

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи  
УДК 517.938.5

ЗОТЬЕВ Дмитрий Борисович

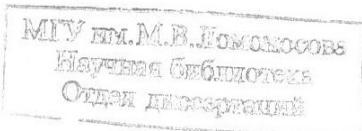
ИНВАРИАНТ ФОМЕНКО – ЦИШАНГА  
В ИНТЕГРИРУЕМОМ СЛУЧАЕ О. И. БОГОЯВЛЕНСКОГО

01.01.04 – Геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико – математических наук

Научный руководитель  
доктор физико – математических  
наук, профессор А. В. Болсинов

Москва 2001г.



## Содержание

<b>Глава 1. Введение .....</b>	3
<b>Глава 2. Особенности .....</b>	13
§ 2.1. Вырожденные особенности симплектической формы на многообразии $M^4$ .	13
§ 2.2. Движение тяжелого магнита в случае типа С.В.Ковалевской в параллельных гравитационном и магнитном полях.....	13
§ 2.3. Удобные координаты в объемлющем пространстве $(so(3) \oplus \mathbf{R}^6)^*$ .....	14
§ 2.4. Особенность типа самопересечения в случае, когда направления гравитационного и магнитного полей ортогональны, а моменты сил равны по абсолютной величине .....	15
<b>Глава 3. Критические уровни энергии .....</b>	16
§ 3.1. Теорема 1 о критических значениях и критических подмногообразиях интеграла энергии.....	16
<b>Глава 4. Критические подмногообразия интеграла О.И.Богоявленского ..</b>	19
§ 4.1. Теорема 2 о критических значениях и критических подмногообразиях интеграла О.И.Богоявленского .....	19
§ 4.2. Доказательство теоремы 2: в координатах $(c, \rho, \psi)$ критические точки функции $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$ определяются условием $\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial \psi} = 0$ .....	21
§ 4.3. Доказательство теоремы 2: среди точек, в которых не определены координаты $(c, \rho, \psi)$ , не более, чем конечное число критических для $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$ ....	23
§ 4.4. Доказательство теоремы 2: вывод уравнения 4.1 и системы 4.2 .....	25
§ 4.5. Окончание доказательства теоремы 2 .....	29
§ 4.6. Теорема 3 о боттовости функции $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$ .....	30
<b>Глава 5. Нулевой уровень интеграла Богоявленского .....</b>	32
§ 5.1. Теорема 4 о топологической структуре интеграла Богоявленского .....	32
<b>Глава 6. Компьютерная визуализация торов Лиувилля и бифуркаций.....</b>	35
<b>Глава 7. Инвариант Фоменко-Цишанга, топология изоэнергетических поверхностей и фазового многообразия .....</b>	37
§ 7.1. Теорема 5 о меченых молекулах $W^*(Q_h^3)$ в случае О.И.Богоявленского.....	37
§ 7.2. Доказательство теоремы 5: вспомогательные леммы 1-4 .....	37
§ 7.3. Доказательство теоремы 5: метки при $h_1 < h < h_2$ .....	40
§ 7.4. Доказательство теоремы 5: метки при $h_2 < h < h_0$ .....	41
§ 7.5. Доказательство теоремы 5: метки при $h_0 < h < h_3$ .....	42
§ 7.6. Доказательство теоремы 5: метки при $h > h_3$ .....	45
<b>Приложение .....</b>	47
<b>Литература .....</b>	64

# Глава 1. Введение

## Актуальность темы.

Задача об интегрировании уравнений движения твердого тела с неподвижной точкой (уравнения Эйлера-Пуассона) известна с XVIII века. Эта проблема, над которой работали Л.Эйлер, Ж.Лагранж, С.Пуассон, Ж.Лиувилль, К.Якоби, Г.Дарбу, С.Ковалевская, Н.Жуковский, С.Чаплыгин, А.Ляпунов и многие другие, не имеет общего решения, однако в разное время были найдены (и в различных направлениях обобщены) частные случаи движения, интегрируемые в квадратурах. Наиболее известные из них: случай Эйлера - вращение вокруг центра масс, Лагранжа - вращение волчка, С.В.Ковалевской - наиболее интересный, физический смысл которого до сих пор не вполне понятен, а также случаи Горячева-Чаплыгина-Сретенского. Современные исследования, в большей степени, направлены к глобальному качественному исследованию интегрируемых уравнений движения, а также самого феномена интегрируемости. Соответствующая методология синтезирует классическую аналитическую механику, включая гамильтонов формализм и вариационное исчисление, с топологией дифференцируемых многообразий, симплектической геометрией, теорией групп Ли и алгебраической топологией.

В начале 80-х годов (XX века) возникла школа А.Т.Фоменко, в которой созданы методы исследования фазовой топологии интегрируемых гамильтоновых систем, основанные на теории А.Т.Фоменко типа Морса [33-40]. Сужение класса интегралов движения до боттовских функций позволило, практически без потери общности, изучить топологию фазовых пространств уравнений движения и их решений. Одновременно была создана теория топологической классификации нерезонансных интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, согласно которой каждая система рождает дискретный набор топологических инвариантов Фоменко-Цишанга  $W^*(Q_h^3)$  - т.н. меченых молекул, идентифицирующий систему с точностью до произвольного диффеоморфизма фазового многообразия, сохраняющего ориентации и лиувиллево слоение на инвариантные торы [7,11]. Каждая молекула характеризует фазовую топологию изоэнергетических поверхностей  $Q_h^3 = H^{-1}(h)$  для всех значений энергии  $H$ , достаточно близких к некоторому регулярному  $h$ . Основные результаты в этом направлении получены А.Т.Фоменко, Х.Цишангом и А.В.Болсиновым. Дальнейшие исследования (А.В.Болсинов, А.Т.Фоменко) развивались в направлении все более тонкой классификации, позволяющей идентифицировать интегрируемые системы с точностью до параметризаций фазовых траекторий, а также распознавать системы, отличающиеся лишь в обозначениях [9,11]. Одновременно ведется работа по вычислению меченых молекул известных случаев динамики твердого тела, а также других интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Первые молекулы были вычислены

А.Т.Фоменко и А.А.Ошемковым [27,28], а соответствующие целочисленные метки ("валентности") определил А.В.Болсинов [8]. К настоящему времени значительное число интегрируемых случаев динамики твердого тела классифицировано мечеными молекулами, в том числе случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской и Горячева-Чаплыгина-Сретенского - подробности в [11]. Настоящая диссертационная работа посвящена интегрируемому случаю вращения тяжелого магнита, при нулевом значении интеграла типа Ковалевской, описанному О.И.Богоявленским в [4]. Для данного случая задачу исследования с точки зрения теории типа Морса А.Т.Фоменко поставил в 1989г. Работа примыкает к исследованиям бифуркационных множеств и областей возможности движения, где основные результаты получены М.П.Харламовым и его учениками [41-43]. Диссертация также дополняет результаты А.И.Бобенко, А.Г.Реймана и М.А.Семенова-Тян-Шанского [2], которые проинтегрировали по Лиувиллю уравнения движения тяжелого магнита в случае типа С.В.Ковалевской, описанном О.И.Богоявленским в [4].

Цель работы в исследовании фазовой топологии интегрируемого случая О.И.Богоявленского - вращение тяжелого магнита вокруг неподвижной точки, при нулевом значении интеграла типа С.В.Ковалевской [4], а также его топологической классификации.

### **Научная новизна.**

Все результаты диссертационной работы получены впервые. Новый метод вычисления меток  $r, \varepsilon, n$  дополняет существующие [7,8,11]. Особенность задачи, связанная с вырождением симплектической формы на подмногообразии коразмерности 1, ранее в динамике твердого тела не встречалась. Появление этой особенности открывает новое направление исследований, актуальное с точки зрения приложений симплектической геометрии.

### **Теоретическая и практическая ценность.**

Обнаружены новые молекулы и новые типы движений, которые ранее в динамике твердого тела не встречались. Несмотря на значительную техническую сложность задачи, все результаты получены формально, без использования приближенных вычислений. Анализ вырожденной особенности симплектической формы фазового многообразия  $M^4$  позволяет расширить область применения теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем [7,11].

