.3.4 - 2.3.8 вычислены все метки молекул $W^*(Q_h^3)$, представляющих различные инварианты Фоменко-Цишанга $I^*(Q_h^3)$ интегрируемого случая О.И. Богоявленского. Инварианты $I^*(Q_h^3)$ были впервые опубликованы в [95]. При этом были допущены незначительные ошибки в ε -метках, которые не повлияли на значения инвариантов $I^*(Q_h^3)$, но отразились в молекулах $W^*(Q_h^3)$. Следует напомнить, что ε -метки принимают только два значения ± 1 . В данной работе ошибки в ε -метках исправлены и, таким образом, найденные ранее инварианты Фоменко-Цишанга $I^*(Q_h^3)$ дополнены точными значениями молекул $W^*(Q_h^3)$. Этот результат опубликован в [14]. Чтобы привести молекулы на рис. 4 к виду, который они первоначально имели в [95], следует обратить значения ε -меток на всех ребрах, окружающих некоторые атомы. Эта операция отвечает изменению направлений потока $\text{sgrad}(H)$ на соответствующих атомах.

Инварианты Фоменко-Цишанга можно использовать, в частности, для вычисления топологических типов изоэнергетических многообразий Q_h^3 . В работе [95] было доказано следующее утверждение:

Многообразие Q_h^3 при $h_1 < h < h_2$ гомеоморфно $S^2 \times S^1$, при $h_2 < h < h_3$ оно гомеоморфно тору $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$. Если $h > h_3$, то Q_h^3 состоит из двух связных компонент, каждая из которых гомеоморфна $S^2 \times S^1$.

Проверим сказанное в случае $h > h_3$. Рассмотрим молекулу $W^*(Q_h^3)$ любой (из двух) связной компоненты Q_h^3 подмногообразия $H^{-1}(h)$ (рис. 4). Метка $r = 0$ на ребре $A-B$ означает следующее. Полноторие A так вклеено в седло B , что его меридиан отождествляется с одной из граничных окружностей поверхности N^2 , являющейся сечением атома B . Таким образом, одна из дырок в N^2 заклеивается диском D^2 . Получается кольцо $D_0^2 = S^1 \times D^1$, умножая которое на осевую окружность S_0^1 атома B получим цилиндр $S^1 \times D^1 \times S_0^1$. Он моделирует результат склеивания атомов B и

A , при котором r - метка равна 0. Приклеивание двух других атомов A , которому отвечают две метки $r = \infty$, можно смоделировать следующим образом. Цилиндр $S^1 \times D^1 \times S_0^1$ склеивается с парой полноторий $S^1 \times D^2$ так, что их меридианы $\{pt\} \times \partial D^2$ отождествляются с окружностями вида $\{pt_1\} \times \{pt_2\} \times S_0^1$, где точка pt_2 является одним из концов отрезка $D^1 = [0; 1]$. Последние представляют собой λ - циклы исходного атома B в то время, как меридианы представляют λ - циклы атомов A . Поскольку цилиндр стягивается на тор $S^1 \times \{1/2\} \times S_0^1$, многообразие Q_h^3 можно склеить из двух полноторий так, что некоторые их меридианы при этом отождествляются. Именно так Q_h^3 склеивается из двух полноторий в случае молекулы $A-A$, если r - метка равна ∞ . Легко понять, что в результате получится многообразие $S^2 \times S^1$. Используя молекулу $W^*(Q_h^3)$, отвечающую любому $h > h_3$, мы получим новую информацию о топологии особой поверхности $\Theta = \mathcal{M}^3$ и многообразия \mathcal{M}^4 .

Предложение 7 *Многообразия \mathcal{M}^4 и \mathcal{M}^3 диффеоморфны, соответственно, произведениям $S_{00}^2 \times S^1 \times \mathbb{R}$ и $S_{00}^2 \times S^1$, где S_{00}^2 - сфера с двумя выколотыми точками.*

Доказательство. Поскольку $dF \neq 0$ в каждой точке \mathcal{M}^4 , то $\mathcal{M}^4 \cong \mathcal{M}^3 \times \mathbb{R}$ и многообразие $\mathcal{M}^3 = F^{-1}(0)$ диффеоморфно $F^{-1}(f)$ для любого f . Выберем любое $f > 0$ так, чтобы слоение Ливилля на многообразии $F = f$ описывалось графом, который изображен на рис. 7 (граф $F^{-1}(f)$). Фиксируем любое изоэнергетическое многообразие Q_h^3 при $h > h_3$. При отображении момента $\mathcal{F} = H \times F$ оно проектируется на вертикальный отрезок (рис. 5). Пунктир схематически изображает конструкцию послыонного диффеоморфизма (и даже послыонной изотопии) многообразия $F^{-1}(f)$ на 3-поверхность Q_h^3 , из которой удалены обе минимальных окружности интеграла $F : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Заметим, что верхний фрагмент ветви f_3 диаграммы Σ , отмеченный на рис. 5 буквой A , отвечает максимальным окружностям интеграла F на *другой* связной компоненте $H^{-1}(h)$. Поэтому, хотя пунктирные линии пересекают кривую A , никаких перестроек изотопируемых над ними торов T^2 не происходит. Поскольку в декомпозиции $Q_h^3 = S^2 \times S^1$ удаленным из Q_h^3 минимальным окружностям отвечают произведения на S^1 двух точек сферы S^2 , то многообразие Q_h^3 , из которого удалены эти две окружности, диффеоморфно $S_{00}^2 \times S^1$. Следовательно

$$\mathcal{M}^3 \cong Q_h^3 \cong S_{00}^2 \times S^1, \quad \mathcal{M}^4 \cong \mathcal{M}^3 \times \mathbb{R} \cong S_{00}^2 \times S^1 \times \mathbb{R} \quad \square.$$

Фазовое многообразие \mathcal{M}^4 диффеоморфно $S^2 \times S^1 \times \mathbb{R}$ [95]. Предложение 7 описывает другую структуру прямого произведения на \mathcal{M}^4 .

Глава 3. Симплектические многообразия с контактными особенностями.

§ 3.1. Контактные вырождения замкнутых 2-форм.

В центре внимания данной работы находится случай, когда множество

$$\Theta = \{p \in M : \det(\omega_p) = 0\} = \{p \in M : \mathcal{Z}_p = \text{Ker}(\omega_p) \neq 0\},$$

называемое особой поверхностью, является *гиперповерхностью* в M . Как и прежде (M, ω) – симплектическое многообразие с особенностью. Напомним, что точки $x \in \Theta$ называются особыми. В случае $\dim \mathcal{Z}_p > 2$ предположение $\text{codim } \Theta = 1$ выделяет весьма специальный класс вырождений, не имеющих общего положения (см. п. 1.2.2). Однако, как будет показано ниже, такие объекты не более экзотичны, чем контактные многообразия и структуры Ли.

3.1.1. Контактная структура на особой гиперповерхности.

Рассмотрим физический пример максимально глубокого вырождения замкнутой 2-формы на гиперповерхности.

Пример 1. Принцип Мопертюи состоит в том, что фазовые траектории натуральной механической системы, отвечающие фиксированному значению энергии h , являются геодезическими в метрике

$$\tilde{g}_{ij}(x) = 2(h - U(x))g_{ij}(x).$$

Здесь $U(x)$ – потенциальная энергия, заданная на конфигурационном многообразии M , а g_{ij} – метрика, определяющая кинетическую энергию [7,36].

Рассмотрим случай $\dim M = 3$, хотя аналогичные результаты имеют место при любом числе степеней свободы. Пусть $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ – координаты в TM . Преобразование Лежандра $\tilde{\Phi} : TM \rightarrow T^*M$ соотносит вектору $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ковектор (\mathbf{p}, \mathbf{q}) , где

$$p_i = \sum_{j=1}^3 \tilde{g}_{ij} \dot{q}^j, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Рассмотрим следующий гамильтониан:

$$\tilde{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \tilde{g}_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

Поток $\text{sgrad}(\tilde{H})$, рассматриваемый на инвариантном подмногообразии

$$\{x \in TM : U(x) < h, H(x) = h\},$$

посредством отображения $\tilde{\Phi}$ гладко сопрягается с геодезическим потоком метрики \tilde{g}_{ij} [2].

Преобразование Лежандра порождает в TM симплектическую структуру с особенностями. Ее определяет замкнутая 2-форма $\tilde{\omega} = \tilde{\Phi}^*\Omega$ где Ω – каноническая симплектическая структура многообразия T^*M . Так как

$$Pf(\tilde{\omega}) = 8(h - U)^3 \det(g),$$

то форма $\tilde{\omega}$ вырождается в точках подмножества $\Theta = \{U = h\}$, т.е. одновременно с метрикой \tilde{g} . Итак, в данном случае Θ является эквипотенциальной поверхностью. В тех особых точках, где векторы $\nabla U = grad(U)$ и \mathbf{p} не коллинеарны в \mathbb{R}^3 , ядро $Ker(\tilde{\omega})$ натянуто на векторы

$$b_{23} \frac{\partial}{\partial q_1} - b_{13} \frac{\partial}{\partial q_2} + b_{12} \frac{\partial}{\partial q_3}, \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}, \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2}, \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_3},$$

при этом числа b_{ij} равны:

$$b_{12} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial U}{\partial q_2} g_{i1} - \frac{\partial U}{\partial q_1} g_{i2} \right) \dot{q}^i, \quad b_{23} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial U}{\partial q_3} g_{i2} - \frac{\partial U}{\partial q_2} g_{i3} \right) \dot{q}^i,$$

$$b_{13} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial U}{\partial q_3} g_{i1} - \frac{\partial U}{\partial q_1} g_{i3} \right) \dot{q}^i.$$

В остальных точках поверхности Θ ядро формы имеет размерность 6. На открытом, плотном в Θ подмножестве $\Theta_0 = \{x : \dim \mathcal{Z}_x = 4\}$ имеет место $\mathcal{Z}_x \subset T_x \Theta$. Соответствующее распределение $Z : x \mapsto \mathcal{Z}_x$ неинтегрируемо, но оно не определяет контактной структуры на 5-мерном многообразии Θ_0 . Дело в том, что в противном случае все лежандровы (т.е. Z - интегрируемые, максимальной размерности) подмногообразия в силу $\dim \Theta = 2 \cdot 2 + 1$ имели бы размерность 2. Однако векторы

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}, \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2}, \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_3},$$

очевидно, определяют распределение размерности 3, интегральные подмногообразия которого являются интегральными для Z \square .

Предположим, что множество Θ является подмногообразием коразмерности 1, т.е. гладкой гиперповерхностью, и пусть $\omega|_{\Theta} = 0$. Тогда для некоторой 1-формы α , заданной в окрестности Θ и равной нулю в каждой точке Θ , имеет место $\omega = d\alpha$ (теорема 2, § 1.1). Последнее эквивалентно тому, что $\alpha = \chi\nu$ для некоторой 1-формы ν и функции χ , удовлетворяющей условию

$$\chi(\Theta) = 0, \quad d_\rho \chi \neq 0 \quad \forall \rho \in \Theta. \quad (3.1)$$

Лемма 1 Пусть $\omega = 0$ в каждой точке гиперповерхности Θ и χ есть произвольная функция в окрестности Θ , удовлетворяющая условиям (3.1).

Тогда найдется окрестность $U \supset \Theta$ и такая 1-форма β на U , что

$$\omega|_U = d\left(\frac{\chi^2}{2}\beta\right).$$

Доказательство. В рассматриваемом случае $\omega_\rho = d_\rho\chi \wedge \nu_\rho = 0$ для каждого $\rho \in \Theta$, поэтому $\nu|_\Theta = 0$. Следовательно, в окрестности Θ найдется такая 1-форма γ и функция φ , что $\nu = \varphi d\chi + \chi\gamma$. Отсюда

$$\omega = d(\chi(\varphi d\chi + \chi\gamma)) = d(\chi^2(\gamma - d\varphi/2)).$$

Лемма 2 Возьмем трансверсальное Θ векторное поле X и функцию χ в окрестности Θ , удовлетворяющую (3.1). Тогда формула

$$\mu = \lim_{\chi \rightarrow 0} i_X(\chi^{-1}\omega) \quad (3.2)$$

корректно определяет на Θ 1-форму μ , которая при замене функции χ и поля X умножается на всюду отличную от нуля функцию.

Доказательство. Из леммы 2 следует, что $\mu = d\chi(X)\beta|_S$. В силу (3.1) имеем $d\chi(X) \neq 0$. Ясно, что замена трансверсального поля X приводит к умножению μ на ненулевую функцию. При замене χ на $\tilde{\chi}$ форма

$$\lim_{\chi \rightarrow 0}(\chi^{-1}\omega)$$

умножается на ненулевую функцию $\lim_{\chi \rightarrow 0} \chi/\tilde{\chi}$. Последняя корректно определена, поскольку $\partial\chi/\partial\mathbf{x} = 0$ в точках Θ в любых координатах вида $(\tilde{\chi}, \mathbf{x})$ \square .

Локально можно полагать, что

$$\mu_{\mathbf{x}} = \sum_{j=2}^{2n} \frac{\partial\omega_{1,j}}{\partial x_1} dx_j \quad (3.3)$$

в любых координатах $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$, в которых $\mathbf{x} \in \Theta \Leftrightarrow x_1 = 0$. Здесь $\dim M = 2n$.

Пусть S_{2n} – множество перестановок набора $(1, \dots, 2n)$. Для каждой кососимметрической матрицы $\omega = (\omega_{ij})$, где $1 \leq i, j \leq 2n$, существует ровно два многочлена $\pm P$, удовлетворяющих условию:

$$P \in \mathbf{Z}[\omega_{1,2}, \dots, \omega_{i,j}, \dots, \omega_{2n-1,2n}], \quad P^2 = \det(\omega).$$

Один из них, равный

$$\sum_{\substack{\sigma = (i_1, j_1, \dots, i_n, j_n) \in S_{2n} \\ i_s < j_s, i_s < i_{s+1}}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_{i_1, j_1} \omega_{i_2, j_2} \dots \omega_{i_n, j_n},$$

мы называем пфаффианом и обозначаем $Pf(\omega)$. Легко видеть, что $\forall \sigma i_1 = 1$.

Предложение 1 Пусть $\dim M = 2n > 2$ и $\omega = 0$ в каждой точке гладкой гиперповерхности Θ . На многообразии Θ рассмотрим 1-форму μ , определенную формулой (3.2) для некоторых функции χ , удовлетворяющей (3.1) и векторного поля X , трансверсального Θ .

Тогда на Θ определено поле $2n - 2$ -мерных подпространств $\Pi_\rho = \mu_\rho^{-1}(0)$, которое не зависит от выбора функции χ и поля X . Поле Π_ρ является точной контактной структурой тогда и только тогда, когда

$$d^{2n-1}Pf(\omega)_\rho \neq 0 \quad \forall \rho \in \Theta. \quad (3.4)$$

Доказательство. В окрестности $O(\rho)$ произвольной точки $\rho \in \Theta$ введем локальные координаты (x_1, \dots, x_{2n}) , в которых поверхность $S = O(\rho) \cap \Theta$ определяется уравнением $x_1 = 0$.

Пусть $1 < i, j \leq 2n$. Из замкнутости ω следует, что $\partial\omega_{ij}/\partial x_1 = 0$ при $x_1 = 0$. Поэтому каждый ω_{1j} делится на x_1 , а каждый ω_{ij} делится на x_1^2 . Следовательно, при вычислении определителя матрицы ω из каждой строки i и каждого столбца j можно вынести множитель x_1 . Поэтому $\det(\omega)$ делится на x_1^{4n-2} , в силу чего $Pf(\omega) = Ax_1^{2n-1}$, где A – гладкая функция координат \mathbf{x} . Следовательно, при $x_1 = 0$ равны нулю все производные $Pf(\omega)(\mathbf{x})$ порядков от 0 до $2n - 2$ включительно. Из производных порядка $2n - 1$ только $\partial^{2n-1}Pf(\omega)/\partial x_1^{2n-1}$ может быть отличной от нуля. Она равна пфаффиану следующей матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & \frac{\partial\omega_{1,2}}{\partial x_1} & \frac{\partial\omega_{1,3}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\omega_{1,2n}}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial\omega_{1,2}}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial^2\omega_{2,3}}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2\omega_{2,2n}}{\partial x_1^2} \\ -\frac{\partial\omega_{1,3}}{\partial x_1} & -\frac{\partial^2\omega_{2,3}}{\partial x_1^2} & 0 & \dots & \frac{\partial^2\omega_{3,2n}}{\partial x_1^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial\omega_{1,2n}}{\partial x_1} & -\frac{\partial^2\omega_{2,2n}}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial^2\omega_{3,2n}}{\partial x_1^2} & \dots & 0 \end{array} \right) (x_1 = 0). \quad (3.5)$$

В силу леммы 1 $\omega = d(\beta x_1^2/2)$ на $O(\rho)$. Пусть $\lambda_{i,j}$ – элемент матрицы (3.5). Тогда

$$\lambda_{1,j} = \beta_j, \quad \lambda_{i,j} = \partial\beta_j/\partial x_i - \partial\beta_i/\partial x_j.$$

Пусть S_{2n-1} – множество перестановок набора $(2, \dots, 2n)$ и $d\beta|_S = \zeta$. В координатах (x_2, \dots, x_{2n}) поверхности S имеем

$$\begin{aligned} \zeta &= \sum_{i < j} \lambda_{i,j} dx_i \wedge dx_j \quad \Rightarrow \quad \beta|_S \wedge (\wedge_{i=1}^{n-1} \zeta) = \\ &= (n-1)! \sum_{\sigma \in S_{2n-1}} \beta_j \lambda_{i_2, j_2} \dots \lambda_{i_n, j_n} dx_j \wedge dx_{i_2} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} \wedge dx_{j_n}, \end{aligned}$$

где $\sigma = (j, i_2, j_2, \dots, i_n, j_n)$ и $i_s < j_s$, $i_s < i_{s+1}$. Сумму можно записать как

$$\left(\sum_{\sigma \in S_{2n-1}} \operatorname{sgn}(\sigma) \beta_j \lambda_{i_2, j_2} \dots \lambda_{i_n, j_n} \right) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{2n}.$$

Выражение в скобках совпадает с пфаффианом матрицы (3.5). Последний, по условию, отличен от нуля в каждой точке $S = \Theta \cap O(\rho)$. Следовательно

$$\beta|_S \wedge (\wedge_{i=1}^{n-1} d\beta|_S) \neq 0 \quad \forall y \in S. \quad (3.6)$$

В частности $\beta|_S$ всюду отлична от нуля. Она совпадает с 1-формой, которая локально определена формулой (3.2) для $\chi = x_1$ и $X = \partial/\partial x_1$. Пусть μ есть любая 1-форма на Θ , определенная формулой (3.2). По лемме 2 формы $\mu|_S$ и $\beta|_S$ пропорциональны. Отсюда и из (3.6), в силу произвольности точки $\rho \in \Theta$, поле $\Pi_\rho = \mu_\rho^{-1}(0)$ является контактной структурой на Θ . Поскольку форма μ задана глобально, то эта структура точна \square .

Заметим, что условие (3.4) инвариантно, и что контактная структура Π на Θ однозначно определяется формой ω .

3.1.2. Контактные особые точки.

Определение 1 Пусть (M, ω) – симплектическое многообразие с особенностью, $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k$ в некоторой точке $\rho \in \Theta$ и существует такая гладкая гиперповерхность S в M , что $\rho \in S \subset \Theta$ и $\dim \mathcal{Z}_y = 2k$ в каждой точке $y \in S$. Тогда при условиях

$$a) \quad \mathcal{Z}_\rho \not\subset T_\rho S \quad b) \quad d^{2k-1} Pf(\omega)_\rho \neq 0$$

особая точка ρ называется контактной.

Условие $d^{2k-1} Pf(\omega)_\rho \neq 0$ означает следующее. В некоторых (и тогда в каждом) координатах $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ на M , заданных в окрестности ρ , для некоторого набора целых чисел $\alpha_s \geq 0$

$$\frac{\partial^{2k-1} Pf(\omega_{ij}(\mathbf{x}))}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_{2n}^{\alpha_{2n}}}(\rho) \neq 0, \quad \sum_{s=1}^{2n} \alpha_s = 2k - 1.$$

Заметим, что $Pf(\omega)$ – это инвариантная функция локальных координат \mathbf{x} . Множество контактных точек открыто в Θ . Ясно, что в аналитическом случае оно плотно в Θ или пусто. В случае $\dim \mathcal{Z}_\rho = \dim M$ условие а) выполнено автоматически, а условие б) эквивалентно невырожденности матрицы (3.5). Оно естественно в силу следующей леммы.

Лемма 3 Пусть ω – замкнутая 2-форма, $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k$ в некоторой точке $\rho \in \Theta$ и существует такая гладкая гиперповерхность S в M , что

$$\rho \in S \subset \Theta, \quad \dim \mathcal{Z}_y = 2k \quad \forall y \in S, \quad \mathcal{Z}_\rho \not\subset T_\rho S.$$

Тогда для любых координат $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$, заданных в окрестности точки ρ , в каждой достаточно близкой к ρ точке $y \in \Theta$ равны нулю все производные функции $Pf(\omega_{ij}(\mathbf{x}))$ порядков от 0 до $2k - 2$ включительно.

Доказательство. В некоторой окрестности $O(\rho)$ существуют координаты \mathbf{x} , в которых многообразие $S \subset \Theta$ определяется уравнением $x_1 = 0$ и $\partial/\partial x_1 \in \mathcal{Z}_\mathbf{x}$ при $x_1 = 0$. Пусть $1 < i, j \leq 2k$. Из замкнутости ω следует, что $\partial\omega_{ij}/\partial x_1 = 0$ при $x_1 = 0$. Поэтому каждый ω_{1j} делится на x_1 , а каждый ω_{ij} делится на x_1^2 . Следовательно, при вычислении определителя матрицы ω из каждой строки i и каждого столбца j можно вынести множитель x_1 . Поэтому $\det(\omega)$ делится на x_1^{4k-2} , в силу чего $Pf(\omega)$ делится на x_1^{2k-1} . Следовательно, при $x_1 = 0$ равны нулю все частные производные $Pf(\omega)(\mathbf{x})$, порядков от 0 до $2k - 2$ включительно. То же имеет место в произвольных координатах, поскольку при замене координат пфаффиан делится на определитель матрицы Якоби \square .

Разлагая $Pf(\omega)(\mathbf{x})$ в конечный ряд Тейлора и используя лемму 3 легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

Замечание 1 Для некоторой, достаточно малой окрестности $O(\rho)$ контактной точки ρ форма ω невырождена на $O(\rho) \setminus S$.

Поэтому можно считать, что

$$S = O(\rho) \cap \Theta .$$

Пусть $\dim M = 2n$ и в особой точке ρ , в которой $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k$, выполнены все условия определения 1, кроме $d^{2k-1}Pf(\omega)_\rho \neq 0$. В отношении этого условия ничего не предполагается, т.е. оно выполнено или нет. Предположим, что в некоторой

окрестности $O(\rho)$ заданы такие координаты $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$, что подмногообразие $O(\rho) \cap \Theta$ определяется уравнением $x_1 = 0$, и векторы

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial}{\partial x_{2k}}$$

составляют базис подпространства \mathcal{Z}_y в каждой точке $y \in O(\rho) \cap \Theta$.

Тогда условие $d^{2k-1}Pf(\omega)_\rho \neq 0$ эквивалентно невырожденности матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \omega_{1,2}}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_{1,3}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \omega_{1,2k}}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_{1,2k+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \omega_{1,2n}}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial \omega_{1,2}}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial^2 \omega_{2,3}}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \omega_{2,2k}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \omega_{2,2k+1}}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \omega_{2,2n}}{\partial x_1^2} \\ -\frac{\partial \omega_{1,3}}{\partial x_1} & -\frac{\partial^2 \omega_{2,3}}{\partial x_1^2} & 0 & \dots & \frac{\partial^2 \omega_{3,2k}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \omega_{3,2k+1}}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \omega_{3,2n}}{\partial x_1^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial \omega_{1,2k}}{\partial x_1} & -\frac{\partial^2 \omega_{2,2k}}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial^2 \omega_{3,2k}}{\partial x_1^2} & \dots & 0 & \frac{\partial^2 \omega_{2k,2k+1}}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \omega_{2k,2n}}{\partial x_1^2} \\ -\frac{\partial \omega_{1,2k+1}}{\partial x_1} & -\frac{\partial^2 \omega_{2,2k+1}}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial^2 \omega_{3,2k+1}}{\partial x_1^2} & \dots & -\frac{\partial^2 \omega_{2k,2k+1}}{\partial x_1^2} & 0 & \dots & \omega_{2k+1,2n} \\ -\frac{\partial \omega_{1,2k+2}}{\partial x_1} & -\frac{\partial^2 \omega_{2,2k+2}}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial^2 \omega_{3,2k+2}}{\partial x_1^2} & \dots & -\frac{\partial^2 \omega_{2k,2k+2}}{\partial x_1^2} & -\omega_{2k+1,2k+2} & \dots & \omega_{2k+2,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial \omega_{1,2n-1}}{\partial x_1} & -\frac{\partial^2 \omega_{2,2n-1}}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial^2 \omega_{3,2n-1}}{\partial x_1^2} & \dots & -\frac{\partial^2 \omega_{2k,2n-1}}{\partial x_1^2} & -\omega_{2k+1,2n-1} & \dots & \omega_{2n-1,2n} \\ -\frac{\partial \omega_{1,2n}}{\partial x_1} & -\frac{\partial^2 \omega_{2,2n}}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial^2 \omega_{3,2n}}{\partial x_1^2} & \dots & -\frac{\partial^2 \omega_{2k,2n}}{\partial x_1^2} & -\omega_{2k+1,2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

В самом деле, рассмотрим произвольное слагаемое пфаффиана $Pf(\omega)$, которое имеет следующий вид:

$$\omega_{i_1, j_1} \omega_{i_2, j_2} \dots \omega_{i_t, j_t} \omega_{i_{t+1}, j_{t+1}} \dots \omega_{i_n, j_n}, \quad i_1 = 1,$$

$$i_t \leq 2k, \quad i_{t+1} > 2k, \quad i_s < i_{s+1}, \quad i_s < j_s \quad \forall s \in \{1, \dots, n\}.$$

Поскольку $i_2 > 1$, то (как мы видели при доказательстве леммы 3) все элементы $\omega_{i_2, j_2}, \dots, \omega_{i_t, j_t}$ вместе с производными 1-го порядка равны нулю при $x_1 = 0$. Так как этих элементов $\omega_{i_2, j_2}, \dots, \omega_{i_t, j_t}$ не меньше, чем $k - 1$, то из всех слагаемых, составляющих любую частную производную $Pf(\omega)$ порядка от 0 до $2k - 1$, только слагаемые вида

$$\frac{\partial \omega_{1, j_1}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \omega_{i_2, j_2}}{\partial x_1^2} \dots \frac{\partial^2 \omega_{i_k, j_k}}{\partial x_1^2} \omega_{i_{k+1}, j_{k+1}} \dots \omega_{i_n, j_n}, \quad i_k \leq 2k, \quad i_{k+1} > 2k$$

могут быть отличными от нуля. Их сумма с учетом знаков соответствующих перестановок σ как раз равна пфаффиану вышеуказанной матрицы. Следовательно, ее невырожденность равносильна контактности особой точки \square .

Пример 2. В условиях предложения 1 контактное многообразие Θ состоит из точек, контактных в смысле определения 1.

Классической механике ближе случай, когда замкнутая 2-форма ω на четномерной поверхности $M \subset N$ индуцирована из симплектического многообразия (N, Ω) . Косой градиент функции f на M , вычисленный относительно формы $\omega = \Omega|_M$, обозначаем $sgrad_M(f)$. Пусть $\rho \in M$ и L_ρ – косоортогональное дополнение $T_\rho M$ в $T_\rho N$. Если плоскость L_ρ трансверсальна $T_\rho M$, то для любой функции $F : N \rightarrow \mathbb{R}$ вектор $sgrad_M(F|_M)(\rho)$ является косоортогональной проекцией $sgrad(F)(\rho)$ на $T_\rho M$ [30]. Как правило, эта проекция не определена в точках вырождения формы ω . В каждой точке $\rho \in \Theta \subset M$

$$\dim(L_\rho + T_\rho M) < \dim T_\rho N, \quad \mathcal{Z}_\rho = Ker(\omega_\rho) = L_\rho \cap T_\rho M.$$

Лемма 4 Пусть в $2n + 2m$ - мерном симплектическом многообразии (N, Ω) подмногообразие $M \subset N$ является поверхностью нулевого уровня независимых функций F_1, \dots, F_{2m} , и $\omega = \Omega|_M$. Тогда в любых координатах вида

$$(\mathbf{F}, \mathbf{x}) = (F_1, \dots, F_{2m}, x_1, \dots, x_{2n})$$

при $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ имеет место:

$$Pf(\omega_{ij}(\mathbf{x})) = \pm Pf(\Omega_{rs}(\mathbf{0}, \mathbf{x})) Pf(\{F_\alpha, F_\beta\}), \quad (3.7)$$

$$(1 \leq i, j \leq 2n, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2m, \quad 1 \leq r, s \leq 2n + 2m).$$

Доказательство. В области O , пересекающейся с $\Theta \subset M$, введем координаты (\mathbf{F}, \mathbf{x}) и рассмотрим матрицы $A = (\omega_{ij})$, $B = (\{F_\alpha, F_\beta\})$. Матрица Пуассона P и матрица формы Ω суть взаимно обратные. Поскольку векторы $\partial/\partial x_j$ при $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ касаются поверхности Θ , то A есть правый-нижний, угловой $2n$ - минор матрицы Ω . А так как B есть левый-верхний, угловой $2m$ - минор матрицы P , то $\det(A) = \det(B) \det(\Omega)$. Отсюда сразу получаем формулу (3.7) \square .

Предложение 2 В условиях леммы 4 пусть $\rho \in \Theta \subset M$ и S – такая гладкая гиперповерхность в M , что $\rho \in S \subset \Theta$ и для некоторого $k > 0$

$$rk(\{F_\alpha, F_\beta\})(y) = 2m - 2k \quad \forall y \in S. \quad (3.8)$$

Точка ρ является контактной тогда и только тогда, когда найдется такой набор индексов $p = (p_1, \dots, p_{2n})$ и нетривиальное решение (c_1, \dots, c_{2m}) системы (3.10), что для некоторой окрестности $O(\rho)$ и всех $(\mathbf{0}, \mathbf{x}) \in S \cap O(\rho)$ имеет место:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{2k-2} Pf(\{F_\alpha, F_\beta\})}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_{2n}^{p_{2n}}}(\mathbf{0}, \mathbf{x}) \equiv 0, \\ & \sum_{\gamma=1}^{2m} \sum_{j=1}^{2n} c_\gamma \frac{\partial^{2k-1} Pf(\{F_\alpha, F_\beta\})}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_{2n}^{p_{2n}} \partial x_j} \{F_\gamma, x_j\}(\rho) \neq 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Доказательство. Система уравнений (3.10) определяет набор коэффициентов c_γ , для которого вектор $v_\rho = \sum_{\gamma=1}^{2m} c_\gamma sgrad(F_\gamma)(\rho)$ касается подмногообразия M :

$$\sum_{\gamma=1}^{2m} \{F_\alpha, F_\gamma\}(\rho) \cdot c_\gamma = 0 \quad 1 \leq \alpha \leq 2m. \quad (3.10)$$

По формуле Э. Картана $\dim Ker(\omega) = const = 2k$ на S [19, 58], при этом $\mathcal{Z}_\rho = T_\rho M \cap L_\rho$, где подпространство L_ρ натянуто на векторы $sgrad(F_\alpha)$.

Из леммы 3 и формулы (3.7) следует, что в контактной точке $\rho \in S$ равны нулю все производные $Pf(\{F_\alpha, F_\beta\})(\mathbf{0}, \mathbf{x})$, порядков от 0 до $2k - 2$ включительно. При этом найдется мультииндекс $p = (p_1, \dots, p_{2n})$, для которого функция $\partial_{\mathbf{x}^p}^{2k-2} Pf$ имеет ненулевой дифференциал в точке ρ . Тогда неравенство (3.9) эквивалентно $v_\rho \notin T_\rho S$. Такой вектор v_ρ , а значит и набор чисел c_γ найдутся в силу условия $\mathcal{Z}_\rho \not\subset T_\rho S$.

Обратно, в силу (3.9) найдется мультииндекс $p = (p_1, \dots, p_{2n})$, для которого функция $\partial_{\mathbf{x}^p}^{2k-2} Pf$ имеет ненулевой дифференциал в точке ρ . Тогда $v_\rho \notin T_\rho S$, а значит и $\mathcal{Z}_\rho \not\subset T_\rho S$. Следовательно, в силу леммы 3 из (3.8) и формулы (3.7) вытекает, что все производные $Pf(\{F_\alpha, F_\beta\})(\mathbf{0}, \mathbf{x})$, порядков от 0 до $2k - 2$ включительно, равны нулю на S . С учетом этого и (3.9), используя (3.7) легко проверить, что $d^{2k-1} Pf(\omega)_\rho \neq 0$. Следовательно, точка ρ контактная \square .

Применим предложение 2 в очень распространенной ситуации, когда подмногообразии $M \subset N$ определяется системой уравнений

$$F_1 = F_2 = 0.$$

Тогда $m = 1$ и (3.8) означает, что $\{F_1, F_2\}|_S \equiv 0$. В данном случае $k = 1$ и ядро \mathcal{Z}_ρ натянуто на векторы $sgrad(F_1)$ и $sgrad(F_2)$. Условие (3.8) и тождество (3.9) выполнены автоматически. Решением (3.10) является любая пара чисел (c_1, c_2) , и неравенство (3.9) можно переписать в виде

$$c_1 \{\{F_1, F_2\}, F_1\} + c_2 \{\{F_1, F_2\}, F_2\} \neq 0.$$

Итак, множество $\Theta \subset M$ определяется уравнением $\{F_1, F_2\} = 0$.

Следствие 1 Если для некоторой пары гладких функций F_1 и F_2 на симплектическом многообразии N подмногообразие $M \subset N$ является регулярной поверхностью уровня $F_1 = F_2 = 0$, то точка

$$\rho \in \Theta = \{y \in M : \{F_1, F_2\}(y) = 0\}$$

является контактной тогда и только тогда, когда

$$\{\{F_1, F_2\}, F_1\}(\rho) \neq 0 \quad \text{или} \quad \{\{F_1, F_2\}, F_2\}(\rho) \neq 0. \quad (3.11)$$

Пример 3. В § 2.3 описана фазовая топология I класса особо замечательных движений (по Аппельроту) волчка Ковалевской в магнитном поле. Форма ω на инвариантном подмногообразии \mathcal{M}^4 является ограничением симплектической формы Кириллова-Константа, определенной на орбите \mathcal{O}^6 соответствующего копредставления. Вложение $\mathcal{M}^4 \subset \mathcal{O}^6$ определяется уравнениями $Z_1 = Z_2 = 0$. Особая поверхность $\Theta \subset \mathcal{M}^4$ есть подмногообразие $\mathcal{M}^3 \cong S_{00}^2 \times S^1$ (предложение 7, § 2.3) нулевого уровня боттовского интеграла

$$F = \frac{1}{4}\{Z_1, Z_2\}|_{\mathcal{M}^4}.$$

Применяя критерий (3.11) в силу (2.5) заключаем, что все точки особого многообразия Θ являются контактными. Отсюда следует, что все точки вырождения формы ω имеют общее положение в смысле (1.2) \square .

В рассмотренном случае условие (3.11) эквивалентно тому, что

$$\dim \mathcal{Z}_\rho = 2, \quad d_\rho(Pf(\omega))(\mathcal{Z}_\rho) \neq 0. \quad (3.12)$$

Для любого симплектического многообразия с особенностью всякая точка $\rho \in \Theta$ при условии (3.12) является контактной. Обратно, в любой контактной точке ρ в случае $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2$ справедливо (3.12). Легко проверить, что в случае $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2$ особая точка ρ имеет общее положение тогда и только тогда, когда она является контактной. Поэтому при условии (3.11) форма ω имеет общее положение в точке ρ .

Как уже отмечалось в п. 1.2.2, существование предела

$$\lim_{y \rightarrow \rho, y \notin \Theta} sgrad(f)(y), \quad \rho \in \Theta$$

всегда влечет $df(\mathcal{Z}_\rho) = 0$, поскольку

$$\forall v \in \mathcal{Z}_\rho \quad df_\rho(v) = \omega_\rho(v, \lim_{y \rightarrow \rho} sgrad(f)(y)) = 0.$$

Обратное, вообще говоря, неверно (пример 3, § 1.2). Однако, если все точки $\rho \in \Theta$ являются контактными, то в случае $df(\mathcal{Z})_\rho \equiv 0$ на многообразии M корректно определено гладкое гамильтоново поле $sgrad(f)$. Это утверждение вытекает из следующей теоремы.

3.1.3. Продолжения гамильтоновых полей.

Как отмечалось в § 1.2, вопрос о корректной определенности гамильтоновых полей $sgrad(f)$ в точках вырождения симплектической структуры ω рассматривается довольно давно. Необходимое условие $df(Ker(\omega)) \equiv 0$ далеко не всегда является достаточным, и каких-либо общих результатов в этом направлении нет. В случае контактных вырождений достаточность данного условия вытекает из следующей теоремы, которая имеет ключевое значение для всей теории.

Теорема 1 Пусть ρ – контактная точка и f – гладкая функция на M . Если $df(\mathcal{Z}_y) = 0$ для всех $y \in \Theta$, достаточно близких к ρ , то существует предел

$$\lim_{\Theta \ni y \rightarrow \rho} sgrad(f)(y),$$

принадлежащий $T_\rho\Theta$ и гладко зависящий от точки ρ .

Доказательство. Введем координаты $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{2n})$ в окрестности $U(\rho)$ так, что $\mathbf{x}(\rho) = \mathbf{0}$ и поверхность $\Theta \cap U(\rho)$ определяется уравнением $x_1 = 0$. Тогда $df(\mathcal{Z}_\mathbf{x}) = 0$ означает $\partial f / \partial x_\alpha = 0$ при всех $1 \leq \alpha \leq 2k$.

Пусть $\sigma \in S_{2n}$ – такая перестановка вида $(i, j, i_2, j_2, \dots, i_n, j_n)$, что $i_s < j_s$ и $i_s < i_{s+1}$, и Σ_σ обозначает суммирование по всем перестановкам указанного вида, тогда:

$$\begin{aligned} \omega^{ij} Pf(\omega) &= - \sum_{\sigma} sgn(\sigma) \omega_{i_2 j_2} \dots \omega_{i_n j_n} = -A_{ij}, \\ (sgrad(f)(\mathbf{x}))^i &= \frac{-\sum_{j=1}^{2n} A_{ij} \partial f / \partial x_j}{Pf(\omega)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим вектор-функцию:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = Pf(\omega)(\mathbf{x}) \cdot sgrad(f)(\mathbf{x}), \quad F^i(\mathbf{x}) = - \sum_{j=1}^{2n} A_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad (1 \leq i \leq 2n).$$

Докажем, что все ее производные порядка от 0 до $2k - 2$ равны нулю при $x_1 = 0$. Каждое A_{ij} состоит из слагаемых вида

$$\omega_{i_2, j_2} \dots \omega_{i_t, j_t} \omega_{i_{t+1}, j_{t+1}} \dots \omega_{i_n, j_n}, \quad i_t \leq 2k, \quad i_{t+1} > 2k, \quad t \geq k. \quad (3.13)$$

Если $i_2 > 1$, то все $\omega_{i_2, j_2}, \dots, \omega_{i_t, j_t}$ вместе с производными 1-го порядка равны нулю при $x_1 = 0$ (лемма 3). Так как элементов $\omega_{i_2, j_2}, \dots, \omega_{i_t, j_t}$ не меньше, чем $k - 1$, то из всех слагаемых, составляющих любую частную производную (3.13) порядка от 0 до $2k - 2$, только

$$\frac{\partial^2 \omega_{i_2, j_2}}{\partial x_1^2} \dots \frac{\partial^2 \omega_{i_k, j_k}}{\partial x_1^2} \omega_{i_{k+1}, j_{k+1}} \dots \omega_{i_n, j_n}, \quad i_k \leq 2k, \quad i_{k+1} > 2k$$

может быть отличным от нуля. Тогда $(i, j, i_2, j_2, \dots, i_k, j_k, i_{k+1}, j_{k+1}, \dots, i_n, j_n)$ есть перестановка набора $(1, \dots, 2n)$, в которой $2n - 2k$ чисел больше $2k$ и отлично от j , в силу чего $j \leq 2k$ и $\partial f / \partial x_j = 0$.

Если $i_2 = 1$, то из всех слагаемых, составляющих производную (3.13) порядка от 0 до $2k - 3$, только

$$\frac{\partial \omega_{1, j_2}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \omega_{i_3, j_3}}{\partial x_1^2} \dots \frac{\partial^2 \omega_{i_k, j_k}}{\partial x_1^2} \omega_{i_{k+1}, j_{k+1}} \dots \omega_{i_n, j_n}, \quad i_k \leq 2k, \quad i_{k+1} > 2k$$

может быть отличным от нуля. Но тогда снова $j \leq 2k$ и $\partial f / \partial x_j = 0$.

Итак, все производные функции $A_{ij} \partial f / \partial x_j$, порядка от 0 до $2k - 3$ включительно, равны нулю при $x_1 = 0$. Следовательно из тех, что имеют порядок $2k - 2$, только производная по x_1 может быть отличной от нуля. Тогда все ее ненулевые слагаемые являются произведениями на $\partial^2 f / \partial x_1 \partial x_j$ производных порядка $2k - 3$ от (3.13) по x_1 , где $i_2 = 1$. Однако в этом случае $j > 1$, откуда $\partial^2 f / \partial x_1 \partial x_j = 0$.

Доказано, что все производные $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ порядка от 0 до $2k - 2$ равны нулю при $x_1 = 0$. Тогда из производных порядка $2k - 1$ только $\partial^{2k-1} \mathbf{F} / \partial x_1^{2k-1}$ может быть отличной от нуля. Используя лемму 3, получим конечные ряды Тейлора:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{2k-1} \mathbf{F}(\mathbf{0})}{\partial x_1^{2k-1}} \frac{x_1^{2k-1}}{(2k-1)!} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial^{2k} \mathbf{F}(\mu \mathbf{x})}{\partial x_1^{2k-1} \partial x_j} \frac{x_1^{2k-1} x_j}{(2k)!},$$

$$Pf(\omega)(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{2k-1} Pf(\omega)(\mathbf{0})}{\partial x_1^{2k-1}} \frac{x_1^{2k-1}}{(2k-1)!} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial^{2k} Pf(\omega)(\eta \mathbf{x})}{\partial x_1^{2k-1} \partial x_j} \frac{x_1^{2k-1} x_j}{(2k)!},$$

для некоторых $0 < \mu < 1$ и $0 < \eta < 1$. Тогда

$$\lim_{\Theta \ni y \rightarrow \rho} sgrad(f)(y) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}, x_1 \neq 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x})}{Pf(\omega)(\mathbf{x})} = \frac{\partial^{2k-1} \mathbf{F}(\mathbf{0}) / \partial x_1^{2k-1}}{\partial^{2k-1} Pf(\omega)(\mathbf{0}) / \partial x_1^{2k-1}}.$$

Итак, на $U(\rho)$ определено гладкое поле $sgrad(f)$, которое по непрерывности сохраняет форму ω , в силу чего касается поверхности $\Theta \cap U(\rho)$ \square .

Для любой контактной точки $p \in \Theta$ существует такая ее окрестность U , что каждая точка $q \in U \cap \Theta$ является контактной. Обозначим $\mathcal{X}_U(p)$ множество всех гладких функций f на U , каждая из которых удовлетворяет условию $df(\mathcal{Z}_q) \equiv 0$.

Предложение 3 Множество $\mathcal{X}_U(p)$ является алгеброй Ли относительно скобки Пуассона, которая корректно определена на $\mathcal{X}_U(p) \times \mathcal{X}_U(p)$.

Доказательство:

$$\begin{aligned} d\{f_1, f_2\}(\mathcal{Z}_q) &= \omega_q(\mathcal{Z}_q, sgrad\{f_1, f_2\}(q)) = \omega_q(\mathcal{Z}_q, [sgrad(f_1), sgrad(f_2)](q)) = \\ &= \omega_q(\mathcal{Z}_q, L_{sgrad(f_1)}sgrad(f_2)) = \omega_q\left(\mathcal{Z}_q, \frac{d}{dt}(\varphi_t^*sgrad(f_2))(q)\right) = \\ &= \frac{d}{dt}\omega_q((\varphi_t^*\mathcal{Z})_q, (\varphi_t^*sgrad(f_2))(q)) = \frac{d}{dt}\omega_q(\mathcal{Z}_q, sgrad(f_2)(q)) = 0, \end{aligned}$$

где φ_t – локальный поток гладкого поля $sgrad(f_1)$, определенного в окрестности p и сохраняющего форму ω вместе с полем ее ядер. Здесь мы использовали то, что вблизи точки p имеет место:

$$\omega_q(\mathcal{Z}_q, sgrad(f_2)(q)) \equiv 0, \quad (\varphi_t^*\mathcal{Z})_q \equiv \mathcal{Z}_q \quad \square.$$

В условиях леммы 4 предположим, что на многообразии N задана гладкая функция f . Пусть $x \in \Theta \subset M \subset N$. Легко проверить, что условие $df(\mathcal{Z}_x) = 0$ эквивалентно совпадению рангов следующих матриц Пуассона:

$$\begin{pmatrix} 0 & \{F_1, F_2\} & \dots & \{F_1, F_{2m}\} \\ -\{F_1, F_2\} & 0 & \dots & \{F_2, F_{2m}\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\{F_1, F_{2m}\} & -\{F_2, F_{2m}\} & \dots & 0 \\ \{F_1, f\} & \{F_2, f\} & \dots & \{F_{2m}, f\} \end{pmatrix} (x),$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \{F_1, F_2\} & \dots & \{F_1, F_{2m}\} \\ -\{F_1, F_2\} & 0 & \dots & \{F_2, F_{2m}\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\{F_1, F_{2m}\} & -\{F_2, F_{2m}\} & \dots & 0 \end{pmatrix} (x).$$

Совпадение рангов эквивалентно тому, что для некоторых чисел a_1, \dots, a_{2m} :

$$sgrad(f)(x) - \sum_{\beta=1}^{2m} a_\beta \cdot sgrad(F_\beta)(x) \in T_x M.$$

Следовательно, условие $df(\mathcal{Z}_x) = 0$ означает, что существует косоортогональная проекция вектора $sgrad(f)(x)$ на плоскость $T_x M$. Существование косоортогональной проекции в каждой особой точке, вообще говоря, не влечет существования гладкого векторного поля на Θ , являющегося косоортогональной проекцией поля $sgrad(f)$.