Практическое значение диссертации в том, что явно вычислены фазовые траектории устойчивого периодического движения тяжелого магнита. Полученные формулы могут быть полезны в технических приложениях. Использованный метод вычисления меток  $r, \varepsilon, n$  способствует лучшему пониманию теории инварианта Фоменко-Цишанга, поскольку исходит прямо из определений меток [7]. Для многих классических интегрируемых задач динамики фазовая топология исследована без использования меченых

молекул, при помощи проекции  $\pi$  фазового многообразия  $TS^2$  на сферу Пуассона  $S^2$ . Соответствующая методика разработана М.П.Харламовым [42] и восходит к идеям Смейла [30]. В настоящей диссертационной работе, однако, рассмотрен случай, для которого метод проекции на сферу Пуассона неприменим, поскольку потенциальная энергия задана не на сфере, а на касательном расслоении окружностей. Фазовая топология случая О.И.Богоявленского изучена с использованием меченых молекул  $W^*(Q_h^3)$ , что подтверждает значение теории топологической классификации, как эффективного метода качественного исследования движения, значительно расширяющего круг решаемых задач. Для иллюстрации некоторых результатов работы построена компьютерная модель перестроек лиувиллевых торов, реализованная в среде Borland Pascal(рис.7-9). Предлагаемая общая методика может использоваться в экспериментах по компьютерной визуализации геометрических объектов.

### **Апробация работы.**

Первые результаты работы докладывались на кафедре геометрии Казанского гос. университета при защите дипломной работы автора в 1992г. На протяжении всей работы ее результаты докладывались и обсуждались на семинаре "Современные геометрические методы", под руководством А.Т.Фоменко и А.В.Болсинова.

### **Публикации.**

С некоторыми сокращениями работа опубликована в журнале *Регулярная и хаотическая динамика* N 4 2000г. Список опубликованных по теме диссертации работ приводится.

### **Структура диссертации.**

Работа состоит из 7 глав, 70 страниц, 23 рисунков и 1 таблицы на 19 листах и приложения, в котором приводятся рисунки и таблица.

Настоящая глава является вводной. Здесь изложена постановка задачи и полученные результаты, а также вводятся основные обозначения. Пусть намагниченное твердое тело, на которые действуют сила тяжести и магнитная сила, вращается вокруг неподвижной точки. Силовые поля однородны и стационарны. Оси системы координат направлены по главным осям инерции, начало отсчета - неподвижная точка. Пусть  $m$  - масса тела,  $\vec{M}$  - магнитный момент, характеризующий состояние намагниченности,  $h$  - величина индукции магнитного поля,  $\vec{\gamma}$  - вектор направления силы тяжести ( $|\vec{\gamma}| = 1$ ),  $\vec{\delta}$  - вектор направления магнитной индукции ( $|\vec{\delta}| = 1$ ),  $\vec{r}$  - радиус-вектор центра масс,  $\vec{M}$  - кинетический момент,  $I_1, I_2, I_3$  - главные моменты инерции,  $\vec{\omega}$  - угловая скорость. Уравнения движения Эйлера-Пуассона:

$$\dot{\vec{M}} = [\vec{M}, \vec{\omega}] + mg[\vec{r}, \vec{\gamma}] + h[\vec{M}, \vec{\delta}], \quad \dot{\vec{\gamma}} = [\vec{\gamma}, \vec{\omega}], \quad \dot{\vec{\delta}} = [\vec{\delta}, \vec{\omega}]. \quad (1.1)$$

Полная механическая энергия:

$$H = \frac{1}{2}(\vec{M}, \vec{\omega}) - mg(\vec{r}, \vec{\gamma}) - h(\vec{M}, \vec{\delta}).$$

Геометрические интегралы движения:

$$(\vec{\gamma}, \vec{\gamma}) = 1, \quad (\vec{\delta}, \vec{\delta}) = 1, \quad (\vec{\gamma}, \vec{\delta}) = c \quad (|c| \leq 1).$$

Пусть  $G^6$  - подгруппа группы движений  $\mathbf{R}^6$ , порожденная синхронными вращениями некоторой пары 3-мерных ортогональных подпространств и сдвигами пространства  $\mathbf{R}^6$ . Полученная группа Ли моделируется на многообразии

$$SO(3) \times \mathbf{R}^6 = SO(3) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 :$$

$$(A, \vec{x}, \vec{y}) \cdot (B, \vec{u}, \vec{v}) = (AB, A\vec{u} + \vec{x}, A\vec{v} + \vec{y}).$$

Алгебра Ли данной группы изоморфна алгебре, которую, следуя [4], обозначим

$$so(3) \oplus \mathbf{R}^3 \oplus \mathbf{R}^3 = so(3) \oplus \mathbf{R}^6.$$

Заметим, что здесь не имеет места прямая сумма алгебр - каждая из двух подалгебр  $so(3) \oplus \mathbf{R}^3$ , пересекающихся по  $so(3)$ , объединением которых является  $so(3) \oplus \mathbf{R}^6$ , представляет собой полупрямую сумму  $so(3)$  и векторной алгебры  $\mathbf{R}^3$ . При этом коммутатор элементов из подалгебры  $\mathbf{R}^6$  тривиален. Вырожденная скобка Пуассона, "склеенная" из стандартных скобок Кириллова на орбитах коприсоединенного представления [37], следующим образом выглядит в координатах пространства  $(so(3) \oplus \mathbf{R}^6)^*$ :

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= \epsilon_{ijk} M_k, & \{M_i, \gamma_j\} &= \epsilon_{ijk} \gamma_k, & \{M_i, \delta_j\} &= \epsilon_{ijk} \delta_k, \\ \{\gamma_i, \gamma_j\} &= 0, & \{\gamma_i, \delta_j\} &= 0, & \{\delta_i, \delta_j\} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения (1.1) определяют на  $(so(3) \oplus \mathbf{R}^6)^*$  динамическую систему  $v$ :

$$\dot{M}_i = \{H, M_i\}, \quad \dot{\gamma}_i = \{H, \gamma_i\}, \quad \dot{\delta}_i = \{H, \delta_i\}.$$

При  $|c| < 1$  инвариантное подмногообразие

$$O^6 = \{(\vec{M}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}) \in (so(3) \oplus \mathbf{R}^6)^* : (\vec{\gamma}, \vec{\gamma}) = 1, (\vec{\gamma}, \vec{\delta}) = c, (\vec{\delta}, \vec{\delta}) = 1\}$$

является регулярной орбитой коприсоединенного представления  $G^6 = \exp(so(3) \oplus \mathbf{R}^6)$ . Движение по сингулярным орбитам ( $|c| = 1$ ) рассмотрено в главе 2, где доказана его эквивалентность т.н. смещенному случаю С.В.Ковалевской. В предположениях, что

$$I_1 = I_2 = 2I_3, \quad \vec{r} = (r_1, 0, 0), \quad \vec{M} = (0, \mathcal{M}_2, 0) \quad (1.2)$$

О.И.Богоявленский в [4] нашел интеграл движения типа С.В.Ковалевской :

$$z = (M_1^2 - M_2^2 + 4I_3mgr_1 \cdot \gamma_1 - 4I_3h\mathcal{M}_2 \cdot \delta_2)^2 + (2M_1M_2 + 4I_3mgr_1 \cdot \gamma_2 + 4I_3h\mathcal{M}_2 \cdot \delta_1)^2. \quad (1.3)$$

Далее А.И.Бобенко, А.Г.Рейман, М.А.Семенов-Тян-Шанский в [2] открыли другой интеграл движения, коммутирующий с  $z$  и более универсальный, т.к. не требуется (1.2):

$$\begin{aligned} g &= (\vec{M}, \vec{\xi})^2 + (\vec{M}, \vec{\eta})^2 + 2M_3(\vec{M}, \vec{\xi}, \vec{\eta}) + c_2(\xi_2 + \eta_1) - c_1\eta_2 - c_3\xi_1, \quad \text{где} \\ \vec{\xi} &= 4I_3mgr_1\vec{\gamma}, \quad \vec{\eta} = 4I_3h\mathcal{M}_2\vec{\delta}, \\ c_1 &= (4I_3mgr_1)^2, \quad c_3 = (4I_3h\mathcal{M}_2)^2, \quad c_2 = (4I_3)^2 mgr_1h\mathcal{M}_2 \cos(\vec{\gamma}\vec{\delta}). \end{aligned} \quad (1.4)$$

В координатах (1.4) интегралы  $z$  и  $H$  выглядят так:

$$\begin{aligned} z &= (M_1^2 - M_2^2 + \xi_1 - \eta_2)^2 + (2M_1M_2 + \xi_2 + \eta_1)^2, \\ H &= M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2 - \xi_1 - \eta_2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Если тело размагничено ( $\mathcal{M} = 0$ ), или устранено магнитное поле ( $h = 0$ ), то функция  $\sqrt{g}$  превращается в интеграл площадей, а  $z$  - в интеграл С.В.Ковалевской,

Предполагая, что

$$|(\vec{\gamma}, \vec{\delta})| = |c| < 1, \quad (1.6)$$

ограничим динамическую систему  $v$  на орбиту  $O^6$ . Получаем гамильтонову систему

$$v = sgrad(H),$$

где косой градиент  $sgrad$  вычисляется в стандартной симплектической структуре орбиты [37]. Итак, в [2] гамильтонова система  $sgrad(H)$  на  $O^6$  проинтегрирована по Лиувиллю, т.е. в предположениях (1.2) проинтегрированы в квадратурах уравнения (1.1), однако не глобально, а в окрестностях лиувиллевых торов  $T^3$ , отвечающих регулярным значениям отображений момента

$$O^6 \ni m : p \mapsto (H(p), z(p), g(p)) \in \mathbb{R}^3$$

регулярной орбиты  $O^6$ . Для полноты решения необходимо проинтегрировать уравнения траекторий, которые состоят из критических точек отображения  $m$ , что и было сделано в основополагающей работе [4], предшествующей [2]. Пусть

$$M^4 = \{p \in O^6 : z(p) = 0\}$$

- подмногообразие произвольной регулярной орбиты  $O^6$ . Ясно, что  $M^4$  инвариантно относительно  $v$ . Легко проверить, что

$$z(p) = 0 \Leftrightarrow dz(p) = 0,$$

следовательно  $M^4$  целиком состоит из критических точек отображения  $m : O^6 \rightarrow \mathbf{R}^3$ .  
Функция  $\{z_1, z_2\}$ , где

$$z_1 = M_1^2 - M_2^2 + \xi_1 - \eta_2, \quad z_2 = 2M_1M_2 + \xi_2 + \eta_1, \quad z = z_1^2 + z_2^2,$$

коммутирует с  $H$  в точках подмногообразия  $M^4$  (но не коммутирует на  $O^6 \setminus M^4$ ). Ограничим форму Кириллова из  $O^6$  на  $M^4$ . Получим замкнутую 2-форму  $\omega$ , которая почти всюду невырождена, но вырождается в точках подмногообразия  $M_0^3$ , определенного уравнением  $\{z_1, z_2\} = 0$  (скобка Пуассона вычисляется в  $O^6$ ). Далее, ограничим на  $M^4$  векторное поле  $v$ , гамильтониан  $H$  и интеграл О.И.Богоявленского

$$f = \{z_1, z_2\} = M_3(M_1^2 + M_2^2) + M_1\xi_3 + M_2\eta_3.$$

Очевидно, что

$$v = sgrad(H)$$

на всюду плотном в  $M^4$  симплектическом подмногообразии

$$M^4 \setminus M_0^3.$$

Динамическая система  $v$  на  $M^4$  имеет два независимых интеграла:  $H$  и  $f$ . Непосредственно проверяется, что интеграл  $g$ , ограниченный на  $M^4$ , так функционально выражается через  $f$  и  $H$ :

$$g = \frac{c_1 + c_3}{2}H - f^2, \quad (1.7)$$

где  $c_1$  и  $c_3$  - параметры орбиты  $O^6$  (1.4).

Движение тяжелого магнита, отвечающее нулевому значению  $z$  на фиксированной орбите  $O^6$  (т.е. динамическую систему  $v$  на  $M^4$  [4]), назовем интегрируемым случаем О.И.Богоявленского. Оказывается, что симплектические особенности многообразия  $M^4$ , связанные с вырождением 2-формы  $\omega$  в точках подмногообразия  $M_0^3$ , не препятствуют применению теории топологической классификации [7,11].

В главе 2 рассмотрено движение магнита при  $|c| = 1$  (когда магнитное и гравитационное поля параллельны). С использованием результатов О.И.Богоявленского [4], оно эквивалентно следующему естественному обобщению случая С.В.Ковалевской:  
а) моменты инерции (ненамагниченного тела) связаны соотношением С.В. Ковалевской

$$I_1 = I_2 = 2I_3;$$

б) неподвижная точка находится в экваториальной плоскости  $X, Y$  эллипсоида инерции так, что

$$k = tg(\alpha),$$

где  $\alpha$  угол между главной осью  $X$  и направлением из фиксированной точки на центр масс, отсчитываемый по часовой стрелке.

В главах 3-7 предполагается, что векторы магнитного поля и силы тяжести не коллинеарны (1.6). Также исключается случай, когда направления гравитационного и магнитного полей ортогональны, а моменты силы тяжести и магнитной силы относительно неподвижной точки равны по величине. При (и только при) этих ограничениях  $M^4$  является гладким 4-мерным подмногообразием орбиты  $O^6$ .

В § 2.3 определяются функции  $\rho, \theta, c, x, r, \psi$ , вместе с функциями  $M_1, M_2, M_3$  задающие координаты пространства  $(so(3) \oplus \mathbf{R}^6)^*$ , в которых проводятся основные вычисления. В этих координатах:

$$H = 2M_3^2 + \rho - c, \quad f = \rho \sqrt{\frac{c - \rho + h}{2}} \operatorname{sgn}(M_3) \pm r\sqrt{\rho} \cdot \sin(\psi - \frac{\theta}{2}).$$

В главе 3 найдены критические значения и подмногообразия энергии  $H : M^4 \rightarrow \mathbf{R}$ . Доказана теорема 1, согласно которой:

- а) у энергии  $H$  имеется одно глобально-минимальное критическое значение  $h_1$  и два седловых критических значения:  $h_2, h_3$ ;
- б) на критических уровнях энергии  $h_1, h_2$  имеется по одной невырожденной критической окружности, а на уровне  $h_3$  их две.

Критические значения явно выражены через физические параметры задачи  $M_2, h, m, r_1$ , а критические подмногообразия явно вычислены в координатах объемлющего пространства  $(so(3) \oplus \mathbf{R}^6)^*$ .

В главе 4 найдены критические значения и подмногообразия интеграла  $f$ , ограниченного на произвольную неособую изоэнергетическую поверхность  $Q_h^3$ , и доказана боттовость функции

$$f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$$

при всех регулярных  $h$ , кроме некоторого  $h_0$ , определенного в теореме 3.

Доказана теорема 2, согласно которой:

- а) для произвольного регулярного значения  $h$  критические значения функции  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$  связаны следующим уравнением:

$$\left[ 4k(2k^2 - 9) \cdot \chi^2 + 36kh \cdot \chi + 27\tilde{c} \right]^2 = 64\chi \left[ (k^2 - 3) \cdot \chi + 3h \right]^3, \quad \text{где} \quad (1.8)$$

$$\chi > 0, \quad h^2 = 2c_0 + k\tilde{c}, \quad f = \pm \frac{\tilde{c}}{2\sqrt{\chi}},$$

константы  $c_0$  и  $\tilde{c}$  определяются физическими параметрами  $M_2, h, m, r_1$ .

б) все критические подмногообразия (вложенные минимаксные и седловые окружности) явно вычислены в координатах пространства  $(so(3) \oplus \mathbf{R}^6)^*$ .

Доказана теорема 3, согласно которой:

а) Интеграл  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$  является боттовским для всех регулярных значений  $h$ , кроме  $h_0 = \sqrt{2c_0 + \tilde{k} \cdot \tilde{c}}$ , где  $\tilde{k}$  — единственный положительный корень уравнения

$$k^4 + 8\frac{c_0}{\tilde{c}}k^3 + 18k^2 - 27 = 0;$$

б) Интеграл  $f : Q_{h_0}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  имеет два вырожденных критических значения, отличающихся знаками, каждому из которых отвечают по две вырожденные критические окружности;

в) каждый из 2-х непересекающихся торов, образующих вырожденный критический уровень функции  $f : Q_{h_0}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , имеет негладкую особенность типа "ребро" – вдоль вырожденной критической окружности.

По результатам анализа зависимости корней уравнения (1.8) от  $h$  построена бифуркационная диаграмма (множество критических значений) отображения момента

$$M^4 \ni p \mapsto (H_p, f_p) \in \mathbf{R}^2.$$

*В главе 5* исследован нулевой уровень функции  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$  для всех регулярных значений энергии  $h$ .

Доказана теорема 4:

Пусть  $M_0^2(h)$  — нулевой уровень интеграла  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , тогда:

- 1) при  $h_1 < h < h_2$  подмногообразие  $M_0^2(h)$  диффеоморфно тору  $T^2$ ;
- 2) при  $h_2 < h < h_3$  подмногообразие  $M_0^2(h)$  состоит из двух связных компонент, каждая из которых диффеоморфна тору  $T^2$ ;
- 3) при  $h > h_3$  подмногообразие  $M_0^2(h)$  состоит из четырех связных компонент, каждая из которых диффеоморфна тору  $T^2$ .

При доказательстве теоремы 4, получены параметрические уравнения каждой связной компоненты  $M_0^2(h)$ , задающие диффеоморфизмы стандартного тора  $S^1 \times S^1$ .