Дело в том, что эта проекция определена по $\text{mod } \mathcal{Z}_\S$. Согласно теореме 1, если все точки особой поверхности $\Theta \subset M$ являются контактными, то существование косоортогональной проекции $v_x(f)$ вектора $sgrad(f)(x)$ на подпространство $T_x M$ в каждой особой точке x влечет существование гладкого векторного поля $sgrad_M(f|_M)$. При этом

$$\forall x \in \Theta \quad sgrad_M(f|_M)(x) = v_x(f) \quad \text{mod } \mathcal{Z}_\S .$$

3.1.4. Теорема Дарбу.

Рассматривается $2n$ - мерное симплектическое многообразие (M, ω) с особенностью. Пусть $\Theta \subset M$ есть множество особых точек.

Теорема 2 Если $\rho \in \Theta$ - контактная точка и $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k$, то в некоторой окрестности ρ существуют координаты $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^{n-k}$, в которых:

$$\omega = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 2k} \omega_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) dx_\alpha \wedge dx_\beta + \sum_{i=1}^{n-k} dp_i \wedge dq_i, \quad (3.14)$$

где $\det(\omega_{\alpha\beta}(\mathbf{x})) \neq 0$ при $x_1 \neq 0$ и $(\omega_{\alpha\beta}(\mathbf{x})) = 0$ при $x_1 = 0$.

Доказательство. Пусть ε - как угодно малое положительное число. Линейную оболочку векторов v_1, \dots, v_m обозначаем $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$. При $k = n$ утверждение теоремы тривиально. Полагаем $1 \leq k < n$.

Рассуждаем по индукции. Пусть O - достаточно малая окрестность точки ρ . На O определено такое интегрируемое $2k$ - мерное распределение Z , что $Z_y = \mathcal{Z}_y$ в каждой точке $y \in \Theta \cap O$ (лемма 1 § 1.2). Вложим в O диск D^{2n-2k} так, что ρ - его центр и \mathcal{Z}_ρ трансверсально D^{2n-2k} . Пусть f - такая функция на D^{2n-2k} , что $df_\rho \neq 0$ и $f(\rho) = 0$. Можно считать, что D^{2n-2k} тривиально расслаивается на $2n - 2k - 1$ - мерные диски $f^{-1}(t)$, где $|t| \leq \varepsilon$. Через каждую точку диска $f^{-1}(t)$ проведем интегральное подмногообразие распределения Z . Получится гладкая гиперповерхность W_t , которая соприкасается с \mathcal{Z}_y в каждой точке $y \in W_t \cap \Theta$. Гладко продолжим функцию f на O так, что $f^{-1}(t) = W_t$ при $|t| \leq \varepsilon$. Мы получили функцию f на O , для которой $df(\mathcal{Z}_y) = 0$ для всех $y \in O \cap \Theta$. По теореме 1 на O определено гладкое векторное поле $sgrad(f)$. Пусть $D^{2n-2k-1}$ - вложенный в D^{2n-2k} диск с центром ρ , трансверсальный $2n - 2k - 1$ - мерному диску $W_0 \cap D^{2n-2k}$. Через каждую точку $D^{2n-2k-1}$ проведем интегральное подмногообразие Z . Получится гладкая гиперповерхность V , которая соприкасается с \mathcal{Z}_y в каждой точке $y \in V \cap \Theta$. Если мы выберем диск $D^{2n-2k-1}$ так, чтобы он был трансверсален

в D^{2n-2k} прямой

$$(\mathcal{L}(sgrad(f)(\rho)) \oplus \mathcal{Z}_\rho) \cap T_\rho D^{2n-2k},$$

то вектор $sgrad(f)(\rho)$ будет трансверсален V . Если окрестность O достаточно мала, то каждая точка $y \in O$ получается из некоторой точки $y' \in V$ сдвигом на t вдоль траектории $sgrad(f)$, проходящей через y' . Положим $g(y) = t$. Получаем такую функцию g , что $g^{-1}(0) = V$. Очевидно $\{f, g\} \equiv 1$, откуда $dg_\rho \neq 0$. Так как поток $sgrad(f)$ сохраняет ω и разносит V по семейству гиперповерхностей $g^{-1}(t)$, то $dg(\mathcal{Z}_y) = 0$ для всех $y \in O \cap \Theta$. Следовательно, в окрестности O определено гладкое векторное поле $sgrad(g)$. Так как $\{f, g\} \equiv 1$, то ковекторы dg_ρ и df_ρ линейно независимы. Пусть

$$N = \{y \in O : f(y) = g(y) = 0\}, \quad \Omega = \omega|_N.$$

Так как $N = W_0 \cap V$, то $\mathcal{Z}_y \subset T_y N$ для всех $y \in N$. Ясно, что векторы $sgrad(f)(y)$ и $sgrad(g)(y)$ косоортогональны $T_y N$ при всех $y \in N$ и касаются Θ при всех $y \in \Theta$. Плоскость $\mathcal{L}(sgrad(f)(\rho), sgrad(g)(\rho))$ трансверсальна $T_\rho N$, т.к.

$$v = \lambda \cdot sgrad(f)(\rho) + \mu \cdot sgrad(g)(\rho) \in T_\rho N \Rightarrow df(v) = dg(v) = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Отсюда следует, что N трансверсально Θ . Следовательно, форма Ω вырождается в точках множества $\Theta_N = \Theta \cap N$, являющегося гладкой гиперповерхностью в N , и

$$\forall y \in \Theta_N \quad Ker(\Omega) = \mathcal{Z}_y = Ker(\omega_y) .$$

Проверим, что ρ – контактная точка в N . Очевидно $\dim Ker(\Omega) \equiv 2k$. Так как $\mathcal{Z}_\rho \not\subset T_\rho \Theta$, то и $Ker(\Omega_\rho) \not\subset T_\rho \Theta_N$. Подмногообразие N в потоке $sgrad(g)$ замечает гиперповерхность S . В свою очередь S в потоке $sgrad(f)$ замечает окрестность точки ρ . Поля $sgrad(f)$ и $sgrad(g)$ коммутируют в силу $\{f, g\} \equiv 1$. Следовательно, для любых координат $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n-2}$ на N , в которых подмногообразие Θ_N определяется уравнением $z_1 = 0$, существуют такие координаты (\mathbf{z}, a, b) на O , что:

а) $sgrad(f)$ и $sgrad(g)$ являются векторами скорости координатных линий $a = t$ и, соответственно, $b = t$;

б) подмногообразие N определяется уравнением $a = b = 0$;

в) подмногообразие $\Theta \cap O$ определяется уравнением $z_1 = 0$.

Так как $\omega(sgrad(f), sgrad(g)) = 1$, то $\det(\omega_{(\mathbf{z}, 0, 0)}) = \det(\Omega_{\mathbf{z}})$. Следовательно

$$Pf(\omega)(\mathbf{z}, 0, 0) = \pm Pf(\Omega)(\mathbf{z}) .$$

Очевидно, что координатная линия $z_1 = t$ в N , проходящая через точку ρ , является таковой в M . Условие $d^{2k-1}Pf(\Omega)_\rho \neq 0$ сводится к тому, что ограничение функции $Pf(\Omega)(\mathbf{z})$ на эту координатную линию имеет ненулевую производную порядка $2k - 1$ в точке $z_1(\rho)$. Поэтому данное условие выполняется (или не выполняется) в M и N одновременно. Следовательно, ρ является контактной точкой вырождения формы Ω .

По индуктивному предположению на N существуют такие координаты $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{n-k-1}$, что

$$\Omega = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 2k} \omega_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) dx_\alpha \wedge dx_\beta + \sum_{i=1}^{n-k-1} dp_i \wedge dq_i.$$

При этом $\Omega_{\alpha\beta} = 0$ при $x_1 = 0$ и $\det(\Omega) \neq 0$ при $x_1 \neq 0$. Введем в O координаты $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, a, \mathbf{q}, b)$ и обозначим a, b через p_{n-k}, q_{n-k} соответственно. Все координатные поверхности, отвечающие фиксированным значениям a и b , получаются из N сдвигами в потоках $sgrad(g)$ и $sgrad(f)$, при этом поверхность Θ_N замещает $\Theta \cap O$. Поскольку данные потоки сохраняют форму ω и

$$\omega \left(\frac{\partial}{\partial p_{n-k}}, \frac{\partial}{\partial q_{n-k}} \right) = \omega(sgrad(f), sgrad(g)) = \{f, g\} = 1,$$

то имеет место (3.14) \square .

Перенумерацией координат p_i и q_i матрица формы ω приводится к блочно-диагональному виду

$$\left(\begin{array}{cccc|cc|cc|cc} \boxed{\begin{array}{cccc} 0 & \omega_{1,2} & \dots & \omega_{1,2k} \\ \omega_{2,1} & 0 & \dots & \omega_{2,2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{2k,1} & \omega_{2k,2} & \dots & 0 \end{array}} & & & & \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}} & & & & \dots & & & \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}} \end{array} \right).$$

Предложение 4 Пусть ρ – контактная точка. Если $\dim \mathcal{Z}_\rho = \dim M = 2n$, то в окрестности ρ существуют координаты \mathbf{x} , в которых

$$\omega = d \left(\frac{x_1^2}{2} \left(dx_2 + \sum_{j=2}^n x_{2j-1} dx_{2j} \right) \right).$$

Доказательство.

Если $n = 1$, то локально $\omega = \omega_{1,2}(x_1, x_2)dx_1 \wedge dx_2$ и $\omega_{1,2}(0, x_2) \equiv 0$. Так как $(0, x_2)$ есть контактная точка, то $\partial\omega_{1,2}(0, x_2)/\partial x_1 \neq 0$. Предполагая $\partial\omega_{1,2}(0, x_2)/\partial x_1 > 0$ сделаем гладкую замену:

$$\tilde{x}_1 = \operatorname{sgn}(x_1) \sqrt{2 \int_0^{x_1} \omega_{1,2}(t, x_2) dt}, \quad \frac{\partial \tilde{x}_1(0, x_2)}{\partial x_1} = \sqrt{\frac{\partial \omega_{1,2}(0, x_2)}{\partial x_1}}.$$

Легко проверить, что $\tilde{x}_1 \partial \tilde{x}_1 / \partial x_1 = \omega_{1,2}$, следовательно $\omega = \tilde{x}_1 d\tilde{x}_1 \wedge dx_2$.

Рассмотрим случай $n > 1$. По лемме 1 найдется такая окрестность $O(\rho)$ с координатами $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ и такая 1-форма μ , что

$$\mu = \sum_{i=1}^{2n} \beta_i dx_i, \quad \omega = d \left(\frac{x_1^2}{2} \mu \right) = x_1 dx_1 \wedge \mu + \frac{x_1^2}{2} d\mu. \quad (3.15)$$

Пусть $S = \Theta \cap O(\rho)$ есть гиперповерхность $x_1 = 0$ и d' обозначает внешний дифференциал по переменным x_2, \dots, x_{2n} , т.е.,

$$d'\mu = d(\mu|_{\{x_1=\text{const}\}}).$$

Из предложения 1 следует, что форма $\mu|_S$ определяет контактную структуру S , поэтому $d\mu|_S$ невырождена на $2n - 2$ мерном подпространстве $(\mu|_S)_\rho^{-1}(0)$. Следовательно $d\mu|_S$ имеет одномерное ядро в точке ρ . По непрерывности форма $d'\mu$, рассматриваемая в области U пространства $\mathbb{R}^{2n-1}(x_2, \dots, x_{2n})$ и гладко зависящая от параметра x_1 , имеет одномерное ядро в каждой точке, достаточно близкой к $\mathbf{x}'(\rho) \in U$. Поэтому при фиксированном, достаточно малом x_1 форма $d'\mu$ определяет на координатной поверхности $x_1 = \text{const}$ предканоническую структуру [30]. Следовательно, заменой координат вида

$$\tilde{x}_1 = x_1, \quad \tilde{x}_i = f_i(x_1, \mathbf{x}') \quad 2 \leq i \leq 2n$$

каждую из форм $d'\mu$ можно локально привести к виду

$$\sum_{r=1}^{n-1} d\tilde{x}_{2r+1} \wedge d\tilde{x}_{2r+2}.$$

Сделаем это и обозначим новые координаты x_1, \dots, x_{2n} . Из (3.15) следует, что

$$\operatorname{Ker} (d\mu|_{\{x_1=\text{const}=c \neq 0\}}) = \operatorname{Ker} (\omega|_{\{x_1=c\}}),$$

поэтому в новых координатах матрица ω имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta_2 x_1 & \beta_3 x_1 & \beta_4 x_1 & \dots & \beta_{2n-1} x_1 & \beta_{2n} x_1 \\ -\beta_2 x_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\beta_3 x_1 & 0 & 0 & \frac{x_1^2}{2} & \dots & 0 & 0 \\ -\beta_4 x_1 & 0 & -\frac{x_1^2}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\beta_{2n-1} x_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{x_1^2}{2} \\ -\beta_{2n} x_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{x_1^2}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Отсюда следует, что для некоторой функции $f(x_1, \dots, x_{2n})$ имеет место:

$$\begin{aligned} d'\mu &= d' \left(\sum_{r=2}^{2n} \beta_r dx_r \right) = \sum_{r=2}^{2n} d' \beta_r \wedge dx_r = \sum_{j=2}^n dx_{2j-1} \wedge dx_{2j} = d \left(\sum_{j=2}^n x_{2j-1} dx_{2j} \right), \\ \sum_{r=2}^{2n} \beta_r dx_r &= \sum_{j=2}^n x_{2j-1} dx_{2j} + d'f, \\ \beta_2 &= \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \beta_{2j} = x_{2j-1} + \frac{\partial f}{\partial x_{2j}}, \quad \beta_{2j-1} = \frac{\partial f}{\partial x_{2j-1}} \quad 2 \leq j \leq n. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Далее из (3.16) и (3.17) получим равенство:

$$\omega = x_1 dx_1 \wedge \left(\sum_{j=2}^n x_{2j-1} dx_{2j} + \sum_{r=2}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_r} dx_r \right) + \frac{x_1^2}{2} \sum_{j=2}^n dx_{2j-1} \wedge dx_{2j}. \quad (3.18)$$

По условию контактности ρ пфафффиан $Pf(\omega)(\mathbf{x})$ не делится на x_1^{2n} (определение 1).

В силу этого из (3.16) нетрудно увидеть, что $\beta_2 \neq 0$. Поэтому из (3.17) имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\rho) \neq 0.$$

Осталось заменить координату x_2 функцией f , получая из (3.18) искомый вид ω \square .

В построенных выше координатах матрица формы ω имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & x_1 x_3 & 0 & x_1 x_5 & \dots & 0 & x_1 x_{2n-1} \\ -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x_1^2}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -x_1 x_3 & 0 & -\frac{x_1^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_1^2}{2} & \dots & 0 & 0 \\ -x_1 x_5 & 0 & 0 & 0 & -\frac{x_1^2}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{x_1^2}{2} \\ -x_1 x_{2n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{x_1^2}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3 Пусть ρ – контактная точка и $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k \geq 2$. Тогда в некоторой окрестности ρ существуют координаты $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^{n-k}$, в которых:

$$\omega = d\left(\frac{x_1^2}{2}\left(dx_2 + \sum_{j=2}^k x_{2j-1} dx_{2j}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n-k} dp_i \wedge dq_i.$$

Доказательство следует из теоремы 2 и предложения 4 \square .

Будем говорить, что в координатах $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ форма ω имеет *канонический вид*.

После замены координаты x_2 на

$$\tilde{x}_2 = x_2 + \sum_{j=2}^n x_{2j-1} x_{2j} + F(x_1),$$

где $F(x_1)$ – произвольная гладкая функция, форма ω примет вид

$$\omega = d\left(\frac{x_1^2}{2}\left(d\tilde{x}_2 - \sum_{j=2}^n x_{2j} dx_{2j-1}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n-k} dp_i \wedge dq_i,$$

который также будем называть *каноническим*. В этом случае при $k = n$ в окрестности особой точки матрица формы выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_1 & -x_1 x_4 & 0 & -x_1 x_6 & 0 & \dots & -x_1 x_{2n} & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_1 x_4 & 0 & 0 & \frac{x_1^2}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{x_1^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_1 x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_1^2}{2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{x_1^2}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 x_{2n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{x_1^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{x_1^2}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

При $k = 1$ утверждение теоремы 3 означает следующее. В окрестности особой точки ρ , имеющей общее положение, заменой координат замкнутая 2-форма ω приводится к виду

$$\omega = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + \sum_{i=1}^{n-1} dp_i \wedge dq_i.$$

Этот результат, в другой формулировке, был ранее получен Ж. Мартине [76].

3.1.5. Симплектический объем.

В отличие от обычных симплектических многообразий, симплектическое многообразие с особенностью не обязано быть ориентируемым. Замкнутую 2-форму с контактными вырождениями, например, легко задать на многообразии $K^2 \times T^2$, где K^2 есть бутылка Клейна (пример 2 § 2.2).

Предложение 5 *Если многообразие M ориентируемо и связная гиперповерхность $\Theta \subset M$ состоит из контактных точек, то она является ориентируемой. При этом Θ разрезает M на два непересекающихся, открытых подмножества.*

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что в канонических координатах $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ имеет место

$$Pf(\omega) = x_1^{2k-1}/2^{k-1}.$$

Поэтому M разрезано на непересекающиеся, непустые, открытые подмножества $\{Pf(\omega) > 0\}$ и $\{Pf(\omega) < 0\}$. Они определены инвариантно, поскольку при замене координат из ориентирующего атласа пфаффиан $Pf(\omega)$ делится на положительный якобиан. Так как вне особой поверхности имеем $Pf(\omega) \neq 0$, то корректно определены две стороны гиперповерхности Θ : на одной стороне $Pf(\omega) > 0$, а на другой $Pf(\omega) < 0$ □.

Следствие 2 *В условиях предложения 5 многообразие M склеено из двух связных симплектических многообразий M_1 и M_2 (с краями) по некоторому диффеоморфизму $\varphi : \partial M_1 \rightarrow \partial M_2$.*

Доказательство. Рассмотрим малую трубчатую окрестность U гиперповерхности Θ . Очевидно, что M диффеоморфно несвязному симплектическому многообразию $M \setminus U$, у которого склеены между собой две связные компоненты края, составляющие границу окрестности $U \cong \Theta \times (-1; 1)$ и отождествляющиеся по диффеоморфизму $x \times \{-1\} \mapsto x \times \{1\}$ □.

Теорема 4 *Пусть ω – замкнутая 2-форма на ориентируемом, компактном многообразии M (без края). Если все точки вырождения формы ω являются контактными и особая гиперповерхность Θ связна, то $\mathbf{H}^2(M, \mathbb{R}) \neq 0$.*

Доказательство. Пусть $\dim M = 2n$. Без ограничения общности многообразие M можно считать связным. В силу предложения 5 гиперповерхность Θ ориентируема. Пусть $n > 1$ и N – замыкание любого из двух связных подмножеств,

на которые Θ разрезает M . Если форма ω точна на V , то $\omega = d\alpha$. В силу того, что $\omega = 0$ в каждой точке Θ , по формуле Стокса имеем:

$$\int_N \wedge_{i=1}^n \omega = \int_{\partial N} \alpha \wedge (\wedge_{i=1}^{n-1} \omega) = \int_{\Theta} 0 = 0 .$$

Многообразие N имеет нулевой объем, что невозможно, поскольку пфафффиан $Pf(\omega)$ знакопостоянен на N . Следовательно форма ω не точна на M , поэтому группа когомологий де-Рама $\mathbf{H}^2(M, \mathbb{R})$ отлична от нуля. Если $n = 1$, то $\mathbf{H}^2(M, \mathbb{R}) \neq 0$ в силу того, что на любом 2-мерном, ориентируемом, компактном многообразии (без края) форма площади не является точной \square .

Аналогичным свойством обладают компактные симплектические многообразия [58,79]. Следующий факт хорошо известен, но в его доказательстве используется новая конструкция контактно-связной суммы (**п. 3.2.4**).

Следствие 3 *Связная сумма $N_1 \# N_2$ замкнутых симплектических многообразий N_1 и N_2 имеет ненулевую группу когомологий де-Рама $\mathbf{H}^2(N_1 \# N_2, \mathbb{R})$.*

Доказательство. Многообразие $M = N_1 \#_0 N_2 \cong N_1 \# N_2$, будучи компактным, симплектическим с контактными особенностями в точках вложенной сферы $S^{2n-1} \subset M$, имеет ненулевую группу $\mathbf{H}^2(M, \mathbb{R})$ \square .

Предположим, что на M задана ориентация и связная особая поверхность Θ состоит из контактных точек. Пусть в карте W , содержащей особые точки, заданы канонические координаты $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$. В них форма симплектического объема выглядит так:

$$\Omega = \wedge_{s=1}^n \omega = \frac{x_1^{2k-1}}{2^{k-1}} \left(\wedge_{\alpha=1}^{2k} dx_{\alpha} \right) \wedge \left(\wedge_{j=1}^{n-k} (dp_j \wedge dq_j) \right).$$

Координату x_1 можно выбрать в произвольном направлении, трансверсальном Θ , при условии $\partial/\partial x_1 \in \mathcal{Z}_x$. Предположим, что x_1 возрастает в направлении вектора нормали, задающего ориентацию гиперповерхности Θ . Тогда, поскольку $Pf(\omega) = x_1^{2k-1}/2^{k-1}$ и при замене координат пфафффиан делится на матрицу Якоби, все такие канонические координаты $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ согласованы между собой и, стало быть, все согласованы с ориентацией M или все сразу несогласованы. При необходимости обращая ориентацию Θ можно считать, что все координаты указанного вида имеют положительную ориентацию. В произвольной, достаточно малой области U , не пересекающей Θ , можно ввести симплектические координаты $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, в которых

$$\omega = d\mathbf{P} \wedge d\mathbf{Q}, \quad Pf(\omega) = 1 .$$

Если непустое множество $U \cap W$ находится с положительной стороны от гиперповерхности Θ , то координаты (\mathbf{P}, \mathbf{Q}) имеют положительную ориентацию, а если с отрицательной стороны, то отрицательную.

Итак, гиперповерхность Θ разделяет M на два симплектических многообразия M_+ и M_- , на каждом из которых задана исходная форма ω . При этом симплектические координаты M_+ имеют положительную ориентацию в M , а симплектические координаты M_- имеют отрицательную ориентацию в M . Отсюда следует, что если M компактно и на каждом из подмногообразий M_+ и M_- фиксирована исходная ориентация M , то

$$\int_{M_+} \Omega = \int_{M_+} Pf(\omega) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{2n} > 0 ,$$

$$\int_{M_-} \Omega = \int_{M_-} Pf(\omega) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{2n} < 0 .$$

Поэтому симплектический объем, который равен

$$\int_M \Omega = \int_{M_+} \Omega + \int_{M_-} \Omega,$$

в общем может иметь любой знак и даже быть равным нулю.

Пример 4. Пусть f есть функция на сфере S^2 радиуса R , имеющая ровно один максимум (в точке N) и один минимум (в точке S), и не имеющая других критических точек. Предположим, что $f(N) = 1$, $f(S) = -1$ и подмногообразие $f^{-1}(0)$ связно. Тогда оно является окружностью $S_0^1 \subset S^2$, разрезающей сферу на два диска $D_+^2 \ni N$ и $D_-^2 \ni S$. Если σ – форма площади сферы, то форма $\omega_0 = f \cdot \sigma$ определяет структуру симплектического многообразия с особенностью. При этом $\Theta = S_0^1$ и

$$vol(D_+^2) > 0, \quad vol(D_-^2) < 0, \quad vol(S^2) = vol(D_+^2) + vol(D_-^2),$$

где vol обозначает симплектический объем, т.е. $vol = \int \omega_0$. Произвольно выбирая R и варьируя функцию f (вместе с ней окружность S_0^1) можно добиться того, чтобы величина $vol(S^2)$ равнялась наперед заданному числу. Умножая (S^2, ω_0) на компактное симплектическое многообразие (M^{2n}, ω) , получим симплектическое многообразие с особенностью $(S^2 \times M^{2n}, \pi_1^* \omega_0 + \pi_2^* \omega)$, имеющее произвольную размерность. Его объем можно сделать каким угодно, в том числе нулевым или отрицательным. Здесь π_i есть проекция на i -й сомножитель ($1 \leq i \leq 2$) \square .

Существуют ли компактные симплектические многообразия с особенностью, в которых связная поверхность Θ состоит из контактных точек? В случае $\dim \mathcal{Z}_p = 2$ такое многообразие M построено в примере 4, где

$$M = S^2 \times M^{2n}, \quad \Theta \cong S^1 \times M^{2n}, \quad \mathbf{H}^2(M, \mathbb{R}) = \mathbf{H}^2(S^2 \times M^{2n}, \mathbb{R}) \neq 0.$$

В случае $\dim \mathcal{Z}_p > 2$ положительный ответ на этот вопрос содержится в п. 3.2.4.

§3.2. Каноническая структура Ли.

Рассматривается замкнутая 2-форма ω на $2n$ -мерном многообразии M в предположении, что для некоторого $k > 0$

$$rk(\omega_x) = 2n - 2k \quad \forall x \in \Theta,$$

где гладкая гиперповерхность Θ состоит из контактных точек. Последнее влечет, что в некоторой окрестности Θ нет других точек вырождения формы ω кроме тех, которые составляют множество Θ .

3.2.1. Контактные вырождения и структуры Ли.

Определение 2 Любое $2k$ -мерное интегрируемое распределение Z , определенное в окрестности гиперповерхности Θ и такое, что $Z_\rho = \mathcal{Z}_\rho$ в каждой точке $\rho \in \Theta$, называется z -распределением.

Из доказательства леммы 1 из § 1.2 следует, что z -распределение существует.

Теорема 5 Пусть S есть интегральное многообразие z -распределения Z , имеющее непустое пересечение с особой поверхностью Θ .

Тогда на $2k-1$ -мерном многообразии $K = \Theta \cap S$ корректно определена 1-форма

$$\mu = \lim_{\chi \rightarrow 0} i_X (\chi^{-1} \omega|_S),$$

где векторное поле X и функция χ заданы на многообразии S . При этом поле X трансверсально K , а функция χ такова, что $\chi(K) = 0$ и $d_\rho \chi \neq 0$ для всех $\rho \in K$.

При $k > 1$ форма μ определяет на многообразии K точную контактную структуру

$$\rho \longmapsto \Pi_\rho = \mu_\rho^{-1}(0),$$

которая не зависит от выбора распределения Z , поля X и функции χ .

Доказательство. В окрестности $O(\rho)$ произвольной точки $\rho \in K$ введем координаты $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$, в которых поверхность $\Theta \cap O(\rho)$ определяется уравнением $x_1 = 0$ и ядро \mathcal{Z}_y натянута на векторы $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_{2k}$ в каждой точке $y \in \Theta \cap O(\rho)$. Заметим, что S инъективно погружено в M и, вообще говоря, не является подмногообразием. Можно считать, что локальными координатами S являются функции x_1, \dots, x_{2k} . Заметим также, что K является подмногообразием S и не зависит от выбора z -распределения.

Инвариантность контактной структуры Π относительно поля X и функции χ , а также корректная определенность формы μ на K следуют из предложения 1. Аналогично (3.3) для локального задания контактной структуры можно выбрать 1-форму

$$\beta_{\mathbf{x}} = \sum_{j=2}^{2k} \frac{\partial \omega_{1,j}}{\partial x_1} dx_j.$$

Осталось проверить независимость контактной структуры от выбора z -распределения. Рассмотрим произвольные координаты \mathbf{x} и $\tilde{\mathbf{x}}$, в которых 2-форма имеет компоненты $\omega_{i,j}$ и $\tilde{\omega}_{i,j}$. При доказательстве леммы 3 de facto было установлено, что

$$\begin{aligned} \omega_{1m}(\mathbf{x}) = x_1 \beta_m(\mathbf{x}), \quad \omega_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2} \alpha_{ij}(\mathbf{x}), \quad \omega_{js}(\mathbf{x}) = x_1 \gamma_{js}(\mathbf{x}), \\ 2 \leq m \leq 2n, \quad 2 \leq i, j \leq 2k, \quad 2k+1 \leq s \leq 2n. \end{aligned}$$

Аналогичным свойством обладают элементы матрицы $(\tilde{\omega}_{i,j})$, следовательно:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 \tilde{\beta}_i = x_1 \sum_{j=2}^{2k} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} - \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_i} \right) \beta_j + \\ + x_1 \sum_{s=2k+1}^{2n} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial x_s}{\partial \tilde{x}_i} - \frac{\partial x_s}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_i} \right) \beta_s + x_1^2/2 \sum_{j,l=2}^{2k} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial x_l}{\partial \tilde{x}_i} \alpha_{jl} + \\ + x_1 \sum_{j=2}^{2k} \sum_{s=2k+1}^{2n} \left(\frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial x_s}{\partial \tilde{x}_i} - \frac{\partial x_s}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} \right) \gamma_{js} + \sum_{r,s=2k+1}^{2n} \frac{\partial x_r}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial x_s}{\partial \tilde{x}_i} \omega_{rs}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Координатная поверхность, отвечающая $x_1 = 0$ и фиксированным значениям координат x_j при $j > 2k$, является интегральным подмногообразием распределения \mathcal{Z}_0 (лемма 1, § 1.2), в силу чего совпадает с K . То же имеет место в отношении координат $\tilde{\mathbf{x}}$. Следовательно

$$\frac{\partial x_s}{\partial \tilde{x}_i} = 0$$

для всех $s > 2k$ и $s = 1$, если $1 < i \leq 2k$ и $x_1 = 0$. Далее, при $x_1 = 0$ для всех $s > 2k$

$$\frac{\partial x_s}{\partial \tilde{x}_1} = dx_s \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \right) = dx_s \left(\sum_{j=1}^{2k} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = 0.$$

Пусть $1 < i \leq 2k$. Разделим (3.19) на x_1 и при $x_1 \rightarrow 0$ в пределе получим:

$$\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_1} \tilde{\beta}_i = \sum_{j=2}^{2k} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} \beta_j + \sum_{r,s=2k+1}^{2n} \frac{\partial x_r}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial^2 x_s}{\partial \tilde{x}_i \partial x_1} \omega_{rs} = \sum_{j=2}^{2k} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} \beta_j.$$

Итак, псевдотензорный закон преобразования чисел $(\beta_2, \dots, \beta_{2k})$ обеспечивает инвариантность нулевых подпространств формы

$$\beta = \sum_{i=2}^{2k} \beta_i dx_i,$$

рассматриваемой на многообразии K \square .

Следствие 4 Пусть (M, ω) есть симплектическое многообразие с особенностью и $k > 1$. Предположим, что особая поверхность $\Theta \subset M$ состоит из контактных точек ρ , в каждой из которых $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k$.

Тогда гиперповерхность Θ расслоена на инъективно погруженные, точные контактные многообразия K размерности $2k - 1$, являющиеся интегральными подмногообразиями распределения

$$\Theta \ni \rho \longmapsto \mathcal{Z}_\rho \cap T_\rho \Theta.$$

Для любого многообразия $K \subset \Theta$ и любых координат $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^{n-k}$ в окрестности произвольной точки $\rho \in K$, в которых

$$\omega = d \left(\frac{x_1^2}{2} \left(dx_2 + \sum_{j=2}^k x_{2j-1} dx_{2j} \right) \right) + \sum_{i=1}^{n-k} dp_i \wedge dq_i$$

или

$$\omega = d \left(\frac{x_1^2}{2} \left(d\tilde{x}_2 - \sum_{j=2}^n x_{2j} dx_{2j-1} \right) \right) + \sum_{i=1}^{n-k} dp_i \wedge dq_i,$$

контактные плоскости многообразия K являются нулевыми подпространствами формы

$$\left(dx_2 + \sum_{j=2}^k x_{2j-1} dx_{2j} \right) \Big|_K \quad \text{или, соответственно,} \quad \left(d\tilde{x}_2 - \sum_{j=2}^n x_{2j} dx_{2j-1} \right) \Big|_K.$$

При этом контактная структура K не зависит от выбора канонических координат $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$.

Будем говорить, что контактная структура каждого интегрального подмногообразия $K \subset \Theta$ канонически определена формой ω .

Следствие 5 Если для некоторого $k > 1$ особая поверхность $\Theta \subset M$ состоит из контактных точек ρ , в которых $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k$, то она является регулярным многообразием Ли. Её структура Ли порождена интегральными подмногообразиями распределения $\Theta \ni \rho \longmapsto \mathcal{Z}_\rho \cap T_\rho \Theta$, на каждом из которых форма ω канонически определяет контактную структуру.

Определение регулярных многообразий Ли дано в § 1.1 (см. также ниже). При $k = n$ получаем следующее утверждение.

Следствие 6 Пусть особая поверхность $\Theta \subset M$ состоит из контактных точек ρ , в которых $\dim \mathcal{Z}_\rho = \dim M$. Тогда Θ является точным контактным многообразием, структура которого канонически определена формой ω .

Следует заметить, что описанные структуры Ли инвариантны относительно канонических координат и прозрачно определяются ими.

Каждое гамильтоново поле $sgrad(f)$, корректно определенное на всем M (т.е. удовлетворяющее условию $df(\mathcal{Z}_\rho) \equiv 0$), сохраняет форму ω . На инвариантном множестве $M \setminus \Theta$ это есть известный факт симплектической геометрии, а на всем M инвариантность формы ω имеет место по непрерывности. Справедливо также обратное утверждение.

Предложение 6 Пусть точка $\rho \in \Theta \subset M^{2n}$ является контактной, где (M^{2n}, ω, Θ) есть симплектическое многообразие с особенностью и $\dim \mathcal{Z}_\rho > 2$.

Тогда любой динамический поток φ_t , сохраняющий форму ω вблизи ρ , на некоторой окрестности $O \ni \rho$ порождается некоторым гамильтоновым полем $sgrad(F)$, где функция F удовлетворяет условию

$$dF(\mathcal{Z}_y) = 0 \quad \forall y \in O \cap \Theta .$$

Доказательство. Проверим гамильтоновость поля X , отвечающего потоку φ_t :

$$L_X \omega = i_x d\omega + d(i_X \omega) = d(i_X \omega) = 0 .$$

По лемме Пуанкаре форма $i_X \omega$ локально точна, поэтому можно считать, что для некоторой функции F на O имеет место $i_X \omega = -dF$. Тогда $X = sgrad(F)$ и из п. 3.1 предложения 1 § 1.2 следует, что $dF(Ker(\omega)) \equiv 0 \quad \square$.

Каноническая структура Ли, порождаемая формой ω , также сохраняется потоком $sgrad(f)$.

Предложение 7 Пусть точка $\rho \in \Theta \subset M^{2n}$ является контактной, где (M^{2n}, ω, Θ) есть симплектическое многообразие с особенностью и $\dim \mathcal{Z}_\rho > 2$.

Тогда любой динамический поток φ_t , сохраняющий форму ω вблизи ρ , для некоторой окрестности $O \ni \rho$ сохраняет каноническую структуру Ли на $O \cap \Theta$.

Доказательство. В контактной точке $\rho \in \Theta$ плоскость Π_ρ канонической структуры Ли натянута на всевозможные предельные направления векторов $sgrad(f)(y)$, являющихся бесконечно большими порядка $x_1^{-2}(y)$ при $y \rightarrow \rho$, $y \notin \Theta$ (см. предложение 10). Функцией x_1 может быть любая локальная координата при условии, что поверхность Θ (локально) определяется уравнением $x_1 = 0$. Пусть

$$\tilde{\rho} = \varphi_t(\rho), \quad f_j = \varphi_t^*(\tilde{f}_j), \quad 1 \leq j \leq 2k - 2$$

для некоторых функций f_1, \dots, f_{2k-2} , заданных в окрестности точки ρ и порождающих плоскость Π_ρ в вышеуказанном смысле (т.е. предельными направлениями $sgrad(f_j)$). Поскольку поток φ_t сохраняет форму ω , то он переводит векторы $sgrad(f_j)$ в векторы $sgrad(\tilde{f}_j)$. Последние определены (в неособых точках) некоторой окрестности точки $\tilde{\rho}$. Пусть $x_1 = \varphi_t^*(\tilde{x}_1)$, тогда функция \tilde{x}_1 вблизи точки $\tilde{\rho}$ определяет Θ уравнением $\tilde{x}_1 = 0$. Для поля $sgrad(f_j)$ имеем :

$$\begin{aligned} & \exists \lim_{y \rightarrow \rho} x_1^2(y) sgrad(f_j)(y) = v_j \neq 0, \\ & \lim_{\tilde{y} \rightarrow \tilde{\rho}} \tilde{x}_1^2(\tilde{y}) sgrad(\tilde{f}_j)(\tilde{y}) = \lim_{\tilde{y} \rightarrow \tilde{\rho}} (\varphi_t)_*(x_1^2 sgrad(f_j))(\tilde{y}) = \\ & = (\varphi_t)_* \left(\lim_{y \rightarrow \rho} x_1^2(y) sgrad(f_j)(y) \right) = \tilde{v}_j = (\varphi_t)_*(v_j) \neq 0. \end{aligned}$$

Из независимости векторов v_1, \dots, v_{2k-2} вытекает линейная независимость векторов $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{2k-2}$. Поэтому они порождают плоскость $\Pi_{\tilde{\rho}}$ и, следовательно, имеет место

$$\Pi_{\tilde{\rho}} = (\varphi_t)_*(\Pi_\rho) \quad \square.$$

Предложение 8 Любое нечетно-мерное регулярное многообразие Ли L с нечетно-мерными транзитивными слоями локально является гладкой гиперповерхностью внутри некоторого многообразия \tilde{U} , на котором определена замкнутая 2-форма ω , невырожденная на $\tilde{U} \setminus L$ и имеющая контактное вырождение в каждой точке $\rho \in \tilde{U} \cap L$.

Доказательство. В условиях данного предложения многообразие L канонически расслоено на (инъективно погруженные) точные контактные многообразия L_α [20]. Пусть M_α – замкнутая симплектизация многообразия L_α . На множестве $M = \cup_\alpha M_\alpha$ существует единственная гладкая структура, относительно которой каждое подмножество $M_\alpha \subset M$ является инъективно погруженным многообразием. Соответствующее гладкое многообразие обозначим $M(L) = M$. Можно считать, что $L \subset M$. Рассмотрим произвольную карту (U, φ) атласа многообразия L , и поднимем все координатные функции φ_i на открытое в $M(L)$ множество

$$\tilde{U} = \cup_{L_\alpha \cap U \neq \emptyset} (M_\alpha \cap \pi_\alpha^{-1}(L_\alpha \cap U)),$$

где $\pi_\alpha : T^*L_\alpha \rightarrow L_\alpha$ – каноническая проекция кокасательного расслоения. Дополним полученные функции $\tilde{\varphi}_i$ такой функцией χ , что для каждого α форма

$$d(\chi\theta_\alpha)|_{M_\alpha \cap \tilde{U}}$$

совпадает с ограничением на $M_\alpha \cap \tilde{U}$ канонической 2-формы многообразия T^*L_α (порождающей структуру симплектизации L_α). При этом θ_α – контактная форма на L_α , определенная исходной структурой Ли, которую подняли на M_α . На произвольной трансверсали ко всем слоям $M_\alpha \cap \tilde{U}$ введем координаты $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^{n-k}$, где $\dim L_\alpha = 2k - 1$ и $\dim M = 2n$. Очевидно, что на \tilde{U} существует 2-форма

$$\Omega = d(\chi\theta) + \sum_{i=1}^{n-k} dp_i \wedge dq_i, \quad \theta|_{M_\alpha \cap \tilde{U}} = \theta_\alpha.$$

Тогда искомой будет 2-форма

$$\omega = d\left(\frac{\chi^2}{2}\theta\right) + \sum_{i=1}^{n-k} dp_i \wedge dq_i \quad \square.$$

В случае $\dim L = rk(C) = 2n$ регулярное многообразие Ли имеет следующую локальную структуру (§ 1.1). Для каждой точки $\rho \in L$ найдется окрестность U , ненулевая функция f и симплектическая форма Ω на U , так что

$$\Omega_\rho = f(\rho)C_\rho^{-1}, \quad f(\rho) \neq 0, \quad a_\rho = sgrad(f)(\rho) \quad \forall \rho \in U,$$

где C^{-1} – внешняя форма, обратная к бивектору C . Предположим, что функция f и форма Ω корректно определены на некотором многообразии $\tilde{L} = L \cup \partial L$ и $f(\partial L) = 0$. Если $\Omega = 0$ в каждой точке подмножества $\Theta = \partial L$, то последнее является особой

поверхностью в многообразии \tilde{L} , несущем на себе симплектическую структуру с особенностями.

Пример 5. Рассмотрим на \mathbb{R}^{2n} бивектор C , имеющий матрицу

$$(C^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & -2x_3 & 0 & \dots & -2x_{2n-1} & 0 \\ 0 & 2x_3 & 0 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 2x_{2n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Совместно с постоянным векторным полем $A = (0, 2, 0, \dots, 0)$, бивекторное поле C определяет регулярную структуру Ли на многообразии $L = \{x_1 \neq 0\}$. Пусть $\tilde{L} = \mathbb{R}^{2n}$. В данном случае $f(\mathbf{x}) = x_1^2$ и $rk(C) = 2n - 2$ в точках гиперповерхности

$$\Theta = \partial L = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : x_1 = 0\}.$$

Форма $\Omega_x = f(\mathbf{x})c_x^{-1}$ имеет канонический вид на $\tilde{L} = \mathbb{R}^{2n}$, поэтому все точки особой поверхности Θ являются контактными \square .

Итак, с четно-мерными, регулярными структурами Ли связаны примеры замкнутых 2-форм, исчезающих на гиперповерхностях.

3.2.2. Контактные вырождения и симплектизация.

Рассмотрим случай вырождения замкнутой 2-формы, когда для некоторой гладкой гиперповерхности $\Theta \subset M$ имеет место:

$$\forall \rho \in \Theta \quad \dim \mathcal{Z}_\rho = \dim M = 2n > 2.$$

Точка условие контактности точки $\rho \in \Theta$ означает, что в ней отлична от нуля хотя бы одна из частных производных порядка $2n - 1$ от функции $Pf(\omega) = \sqrt{\det(\omega)}$, рассматриваемой в некоторых (и тогда в любых) локальных координатах. Из теоремы 3 следует, что на некоторой окрестности контактной точки $\rho \in \Theta$ существуют координаты x , в которых форма имеет канонический вид:

$$\omega = d\left(\frac{x_1^2}{2}\left(dx_2 + \sum_{j=2}^k x_{2j-1} dx_{2j}\right)\right).$$

Из теоремы 5 следует, что 1-форма

$$\mu = \frac{1}{2} \cdot \lim_{\chi \rightarrow 0} i_X(\omega/\chi) = dx_2 + \sum_{j=1}^n x_{2j-1} dx_{2j}$$

задает контактную структуру на многообразии $\Theta \cap U$, которая не зависит от координат x и канонически определяется 2-формой ω . Таким образом теория контактных вырождений замкнутых 2-форм, которые первоначально назывались правильными [12], оказалась связанной с контактной геометрией. Последняя, таким образом, получила новую симплектическую интерпретацию, согласно которой на контактных многообразиях происходят максимально глубокие, но достаточно правильные вырождения симплектических структур. При этом конструкция контактно-связной суммы симплектических многообразий, введенная ниже, позволяет строить примеры компактных симплектических многообразий с контактными особенностями. Поэтому класс многообразий с симплектической структурой, контактным образом обнуляющейся в точках гиперповерхности, не исчерпывается S -симплектизациями контактных многообразий. Хотя с локальной точки зрения никакой разницы между этими объектами нет.

Симплектизацией контактного многообразия (K, Π) называется такая пара (L, Ω) , что

$$L = \{ \zeta_\rho \in T^*K : \zeta_\rho \neq 0, \quad \zeta_\rho(\Pi_\rho) = 0 \}$$

и симплектическая форма Ω на L , индуцированная из T^*K , т.е. $\Omega = d\varphi|_L$, где

$$\varphi_\zeta(X) = \zeta(\pi_*(X)) \quad \forall \zeta \in T^*K \quad \forall X \in T_\zeta(T^*K), \quad \pi : T^*K \rightarrow K.$$

Локальная контактная форма $\theta = du - \sum_{i=1}^n p_i dq_i$ определяет на L такие координаты $(y, u, \mathbf{p}, \mathbf{q})$, что $y \neq 0$ и

$$\zeta = y\theta, \quad \Omega_\zeta = d\left(y\left(du - \sum_{i=1}^n p_i dq_i\right)\right). \quad (3.20)$$

Определение 3 Пусть $\Theta = \{0 \in T^*_\rho K : \rho \in K\}$ и L есть симплектизация контактного многообразия K .

Тогда замкнутой симплектизацией K называется пара $(\bar{L}, \bar{\Omega})$, где \bar{L} есть многообразие $L \cup \Theta$ с гладкой структурой из T^*K , а 2-форма $\bar{\Omega} = d\varphi|_{\bar{L}}$ является ограничением симплектической структуры многообразия T^*K .

В локальных координатах $(y, u, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ на \bar{L} имеет место (3.20). Форма $\bar{\Omega}$ невырождена на $\bar{L} \setminus \Theta$ и вырождается в точках гладкой гиперповерхности $\Theta \subset \bar{L}$.

Последняя локально определяется уравнением $y = 0$. Ранг формы $\bar{\Omega}$ равен 2 в каждой точке подмногообразия Θ и $\bar{\Omega}|_{\Theta} = 0$.