*В главе 6* предлагается алгоритм построения гомеоморфизма 3-мерного полиэдра

$$\{p \in Q_h^3 : f_p \leq f_c + \varepsilon\} \quad (\text{или } \{p \in Q_h^3 : f_p \geq f_c - \varepsilon\})$$

в сферическую окрестность окружности  $S^1 \subset \mathbf{R}^3$ , переводящий в  $S^1$  критическую окружность боттовского интеграла  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , отвечающую критическому значению  $f_c$ . Данный гомеоморфизм является локальным диффеоморфизмом всюду, кроме точек окружности  $S^1$ . Фактически он проектирует в  $\mathbf{R}^3$  торы Лиувилля, перестраивающиеся вблизи критического уровня  $f_c$ , после чего процесс бифуркации становится доступным для визуального отображения. Для бифуркаций, происходящих на уровне  $f^{-1}(0)$  при изменении  $h$ , с помощью компьютерной программы на Borland-Pascal, получены рис.7-9.

*В главе 7* вычислены инварианты Фоменко-Цишанга  $W^*(Q_h^3)$  и топология каждой регулярной изоэнергетической поверхности  $Q_h^3$ , а также топология фазового многообразия  $M^4$ .

В теореме 5 указаны инварианты Фоменко-Цишанга  $W^*(Q_h^3)$  для всех регулярных изоэнергетических поверхностей  $Q_h^3$  с боттовским интегралом  $f$ . Инварианты представлены ориентированными графами  $\Gamma(Q_h^3, f)$  с метками  $r, \varepsilon$  (рис.10-13). Все  $n$ -метки равны нулю, либо отсутствуют.

Вид графов  $\Gamma(Q_h^3, f)$  следует из теорем 1,2,3,4, при этом теорема 4 вмещает недостающую информацию об ориентируемости сепаратрисных диаграмм, необходимую для вычисления графов  $\Gamma(Q_h^3, f)$  [37-39]. Ориентируемость сепаратрисных диаграмм, в свою очередь, следует из теоремы 4. Метки  $r, \varepsilon, n$  [7,11] вычисляются на основе бифуркационной диаграммы по специально разработанной методике. Из вида инварианта  $W^*(Q_h^3)$  прямо следует топология неособой изоэнергетической поверхности  $Q_h^3$ , которая:

- при  $h_1 < h < h_2$  диффеоморфна  $S^2 \times S^1$ ;
- при  $h_2 < h < h_3$  диффеоморфна тору  $T^3$ ;
- при  $h > h_3$  состоит из двух связных компонент, диффеоморфных  $S^2 \times S^1$ ;

Доказано важное следствие из теоремы 5: фазовое многообразие  $M^4$  гомеоморфно  $S^2 \times S^1 \times \mathbf{R}$ .

#### Основные результаты диссертации, выносимые на защиту:

- критические значения и подмногообразия энергии

$$H : M^4 \rightarrow \mathbf{R},$$

где  $M^4$  – фазовое многообразие случая О.И.Богоявленского (теорема 1);

- бифуркационная диаграмма отображения момента

$$\mu : M^4 \ni p \mapsto (H(p), f(p)) \in \mathbf{R}^2,$$

где  $f$  – дополнительный интеграл движения (интеграл О.И.Богоявленского) (рис. 2);

- критические значения и критические подмногообразия функции

$$f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}, \quad Q_h^3 = H^{-1}(h),$$

доказана ее боттовость [37] для всех регулярных значений  $h$  энергии  $H$  (теоремы 2,3);

- фазовые траектории устойчивого периодического движения тяжелого магнита в случае О.И.Богоявленского (теорема 2);

- параметрические уравнения лиувиллевых торов

$$f^{-1}(0) \cap Q_h^3,$$

образующих слоение нулевого уровня интеграла О.И.Богоявленского (теорема 4);

- инварианты Фоменко-Цишанга  $W^*(Q_h^3)$  для каждой неособой изоэнергетической поверхности  $Q_h^3$  (теорема 5, рис.10-13);

- топология каждой неособой изоэнергетической поверхности  $Q_h^3$  (теорема 5, таб. 1);
- гомеоморфность фазового  $M^4$  и многообразия  $S^2 \times S^1 \times \mathbf{R}$  (следствие теоремы 5);
- эквивалентность движения тяжелого магнита в случае типа С.В.Ковалевской [4], в параллельных магнитном и гравитационном полях, некоторому естественному обобщению классического случая С.В.Ковалевской (§ 2.2);
- функциональная зависимость на  $M^4$  между интегралом А.И.Бобенко, А.Г.Реймана, М.А.Семенова-Тян-Шанского  $g$  [2], интегралом О.И.Богоявленского  $f$  [4] и интегралом энергии  $H$  (формула 1.7).

**Публикации по теме диссертации:**

1. Зотьев Д.Б. *Fomenko-Zieschang invariant in the Bogoyavlenskyi integrable case.* // Регулярная и хаотическая динамика. N4. 2000.
2. Зотьев Д.Б. *Фазовая топология интегрируемого случая движения тяжелого магнита при нулевом значении интеграла типа С.В.Ковалевской.* // Деп. в ВИНТИ. 1986-В 00. 2000.
3. Зотьев Д.Б. *Каноническое погружение бутылки Клейна.* // Деп. в ВИНТИ. 896 - В 00. 2000.

## Глава 2. Особенности

### § 2.1. Вырожденные особенности симплектической формы на фазовом многообразии $M^4$

Фазовое многообразие  $M^4$  не является симплектическим многообразием, т.к. замкнутая 2-форма  $\omega$  вырождается в точках подмногообразия  $M_0^3 = f^{-1}(0)$ . Ясно, что  $M_0^3 \cap Q_h^3$  есть нулевой уровень интеграла  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$ . Из теоремы 2 следует, что для всех регулярных  $h$  нулевое значение функции  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$  не является критическим. Следовательно,  $M_0^3 \cap Q_h^3 = f^{-1}(0)$  диффеоморфно  $f^{-1}(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для последнего выполнены все предпосылки теоремы Лиувилля. Так как  $Q_h^3$  компактна, то  $f^{-1}(\varepsilon)$  — конечный набор торов Лиувилля. Итак, на каждой регулярной изоэнергетической поверхности  $Q_h^3$  точки вырождения  $\omega$  заполняют несколько торов — неособых подмногообразий уровня интеграла  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$ . Так как  $Q_h^3$  — неособая поверхность и  $v = sgrad_{O^6}(H)$ , то  $v \neq 0$  в каждой точке  $Q_h^3$ . Очевидно, что все существенные исходные предпосылки теорий типа Морса [33-39] и топологической классификации [40, 7, 11] налицо, следовательно препятствий к их применению в случае О.И.Богоявленского нет.

### § 2.2. Движение тяжелого магнита в случае типа С.В.Ковалевской в параллельных гравитационном и магнитном полях

Если условие (1.6) не выполняется, т.е.

$$(\vec{\gamma}, \vec{\delta}) = \pm 1,$$

то фазовое пространство случая О.И.Богоявленского вырождается в 3-х мерное многообразие. Рассмотрим движение намагниченного гиростата при  $|c| = 1$ , пусть

$$k = \pm h M_2 / m g r_1, \quad \vec{\nu} = 4 I_3 m g r_1 \vec{\gamma}, \quad I_3 = I.$$

Уравнение  $\dot{\vec{\delta}} = [\vec{\delta}, \vec{\omega}]$  прямо следует из  $\dot{\vec{\delta}} \equiv \pm \vec{\gamma}$ , следовательно его можно не учитывать. Из (1.1) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_1 &= \frac{M_2 M_3}{2I} + k \nu_3, & \frac{d}{dt} M_2 &= -\frac{M_1 M_3}{2I} - \nu_3, & \frac{d}{dt} M_3 &= \nu_2 - k \nu_1, \\ \frac{d}{dt} \nu_1 &= \frac{2 M_3 \nu_2 - M_2 \nu_3}{2I}, & \frac{d}{dt} \nu_2 &= \frac{M_1 \nu_3 - 2 M_3 \nu_1}{2I}, & \frac{d}{dt} \nu_3 &= \frac{M_2 \nu_1 - M_1 \nu_2}{2I}. \end{aligned}$$

Точно такие уравнения описывают движение ненамагниченного тяжелого твердого тела с фиксированной точкой, если:

а) главные моменты инерции связаны соотношением С.В. Ковалевской

$$I_1 = I_2 = 2I_3;$$

6) неподвижная точка находится в экваториальной плоскости  $X, Y$  эллипсоида инерции так, что

$$k = \operatorname{tg}(\alpha),$$

где  $\alpha$  угол между главной осью  $X$  и направлением из фиксированной точки на центр масс, отсчитываемый по часовой стрелке.