Пусть α есть контактная форма, заданная на некотором открытом подмножестве $V \subset K$. Тогда $\bar{\Omega}|_W = d(y\pi^*\alpha|_W)$, где

$$W = \{ \lambda\alpha_\rho : \lambda \in \mathbb{R}, \quad \rho \in V \} = \bar{L} \cap \pi^{-1}(V), \quad \zeta_\rho = y(\zeta_\rho)\alpha_\rho \quad \forall \zeta_\rho \in W.$$

Если множество V является картой с координатами x_1, \dots, x_{2n-1} , то на W определены координаты $y, \pi^*x_1, \dots, \pi^*x_{2n-1}$. Координатные функции π^*x_j , а также их значения будем кратко обозначать x_j . Заменяя координату y на функцию

$$\chi = \begin{cases} \sqrt{y}, & \text{если } y \geq 0 \\ -\sqrt{-y}, & \text{если } y < 0 \end{cases},$$

получим карту $(W, \chi, x_1, \dots, x_{2n-1})$, которую назовем *растянутой* (V, x, α) – *картой*. Она согласована с теми и только теми картами подмногообразия $\bar{L} \subset T^*K$, области которых не пересекаются с поверхностью $W \cap \Theta$.

Определение 4 Пусть гиперповерхность $\Theta = \{0 \in T^*_\rho K : \rho \in K\}$ разрезает замкнутую симплектизацию $(\bar{L}, \bar{\Omega})$ связного контактного многообразия (K, Π) на два непересекающихся подмножества \bar{L}_\pm , т.е.

$$\bar{L} = \bar{L}_+ \cup \bar{L}_- \cup \Theta, \quad \bar{L}_+ \cap \bar{L}_- = \emptyset, \quad \Theta \cap \bar{L}_\pm = \emptyset.$$

Обозначим \bar{L}_0 гладкое многообразие, структура которого определяется на топологическом пространстве \bar{L} гладким атласом \mathcal{A}_0 , состоящим из всех растянутых (V, x, α) – карт.

Тогда S – симплектизацией многообразия K называется пара $(\bar{L}_0, \bar{\Omega}_0)$, где замкнутая 2-форма $\bar{\Omega}_0$ на \bar{L}_0 определяется из соотношений:

$$\begin{cases} \bar{\Omega}_0|_{\bar{L}_+} = \bar{\Omega}|_{\bar{L}_+} \\ \bar{\Omega}_0|_{\bar{L}_-} = -\bar{\Omega}|_{\bar{L}_-} \\ (\bar{\Omega}_0)_\rho = 0 \quad \forall \rho \in \Theta. \end{cases}$$

Проверим корректность определения 4. Пусть в двух картах атласа \mathcal{A}_0 , области которых W и \tilde{W} пересекаются по множеству U , заданы координаты (x_1, \dots, x_{2n}) и $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{2n})$, где

$$y = \pm x_1^2, \quad x_1 = \pm\sqrt{\pm y}, \quad \tilde{y} = \pm\tilde{x}_1^2, \quad \tilde{x}_1 = \pm\sqrt{\pm\tilde{y}}, \quad x_1(U \cap \Theta) = \tilde{x}_1(U \cap \Theta) = 0.$$

Из определения карт атласа \mathcal{A}_0 вытекает, что $\tilde{x}_1 = f \cdot x_1$ для некоторой гладкой функции $f = f(x_2, \dots, x_{2n})$ на U . Отсюда видна бесконечная дифференцируемость функции $\tilde{x}_1(x_1, \dots, x_{2n})$. Пусть $1 < i, j \leq 2n$. Очевидно, что всякая частная производная вида

$$\frac{\partial^m \tilde{x}_i}{\partial x_2^{m_2} \dots \partial x_{2n}^{m_{2n}}}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = \frac{\partial^m \tilde{x}_i}{\partial x_2^{m_2} \dots \partial x_{2n}^{m_{2n}}}(y, x_2, \dots, x_{2n}) \Big|_{y=\pm x_1^2},$$

будучи непрерывной по (y, x_2, \dots, x_{2n}) , непрерывна по всем переменным x . Поскольку функции x_2, \dots, x_{2n} и $\tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{2n}$ подняты на W и \tilde{W} с помощью проекции $\pi : \bar{L} \rightarrow K$, тождественно равна нулю и, стало быть, непрерывна любая частная производная вида

$$\frac{\partial^m \tilde{x}_i}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_{2n}^{m_{2n}}}(x_1, \dots, x_{2n}),$$

независимо от порядка дифференцирования. Таким образом \mathcal{A}_0 есть атлас класса C^∞ на \bar{L} .

По условию топологическое пространство $\bar{L}_0 = \bar{L}$ разрезано гиперповерхностью Θ на два открытых подмножества \bar{L}_\pm , на которых

$$\bar{\Omega} = d\left(\pm x_1^2 \sum_{j>1} \alpha_j dx_j\right) = \pm \left(2x_1 dx_1 \wedge \sum_{j>1} \alpha_j dx_j + x_1^2 \sum_{j>1} \sum_{i>1} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j\right).$$

Отсюда следует, что в координатах $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ форма $\bar{\Omega}_0$ выглядит так:

$$\bar{\Omega}_0 = x_1 \sum_{j>1} \left(2\alpha_j dx_1 + x_1 \sum_{i>1} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} dx_i\right) \wedge dx_j = d(x_1^2 \pi^* \alpha|_W) \quad \square. \quad (3.21)$$

Полученное из \bar{L} гладкое многообразие \bar{L}_0 можно наглядно представить, как результат растяжения бесконечно тонкого слоя — окрестности поверхности Θ . Это соображение подсказывает термин S - симплектизация, происходящий от английского *Stretched* — растянутый. На открытых подмножествах \bar{L}_\pm гладкие структуры многообразий \bar{L} и \bar{L}_0 согласованы. Замкнутая 2-форма $\bar{\Omega}_0$ невырождена на $\bar{L}_0 \setminus \Theta$ и равна нулю в каждой точке гиперповерхности Θ . Последняя является контактным многообразием, контактоморфным (K, Π) . Контактными на Θ являются 1-формы вида $(\pi^* \alpha)|_\Theta$, где α есть контактная форма K .

В связи с определением S - симплектизации возникает естественный вопрос: нельзя ли просто ввести форму $\bar{\Omega}_0 = (\chi^2 \alpha)$ на произведении $\Theta \times \mathbb{R}$, которое определяется фиксацией любой контактной формы α на Θ ? Несмотря на эстетическую привлекательность такого подхода в сравнении с определением 4, он имеет серьезный недостаток. Дело в том, что получаемая таким образом 2-форма $\bar{\Omega}_0$ неоднозначно определяется контактной структурой, поскольку зависит от

контактной формы α . В самом деле, пусть даны контактные формы α и $\tilde{\alpha} = t\alpha$. Тогда $\tilde{\chi} = \chi/t$ и

$$d(\tilde{\chi}^2\tilde{\alpha}) = d\left(\frac{1}{t^2}\chi^2t\alpha\right) = d\left(\frac{1}{t}\chi^2\alpha\right) \neq d(\chi^2\alpha).$$

При этом в конструкции обычной или замкнутой симплектизации форма $d(\chi\alpha)$ от выбора контактной формы α уже не зависит.

Замечание 2 *Ориентируемые, связные контактные многообразия имеют S - симплектизацию тогда и только тогда, когда они являются точными.*

Доказательство. Точность ориентируемого контактного многообразия (K, Π) эквивалентна (ко)ориентируемости поля контактных гиперплоскостей Π , т.е. ориентируемости его замкнутой симплектизации \bar{L} . Последняя ориентируема тогда и только тогда, когда (связная и ориентируемая) гиперповерхность $\Theta \cong K$ разрезает многообразие \bar{L} на два куска \square .

Предложение 9 *Пусть $(\bar{L}_0, \bar{\Omega}_0)$ есть S - симплектизация контактного многообразия (K, Π) . Тогда каждая точка $\rho \in \Theta$ является контактной относительно формы $\bar{\Omega}_0$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольные векторное поле X и функцию χ в окрестности U поверхности Θ , удовлетворяющие условиям:

$$X_\rho \notin T_\rho\Theta, \quad d_\rho\chi \neq 0 \quad \forall \rho \in \Theta, \quad \chi(\Theta) = 0. \quad (3.22)$$

Введем 1-форму $\mu = \lim_{\chi \rightarrow 0} i_X(\bar{\Omega}_0/\chi)$ на гиперповерхности Θ . Из (3.21) следует, что форма μ пропорциональна любой контактной форме α многообразия $\Theta \cong K$. В силу предложения 1 имеем $d^{2n-1}Pf(\bar{\Omega}_0) \neq 0$ в каждой точке Θ . Поэтому каждая точка гиперповерхности Θ является контактной \square .

3.2.3. Решения Фридмана.

Рассмотрим физически содержательный пример S - симплектизации.

В 1922г. Л.А. Фридман получил частные решения уравнений Эйнштейна, из которых позднее родилась теория расширяющейся Вселенной. При малом t приближением к решениям Фридмана является следующая индефинитная метрика пространства-времени:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - kt(d\psi^2 + f^2(\psi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)),$$

где k есть эмпирическая константа и ψ, θ, φ есть стандартные координаты на единичной 3-мерной сфере или на 3-мерном гиперboloиде [22]. Соответственно, в закрытой модели имеем $f(\psi) = \sin \psi$ (пульсирующая Вселенная), а в открытой $f(\psi) = \text{sh } \psi$ (неограниченное расширение). Изложенные рассуждения не зависят от типа модели (открытая или закрытая), поэтому для определенности положим $f(\psi) = \sin \psi$. Это отвечает популярной гипотезе о том, что в каждый момент времени Мир представляет собой 3-мерную сферу S_t^3 .

При $t > 0$ геодезический поток гамильтонов относительно симплектической формы $\beta = d(\sum_{i,j}^4 g_{ij} \dot{q}_i dq_j)$ и функции Гамильтона $H = 2^{-1} \sum_{ij}^4 g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$:

$$\begin{aligned} 2H &= c^2 \dot{t}^2 - kt \left(\dot{\psi}^2 + \sin^2 \psi (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \right), \\ sgrad(H) &= \dot{t} \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \\ &+ \frac{k}{2c^2} \left(-\sin^2 \psi (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - \dot{\psi}^2 \right) \frac{\partial}{\partial \dot{t}} + \left(\frac{\sin 2\psi}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - \frac{\dot{\psi} \dot{t}}{t} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}} + \\ &+ \left(\frac{\dot{\varphi}^2 \sin 2\theta}{2} - 2\dot{\theta} \dot{\psi} \cot \psi - \frac{\dot{\theta} \dot{t}}{t} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} + \left(-2\dot{\varphi} \dot{\theta} \cot \theta - 2\dot{\varphi} \dot{\psi} \cot \psi - \frac{\dot{\varphi} \dot{t}}{t} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} . \end{aligned}$$

Замкнутая 2-форма β на многообразии $M \cong TS^3 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ имеет вырожденные особенности в точках его края — гиперповерхности

$$K = \partial M \cong TS^3 \times \{0\} \times \mathbb{R},$$

определяемой уравнением $t = 0$. В каждой точке $p \in K$ ядро $\mathcal{Z}_p = Ker(\beta_p)$ натянуто на векторы

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\psi}}, \quad \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}, \quad \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} - k \frac{\dot{\psi}}{c^2} \frac{\partial}{\partial \dot{t}}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} - k \frac{\sin^2 \psi \dot{\theta}}{c^2} \frac{\partial}{\partial \dot{t}}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} - k \frac{\sin^2 \psi \sin^2 \theta \dot{\varphi}}{c^2} \frac{\partial}{\partial \dot{t}} .$$

Поле 6-мерных ядер \mathcal{Z}_p касается 7-мерной поверхности K и определяет на ней точную контактную структуру $p \mapsto \mathcal{Z}_p = Ker(\beta_p) = \alpha_p^{-1}(0)$ с контактной 1-формой

$$\alpha = -k \left(\dot{\psi} d\psi + \sin^2 \psi \dot{\theta} d\theta + \sin^2 \psi \sin^2 \theta \dot{\varphi} d\varphi \right) - c^2 dt .$$

Открытое подмножество $M \setminus K$ с 2-формой $\beta = d(t\alpha)$ является симплектическим многообразием, которое канонически симплектоморфно связной компоненте симплектизации (L, Ω) , расположенной с положительной стороны от нулевого сечения Θ . Данный симплектоморфизм однозначно продолжается до сохраняющего 2-форму вложения I многообразия (M, β) в замкнутую симплектизацию $(\bar{L}, \bar{\Omega})$.

Очевидно, что $I(K) = \Theta$. Пусть $(\bar{L}_0, \bar{\Omega}_0)$ есть S -симплектизация многообразия (K, \mathcal{Z}) . Гомеоморфизм I каждой точке $(t, \psi, \theta, \varphi, \dot{t}, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) \in M$ соотносит точку

$$(\chi, \psi, \theta, \varphi, \dot{\chi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) \in \bar{L}_0, \quad t = \chi^2 .$$

Зафиксируем на M индуцированную отображением I^{-1} гладкую структуру подмногообразия \bar{L}_0 и 2-форму $\omega = I^*(\bar{\Omega}_0)$. Тогда замкнутая 2-форма

$$\omega = d(\chi^2 \alpha)$$

обнуляется на гиперповерхности $K = \partial M$, состоящей из контактных точек.

По существу, переход к S -симплектизации сводится в данном случае к замене космического времени t переменной $\chi = \sqrt{t}$, которая пропорциональна т.н. конформному времени, применяемому в космологии. При этом все остальные фазовые координаты, в том числе $\dot{t} = 2\chi\dot{\chi}$, остаются неизменными. Попробуем дать физическую интерпретацию этой, пока еще формальной операции.

Уравнения геодезических при $t > 0$ выглядят так:

$$\begin{aligned} \ddot{t} &= \frac{k}{2c^2} (-\sin^2 \psi (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - \dot{\psi}^2) , & \ddot{\psi} &= \frac{\sin 2\psi}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - \frac{\dot{\psi}\dot{t}}{t} , & (3.23) \\ \ddot{\theta} &= \frac{\dot{\varphi}^2 \sin 2\theta}{2} - 2\dot{\theta}\dot{\psi} \cot \psi - \frac{\dot{\theta}\dot{t}}{t} , & \ddot{\varphi} &= -2\dot{\varphi}\dot{\theta} \cot \theta - 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cot \psi - \frac{\dot{\varphi}\dot{t}}{t} , \end{aligned}$$

где точки обозначают дифференцирование по параметру τ , который на каждой геодезической определен с точностью до постоянной. Функция H является интегралом геодезического потока, в силу чего на каждой геодезической траектории для некоторой константы h тождественно

$$c^2 \dot{t}^2 - kt(\dot{\psi}^2 + \sin^2 \psi (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)) = 2h .$$

Отсюда и из первого уравнения (3.23) следует, что вдоль траектории тождественно:

$$2t\ddot{t} + \dot{t}^2 - 2h/c^2 = 0 .$$

Согласно [18], последнее уравнение интегрируется заменой $\dot{t} = p(t)$, $p^2(t) = u(t)$, в результате которой нетрудно получить следующие уравнения:

$$t\dot{u}(t) + u(t) - \frac{2h}{c^2} = 0, \quad u = \frac{2h}{c^2} + \frac{C_4}{t}, \quad \dot{t} = \sqrt{u} = \sqrt{\frac{2h}{c^2} + \frac{C_4}{t}} .$$

При начальном условии $t(0) = 0$ решение последнего из этих уравнений:

$$\tau = \frac{c}{2h} \sqrt{t(C_4 + 2ht)} + \frac{c \cdot C_4}{(2h)^{3/2}} \ln \frac{\sqrt{C_4}}{\sqrt{C_4 + 2ht} + \sqrt{2ht}} .$$

При $t \rightarrow +0$ заменим уравнение приближенным $\dot{t} = \sqrt{C_4/t}$, откуда:

$$t = C_5 \cdot \tau^{2/3} . \quad (3.24)$$

Можно проверить, что на гиперповерхности $t = 0$ определено гладкое поле предельных при $t \rightarrow +0$, фазовых направлений геодезического потока. Отсюда и из (3.23) следует, что для приближенного вычисления геодезических при достаточно малых $t > 0$ достаточно решить систему уравнений:

$$\ddot{\psi} = -\frac{\dot{\psi}\dot{t}}{t} = -\frac{2}{3\tau}\dot{\psi}, \quad \ddot{\theta} = -\frac{\dot{\theta}\dot{t}}{t} = -\frac{2}{3\tau}\dot{\theta}, \quad \ddot{\varphi} = -\frac{\dot{\varphi}\dot{t}}{t} = -\frac{2}{3\tau}\dot{\varphi} .$$

Здесь мы использовали приближенное равенство (3.24). Отсюда

$$\psi = a\tau^{1/3} + \psi_0, \quad \theta = b\tau^{1/3} + \theta_0, \quad \varphi = c\tau^{1/3} + \varphi_0.$$

Задавая при любом τ_0 и достаточно малом $t_0 > 0$ начальные условия

$$\psi(\tau_0), \theta(\tau_0), \varphi(\tau_0), \dot{\psi}(\tau_0), \dot{\theta}(\tau_0), \dot{\varphi}(\tau_0) ,$$

выражая C_5 через (3.24), получим приближенные уравнения геодезических при малом $t > 0$:

$$\psi = C_1\sqrt{t} + \psi_0, \quad \theta = C_2\sqrt{t} + \theta_0, \quad \varphi = C_3\sqrt{t} + \varphi_0, \quad (3.25)$$

$$C_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{C_5}}, \quad C_2 = \frac{\beta}{\sqrt{C_5}}, \quad C_3 = \frac{\gamma}{\sqrt{C_5}}, \quad C_5 = (3/2)^{2/3} \cdot (C_4)^{1/3} \cdot c^{-2/3} ,$$

$$\alpha = 3\dot{\psi}(\tau_0)\tau_0^{2/3}, \quad \psi_0 = \psi(\tau_0) - \alpha\tau_0^{1/3}$$

$$\beta = 3\dot{\theta}(\tau_0)\tau_0^{2/3}, \quad \theta_0 = \theta(\tau_0) - \beta\tau_0^{1/3}$$

$$\gamma = 3\dot{\varphi}(\tau_0)\tau_0^{2/3}, \quad \varphi_0 = \varphi(\tau_0) - \gamma\tau_0^{1/3} .$$

Эти формулы дают приемлемую точность в периодах времени между несколькими первыми днями и несколькими первыми месяцами после момента $t = 0$.

Из (3.25) можно сделать вывод о том, что в первые месяцы после Большого взрыва свободное движение всех материальных точек было прямолинейным и происходило с уменьшающейся скоростью изменения координат ψ, θ, φ . При $t \rightarrow +0$ эта скорость стремится к бесконечности, однако никакого противоречия со СТО не возникает. Дело в том, что 3-мерная скорость движения свободной материальной точки в гравитационном поле, т.е., вдоль геодезической определяется выражением:

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{\sqrt{kt}(d\psi^2 + \sin^2 \psi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2))^{1/2}}{dt} = \sqrt{kt} \sqrt{\dot{\psi}^2 + \sin^2 \psi(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)} ,$$

где точка обозначает производную по времени t . Из (3.25) следует, что v константа. Поэтому, если начальные условия для определения C_1, C_2, C_3 выбраны корректно, то $v = const < c$ при любом, достаточно малом $t > 0$. Следует пояснить, что геодезические являются прямыми лишь в угловых координатах сферы S_t^3 , с которой мы отождествляем Мир в момент времени t . Однако, поскольку в этих координатах свободное движение материальных точек является прямолинейным, то координаты ψ, θ, φ можно считать декартовыми. Вместо времени t введем переменную

$$\chi = \sqrt{t},$$

которая пропорциональна радиусу Вселенной $R(t)$ и конформному времени. Будем считать ее достаточно малой. Из (3.25) следует, что на любой геодезической координаты ψ, θ, φ можно считать *линейными* функциями χ . Назовем χ *временем просмотра*.

Рассмотрим наглядную модель пространства в начале Большого взрыва, которая отличается от привычного образа расширяющейся сингулярной точки. Рассмотрим стандартную сферу S^3 в пространстве \mathbb{R}^4 . Представим теперь, что эта сфера существует вне всякого объемлющего пространства и пока лишена метрики. Формально мы переходим к многообразию S^3 , на котором почти всюду заданы исходные, угловые координаты ψ, θ, φ . На области существования этих координат зафиксируем евклидову метрику, которая выражается единичной матрицей. Будем считать сферу S^3 неизменно существующей во времени, течение которого измеряется переменной

$$\chi \in [0; \varepsilon)$$

для некоторого, достаточно малого $\varepsilon > 0$. Это означает, что мы рассматриваем плоское пространство-время $S^3 \times [0; \varepsilon)$ и все геодезические линии, определяемые евклидовой метрикой (почти всюду) в S^3 , считаем параметризованными χ . Каждая из геодезических, таким образом, определяется уравнением вида

$$\psi = C_1\chi + \psi_0, \quad \theta = C_2\chi + \theta_0, \quad \varphi = C_3\chi + \varphi_0,$$

которое получается из (3.25) заменой параметра $\chi = \sqrt{t}$. Осталось "оживить" эту модель, которая формально описывает геометрию и распределение материи в пространстве в начальной стадии Большого взрыва.

Предположим, что эволюцию Вселенной фиксирует видеокамера с изменяющейся во времени частотой кадров $n = n(t)$, где

$$n(t) = \frac{n_0}{2\sqrt{t}},$$

и n_0 есть обычная для нас частота кадров. При этом единицу измерения t мы выберем так, чтобы современности отвечало значение $t = 1/4$. Тогда имеем $n(1/4) = n_0$, т.е., фантастическая по своим возможностям камера снимает Мир с начала Большого взрыва до наших дней, при этом $0 < t \leq 1/4$. Скорость съемки бесконечно возрастает при $t \rightarrow +0$, но с течением времени t она убывает. На сегодняшний день эта скорость отвечает обычному значению n_0 частоты кадров. Тогда за малое время $[t; t + dt]$ данная камера сделает N снимков, где

$$N = n(t)dt = \frac{n_0}{2\sqrt{t}}d\chi^2 = \frac{n_0}{2\sqrt{\chi^2}}2\chi d\chi = n_0 d\chi .$$

Таким образом, просматривая полученную видеозапись с частотой кадров n_0 , за время просмотра $[\chi; \chi + d\chi]$ мы увидим все кадры реальных событий, которые были сняты в период времени $[t; t + dt]$. Если он достаточно близок к началу Большого взрыва, то, просматриваемые в записи события, независимо от их физической природы, выглядят происходящими в евклидовом пространстве. Ясно, что заполняющая его в это время материя выглядит распределенной равномерно и однородно.

3.2.4. Контактная связная сумма.

Согласно следствию 6, форма ω канонически определяет на многообразии Θ контактную структуру $\rho \mapsto \Pi_\rho$ (здесь $\omega = 0$ в каждой точке Θ). Согласно предложению 10, $2n - 2$ - мерная плоскость $\Pi_\rho \subset T_\rho\Theta$ натянута на предельные направления всевозможных векторных полей $sgrad(f)$, являющихся бесконечно большими порядка χ^{-2} при $\chi \rightarrow 0$. При этом χ есть любая функция вида (3.22) в окрестности точки ρ . Контактная структура многообразия Θ локально задается 1-формой $\alpha = dx_2 + \sum_j x_{2j-1}dx_{2j}$, где

$$\omega = d\left(\frac{x_1^2}{2}\left(dx_2 + \sum_{j=2}^k x_{2j-1}dx_{2j}\right)\right) .$$

Такие координаты \mathbf{x} , существующие в силу теоремы 3, называются каноническими. Гиперповерхность Θ определяется уравнением $x_1 = 0$. В качестве функции χ всегда можно выбрать координату x_1 и обратно.

Рассмотрим конструкцию (контактно-связной суммы), которая приведет нас к многообразиям с контактно-обнуляющимися симплектическими структурами, в целом не являющимися S - симплектизациями.

Пусть $F : M \rightarrow N$ – гладкое отображение $2n$ - мерного, связного многообразия M в $2n$ - мерное симплектическое многообразие (N, Ω) , где $n > 1$. Предположим, что

для некоторой точки $q_0 \in N$ и некоторой гладкой гиперповерхности $\Theta \subset M$ имеет место:

- 1) $rk(d_p F) = 2n$ в каждой точке $p \in M \setminus \Theta$;
- 2) $F(\Theta) = q_0$;
- 3) $rk(d_p F) = 1$ в каждой точке $p \in \Theta$.

Отображение $F : M \setminus \Theta \rightarrow N \setminus \{q_0\}$ является накрытием. Из условия **2)** вытекает, что $rk(d_p F) \leq 1$ в каждой точке $p \in \Theta$, поэтому условие **3)** выделяет отображения общего положения из тех, которых переводят гиперповерхность Θ в точку q_0 . Предполагая выполненными **1)** и **2)**, рассмотрим замкнутую 2-форму $\omega = F^*(\Omega)$ на M . Ясно, что $\omega = 0$ в каждой точке Θ . Пусть $F(p) = q$ и в окрестностях U, V точек p, q заданы координаты x, y . Легко проверить, что

$$Pf(\omega_p) = \pm \det(\partial y / \partial x) Pf(\Omega_q) .$$

Отсюда следует невырожденность ω на $M \setminus \Theta$. В силу леммы 3 все производные функции $Pf(\omega)(x)$, порядков от 0 до $2n-2$ включительно, равны нулю на $U \cap \Theta$. Если $rk(d_p F) = 0$, то легко видеть, что на $U \cap \Theta$ равны нулю и все производные $Pf(\omega)(x)$ порядка $2n-1$. Последнее несовместимо с контактностью точки p , поэтому условие **3)** необходимо для того, чтобы форма ω могла иметь контактные вырождения.

Подведем итог. Любое гладкое отображение многообразия M в симплектическое многообразие N , переводящее некоторую гиперповерхность $\Theta \subset M$ в точку и являющееся накрытием на $M \setminus \Theta$, определяет на M замкнутую 2-форму ω , которая невырождена на $M \setminus \Theta$ и равна нулю на Θ . Точка $p \in \Theta$ может быть контактной только в случае максимальности ранга $d_p F$, т.е. если $rk(d_p F) = 1$.

Пусть $2n > 2$. Рассмотрим шар $D^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n}$, который определяется неравенством $x_1^2 + \dots + x_{2n}^2 \leq 1$, и отображение

$$F_0 : S^{2n-1} \times [-1; 1] \rightarrow D^{2n}, \quad (s, t) \xrightarrow{F_0} st ,$$

где $s \in S^{2n-1} = \partial D^{2n}$ и $t \in [-1; 1]$. Введем в \mathbb{R}^{2n} сферические координаты

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{2n-3} \cos \theta_{2n-2} \cos \varphi \\ x_2 = r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{2n-3} \cos \theta_{2n-2} \sin \varphi \\ x_3 = r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{2n-3} \sin \theta_{2n-2} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_{2n-1} = r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ x_{2n} = r \sin \theta_1, \end{array} \right.$$

где $-\pi/2 < \theta_i < \pi/2$ и $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Если в этих формулах заменить символ r на t , то получится координатная запись отображения F_0 цилиндра $S^{2n-1} \times [-1; 1]$ на шар D^{2n} . Его гладкость очевидна. Обозначим Θ сферу $S^{2n-1} \times \{0\}$, тогда $F_0(\Theta) = 0$ и легко проверить, что для отображения $F = F_0$ выполнено каждое из условий **1)**, **2)**, **3)**. Пусть на шаре D^{2n} задана симплектическая 2-форма Ω и $\omega = F_0^*(\Omega)$. Поскольку в координатах $(t, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{2n-2})$ и x якобиан отображения F_0 равен

$$t^{2n-1} \cos^{2n-2} \theta_1 \cdot \dots \cdot \cos \theta_{2n-2} ,$$

то при $t \rightarrow 0$ пфаффиан $Pf(\omega)$ имеет порядок t^{2n-1} . Это влечет за собой контактность каждой точки гиперповерхности $\Theta \cong S^{2n-1}$.

Заметим, что на связной сумме $N_1 \# N_2$ симплектических многообразий (N_1, Ω_1) и (N_2, Ω_2) размерности $2n > 2$ нельзя задать симплектическую структуру, согласованную с Ω_1 и Ω_2 . В противном случае, склеивая между собой некоторые два шара $D_k^{2n} \subset N_k$, можно было бы определить симплектическую структуру на сфере S^{2n} , что невозможно в силу $\mathbf{H}^2(S^{2n}, \mathbb{R}) = 0$. Существующие конструкции позволяют, при некоторых условиях, задать согласованную симплектическую структуру на т.н. расслоенной сумме, для образования которой из склеиваемых многообразий удаляют нормальные окрестности подмногообразий четной коразмерности [63].

Отображение F_0 можно использовать для определения на связной сумме $N_1 \# N_2$ симплектической структуры ω с контактными особенностями, согласованной с формами Ω_1 и Ω_2 за пределами бесконечно-малой окрестности сферы $S^{2n-1} \cong \partial D_k^{2n}$, по которой подмногообразия $N_k \setminus \text{int}(D_k^{2n})$ склеиваются в связную сумму $N_1 \# N_2$, где $1 \leq k \leq 2$. Пусть D^{2n} – стандартный единичный шар в $\mathbb{R}^{2n}(x)$, на котором фиксирована симплектическая структура $\Omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{n+i}$.

Определение 5 Пусть $1 \leq k \leq 2$ и (N_k, Ω_k) – связные симплектические многообразия размерности $2n \geq 2$. Для каждого k выберем произвольную пару замкнутых шаров D_k^{2n} и \overline{D}_k^{2n} , так что

$$D_k^{2n} \subset \text{int}(\overline{D}_k^{2n}) \subset N_k$$

и существуют симплектоморфизмы $f_k : \overline{D}_k^{2n} \rightarrow D^{2n}$. Удалим из каждого N_k открытый шар $\text{int}(\overline{D}_k^{2n})$ и гладко приклеим цилиндр $S^{2n-1} \times [-1; 1]$, отождествляя сферы

$$S^{2n-1} \times \{-1\} = \partial \overline{D}_1^{2n} \quad \text{и} \quad S^{2n-1} \times \{1\} = \partial \overline{D}_2^{2n} .$$

Приклеивание цилиндра выполним так, что для любых $s \in S^{2n-1}$ и $t \in [-1; -1/2] \cup [1/2; 1]$ точка (s, t) отождествляется с точкой

$$\begin{cases} f_1^{-1}(F_0(s, t)) & \text{при } -1 \leq t \leq -1/2 \\ f_2^{-1}(F_0(s, t)) & \text{при } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

Получим многообразие M , на котором корректно определена такая гладкая, замкнутая 2-форма ω , что

$$\omega|_{N_k \setminus \bar{D}_k^{2n}} = \Omega_k|_{N_k \setminus \bar{D}_k^{2n}} , \quad \omega|_{S^{2n-1} \times [-1; 1]} = F_0^*(\Omega) .$$

Пара (M, ω) называется контактно-связной суммой симплектических многообразий (N_k, Ω_k) и обозначается $(N_1 \#_0 N_2, \Omega_1 \#_0 \Omega_2)$.

В силу теоремы Дарбу симплектоморфизмы f_k существуют. Цилиндр $S^{2n-1} \times [-1; 1]$ приклеивается так, что

$$\begin{aligned} S^{2n-1} \times [-1; -1/2] &= \bar{D}_1^{2n} \setminus \text{int}(D_1^{2n}), & S^{2n-1} \times \{-1/2\} &= \partial D_1^{2n}, \\ S^{2n-1} \times [1/2; 1] &= \bar{D}_2^{2n} \setminus \text{int}(D_2^{2n}), & S^{2n-1} \times \{1/2\} &= \partial D_2^{2n}. \end{aligned}$$

На каждой из двух связных компонент подмногообразия

$$M \setminus (S^{2n-1} \times [-1/2; 1/2])$$

форма ω совпадает с Ω_1 или Ω_2 . С точки зрения топологии операция $N_1 \#_0 N_2$ является приклеиванием ручки индекса 1 к несвязному объединению $N_1 \cup N_2$, т.е. образованием связной суммы $N_1 \# N_2$ (рис. 10). Пусть

$$\Theta = S^{2n-1} \times \{0\} \subset M = N_1 \#_0 N_2 .$$

Замкнутая 2-форма ω невырождена на $M \setminus \Theta$ и равна нулю на гиперповерхности Θ . Все точки Θ , как мы видели при рассмотрении отображения F_0 , являются контактными относительно ω \square .

Замечание 3 Для любых компактных, симплектических многообразий (N_1, Ω_1) и (N_2, Ω_2) симплектическое многообразие с контактными особенностями $(N_1 \#_0 N_2, \Omega_1 \#_0 \Omega_2)$ не является S -симплектизацией ни для какого контактного многообразия.

Доказательство. Связная сумма компактных многообразий является компактной, а S -симплектизация, очевидно, порождает только некомпактные многообразия.

§ 3.3. Гамильтоновы системы.

3.3.1. Предельные положения.

Вспомним, что $[v]_+ = \cup_{\lambda>0} \lambda v$ есть направление вектора $v \neq 0$. При этом прямая $\cup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda v\}$ обозначается $[v]$. Линейную оболочку векторов v_1, \dots, v_m , соответственно, мы обозначаем $[v_1, \dots, v_m]$. Если l_1, \dots, l_s есть векторы, направления или прямые, то $[l_1, \dots, l_s]$ есть минимальное линейное подпространство L , инцидентное всем l_j .

В определении 2 из п. 1.2.2 было введено понятие несобственного предельного положения. Следующее определение позволяет, в определенной мере, различать предельные направления по порядкам отвечающих им, бесконечно больших последовательностей $sgrad(f)(y_n)$, где $y_n \rightarrow \rho \in \Theta$.

Определение 6 Пусть на симплектическом многообразии с особенностью (M, ω) задана гладкая функция f , и точка ρ лежит в Θ . Предположим, что некоторое направление $l_\rho^+ \subset T_\rho M$ есть несобственное предельное положение $sgrad(f)$ в точке ρ , и вблизи ρ множество Θ является гладкой гиперповерхностью.

Будем говорить, что направление l_ρ^+ имеет квази-порядок $\delta > 0$, если для некоторой, сходящейся к ρ последовательности точек $y_n \in M \setminus \Theta$ имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi^\delta(y_n) sgrad(f)(y_n) = v \neq 0, \quad l_\rho^+ = [v]_+ = \lim_{n \rightarrow \infty} [sgrad(f)(y_n)]_+,$$

где $\chi(y)$ есть расстояние от точки y до гиперповерхности Θ в произвольной римановой метрике.

Заметим, что для любого $\delta' < \delta$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi^{\delta'}(y_n) |sgrad(f)(y_n)| = +\infty.$$

Одно предельное положение $l_\rho^+ \subset T_\rho M$, вообще говоря, может иметь различные квази-порядки δ , которые связаны с различными способами приближения к точке ρ . Этим обстоятельством обусловлен термин *квази-порядок*, хотя речь идет, в сущности, о порядке бесконечно большой величины. Из (3.26) следует, что в контактной точке $\rho \in \Theta$ нет несобственных предельных положений квази-порядков $\delta > 2$.

Определение 7 Пусть на симплектическом многообразии с особенностью (M, ω) задана гладкая функция f , и точка ρ лежит в множестве Θ .

1. Если существует $\lim_{\Theta \ni y \rightarrow \rho} sgrad(f)(y) = w \in T_\rho M$, то вектор w обозначается $sgrad(f)(\rho)$ и называется *косым градиентом f в ρ* .

2. Если при $\lim_{\Theta \ni y \rightarrow \rho} |sgrad(f)(y)| = +\infty$ существует

$$\lim_{\Theta \ni y \rightarrow \rho} [sgrad(f)(y)]_+ = l_\rho^+ \subset T_\rho M ,$$

то несобственное предельное положение l_ρ^+ обозначается $sgrad^\infty(f)(\rho)$.

3. Если при $\lim_{\Theta \ni y \rightarrow \rho} |sgrad(f)(y)| = +\infty$ найдется шаровая окрестность O точки ρ , разделяемая гиперповерхностью $O \cap \Theta$ на два открытых полушария O^+ и O^- , и существуют противоположные пределы

$$\lim_{O^+ \ni y \rightarrow \rho} [sgrad(f)(y)]_+, \quad \lim_{O^- \ni y \rightarrow \rho} [sgrad(f)(y)]_+ ,$$

то каждое из этих двух направлений в $T_\rho M$ обозначается $sgrad_\pm^\infty(f)(\rho)$.

Из теоремы 3 следует, что в окрестности контактной точки $\rho \in \Theta$ гамильтонова система $sgrad(f)$, рассматриваемая на множестве $M \setminus \Theta$, приводится к виду:

$$\left(\begin{array}{l} \dot{x}_1 = -\frac{1}{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{2}{x_1^2} \left(x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_5 \frac{\partial f}{\partial x_5} + \dots + x_{2k-1} \frac{\partial f}{\partial x_{2k-1}} \right) \\ \dot{x}_{2j+1} = \frac{2}{x_1^2} \left(x_{2j+1} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_{2j+2}} \right), \\ \dot{x}_{2j+2} = \frac{2}{x_1^2} \frac{\partial f}{\partial x_{2j+1}} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \\ 1 \leq i \leq n-k, \quad 1 \leq j \leq k-1. \end{array} \right) \quad (3.26)$$

Заменой единственной координаты вида

$$\tilde{x}_2 = x_2 + \sum_{j=2}^n x_{2j-1} x_{2j} + F(x_1)$$

эта система приводится к виду:

$$\left(\begin{array}{l} \dot{x}_1 = -\frac{1}{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{2}{x_1^2} \left(x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} + x_6 \frac{\partial f}{\partial x_6} + \dots + x_{2k} \frac{\partial f}{\partial x_{2k}} \right) \\ \dot{x}_{2j+1} = -\frac{2}{x_1^2} \frac{\partial f}{\partial x_{2j+2}} \\ \dot{x}_{2j+2} = \frac{2}{x_1^2} \left(-x_{2j+2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_{2j+1}} \right) \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial f}{\partial p_i} \end{array} \right) .$$

Если все особые точки являются контактными, то условие $df(\mathcal{Z}_\rho) \equiv 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы гамильтоново поле $sgrad(f)$ было

корректно определено на всем многообразии M (теорема 1). Тогда в канонических координатах $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$, заданных в окрестности $\rho \in \Theta$, в произвольной особой точке вектор $v = sgrad(f)(x)$ имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} v^1 &= -\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ v^2 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - 2 \left(x_3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_3} + x_5 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_5} + \dots + x_{2k-1} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_{2k-1}} \right) \\ v^{2j+1} &= 2 \left(x_{2j+1} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_{2j+2}} \right) \\ v^{2j+2} &= 2 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_{2j+1}} \\ v^{2k+2i-1} &= -\frac{\partial f}{\partial q_i} \\ v^{2k+2i} &= \frac{\partial f}{\partial p_i}, \end{aligned}$$

или, соответственно,

$$\begin{aligned} v^1 &= -\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ v^2 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2 \left(x_4 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_4} + x_6 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_6} + \dots + x_{2k} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_{2k}} \right) \\ v^{2j+1} &= -2 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_{2j+2}} \\ v^{2j+2} &= 2 \left(-x_{2j+2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_{2j+1}} \right) \\ v^{2k+2i-1} &= -\frac{\partial f}{\partial q_i} \\ v^{2k+2i} &= \frac{\partial f}{\partial p_i}, \\ 1 \leq i \leq n-k, \quad 1 \leq j \leq k-1. \end{aligned}$$

Пример 6. Пусть v_f есть контактное векторное поле на контактном многообразии K (см. § 1.1) и $(\bar{L}_0, \bar{\Omega}_0)$ есть S -симплектизация K (определение 4). Тогда из (3.26) следует, что

$$v_f = \lim_{\chi \rightarrow 0} sgrad(\chi^2 f/2),$$

где функция χ удовлетворяет условию $\chi(\Theta) = 0$, $d_\rho \chi \neq 0 \forall \rho \in \Theta$. Контактный гамильтониан f рассматривается, как функция на \bar{L}_0 , которая постоянна на слоях канонической проекции $\pi : \bar{L}_0 \rightarrow \Theta \cong K$. Поле $sgrad(\chi^2 f/2)$ корректно определено на всем многообразии \bar{L}_0 \square .

Если вблизи контактной точки условие $df(\mathcal{Z}_\rho) \equiv 0$ не выполняется, то предельное поведение поля $sgrad(f)$ может быть хаотичным. Но при некотором условии, которое является свойством общего положения функций f на M , поток $sgrad(f)$ в пределе остается "ламинарным", хотя его фазовая скорость обращается в бесконечность.

Теорема 6 Пусть $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k \geq 4$ и f есть гладкая функция на некоторой окрестности контактной точки $\rho \in \Theta$, удовлетворяющая условию

$$df(\Pi_\rho) \neq 0.$$

Тогда найдется такая окрестность O точки ρ , что $\forall y \in O \cap \Theta$ поле $sgrad(f)$ имеет только одно предельное положение в точке y . Оно инцидентно $2k - 3$ мерной плоскости $\Pi_y \cap \mathcal{H}_y(f)$ и является несобственным квази-порядка 2. При этом на множестве O определено гладкое поле направлений, продолжающее поле направлений потока $sgrad(f)$ и включающее в себя его предельные положения в точках $O \cap \Theta$.

Доказательство. В окрестности O точки ρ введем канонические координаты $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$, в которых $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q})(\rho) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$. Плоскость Π_ρ натянута на векторы

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(\rho), \quad \frac{\partial}{\partial x_4}(\rho), \quad \dots, \quad \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}}(\rho), \quad \frac{\partial}{\partial x_{2k}}(\rho).$$

Из (3.26) следует, что несобственное предельное направление $sgrad(f)$ в точке ρ определяется вектором с компонентами:

$$\begin{aligned} v^1 &= 0, & v^2 &= 0 \\ v^{2j+1} &= -\frac{\partial f}{\partial x_{2j+2}} \\ v^{2j+2} &= \frac{\partial f}{\partial x_{2j+1}} \\ v^{2k+2i-1} &= 0, & v^{2k+2i} &= 0, \end{aligned}$$

$$1 \leq i \leq n - k, \quad 1 \leq j \leq k - 1 \quad \square.$$

Таким образом, в условиях теоремы 6 существует $sgrad^\infty(f)(\rho)$ (определение 7). В координатах (x_3, \dots, x_{2k}) полученный выше вектор v выглядит, как косой градиент функции $\partial^2 f / \partial x_1^2$, вычисленный относительно симплектической структуры

$$\sum_{j=1}^{k-1} dx_{2j+1} \wedge dx_{2j+2}.$$

Замечание 4 В условиях теоремы 6 в произвольных координатах $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n}$, для некоторой окрестности $O(\rho) \ni \rho$ отвечающих условию $z_1(\Theta \cap O(\rho)) = 0$, направление $sgrad^\infty(f)(\rho)$ в точке ρ определяется ненулевым вектором

$$\frac{\partial^{2k-3} \mathbf{F}}{\partial z_1^{2k-3}}(\rho), \quad \text{где } \mathbf{F}(\mathbf{z}) = Pf(\omega) sgrad(f) = \pm \sqrt{\det \omega} \cdot sgrad(f).$$

Доказательство. В канонических координатах $Pf(\omega)(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = x_1^{2k-1} / 2^{k-1}$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = Pf(\omega) sgrad(f) = \frac{x_1^{2k-1}}{2^{k-1}} sgrad(f)(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Из (3.26) следует, что все производные функции \mathbf{F} , порядка от 0 до $2k - 4$ включительно, тождественно равны нулю при $x_1 = 0$. При этом $\partial^{2k-3} \mathbf{F} / \partial x_1^{2k-3} \neq 0$

и, как легко понять, из всех производных порядка $2k - 3$ только эта отлична от нуля. То же самое имеет место в координатах \mathbf{z} , если $z_1(\Theta \cap O(\rho)) = 0$ для некоторой окрестности $O(\rho)$ точки ρ . Можно считать, что $\mathbf{z}(\rho) = \mathbf{0}$. Используем формулу Тейлора с остаточным членом:

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \frac{\partial^{2k-3}\mathbf{F}(\mathbf{0})}{\partial z_1^{2k-3}} \frac{z_1^{2k-3}}{(2k-3)!} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial^{2k-2}\mathbf{F}(\theta\mathbf{z})}{\partial z_1^{2k-3}\partial z_j} \frac{z_1^{2k-3}z_j}{(2k-2)!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Из леммы 3 и определения 1 следует, что при $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}$ пфафффиан $Pf(\omega_{\mathbf{z}})$ имеет порядок z_1^{2k-1} . Отсюда, вычисляя предельное направление $sgrad(f)$ в точке ρ , получим:

$$\begin{aligned} \lim_{\Theta \ni y \rightarrow \rho} [sgrad(f)(y)]_+ &= \lim_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}, z_1 \neq 0} \left[\frac{\mathbf{F}(\mathbf{z})}{Pf(\omega_{\mathbf{z}})} \right]_+ = \lim_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}, z_1 \neq 0} \left[\frac{\mathbf{F}(\mathbf{z})}{z_1^{2k-1}} \right]_+ = \\ &= \lim_{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}, z_1 \neq 0} \left[\frac{1}{z_1^2} \left(\frac{\mathbf{F}(\mathbf{z})}{z_1^{2k-3}} \right) \right]_+ = sgrad^\infty(f)(\rho). \end{aligned}$$

При $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}$ вектор $\mathbf{F}(\mathbf{z})/z_1^{2k-3}$ стремится к вектору $\partial^{2k-3}\mathbf{F}(\mathbf{0})/\partial z_1^{2k-3}$, который задает несобственное предельное положение $sgrad(f)$ в точке ρ \square .

Пример 7. Рассмотрим уравнение в частных производных 1-го порядка

$$f\left(u, \frac{\partial u}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n\right) = 0 \quad (n > 1)$$

относительно неизвестной функции $u(q_1, \dots, q_n)$. Частные решения этого уравнения являются лежандровыми подмногообразиями в контактном пространстве 1-струй

$$K = J^1\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n+1},$$

снабженном контактной формой $\theta = du - \sum_i p_i dq_i$ [4]. Поднимем функцию f с $K \cong K'$ на замкнутую симплектизацию \bar{L} . Тогда выполнены все условия теоремы 6, и характеристики данного уравнения являются интегральными кривыми 1-мерного распределения, образованного несобственными предельными положениями поля $sgrad(f)$ \square .