Назовем это движение смещенным случаем С.В. Ковалевской. Имеется 4 интеграла движения:

$$z = (M_1^2 - M_2^2 + 4I\nu_1 - 4Ik\nu_2)^2 + (2M_1M_2 + 4I\nu_2 + 4Ik\nu_1)^2,$$

$$H = \frac{M_1^2 + M_2^2 + 2M_3^2}{4I} - \nu_1 - k\nu_2, \quad J = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2, \quad s = M_1 \cdot \nu_1 + M_2 \cdot \nu_2 + M_3 \cdot \nu_3$$

( $s$  - интеграл площадей). Система интегрируется по Лиувиллю на каждом подмногообразии уровня интегралов  $s$  и  $J \neq 0$ , которое диффеоморфно  $TS^2$  и является орбитой коприсоединенного представления группы евклидовых движений  $\mathbf{R}^3$ . Итак, в предположениях (1.2) каждый из двух случаев движения, отвечающих сонаправленности или противонаправленности магнитного и гравитационного полей, эквивалентен смещенному случаю С.В. Ковалевской. В дальнейшем предполагается, что  $|c| < 1$ , т.е. векторы индукции магнитного поля и силы тяжести не параллельны.

### § 2.3. Удобные координаты в объемлющем пространстве $(so(3) \oplus \mathbf{R}^6)^*$

Фазовое пространство  $M^4$  суть поверхность в  $(so(3) \oplus \mathbf{R}^6)^*$  с координатами  $M_1, M_2, M_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ . Заменим координаты  $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$  на  $\vec{\xi}, \vec{\eta}$  по формулам (1.4). Поверхность  $M^4$  определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} M_1^2 - M_2^2 + \xi_1 - \eta_2 = 0 \\ 2M_1M_2 + \xi_2 + \eta_1 = 0 \\ \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = c_1 \\ \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 = c_2 \\ \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = c_3. \end{cases} \quad (2.1)$$

Введем следующие координаты:

$$\begin{cases} \xi_1 - \eta_2 = \rho \cos \theta \\ \xi_2 + \eta_1 = \rho \sin \theta \\ \xi_1 + \eta_2 = c \\ \eta_1 - \xi_2 = x \\ \xi_3 = r \cos \psi \\ \eta_3 = r \sin \psi, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$-\pi \leq \psi, \theta \leq \pi, \quad r, \rho \geq 0.$$

Поверхность  $M^4$  в координатах  $M_1, M_2, M_3, \rho, \theta, c, x, r, \psi$  выглядит так:

$$\begin{cases} x\rho = -\tilde{c} \sin(\theta - \alpha_0) - r^2 \sin(2\psi - \theta) \\ c\rho = \tilde{c} \cos(\theta - \alpha_0) - r^2 \cos(2\psi - \theta) \\ c^2 + \rho^2 + x^2 + 2r^2 = 2c_0 \\ M_1 = \mp\sqrt{\rho} \sin\frac{\theta}{2} \\ M_2 = \pm\sqrt{\rho} \cos\frac{\theta}{2}, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\text{Константы: } c_0 = c_1 + c_3, \quad \tilde{c} = \sqrt{(c_1 - c_3)^2 + 4c_2^2}, \quad \cos \alpha_0 = \frac{c_1 - c_3}{\tilde{c}}, \quad \sin \alpha_0 = \frac{2c_2}{\tilde{c}}. \quad (2.4)$$

#### § 2.4. Особенность типа самопересечения в случае, когда направления гравитационного и магнитного полей ортогональны, а моменты сил равны по абсолютной величине

Легко проверить, что

$$c_0 > \tilde{c} \Leftrightarrow c_1 > 0, c_3 > 0, |c_2| < \sqrt{c_1 \cdot c_3} \Leftrightarrow mg \cdot r_1 \neq 0, hM_2 \neq 0, (\vec{\gamma}, \vec{\delta}) \neq \pm 1.$$

Так как  $\tilde{c} = 0 \Leftrightarrow c_1 - c_3 = c_2 = 0$ , то при  $\tilde{c} = 0$  моменты силы тяжести и магнитной силы равны по абсолютной величине, а направления гравитационного и магнитного полей ортогональны. В этом случае  $M^4$  не является гладким многообразием, поскольку в точках цилиндра

$$\left\{ M_1 = M_2 = r = \rho = 0, c^2 + x^2 = 2c_0, -\infty < M_3 < +\infty \right\}$$

возникает негладкая особенность — самопересечение. Поверхность  $M^4$  является подмногообразием (т.е. гладким многообразием) тогда и только тогда, когда  $\tilde{c} > 0$ .

Итак, в дальнейшем всюду предполагается, что

$$c_0 > \tilde{c} > 0. \quad (2.5)$$

## Глава 3. Критические уровни энергии

### § 3.1. Теорема 1 о критических значениях и критических подмногообразиях интеграла энергии

**Теорема 1.** Гамильтониан  $H : M^4 \rightarrow \mathbf{R}$  имеет следующие критические значения и невырожденные критические подмногообразия:

$$h_1 = -\sqrt{2c_0 - 2\tilde{c}}, \quad h_2 = \sqrt{2c_0 - 2\tilde{c}}, \quad h_3 = \sqrt{2c_0 + 2\tilde{c}}.$$

Глобально минимальная окружность —  $H^{-1}(h_1)$ ,  
 седловая окружность индекса (1,2) —  $C \cap H^{-1}(h_2)$ ,  
 пара непересекающихся седловых окружностей индекса (2,1) —  $C \cap H^{-1}(h_3)$ ,  
 где  $C$  — множество критических точек  $H$ . Остальные значения  $H$  регулярны.

**Доказательство.** Константы определены в (2.4) при условии (2.5). Пусть  $\Lambda : M^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$  — проекция, сопоставляющая точке

$$(M_1, M_2, M_3, \rho, \theta, c, x, r, \psi) \in M^4 \quad (3.1)$$

точку  $(c, \rho) = (c, M_1^2 + M_2^2)$ . Множество пар  $(c, \rho)$ , для каждой из которых существует решение системы (2.3), определяется условиями:

$$0 \leq \rho \leq \sqrt{c_0 + \sqrt{c_0^2 - \tilde{c}^2}}, \quad c_0 - \frac{c^2 + \rho^2}{2} \geq \min\{r^2 : r \geq 0, -\pi \leq \psi \leq \pi\}, \quad \text{где}$$

$$r^2 = \tilde{c} \cos(2\psi - \alpha_0) - \rho^2 \pm \sqrt{(\tilde{c} \cos(2\psi - \alpha_0) - \rho^2)^2 - (\rho^4 - 2c_0\rho^2 + \tilde{c}^2)}.$$

Из этих неравенств следует, что  $\Lambda(M^4)$  представляет собой шестиугольник  $ABCDEF$  (рис.1) в плоскости  $\mathbf{R}^2(c, \rho)$ , описанный ниже. Пусть

$$h_1 = -\sqrt{2c_0 - 2\tilde{c}}, \quad h_2 = \sqrt{2c_0 - 2\tilde{c}}, \quad h_3 = \sqrt{2c_0 + 2\tilde{c}},$$

$$\rho_1 = \sqrt{c_0 - \sqrt{c_0^2 - \tilde{c}^2}}, \quad \rho_2 = \sqrt{c_0 + \sqrt{c_0^2 - \tilde{c}^2}}.$$

$$[AB] = \{(c, \rho) : \rho = -c - h_2, -\rho_2 \leq c \leq -h_2\},$$

$$[BC] = \{(c, \rho) : \rho = c + h_3, -\rho_2 \leq c \leq -\rho_1\},$$

$$[CD] = \{(c, \rho) : \rho = \rho_2, -\rho_1 \leq c \leq \rho_1\},$$

$$[DE] = \{(c, \rho) : \rho = -c + h_3, \rho_1 \leq c \leq \rho_2\},$$

$$[EF] = \{(c, \rho) : \rho = c - h_2, h_2 \leq c \leq \rho_2\},$$

$$[FA] = \{(c, \rho) : \rho = 0, -h_2 \leq c \leq h_2\}.$$

В координатах (2.2) гамильтониан имеет вид

$$H = 2M_3^2 + \rho - c.$$

Дальнейшие вычисления — в локальных координатах многообразия  $M^4$ , среди которых всегда присутствует координата  $M_3$ . Если  $dH(p) = 0$ , то  $M_3(p) = 0$ . Если

$$(c, \rho) \in \Lambda(M^4) \setminus (\partial ABCDEF \cup [AD] \cup [CF] \cup [BE]),$$

то в точке  $p \in \Lambda^{-1}(c, \rho)$  существуют координаты  $(c, \rho, y, M_3)$ , где  $y$  — одна из координат  $\psi, r, \theta$ . Ясно,  $\frac{\partial H}{\partial \rho} \neq 0$  и  $\frac{\partial H}{\partial c} \neq 0$ . Если  $\Lambda(p) \in (CD) \cup (BE)$  или  $\Lambda(p) \in (AF)$ , то в точке  $p$  существуют координаты  $c, \xi_3, \eta_3$  или  $c, M_1, M_2$  (соответственно). Наличие координаты  $M_3$  подразумевается. В этом случае  $\rho = \text{const}$  и  $\frac{\partial H}{\partial c}(p) = -1 \neq 0$ . Если  $\Lambda(p) \in (CF)$ , но  $\Lambda(p) \neq G = (CF) \cap (AD)$  (рис.1), то в точке  $p$  существуют координаты  $c, x, \psi$  (при этом  $x(p) = 0$  и  $\psi(p) = \frac{\alpha_0}{2}$ ). Если  $x \equiv 0$  и  $\psi \equiv \frac{\alpha_0}{2}$ , то  $\theta \equiv -\pi + \alpha_0$ ,  $c \equiv h_2 - \rho$ ,  $H \equiv h_2 - 2c$ , следовательно  $\frac{\partial H}{\partial c}(p) = -2 \neq 0$ . Здесь значок  $\equiv$  означает: "равно в каждой точке рассматриваемой координатной линии". Заметим, что  $\{\theta(p) : p \in \Lambda^{-1}(G)\} = [-\pi, \pi]$ . Если  $\Lambda(p) = G$  и  $\theta \neq \alpha_0, -\pi + \alpha_0$ , то в точке  $p$  существуют координаты  $x, \psi, \theta$  (при этом  $x(p) = 0$  и  $\psi(p) = \frac{\alpha_0}{2}$ ). Если  $\psi \equiv \frac{\alpha_0}{2}$  и  $\theta \equiv \text{const}$ , то

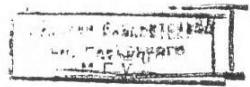
$$H \equiv h_2 + \frac{\cos(\theta - \alpha_0) - 1}{\sin(\theta - \alpha_0)}x,$$

следовательно  $\frac{\partial H}{\partial x}(p) \neq 0$ . Если  $\Lambda(p) = G$  и  $\theta = -\pi + \alpha_0$ , то в точке  $p$  существуют координаты  $c, \psi, \theta$  (при этом  $c(p) = 0$  и  $\psi(p) = \frac{\alpha_0}{2}$ ). Если  $\psi \equiv \frac{\alpha_0}{2}$  и  $\theta \equiv \text{const}$ , то  $H \equiv h_2 - 2c$  и  $\frac{\partial H}{\partial c}(p) = -2 \neq 0$ . Если  $\Lambda(p) = G$  и  $\theta = \alpha_0$ , то точка  $p$  принадлежит окружности

$$S^1 = \{q \in M^4 : M_3(q) = 0, c(q) = \rho(q) - h_2, \theta(q) = \alpha_0, \psi(q) = \frac{\alpha_0}{2}, x(q) = 0\}.$$

Докажем, что данная окружность критическая для  $H$ . Окружность  $S^1$  проектируется на отрезок  $[AD]$ . Если  $\Lambda(p) \in (AD)$ , но  $\Lambda(p) \neq G$ , то в точке  $p$  существуют координаты  $c, x, \psi$  (при этом  $x(p) = 0$  и  $\psi(p) = \frac{\alpha_0}{2}$ ). Если  $x \equiv 0$  и  $\psi \equiv \frac{\alpha_0}{2}$ , то  $\theta \equiv \alpha_0$ ,  $c \equiv \rho - h_2$ ,  $H \equiv h_2$ , следовательно  $\frac{\partial H}{\partial c}(p) = 0$ . Пусть  $c \equiv \text{const}$  и  $\psi \equiv \frac{\alpha_0}{2}$ . Т.к.  $\Lambda$ -проекция координатной линии  $x = t$  представляет собой вертикальный отрезок, расположенный выше  $[AD]$  (рис.1), то функция  $\rho(x)$  достигает в точке  $x = 0$  локального минимума. Следовательно,  $\frac{\partial H}{\partial x}(p) = 0$ . Пусть  $c \equiv \text{const}$  и  $x \equiv 0$ . Т.к.  $\Lambda$ -проекция координатной линии  $\psi = t$  представляет собой вертикальный отрезок, расположенный ниже  $[AD]$ , то функция  $\rho(\psi)$  достигает в точке  $\psi = \frac{\alpha_0}{2}$  локального максимума. Следовательно  $\frac{\partial H}{\partial \psi}(p) = 0$ . Итак,  $dH(p) = 0$  и  $H(p) = h_2$ . Если  $p \in S^1$  и  $\Lambda(p) \in \{G, A, D\}$ , то  $dH(p) = 0$  по непрерывности. Итак доказано, что:

а)  $S^1$  — критическая окружность;



б) среди точек  $M^4$ , которые не проектируются в отрезки  $[EF]$ ,  $[AD]$ ,  $[BC]$ , нет критических;

в) среди точек  $\Lambda^{-1}(G)$ , не принадлежащих окружности  $S^1$ , нет критических.

Отрезки  $[EF]$  и  $[BC]$  являются минимаксными для функции  $l(c, \rho) = \rho - c$ , заданной на многоугольнике  $ABCDEF$ . Следовательно, окружность  $\{q \in \Lambda^{-1}[EF] : M_3(q) = 0\}$  и пара окружностей  $\{q \in \Lambda^{-1}[BC] : M_3(q) = 0\}$  - критические для  $H$ . Легко проверить, что все критические окружности невырождены. Теорема доказана.

Таким образом, критические окружности гамильтониана  $H$ , соответствующие критическим значениям  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ , проектируются на отрезки  $[EF]$ ,  $[AD]$ ,  $[BC]$ . Заштрихованные области на рис.1 —  $\Lambda$ -проекции изоэнергетической поверхности  $Q_h^3$  на плоскость  $\mathbf{R}^2(c, \rho)$  при различных значениях  $h$ . Если в (2.3) добавить уравнение  $2M_3^2 + \rho - c = h$ , то получится система уравнений, определяющая изоэнергетическую поверхность  $Q_h^3$ .

В координатах (2.2) интеграл Богоявленского имеет следующий вид:

$$f = \rho \sqrt{\frac{c - \rho + h}{2}} \operatorname{sgn}(M_3) \pm r \sqrt{\rho} \cdot \sin(\psi - \frac{\theta}{2}), \quad (3.2)$$

где знаки  $\pm$  согласованы со знаками  $\mp$  и  $\pm$  в системе (2.4) (согласованными между собой): верхний отвечает верхнему, а нижний - нижнему.

## Глава 4. Критические подмногообразия интеграла О.И.Богоявленского

**§ 4.1. Теорема 2 о критических значениях и критических подмногообразиях интеграла О.И.Богоявленского**

Критические значения интеграла  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$  связаны следующим уравнением:

$$\left[ 4k(2k^2 - 9) \cdot \chi^2 + 36kh \cdot \chi + 27\tilde{c} \right]^2 = 64\chi \left[ (k^2 - 3) \cdot \chi + 3h \right]^3, \quad \text{где} \quad (4.1)$$

$$\chi > 0, \quad h^2 = 2c_0 + k\tilde{c}, \quad c_0 > \tilde{c} > 0, \quad h \geq h_1 = -\sqrt{2c_0 - 2\tilde{c}}.$$

**Теорема 2.** Пусть  $C_f(h)$  — множество критических точек интеграла  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , где  $h$  — произвольное регулярное значение гамильтониана  $H$ . Тогда  $C_f(h)$  состоит из нескольких непересекающихся окружностей, перечисленных ниже для всевозможных регулярных значений  $h$ .