Дадим геометрическое толкование $2k - 2$ мерным подпространствам Π_ρ из теоремы 6. Напомним, что они определяют каноническую контактную структуру на каждом интегральном многообразии $2k - 1$ мерного, интегрируемого распределения, которое ядра формы ω высекают на особой поверхности Θ . Пусть χ есть любая гладкая функция в некоторой окрестности U контактной точки $\rho \in \Theta$, удовлетворяющая условиям

$$\chi(S) = 0, \quad d_\rho\chi \neq 0 \quad \forall \rho \in S, \quad S = U \cap \Theta.$$

Произвольное, несобственное предельное положение $\mathbb{R}_+v \subset T_\rho M$ поля $sgrad(f)$ в точке ρ определяется некоторой последовательностью $y_n \notin \Theta$, $y_n \rightarrow \rho$, так что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [sgrad(f)(y_n)]_+ = [v]_+, \quad v \neq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |sgrad(f)(y_n)| = +\infty,$$

где $|\cdot|$ обозначает длину вектора в произвольной римановой метрике. Последнее условие de facto означает обращение в бесконечность хотя бы одной из координат вектора $sgrad(f)$ в точке ρ . Из (3.26) видно, что существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi^2(y_n) \cdot sgrad(f)(y_n) = v,$$

который отличен от нуля если и только если отлична от нуля хотя бы одна из величин $\partial f / \partial x_j$ в точке ρ , где $3 \leq j \leq 2n$, т.е. при условии $df(\Pi_\rho) \neq 0$. В противном случае $v = 0$ и последовательность $|sgrad(f)(y_n)|$ является бесконечно большой порядка ниже $\chi^{-2}(y_n)$ или даже ограниченной. Подведем итог наших рассуждений.

Предложение 10 *В контактной точке $\rho \in \Theta$, в которой $\dim \mathcal{Z}_\rho > 2$, пространство Π_ρ натянуто на несобственные предельные положения всевозможных косых градиентов, являющихся бесконечно большими порядка χ^{-2} при $y \rightarrow \rho$, $y \notin \Theta$, где χ есть расстояние до особой поверхности Θ в произвольной римановой метрике (заданной на M или вблизи точки ρ).*

Очевидно, что функции общего положения удовлетворяют условию

$$df(\mathcal{Z}_\rho \cap T_\rho \Theta) = 0$$

разве лишь в точках подмножества нулевой меры в Θ . Для этих функций теорема 6 дает исчерпывающее описание поведения потока $sgrad(f)$ в особых точках, составляющих плотное и открытое в Θ подмножество. Такое поведение потока, следовательно, является типичным. В окрестности контактной точки, в которой $\dim Ker(\omega) > 2$, типичный поток $sgrad(f)$ имеет гладкое поле направлений и с бесконечно большой скоростью обтекает гиперповерхность Θ .

Предложение 11 *Пусть на симплектическом многообразии с особенностями M , все особые точки которого являются контактными, задана гладкая функция f . Предположим, что для некоторого $k > 1$ в каждой точке $x \in \Theta$ имеет место $\dim \mathcal{Z}_x = 2k$ и $df(\Pi_x) = 0$.*

Тогда функция f постоянна на интегральных многообразиях $2k - 1$ мерного, интегрируемого распределения

$$Z_0 : \Theta \ni x \longmapsto \mathcal{Z}_x \cap T_x \Theta.$$

Доказательство. По лемме 1 § 1.2 распределение Z_0 действительно является интегрируемым. Так как $df(\Pi_x) = 0$ в точке $x \in \Theta$, то $\Pi_x \subset \mathcal{H}_x(f)$, следовательно

$$\Pi_x \subset \mathcal{H}_x(f) \cap \mathcal{Z}_x \cap T_x\Theta = P_x.$$

Заметим, что $\mathcal{Z}_x \cap T_x\Theta$ есть касательная плоскость T_xS_x к интегральному многообразию S_x распределения Z_0 , проходящему через точку x .

$$\text{Если } df(T_xS_x) \neq 0, \text{ то } \dim P_x = 2k - 2, \quad \Pi_x = P_x.$$

Тогда это имеет место в каждой особой точке y , достаточно близкой к x . Следовательно Π_y – это касательные плоскости к $2k - 2$ мерным подмногообразиям, которые являются трансверсальными пересечениями многообразий S_y с поверхностями уровня функции f . Это противоречит неинтегрируемости распределения $y \mapsto \Pi_y$. Итак $df(\mathcal{Z}_x \cap T_x\Theta) = 0$ в каждой точке $x \in \Theta$ \square .

Следствие 7 *Если в условиях предложения 11 имеет место $\dim M = \dim \mathcal{Z}_x$, то условию $df(\Pi_x) \equiv 0$ удовлетворяют те и только те функции f , которые постоянны на гиперповерхности Θ .*

Рассмотрим вопрос о предельном поведении косых градиентов таких "неправильных" функций. В типичном случае оно также оказывается "правильным".

Предложение 12 *Для любой функции f , в некоторой окрестности U контактной точки ρ удовлетворяющей условию*

$$\forall y \in U \cap \Theta \quad df(\Pi_y) = 0, \quad df(\mathcal{Z}_y) \neq 0,$$

на некоторой окрестности $O(\rho) \subset U$ определено такое гладкое поле прямых l_y , что

$$l_y = [sgrad(f)(y)] \quad \forall y \in O(\rho) \setminus \Theta, \quad sgrad_{\pm}^{\infty}(f) \subset l_y \quad \forall y \in O(\rho) \cap \Theta.$$

Каждое из предельных положений $sgrad_{\pm}^{\infty}(f)$ имеет квази-порядок 1.

Доказательство. Функцию χ (расстояние до Θ) можно принять за x_1 . Умножим поле (3.26) на x_1 и перейдем к пределу. Учитывая, что $\partial f / \partial x_2 = 0$ в каждой точке $y \in U \cap \Theta$, получим искомые предельные направления

$$\pm \left(0, \frac{\partial f}{\partial x_1}, -2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_4 \partial x_1}, 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}, \dots, -2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2k} \partial x_1}, 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_{2k-1} \partial x_1}, 0, \dots, 0 \right) \square.$$

При условиях предложения 12, в шаровой окрестности ρ поток $sgrad(f)$ с бесконечной скоростью обтекает гиперповерхность Θ в двух встречных направлениях, (локально) отвечающих двум сторонам Θ .

Для функций, не удовлетворяющих условиям теоремы 6 и предложения 12, предельное поведение поля $sgrad(f)$ в контактной точке ρ может быть хаотичным. В случае $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2$ типичная ситуация такого хаоса описана в предложении 2 § 1.2 (см. также пример 2 к предложению 2).

Заметим, что в случае $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2$ при $df(\mathcal{Z}_\rho) \neq 0$ условие контактности точки ρ не требуется (теорема 4 § 1.2), и даже замкнутость формы ω может не иметь места. Тогда в шаровой окрестности точки ρ поток $sgrad(f)$ с бесконечной скоростью обтекает гиперповерхность Θ в двух встречных направлениях, (локально) отвечающих двум сторонам Θ (следствие 1, § 1.2).

3.3.2. Теорема Лиувилля.

Вернемся к интегрируемым гамильтоновым системам на симплектических многообразиях с особенностями. При условии контактности вырождений формы ω в интегрируемом случае получены результаты, близкие к классической теореме Лиувилля.

Предложение 13 Пусть (M^{2n}, ω) есть симплектическое многообразие с особенностью. Если для некоторого, связного, n -мерного подмногообразия $S \subset \Theta$ форма $\omega|_S$ равна нулю, то

$$\forall y \in S, \quad \dim T_y S \cap \mathcal{Z}_y \geq k = \frac{1}{2} \dim \mathcal{Z}_y .$$

Доказательство. Пусть $\rho \in S$ и $\dim T_\rho S \cap \mathcal{Z}_\rho = s$. Выберем такой базис e_1, \dots, e_{2n} пространства $T_\rho M^{2n}$, что векторы e_1, \dots, e_{2k} лежат в \mathcal{Z}_ρ , а векторы $e_{2k+1}, \dots, e_{2k+n-s}$ лежат в $T_\rho S \setminus \mathcal{Z}_\rho$. В этом базисе матрица ω состоит из нулей, за исключением правой-нижней подматрицы размера $(2n - 2k) \times (2n - 2k)$. Эта подматрица, в свою очередь, в левом-верхнем углу имеет нулевую подматрицу размера $(n - s) \times (n - s)$ и является невырожденной. Последнее невозможно, если $n - s > n - k$, следовательно $s \geq k$ \square .

Размерность подпространства $T_\rho T_0^n \cap \mathcal{Z}_\rho$ может быть больше k , но она не может быть меньше k (предложение 13). При любом, достаточном малом смещении точки $\rho \in T_0^n$ число $\dim T_\rho S \cap \mathcal{Z}_\rho$ не может увеличиться. Поэтому в теореме 7 описан случай общего положения. Следуя работе [59], удобно определить интегрируемую систему через пуассоново действие.

Теорема 7 Пусть на симплектическом многообразии с особенностью (M^{2n}, ω) заданы гладкие функции f_1, \dots, f_n , определяющие нерезонансное, пуассоново действие группы \mathbb{R}^n на симплектическом многообразии $(M^{2n} \setminus \Theta, \omega)$. Предположим, что образ Θ относительно отображения момента $\mathcal{F} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет меру ноль, и некоторый тор Лиувилля $T_0^n \subset \Theta$ состоит из контактных точек y , в которых

$$\dim T_y T_0^n \cap \mathcal{Z}_y = k, \quad \dim \mathcal{Z}_y = 2k \geq 2 .$$

Тогда на некоторой окрестности U тора T_0^n определены такие функции F_1, \dots, F_n , являющиеся интегралами на $U \setminus \Theta$, что $\Theta \cap U = F_1^{-1}(0)$ и ковекторы dF_1, \dots, dF_n линейно независимы на U . При этом поле прямых $[sgrad(F_1)]$, поля направлений $[sgrad(F_\alpha)]_+$ и векторные поля $sgrad(F_i)$ гладко продолжаются с $U \setminus \Theta$ на все множество U , где $2 \leq \alpha \leq k$ и $k+1 \leq i \leq n$. Для любого тора Лиувилля $T^n \subset U \cap \Theta$ в каждой точке $\rho \in T^n$ имеет место

$$\begin{aligned} T_\rho T^n &= (\mathcal{Z}_\rho \cap T_\rho T^n) \oplus [sgrad(F_{k+1})(\rho), \dots, sgrad(F_n)(\rho)] , \\ \mathcal{Z}_\rho \cap T_\rho T^n &= [sgrad_\pm^\infty(F_1)(\rho), sgrad^\infty(F_2)(\rho), \dots, sgrad^\infty(F_k)(\rho)] . \end{aligned}$$

При этом интегральные траектории полей $sgrad(F_i)$ и интегральные кривые распределений $[sgrad_\pm^\infty(F_1)]$, $[sgrad^\infty(F_\alpha)]$ являются квазипериодическими обмотками относительно некоторых угловых координат, гладко зависящих от тора $T^n \subset U$; при $k > 1$ в каждой точке $\rho \in T^n$ имеет место

$$\Pi_\rho \cap T_\rho T^n = [sgrad^\infty(F_2)(\rho), \dots, sgrad^\infty(F_k)(\rho)] ,$$

где Π_ρ есть плоскость канонической контактной структуры на любом, проходящем через точку ρ интегральном многообразии интегрируемого, $2k-1$ мерного распределения $y \mapsto \mathcal{Z}_y \cap T_y \Theta$, определенного на гиперповерхности $U \cap \Theta$.

Интегралы F_i могут быть явно выражены формулами (3.27), и в этом случае все интегральные траектории полей $sgrad(F_i)$ являются 2π -периодическими.

Доказательство. На некоторой окрестности U тора T_0^n существует интеграл F_1 , который равен нулю и имеет ненулевой дифференциал в каждой точке $U \cap \Theta$ (предложение 4 § 2.2). Одну из функций f_1, \dots, f_n заменим на F_1 , а остальные перенумеруем так, что набор независимых на U , коммутирующих интегралов теперь имеет вид F_1, f_2, \dots, f_n .

Лемма 5 На некоторой окрестности $O(\rho)$ точки $\rho \in T_0^n$ существуют набор независимых интегралов F_1, \dots, F_n , функционально выражающихся через f_1, \dots, f_n ,

и такие канонические координаты $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^{n-k}$, что:

$$x_1 = F_1|_{O(\rho)}, \quad p_{i-k} = F_i, \quad x_{2\alpha-1} = F_\alpha, \quad 2 \leq \alpha \leq k, \quad k+1 \leq i \leq n.$$

Доказательство. Сначала пусть $k = n$. Интегралы f_2, \dots, f_n переобозначим F_2, \dots, F_n . Пусть роль координаты x_1 играет функция F_1 . На некоторой окрестности $O(\rho)$ она включается в такой набор канонических координат x_1, \dots, x_{2n} , что гамильтонов поток любой функции (локально) определяется системой уравнений

$$\left(\begin{array}{l} \dot{x}_1 = -\frac{1}{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{2}{x_1^2} \left(x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_5 \frac{\partial f}{\partial x_5} + \dots + x_{2k-1} \frac{\partial f}{\partial x_{2k-1}} \right) \\ \dot{x}_{2j+1} = \frac{2}{x_1^2} \left(x_{2j+1} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_{2j+2}} \right), \\ \dot{x}_{2j+2} = \frac{2}{x_1^2} \frac{\partial f}{\partial x_{2j+1}} \quad (1 \leq j \leq n-1). \end{array} \right)$$

При этом для любой точки $y \in O(\rho) \cap \Theta$ координаты \mathbf{x} можно выбрать так, чтобы имело место $\mathbf{x}(y) = \mathbf{0}$. Тогда в точке y имеет место:

$$sgrad(x_1^2 F_\alpha / 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ -\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_{2j+2}} \\ \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_{2j+1}} \\ \dots \end{pmatrix}, \quad sgrad(x_1^2 / 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Таким образом, векторные поля $v_\alpha = sgrad(x_1^2 F_\alpha / 2)$ и $v_1 = sgrad(x_1^2 / 2)$ корректно определены и, в совокупности, линейно независимы на $O(\rho)$. В любой точке эти поля касаются проходящей через нее гиперповерхности $F_1 = const$. Поскольку каждое из них сохраняет функцию $x_1 = F_1|_{O(\rho)}$, поля коммутируют между собой. В любой точке множества $O(\rho)$ эти поля касаются проходящего через нее тора Лиувилля. Ясно, что на $O(\rho)$ существуют координаты $(x_1, \theta_1, F_2, \theta_2, \dots, F_\alpha, \theta_\alpha, \dots, F_n, \theta_n)$, относительно которых каждая координатная линия θ_s в каждой точке имеет вектор скорости v_s , где $1 \leq s \leq n$. Далее,

$$\omega(\partial / \partial F_s, v_\alpha) = x_1 F_\alpha \frac{\partial x_1}{\partial F_s} + \frac{x_1^2}{2} \frac{\partial F_\alpha}{\partial F_s}, \quad \omega(\partial / \partial F_s, v_1) = x_1 \frac{\partial x_1}{\partial F_s}.$$

На любой гиперповерхности $x_1 = const$ при $1 < \alpha, \beta \leq n$

$$d\mu(\partial / \partial F_\beta, v_\alpha) = \delta_{\beta\alpha}, \quad d\mu(\partial / \partial F_\beta, v_1) = 0,$$

где (в силу леммы 1 § 3.1) форма $d\mu$ на множестве $O(\rho)$ определяется уравнением

$$\omega = d(F_1^2\mu/2) = F_1 dF_1 \wedge \mu + F_1^2 d\mu/2 = x_1 dx_1 \wedge \mu + \frac{x_1^2}{2} d\mu .$$

Если $x_1 \neq 0$, то $d\mu(v_1, v_\alpha) = 0$ в силу того, что все поля v_1, v_α попарно косоортогональны относительно ω и на каждом из них $dx_1 \equiv 0$. Если $x_1 = 0$, то $d\mu(v_1, v_\alpha) = 0$ по непрерывности. Таким образом, в координатах $(\theta_1, F_2, \theta_2, \dots, F_n, \theta_n)$ на гиперповерхности $x_1 = \text{const}$ имеет место

$$d\mu = \sum_{\alpha=2}^n dF_\alpha \wedge d\theta_\alpha .$$

Дальше, повторяя шаги доказательства предложения 4 ((3.16), (3.17), (3.18)), для некоторой функции $f(x_1, \theta_1, F_2, \theta_2, \dots, F_n, \theta_n)$ имеем

$$\omega = x_1 dx_1 \wedge \left(\sum_{\alpha=2}^n F_\alpha d\theta_\alpha + df \right) + \frac{x_1^2}{2} \sum_{\alpha=2}^n dF_\alpha \wedge d\theta_\alpha .$$

Из условия контактности точки ρ следует, что $\partial f / \partial \theta_1(\rho) \neq 0$. Заменяя координату θ_1 функцией f , приводим форму к каноническому виду

$$\omega = d\left(\frac{x_1^2}{2} \left(df + \sum_{\alpha=2}^n F_\alpha d\theta_\alpha \right) \right) .$$

Отсюда получаем утверждение леммы 5 при $k = n$.

Пусть $1 \leq k < n$. Выберем любое z -распределение Z на множестве $O(\rho)$ (определение 2 § 3.2). Тогда оно является $2k$ -мерным, интегрируемым, и в каждой точке $y \in O(\rho) \cap \Theta$ плоскость Z_y совпадает с \mathcal{Z}_y . Для любой точки $x \in O(\rho)$ обозначим Z_x^{2k} содержащее ее подмногообразие, которое является (максимальным) интегральным для распределения Z на $O(\rho)$. Каждый тор Лиувилля, вложенный в Θ и пересекающий произвольное Z_x^{2k} , пересекается с ним по k -мерному подмногообразию. Это следует из условия теоремы и предложения 13. Однако тор Лиувилля $T^n \subset M \setminus \Theta$, вообще говоря, может пересекаться с некоторым Z_x^{2k} по многообразию меньшей размерности (но не большей, если окрестность $O(\rho)$ достаточно мала). Распределение Z можно построить так, чтобы при уходе тора с гиперповерхности Θ размерность его пересечения с любым Z_x^{2k} не уменьшалась.

Лемма 6 *Вблизи точки ρ существует такое z -распределение Z , что каждое его $2k$ -мерное, интегральное подмногообразие пересекается по k -мерному многообразию с любым тором Лиувилля, с которым это подмногообразие имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Введем в окрестности ρ вспомогательные координаты $x_1 = F_1|_{O(\rho)}$, z_2, \dots, z_{2n} , так что проходящие через ρ координатные линии z_{n+1}, \dots, z_{2n} лежат на торе T_0^n , линии z_2, \dots, z_k касаются контактной плоскости Π_ρ , а линия x_1 касается ядра \mathcal{Z}_ρ . Существование таких координат вытекает из приведенных выше рассуждений о взаимном расположении тора и ядер формы. Тогда матрица Якоби функций F_1, f_2, \dots, f_n в точке ρ выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial z_k} & \frac{\partial f_2}{\partial z_{k+1}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial z_n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial z_k} & \frac{\partial f_n}{\partial z_{k+1}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ранг матрицы Якоби максимален, то столбцы с номерами от 2 до k линейно независимы, что влечет за собой линейную независимость некоторых ковекторов

$$\left(\frac{\partial f_{j_1}}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial f_{j_1}}{\partial z_k} \right), \dots, \left(\frac{\partial f_{j_{k-1}}}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial f_{j_{k-1}}}{\partial z_k} \right).$$

Следовательно выполнено $df_{j_s}(\Pi_\rho) \neq 0$, где $1 \leq s \leq k-1$. Перенумеруем интегралы f_{j_s} и обозначим их F_2, \dots, F_k .

Из (3.26) следует, что поля $v_1 = sgrad(x_1^2/2)$ и $v_\alpha = sgrad(x_1^2 F_\alpha/2)$ корректно определены и линейно независимы на всей окрестности $O(\rho)$, где $2 \leq \alpha \leq k$. Доказательство вполне аналогично случаю $k = n$, который был рассмотрен выше.

Следовательно, попарно коммутирующие поля v_1, v_α порождают k -мерное, интегрируемое распределение ζ , которое мы считаем заданным на множестве $O(\rho)$. Каждое интегральное подмногообразие ζ вложено в некоторый тор Лиувилля, поскольку поля v_1, v_α касаются торов. Для любого $y \in \Theta \cap O(\rho)$ имеем $\zeta_y \subset \mathcal{Z}_y$.

Продолжим построение искомого z -распределения. Выберем и зафиксируем какую-нибудь гладкую поверхность

$$P^{2n-1-k} \subset \Theta \cap O(\rho),$$

которая с каждым тором Лиувилля T^n (если пересечение с ним непусто) пересекается по $n-k$ мерному многообразию. Пусть оно имеет трансверсальное в T^n пересечение с каждым многообразием $Z_y^{2k} \cap T^n \neq \emptyset$ (вблизи точки $\rho \in P^{2n-1-k}$). Заметим, что при $y \in \Theta \cap O(\rho)$ подмногообразия вида $Z_y^{2k} \cap \Theta$ являются интегральными для распределения $2k-1$ мерных плоскостей $\mathcal{Z}_y \cap T_y \Theta$ и, по условию теоремы, они имеют только k -мерные пересечения с торами Лиувилля $T^n \subset \Theta$.

Выберем любое векторное поле w на $O(\rho)$ со следующим свойством. Для каждого $y \in \Theta \cap O(\rho)$ вектор w_y трансверсален Θ и $w_y \in \mathcal{Z}_y$. Поверхность P^{2n-1-k} , дрейфующая в потоке w , замечает $2n - k$ мерное подмногообразие, которое мы обозначим Q^{2n-k} . Будем считать, что

$$O(\rho) = \bigcup_{a \in Q^{2n-k}} \zeta_a^k,$$

где ζ_a^k есть интегральное подмногообразие ζ , проходящее через точку a .

Теперь можно определить искомое z - распределение, которое мы обозначим \tilde{Z} . Сначала заметим, что любое интегральное подмногообразие N^{2k-1} распределения $y \mapsto \mathcal{Z}_y \cap T_y \Theta$, имеющее вблизи точки ρ непустое пересечение с поверхностью P^{2n-1-k} , пересекается с ней по многообразию размерности $k - 1$ (т.е. трансверсально в Θ). Дело в том, что $T_\rho P^{2n-1-k} + T_\rho N^{2k-1} \subset T_\rho \Theta$ влечет

$$(2n - 1 - k) + (2k - 1) - \dim T_\rho P^{2n-1-k} \cap T_\rho N^{2k-1} \leq 2n - 1,$$

т.е. $\dim T_\rho P^{2n-1-k} \cap T_\rho N^{2k-1} \geq k - 1$. Но строгого неравенства быть не может, поскольку $T_\rho P^{2n-1-k} \cap \zeta_\rho = 0$, а k - мерная плоскость $\zeta_\rho = T_\rho T_0^n \cap \mathcal{Z}_\rho$ лежит в $T_\rho \Theta$ (получилось бы противоречие с $\dim \mathcal{Z}_\rho \cap T_\rho \Theta = 2k - 1$).

Пусть W^k есть подмногообразие, которое поверхность $P^{2n-1-k} \cap N^{2k-1}$ замечает в потоке w , и

$$\tilde{Z}^{2k}(N^{2k-1}) = \bigcup_{a \in W^k} \zeta_a^k.$$

Варьируя N^{2k-1} получим слоение $O(\rho)$ на *интегральные подмногообразия* $\tilde{Z}^{2k}(N^{2k-1})$ искомого распределения \tilde{Z} . Условие $\tilde{Z}_y = \mathcal{Z}_y$ при любом $y \in O(\rho) \cap \Theta$ выполнено в силу того, что:

- при $y \in P^{2n-1-k}$ имеет место $\dim \mathcal{Z}_y \cap T_y Q^{2n-k} = k$ (по построению);
- плоскость $\zeta_y = T_y \zeta_y^k$ дополняет $\mathcal{Z}_y \cap T_y Q^{2n-k}$ в подпространстве \mathcal{Z}_y ;
- локальное действие группы \mathbb{R}^k (потоки v_1, v_α) сохраняет поле ядер ω .

Если подмногообразие $\tilde{Z}^{2k}(N^{2k-1})$ пересекается с тором Лиувилля T^n в некоторой точке x , то в пересечении получим k - мерное многообразие в силу того, что x лежит в некоторой орбите $\zeta_a^k \subset \tilde{Z}^{2k}(N^{2k-1})$, а она необходимо вложена в T^n .

Итак, мы определили искомое z - распределение, которое в дальнейшем обозначается буквой Z (без волны). Каждое его $2k$ - мерное, интегральное подмногообразие пересекается по k - мерному многообразию с любым тором Лиувилля, с которым имеет непустое пересечение. Лемма 6 доказана \square .

В дальнейшем будет использована следующая геометрическая конструкция.

Определение 8 Пусть $1 \leq m < n$ и в некоторое многообразии M^{2n} вложен 2-диск D_0^2 . Предположим, что определены семейства

$$\{D_1^2(x_1)\}_{x_1}, \quad \{D_2^2(x_2)\}_{x_2}, \quad \dots, \quad \{D_j^2(x_j)\}_{x_j}, \quad \dots, \quad \{D_m^2(x_m)\}_{x_m}$$

2-дисков $D_j^2(x_j)$, вложенных в M^{2n} и гладко зависящих от параметров x_j . При этом каждый параметр x_j пробегает множество

$$\mathcal{D}^{2j} = \bigcup \{D_{j-1}^2(x_{j-1}) : x_1 \in D_0^2, x_2 \in D_1^2(x_1), \dots, x_{j-1} \in D_{j-2}^2(x_{j-2})\},$$

и каждая точка $x_j \in D_{j-1}^2(x_{j-1})$ является центром диска $D_j^2(x_j)$, где $1 \leq j \leq m$. Если $x_j \neq x'_j$, то диски $D_j^2(x_j)$ и $D_j^2(x'_j)$ не пересекаются. Предположим также, что для любого j множество \mathcal{D}^{2j} является вложенным, $2j$ -мерным диском, и

$$\forall x_j \in \mathcal{D}^{2j} \quad T_{x_j} D_j^2(x_j) \cap T_{x_j} \mathcal{D}^{2j} = 0, \quad D_j^2(x_j) \cap \mathcal{D}^{2j} = \{x_j\}.$$

Тогда набор отображений

$$D_0^2 = \mathcal{D}^2 \ni x_1 \mapsto D_1^2(x_1), \quad \dots, \quad \mathcal{D}^{2j} \ni x_j \mapsto D_j^2(x_j), \quad \dots \\ \dots, \quad \mathcal{D}^{2m} \ni x_m \mapsto D_m^2(x_m)$$

назовем D^2 -иерархией глубины m . При этом семейство $\{D_j^2(x_j)\}_{x_j}$ называется j -м уровнем, а D_0^2 называется старшим диском данной D^2 -иерархии.

Если любые два подмногообразия V и W пересекаются в единственной точке x и $T_x V \cap T_x W = 0$, то будем говорить, что V и W *нормальны* (по отношению друг к другу), или что они *нормально* пересекаются в точке x .

Если через каждую точку интегрального многообразия Z_ρ^{2k} провести максимальный кусок тора Лиувилля, лежащий в множестве $O(\rho)$, то получится $n+k$ -мерное подмногообразие V_ρ^{n+k} . Зафиксируем в нем любой малый отрезок $D^1(\rho)$ с центром ρ , вложенный в $T_0^n \cap O(\rho)$, так что

$$T_\rho D^1(\rho) \cap Z_\rho = 0, \quad \text{где} \quad Z_\rho = T_\rho Z_\rho^{2k}.$$

Затем включим $D^1(\rho)$ в гладкое, 1-параметрическое семейство аналогичных отрезков $D^1(y)$, вложенных в подмногообразия V_y^{n+k} (и в торы Лиувилля!), где точка y пробегает произвольный гладкий отрезок I с центром ρ , который нормален V_ρ^{n+k} в точке ρ . Подмногообразия V_y^{n+k} определяются аналогично V_ρ^{n+k} .

Отрезки $D^1(y)$ заметают малый диск $D^2 \subset O(\rho)$ с центром ρ , который нормален интегральному многообразию Z_ρ^{2k} . Итак, диск D^2 расслоен на отрезки $D^1(y)$, каждый

из которых вложен в некоторый тор Лиувилля. Соответствие между отрезками и торами является взаимно – однозначным. В отношении такого слоения будем говорить, что торы Лиувилля *высекают* его на диске D^2 .

Слоение D^2 определяется некоторой функцией $F_{k+1} : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$, имеющей ненулевой дифференциал в точке ρ . Продолжим функцию F_{k+1} на $2k + 2$ мерное подмногообразие

$$Z_\rho^{2k+2} = \bigcup_{x \in D^2} Z_x^{2k},$$

полагая ее постоянной на слоях Z_x^{2k} . Торы Лиувилля высекают $k + 1$ мерное слоение на Z_ρ^{2k+2} , являющееся лагранжевым на симплектическом многообразии $Z_\rho^{2k+2} \setminus \Theta$, где

$$\dim Z_\rho^{2k+2} \cap \Theta = 2k + 1.$$

При этом каждый $k + 1$ мерный слой представляет собой результат локального действия группы \mathbb{R}^k на некоторый отрезок $D^1(y) \subset D^2$, т.е., слой является объединением семейства орбит ζ_a^k , где $a \in D^1(y)$. Функция $F_{k+1} : Z_\rho^{2k+2} \rightarrow \mathbb{R}$ является постоянной на слоях, поэтому на многообразии Z_ρ^{2k+2} с формой $\omega' = \omega|_{Z_\rho^{2k+2}}$ корректно определено гамильтоново поле $sgrad_{\omega'}(F_{k+1})$. По построению $F_{k+1} = const$ на каждом подмногообразии вида $Z_\rho^{2k+2} \cap T^n$, где T^n есть тор Лиувилля. В этом смысле F_{k+1} является интегралом.

Зафиксируем в диске D^2 отрезок D_0^1 с центром ρ , нормально пересекающийся с $D^1(\rho)$ в точке ρ (получается крест). Определим на Z_ρ^{2k+2} функцию q_1 , которая равна сдвигу параметра вдоль траектории $sgrad_{\omega'}(F_{k+1})$, идущей в данную точку от поверхности

$$\bigcup_{x \in D_0^1} Z_x^{2k}.$$

Поскольку поток $sgrad_{\omega'}(F_{k+1})$ сохраняет форму ω' и поле ее ядер \mathcal{Z}_y , являющихся одновременно ядрами ω ($= Z_y$ при $y \in Z_\rho^{2k+2} \cap \Theta$), то каждая поверхность уровня q_1 соприкасается с плоскостью \mathcal{Z}_y в любой особой точке y этой поверхности. В самом деле, на уровне $q_1 = 0$ это имеет место по построению, а любая другая поверхность уровня q_1 получается сдвигом $q_1 = 0$ в потоке $sgrad_{\omega'}(F_{k+1})$. Поэтому на Z_ρ^{2k+2} корректно определено гамильтоново поле $sgrad_{\omega'}(q_1)$. Очевидно, что $\{F_{k+1}, q_1\}_{\omega'} = 1$.

Если $k < n - 1$, то продолжим построение, рассуждая по аналогии. Для этого потребуется конструкция D^2 – иерархии (определение 8).

Лемма 7 *Если $O(\rho)$ достаточно мала, то в случае $k < n - 1$ существует D^2 – иерархия глубины $n - k - 1$, так что на любом j - м уровне каждый диск*

$D_j^2(x_j)$ вложен в $O(\rho)$, и точка ρ является центром старшего диска D_0^2 . При этом в каждой точке $x \in \mathcal{D}^{2n-2k}$ имеет нормальное (и трансверсальное) пересечение подмногообразий \mathcal{D}^{2n-2k} и Z_x^{2k} . Торы Лиувилля высекают тривиальные, 1-мерные слоения на D_0^2 и каждом диске $D_j^2(x_j)$ в данной D^2 – иерархии.

Доказательство. В пространстве $T_\rho M^{2n}$ найдется такой набор 2-мерных плоскостей $\Pi_1^2, \dots, \Pi_{n-k}^2$, что

$$\mathcal{Z}_\rho \cap \bigoplus_{i=1}^{n-k} \Pi_i^2 = 0, \quad \forall j \quad \dim \Pi_j^2 \cap T_\rho T_0^n = 1, \quad \dim \bigoplus_{m=1}^j \Pi_m^2 = 2j .$$

В самом деле, $\dim \mathcal{Z}_\rho \cap T_\rho T_0^n = k$, поэтому в $T_\rho T_0^n$ найдется ненулевой вектор, который нормален к плоскости \mathcal{Z}_ρ . Дополним его ненулевым вектором, который нормален к $T_\rho T_0^n + \mathcal{Z}_\rho$ и натянем на эти два вектора плоскость Π_1^2 . Если при $j < n - k$ уже построены плоскости Π_1^2, \dots, Π_j^2 , то в $T_\rho T_0^n$ найдется ненулевой вектор, который нормален $k + j$ мерной плоскости

$$\left(\mathcal{Z}_\rho \oplus \bigoplus_{m=1}^j \Pi_m^2 \right) \cap T_\rho T_0^n .$$

Дополним его ненулевым вектором, который нормален $n + k + j$ мерной плоскости

$$T_\rho T_0^n + \mathcal{Z}_\rho \oplus \bigoplus_{m=1}^j \Pi_m^2$$

и натянем на эти два вектора плоскость Π_{j+1}^2 .

Очевидно, что существует такая D^2 – иерархия глубины $n - k - 1$, для которой

$$T_\rho D_0^2 = \Pi_1^2, \quad T_\rho D_1^2(\rho) = \Pi_2^2, \quad T_\rho D_{j-1}^2(\rho) = \Pi_j^2, \quad T_\rho D_{n-k-1}^2(\rho) = \Pi_{n-k}^2 .$$

В координатах ее можно определить посредством параллельных переносов, фиксируя в каждой плоскости Π_j^2 малый диск с центром $\mathbf{0}$. Сначала мы перенесем Π_2^2 в каждую точку плоскости Π_1^2 , затем перенесем Π_3^2 в каждую точку объединения 2-параметрического семейства плоскостей, полученного на первом шаге и т.д. Тогда в многообразии M^{2n} плоскости Π_1^2 отвечает диск D_0^2 , параллельным переносам Π_2^2 отвечают диски $D_1^2(x_1)$ и т.д.

Однако нам следует выбрать диски $D_j^2(x_j)$ такими, чтобы на каждом из них торы Лиувилля высекали 1-мерное слоение. Идея построения была предложена в случае $k = n - 1$ (применительно к диску D^2). Окрестность $O(\rho)$ считаем настолько малой, насколько это необходимо. Используем такие координаты на $O(\rho)$, чтобы пересечения

$O(\rho)$ с торами Лиувилля T^n выглядели в \mathbb{R}^{2n} , как области в n -мерных, параллельных между собой плоскостях Π^n . При этом подмногообразие $T_0^n \cap O(\rho)$ пусть отвечает область в n -плоскости Π_0^n , и точка ρ имеет координаты $(0, \dots, 0) = \mathbf{0} \in \Pi_0^n$. Каждому Π_j^2 в координатном пространстве \mathbb{R}^{2n} отвечает такая плоскость, что соответствующая ей поверхность соприкасается с Π_j^2 в точке ρ . Эту плоскость также обозначаем Π_j^2 .

Выберем в Π_0^n малый отрезок D_0^1 с центром $\mathbf{0}$, лежащий на прямой $\Pi_1^2 \cap \Pi_0^n$. Заметим, что при любом параллельном переносе отрезок D_0^1 останется вложенным в некоторую n -плоскость Π^n . Возьмем малый отрезок $D^1 \subset \Pi_1^2$ с центром $\mathbf{0}$, трансверсальный D_0^1 , и параллельно перенесем D_0^1 в каждую точку отрезка D^1 . Возникает некоторый параллелограмм. Сглаживая его углы получим диск D_0^2 , которому отвечает старший диск искомой D^2 -иерархии. Затем выберем на прямой $\Pi_2^2 \cap \Pi_0^n$ отрезок с центром $\mathbf{0}$, который снова обозначим D_0^1 , и трансверсальный ему отрезок $D^1 \subset \Pi_2^2$ с центром $\mathbf{0}$. Повторим процедуру построения 2-диска, и параллельно перенесем полученный диск D_1^2 в каждую точку $x_1 \in D_0^2$. Так получается семейство дисков $D_1^2(x_1)$. Продолжая по индукции, еще через $n - k - 2$ шагов получим в координатном пространстве \mathbb{R}^{2n} образ искомой D^2 -иерархии.

Каждый диск $D_j^2(x_j)$ состоит из вложенных в торы Лиувилля отрезков, середины которых заполняют некоторый (другой) отрезок, гладко зависящий от своего центра. При $x_j = \rho$ этот отрезок соприкасается в точке ρ с прямой, дополняющей в Π_{j+1}^2 прямую $\Pi_{j+1}^2 \cap T_\rho T_0^n$. Выбирая окрестность $O(\rho)$ и все 2-диски достаточно малыми, мы обеспечим нормальность всех пересечений $2n - 2k$ мерного диска \mathcal{D}^{2n-2k} с интегральными многообразиями Z . Лемма 7 доказана \square .

Зафиксируем D^2 -иерархию, существование которой утверждается в лемме 7. На уровне $n - k - 1$ произвольный диск $D_{n-k-1}^2(x_{n-k-1})$, где $x_{n-k-1} \in \mathcal{D}^{2n-2k-2}$, определяет $2k + 2$ мерное подмногообразие

$$Z_{x_{n-k-1}}^{2k+2} = \bigcup_{x \in D_{n-k-1}^2(x_{n-k-1})} Z_x^{2k}.$$

Рассуждая аналогично случаю $k = n - 1$ легко проверить, что каждый тор Лиувилля T^n , имеющий непустое пересечение с $Z_{x_{n-k-1}}^{2k+2}$, пересекается с ним по $k + 1$ мерному подмногообразию

$$\bigcup_{x \in D_{n-k-1}^2(x_{n-k-1}) \cap T^n} Z_x^{2k} \cap T^n = \bigcup_{x \in D_{n-k-1}^2(x_{n-k-1}) \cap T^n} \zeta_x^k.$$

На j -м уровне D^2 -иерархии каждый диск $D_j^2(x_j)$, где $x_j \in \mathcal{D}^{2j}$, определяет $2n - 2j$

мерное подмногообразие

$$Z_{x_j}^{2n-2j} = \bigcup_{x \in D_{n-k-1}^2(x_{n-k-1}), x_{n-k-1} \in D_{n-k-2}^2(x_{n-k-2}), \dots, x_{j+2} \in D_j^2(x_{j+1}), x_{j+1} \in D_j^2(x_j)} Z_x^{2k}.$$

Очевидно, что если $j < m \leq n - k$, то $Z_{x_j}^{2n-2j}$ тривиально расслоено на подмногообразия вида Z_y^{2n-2m} . Каждый тор Лиувилля T^n , имеющий непустое пересечение с $Z_{x_j}^{2n-2j}$, пересекается с ним по $n - j$ мерному подмногообразию

$$\bigcup_{x \in D_j^2(x_j) \cap T^n} Z_x^{2n-2j-2} \cap T^n.$$

Наконец, старший диск D_0^2 определяет $2n$ мерное подмногообразие

$$Z^{2n} = \bigcup_{x \in D_{n-k-1}^2(x_{n-k-1}), x_{n-k-1} \in D_{n-k-2}^2(x_{n-k-2}), \dots, x_2 \in D_1^2(x_1), x_1 \in D_0^2} Z_x^{2k},$$

которое можно считать совпадающим с окрестностью $O(\rho)$.

Рассуждая аналогично случаю $k = n - 1$ легко проверить следующее утверждение. На подмногообразии Z_ρ^{2k+2} существует гамильтониан F_{k+1} корректно определенного поля $sgrad_{\omega'}(F_{k+1})$, где $\omega' = \omega|_{Z_\rho^{2k+2}}$. Это гамильтоново поле и генераторы локального, пуассонова действия \mathbb{R}^k (с орбитами ζ_a^k) определяют локальное, пуассоново действие группы \mathbb{R}^{k+1} на Z_ρ^{2k+2} .

Пусть слоение диска $D_{n-k-2}^2(\rho)$ определяется функцией $F_{k+2} : D_{n-k-2}^2(\rho) \rightarrow \mathbb{R}$, имеющей ненулевой дифференциал в точке ρ . Продолжим F_{k+2} на подмногообразии Z_ρ^{2k+4} , полагая эту функцию постоянной на слоях Z_x^{2k+2} , где $x \in D_{n-k-2}^2(\rho)$. Торы Лиувилля высекают $k + 2$ мерное слоение на Z_ρ^{2k+4} , являющееся лагранжевым на симплектическом многообразии $Z_\rho^{2k+4} \setminus \Theta$, где

$$\dim Z_\rho^{2k+4} \cap \Theta = 2k + 3.$$

Функция $F_{k+2} : Z_\rho^{2k+4} \rightarrow \mathbb{R}$ постоянна на слоях, поэтому она постоянна на каждом подмногообразии вида $Z_\rho^{2k+4} \cap T^n$, где T^n есть тор Лиувилля. Интеграл F_{k+2} также постоянен на каждом $Z_y^{2k} \subset Z_\rho^{2k+4}$. Следовательно, на многообразии Z_ρ^{2k+4} с формой $\omega' = \omega|_{Z_\rho^{2k+4}}$ корректно определено гамильтоново поле $sgrad_{\omega'}(F_{k+2})$.

Зафиксируем в диске $D_{n-k-2}^2(\rho)$ отрезок D_0^1 с центром ρ , нормально пересекающийся с $D_{n-k-2}^2(\rho) \cap T^n$ в точке ρ . Определим на Z_ρ^{2k+4} функцию q_2 , которая равна сдвигу параметра вдоль траектории $sgrad_{\omega'}(F_{k+2})$, идущей в данную точку от $2k + 3$ мерной поверхности

$$\bigcup_{x \in D_0^1} Z_x^{2k+2}.$$

Поскольку поток $sgrad_{\omega'}(F_{k+2})$ сохраняет поле ядер \mathcal{Z}_y , то каждая поверхность уровня q_2 соприкасается с плоскостью \mathcal{Z}_y в любой особой точке y этой поверхности. В самом деле, на уровне $q_1 = 0$ это имеет место по построению, а любая другая поверхность уровня q_1 получается сдвигом $q_1 = 0$ в потоке $sgrad_{\omega'}(F_{k+2})$. Поэтому на Z_ρ^{2k+4} корректно определено поле $sgrad_{\omega'}(q_2)$. Ясно, что $\{F_{k+2}, q_2\}_{\omega'} = 1$.

Теперь функции F_{k+1} и q_1 , заданные на $Z_\rho^{2k+2} \subset Z_\rho^{2k+4}$, продолжим на все многообразие Z_ρ^{2k+4} , полагая постоянным вдоль траекторий полей $sgrad_{\omega'}(F_{k+2})$ и $sgrad_{\omega'}(q_2)$. Существует локальное, пуассоново действие группы \mathbb{R}^{k+2} на Z_ρ^{2k+4} .

Продолжая по индукции, еще через $n - k - 2$ шагов алгоритма получим искомый набор независимых, локальных интегралов F_i и функций q_i на множестве $Z_\rho^{2n} = O(\rho)$, где $k + 1 \leq i \leq n$ и $\{F_i, q_i\} = 1$. Остальные коммутаторы в этом наборе равны нулю. Все поля $sgrad(F_i)$ и $sgrad(q_i)$ корректно определены на $O(\rho)$.

В каждой точке $y \in O(\rho) \cap \Theta$ имеет место $dF_i(\mathcal{Z}_y) = 0$. Из функциональной независимости интегралов F_i вытекает линейная независимость полей $sgrad(F_i)$. Поскольку никакая их линейная комбинация в точке ρ не лежит в \mathcal{Z}_ρ , то коммутирующие поля

$$v_1, v_2, \dots, v_k, sgrad(F_{k+1}), \dots, sgrad(F_n)$$

являются линейно независимыми на $O(\rho)$. В каждой точке $x \in O(\rho)$ векторы $sgrad(F_i)$ и $sgrad(q_j)$ косоортогональны плоскости Z_x в силу того, что каждая из функций F_i и q_j постоянна на Z_x^{2k} . Поэтому при $x \neq O(\rho) \cap \Theta$ косоортогональное дополнение к Z_x натянуто на все векторы $sgrad(F_i)$ и $sgrad(q_j)$, где $k + 1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq n - k$.

Введем на многообразии $Z_\rho^{2k} \cap O(\rho)$ канонические координаты того вида, который описан в лемме 5, ограничивая на Z_ρ^{2k} интегралы F_1, \dots, F_k . Сохраняя обозначения, продолжим координатные функции на всю окрестность $O(\rho)$, полагая их постоянными вдоль траекторий полей $sgrad(F_i)$ и $sgrad(q_j)$. Тогда набор функций

$$F_1, x_2, F_2, x_4, \dots, F_k, x_{2k}, F_{k+1}, q_1, \dots, F_n, q_{n-k}$$

определяет искомые канонические координаты на $O(\rho)$. Лемма 5 доказана \square .

Теперь заметим, что интегралы F_2, \dots, F_n , будучи de' facto определенными на трансверсальном к торах Лиувилля диске D^n , автоматически определены на некоторой окрестности U тора T_0^n . Нужные нам свойства этих функций связаны с поведением их дифференциалов на ядрах ω . В процессе доказательства леммы 5

было установлено, что на некоторой окрестности каждой точки $\rho \in T_0^n$ определено локальное действие группы \mathbb{R}^n , сохраняющее как форму ω , так и слоение Лиувилля, т.е., сохраняющее любые интегралы исходной системы. Поэтому F_2, \dots, F_n имеют нужные свойства на всей окрестности U . Последнее означает, что в каждой точке $y \in U \cap \Theta$ выполнено $dF_i(\mathcal{Z}_y) = 0$, а формы dF_2, \dots, dF_k независимы на подпространстве Π_y . Поэтому плоскость $\Pi_y \cap T_y T^n$ натянута на предельные направления $sgrad(F_\alpha)$. Предельное положение поля $sgrad(F_1)$ в точке y лежит в $\mathcal{Z}_y \setminus \Pi_y$, поскольку в канонических координатах оно определяется вектором $\partial/\partial x_2$ (3.26). Отсюда прямо вытекают все утверждения о предельных положениях (собственных и несобственных) косых градиентов F_1, \dots, F_n в касательных пространствах к торах Лиувилля. Эти направления определяются коммутирующими полями $v_1, v_\alpha, sgrad(F_i)$, траектории которых являются квазипериодическими обмотками торов $T^n \subset U$. Как прежде предполагается, что $2 \leq \alpha \leq k$ и $k+1 \leq i \leq n$.

Интегралы F_{k+1}, \dots, F_n можно выразить явными формулами. Зафиксируем вложенный в T_0^n тор

$$T_0^{n-k} \cong S_{k+1}^1 \times S_{k+2}^1 \times \dots \times S_n^1,$$

так что вложение каждой из окружностей S_i^1 реализует ненулевой элемент $\mathbf{H}_1(T_0^n, \mathbb{Z})$, и набор этих элементов может быть дополнен до базиса группы $\mathbf{H}_1(T_0^n, \mathbb{Z})$. Тор T_0^{n-k} выберем так, чтобы в каждой своей точке y он был трансверсален k -мерной плоскости $\mathcal{Z}_y \cap T_y T_0^n$. Зафиксируем на T_0^{n-k} циклы γ_i , гомологичные линиям каких-нибудь угловых координат φ_i . Затем включим γ_i в гладкое семейство циклов, каждый из которых вложен в некоторый тор Лиувилля T^n . Пусть при каждом i разные кривые γ_i лежат в разных торах T^n , и окрестность $U \supset T_0^n$ является объединением торов $T^n \supset \cup_i \gamma_i$. Если U достаточно мала, то на каждом $T^n \subset U$ циклы γ_i определяют тор $T^{n-k} \subset T^n$, который в каждой своей точке y трансверсален в T^n плоскости $\mathcal{Z}_y \cap T_y T^n$.

По относительной лемме Пуанкаре в окрестности изотропного тора T_0^n форма ω точна, т.е. $\omega = d\beta$ для некоторой 1-формы β . Положим

$$F_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} \beta, \quad k+1 \leq i \leq n. \quad (3.27)$$

Очевидно, что все F_i являются интегралами исходного, пуассонова действия. Проверим, что каждая из этих функций удовлетворяет условию $dF_i(\mathcal{Z}_y) \equiv 0$.

Гладко продеформируем кривую γ_i , так чтобы в процессе ее изотопии получилась 2-мерная пленка σ , которая имеет одномерное пересечение с проходящим через

любую точку $y \in \gamma_i$ интегральным многообразием Z_y^{2k} распределения Z . Заметим, что на многообразии Z_y^{2k} интегралы F_{k+1}, \dots, F_n , построенные при доказательстве леммы 5 и de' facto определенные на $U \supset T_0^n$, являются константами, а F_1, \dots, F_k функционально независимы вблизи y . Поэтому деформацию кривой γ_i можно произвести так, чтобы она оставалась вложенной в тот или иной тор Лиувилля. Для этого следует описать: как именно в процессе деформации должны меняться значения интегралов F_α ? Этого недостаточно, т.к. в каждом Z_y^{2k} существует еще k координат, но нас не интересует точный вид деформации. Иначе говоря неважно, как именно кривая γ_i смещается на торах Лиувилля в процессе своей изотопии.

Для большей ясности в вопросе о деформации заметим, что 1-форму μ (теорема 5) можно считать гладко зависящей от точки $y \in \gamma_i$. При этом 2-форма $d\mu$ невырождена на $2k - 2$ мерной плоскости $\Pi_y \subset \mathcal{Z}_y$, что вместе с ориентацией поля предельных направлений $sgrad(F_1)$ (инцидентных ядрам и нормальных плоскостям Π_y), а также направлением роста интеграла F_1 определяет непрерывное поле ориентаций подмногообразий Z_y^{2k} , где $y \in \gamma_i$. Поэтому в каждом Z_y^{2k} можно выбрать диск $D^k(y)$ центром y , трансверсальный совместным уровням интегралов F_α и гладко зависящий от $y \in \gamma_i$. Поскольку поля v_1, v_α лежат на этих самых уровнях и линейно независимы, на дисках $D^k(y)$ существует непрерывное поле ориентаций. Последнее обстоятельство позволяет полностью определить деформацию кривой γ_i ... если бы в этом была необходимость.

Очевидно, что можно обеспечить инцидентность пленки σ с любым, наперед заданным отрезком $D^1 \supset Z_y^{2k}$, проходящим через любую, фиксированную точку $y \in T_0^n$ (с целью вычисления производной функции (3.27) по направлению D^1). Если пленка σ оказалась лежащей в Θ (т.е., мы вычисляем производную вдоль $\Theta \cap Z_y^{2k}$), то

$$\int_{\sigma} \omega = 0 .$$

Если же σ не вложена в Θ , а лишь пересекается с Θ по кривой γ_i , то $\int_{\sigma} \omega = 0$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка по отношению к деформации. Отсюда и из формулы Стокса следует, что при деформации петли γ_i величина F_i (3.27) изменится на бесконечно малую высшего порядка по отношению к деформации. Поэтому в любой точке $y \in \Theta \cap U$ функция F_i имеет нулевую производную вдоль любой линии, касающейся ядра \mathcal{Z}_y .

Теперь проверим, что dF_i линейно независимы в каждой точке тора T_0^n .

Существует такая малая деформация

$$\delta : T_0^{n-k} \times D^{n-k} \rightarrow U$$

тора $T_0^{n-k} = \delta(T_0^{n-k} \times \{0\})$, что каждый тор $\delta(T_0^{n-k} \times \{b\})$ вложен в некоторый тор Лиувилля T^n и трансверсален Z_x в каждой точке $x = \delta(\{a\} \times \{b\})$. В результате этой деформации получится $2n - 2k$ мерное многообразие N^{2n-2k} , которое является симплектическим относительно формы $\omega|_{N^{2n-2k}}$. Торы Лиувилля T^n высекают на нем лагранжево слоение на торы $\delta(T_0^{n-k} \times \{b\})$, поэтому формулы (3.27) определяют вблизи тора $T_0^{n-k} \subset N^{2n-2k}$ координаты действия на N^{2n-2k} . Следовательно, дифференциалы функций $F_i|_{N^{2n-2k}}$ линейно независимы в каждой точке T_0^n . Этим завершается проверка формул (3.27). Теорема 7 доказана \square .

Пример 8. В интегрируемом случае О.И. Боявленского система $sgrad(H)$ корректно определена на $M \cong S^2 \times S^1 \times \mathbb{R}$ (§2.3). Многообразие $\Theta \cong S^2 \times S^1$, являющееся нулевым уровнем интеграла $f = F_1$ на M , состоит из контактных точек [14]. Для каждого тора Лиувилля $T^2 \subset \Theta$ выполнены условия теоремы 7 при $k = 1$. Из найденных значений инвариантов Фоменко-Цишанга следует, что для почти всех $T^2 \subset \Theta$ интегральные кривые распределения прямых $[sgrad_{\pm}^{\infty}(F_1)]$, а также траектории поля $sgrad(H)$ являются всюду плотными обмотками тора [14].

Следствие 8 При условиях теоремы 7, для любого тора Лиувилля $T^n \subset U \cap \Theta$ распределение

$$T^n \ni y \mapsto \Pi_y \cap T_y T^n$$

является интегрируемым. Если $k > 1$, то каждое его интегральное, $k - 1$ мерное подмногообразие есть лежандрово в некотором, однозначно определенном контактном многообразии (K^{2k-1}, Π) , которое является интегральным подмногообразием $2k - 1$ мерного (интегрируемого) распределения

$$U \cap \Theta \ni y \mapsto Z_y \cap T_y \Theta .$$

В следующем примере каждое из таких лежандровых подмногообразий является инъективно погруженной в тор Лиувилля T^2 прямой \mathbb{R} (для почти всех T^2) или окружностью S^1 .

Пример 9. Введем на торе $K = T^3$ с угловыми координатами (φ, ψ, θ) следующие формы:

$$\alpha = \cos \varphi d\psi + \sin \varphi d\theta, \quad d\alpha = (\sin \varphi d\psi - \cos \varphi d\theta) \wedge d\varphi .$$

Произвольное нулевое подпространство Π_ρ формы α натянуто на векторы

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad v = \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\psi} - \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Тогда $d\alpha(v, \partial/\partial\varphi) = 1 \neq 0$, следовательно форма $d\alpha$ невырождена на Π_ρ . Это означает, что α является контактной формой на K . Форма $\omega = d(t^2\pi^*\alpha)$ определяет на $M^4 = K \times \mathbb{R}(t)$ структуру симплектического многообразия с особенностью, где $\pi : M^4 \rightarrow K$ есть проекция на сомножитель. Гиперповерхность $\Theta = K \times \{0\}$ состоит из контактных точек, в каждой из которых $\omega = 0$. Для любой функции $f(t, \varphi, \psi, \theta)$ имеем

$$sgrad(f) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} \cos\varphi \frac{\partial f}{\partial\psi} - \frac{1}{t} \sin\varphi \frac{\partial f}{\partial\theta}, \\ \frac{2}{t^2} \sin\varphi \frac{\partial f}{\partial\psi} - \frac{2}{t^2} \cos\varphi \frac{\partial f}{\partial\theta}, \\ \frac{1}{t} \cos\varphi \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{2}{t^2} \sin\varphi \frac{\partial f}{\partial\varphi}, \\ \frac{1}{t} \sin\varphi \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{2}{t^2} \cos\varphi \frac{\partial f}{\partial\varphi}. \end{pmatrix}$$

Пара коммутирующих функций $F_1 = t$ и $F_2 = \sin\varphi$ определяет пуассоново действие группы \mathbb{R}^2 на M^4 . Для каждого тора Лиувилля $t = 0$, $\varphi = const$ выполнены условия теоремы 7 при $k = 2$. Интегральные кривые распределений $[sgrad_\pm^\infty(F_1)]$ и $sgrad^\infty(F_2)$ образуют ортогональную сеть на каждом торе Лиувилля $T^2(\psi, \theta)$. Для всех t и почти всех φ эти квазипериодические обмотки одновременно всюду плотны на торе.

Несмотря на наличие набора интегралов с корректно определенными потоками, ситуация теоремы 7 существенно отличается от классической теоремы Лиувилля, т.к. не все эти интегралы могут служить координатами в окрестности тора $T^n \subset \Theta$.

Следствие 9 При условиях теоремы 7 на U существует такой набор коммутирующих интегралов $\Phi_1, \dots, \Phi_k, F_{k+1}, \dots, F_n$, что все гамильтоновы поля $sgrad(\Phi_j)$ и $sgrad(F_i)$ корректно определены и линейно независимы на всей окрестности U . Эти интегралы функционально независимы в каждой точке $U \setminus \Theta$, однако $d_y\Phi_j = 0$ для всех $y \in U \cap \Theta$ и всех $1 \leq j \leq k$.

Доказательство. В доказательстве леммы 5 легко видеть, что $\Phi_1 = F_1^2/2$ и $\Phi_\alpha = F_1^2 F_\alpha/2$, где $2 \leq \alpha \leq k$ □.

Следствие 10 При условиях теоремы 7, пусть на всем многообразии M корректно определена нерезонансная, интегрируемая, гамильтонова система $sgrad(H)$, которая инвариантна относительно данного пуассонова действия. Тогда в качестве одного из интегралов F_{k+1}, \dots, F_n можно взять гамильтониан H , а остальные интегралы определить формулой (3.27).

Доказательство. Исходные генераторы f_1, \dots, f_n пуассонова действия являются интегралами $sgrad(H)$ на $M \setminus \Theta$, а тогда автоматически на всем M . В рассматриваемом случае, при доказательстве теоремы 7 можно использовать формулу только (3.27) для определения $n - k - 1$ из интегралов F_i , а в качестве еще одного интеграла (например F_{k+1}) взять гамильтониан H . В самом деле, в силу условия $dH(\mathcal{Z}_y) \equiv 0$ ковектор $d_\rho H$ не может линейно выражаться через любые $n - 2$ из ковекторов

$$d_\rho F_{k+1}, \dots, d_\rho F_n .$$

Таким образом, один из интегралов F_{k+1}, \dots, F_n можно заменить на H , сохраняя независимость набора F_1, \dots, F_n хотя бы вблизи тора T_0^n \square .

Предложение 14 *При условиях теоремы 7 в любом наборе интегралов f_1, \dots, f_n найдется не менее $k - 1$ функций f_α , у которых на торе T_0^n и всех близких к нему торах Лиувилля $T^n \subset U \cap \Theta$ определены поля $sgrad^\infty(f_\alpha)$, являющиеся несобственными предельными положениями квази-порядка 2. При этом косой градиент хотя бы одного из оставшихся $n - k + 1$ интегралов имеет несобственное предельное положение квази-порядка $\delta = 1$ в каждой точке $U \cap \Theta$, достаточно близкой к тору T_0^n .*

Доказательство. Пусть ρ есть любая точка тора T_0^n . Выберем в окрестности ρ такие координаты, что проходящие через ρ координатные линии x_{n+1}, \dots, x_{2n} лежат на торе T_0^n , линии x_2, \dots, x_k касаются контактной плоскости Π_ρ , а линия x_1 касается ядра \mathcal{Z}_ρ . Матрица Якоби функций f_1, \dots, f_n в точке ρ выглядит так:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} & \frac{\partial f_k}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_k} & \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial f_{k+1}}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} .$$

Из невырожденности матрицы Якоби следует, что столбцы с номерами от 2 до k линейно независимы, что влечет за собой линейную независимость некоторых ковекторов

$$\left(\frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_k} \right), \quad \dots, \quad \left(\frac{\partial f_{j_{k-1}}}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_{j_{k-1}}}{\partial x_k} \right) .$$

Следовательно выполнено $df_{j_s}(\Pi_\rho) \neq 0$, где $1 \leq s \leq k - 1$. Из (3.26) следует, что каждая из величин $sgrad(f_{j_s})$ является бесконечно большой порядка 2 по отношению к χ^{-1} , где χ есть расстояние до Θ в любой римановой метрике.

Аналогично, столбцы с номерами от 1 до k линейно независимы, что влечет за собой линейную независимость некоторых ковекторов

$$\left(\frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_{i_1}}{\partial x_k} \right), \dots, \left(\frac{\partial f_{i_k}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_{i_k}}{\partial x_k} \right).$$

Следовательно, хотя бы одна из производных $\partial f_{i_1}/\partial x_1, \dots, \partial f_{i_k}/\partial x_1$ отлична от нуля. Допустим, что $\partial f_{i_1}/\partial x_1(\rho) \neq 0$. Если при этом хотя бы одна из производных $\partial f_{i_1}/\partial x_2, \dots, \partial f_{i_1}/\partial x_k$ отлична от нуля, то $sgrad(f_{i_1})$ является бесконечно большой порядка χ^{-2} в точке ρ . Иначе $sgrad(f_{i_1})$ имеет в этой точке несобственное предельное положение квази-порядка $\delta = 1$ (3.26).

При доказательстве теоремы 7 был построен набор коммутирующих, независимых векторных полей в окрестности U тора T_0^n , сохраняющих любой набор интегралов данной системы. Эти поля также сохраняют поле плоскостей Π_y , а также особую поверхность Θ и гамильтоновы поля интегралов на множестве $U \setminus \Theta$. Поэтому вышеуказанные свойства функций f_1, \dots, f_n , связанные с точкой ρ , имеют место в каждой точке тора T_0^n \square .

Таким образом, поведение потоков интегралов на торах Лиувилля $T^n \subset \Theta$, которое описано в теореме 7, не может быть "улучшено" за счет выбора другого набора интегралов.

Лемма 8 *При условиях теоремы 7 предположим, что*

$$\dim \mathcal{Z}_y = \dim M > 2 \quad \forall y \in \Theta \cap U.$$

Если окрестность $U \supset T_0^n$ достаточно мала, то существует такой боттовский интеграл F на U , что поток $sgrad(F)$ корректно определен на U и все его интегральные траектории являются замкнутыми с периодом 2π .

Интеграл F можно выбрать так, чтобы на торе T_0^n все траектории $sgrad(F)$ были гомологичны любому, наперед заданному, ненулевому циклу $\gamma \in \mathbf{H}_1(T_0^n, \mathbb{Z})$, некоторый представитель которого с любым максимальным, $n - 1$ мерным, интегральным подмногообразием (интегрируемого) распределения

$$T_0^n \ni y \longmapsto \Pi_y \cap T_y T_0^n \tag{3.28}$$

пересекается в единственной точке и трансверсально в T_0^n

Доказательство. Обозначим χ интеграл F_1 , введенный при доказательстве теоремы 7. В силу леммы 1 можно считать, что $\omega = d(\chi^2\beta)$. Рассмотрим функцию

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \chi^2 \beta = \frac{\chi^2}{2\pi} \int_{\gamma} \beta ,$$

где цикл γ на торе Лиувилля $T^n \subset U$ гладко зависит от T^n . Поскольку функция χ постоянна на каждом торе Лиувилля, ее можно выносить из-под знака интеграла. Поскольку $dF = 0$ в каждой точке поверхности $U \cap \Theta$, то по теореме 1 поле $sgrad(F)$ корректно определено на U . В достаточно малой, непересекающей Θ окрестности V любого тора Лиувилля $T^n \subset U \setminus \Theta$ функция F является координатой действия для симплектической структуры $\omega|_V$. Отсюда следует, что на всем множестве $U \setminus \Theta$ интегральные траектории $sgrad(F)$ являются замкнутыми с периодом 2π . То же самое будет и на гиперповерхности $U \cap \Theta$, т.к. замкнутость *всех* траекторий на $U \setminus \Theta$ несовместима с их плотностью на некоторых торах $T^n \subset U \cap \Theta$. В самом деле, для каждого тора Лиувилля в U определен гладко зависящий от него базис в \mathbb{R}^n . Стандартный базис e_1, \dots, e_n связан с ним посредством некоторой матрицы (a_{ij}) , так что полю $v_1 = sgrad(F)$ отвечает строка № 1. Если существует нетривиальная, линейная комбинация ее элементов

$$\sum_{j=1}^n k_j a_{1j} = 0 , \quad k_j \in \mathbb{Z} ,$$

то все интегральные кривые поля v_1 замкнуты на соответствующем торе. По непрерывности изменения целых чисел k_j , все они постоянны. Поэтому все траектории на торе $T^n \subset U \cap \Theta$ являются замкнутыми. По непрерывности они также имеют период 2π .

Для доказательства боттовости интеграла $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ (определение 1, § 2.1) нужно проверить, что $d^2F \neq 0$ в каждой точке $U \cap \Theta$. Но это следует из того, что

$$\int_{\gamma} \beta \neq 0 .$$

Последнее обусловлено трансверсальностью кривой γ контактными плоскостями Π_y , в силу чего $\beta|_{\gamma} \neq 0$ в каждой точке кривой γ \square .

Заметим, что $\Theta \cap U$ состоит из критических точек интеграла F . Из предложения 7 следует, что $sgrad(F)$ сохраняет каноническую контактную структуру на $U \cap \Theta$.

Теорема 8 Пусть $n > 1$ и на симплектическом многообразии с особенностью (M^{2n}, ω) заданы функции f_1, \dots, f_n , определяющие нерезонансное, пуассоново

действие группы \mathbb{R}^n на симплектическом многообразии $(M^{2n} \setminus \Theta, \omega)$. Предположим, что образ множества Θ относительно отображения момента $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ имеет меру ноль в \mathbb{R}^n , и некоторый тор Лиувилля $T_0^n \subset \Theta$ состоит из контактных точек ρ , в которых $\mathcal{Z}_\rho = T_\rho M$.

Тогда на некоторой окрестности U тора T_0^n определены независимые функции x, s_2, \dots, s_n , являющиеся интегралами пуассонова действия на $U \setminus \Theta$. На открытом множестве U определены такие координаты

$$(x, s_2, \dots, s_n, \varphi_1 \bmod 2\pi, \dots, \varphi_n \bmod 2\pi),$$

что (многозначные) функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ являются угловыми координатами на торах Лиувилля $T^n \subset U$, и форма ω имеет на множестве U канонический вид:

$$\omega = d\left(\frac{x^2}{2}(d\varphi_1 + \sum_{j=2}^n s_j d\varphi_j)\right).$$

Доказательство.

Предположим, что все максимальные, интегральные многообразия $n-1$ мерного, интегрируемого распределения (3.28) являются компактными. Из доказательства леммы 5 видно, что на каждом из них определены $n-1$ коммутирующих, независимых полей $sgrad(F_1^2 F_\alpha / 2)$, поэтому в компактном случае эти многообразия являются торами. Альтернатива состоит в том, что каждое из них представляет собой инъективно погруженное в T_0^n произведение $\mathbb{R}^{n-1-m} \times T^m$, где $0 \leq m < n-1$, так что образ погружения плотен в T_0^n . Этот случай будет также рассмотрен ниже.

Зафиксируем любой из таких интегральных торов (лежандровых по следствию 8) и обозначим его T_0^{n-1} . Выберем на T_0^n цикл γ так, чтобы он имел единственное и трансверсальное на T_0^n пересечение с каждым интегральным подмногообразием распределения (3.28). Соответствующий γ интеграл F из леммы 8 определяет на U поле $sgrad(F)$, в потоке которого тор T_0^{n-1} обходит T_0^n вдоль траекторий и возвращается в исходное положение (каждая точка возвращается на свое место). Можно считать, что $F \geq 0$ на U .

Включим тор T_0^{n-1} в гладкое, $n-1$ параметрическое семейство торов T^{n-1} , каждый из которых вложен в некоторый тор Лиувилля $T^n \subset U \cap \Theta$. Выберем эти торы T^{n-1} так, чтобы их объединение было гладкой поверхностью $N_0^{2n-2} \subset U \cap \Theta$, которая трансверсальна потоку $sgrad(F)$ в многообразии $U \cap \Theta$. Далее включим N_0^{2n-2} в гладкое семейство поверхностей $N_c^{2n-2} \subset U$, каждая из которых лежит на некотором уровне $F = const = |c|$ и аналогично расслоена на изотропные

торы T^{n-1} . Последние пусть составляют гладкое, n -параметрическое семейство, включающее T_0^{n-1} и продолжающее ранее определенное семейство торов T^{n-1} , на которые расслоена поверхность N_0^{2n-2} . Мы также полагаем, что каждая поверхность N_c^{2n-2} трансверсальна $sgrad(F)$ в многообразии $F = |c|$. Заметим, что $F(U \cap \Theta) = 0$ и при $c \neq 0$ на каждом уровне $F = |c|$ лежит ровно две (непересекающиеся) поверхности $N_{\pm c}^{2n-2}$, которые при $c \rightarrow 0$ в пределе сливаются с N_0^{2n-2} .

Найдется такая функция $x : U \rightarrow \mathbb{R}$ с всюду ненулевым дифференциалом, что $x(U \cap \Theta) = 0$ и каждая поверхность уровня x является связной компонентой некоторого подмногообразия $F = |c|$. В силу леммы 1 найдется такая окрестность $U \cong T_0^n \times D^n$ и 1-форма μ на U , что

$$\omega|_U = d\left(\frac{x^2}{2}\mu\right) = xdx \wedge \mu + \frac{x^2}{2}d\mu. \quad (3.29)$$

Форма μ определяет на $U \cap \Theta$ контактную структуру, поэтому 2-форма $d\mu$ невырождена на каждом подпространстве Π_y , где $y \in U \cap \Theta$. Следовательно $rk(d\mu|_{U \cap \Theta}) \equiv 2n - 2$.

Для любой точки поверхности $F = const$ вектор $sgrad(F)$ лежит в касательной плоскости и косоортогонален ей. Это же, очевидно, имеет место в отношении любой поверхности уровня интеграла x . Поскольку при $x = const$ имеем $2\omega = x^2d\mu$, то при $x \neq 0$ векторное поле $sgrad(F)$ косоортогонально этой гиперповерхности относительно формы $d\mu$. По непрерывности это же имеет место при $x = 0$, т.е., на гиперповерхности $U \cap \Theta$. Поскольку поверхность $N_0^{2n-2} \subset x^{-1}(0)$ трансверсальна потоку $sgrad(F)$ и $rk(\omega|_{x=0}) \equiv 2n - 2$, то ограничение формы $d\mu$ на N_0^{2n-2} невырождено. Если окрестность U достаточно мала, то $d\mu$ невырождена на каждой поверхности $N_c^{2n-2} \subset U$. Последнее включение всюду подразумевается.

Таким образом, каждая пара $(N_c^{2n-2}, d\mu)$ является симплектическим многообразием. Следовательно торы T^{n-1} , на которые по построению расслоена каждая поверхность N_c^{2n-2} , являются лагранжевыми подмногообразиями в N_c^{2n-2} . В самом деле, для торов $T^{n-1} \subset U \setminus \Theta$ это следует из их изотропности относительно ω (каждый T^{n-1} вложен в некоторый тор Лиувилля), а для остальных получается по непрерывности при $x \rightarrow 0$.

На каждой траектории $sgrad(F)$ введем параметр φ_1 (сдвиг в потоке), отсчитываемый от некоторой, однозначно определенной поверхности N_c^{2n-2} , которую данная траектория протыкает в единственной точке p . При этом вектор $sgrad(F)(p)$

косоортгонален $T_p N_c^{2n-2}$, поскольку

$$i_{sgrad(F)}\omega(T_p N_c^{2n-2}) = -dF(T_p N_c^{2n-2}), \quad T_p N_c^{2n-2} \subset T_p\{F = |c|\}.$$

На каждом симплектическом многообразии $(N_c^{2n-2}, d\mu)$ можно ввести такие координаты действие – угол $(s_2, \dots, s_n, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, гладко зависящие от N_c^{2n-2} , что $\varphi_2, \dots, \varphi_n$ являются угловыми координатами на любом торе $T^{n-1} = \{\mathbf{s} = const\}$ (на которые изначально расслоена поверхность N_c^{2n-2}). Поскольку поле $sgrad(F)$ сохраняет интеграл x и форму ω , то в координатах

$$(x, \varphi_1, s_2, \varphi_2, \dots, s_n, \varphi_n), \quad \mathbf{s}(T_0^{n-1}) = \mathbf{0} \quad (3.30)$$

(сохраняемых потоком $sgrad(F)$ по самому их построению) матрица формы ω принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta_2 x & \beta_3 x & \beta_4 x & \dots & \beta_{2n-1} x & \beta_{2n} x \\ -\beta_2 x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\beta_3 x & 0 & 0 & \frac{x^2}{2} & \dots & 0 & 0 \\ -\beta_4 x & 0 & -\frac{x^2}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\beta_{2n-1} x & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{x^2}{2} \\ -\beta_{2n} x & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{x^2}{2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Отсюда следует, что для некоторой функции f локально

$$d'\mu = d'\left(\sum_{r=2}^{2n} \beta_r dx_r\right) = \sum_{r=2}^{2n} d'\beta_r \wedge dx_r = \sum_{j=2}^n dx_{2j-1} \wedge dx_{2j} = d\left(\sum_{j=2}^n x_{2j-1} dx_{2j}\right),$$

$$\sum_{r=2}^{2n} \beta_r dx_r = \sum_{j=2}^n x_{2j-1} dx_{2j} + d'f,$$

$$\beta_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \beta_{2j} = x_{2j-1} + \frac{\partial f}{\partial x_{2j}}, \quad \beta_{2j-1} = \frac{\partial f}{\partial x_{2j-1}} \quad (2 \leq j \leq n), \quad (3.32)$$

где d' обозначает внешнее дифференцирование на подмногообразии $x = const$. Для краткости записи координаты из набора (3.30) обозначены здесь x, x_2, \dots, x_{2n} . Из (3.31) и (3.32) получаем:

$$\omega = x_1 dx_1 \wedge \left(\sum_{j=2}^n x_{2j-1} dx_{2j} + \sum_{r=2}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_r} dx_r\right) + \frac{x_1^2}{2} \sum_{j=2}^n dx_{2j-1} \wedge dx_{2j} \quad (3.33).$$

Теперь заметим, что контактная форма

$$\mu|_{U \cap \Theta} = \mu|_{x=0} = \sum_{r=2}^{2n} \beta_r dx_r$$

равна нулю на *лежандровом* подмногообразии $T_0^{n-1} \subset U \cap \Theta$, а форма

$$\sum_{j=2}^n x_{2j-1} dx_{2j} = \sum_{j=2}^n s_j d\varphi_j$$

равна нулю на торе T_0^{n-1} в силу $\mathbf{s}(T_0^{n-1}) = \mathbf{0}$ (3.30). Отсюда, из (3.32) и относительной леммы Пуанкаре (теорема 2, § 1.1) следует, что функцию f можно считать заданной на некоторой окрестности W тора T_0^{n-1} в многообразии U .

По условию контактности точек T_0^{n-1} пфафффиан $Pf(\omega)$ не делится на x^{2n} . В силу этого из (3.31) имеем $\beta_2 \neq 0$. Поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\rho) \neq 0 \quad \forall \rho \in T_0^{n-1} .$$

Заменим координату $x_2 = \varphi_1$ функцией f и из (3.33) получим, что

$$\omega = d\left(\frac{x^2}{2}(df + \sum_{j=2}^n s_j d\varphi_j)\right) . \quad (3.34)$$

В координатах $(x, f, s_2, \varphi_2, \dots, s_n, \varphi_n)$ на $W \supset T_0^{n-1}$ матрица ω имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & x & 0 & xs_2 & 0 & xs_3 & \dots & 0 & xs_n \\ -x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x^2}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -xs_2 & 0 & -\frac{x^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x^2}{2} & \dots & 0 & 0 \\ -xs_3 & 0 & 0 & 0 & -\frac{x^2}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{x^2}{2} \\ -xs_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{x^2}{2} & 0 \end{pmatrix} . \quad (3.35)$$

Каждая из координатных функций s_j и φ_j , где $2 \leq j \leq n$, будучи константой на любой траектории поля $sgrad(F) = \partial/\partial\varphi_1$, фактически определена на всем множестве U . В отношении функции f мы этого пока сказать не можем. Заметим, что все s_j являются интегралами исходной системы.

Тор T_0^n расслоен $n - 1$ мерными, лежандровыми торами, каждый из которых имеет все свойства тора T_0^{n-1} , использованные выше, и получается из него некоторым сдвигом в потоке $\partial/\partial\varphi_1$. В окрестности \widetilde{W} любого такого тора \widetilde{T}_0^{n-1} в координатах $(x, \widetilde{f}, s_2, \varphi_2, \dots, s_n, \varphi_n)$ форма ω выглядит аналогично (3.34). При этом множество \widetilde{W} является некоторым сдвигом W в потоке $sgrad(F) = \partial/\partial\varphi_1$. Координатные

линии f и \tilde{f} лежат на траекториях $sgrad(F)$ (т.к. поток сохраняет все остальные координаты). Поэтому каждому вектору $\partial/\partial f$ при сдвиге отвечает вектор, который пропорционален $\partial/\partial \tilde{f}$. Однако коэффициент пропорциональности должен быть равен 1, поскольку ω сохраняется потоком $\partial/\partial \varphi_1$ и, в силу (3.35), имеет место:

$$\omega_{1,2} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial f}\right) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \tilde{f}}\right) = x.$$

Поскольку, как мы только что видели, векторное поле $\partial/\partial f$ сохраняется при сдвигах координаты φ_1 , функция f также сохраняется вдоль φ_1 . Таким образом, (многозначная) функция f определена на всем множестве U и она представляется в виде $f = T \cdot \varphi_1$, где функция $T = T(x, s_2, \varphi_2, \dots, s_n, \varphi_n)$ всюду отлична от нуля. Для определенности будем считать ее положительной. Поскольку поток $\partial/\partial \varphi_1$ сохраняет функцию f , форму ω и является 2π -периодическим, из (3.34) следует тождество $dx \wedge dT = 0$. Поэтому функция T может зависеть только от переменной x . Тогда заменой переменных действия s_2, \dots, s_n на $s_2/T, \dots, s_n/T$ и интеграла x на $x\sqrt{T(x)}$, форма ω приводится к искомому, каноническому виду. В самом деле,

$$\begin{aligned} \omega &= d\left(\frac{x^2}{2}(df + \sum_{j=2}^n s_j d\varphi_j)\right) = d\left(\frac{x^2}{2}\left(d(T\varphi_1) + \sum_{j=2}^n s_j d\varphi_j\right)\right) = \\ &= d\left(\frac{x^2}{2}\left(T(x)d\varphi_1 + \sum_{j=2}^n s_j d\varphi_j\right)\right) = d\left(\frac{(x\sqrt{T(x)})^2}{2}\left(d\varphi_1 + \sum_{j=2}^n \frac{s_j}{T(x)} d\varphi_j\right)\right). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $(n-1)$ -мерные, максимальные) интегральные многообразия (3.28) не являются компактными. Тогда как угодно близко от T_0^n найдется тор Лиувилля $\tilde{T}_0^n \subset U \cap \Theta$, на котором выполняется условие компактности для аналогичного (3.28) распределения. Дело в том, что каждое такое интегральное многообразие является орбитой пуассонова действия группы \mathbb{R}^{n-1} , генераторами которого служат поля $v_j = sgrad(\chi^2 F_j/2)$, где $2 \leq j \leq n$. При этом интеграл χ равен нулю на гиперповерхности $U \cap \Theta$. По лемме 5 вблизи любой точки $\rho \in T_0^n$ существуют такие канонические координаты \mathbf{x} , что $x_1 = \chi$ и каждая функция x_{2j-1} , будучи de facto заданной на U , постоянна на каждом торе Лиувилля $T^n \subset U$. Из доказательства леммы 5 видно, что координаты x_2, x_{2j} можно выбрать локально совпадающими с угловыми координатами $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Тогда для некоторой окрестности $O(\rho)$ (пока еще не окрестности тора T_0^n !) контактная форма выглядит так:

$$\mu = \mu|_{O(\rho) \cap \Theta} = d\varphi_1 + \sum_{j=2}^n x_{2j-1} d\varphi_j.$$

В рассматриваемых угловых координатах поля v_j определяются частотами $\omega_{j,1}, \dots, \omega_{j,n}$, которые постоянны на торах Лиувилля. Поскольку $\mu(v_j) = 0$, то

$$\omega_{j,1} + \sum_{l=2}^n x_{2l-1} \cdot \omega_{j,l} = 0 .$$

Заметим, что это равенство имеет место для каждого $2 \leq j \leq n$. Поскольку \mathbb{Q}^{n-1} всюду плотно в \mathbb{R}^{n-1} , как угодно близко от T_0^n найдется тор \tilde{T}_0^n , на котором все числа x_{2l-1} рациональны, т.е., все траектории каждого из полей v_j являются замкнутыми. Это и означает, что все $(n-1)$ -мерные, максимальные) интегральные многообразия распределения вида (3.28) на торе \tilde{T}_0^n являются компактными.

По доказанному выше, на некоторой окрестности \tilde{U} тора \tilde{T}_0^n существуют канонические координаты искомого вида. Можно ли выбрать окрестность \tilde{U} так, чтобы в ней оказался исходный тор T_0^n ? Ответ — положительный, т.к. \tilde{U} можно считать совпадающей с $U \supset T_0^n$ при следующих условиях.

1. Окрестность U стягивается на $U \cap \Theta$ вдоль нормалей в каждой точке.
2. Окрестность U стягивается на T_0^n вдоль нормальных дисков в каждой точке.
3. Форма $d\mu$ невырождена на каждой поверхности $N_c^{2n-2} \subset U$.
4. Интеграл $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ не имеет критических точек, кроме лежащих в $U \cap \Theta$.

Условие 1 гарантирует существование формы μ (3.29), в силу относительной леммы Пуанкаре (см. доказательство леммы 1). Лемма Пуанкаре также применяется при определении функции f на окрестности W , от которой требуется только быть стягиваемой на тор T_0^{n-1} вдоль нормалей. Последнее заведомо имеет место в силу 2. Условие 3 позволяет использовать форму $d\mu$ для определения координат s_j, φ_j на поверхностях N_c^{2n-2} . При этом переменные действия s_j обычным образом выражаются интегралами от формы μ . Условие 4 обеспечивает определенность координаты φ_1 на U . Для повторения построений того случая, когда существует лежандров тор $T_0^{n-1} \subset T_0^n$, окрестность $\tilde{U} = U$ обладает всеми необходимыми свойствами по отношению к любому, лежандрову тору $\tilde{T}_0^{n-1} \subset \tilde{T}_0^n$. Теорема 8 доказана \square .

Пример 10. Пусть $n > 1$ и на многообразии $M = T^n \times \mathbb{R}^n$ дана форма ω в каноническом виде :

$$\omega = d\left(\frac{x^2}{2}(d\varphi_1 + \sum_{j=2}^n s_j d\varphi_j)\right) .$$

Тогда каноническую контактную структуру на $\Theta \cong T^n \times \mathbb{R}^{n-1}$ определяет форма

$$\alpha = d\varphi_1 + \sum_{j=2}^n s_j d\varphi_j .$$

Коммутирующие функции x, s_j определяют пуассоново действие на $M \setminus \Theta$, а торами Лиувилля являются все подмногообразия $T^n \times \{p\}$, где $p \in \mathbb{R}^n$. Плоскости $P_y \cap T_y T_0^n$ натянуты на векторы $-s_j \partial/\partial\varphi_1 + \partial/\partial\varphi_j$, где $2 \leq j \leq n$. Лежандровы подмногообразия компактны тогда и только тогда, когда хотя бы одно $s_j \in \mathbb{Q}$. Для любого $T_0^n \subset \Theta$ выполнены условия теоремы 8 \square .

В случае, если $\dim \mathcal{Z}_\rho < \dim M$ в некоторой точке $\rho \in T^n$, существует почти очевидное препятствие для приведения формы ω к каноническому виду в окрестности тора Лиувилля $T^n \subset \Theta$.

Предложение 15 *При условиях теоремы 7 предположим, что в некоторых координатах $(x_1, \dots, x_{2k}, s_1, \dots, s_{n-k}, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-k})$, заданных на $U \supset T_0^n$, форма ω приводится к виду*

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq 2k} \omega_{ij} dx_i \wedge dx_j + \sum_{l=1}^{n-k} ds_l \wedge d\varphi_l ,$$

где функции s_l являются интегралами данной системы, а $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-k}$ есть угловые координаты на торах Лиувилля T^n . Тогда максимальные, интегральные, k -мерные подмногообразия распределения $T^n \ni y \mapsto \mathcal{Z}_y \cap T_y T^n$ являются компактными на каждом торе $T^n \subset U \cap \Theta$.

Доказательство. Очевидно, что в каждой точке $y \in U \cap \Theta$ ядро \mathcal{Z}_y натянуто на векторы $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_{2k}$. Поэтому при $T^n \subset U \cap \Theta$ тор $T^k \subset T^n$, отвечающий постоянным значениям угловых координат $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-k}$, является интегральным подмногообразием распределения $T^n \ni y \mapsto \mathcal{Z}_y \cap T_y T^n$ \square .

Пример 11. Из предложения 15 следует, что форма ω из примера 8 не может быть приведена к каноническому виду ни в какой окрестности произвольного тора Лиувилля $T^2 \subset \Theta$.

Предложение 16 *При условиях теоремы 7 предположим, что для некоторой окрестности $U \supset T_0^n$ и каждого тора Лиувилля $T^n \subset U \cap \Theta$ некоторое (и тогда любое) максимальное, интегральное, $2k - 1$ мерное подмногообразие распределения*

$$U \cap \Theta \ni y \mapsto \mathcal{Z}_y \cap T_y \Theta , \quad (3.36)$$

имеющее непустое пересечение с T^n , пересекается с этим тором по k -мерному, компактному подмногообразию. Тогда, если окрестность U достаточно мала, то на ней определены независимые функции x, s_2, \dots, s_n , являющиеся интегралами пуассонова действия на $U \setminus \Theta$. При этом на U определены такие координаты

$$(x, s_2, \dots, s_n, \varphi_1 \bmod 2\pi, \dots, \varphi_n \bmod 2\pi),$$

что (многозначные) функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ являются угловыми координатами на торах Лиувилля $T^n \subset U$. В случае $k > 1$ форма ω имеет на U канонический вид

$$\omega = d\left(\frac{x^2}{2}(d\varphi_1 + \sum_{j=2}^k s_j d\varphi_j)\right) + \sum_{i=k+1}^n ds_i \wedge d\varphi_i,$$

а в случае $k = 1$ форма ω имеет на U канонический вид

$$\omega = x dx \wedge \varphi_1 + \sum_{i=2}^n ds_i \wedge d\varphi_i.$$

Доказательство. В силу леммы 1 §1.2, распределение (3.36) является интегрируемым. Из теоремы 7 следует, что указанные в условии интегральные многообразия (3.36) высекают на торах $T^n \subset U \cap \Theta$ торы $T^k \subset T^n$. Построим гладкое, n -параметрическое семейство торов T^k , каждый из которых вложен в тор Лиувилля T^n , чтобы соответствие $T^k \mapsto T^n$ было взаимно-однозначным. При этом на каждом $T^n \subset U$ должен быть тор T^k данного семейства, и пусть его вложение будет нетривиальным (т.е. индуцирует мономорфизм $\pi_1(T^k) \rightarrow \pi_1(T^n)$).

Возьмем любое максимальное, интегральное многообразие Z^{2k-1} распределения (3.36), пересекающее T_0^n , и будем считать членами искомого семейства все торы T^k , которые Z^{2k-1} высекает на торах Лиувилля $T^n \subset U$. Получим $k-1$ параметрическое семейство. Теперь заметим, что каждый интеграл F_{k+1}, \dots, F_n из теоремы 7 постоянен на Z^{2k-1} в силу $dF_i(Z_y) \equiv 0$. Варьируя значения этих интегралов, получим $n-1$ параметрическое семейство торов T^k . Затем при различных, но всякий раз фиксированных значениях интегралов F_2, \dots, F_n все торы T^k на соответствующих (этим значениям) торах $T^n \subset U \cap \Theta$ разнесем в потоке $grad(F_1)$ в обе стороны от гиперповерхности $U \cap \Theta$. Получим искомое семейство торов T^k со свойствами, о которых было сказано выше.

Теперь используем каждый тор $T^k \subset T^n$, как начало отсчета для угловых координат $\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n$, определяемых полям $sgrad(F_i)$, где интегралы F_i заданы формулой (3.27). Очевидно, что эти гамильтоновы поля сохраняют поле

интегральных многообразий (3.36). Следовательно, каждая поверхность уровня координат φ_i и интегралов F_i является интегральным подмногообразием такого распределения Z , что $Z_y = \mathcal{Z}_y$ в каждой точке $y \in U \cap \Theta$. Фиксируем любое его интегральное подмногообразие Z^{2k} , пересекающее T_0^n , и приведем форму $\omega|_{Z^{2k}}$ к каноническому виду вблизи тора $T_0^k = Z^{2k} \cap T_0^n$ (теорема 8). Продолжим канонические координаты с Z^{2k} на U , полагая постоянными вдоль траекторий $sgrad(F_i)$ и $sgrad(\varphi_i)$. Последние корректно определены на U в силу $d\varphi_i(\mathcal{Z}_y) \equiv 0$. Осталось обозначить F_i как s_i \square .

Глава 4. Нулевая гиперповерхность электромагнитного поля.

§4.1. Классическая теория электромагнитного поля в вакууме.

Традиционно электромагнитное поле рассматривается локально, а его граница считается расположенной в бесконечности. Между тем поле имеет край, который чрезвычайно быстро удаляется от источников. Этим вызвана принципиальная и, возможно, непреодолимая трудность его экспериментального изучения. Однако оно связано с задачей вычисления поля, начиная с момента его зарождения, а также наблюдения поля в непосредственной близости от источников. Кроме этого, вопрос об устройстве поля вблизи пространственно-временной границы интересен с общей точки зрения. Несмотря на то, что препятствия к распространению поля (стенки), а также поверхностные источники являются обычным предметом исследования, в вышеупомянутом смысле граница поля, по-видимому, никогда прежде не рассматривалась.

Пример 1. Пусть поле создается зарядами, которые распределены вдоль гладкой (регулярной) кривой $\gamma(s)$ в \mathbb{R}^3 . Предположим, что они одновременно начали излучать поле в момент времени $t = 0$, а до этого никакого поля не было. Если излучение электромагнитного поля началось в момент времени $t = 0$, то фронт является огибающей семейства сфер

$$(x - \gamma_x(s))^2 + (y - \gamma_y(s))^2 + (z - \gamma_z(s))^2 = c^2 t^2 .$$

Легко проверить, что огибающая семейства сфер (т.е. передний фронт поля) является трубкой постоянного радиуса ct , осью симметрии которой является кривая γ . С точки зрения физики этот результат вполне очевиден. В частности, если кривая замкнута и имеет достаточно большой радиус кривизны, то фронт поля является вложенным тором T^2 , который при возрастании t перестраивается в сферу (с негладкими особенностями). Заметим, что если бы заряды на кривой приходили в движение последовательно от точки $\gamma(0)$, по мере продвижения поля вдоль кривой (как это реально происходит при включении электрической линии), то фронт поля в данном случае был бы сферой радиуса ct с центром в точке $\gamma(0)$ \square .

В главе 3 была дана локальная классификация замкнутых 2-форм в окрестностях контактных точек. Последние имеют общее положение на гиперповерхности, состоящей из точек вырождения матрицы 2-формы. В типичной ситуации почти в каждой точке такой поверхности коранг матрицы равен 2.

Вырождения коранга $2k \geq 4$ являются весьма специальными, однако в случае $2k = 4$ теория контактных вырождений нашла естественное приложение в классической электродинамике. С математической точки зрения контактные вырождения тензора поля являются типичными. Найдены формальные модели таких вырождений, не противоречащие теоретической физике.