1)  $h_0 < h < h_3$ :

$f^{-1}(f_1^+) \cap C_f(h)$  — максимальная окружность,

$f^{-1}(f_2^+) \cap C_f(h)$  — седловая окружность,

$f^{-1}(f_3^+) \cap C_f(h)$  — пара минимальных окружностей,

$f^{-1}(f_4^+) \cap C_f(h)$  — пара седловых окружностей,

$f^{-1}(f_4^-) \cap C_f(h)$  — пара седловых окружностей,

$f^{-1}(f_3^-) \cap C_f(h)$  — пара максимальных окружностей,

$f^{-1}(f_2^-) \cap C_f(h)$  — седловая окружность,

$f^{-1}(f_1^-) \cap C_f(h)$  — минимальная окружность,

$$f_1^- < f_2^- < f_3^- < f_4^+ < 0 < f_4^- < f_3^+ < f_2^+ < f_1^+,$$

$$f_i^\pm = \mp \frac{\tilde{c}}{2} \cdot l_i^{-1} \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad l_1 = -\sqrt{\chi_1}, \quad l_2 = -\sqrt{\chi_2}, \quad l_3 = \sqrt{\chi_3}, \quad l_4 = \sqrt{\chi_4},$$

$$0 < \chi_1 < \chi_2 < \chi_3 < \chi_4, \quad \chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4 \text{ — корни уравнения 4.1.}$$

Окружности  $f^{-1}(f_1^+)$  и  $f^{-1}(f_1^-)$  проектируются (3.1) на  $\mathbf{R}^2(c, \rho)$  в отрезок параболы  $c = 2K_1^2\rho^2 + \rho - h$ , заключенный между прямыми  $\rho = -c + h_2$  и  $\rho = -c + h_3$ .

Окружности  $f^{-1}(f_2^+)$  и  $f^{-1}(f_2^-)$  проектируются на  $\mathbf{R}^2(c, \rho)$  в отрезок параболы  $c = 2K_2^2\rho^2 + \rho - h$ , заключенный между прямыми  $\rho = -c - h_2$  и  $\rho = -c + h_3$ .

Окружности  $f^{-1}(f_3^+)$  и  $f^{-1}(f_3^-)$  проектируются на  $\mathbf{R}^2(c, \rho)$  в отрезок параболы  $c = 2K_3^2\rho^2 + \rho - h$ , заключенный между прямыми  $\rho = -c - h_2$  и  $\rho = -c + h_2$ .

Окружности  $f^{-1}(f_4^+)$  и  $f^{-1}(f_4^-)$  проектируются на  $\mathbf{R}^2(c, \rho)$  в отрезок параболы  $c = 2K_4^2\rho^2 + \rho - h$ , заключенный между прямыми  $\rho = -c - h_2$  и  $\rho = -c + h_2$ .

Из двух парабол, заключенных между прямыми  $\rho = -c - h_2$  и  $\rho = -c + h_2$ , минимаксным

окружностям  $f^{-1}(f_3^\pm)$  соответствует нижняя, седловым окружностям  $f^{-1}(f_4^\pm)$  — верхняя (рис.5).

$$K_i = \frac{3}{2(kl_i + \sqrt{k^2 l_i^2 - 3(l_i^2 - h)})} \quad i \in \{1, 2, 4\}, \quad K_3 = \frac{3}{2(kl_3 - \sqrt{k^2 l_3^2 - 3(l_3^2 - h)})},$$

$$h^2 = 2c_0 + k \cdot \tilde{c}.$$

$\Lambda$ -проекции всех критических окружностей — на рис.5.

2)  $h > h_3$ :

В данном случае уравнение 4.1 имеет 3 корня  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  таких, что  $0 < \chi_1 < \chi_2 < \chi_3$ .

$f^{-1}(f_1^+) \cap C_f(h)$  — максимальная окружность,

$f^{-1}(f_2^+) \cap C_f(h)$  — седловая окружность,

$f^{-1}(f_3^+) \cap C_f(h)$  — пара минимальных окружностей,

$f^{-1}(f_3^-) \cap C_f(h)$  — пара максимальных окружностей,

$f^{-1}(f_2^-) \cap C_f(h)$  — седловая окружность,

$f^{-1}(f_1^-) \cap C_f(h)$  — минимальная окружность.

Критические окружности и критические значения формально определяются также, как в п.1(для соответствующих  $f_i^\pm \quad i < 4$ ),

$$f_1^- < f_2^- < f_3^+ < 0 < f_3^- < f_2^+ < f_1^+.$$

$\Lambda$ -проекции всех критических окружностей — на рис.6.

3)  $h_2 < h < h_0$ :

В данном случае уравнение 4.1 имеет 2 корня  $\chi_1, \chi_2$  таких, что  $0 < \chi_1 < \chi_2$ .

$f^{-1}(f_1^+) \cap C_f(h)$  — максимальная окружность,

$f^{-1}(f_2^+) \cap C_f(h)$  — седловая окружность,

$f^{-1}(f_2^-) \cap C_f(h)$  — седловая окружность,

$f^{-1}(f_1^-) \cap C_f(h)$  — минимальная окружность.

Критические окружности и критические значения формально определяются также, как в п.1(для соответствующих  $f_i^\pm \quad i < 3$ ),

$$f_1^- < f_2^- < 0 < f_2^+ < f_1^+.$$

$\Lambda$ -проекции всех критических окружностей — на рис.4.

4)  $h_1 < h < h_2$ :

В данном случае уравнение 4.1 имеет 1 положительный корень  $\chi_1$ .

$f^{-1}(f_1^+) \cap C_f(h)$  — максимальная окружность,

$f^{-1}(f_1^-) \cap C_f(h)$  — минимальная окружность.

Критические окружности и критические значения формально определяются также, как в п.1(для соответствующего  $f_1^\pm$ ),

$$f_1^- < 0 < f_1^+.$$

$\Lambda$ -проекция критических окружностей - на рис.3.

Остальные координаты (2.2) критических окружностей при всех регулярных  $h$  определяются из следующей системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} l_i \sqrt{\rho} \cos(\theta - \alpha_0) = - \left( \frac{\sqrt{\rho}(c+h)}{\sqrt{2(c-\rho+h)}} + \frac{\tilde{c}}{2l_i \sqrt{\rho}} \right) \\ r^2 = c\rho - \tilde{c} \cos(\theta - \alpha_0) + 2l_i^2 \rho \sin^2(\theta - \alpha_0) \\ r \cos \left( \psi - \frac{\theta}{2} \right) = (\pm) l_i \sqrt{\rho} \sin(\theta - \alpha_0) \\ sgn \sin \left( \psi - \frac{\theta}{2} \right) = (\mp) sgn \left( \sqrt{\rho} \sqrt{\frac{c-\rho+h}{2}} + \frac{\tilde{c}}{2l_i \sqrt{\rho}} \right) \\ x = l_i \sqrt{2(c-\rho+h)} \sin(\theta - \alpha_0) \\ M_3 = \pm \sqrt{\frac{c-\rho+h}{2}} \\ M_1 = (\mp) \sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2} \cdot sgn(M_3) \\ M_2 = (\pm) \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2} \cdot sgn(M_3) \end{array} \right. \quad (4.2)$$

где знаки  $(\pm)$  и  $(\mp)$  согласованы между собой: верхний отвечает верхнему, а нижний - нижнему.

**Замечание.** Все минимаксные критические окружности интеграла  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , при всех регулярных  $h$ , образованы фазовыми траекториями устойчивого периодического движения. Так как  $M^4$  есть глобально-минимальное подмногообразие интеграла типа С.В.Ковалевской  $z = z_1^2 + z_2^2$ , то движение по минимаксным окружностям устойчиво также и в объемлющем пространстве  $(so(3) \oplus \mathbf{R}^6)^*$ . Это означает, что (с точностью до параметризации) вычислены устойчивые периодические траектории в случае типа С.В.Ковалевской движения намагниченного тяжелого тела. Данный результат интересен с точки зрения технических приложений, а также вследствие отсутствия устойчивого периодического движения на нерезонансных лиувиллевых торах  $T^3$ , на которые расслаиваются (возможно с особенностями) 5-мерные подмногообразия ненулевого уровня  $z$  каждой регулярной орбиты. Последнее следует из интегрируемости по Лиувиллю системы  $v$  на орbitах, однако строгим доказательством нерезонансности торов  $T^3$  автор не располагает.