Рассматривая электромагнитные поля в 4-мерном пространстве-времени \mathbb{R}^4 мы, тем не менее, используем язык векторного анализа, как это принято в классической электродинамике. Для обозначения векторов и точек из пространства \mathbb{R}^3 используется жирный шрифт. Любой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, рассматриваемый в точке $\mathbf{r} = (x, y, z)$ в момент времени t , считается канонически вложенным в

$$T_p\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$$

в виде 4-вектора $(\mathbf{v}, 0)$, где $p = (\mathbf{r}, t) = (x, y, z, t)$

В координатах (τ, x, y, z) пространства-времени \mathbb{R}^4 , связанных с инерциальной системой отсчета, где $\tau = ct$ и c – скорость света, электромагнитное поле в вакууме определяется кососимметрическим тензором ω с матрицей

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая 2-форма ω имеет вид:

$$\omega = -cdt \wedge (E_x dx + E_y dy + E_z dz) + dx \wedge (H_z dy - H_y dz) + H_x dy \wedge dz.$$

Легко видеть, что $\det \omega = (\mathbf{E}, \mathbf{H})^2$. Если $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \neq 0$, т.е. электрическая и магнитная компоненты поля неортогональны, то существует обратная матрица

$$(\omega^{ij}) = -\frac{1}{(\mathbf{E}, \mathbf{H})} \begin{pmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & -E_z & E_y \\ -H_y & E_z & 0 & -E_x \\ -H_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Замкнутость формы ω эквивалентна первой паре уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{H}) &= 0, & \operatorname{rot}(\mathbf{E}) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{E}) &= 4\pi\rho, & \operatorname{rot}(\mathbf{H}) &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где ρ – плотность зарядов и \mathbf{j} – плотность токов [22].

Электромагнитное поле можно выразить через потенциалы \mathbf{A} и φ [22], так что

$$\mathbf{H} = \text{rot}(\mathbf{A}), \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}(\varphi).$$

Потенциалы поля существуют, вообще говоря, локально. Они определены с точностью до преобразования

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad}(f), \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t},$$

где f – любая гладкая функция. Если выполнено условие Лоренца

$$\text{div}(\mathbf{A}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

то потенциалы удовлетворяют волновым уравнениям:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho.$$

Предположим, что излучение электромагнитного поля началось при $t = 0$.

Рассмотрим задачу Коши с начальными условиями

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, 0) \equiv 0, \quad \varphi(\mathbf{r}, 0) \equiv 0, \quad \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} \equiv 0, \quad \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} \equiv 0.$$

При таких условиях, из уравнений Максвелла имеем $\mathbf{j}(\mathbf{r}, 0) \equiv 0$ и $\rho(\mathbf{r}, 0) \equiv 0$. Это означает, что силы, которые породили и привели в движение создающие поле заряды, начинают действовать постепенно (имея при $t = 0$ нулевые значения). Решение задачи Коши выражается т.н. волновыми или запаздывающими потенциалами

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) = \int_{D_t^3(\mathbf{r}_0)} \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}, t - \frac{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|}{c}\right)}{c|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} dV(\mathbf{r}),$$

$$\varphi(\mathbf{r}_0, t) = \int_{D_t^3(\mathbf{r}_0)} \frac{\rho\left(\mathbf{r}, t - \frac{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|}{c}\right)}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} dV(\mathbf{r}),$$

где шар $D_t^3(\mathbf{r}_0) \subset \mathbb{R}^3$ определяется неравенством $|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| \leq ct$ [8,22]. Каждый вектор $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$ идет из точки $\mathbf{r} = (x, y, z)$ в точку с радиус-вектором \mathbf{r}_0 , в которой в момент t происходит "наблюдение" поля. Будучи гладкими на полупространстве $t \geq 0$, функции $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, t)$ не являются гладкими ни на какой окрестности гиперплоскости \mathbb{R}_0^3 [8]. То же относится к функциям $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, которые определяются через потенциалы. Хотя гиперповерхность $\Theta \subset \{t > 0\}$ зависит от распределения зарядов и токов, множество сингулярных точек $\partial U \setminus \Theta$ совпадает с \mathbb{R}_0^3 .

Рассмотрим точку (\mathbf{r}_0, t) пространственно-временной границы Θ . Источники, локализованные в точке $\mathbf{r} \in D_t^3(\mathbf{r}_0)$, излучают некоторое поле. Его фронт достигает точки \mathbf{r}_0 в течении времени $t - t'$, где

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|}{c} .$$

Поскольку излучение этого поля *началось* в момент t' , то очевидно, что $\rho(\mathbf{r}, t') = 0$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t') = 0$. Легко проверить, что $\mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t) = 0$ и $\varphi(\mathbf{r}_0, t) = 0$. Легко видеть, что $\rho(\mathbf{r}, t'') = 0$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t'') = 0$ при любом $t'' < t'$. Иначе излученное в точке \mathbf{r} поле успело бы достигнуть \mathbf{r}_0 раньше момента t , а это противоречит включению $\mathbf{r}_0 \in \mathcal{F}_t$. Предполагая функции ρ , \mathbf{j} непрерывно-дифференцируемыми заключаем, что $\partial_i \mathbf{j}(\mathbf{r}, t') = 0$ и $\partial_t \rho(\mathbf{r}, t') = 0$. Далее имеем

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_0}(\mathbf{r}_0, t) = \int_{D_t^3(\mathbf{r}_0)} \left(\frac{\partial_i \mathbf{j}(\mathbf{r}, t')}{c|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{-|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|}{c} \right) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t') \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{1}{c|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|} \right) dV(\mathbf{r}) = 0 ,$$

где $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Аналогично, равны нулю все производные интегралов по координатам точки \mathbf{r}_0 , а также по t . Следовательно $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) = 0$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}_0, t) = 0$. Итак, предположение об исчезновении формы ω на Θ согласуется с классической теорией излучения при условии, что источники поля не существовали вечно и "включились" не мгновенно.

Достаточно распространено мнение, что электрическая и магнитная компонента электромагнитного поля всегда ортогональны и, соответственно, форма ω является вырожденной. Оно отнюдь не беспочвенно, т.к. в волновой зоне поля (вдали от источников) ортогональность \mathbf{E} и \mathbf{H} практически имеет место. Точечный заряд q всегда создает поле с ортогональными электрической и магнитной компонентами, которые определяются из формул

$$\mathbf{E} = q \frac{1 - v^2/c^2}{(r - (\mathbf{r}, \mathbf{v})/c)^3} \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}}{c} r \right) + \frac{q}{c^2 (r - (\mathbf{r}, \mathbf{v})/c)^3} \left[\mathbf{r}, \left[\mathbf{r} - \frac{\mathbf{v}}{c} r, \dot{\mathbf{v}} \right] \right] ,$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{r} [\mathbf{r}, \mathbf{E}] ,$$

где \mathbf{r} – вектор, идущий в *точку наблюдения* (в которой определяются \mathbf{E} и \mathbf{H}) из той точки пространства, где заряд находился в момент времени $t - r/c$, а вектор \mathbf{v} является скоростью заряда [22]. Важно заметить, что все величины в правых частях формул вычисляются в момент времени $t' = t - r/c$. По графику на рис. 11, изображающему зависимость от времени t' расстояния r от заряда до точки наблюдения поля, легко видеть следующее. Если в начальный момент времени $t' = 0$

расстояние r_0 меньше ct , то существует единственный момент времени $t_* < t$ (в прошлом по отношению к рассматриваемому моменту t), когда заряд находился на таком расстоянии r_* , что имело место $t_* = t - r_*/c$. Если же $ct < r_0$, то излучаемое зарядом поле не может достигнуть точки наблюдения за время t .

Итак, одиночный заряд создает электромагнитное поле, тензор которого имеет всюду вырожденную матрицу (за исключением сингулярной точки, в которой находится сам заряд). Рассмотрим пару зарядов q_i , каждый из которых создает электромагнитное поле с компонентами \mathbf{E}_i и \mathbf{H}_i , где $1 \leq i \leq 2$. Результирующее поле имеет компоненты $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$, поэтому

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}, \mathbf{H}) &= (\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1) + (\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_2) + (\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_1) + (\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2) = \\ &= \left(\mathbf{E}_1, \frac{1}{r_2} [\mathbf{r}_2, \mathbf{E}_2] \right) + \left(\mathbf{E}_2, \frac{1}{r_1} [\mathbf{r}_1, \mathbf{E}_1] \right) = \left(\mathbf{E}_1, \frac{1}{r_2} \mathbf{r}_2 - \frac{1}{r_1} \mathbf{r}_1, \mathbf{E}_2 \right). \end{aligned}$$

Условие вырожденности матрицы (ω_{ij}) эквивалентно тому, что векторы \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 параллельны плоскости α_t , проходящей через точку наблюдения P_t и две точки пространства, в которых заряды находились в моменты времени t' (определяемые из уравнения $t' = t - r/c$). Легко видеть, что в общем случае этого нет. Например, пусть один из зарядов покоится, а второй движется без ускорения со скоростью \mathbf{v} по прямой, которая не параллельна отрезку, соединяющему заряды. Тогда в любой точке P_t вне плоскости, проходящей через этот отрезок параллельно вектору \mathbf{v} , в момент времени t вектор \mathbf{E}_2 не параллелен α_t (рис. 11). Итак поле пары зарядов, вообще говоря, определяет симплектическую структуру почти на всем \mathbb{R}^4 .

При удалении точки наблюдения в бесконечность единичные векторы \mathbf{r}_1/r_1 и \mathbf{r}_2/r_2 стремятся к совпадению, в силу чего на большом удалении от пары зарядов векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} можно считать ортогональными. Таким образом, вдали от излучателя симплектическую структуру поля следует считать вырожденной. Но, как мы только что видели, она отнюдь не обязана вырождаться вблизи излучающих поле зарядов.

Присущая большинству классических задач пространственная симметрия поля, неформально говоря, влечет за собой вырождение соответствующей 2-формы ω . Рассмотрим случай сферически-симметричного поля. Если электромагнитное поле обладает $SO(3)$ - симметрией с центром O , то в каждый момент времени t в любой точке P векторы поля \mathbf{E} и \mathbf{H} параллельны прямой OP . Пусть S^2 - произвольная стандартная сфера с центром O (множество точек, равноудаленных от O). Из теоремы Мозера о несуществовании на сфере всюду ненулевого векторного поля и $SO(3)$ - эквивариантности полей \mathbf{E} , \mathbf{H} вытекает, что ни одно из них

не имеет касательной к S^2 компоненты ни в одной из точек S^2 . Поэтому в сферически-симметричном случае имеет место $rot(\mathbf{H}) = 0$ и $rot(\mathbf{E}) = 0$ и, в силу уравнений Максвелла, магнитное поле \mathbf{H} является стационарным. Поэтому разумно предположить, что $\mathbf{H} \equiv 0$.

Предложение 1 Если плотности токов \mathbf{j} и зарядов ρ являются $SO(3)$ - симметричными относительно центра $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$, то в каждый момент времени в каждой точке $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, отличной от $\mathbf{0}$, имеет место:

$$\mathbf{E} = E(r, t) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mathbf{H} = 0 .$$

Доказательство.

Легко проверить, что запаздывающие потенциалы \mathbf{A} и φ , а вместе с ними и компоненты поля \mathbf{E} , \mathbf{H} наследуют свойство сферической симметрии относительно точки $\mathbf{0}$. Поэтому замкнутая 2-форма ω , связанная со сферически-симметричным электромагнитным полем, точна в окрестности произвольной сферы S^2 с центром $\mathbf{0}$. Известно, что на компактном многообразии нельзя задать точную симплектическую структуру [30]. Поэтому, с учетом $SO(3)$ - симметрии, ограничение формы ω на сферу должно быть тождественным нулем. Если $\mathbf{H} \neq 0$ в точках сферы S^2 , то, выбирая декартовы координаты с центром $\mathbf{0}$, в точке N пересечения S^2 с осью Z из матрицы тензора поля получим

$$\omega_{xy} = -H_z \neq 0 .$$

А так как векторы скорости координатных линий x и y касаются сферы в точке N , то получено с противоречие с $\omega|_{S^2} \equiv 0$ \square .

Пример 2. Интересный пример симплектической структуры электромагнитного поля связан с установками типа Токамак. Силовые линии тороидального магнитного поля являются квазипериодическими обмотками торов, которые неортогональны силовым линиям вихревого электрического поля, представляющими собой параллели торов. Легко проверить, что

$$sgrad(t) = -\frac{\mathbf{H}}{c(\mathbf{E}, \mathbf{H})}, \quad \{t, f\} = -\frac{(\mathbf{H}, grad(f))}{c(\mathbf{E}, \mathbf{H})} .$$

Отсюда видно, что функция $f(x, y, z)$ евклидова расстояния от точки (x, y, z) до оси тороидальной камеры реактора является интегралом поля $sgrad(t)$, где t – время. Так возникает интегрируемая гамильтонова система $sgrad(t)$, интегральные траектории которой совпадают с силовыми линиями тороидального магнитного поля, а торы Лиувилля расслаивают тороидальную камеру. Отображение Пуанкаре, определенное на любом меридианальном диске, остроумно называется *tokamak* [39].

§4.2. Нулевая гиперповерхность.

Если на \mathbb{R}^4 заданы координаты (x, y, z, t) , то для любого v преобразование Лоренца (*буст*) определяется формулами

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{c^2 t - vx}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где c – скорость света в вакууме. Композиции с заменами декартовых координат (x, y, z) в \mathbb{R}^3 и сдвигами времени t составляют группу Пуанкаре. В дальнейшем пространство-время \mathbb{R}^4 рассматривается с *галилеевыми* координатами $(\mathbf{r}, t) = (x, y, z, t)$, которые определены с точностью до произвольного преобразования Пуанкаре

$$(x, y, z, t) \mapsto (x', y', z', t'),$$

и с метрикой $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. При $t \in \mathbb{R}$ пусть

$$\mathbb{R}_t^3 = \{(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3\}$$

(эта гиперплоскость определена инвариантно).

Определение 1 Пусть на 4-мерном подмногообразии $U \subset \mathbb{R}^4$ (возможно с краем) дана замкнутая 2-форма

$$\omega = -cdt \wedge (E_x dx + E_y dy + E_z dz) + dx \wedge (H_z dy - H_y dz) + H_x dy \wedge dz,$$

и фиксирована гладкая гиперповерхность $\Theta \subset U$. Предположим, что в каждой точке $p \in \Theta$ форма ω_p равна нулю, и существует ненулевой вектор $\xi \in T_p \Theta$, который изотропен относительно ds^2 .

Тогда будем говорить, что Θ является нулевой гиперповерхностью электромагнитного поля, определяемого тензором ω . Если в некоторых галилеевых координатах при фиксированном t множество $\mathcal{F}_t = \mathbb{R}_t^3 \cap \Theta$ непусто, то поверхность $\mathcal{F}_t \subset \mathbb{R}_t^3$ называется нулевым фронтом электромагнитного поля.

Если многообразие U имеет край ∂U , то возможен случай $\Theta \subset \partial U$. Известно, что условие $d\omega = 0$ эквивалентно первой паре уравнений (4.1). Вторая пара уравнений Максвелла определяет на U плотность зарядов $\rho(\mathbf{r}, t)$ и плотностью токов $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ [22].

Поскольку $ds^2(\xi) = 0$ и метрика ds^2 отрицательно определена на \mathbb{R}_t^3 , то в каждой точке $p \in \mathcal{F}_t$ вектор $\xi \in T_p \Theta$ не касается \mathbb{R}_t^3 . Следовательно \mathbb{R}_t^3 трансверсально пересекается с Θ и нулевой фронт \mathcal{F}_t является подмногообразием.

При этом двумерная, гладкая поверхность $\mathcal{F}_t \subset \mathbb{R}_t^3$ *инвариантно* определена в каждой галилеевых координатах (\mathbf{r}, t) .

Определение 1 согласовано с понятием волнового фронта, как поверхности постоянной фазы [22]. В некоторых случаях нулевой фронт отвечает границе 3-мерной области $V_t \subset \mathbb{R}^3$, которую электромагнитное поле заполнило к моменту времени t . Если излучение началось при $t = t_0$ и подмножество ∂V_t гладко зависит от $t > t_0$, то граница Θ области

$$U = \{(\mathbf{r}, t) : t > t_0, \mathbf{r} \in V_t\}$$

является нулевой гиперповерхностью данного поля. Функциям $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ разрешается быть определенными на некоторой окрестности пространственно-временной границы Θ (примеры 4, 5). При этом вопрос о физическом смысле величин \mathbf{E} , \mathbf{H} за пределами области U не рассматривается.

Обсудим физическую мотивацию условия о векторе ξ (определение 1). В простейшем случае имеем $V_t = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : r \leq ct\}$, где $t > 0$, при этом световой конус будущего $\{(\mathbf{r}, t) : r = ct, t > 0\}$ является нулевой гиперповерхностью Θ для поля в области

$$U = \{(\mathbf{r}, t) : r \leq ct, t > 0\}.$$

Тогда для любого $p = (\mathbf{r}, t) \in \Theta$ ненулевой вектор $\xi = (\mathbf{r}, t) \in T_p\Theta$ изотропен относительно метрики ds^2 , т.е. $ds^2(\xi) = 0$.

Пусть электромагнитное поле разлагается в суперпозицию полей точечных зарядов и (или) элементов тока [22]. Предположим, что при любом $t > 0$ существует гладкая огибающая σ_t семейства сфер в \mathbb{R}^3 , ограничивающих элементарные поля, и поверхность σ_t гладко зависит от t . Пространственно-временная граница

$$\Theta = \bigcup_{t>0} \{(\mathbf{r}, t) : \mathbf{r} \in \sigma_t\}$$

области $U \subset \mathbb{R}^4$, которую заполняет результирующее поле, может быть его нулевой гиперповерхностью. Для любого $\mathbf{r} \in \sigma_t$ поверхность σ_t касается некоторой сферы радиуса $c(t - t_0)$ с центром \mathbf{r}_0 , ограничивающей элементарное поле. Ясно, что вектор

$$\xi = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t - t_0) \in T_{(\mathbf{r}, t)}\mathbb{R}^4$$

изотропен в метрике ds^2 . Поэтому он касается светового конуса будущего

$$\Theta_0 = \{(\mathbf{r}, t) : |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = c(t - t_0), t > t_0\}.$$

Физически очевидно, что Θ_0 соприкасается с Θ в точке $p = (\mathbf{r}, t)$. Следовательно вектор ξ лежит $T_p\Theta$.

Согласно определению 1, замкнутая 2-форма ω электромагнитного поля вырождается (и даже обнуляется) в каждой точке нулевой гиперповерхности Θ . В главе 3 введено понятие контактного вырождения симплектической структуры, что в данном частном случае можно определить так.

Предложение 2 Пусть $p \in \Theta$ и χ – любая гладкая функция в окрестности O точки p , удовлетворяющая условию

$$\chi(O \cap \Theta) = 0, \quad d_q \chi \neq 0 \quad \forall q \in O \cap \Theta. \quad (4.2)$$

Вырождение формы ω в точке p является контактным тогда и только тогда, когда в любых локальных координатах пфаффиан $Pf(\omega_q)$ имеет порядок $\chi^3(q)$ при $\Theta \ni q \rightarrow p$.

Для любой кососимметрической матрицы $\omega = (\omega_{ij})$ существует многочлен

$$Pf(\omega) \in \mathbb{Z}[\omega_{1,2}, \dots, \omega_{2n-1,2n}]$$

(т.н. пфаффиан), который с точностью до знака определяется равенством $(Pf(\omega))^2 = \det(\omega)$. Если $n = 2$, то $\pm Pf(\omega) = \omega_{12}\omega_{34} - \omega_{13}\omega_{24} + \omega_{23}\omega_{14}$. В данном случае

$$Pf(\omega) = -(\mathbf{E}, \mathbf{H}).$$

Для любых координат x на O все производные функции $Pf(\omega)(x)$, порядков от 0 до 2 включительно, равны нулю на $O \cap \Theta$. Условие контактности эквивалентно существованию хотя бы одной ненулевой частной производной порядка 3. Достаточно проверить это в какой-нибудь одной системе координат. Значением функции $\chi(\mathbf{r}, t)$, например, может быть евклидово расстояние в \mathbb{R}_t^3 от точки \mathbf{r} до нулевого фронта \mathcal{F}_t .

Гамильтоново векторное поле с энергией f обозначается $sgrad(f)$ [30]. Для любой $f \in C^\infty(O)$ в каждой точке $p \in O \cap \Theta$ существует конечный предел

$$\lim_{\Theta \ni q \rightarrow p} \chi^2(q) sgrad(f)(q) = v_{\chi, f}(p) \in T_p\Theta,$$

гладко зависящий от p . Всевозможные векторы $v_{\chi, f}(p)$ порождают двумерное подпространство $\Pi_p \subset T_p\Theta$. Распределение $p \mapsto \Pi_p$ неинтегрируемо, в силу чего определяет на $O \cap \Theta$ контактную структуру. Она мотивирует термин *контактное вырождение* и называется канонической (см. **3.2.1**). Если ω имеет контактное

вырождение в каждой точке Θ , то каноническая структура Π определена на всей гиперповерхности Θ .

Обозначим $[v]_+$ направление вектора $v \neq 0$, т.е. $[v]_+ = \cup_{\lambda>0} \lambda v$. При $d_p f \neq 0$ обозначим $\mathcal{H}_p(f)$ касательную гиперплоскость к $f^{-1}(f(p))$ в точке p . Пусть $|v|$ – норма вектора v , т.е. $|v|^2 = \sum_i (v^i)^2$. Если ω имеет контактное вырождение в точке $p \in \Theta$ и $d_p f(\Pi_p) \neq 0$, то найдется такая окрестность $O \ni p$, что в каждой точке $p' \in O \cap \Theta$ существует предел

$$\lim_{\Theta \ni q' \rightarrow p'} [sgrad(f)(q')]_+,$$

инцидентный прямой $\Pi_{p'} \cap \mathcal{H}_{p'}(f)$ и гладко зависящий от p' (теорема 6, § 3.3). При этом

$$\lim_{\Theta \ni q' \rightarrow p'} |sgrad(f)(q')| = +\infty.$$

Из следующей теоремы мы извлечем физическое описание электромагнитного поля вблизи точек контактного вырождения его тензора.

Теорема 1 Пусть Θ – нулевая гиперповерхность поля с формой ω , имеющей контактное вырождение в некоторой точке $p_0 \in \Theta$. Тогда существует такая окрестность $O \ni p_0$, что $S = O \cap \Theta$ является гладкой гиперповерхностью и матрица ω невырождена на $O \setminus \Theta$. Если плотность зарядов ρ равна нулю на S , то для любой точки $p = (\mathbf{r}, t) \in S$ существуют гладко зависящие от p , взаимно ортогональные в \mathbb{R}_t^3 пределы

$$\lim_{\Theta \ni q \rightarrow p} [\mathbf{E}(q)]_+ \subset T_{\mathbf{r}} \mathcal{F}_t \quad \text{и} \quad \lim_{\Theta \ni q \rightarrow p} [\mathbf{H}(q)]_+ \subset T_{\mathbf{r}} \mathcal{F}_t,$$

и каждая из величин $|\mathbf{E}(q)|$ и $|\mathbf{H}(q)|$ при $\Theta \ni q \rightarrow p$ имеет порядок $\chi(q)$, где $\chi(\mathbf{r}, t)$ – евклидово расстояние в \mathbb{R}_t^3 от точки \mathbf{r} до нулевого фронта \mathcal{F}_t .

Доказательство. Пусть $\tau = ct$. В окрестности контактной точки p_0 существуют координаты (χ, x_2, x_3, x_4) , в которых

$$\omega = d(\chi^2(dx_2 + x_3 dx_4)).$$

Рассматривая 1-форму

$$\alpha = dx_2 + x_3 dx_4 = \alpha_\tau d\tau + \alpha_x dx + \alpha_y dy + \alpha_z dz$$

и векторное поле $\mathbf{a} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$, выразим компоненты электромагнитного поля через векторный потенциал $\mathbf{A} = -\chi^2 \mathbf{a}$ и скалярный потенциал $\varphi = \chi^2 \alpha_\tau$:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial(-\chi^2 \mathbf{a})}{\partial \tau} - grad(\chi^2 \alpha_\tau) = 2\chi \frac{\partial \chi}{\partial \tau} \cdot \mathbf{a} + \chi^2 \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \tau} - 2\chi \alpha_\tau grad(\chi) - \chi^2 grad(\alpha_\tau),$$

$$\mathbf{H} = \text{rot}(-\chi^2 \mathbf{a}) = -\chi[\text{grad}(\chi), \mathbf{a}] - \chi^2 \text{rot}(\mathbf{a}) . \quad (4.3)$$

Легко проверить, что 1-форма α определяет каноническую контактную структуру, т.е.

$$\Pi_p^2 = T_p S \cap \alpha^{-1}(0) .$$

Докажем, что плоскости Π_p^2 и \mathbb{R}_t^3 трансверсальны в \mathbb{R}^4 . В случае $\Pi_p^2 \subset T_p \mathbb{R}_t^3$ мы имели бы:

$$\text{rk} \begin{pmatrix} \alpha_\tau & \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ \partial_\tau \chi & \partial_x \chi & \partial_y \chi & \partial_z \chi \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Последнее означает, что векторы \mathbf{a}_p и $\text{grad}(\chi)_p$ коллинеарны, т.е. $[\text{grad}(\chi), \mathbf{a}]_p = \mathbf{0}$. Используя равенство $\text{div}(\mathbf{E}) = 0$ получим

$$(\mathbf{a} \partial \chi / \partial \tau - \alpha_\tau \text{grad}(\chi), \text{grad}(\chi)) = 0.$$

Следовательно

$$\mathbf{a} \partial \chi / \partial \tau - \alpha_\tau \text{grad}(\chi) = \mathbf{0}$$

и, в силу (4.3), величина (\mathbf{E}, \mathbf{H}) имеет порядок χ^4 при $q \rightarrow p$. Последнее невозможно из-за контактности каждой точки $p \in S$, достаточно близкой к p_0 .

Таким образом, $d_p \tau(\Pi_p^2) \neq 0$ в любой точке $p = (\mathbf{r}, t) \in S$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{\Theta \ni q \rightarrow p} [s\text{grad}(\tau)(q)]_+ \subset \Pi_p^2,$$

который гладко зависит от p . Предельные направления векторов $s\text{grad}(\tau) = -\mathbf{H}/(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ и \mathbf{H} в точке p совпадают. Поскольку

$$[\text{grad}(\chi), \mathbf{a}]_p \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_p \partial \chi / \partial \tau - \alpha_\tau \text{grad}(\chi)_p \neq \mathbf{0},$$

то при $q \rightarrow p$ предел $[\mathbf{E}]_+$ ортогонален $\text{grad}(\chi)_p$, а бесконечно малые \mathbf{E} и \mathbf{H} имеют порядок χ (4.3). Поскольку $-Pf(\omega) = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$ имеет порядок χ^3 , то направления $\lim[\mathbf{E}]_+$ и $\lim[\mathbf{H}]_+$ взаимно ортогональны в \mathbb{R}_t^3 \square .

Итак, если плотность зарядов на нулевом фронте тождественно равна нулю, то в пространственно-временной близости от контактной точки $(\mathbf{r}_0, t_0) \in \Theta$ электромагнитное поле устроено следующим образом. Величины векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} пропорциональны расстоянию до нулевого фронта \mathcal{F}_t , при этом предельные направления \mathbf{E} и \mathbf{H} касаются фронта и являются взаимно ортогональными.

Угол между векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} отличается от прямого на величину, которая пропорциональна расстоянию до фронта \mathcal{F}_t (и равна нулю на \mathcal{F}_t) (рис. 14).

Условие $\rho(S) = 0$ физически естественно. Оно заведомо выполнено в типичной ситуации поля в электрически нейтральной среде, где $\rho \equiv 0$.

Интегральное подмногообразие контактной структуры Π на $2n + 1$ - мерном многообразии K , имеющее максимально возможную размерность n , называется лежандровым [4].

Следствие 1 Пусть $S \subset \Theta$ состоит из точек контактного вырождения формы ω и $\rho(S) = 0$. Тогда в каждой точке $p = (\mathbf{r}, t) \in S$ плоскость Π_p^2 канонической контактной структуры на S трансверсальна \mathbb{R}_t^3 . В каждой точке $p \in S$ направление $\lim_{\Theta \ni q \rightarrow p} [\mathbf{H}(q)]_+$ инцидентно прямой $\Pi_p^2 \cap \mathbb{R}_t^3$. Интегральные кривые поля предельных направлений магнитного поля \mathbf{H} являются лежандровыми подмногообразиями в контактном многообразии (S, Π) .

Доказательство. В каждой точке $p \in S$ существует предельное направление $I_+(p)$ поля $sgrad(\tau)$, которое гладко зависит от p и инцидентно прямой $\Pi_p^2 \cap \mathbb{R}_t^3$. Интегральные кривые поля I_+ на S , будучи интегральными кривыми распределения прямых $\Pi_p^2 \cap \mathbb{R}_t^3$, являются лежандровыми подмногообразиями \square .

В отличие от магнитного поля \mathbf{H} , предельное направление электрического поля \mathbf{E} не инцидентно Π_p^2 . Иначе плоскость Π_p^2 оказалась бы в \mathbb{R}_t^3 , что невозможно в силу $d_p\tau(\Pi_p^2) \neq 0$. Для определения контактной плоскости Π_p^2 достаточно указать любой ее вектор w , не касающийся \mathbb{R}_t^3 . Пусть \mathbf{A} и φ потенциалы, введенные при доказательстве теоремы 1. Выберем любой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_t^3$, неортогональный \mathbf{A}/φ и удовлетворяющий второму из уравнений (4.5):

$$w = \left(\frac{\mathbf{A}}{c\varphi}, \mathbf{v} \right) \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \left(\frac{\mathbf{A}}{c\varphi} \frac{\partial \chi}{\partial t} + grad(\chi), \mathbf{v} \right) = 0. \quad (4.5)$$

При $\alpha_\tau \neq 0$ искомым вектором является w . В самом деле, тогда $\mathbf{A}/\varphi = -\mathbf{a}/\alpha_\tau$ и второе уравнение (4.5) означает

$$(\mathbf{a} \partial \chi / \partial \tau - \alpha_\tau grad(\chi), \mathbf{v}) = 0,$$

т.е. $d_p\chi(w) = 0$. Из первого уравнения (4.5) следует $(\alpha_\tau d\tau + \alpha_x dx + \alpha_y dy + \alpha_z dz)(w) = 0$. В случае $\alpha_\tau = 0$ имеем $\varphi(p) = 0$. Тогда $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и искомый вектор $w \in \Pi_p^2$ имеет координаты (v_t, \mathbf{v}) , где \mathbf{v} – любой ортогональный \mathbf{a}_p вектор и

$$v_t \partial \chi / \partial t + (grad(\chi), \mathbf{v}) = 0.$$

Рассмотрим электромагнитное поле с ясной физической интерпретацией, у которого почти вся нулевая гиперповерхность состоит из контактных особенностей. Она не является частью пространственно-временной границы, т.к. $\Theta \cap \partial U = \emptyset$.

Пример 3. Пусть в точке $\mathbf{0}$ постоянно находится электрический заряд $q(t) = q_0 f(t)$ (рис. 12). Параметры $t_0 > 0$ и $q_0 > 0$ фиксированы. Согласно теории относительности, в любой точке $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, $r \neq 0$ мгновенное изменение заряда $q(t)$ проявляется через время r/c . Отсюда следует, что при каждом $t > 0$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = kq_0 f\left(t - \frac{r}{c}\right) \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \forall \mathbf{r} \neq \mathbf{0},$$

где k есть константа Кулона. Поэтому $\mathbf{E} = 0$ на сфере $r = ct$.

Рассмотрим пару точечных магнитов в точке $\mathbf{0}$, создающих тождественные статические поля \mathbf{H}_0 . Предположим, что в период времени $[-t_0; t_0]$ один из магнитов вращается в некоторой плоскости, и угол поворота $\alpha(t) = \pi + f(t)\pi$. При $t = 0$ полюса N и S меняются местами, а при $t = t_0$ возвращаются в исходное положение. Таким образом, при $t = 0$ силовые линии одного из двух магнитных полей меняют направления на противоположные (рис. 12). В этот момент результирующее поле \mathbf{H} пары магнитов равно нулю. Как и прежде заключаем, что $\mathbf{H} = 0$ в каждой точке сферы $r = ct$. Поэтому она является нулевым фронтом \mathcal{F}_t электромагнитного поля с компонентами \mathbf{E} и \mathbf{H} . При каждом $t > 0$ обозначим $\mathbf{H}_{0\alpha(t)}$ векторное поле, являющееся результатом поворота магнита на угол $\alpha(t)$. Заметим, что это поле отнюдь не является геометрическим поворотом исходного поля. Обозначим $\beta(\mathbf{r}, t)$ угол в \mathbb{R}_t^3 между векторами $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_{0\alpha(t)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}_0(\mathbf{r}).$$

Легко понять, что при $\chi \rightarrow 0$ каждая из величин E и H имеет порядок малости $\chi = ct - r$. Следовательно $\cos \beta \rightarrow 0$ при $\chi \rightarrow 0$. Вблизи любой точки сферы \mathcal{F}_t , где радиус \mathbf{r} не ортогонален $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$, угол между силовыми линиями $\mathbf{H}_{0\alpha(t)}$ и \mathbf{H}_0 при $r \rightarrow ct$ имеет порядок H . Поэтому $\cos \beta$ есть бесконечно малая порядка χ . Из предложения 2 следует, что в каждой точке гиперповерхности

$$\Theta = \{(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^4 : r = ct, t > 0\},$$

в которой $z \neq 0$, форма ω имеет контактное вырождение.

§4.3. Тензор электромагнитного поля вблизи светового конуса.

Рассмотрим важный случай электромагнитного поля, у которого нулевая гиперповерхность $\Theta \subset \mathbb{R}^4(\mathbf{r}, t)$ совпадает с конусом

$$c^2t^2 - r^2 = 0, \quad t > 0.$$

Пусть $(\mathbf{r}, t_0) \in \Theta$. Мировая линия неподвижной материальной точки $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ при $t = t_0$ проходит через (\mathbf{r}, t_0) трансверсально конусу Θ . На этой линии пфаффман

$$Pf(\omega)(\mathbf{r}, t) = -(\mathbf{E}, \mathbf{H})$$

является функцией времени $t - t_0$ с момента, как поле достигло точки \mathbf{r} в \mathbb{R}^3 . Из предложения 2 следует, что вырождение формы ω в точке (\mathbf{r}, t_0) является контактным тогда и только тогда, когда при $t \rightarrow t_0 + 0$ бесконечно-малая $(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{H}(\mathbf{r}, t))$ имеет порядок $(t - t_0)^3$.

В качестве функции χ , которая равна нулю на нулевой гиперповерхности Θ , будем использовать (лоренц - инвариантный) квадрат релятивистского интервала между событиями, т.е.

$$\chi = c^2t^2 - r^2 = \tau^2 - r^2.$$

Предложение 3 Пусть нулевая гиперповерхность $\Theta \subset \mathbb{R}^4(\mathbf{r}, t)$ некоторого электромагнитного поля вложена в световой конус $c^2t^2 - r^2 = 0$, $t > 0$. Тогда на некоторой окрестности U подмногообразия Θ существуют потенциалы поля

$$\mathbf{A} = (c^2t^2 - r^2)^2 \mathbf{a}, \quad \varphi = (c^2t^2 - r^2)^2 \psi, \quad (4.6)$$

где $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ и $\psi(\mathbf{r}, t)$ - некоторые гладкие функции. Если $\rho(\Theta) = 0$ и потенциалы (4.6) удовлетворяют на U калибровочному условию

$$(\mathbf{A}, \mathbf{r}) - ct\varphi = 0, \quad (4.7)$$

то на множестве U справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -2ct\chi\mathbf{a} - \frac{\chi^2}{2c} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + 2\chi \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{ct} \mathbf{r} - \frac{\chi^2}{2ct} \text{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{r}), & \mathbf{H} &= 2\chi[\mathbf{a}, \mathbf{r}] + \frac{\chi^2}{2} \text{rot}(\mathbf{a}), \\ Pf(\omega) &= \left(\frac{1}{ct} (c^2t^2 \mathbf{a} - (\mathbf{a}, \mathbf{r}) \mathbf{r}, \text{rot}(\mathbf{a})) + \frac{1}{ct} (\text{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{r}), \mathbf{a}, \mathbf{r}) + \frac{1}{c} (\mathbf{a}, \mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}) \right) \chi^3 + O(\chi^4), \\ 4\pi \mathbf{j} &= 2c\chi \left(3\mathbf{a} + 2t \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} - \frac{1}{c^2t} \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right) \mathbf{r} + \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{c^2t^2} \cdot \mathbf{r} + \text{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{r}] + [\text{rot}(\mathbf{a}), \mathbf{r}] + \text{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{r}) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\chi^2}{2c} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} + c^2 \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{a})) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{t} \operatorname{grad}(\mathbf{r}, \mathbf{a}) \right), \\
4\pi\rho = & 2\chi \left(\frac{5(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{ct} + \frac{2}{ct} (\operatorname{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{r}), \mathbf{r}) + \frac{1}{c} \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right) - ct \cdot \operatorname{div}(\mathbf{a}) \right) + \\
& + \frac{\chi^2}{2c} \left(-\frac{1}{t} \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{a}) - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\mathbf{a}) \right).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Если $\rho(\Theta) = 0$ и функции $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$, $\psi(\mathbf{r}, t)$ являются аналитическими, то в некоторой окрестности любой точки Θ существуют аналитические потенциалы (4.6), удовлетворяющие (4.7).

Доказательство. Делимость потенциалов на χ^2 следует из леммы 1 § 3.1. В соответствии с ней вблизи гиперповерхности $U \cap \Theta$ существует такая 1-форма β , что

$$\omega = d\left(\frac{\chi^2}{2}\beta\right).$$

В координатах (τ, x, y, z) , где $\tau = ct$, далее имеем:

$$\frac{\chi^2}{2}\beta = A_\tau d\tau + A_x dx + A_y dy + A_z dz, \quad \omega = d(A_\tau d\tau + A_x dx + A_y dy + A_z dz).$$

Поле $\mathbf{A} = (-A_x, -A_y, -A_z)$ можно считать векторным потенциалом поля, а функцию $\varphi = A_\tau$ рассматривать в качестве скалярного потенциала. Очевидно, что

$$\mathbf{A} = \frac{\chi^2}{2}\mathbf{a}(\tau, x, y, z), \quad \varphi = \frac{\chi^2}{2}\psi(\tau, x, y, z).$$

Теперь докажем существование подходящей замены потенциалов вида

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad}(f), \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial \tau},$$

где функция f делится на χ^3 , т.е. $f = \chi^3 F$ для некоторой функции $F(\tau, x, y, z)$. При таком выборе f равенство

$$(\mathbf{A} + \operatorname{grad}(f), \mathbf{r}) = \left(\varphi - \frac{\partial f}{\partial \tau}\right)\tau$$

эквивалентно следующему:

$$\chi^2 \left(6\tau^2 F + \tau\chi \frac{\partial F}{\partial \tau} - 6Fr^2 + \chi(\operatorname{grad}(F), \mathbf{r}) \right) = \frac{\chi^2}{2}(\psi\tau - (\mathbf{a}, \mathbf{r})).$$

Поскольку $\tau^2 - r^2 = \chi$, последнее равенство верно при условии

$$12F\chi + 2\tau\chi \frac{\partial F}{\partial \tau} + 2\chi(\operatorname{grad}(F), \mathbf{r}) = \psi\tau - (\mathbf{a}, \mathbf{r}). \tag{4.9}$$

В § 4.4 доказано следующее. Равенство нулю плотности зарядов на нулевой гиперповерхности равносильно тому, что при $\chi = 0$ имеет место:

$$4x\tau a_x + 4y\tau a_y + 4z\tau a_z - 4x^2\psi - 4y^2\psi - 4z^2\psi = 4\tau(\mathbf{r}, \mathbf{a}) - 4\psi r^2 = 0 .$$

Поскольку на нулевой гиперповерхности $\tau = r$, то $\chi = 0$ влечет $\tau\psi = (\mathbf{r}, \mathbf{a})$. Отсюда следует, что $\tau\psi - (\mathbf{r}, \mathbf{a})$ делится на χ . Обозначая результат деления через ζ , разделим (4.9) на χ и получим уравнение

$$12F + 2\tau \frac{\partial F}{\partial \tau} + 2(\mathit{grad}(F), \mathbf{r}) = \zeta,$$

которое перепишем в виде:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\zeta}{2\tau} - \frac{(\mathit{grad}(F), \mathbf{r})}{\tau} - \frac{6F}{\tau}.$$

Предполагая удаленность от сингулярной точки $(0, 0, 0)$, случай $\tau = 0$ можно игнорировать. В силу теоремы Коши-Ковалевской последнее уравнение локально имеет решение при любых начальных условиях [8]. Следовательно, искомая функция F существует хотя бы локально. Формулы (4.8) получаются простыми, но довольно громоздкими вычислениями (см. §4.4) с помощью тождеств:

$$\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{a}}{dr} \right) = (\mathit{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{r}), \mathbf{r}) - (\mathbf{a}, \mathbf{r}), \quad \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{a}}{d[\mathbf{a}, \mathbf{r}]} \right) = (\mathit{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{r}), \mathbf{a}, \mathbf{r}) . \quad \square.$$

В § 4.4 показано, что калибровочное условие (4.7) мотивируется естественным, с точки зрения физики, условием обнуления зарядов и токов на световом конусе.

Легко проверить, что произвол в выборе функции f регулируется уравнением

$$\tau \frac{\partial f}{\partial \tau} = (\mathit{grad}(f), \mathbf{r}),$$

которому она обязана удовлетворять. Условие (4.7) означает ортогональность 4-векторов (\mathbf{A}, φ) и (\mathbf{r}, ct) в метрике ds^2 на \mathbb{R}^4 . Поэтому равенства (4.6), (4.7) и (4.8) инвариантны относительно группы Лоренца.

Рассмотрим примеры электромагнитного поля с потенциалами (4.6), удовлетворяющими калибровочному условию (4.7) и имеющего контактные вырождения в точках светового конуса Θ .

Пример 4. Легко удовлетворить классическому условию Лоренца

$$\mathit{div}(\mathbf{A}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

если потребовать

$$(\mathbf{a}, \mathbf{r}) \equiv 0, \quad \text{div}(\mathbf{a}) \equiv 0.$$

Так мы и сделаем. Тогда скалярный потенциал φ равен нулю. Легко проверить, что в этом случае $\rho \equiv 0$. При этом токи \mathbf{j} не обязаны обращаться в ноль. В качестве \mathbf{a} выберем векторное поле скоростей вращения вокруг оси l с угловой скоростью ε , предполагая прямую l вращающейся вокруг оси OZ с угловой скоростью Ω из начального положения OX . Обозначим \mathbf{m} вектор угловой скорости вращения пространства вокруг оси l , тогда

$$\mathbf{m} = \varepsilon (\mathbf{i} \cos \Omega t + \mathbf{j} \sin \Omega t) = \varepsilon (\mathbf{i} \cos \kappa \tau + \mathbf{j} \sin \kappa \tau), \quad \mathbf{a} = [\mathbf{m}, \mathbf{r}],$$

где $\kappa = \Omega/c$. Далее вычисляем:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \tau} = \kappa \varepsilon [-\mathbf{i} \sin \kappa \tau + \mathbf{j} \cos \kappa \tau, \mathbf{r}], \quad \text{rot}(\mathbf{a}) = 2\mathbf{m}, \quad [\text{rot}(\mathbf{a}), \mathbf{r}] = 2\mathbf{a},$$

$$\text{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{r}] = 2\mathbf{a} + x \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + y \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + z \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} = 2\mathbf{a} + r \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial r} = 2\mathbf{a} + \mathbf{a} = 3\mathbf{a}.$$

В данном случае $(\mathbf{r}, \mathbf{a}) \equiv 0$, поэтому

$$\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{a}}{d[\mathbf{a}, \mathbf{r}]} \right) = \left(\text{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{r}), \mathbf{a}, \mathbf{r} \right) = 0$$

и из (4.8) следует, что:

$$\begin{aligned} Pf(\omega) &= -\chi^3 \left(\tau(\mathbf{a}, \text{rot}(\mathbf{a})) + \left(\mathbf{a}, \mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \tau} \right) \right) = \\ &= -\chi^3 \left(\tau([\mathbf{m}, \mathbf{r}], 2\mathbf{m}) + \left(\mathbf{a}, \mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \tau} \right) \right) = -\chi^3 \left(\mathbf{a}, \mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \tau} \right). \end{aligned}$$

При $\Omega \neq 0$ последнее смешанное произведение отлично от нуля тогда и только тогда, когда радиус-вектор \mathbf{r} не параллелен плоскости XOY . В самом деле, если $Pf(\omega) = 0$, то векторы $[\mathbf{m}, \mathbf{r}]$, $[\dot{\mathbf{m}}, \mathbf{r}]$ и \mathbf{r} являются компланарными, поэтому для некоторых чисел α, β, γ имеем

$$\alpha[\dot{\mathbf{m}}, \mathbf{r}] + \beta[\mathbf{m}, \mathbf{r}] + \gamma \mathbf{r} = 0, \quad [\alpha \dot{\mathbf{m}} + \beta \mathbf{m}, \mathbf{r}] + \gamma \mathbf{r} = 0,$$

откуда $[\alpha \dot{\mathbf{m}} + \beta \mathbf{m}, \mathbf{r}] = 0$ и вектор \mathbf{r} параллелен XOY . Если в этой точке $\chi \neq 0$ и $\mathbf{H} = 0$, то в силу

$$[\mathbf{a}, \mathbf{r}] = [[\mathbf{m}, \mathbf{r}], \mathbf{r}] = (\mathbf{m}, \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}, \quad \text{rot}(\mathbf{a}) = 2\mathbf{m}$$

следовательно \mathbf{m} и \mathbf{r} коллинеарны. Но поскольку $\dot{\mathbf{m}}$ ортогонален \mathbf{m} и отличен от нуля, то $\partial_\tau \mathbf{a} = [\dot{\mathbf{m}}, \mathbf{r}] \neq 0$, следовательно $\mathbf{E} \neq 0$.

Таким образом электромагнитное поле, связанное с данным векторным полем \mathbf{a} в силу формул (4.8), имеет следующие свойства:

а) при каждом $t > 0$ его форма ω невырождена всюду, кроме точек нулевой гиперповерхности и плоскости XOY ;

б) на нулевой гиперповерхности поля форма ω исчезает и все точки нулевой гиперповерхности, ни при одном $t > 0$ не лежащие в плоскости XOY , являются *контактными*.

в) при каждом $t > 0$ в каждой точке плоскости XOY , не лежащей на нулевой гиперповерхности, ранг формы ω равен 2.

Интересно, что множество точек вырождения ω , не лежащих на световом конусе, в данном случае является пересечением времениподобного 4-конуса будущего с 3-мерной плоскостью $z = 0$. Замыкание данного множества представляет собой 3-конус $x^2 + y^2 \leq c^2 t^2$, $t \geq 0$, который трансверсально пересекается с нулевой гиперповерхности по своей границе. Имеем

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{a} &= [\dot{\mathbf{m}}, \mathbf{r}] / c, \quad [[\mathbf{m}, \mathbf{r}], \mathbf{r}] = (\mathbf{m}, \mathbf{r}) \mathbf{r} - r^2 \mathbf{m}, \\ \mathbf{E} &= -2ct\chi[\mathbf{m}, \mathbf{r}] - \frac{\chi^2}{2c} [\dot{\mathbf{m}}, \mathbf{r}], \quad \mathbf{H} = (-2r^2\chi + \chi^2) \mathbf{m} + 2\chi(\mathbf{m}, \mathbf{r}) \mathbf{r}, \\ \mathbf{j} &= \frac{c}{8\pi} ((32 - \kappa^2\chi)[\mathbf{m}, \mathbf{r}] + 8t[\dot{\mathbf{m}}, \mathbf{r}]) \chi, \end{aligned}$$

где точка обозначает производную по t и $\kappa = \Omega/c$. Легко проверить, что в данном случае $div(\mathbf{j}) \equiv 0$, т.е. поле токов является соленоидальным. Это естественно для электрически-нейтральной среды ($\rho \equiv 0$), которую мы рассматриваем. Магнитная составляющая \mathbf{H} , очевидно, порождена заданными токами \mathbf{j} , которые генерируются неким внешним по отношению к рассматриваемому полю процессом (другим полем). Физическая реализация этого процесса отнюдь не выглядит невозможной. Однако, данный вопрос относится не к математике, а к постановке эксперимента или поиску похожих явлений в природе. "Всякое решение уравнений поля является полем, которое может быть осуществлено в природе" [22].

Если положим $\Omega = 0$, то $\dot{\mathbf{m}} = 0$ и получается всюду вырожденное электромагнитное поле, изображенное на рис. 13. Оно помещается в быстро растущем шарике радиуса ct и выглядит весьма реалистично.

Пример 5. Рассмотрим электромагнитное поле, которое в силу (4.8) определяется потенциальным полем $\mathbf{a} = grad(F)$ и удовлетворяет условию $(\mathbf{r}, \mathbf{a}) \equiv 0$.

Такое поле легко построить, продолжая любую функцию f на стандартной сфере

$$S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

вдоль радиусов так, чтобы полученная функция F не зависела от r . Такая функция F будет корректно определена всюду, кроме сингулярной точки $(0, 0, 0)$. Поскольку $rot(\mathbf{a}) = 0$, то из (4.8) следует

$$Pf(\omega) = -\chi^3 \left(\mathbf{a}, \mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \tau} \right).$$

Вектор $\partial_\tau \mathbf{a}$ также ортогонален \mathbf{r} , поэтому $Pf(\omega)$ отличен от нуля в каждой точке, где векторы $grad(F)$ и $\partial_\tau(grad(F))$ неколлинеарны. Очевидно, что должным образом меняя со временем функцию f (например вращая линии уровня вокруг фиксированного диаметра), легко обеспечить невырожденность формы ω почти всюду. Одновременно почти всюду на нулевой гиперповерхности мы получим контактные точки вырождения. Для того, чтобы при этом выполнялось условие Лоренца, придется требовать $div(\mathbf{a}) \equiv 0$. Тогда функция F будет гармонической (т.е. $\Delta F \equiv 0$). Но в окрестности сферы S^2 такая функция не существует, так как по известному свойству гармонических функций они не могут принимать наибольших и наименьших значений внутри ограниченных областей (если непрерывно продолжаются на границы) [8]. Однако, на сфере S^2 такая функция примет как свое наибольшее, так и наименьшее значение. В силу $(grad(F), \mathbf{r}) = 0$ они останутся таковыми и в окрестности сферы.

Итак, отказываясь от условия Лоренца мы получили электромагнитное поле в окрестности сферы S^2 , которое удовлетворяет условиям

$$rot(\mathbf{a}) \equiv 0, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{r}) = 0.$$

В данном случае $(\mathbf{H}, \mathbf{r}) \equiv 0$. Из вида тезора поля следует, что функции

$$F_1(x, y, z, t) = t \quad (\text{время}), \quad F_2(x, y, z, t) = r \quad (\text{расстояние})$$

коммутируют между собой, т.е.

$$\{F_1, F_2\} = dF_2(sgrad(F_1)) = \frac{1}{r(\mathbf{E}, \mathbf{H})} (-xH_x - yH_y - zH_z) = -\frac{(\mathbf{H}, \mathbf{r})}{r(\mathbf{E}, \mathbf{H})} = 0.$$

В окрестности сферы S^2 эти две функции являются функционально независимыми, однако каждая поверхность их совместного уровня является концентрической с S^2 сферой (рассматриваемой в фиксированный момент времени). Это не противоречит

теореме Лиувилля, т.к. симплектическая структура имеет вырожденные особенности. Из $\{\tau, r\} = 0$ следует $\{\chi^2, \tau\} = 0$. В силу теоремы 1 § 3.1 кривой градиент функции χ^2 всегда имеет гладкое продолжение на нулевой гиперповерхности вблизи контактных точек. Нетрудно проверить, что

$$sgrad(\chi^2) = \frac{\chi^3}{(\mathbf{E}, \mathbf{H})} \begin{pmatrix} (rot(\mathbf{a}), \mathbf{r}) \\ \tau \cdot rot(\mathbf{a}) - \left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \tau} + grad(\psi), \mathbf{r} \right] \end{pmatrix}.$$

Поскольку в данном случае $rot(\mathbf{a}) = 0$ и $\psi = 0$, то при каждом $\tau > 0$ вектор $sgrad(\chi^2)$ лежит в \mathbb{R}^3 и выражается так:

$$sgrad(\chi^2) = -2 \frac{\left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \tau}, \mathbf{r} \right]}{\left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \tau}, \mathbf{r}, \mathbf{a} \right)}.$$

Вектор $sgrad(\tau)$ также всегда лежит в \mathbb{R}^3 и совпадает с $-\mathbf{H}/(\mathbf{E}, \mathbf{H})$. Его несобственное предельное направление определяется вектором $\pm[\mathbf{a}, \mathbf{r}]$, где \pm — знак смешанного произведения в знаменателе. Поскольку вблизи контактной точки векторы $\partial_\tau \mathbf{a}$ и \mathbf{a} неколлинеарны, предельное направление вектора $sgrad(\tau)$ не параллельно $sgrad(\chi^2)$. Подмножество нулевой гиперповерхности, являющееся совместным уровнем $\chi = 0$ и $\tau = \tau_0$, т.е. фронт поля при каждом $t_0 > 0$ был бы тором, если бы все точки Θ были контактными. Но поскольку при каждом $t > 0$ точки нулевой гиперповерхности, лежащие в плоскости XOY , не являются контактными, фронт поля оказался сферой радиуса $\tau = ct$.

Предложение 4 Пусть нулевая гиперповерхность $\Theta \subset \mathbb{R}^4(\mathbf{r}, t)$ электромагнитного поля вложена в световой конус $c^2 t^2 - r^2 = 0$, $t > 0$, и в каждой точке Θ форма ω имеет контактное вырождение. Предположим, что плотность зарядов ρ равна нулю на Θ . Тогда любая плоскость $\Pi_{(\mathbf{r}, t)}^2$ канонической контактной структуры, определяемой формой ω на Θ , натянута на вектор (\mathbf{r}, t) и предельное направление магнитного поля \mathbf{H} в точке (\mathbf{r}, t) .

Доказательство. Прямо вытекает из следствия 1 и формул (4.5) \square .

Итак, каноническая контактная структура на световом конусе будущего определяется плоскостями, которые натянуты на предельные направления \mathbf{H} и 4-мерные направления световых лучей, выпущенных из начала отсчета.

Предложение 5 Пусть 3-мерное многообразие $\Theta \subset \mathbb{R}^4$ вложено в световой конус $\chi = c^2 t^2 - r^2 = 0$, $t > 0$. Предположим, что на некоторой окрестности Θ заданы

гладкие функции $\mathbf{i}(\mathbf{r}, t)$ и $\sigma(\mathbf{r}, t)$, которые при $\chi \rightarrow 0$, с точностью до величин порядка $O(\chi)$ удовлетворяют условию

$$c^2 t \sigma = (\mathbf{r}, \mathbf{i}) .$$

Пусть $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ есть произвольное решение уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = & -\frac{3}{2t} \mathbf{a} - \frac{1}{2t} \left(\text{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{r}] + [\text{rot}(\mathbf{a}), \mathbf{r}] + \text{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{r}) \right) + \\ & + \left(\frac{\text{div}(\mathbf{a})}{2t} - \frac{3(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{c^2 t^3} - \frac{1}{c^2 t^3} \left(\text{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{r}), \mathbf{r} \right) + \frac{\pi \sigma}{c t^2} \right) \mathbf{r} + \frac{\pi}{c t} \mathbf{i} . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Пусть вектор-функции $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ определяются формулами

$$\mathbf{H} = \text{rot}(\mathbf{A}), \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}(\varphi) , \quad (4.11)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\chi^2}{2} \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) \quad \varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{\chi^2}{2ct} (\mathbf{a}(\mathbf{r}, t), \mathbf{r}) .$$

Тогда при $\chi \rightarrow 0$, с точностью до величин порядка χ^2 , функции

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \chi \mathbf{i}(\mathbf{r}, t), \quad \rho(\mathbf{r}, t) = \chi \sigma(\mathbf{r}, t)$$

удовлетворяют уравнениям Максвелла (4.1).

Доказательство.

Из формул (4.8) видно, что $\mathbf{j} = \chi \mathbf{i}$ и $\rho = \chi \sigma$. Отсюда, пренебрегая малыми порядками χ^2 , получим уравнения

$$\begin{aligned} 3\mathbf{a} + 2t \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} - \frac{1}{c^2 t} \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right) \mathbf{r} + \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{c^2 t^2} \mathbf{r} + \text{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{r}] + [\text{rot}(\mathbf{a}), \mathbf{r}] + \text{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{r}) = \frac{2\pi}{c} \mathbf{i}, \\ \frac{5(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{c t} + \frac{2}{c t} (\text{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{r}), \mathbf{r}) + \frac{1}{c} \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right) - c t \cdot \text{div}(\mathbf{a}) = 2\pi \sigma , \end{aligned} \quad (4.12)$$

из которых легко вывести (4.10). Обратно, при условии

$$c^2 t \sigma = (\mathbf{r}, \mathbf{i}) + O(\chi)$$

уравнения (4.12) следуют из (4.10). В самом деле, из (4.10) получаем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2 t} \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}, \mathbf{r} \right) = & -\frac{\pi}{c^3 t^2} (\mathbf{i}, \mathbf{r}) - \frac{\pi \sigma}{c t} + \frac{3(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{2c^2 t^2} - \frac{1}{2} \text{div}(\mathbf{a}) + \frac{1}{c^2 t^2} (\text{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{r}), \mathbf{r}) + \\ & + \frac{3(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{c^2 t^2} + \frac{1}{2c^2 t^2} (\text{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{r}], \mathbf{r}) + \frac{1}{2c^2 t^2} (\text{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{r}), \mathbf{r}) . \end{aligned}$$

Далее, используя формулу

$$(\text{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{r}], \mathbf{r}) = (\mathbf{a}, \mathbf{r}) + (\text{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{r}), \mathbf{r}) - r^2 \text{div}(\mathbf{a})$$

и заменяя (\mathbf{r}, \mathbf{i}) на $c^2 t \sigma$, а также ct на r , получаем уравнение:

$$-\frac{1}{c^2 t} \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}, \mathbf{r} \right) = -\frac{2\pi\sigma}{ct} + \frac{5(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{c^2 t^2} - \operatorname{div}(\mathbf{a}) + \frac{2}{c^2 t^2} \left(\operatorname{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{r}), \mathbf{r} \right) + O(\chi).$$

Отсюда и из (4.10), с точностью до $O(\chi)$, получается пара уравнений (4.12). Из них, с точностью до $O(\chi^2)$, вытекает вторая пара уравнений Максвелла \square .

Условие $c^2 t \sigma = (\mathbf{r}, \mathbf{i}) + O(\chi)$ следует из уравнения неразрывности

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

которому необходимо удовлетворяют токи и заряды [22].

Итак, если распределение зарядов и токов задано функциями $\mathbf{i}(\mathbf{r}, t)$ и $\sigma(\mathbf{r}, t)$, то для приближенного вычисления электромагнитного поля внутри тонкого слоя, прилегающего к Θ , достаточно решить уравнение (4.10). Интересно, что начальные условия этого УМФ могут быть заданы на световом конусе. Для волновых уравнений этого сделать нельзя, т.к. любой световой конус является характеристической поверхностью, на которой нельзя задать начальные условия в корректно поставленной задаче Коши [8].

§4.4. Плотности токов и зарядов вблизи светового конуса.

Зададимся произвольным векторным полем $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\tau, x, y, z)$, а в качестве функции $\psi = \psi(\tau, x, y, z)$ выберем следующую:

$$\psi = \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{a})}{\tau} = \frac{x a_x + y a_y + z a_z}{\tau}. \quad (4.13)$$

Отсюда посредством (4.6) определяются потенциалы электромагнитного поля и, стало быть, само это поле. В дальнейшем нам потребуются следующие формулы:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{a_x + \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \right)}{\tau}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{a_y + \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} \right)}{\tau}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{a_z + \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} \right)}{\tau}, \quad (4.14)$$

$$\left(\mathbf{r}, \operatorname{grad}(\psi) \right) = \frac{1}{\tau} \left(x \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \right) + y \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} \right) + z \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} \right) \right) + \psi.$$

Нам также потребуется выражение для $Pf(\omega) = -(\mathbf{E}, \mathbf{H})$. Из (4.14) следует, что:

$$Pf(\omega) = \chi^3 \left\{ \frac{1}{\tau} (\tau^2 \mathbf{a} - (\mathbf{r}, \mathbf{a}) \mathbf{r}, \operatorname{rot}(\mathbf{a})) + \frac{1}{\tau} \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} [\mathbf{a}, \mathbf{r}]_x + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} [\mathbf{a}, \mathbf{r}]_y + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} [\mathbf{a}, \mathbf{r}]_z \right) + \left(\mathbf{a}, \mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \tau} \right) \right\} + \frac{\chi^4}{4} (\operatorname{rot}(\mathbf{a}), \operatorname{grad}(\psi)).$$

Более компактно эту формулу можно записать в виде $Pf(\omega) =$

$$\left\{ \frac{1}{\tau} (\tau^2 \mathbf{a} - (\mathbf{r}, \mathbf{a}) \mathbf{r}, \text{rot}(\mathbf{a})) + \frac{1}{\tau} \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{a}}{d[\mathbf{a}, \mathbf{r}]} \right) + \left(\mathbf{a}, \mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \tau} \right) \right\} \chi^3 + \frac{(\text{rot}(\mathbf{a}), \text{grad}(\psi))}{4} \chi^4. \quad (4.15)$$

Напомним, что $(v_1, v_2, v_3) = ([v_1, v_2], v_3)$ (смешанное произведение). Точка $p \in \Theta$ является *контактной*, если и только если в ней отлично от нуля выражение в фигурных скобках.

Из второй пары уравнений Максвелла (4.1) найдем плотность зарядов $\rho(x, y, z, t)$ и плотность тока $\mathbf{j}(x, y, z, t)$. Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{H})_x &= -4y(ya_x - xa_y) + 4z(xa_z - za_x) + 4\chi a_x + \\ &+ 2\chi \left(y \frac{\partial a_x}{\partial y} - x \frac{\partial a_y}{\partial y} - x \frac{\partial a_z}{\partial z} + z \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) + 2\chi [\text{rot}(\mathbf{a}), \mathbf{r}]_x + \frac{\chi^2}{2} \text{rot}(\mathbf{a})_x, \\ \text{rot}(\mathbf{H})_y &= -4z(za_y - ya_z) + 4x(ya_x - xa_y) + 4\chi a_y + \\ &+ 2\chi \left(z \frac{\partial a_y}{\partial z} - y \frac{\partial a_z}{\partial z} - y \frac{\partial a_x}{\partial x} + x \frac{\partial a_y}{\partial x} \right) + 2\chi [\text{rot}(\mathbf{a}), \mathbf{r}]_y + \frac{\chi^2}{2} \text{rot}(\mathbf{a})_y, \\ \text{rot}(\mathbf{H})_z &= -4x(xa_z - za_x) + 4y(za_y - ya_z) + 4\chi a_z + \\ &+ 2\chi \left(x \frac{\partial a_z}{\partial x} - z \frac{\partial a_x}{\partial x} - z \frac{\partial a_y}{\partial y} + y \frac{\partial a_z}{\partial y} \right) + 2\chi [\text{rot}(\mathbf{a}), \mathbf{r}]_z + \frac{\chi^2}{2} \text{rot}(\mathbf{a})_z. \end{aligned}$$

Отсюда находим компоненты вектора

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} &= \text{rot}(\mathbf{H}) - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \tau} : \\ \frac{4\pi}{c} j_x &= -4y(ya_x - xa_y) + 4z(xa_z - za_x) + 4\tau^2 a_x - 4\tau x\psi + \\ &+ 6\chi a_x + 2\chi \left(y \frac{\partial a_x}{\partial y} - x \frac{\partial a_y}{\partial y} - x \frac{\partial a_z}{\partial z} + z \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) + 2\chi [\text{rot}(\mathbf{a}), \mathbf{r}]_x + \\ &+ 4\chi \tau \frac{\partial a_x}{\partial \tau} - 2\chi x \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + 2\chi \tau \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\chi^2}{2} \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial \tau^2} + \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{a}))_x + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial x} \right), \\ \frac{4\pi}{c} j_y &= -4z(za_y - ya_z) + 4x(ya_x - xa_y) + 4\tau^2 a_y - 4\tau y\psi + \\ &+ 6\chi a_y + 2\chi \left(z \frac{\partial a_y}{\partial z} - y \frac{\partial a_z}{\partial z} - y \frac{\partial a_x}{\partial x} + x \frac{\partial a_y}{\partial x} \right) + 2\chi [\text{rot}(\mathbf{a}), \mathbf{r}]_y + \\ &+ 4\chi \tau \frac{\partial a_y}{\partial \tau} - 2\chi y \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + 2\chi \tau \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\chi^2}{2} \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial \tau^2} + \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{a}))_y + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial y} \right), \\ \frac{4\pi}{c} j_z &= -4x(xa_z - za_x) + 4y(za_y - ya_z) + 4\tau^2 a_z - 4\tau z\psi + \\ &+ 6\chi a_z + 2\chi \left(x \frac{\partial a_z}{\partial x} - z \frac{\partial a_x}{\partial x} - z \frac{\partial a_y}{\partial y} + y \frac{\partial a_z}{\partial y} \right) + 2\chi [\text{rot}(\mathbf{a}), \mathbf{r}]_z + \end{aligned}$$

$$+4\chi\tau\frac{\partial a_z}{\partial\tau} - 2\chi z\frac{\partial\psi}{\partial\tau} + 2\chi\tau\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\chi^2}{2}\left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial\tau^2} + \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{a}))_z + \frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial z}\right).$$

Далее вычисляем величину $4\pi\rho = \text{div}(\mathbf{E})$:

$$4\pi\rho = 4x\tau a_x + 4y\tau a_y + 4z\tau a_z - 4x^2\psi - 4y^2\psi - 4z^2\psi + \\ + 10\chi\psi + \frac{4\chi}{\tau}\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}}\right) + 2\chi\left(\mathbf{r}, \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\tau}\right) - 2\chi\tau \cdot \text{div}(\mathbf{a}) - \frac{\chi^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\text{div}(\mathbf{a}) + \Delta\psi\right).$$

Теперь проверим, что на границе поля векторное поле \mathbf{j} и функция ρ обращаются в ноль. Полагая $\chi = 0$, что равносильно

$$\tau = ct = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

из (4.13) получим следующие тождества:

$$4\pi\rho = 4x\tau a_x + 4y\tau a_y + 4z\tau a_z - 4x^2\psi - 4y^2\psi - 4z^2\psi = 4(\tau(\mathbf{r}, \mathbf{a}) - \psi r^2) = \\ = 4\tau^2\left(\frac{(\mathbf{r}, \mathbf{a})}{\tau} - \psi\right) = 0, \\ \frac{4\pi}{c}j_x = -4y(ya_x - xa_y) + 4z(xa_z - za_x) + 4\tau^2 a_x - 4\tau x\psi = \\ = -4y^2 a_x + 4xya_y + 4xza_z - 4z^2 a_x + 4\tau^2 a_x - 4\tau x\frac{(\mathbf{r}, \mathbf{a})}{\tau} = \\ = 4(-y^2 a_x + xy a_y + xz a_z - z^2 a_x + (x^2 + y^2 + z^2)a_x - x(xa_x + ya_y + za_z)) = 0, \\ \frac{4\pi}{c}j_y = -4z(za_y - ya_z) + 4x(ya_x - xa_y) + 4\tau^2 a_y - 4\tau y\psi = \\ = 4(-z^2 a_y + yz a_z + xy a_x - x^2 a_y + (x^2 + y^2 + z^2)a_y - y(xa_x + ya_y + za_z)) = 0, \\ \frac{4\pi}{c}j_z = -4x(xa_z - za_x) + 4y(za_y - ya_z) + 4\tau^2 a_z - 4\tau z\psi = \\ = 4(-x^2 a_z + xz a_x + yz a_y - y^2 a_z + (x^2 + y^2 + z^2)a_z - z(xa_x + ya_y + za_z)) = 0.$$

Итак, на протранственно-временной границе электромагнитного поля рассматриваемого вида зарядов и токов нет. Смысл условия (4.13) состоит в том, что оно обеспечивает обращение в ноль на границе поля плотностей зарядов и токов. Это естественно в ситуации, когда заряды или токи порождаются самим полем. Например, в случае сферического электромагнитного импульса, который ионизирует среду в процессе своего распространения. Хотя избыточных зарядов при ионизации не возникает, большие различия в ускорениях свободных электронов и массивных ионизированных атомов могут вызвать появление заряженных зон. Если же поле распространяется в среде с ненулевой плотностью зарядов, то нулевому значению ρ на границе поля можно дать следующую физическую

интерпретацию. Пусть внешнее поле настолько интенсивно, что электростатическое поле зарядов мало по сравнению с излучаемым ими переменным электромагнитным полем. Тогда заряды, на которые еще не успело подействовать поле, следует игнорировать и считать отсутствующими до того момента, как они приобретут ускорение. Это рассуждение также годится для описания процесса ионизации под действием распространяющегося поля, когда значительно более массивные положительные ионы имеют относительно малые ускорения и, по этой причине, могут быть проигнорированы.

Поскольку в той части выражения для плотности тока \mathbf{j} , которая в общем случае (при другом выборе функции ψ) не обязана делиться на χ , присутствует слагаемое

$$4\tau^2\mathbf{a} = 4(r^2\mathbf{a} + (\tau^2 - r^2)\mathbf{a}) = 4\mathbf{a}(x^2 + y^2 + z^2) + 4\chi\mathbf{a},$$

то компоненты плотности тока можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c}j_x &= 2\chi \left\{ 6a_x + 2\tau \frac{\partial a_x}{\partial \tau} + \frac{x}{\tau^2} \left((\mathbf{a}, \mathbf{r}) - \tau \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \tau} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}, \mathbf{r} \right]_z - \left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}, \mathbf{r} \right]_y + [\text{rot}(\mathbf{a}), \mathbf{r}]_x + \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \right) \right\} + \\ &\quad + \frac{\chi^2}{2} \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial \tau^2} + \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{a}))_x + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial x} \right), \\ \frac{4\pi}{c}j_y &= 2\chi \left\{ 6a_y + 2\tau \frac{\partial a_y}{\partial \tau} + \frac{y}{\tau^2} \left((\mathbf{a}, \mathbf{r}) - \tau \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \tau} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}, \mathbf{r} \right]_x - \left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}, \mathbf{r} \right]_z + [\text{rot}(\mathbf{a}), \mathbf{r}]_y + \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} \right) \right\} + \\ &\quad + \frac{\chi^2}{2} \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial \tau^2} + \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{a}))_y + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial y} \right), \\ \frac{4\pi}{c}j_z &= 2\chi \left\{ 6a_z + 2\tau \frac{\partial a_z}{\partial \tau} + \frac{z}{\tau^2} \left((\mathbf{a}, \mathbf{r}) - \tau \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \tau} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}, \mathbf{r} \right]_y - \left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}, \mathbf{r} \right]_x + [\text{rot}(\mathbf{a}), \mathbf{r}]_z + \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} \right) \right\} + \\ &\quad + \frac{\chi^2}{2} \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial \tau^2} + \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{a}))_z + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial z} \right). \end{aligned}$$

В аналогичной части выражении для ρ присутствует слагаемое

$$4\tau(\mathbf{a}, \mathbf{r}) - 4\psi(x^2 + y^2 + z^2) = 4(\mathbf{a}, \mathbf{r}) \left(\tau - \frac{r^2}{\tau} \right) = 4\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{\tau}(\tau^2 - r^2) = 4\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{\tau}\chi.$$

Отсюда, используя легко проверяемые формулы

$$\left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}, \mathbf{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}, \mathbf{r}) - a_x, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}, \mathbf{r}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}, \mathbf{r}) - a_y, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}, \mathbf{r}\right) = \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}, \mathbf{r}) - a_z,$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}, \mathbf{r}\right]_z - \left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}, \mathbf{r}\right]_y = \frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{a}, \mathbf{r}]_z - \frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{a}, \mathbf{r}]_y - 2a_x,$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}, \mathbf{r}\right]_x - \left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}, \mathbf{r}\right]_z = \frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{a}, \mathbf{r}]_x - \frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{a}, \mathbf{r}]_z - 2a_y,$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}, \mathbf{r}\right]_y - \left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}, \mathbf{r}\right]_x = \frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{a}, \mathbf{r}]_y - \frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{a}, \mathbf{r}]_x - 2a_z,$$

можно получить следующие выражения для плотностей токов и зарядов:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = 2\chi \left\{ 3\mathbf{a} + 2\tau \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \tau} - \frac{1}{\tau} \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \tau} \right) \mathbf{r} + \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{\tau^2} \mathbf{r} + \text{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{r}] + [\text{rot}(\mathbf{a}), \mathbf{r}] + \text{grad}(\mathbf{a}, \mathbf{r}) \right\} + \\ + \frac{\chi^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial \tau^2} + \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{a})) + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{\tau} \text{grad}(\mathbf{r}, \mathbf{a}) \right), \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} 4\pi\rho = 2\chi \left\{ \frac{7(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{\tau} + \frac{2}{\tau} \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{a}}{d\tau} \right) + \left(\mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \tau} \right) - \tau \cdot \text{div}(\mathbf{a}) \right\} + \\ + \frac{\chi^2}{2} \left(-\frac{1}{\tau} \Delta(\mathbf{r}, \mathbf{a}) - \frac{\partial}{\partial \tau} \text{div}(\mathbf{a}) \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Произвол рассматриваемой конструкции обусловлен выбором поля $\mathbf{a}(\tau, x, y, z)$, через которое выражается функция ψ (4.7).

Теперь мы ограничим произвол в выборе поля \mathbf{a} , следуя классической теории [22]. Произвольная замена потенциалов вида

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad}(f), \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial \tau}$$

не меняет электромагнитное поле, сохраняя то же самое распределение зарядов $\rho(x, y, z, t)$ и токов $\mathbf{j}(x, y, z, t)$. Неопределенность потенциалов \mathbf{A} и φ позволяет вводить различные калибровочные условия, среди которых наиболее важным является условие Лоренца:

$$\text{div}(\mathbf{A}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Поскольку $\chi = \tau^2 - x^2 - y^2 - z^2$, то при условии (4.13) имеет место:

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{A}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{div}(\mathbf{A}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \text{div} \left(\frac{\chi^2}{2} \mathbf{a} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\chi^2}{2} \psi \right) = \\ = -2\chi(\mathbf{r}, \mathbf{a}) + 2\chi\tau\psi + \frac{\chi^2}{2} \left(\text{div}(\mathbf{a}) + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{a})}{\tau} \right). \end{aligned}$$

В силу определения функции ψ (4.13) имеем $\tau\psi = (\mathbf{r}, \mathbf{a})$, поэтому в данном случае условие Лоренца означает следующее:

$$\tau \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \tau}, \mathbf{r} \right) + \tau^2 \operatorname{div}(\mathbf{a}) - (\mathbf{r}, \mathbf{a}) = 0.$$

Его можно переписать в виде

$$t \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}, \mathbf{r} \right) + c^2 t^2 \operatorname{div}(\mathbf{a}) - (\mathbf{r}, \mathbf{a}) = 0.$$

С точки зрения физической реализуемости модели электромагнитного поля важно отношение j/ρ . В частности, следует найти предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{j}{\rho} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{j}|}{\rho}.$$

Вектор \mathbf{j}/ρ выражает скорость \mathbf{v} направленного движения зарядов. Поскольку величина j вектора $\mathbf{j} = j\mathbf{n}$ равна заряду, протекающему за единицу времени через единицу площади в направлении \mathbf{n} через площадку dS , ортогональную \mathbf{n} , то

$$\mathbf{j}/\rho = \frac{dq}{dSdt} \mathbf{n}/\rho = \frac{\rho dV}{dSdt} \mathbf{n}/\rho = \frac{\rho dS v dt}{dSdt} \mathbf{n}/\rho = v \mathbf{n} = \mathbf{v}.$$

В физике также принято считать, что \mathbf{v} есть средневзвешенная скорость движения точечных (элементарных) зарядов, т.е.

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N k_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{dq} \mathbf{v}_i.$$

Здесь числа k_i являются весами,

$$dq = \sum_{j=1}^N q_j$$

есть полный заряд в бесконечно-малой области dV с центром $P \in dS$ и N – общее число точечных зарядов в этой области, \mathbf{v}_i – скорость i -го точечного заряда (частицы).

Если найденная величина вектора \mathbf{v} окажется больше скорости света c , то построенная математическая модель войдет в противоречие с релятивистской механикой, а значит с электродинамикой. Однако следует заметить, что в случае нулевой плотности зарядов ($\rho = 0$), но в присутствии тока $\mathbf{j} \neq 0$ определение скорости $\mathbf{v} = \mathbf{j}/\rho$ теряет смысл. Так бывает, например, в электрически нейтральных проводниках с током (или полупроводниках).

В связи с калибровочным условием (4.7) интересен вопрос о его совместимости с условием Лоренца. Возможность одновременного наложения на потенциалы этих двух условий, вообще говоря, ниоткуда не следует.

Замечание 1 Для потенциалов вида (4.6), (4.7) условие Лоренца эквивалентно следующему тождеству:

$$\frac{1}{t} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{a}) = 0.$$

Заметим, что это тождество вполне аналогично условию Лоренца.

Предложение 6 Пусть 3-мерное многообразие $S \subset \mathbb{R}^4$, являющееся подмножеством границы Θ электромагнитного поля, вложено в конус

$$c^2 t^2 - r^2 = 0, \quad t > 0,$$

и на гиперповерхности S плотность зарядов ρ тождественно равна нулю.

Предположим, что в некоторой окрестности точки $P_0 \in S$ потенциалы вида

$$\mathbf{A} = \frac{(c^2 t^2 - r^2)^2}{2} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r}, t), \quad \varphi = \frac{(c^2 t^2 - r^2)^2}{2ct} \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{r}, t), \mathbf{r})$$

удовлетворяют условию Лоренца. Если в каждой неособой точке, достаточно близкой к P_0 , плотность зарядов ρ отлична от нуля, то

$$\lim_{\Theta \ni P \rightarrow P_0} \frac{(\mathbf{r}(P), \mathbf{j}(P))}{\rho(P) |\mathbf{r}(P)|} = \lim_{P \rightarrow P_0, \chi(P) > 0} \frac{(\mathbf{r}(P), \mathbf{j}(P))}{\rho(P) \cdot r(P)} = c.$$

Доказательство. В данном случае условие Лоренца эквивалентно:

$$\tau \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \tau}, \mathbf{r} \right) + \tau^2 \operatorname{div}(\mathbf{a}) - (\mathbf{r}, \mathbf{a}) = 0.$$

По одной из формул векторного анализа имеем :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{r}] &= (\mathbf{r}, \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a}, \nabla) \mathbf{r} + \operatorname{div}(\mathbf{r}) \mathbf{a} - \operatorname{div}(\mathbf{a}) \mathbf{r} = \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} x + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} y + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} z \right) - \mathbf{a} + 3\mathbf{a} - \operatorname{div}(\mathbf{a}) \mathbf{r} = \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} x + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} y + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} z \right) + 2\mathbf{a} - \operatorname{div}(\mathbf{a}) \mathbf{r}, \\ (\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{r}], \mathbf{r}) &= \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{a}}{dr} \right) + 2(\mathbf{a}, \mathbf{r}) - r^2 \operatorname{div}(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Используя эти формулы, из (4.16) и (4.17) получим:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}, \mathbf{r}) &= 2\chi \left(8(\mathbf{a}, \mathbf{r}) + (r^2 - 3\tau^2) \operatorname{div}(\mathbf{a}) + 2(\mathbf{r}, (\mathbf{r}, \nabla) \mathbf{a}) \right) + \\ &+ \frac{\chi^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial \tau^2} + \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{a})) + \frac{\partial}{\partial \tau} (\operatorname{grad}(\psi), \mathbf{r}) \right), \\ 4\pi r \rho &= 2\chi \left(\frac{7r}{\tau} (\mathbf{a}, \mathbf{r}) + \frac{2r}{\tau} (\mathbf{r}, (\mathbf{r}, \nabla) \mathbf{a}) + \frac{r}{\tau} (\mathbf{a}, \mathbf{r}) - r\tau \operatorname{div}(\mathbf{a}) - r\tau \cdot \operatorname{div}(\mathbf{a}) \right) + \\ &+ \frac{r\chi^2}{2} \left(-\Delta \psi - \frac{\partial}{\partial \tau} \operatorname{div}(\mathbf{a}) \right). \end{aligned}$$

Так как при $\chi = 0$ имеем $r = \tau$, отсюда сразу следует, что

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{j}, \mathbf{r})}{r\rho} = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{8(\mathbf{a}, \mathbf{r}) + (r^2 - 3\tau^2)div(\mathbf{a}) + 2(\mathbf{r}, (\mathbf{r}, \nabla)\mathbf{a})}{8r(\mathbf{a}, \mathbf{r})/\tau + 2r(\mathbf{r}, (\mathbf{r}, \nabla)\mathbf{a})/\tau - 2r\tau div(\mathbf{a})} \cdot c = c \quad \square.$$

Как мы видели вектор $\mathbf{v} = \mathbf{j}/\rho$ выражает среднюю скорость движения заряженных частиц. Вблизи границы поля таковыми могут быть электроны. В точке $p_0 \in \Theta$ предельное значение проекции \mathbf{v} на радиальное направление \mathbf{r} равно c . Возможно это означает, что если вблизи границы поля $\rho \neq 0$, то калибровочное условие (4.7) физически несовместимо с условием Лоренца. Следующее высказывание П.А.М. Дирака, однако, предостерегает от поспешных выводов: "Измерение проекции скорости свободного электрона всегда приводит к результату $\pm c$. Легко убедиться, что это заключение остается в силе также в присутствии поля. ... Это, однако, не является действительным противоречием, поскольку теоретическая скорость в вышеприведенном заключении есть скорость в определенный момент времени, тогда как наблюдаемые скорости всегда являются средними скоростями по некоторому конечному интервалу времени" [10, стр. 361].

В самом деле, при нулевом значении координаты χ поле практически отсутствует в той точке пространства, где определяется скорость электрона. Это означает, что каждый электрон на границе поля является свободным. Если распространяющееся поле ионизирует среду или как-либо иначе порождает свободные заряды, то теоретически на границе поля их нет. Но практически, очевидно, одиночные электроны должны присутствовать – хотя бы в силу квантовых флуктуаций. Из-за ничтожной ($\rho = 0$) плотности зарядов никакого направленного движения электронов на границе быть не может. Поэтому предельное значение скорости \mathbf{v} на границе поля, по-видимому, имеет физический смысл скорости свободного электрона. Это должно быть так еще и потому, что вблизи движущегося со скоростью света фронта поля измерение средних величин едва ли возможно. Выше мы видели пример поля (пример 4), в котором при $\rho \equiv 0$ совмещаются условия (4.7) и Лоренцево.

Замечание 2 Если потенциалы вида (4.6) удовлетворяют (4.7) и условию Лоренца, то имеют место тождества:

$$\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} = 2\chi \left(3\mathbf{a} + 2t\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t} + div(\mathbf{a})\mathbf{r} + rot[\mathbf{a}, \mathbf{r}] + [rot(\mathbf{a}), \mathbf{r}] + grad(\mathbf{a}, \mathbf{r}) \right) - \frac{\chi^2}{2} \left(\Delta\mathbf{a} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{a}}{\partial t^2} \right),$$

$$4\pi\rho = \frac{2\chi}{ct} \left(6(\mathbf{a}, \mathbf{r}) + 2(grad(\mathbf{a}, \mathbf{r}), \mathbf{r}) - 2c^2t^2 div(\mathbf{a}) \right) - \frac{\chi^2}{2ct} \left((\Delta\mathbf{a}, \mathbf{r}) + 2div(\mathbf{a}) + t\frac{\partial div(\mathbf{a})}{\partial t} \right).$$

Доказательство получается из формул (4.16) и (4.17) или из (4.8).

Список литературы

- [1] Апфельрот Г.Г. *Не вполне симметричные тяжелые гороскопы*. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. В Сборнике, посвященном С.В. Ковалевской. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1940, 61–155. М., 1940.
- [2] Арнольд В.И. *Математические методы классической механики*. М.: "Наука", 1979.
- [3] Арнольд В.И. *Особенности каустик и волновых фронтов*. М.: "Фазис", 1996.
- [4] Арнольд В.И., Гивенталь А.Б. *Симплектическая геометрия*. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 4 (1985), 7-139.
- [5] Богоявленский О.И. *Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики*. Изв. АН СССР, серия мат. **48** (1984), № 5, 883-938.
- [6] Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Т. *Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*. Успехи мат. наук. **45** (1990), № 2, 49-77.
- [7] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Топология. Геометрия. Классификация*. Ижевск: "Удмуртский университет", 1999.
- [8] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*. М.: "Наука", 1988, 217.
- [9] Гийемин В., Стернберг С. *Геометрические асимптотики*. М.: "Мир", 1981.
- [10] Дирак П.А.М. *Принципы квантовой механики*. М.: "Физматгиз", 1960.
- [11] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия*. М.: "Наука", 1979.
- [12] Зотьев Д.Б. *О симплектической геометрии многообразий с почти всюду невырожденной замкнутой 2-формой*. Мат. заметки. **76** (2004), № 1, 66-77.
- [13] Зотьев Д.Б. *Фазовая топология волчка Ковалевской в $SO(2)$ - симметричном двойном силовом поле*. Механика твердого тела. ИПММ НАН Украины. **34** (2004), 66-71.

- [14] Зотьев Д.Б. *Фазовая топология I класса Аппельрота волчка Ковалевской в магнитном поле.* *Фундаментальная и прикладная математика.* **12** (2006), № 1, 95-128.
- [15] Зотьев Д.Б. *Об одном частном интеграле, который можно извлечь из матрицы Пуассона.* *Нелинейная динамика.* **3** (2007), № 1, 75-80.
- [16] Зотьев Д.Б. *Контактные вырождения замкнутых 2-форм.* *Математический сборник.* **198** (2007), № 4, 47-78.
- [17] Зотьев Д.Б., Харламов М.П. *Изоэнергетические многообразия и области возможности движения твердого тела в двойном поле сил.* *Нелинейная динамика.* **1** (2005), № 1, 23-31.
- [18] Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: "Наука", 1976, 511 (шп. 6.165).
- [19] Картан Э. *Интегральные инварианты.* М.-Л.: "Гостехиздат", 1940, 137.
- [20] Кириллов А.А. *Локальные алгебры Ли.* *Успехи мат. наук.* **31** (1976), № 4, 57-76.
- [21] Ковалевская С.В. *Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки.* В книге "Научные работы". М.: "Наука", 1948, 153-220.
- [22] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля.* М.: "Физматгиз", 1962.
- [23] Новиков С.П. *Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса.* *Успехи мат. наук.* **37** (1982), № 5, 3-49.
- [24] Ошемков А.А. *Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твердого тела на $SO(4)$.* *Успехи мат. наук.* **42** (1990), № 2, 199 - 200.
- [25] Пуанкаре А. *Новые методы небесной механики.* Избр. труды, 1 т. М.: "Наука", 1971.
- [26] Топалов П.Й. *Включение бутылок Клейна в теорию топологической классификации гамильтоновых систем.* *Успехи мат. наук.* **49** (1994), № 1, 227-228.
- [27] Фоменко А.Т. *Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем.* *ДАН СССР.* **287** (1986), № 5, 1071-1072.

- [28] Фоменко А.Т. *Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости*. Изв. АН СССР, серия матем. **50** (1986), № 6, 1276-1307.
- [29] Фоменко А.Т. *Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю*. Функциональный анализ и его приложения. **22** (1988), № 4, 38-51.
- [30] Фоменко А.Т. *Симплектическая геометрия. Методы и приложения*. М.: "МГУ", 1988.
- [31] Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. *Гомотопическая топология*. М.: "Наука", 1989.
- [32] Фоменко А.Т., Цишанг Х. *Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*. Изв. АН СССР, серия матем. **54** (1990), № 3, 546-572.
- [33] Харламов М.П. *Топологический анализ классических интегрируемых случаев в динамике твердого тела*. ДАН СССР. **273** (1983), № 6, 1322-1325.
- [34] Харламов М.П. *Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской*. Прикладная математика и механика. **47** (1983), № 6, 922-930.
- [35] Abdullaev S.S. *The Hamilton–Jacobi method and Hamiltonian maps*. J. Phys. A: Math. Gen. **35** (2002), 2811–2832.
- [36] Abraham R., Marsden J.E. *Foundations of mechanics*. Benjamin/Cummings Publishing Company, London, Amsterdam, 1978.
- [37] Arnold V.I. *First step of local symplectic algebra, Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications*. D.B. Fuchs 60-th anniversary collection. Providence, RI: American Mathematical Society. Transl., Ser. 2, Am. Math. Soc. 194(44), 1999, 1–8.
- [38] Arnold V.I., Gusein-Zade S.M., Varchenko A. N. *Singularities of Differentiable Maps I*, Monogr. Math. 82. Birkhauser, Boston, 1985.
- [39] Balescu R., Vlad M., Spineanu F. *Tokamap: A Hamiltonian twist map for magnetic field lines in toroidal geometry*. Phys. Rev., E 58. **951** (1998).

- [40] Bhag Singh Guru. *Electromagnetic Field Theory Fundamentals*. Cambridge University Press, 2004.
- [41] Bobenko A.I., Reyman A.G., Semenov-Tian-Shansky M.A. *The Kowalewski top 99 years later: a Lax pair, generalizations and explicit solutions*. *Comm. Math. Phys.* **122** (1989), № 2, 321-354.
- [42] Bolsinov A.V. *Methods of calculation of the Fomenko-Zieschang invariant*. *Advances in Soviet Mathematics*. AMS. **6** (1991), 147-183.
- [43] Bolsinov A.V., Fomenko A.T. *Integrable Hamiltonian Systems: Geometry, Topology, Classification*. Chapman & Hall/CRC. A CRC Press Company, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C. USA, 2004.
- [44] Bolsinov A.V., Richter P.H., Fomenko A.T. *The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top*. *Sbornik: Mathematics*. **191:2** (2000), 3-42.
- [45] Boothby W.M. and Wang H.C. *On contact manifolds*. *Annals of Math. (2)*. **68** (1958), 721-734.
- [46] Bott R. *Non-degenerate critical manifolds*. *Ann. of Math., Ser. 2*. **60** (1954), № 2, 248-261
- [47] Cary J.R. *Lie transform perturbation theory for Hamiltonian systems*. *Phys. Rep.* **129** (1981).
- [48] Darboux G. *Lecons sur la theorie generale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal*. Paris, Gautier, Villar, 1891.
- [49] De Groot S., Suttorp L. *Foundations of Electrodynamics*. Amsterdam, 1972.
- [50] Domitrz W., Janeczko S., Pasternak-Winiarski Z. *Geometry and representations of the singular symplectic forms*. *Geometry and topology of caustics - CAUSTICS 02*. Banach Center Publ, **62** (2004), 57-71.
- [51] Domitrz W., Janeczko S. *Normal forms of symplectic structures on the stratified spaces*. *Colloq. Math.* **68** (1995), 101-119.
- [52] Eliashberg Y. *A few remarks about symplectic filling*. *Geom. Topology*. **8** (2004), 277-293.

- [53] Eliashberg Y. *Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work*. Ann. Inst. Fourier. **42** (1992), № 1-2, 165-192.
- [54] Eliashberg Y. *On symplectic manifolds with some contact properties*. J. Differential Geometry. **33** (1991), № 1, 233-238.
- [55] Eliashberg Y. *The wave fronts structure theorem and its applications to symplectic topology*. Funct. Anal. Appl. **3** (1987), 65–72.
- [56] Etnyre J. *On symplectic fillings*. Algebr. & Geom. Topology. **4** (2004), 73-80.
- [57] Etnyre J., Honda K. *Tight contact structures with no symplectic fillings*. Invent. Math. **148** (2002), № 3, 609–626.
- [58] Fomenko A.T. *Symplectic Geometry. (Second edition)*. Gordon and Breach, 1995.
- [59] Fomenko A.T. *The theory of invariants of multidimensional integrable Hamiltonian systems (with arbitrary degrees of freedom). Molecular table of all integrable systems with two degrees of freedom*. In: Advances in Soviet Mathematics. AMS. **6** (1991), 1-36.
- [60] Geiges H. *Constructions of contact manifolds*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **121** (1997), 455–464.
- [61] Giggini P. *Strongly fillable contact 3-manifolds without Stein fillings*. Geometry & Topology, **9** (2005), 1677-1687.
- [62] Golubitsky M., Tischler D. *An example of moduli for singular symplectic forms*. Invent. math. **38** (1977), № 3, 219-225.
- [63] Gompf R. *A new construction of symplectic manifolds*. Annals of Mathematics. **142** 1995, 527-595.
- [64] Guillemin V., Sternberg S. *Symplectic technique in physics*. Cambridge University Press, 1984.
- [65] Gray J.W. *Some global properties of contact structures*. Ann. of Math. **2** (1959), № 69, 421-450.
- [66] Gromov M. *Pseudo-holomorphic curves in almost complex manifolds*. Invent. Math. **82:2** (1985), 307–347.

- [67] Hamilton W.R. *On a general method in dynamics by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central characteristic function*. I. Philosophical Transactions. 1834, 247-308, Mathematical Papers, v. I, 103-161. II Philosophical Transactions, 1835, 95-114, Mathematical Papers, v. II, 162-211.
- [68] Hehl F.W., Obukhov Y.N. *Foundations of Classical Electrodynamics*. Birkhauser, Boston, 2001.
- [69] Hermann R. *Lie algebras and quantum mechanics*. W.A. Benjamin, 1970.
- [70] Janeczko S., Kowalczyk A. *On singularities in the degenerated symplectic geometry*. Hokkaido Math. J. **19** (1990), 103-123.
- [71] Kharlamov M.P. *Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields*. Regular & chaotic dynamics. **10** (2005), № 4, 381-398.
- [72] Kharlamov M.P., Zotev D.B. *Non-degenerate energy surfaces of rigid body in two constant fields*. Regular & chaotic dynamics. **10** (2005), № 1, 15-20.
- [73] Kovalev A.M. *Invariant and integral manifolds of dynamical systems and the problem of integration of the Euler-Poisson equations*. Regular & chaotic dynamics. **9** (2004), № 1, 59-72.
- [74] Liouville J. *Note sur l'integration des equations differentielles de la dynamique, presentee au bureau des longitudes le 29 juin 185*. Journal de Mathematiques pures et appliquees. **20** (1855), 137-138.
- [75] Lisca P. *On symplectic fillings of 3-manifolds*. Tr. J. Mathematics. **23** (1999), 151-159.
- [76] Martinet J. *Sur les singularities des formes differentielles*. Ann. Inst. Fourier. **20** (1970), № 1, 95-178.
- [77] Martinet J. *Formes de contact sur les varietes de dimension 3*. in: Proc. Liverpool Singularities Sympos. II, Lecture Notes in Math., 209. Springer, Berlin, 1971, 142-163.
- [78] Mc Duff D. *Symplectic manifolds with contact type boundaries*. Invent. Math. **103** (1991), № 3, 651-671.

- [79] Moser J. *On the volume elements on manifolds*. Trans. Amer. Math. Soc. **120** (1965), № 2, 280-296.
- [80] Nono T., Mimura F. *Poisson bracket under mappings*. Hokkaido Math. Journal. (1972), № 1, 232-241.
- [81] Oshemkov A.A. *Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations*. Advances in Soviet Math. AMS. **6** (1991), 67-146. pp. 67-146.
- [82] Pnevmatikos S. *Structures hamiltoniennes en presence de contraintes*. C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. A-B 289. (1979), № 16, A799-A802.
- [83] Pnevmatikos S. *Singularites en geometrie symplectique*. Symplectic geometry (Toulouse, 1981). Res. Notes in Math., 80, Pitman, Boston, Mass., London, 1983.
- [84] Pnevmatikos S. *Structures symplectiques singulieres generiques*. Ann. Inst. Fourier. **34** (1984), № 3, 201-218.
- [85] Pnevmatikos S., Pliakis D. *Gauge fields with generic singularities*. Math. Phys. Anal. Geom. **3** (2000), № 4, 305-321.
- [86] Poisson S.D. *Traite de mecanique*. Paris, 1833.
- [87] Roussarie R. *Modeles locaux de champs et de formes*. Asterisque. **30** (1975), 99.
- [88] Thurston W.P., Winkelnkemper H.E. *On the existence of contact forms*. Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), 345-347.
- [89] Tien Zung Nguen. *Decomposition of nondegenerate singularities of integrable Hamiltonian systems*. Letters in Mathematical Physics. **33** (1995), 187-193.
- [90] Vaisman I. *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*. Progress in Math., v. 118. Basel: Birkhauser, 1994.
- [91] Warnic K.F., Selfridge R., Arnold D.V. *Teaching electromagnetic field theory using differential forms*. 2005.
- [92] Weinstein A. *Lectures on symplectic manifolds*. in C.B.M.S. Conf. Series., Am. Math. Soc., Providence, R.I. (1977), № 29.
- [93] Weinstein A. *The local structure of Poisson manifolds*. J. Diff. Geom. **18** (1983), 523-557.

- [94] Weinstein A. *Contact surgery and symplectic handlebodies*. Hokkaido Math. Journal. **20** (1991), № 2, 241-251.
- [95] Zotev D.B. *Fomenko-Zieschang Invariant in the Bogoyavlenskiyi Integrable Case*. Regular & chaotic dynamics. **5** (2000), № 4, 437-458.
- [96] Zotev D.B. *On a partial integral which can be derived from Poisson Matrix*. Regular & chaotic dynamics. **12** (2007), № 1, 81-85.

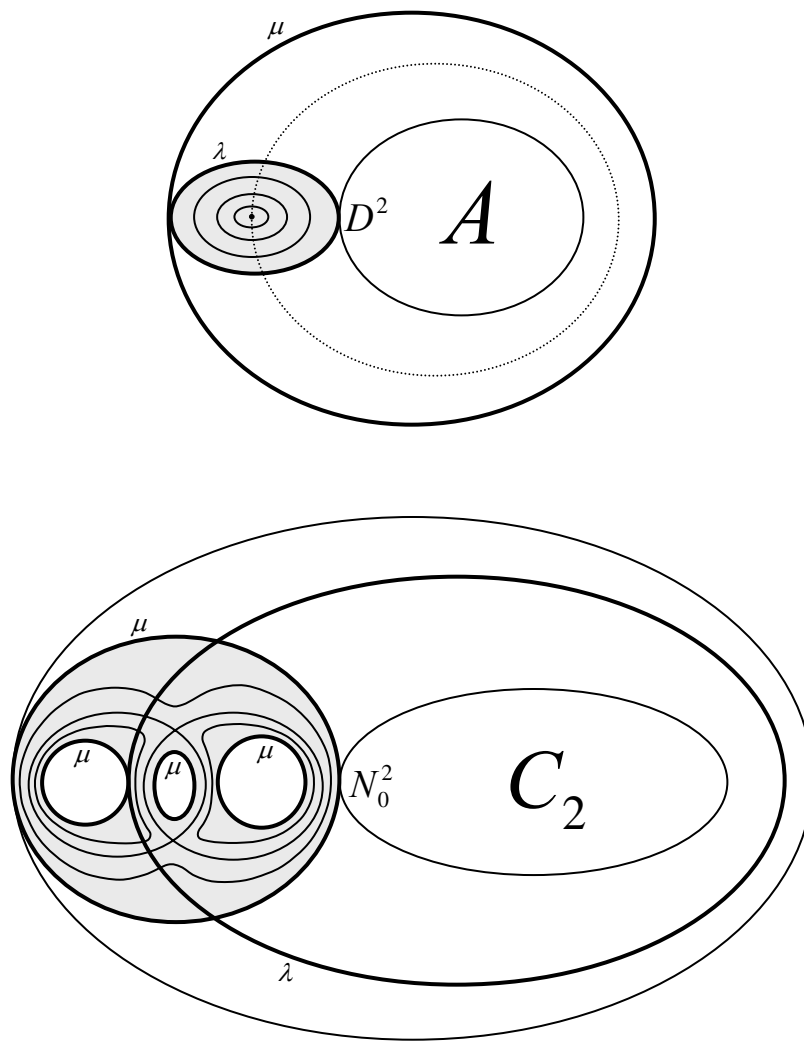


Рис. 1 Атомы A и C_2 .

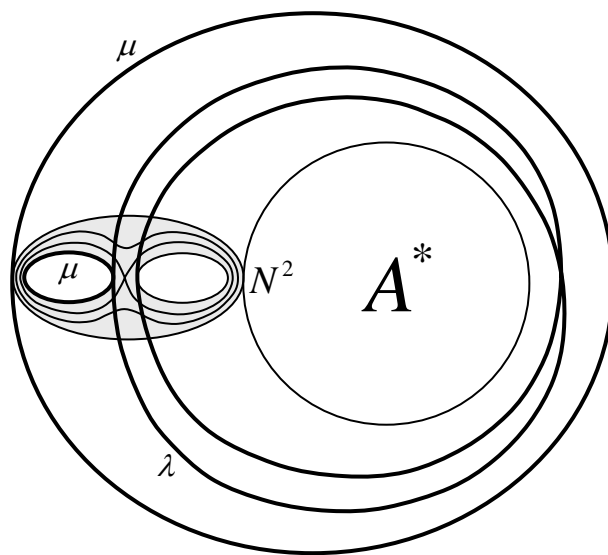
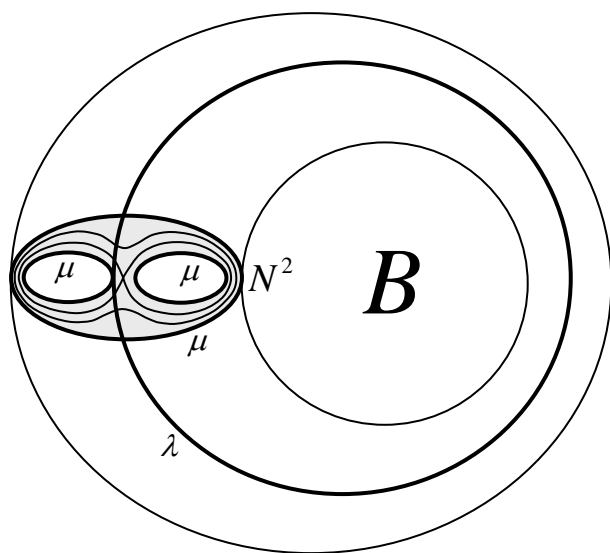


Рис. 2 АТОМЫ A^* и B .

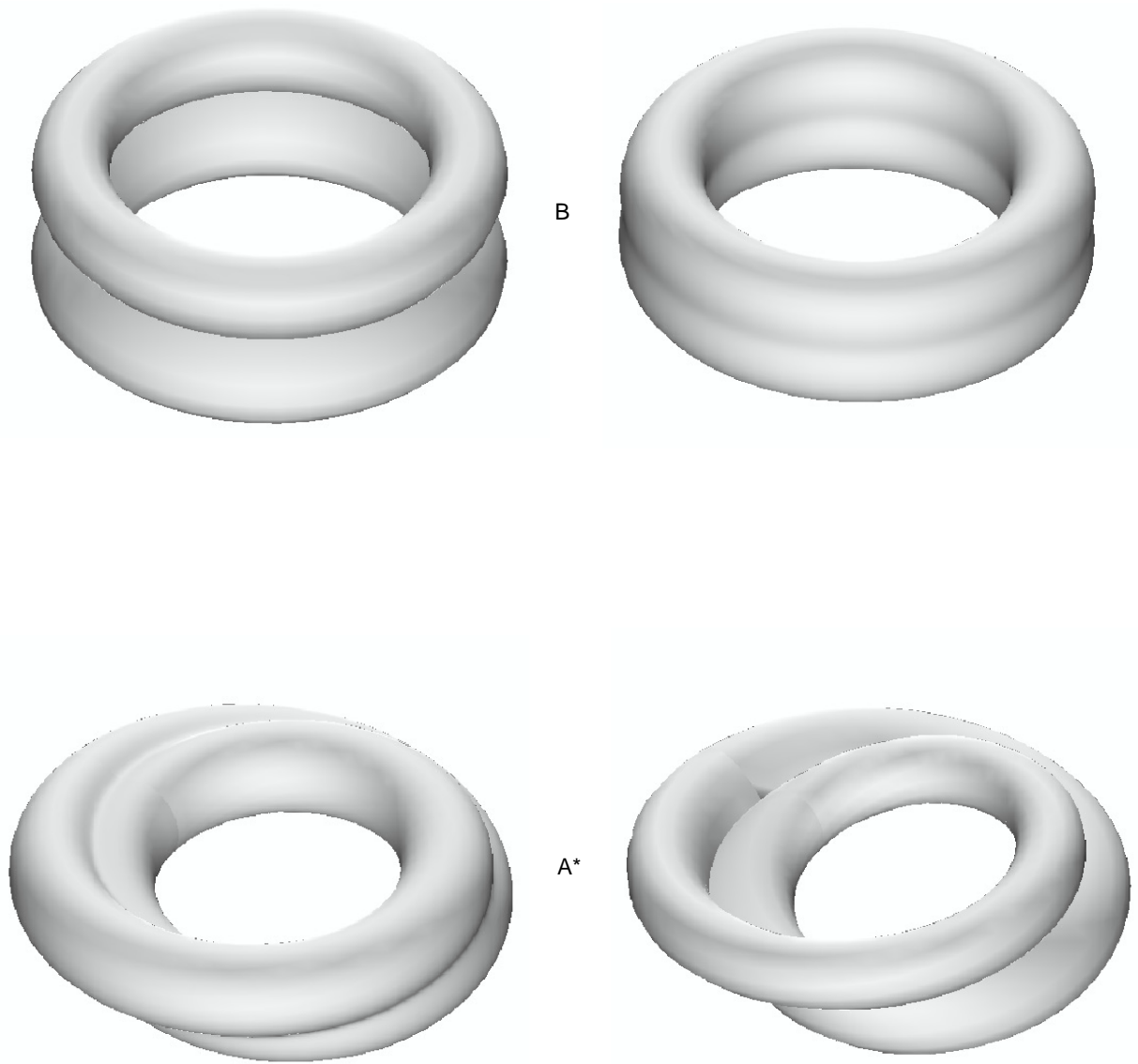


Рис. 3 Бифуркации A^* и B

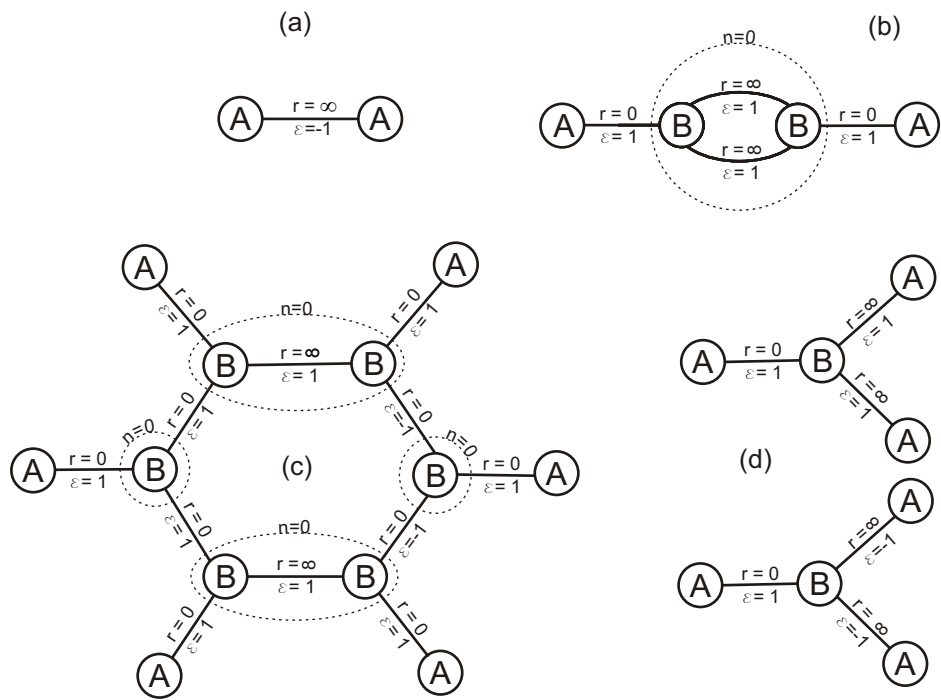


Рис. 4 Меченые молекулы $W^*(Q_h^3)$ в случае Боявленского.

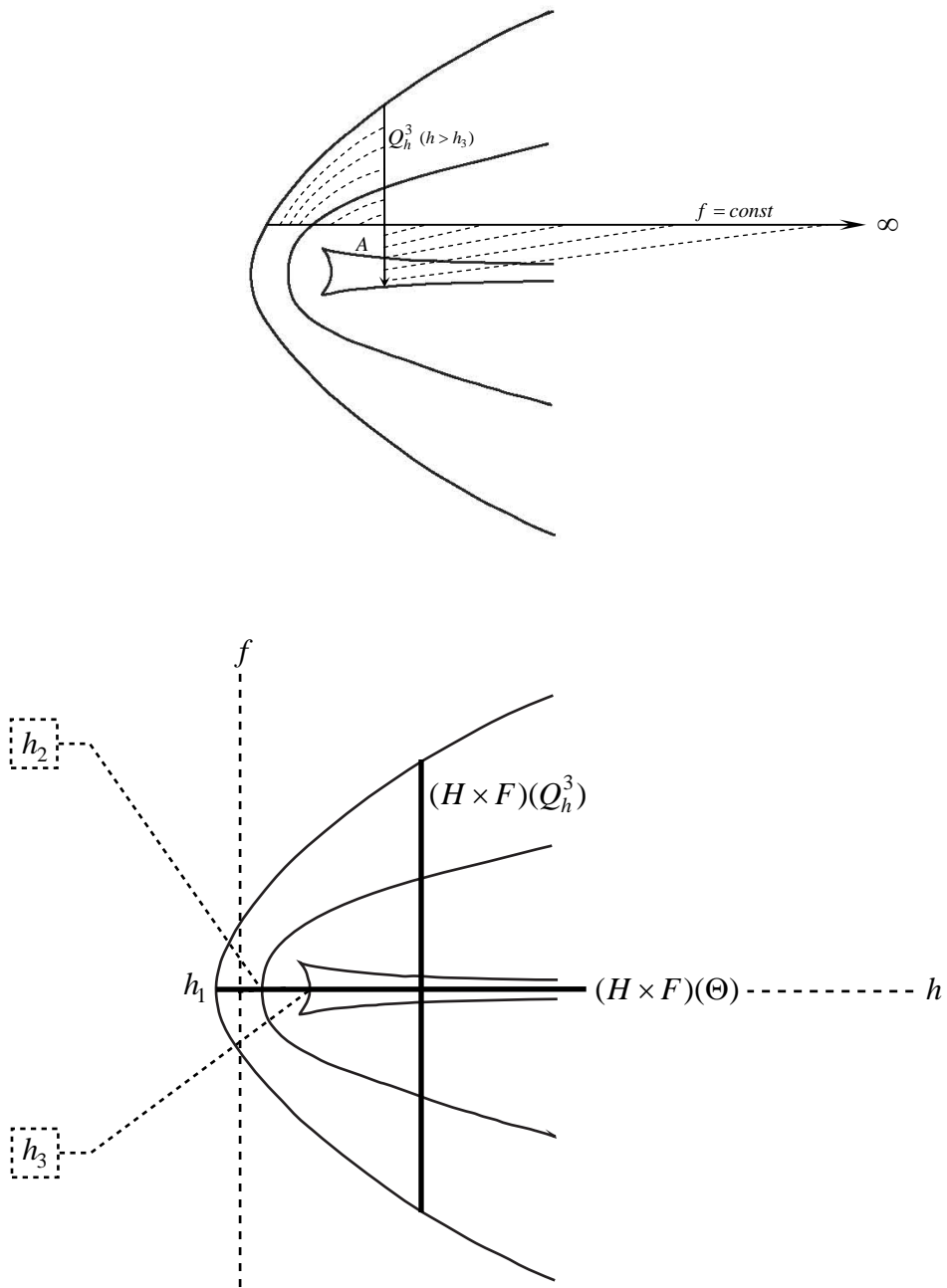


Рис. 5 Бифуркационная диаграмма Σ в случае Богоявленского.

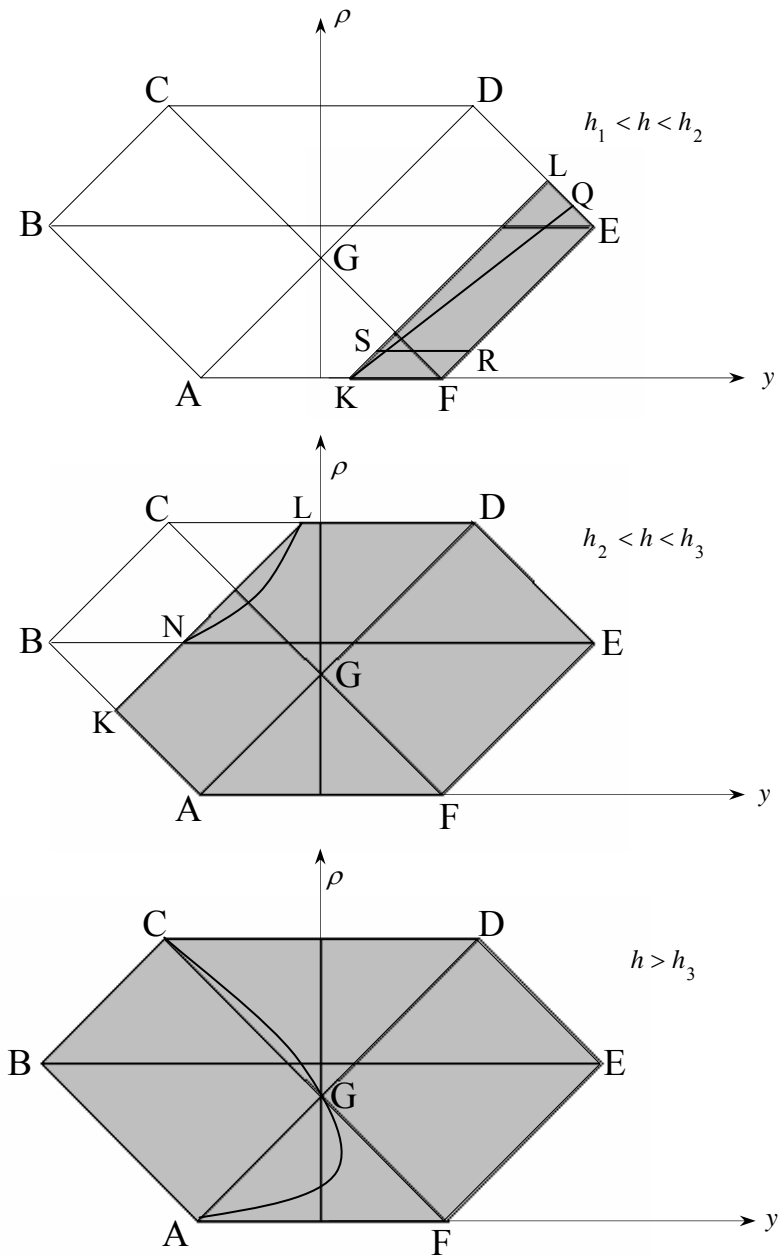


Рис. 6 Проекция подмногообразий Q_h^3 на плоскость $\mathbb{R}^2(y, \rho)$.

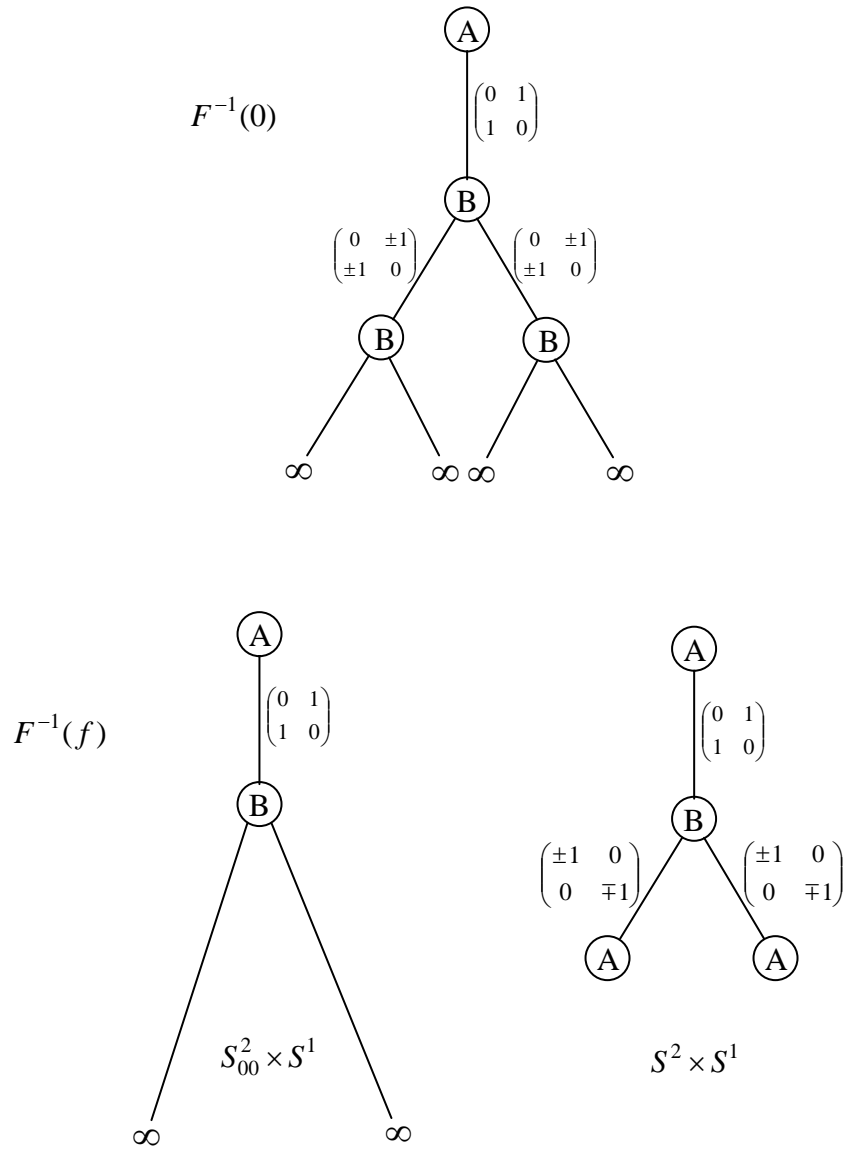


Рис. 7 Слоение нулевого уровня F .

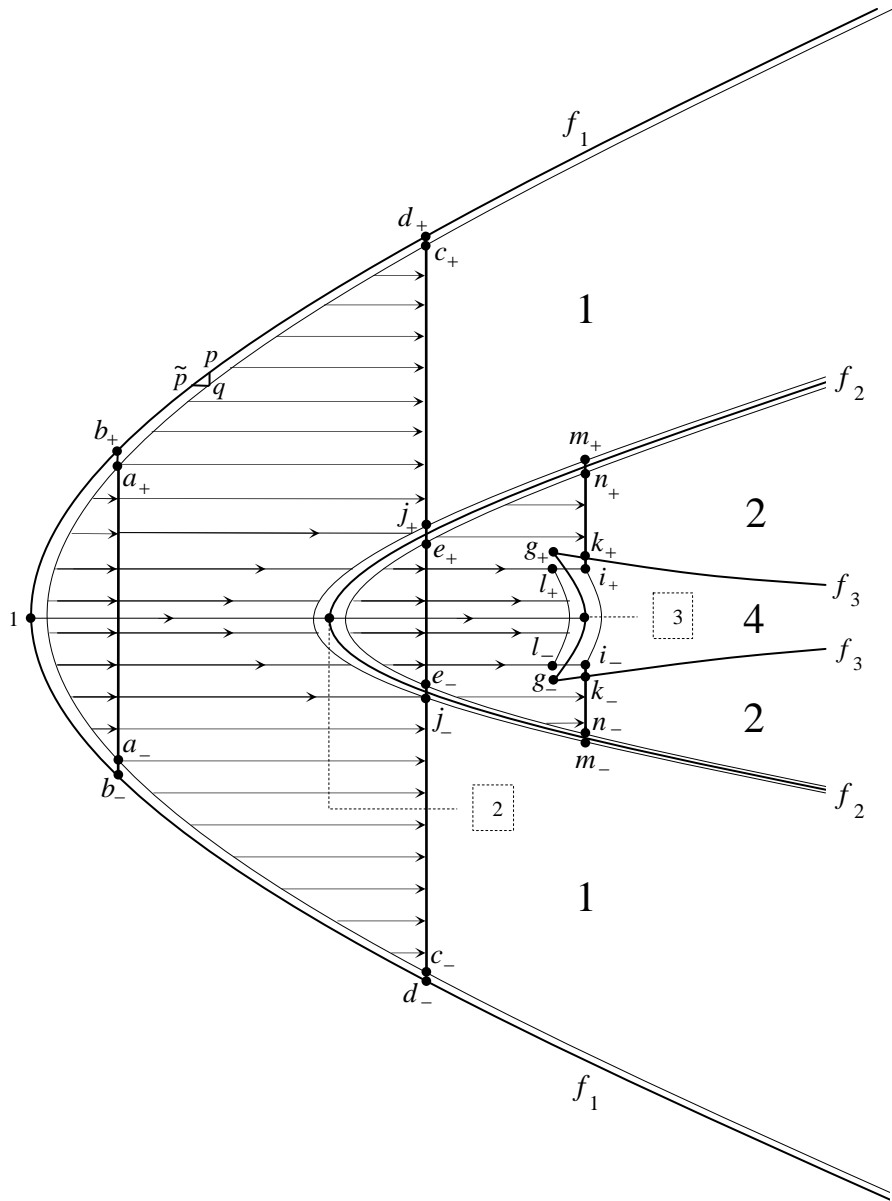


Рис. 8 Склеивающие изотопии при $h_1 < h < h_3$.

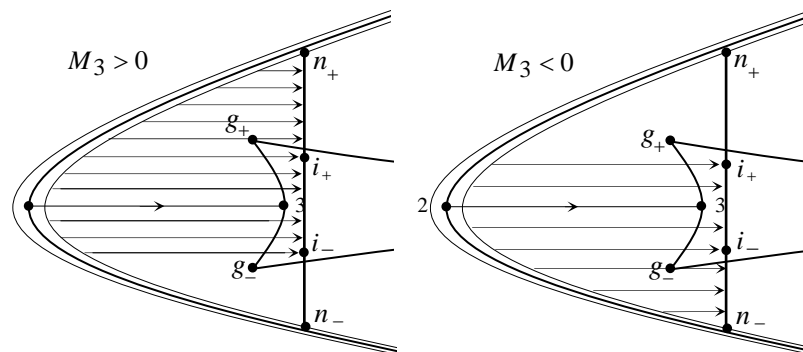


Рис. 9 Склеивающие изотопии при $h > h_3$.

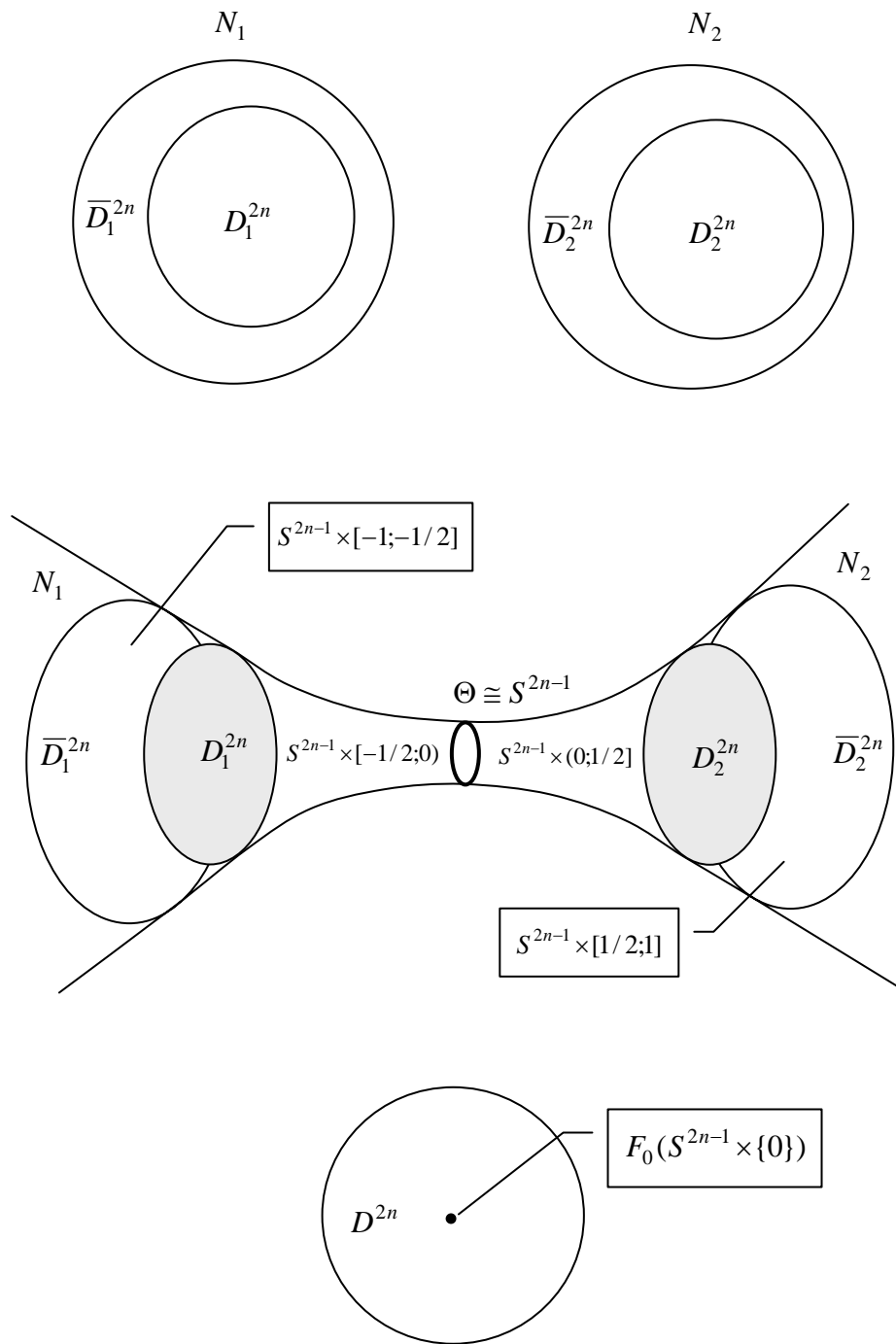


Рис. 10 Контактная-связная сумма.

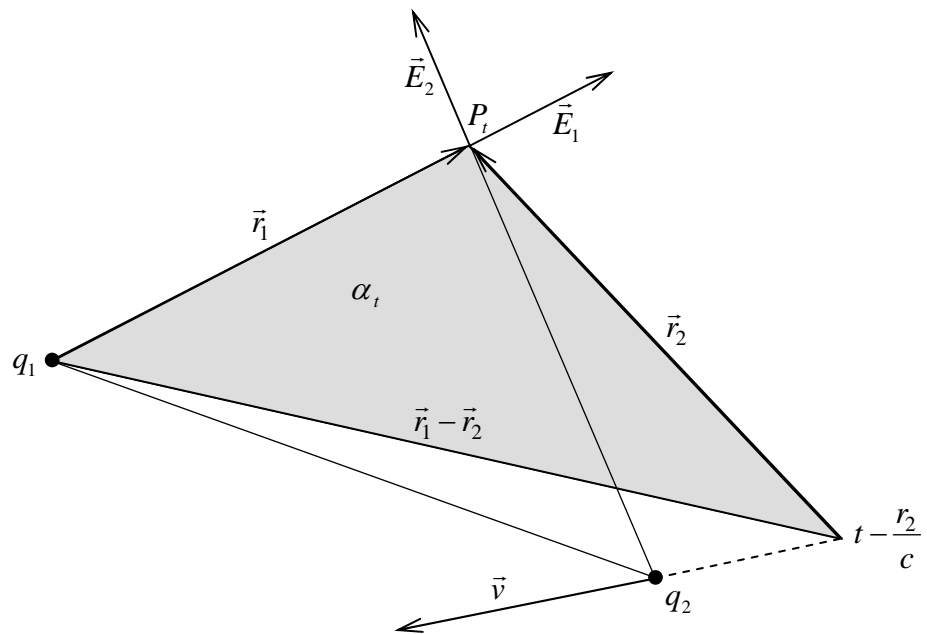
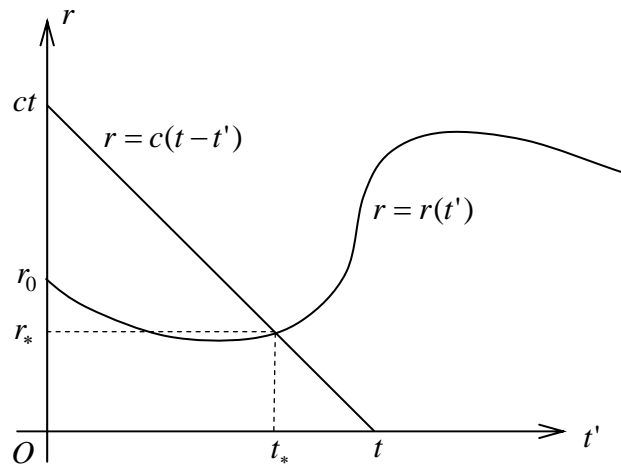


Рис. 11 Поле от двух зарядов.

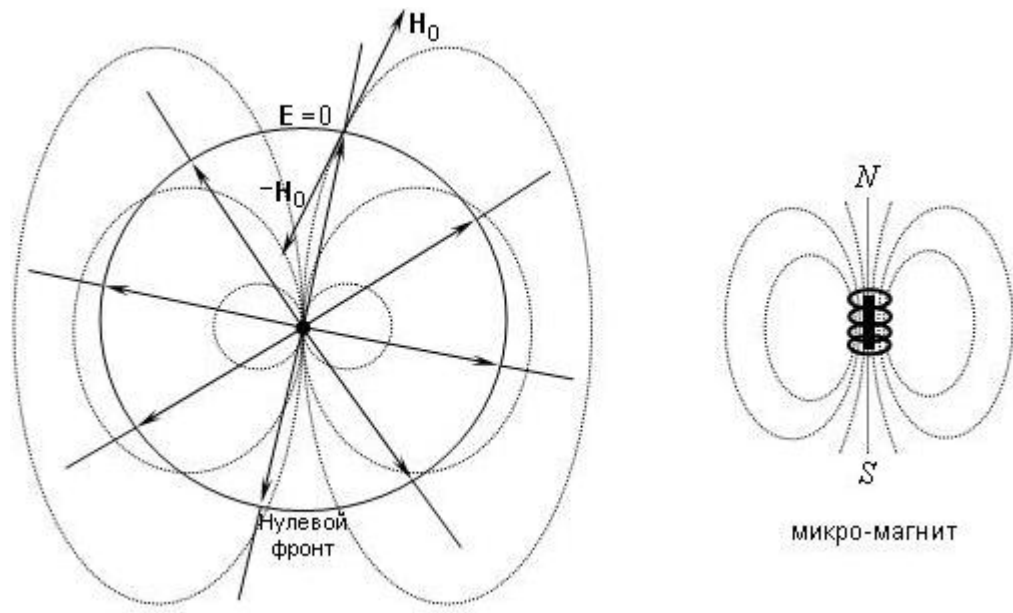


Рис. 12 Поля точечных магнитов и заряда.

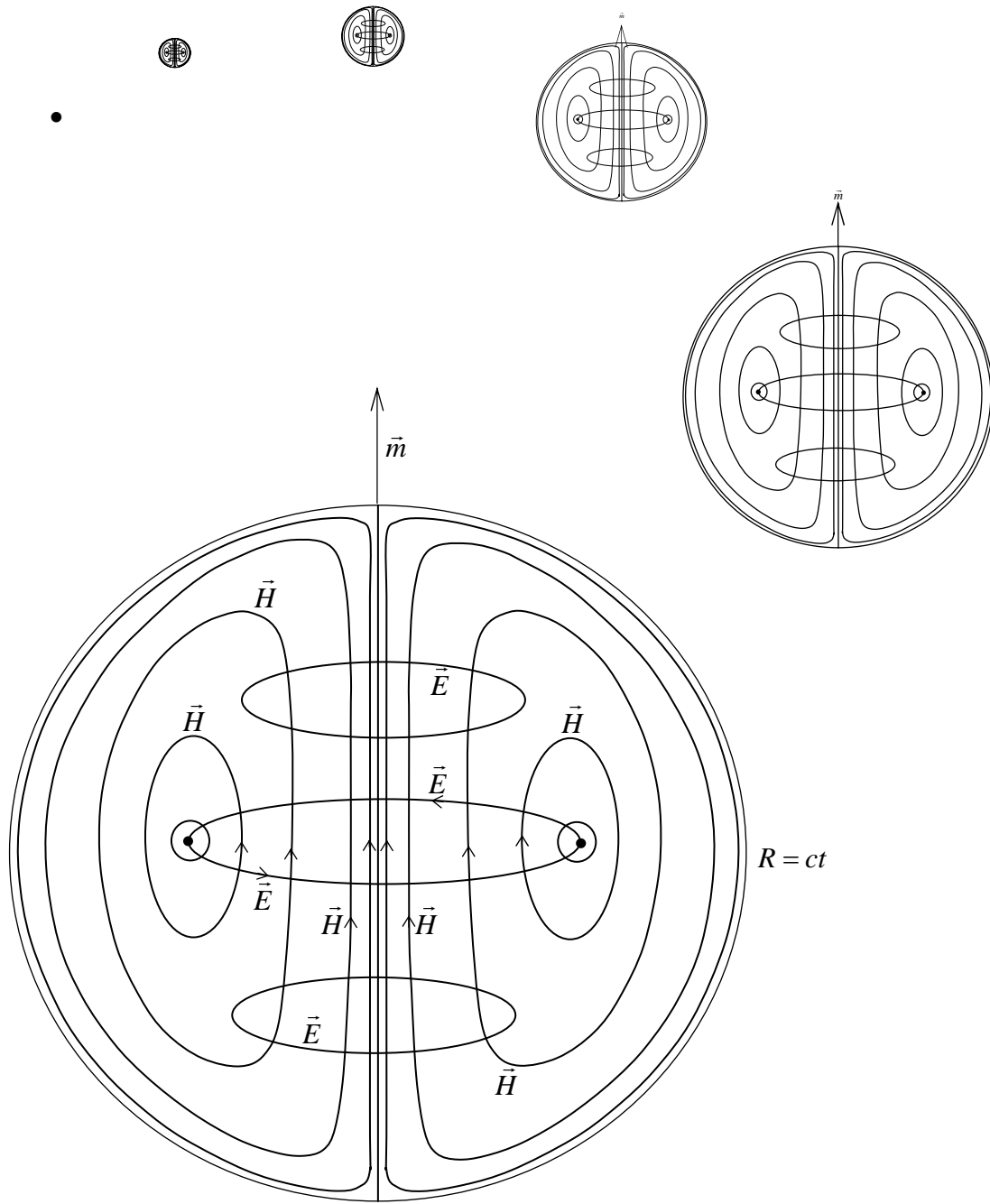


Рис. 13 Соленоидальное поле со сферическим фронтом.

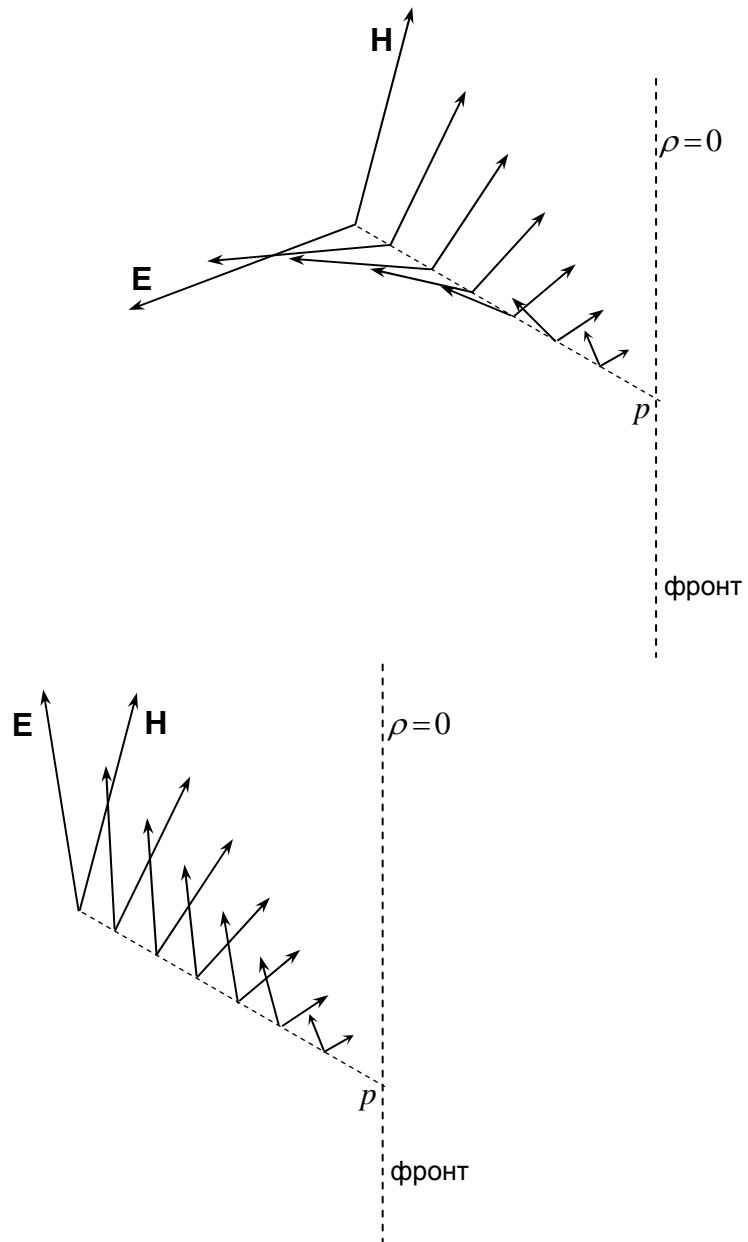


Рис. 14 Возможные конфигурации поля вблизи контактной точки p .