**§ 4.2. Доказательство теоремы 2: в координатах  $(c, \rho, \psi)$  критические точки функции  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$  определяются условием  $\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial \psi} = 0$**

В координатах (2.2) интеграл Богоявленского имеет вид (3.2):

$$f = \pm \rho \sqrt{\frac{c-\rho+h}{2}} \pm r \sqrt{\rho} \cdot \sin \left( \psi - \frac{\theta}{2} \right) = \rho \sqrt{\frac{c-\rho+h}{2}} sgn(M_3) \pm r \sqrt{\rho} \cdot \sin \left( \psi - \frac{\theta}{2} \right).$$

Из (2.3) следует, что в окрестности почти каждой точки из  $Q^3(h)$  существуют локаль-

ные координаты  $c, \rho, \psi$ . Далее вычисляем частные производные функции  $f|_{Q_h^3}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\rho}{2\sqrt{2}\sqrt{c-\rho+h}} sgn(M_3) \mp \frac{r\sqrt{\rho} \cdot \cos(\psi - \frac{\theta}{2})}{2x}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \psi} &= \mp \frac{\tilde{c}r}{x\sqrt{\rho}} \left[ \cos(\psi - \frac{\theta}{2}) \sin(\theta - \alpha_0) + \frac{\sin(2\psi - \alpha_0)}{-r^2 - \rho^2 + c \cdot \cos(2\psi - \alpha_0)} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left( \tilde{c} \sin(\psi - \frac{\theta}{2}) \sin(\theta - \alpha_0) + r^2 \cos(\psi - \frac{\theta}{2}) \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \rho} &= \frac{2c-3\rho+2h}{2\sqrt{2}\sqrt{c-\rho+h}} sgn(M_3) \pm \frac{\rho(r^2+\rho^2-c_0)}{r(-r^2-\rho^2+c \cdot \cos(2\psi - \alpha_0))} \left( \sqrt{\rho} \sin(\psi - \frac{\theta}{2}) - \frac{r^2}{x\sqrt{\rho}} \cos(\psi - \frac{\theta}{2}) \cos(2\psi - \theta) \right) \pm \\ &\quad \left( \frac{r}{2\sqrt{\rho}} \sin(\psi - \frac{\theta}{2}) - \frac{rc}{2x\sqrt{\rho}} \cos(\psi - \frac{\theta}{2}) \right). \end{aligned}$$

Докажем, что  $\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial \psi} = 0$  влечет  $\frac{\partial f}{\partial \rho} = 0$ , а если в окрестности точки нет координат  $c, \rho, \psi$ , но есть координаты  $c, \rho, r$ , то  $\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial r} = 0$  влечет  $\frac{\partial f}{\partial \rho} = 0$ .

Предположим, что  $\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial \psi} = 0$ . Пусть

$$\alpha = \psi - \frac{\theta}{2}, \quad \beta = \theta - \alpha_0.$$

Если, к примеру,

$$M_1 = -\sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2}, \quad M_2 = \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2}, \quad M_3 > 0,$$

то умножая  $\frac{\partial f}{\partial \rho}$  на ненулевой множитель  $2/r\rho\sqrt{\rho}$  преобразуем к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{x\rho+r^2\sin\alpha\cos\alpha}{r^2\cos\alpha} - \frac{\rho^2\cos\alpha}{x\rho} + \frac{r^2\cos\alpha\cos 2\alpha}{x\rho} \cdot \left( 1 - \frac{2\rho^2(r^2+\rho^2-c_0)}{\tilde{c}(c\rho\cos\beta-x\rho\sin\beta)-\rho^2(2c_0-r^2-\rho^2)} \right) + \\ \frac{2\rho^2(r^2+\rho^2-c_0)\sin\alpha}{\tilde{c}(c\rho\cos\beta-x\rho\sin\beta)-\rho^2(2c_0-r^2-\rho^2)} - \frac{ccos\alpha\cos\beta}{x\rho} = \\ -\frac{\tilde{c}\sin\beta+r^2\sin\alpha\cos\alpha}{r^2\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha(\rho^2+\tilde{c}\cos\beta)}{x\rho} + \frac{r^2\cos\alpha\cos 2\alpha}{x\rho} \cdot \frac{\tilde{c}(c\rho\cos\beta-x\rho\sin\beta)-r^2\rho^2-\rho^4}{\tilde{c}(c\rho\cos\beta-x\rho\sin\beta)-\rho^2(2c_0-r^2-\rho^2)} + \\ \frac{2\rho^2(r^2+\rho^2-c_0)\sin\alpha}{\tilde{c}(c\rho\cos\beta-x\rho\sin\beta)-\rho^2(2c_0-r^2-\rho^2)}. \end{aligned}$$

Обозначим это выражение  $V$  и будем доказывать, что оно равно нулю.

Из  $\frac{\partial f}{\partial \psi} = 0$  и первых двух уравнений системы (2.3) следует:

$$x\rho\cos(\alpha + \beta) = -\rho^2\sin\beta\cos\alpha, \quad x\rho = -\tilde{c}\sin\beta - r^2\sin 2\alpha, \quad c\rho = \tilde{c}\cos\beta - r^2\cos 2\alpha.$$

С учетом этого, умножая на знаменатель (отличный от нуля), преобразуем  $V$  к виду:

$$\begin{aligned} (-\tilde{c}\sin\beta \cdot x\rho - r^2\cos^2\alpha(\tilde{c}\cos\beta + \rho^2))(\rho^2(r^2 + \rho^2) + \tilde{c}(c\rho\cos\beta - x\rho\sin\beta) - 2c_0\rho^2) + \\ (\tilde{c}(c\rho\cos\beta - x\rho\sin\beta) - \rho^2(r^2 + \rho^2)) \cdot (\tilde{c}\sin\alpha\sin\beta + r^2\cos\alpha)r^2\cos\alpha. \end{aligned}$$

Преобразовывая и деля на  $r^2 \neq 0$ , получаем следующее значение  $V$ :

$$\begin{aligned} (-\tilde{c}\sin\beta \cdot x\rho - r^2\cos^2\alpha(\tilde{c}\cos\beta + \rho^2))(\rho^2(r^2 + \rho^2) + \tilde{c}(c\rho\cos\beta - x\rho\sin\beta) - \rho^2(r^2 + \rho^2)) + \\ (\tilde{c}(c\rho\cos\beta - x\rho\sin\beta) - \rho^2(r^2 + \rho^2)) \cdot (\tilde{c}\sin\alpha\sin\beta + r^2\cos\alpha)\cos\alpha. \end{aligned}$$

Обозначим это выражение  $W$  и, с учетом равенства

$$\tilde{c}(c\rho\cos\beta - x\rho\sin\beta) - \rho^2(r^2 + \rho^2) = (c\rho\cos\alpha + x\rho\sin\alpha - \rho^2)r^2 + \rho^2(c^2 + x^2 - \rho^2),$$

преобразуем к следующему виду:

$$(x\rho)^3 \sin \alpha \cos \alpha + (x\rho)^2 (c\rho) \cos 2\alpha - (x\rho)^2 \rho^2 + (x\rho)^2 r^2 \cos^2 \alpha - (c\rho)^2 (x\rho) \sin \alpha \cos \alpha - (x\rho)(c\rho) r^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2(c\rho) r^2 \rho^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2r^2 \rho^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - (x\rho) r^2 \rho^2 \sin \alpha \cos \alpha (1 + 2\cos^2 \alpha) + \rho^4 (x\rho) \sin \alpha \cos \alpha.$$

Имеет место следующая цепочка равенств:

$$(x\rho)^3 \sin \alpha \cos \alpha + (x\rho)^2 (c\rho) \cos 2\alpha (x\rho)^2 r^2 \cos^2 \alpha = (x\rho)^2 (-\tilde{c} \sin \beta - r^2 \sin 2\alpha) \sin \alpha \cos \alpha + (x\rho)^2 (c\rho) \cos 2\alpha + (x\rho)^2 r^2 \cos^2 \alpha = \tilde{c} \cos \alpha (x\rho)^2 \cos(\alpha + \beta) - (x\rho)^2 (c\rho) \cos^2 \alpha + (x\rho)^2 (c\rho) \cos 2\alpha = -\tilde{c} (x\rho) \rho^2 \sin \beta \cos^2 \alpha - (x\rho)^2 (c\rho) \sin^2 \alpha.$$

$$(x\rho)^3 \sin \alpha \cos \alpha + (x\rho)^2 (c\rho) \cos 2\alpha - (x\rho)^2 \rho^2 + (x\rho)^2 r^2 \cos^2 \alpha - (x\rho) r^2 \rho^2 \sin \alpha \cos \alpha (1 + 2\cos^2 \alpha) = \tilde{c} \rho^4 \sin \beta \sin \alpha \cos \alpha + (x\rho)(c\rho) \rho^2 \sin \alpha \cos \alpha - (x\rho)^2 (c\rho) \sin^2 \alpha.$$

$$(x\rho)^3 \sin \alpha \cos \alpha + (x\rho)^2 (c\rho) \cos 2\alpha - (x\rho)^2 \rho^2 + (x\rho)^2 r^2 \cos^2 \alpha - (c\rho)^2 (x\rho) \sin \alpha \cos \alpha - (x\rho)(c\rho) r^2 \sin \alpha \cos \alpha + 2(c\rho) r^2 \rho^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2r^2 \rho^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - (x\rho) r^2 \rho^2 \sin \alpha \cos \alpha (1 + 2\cos^2 \alpha) + \rho^4 (x\rho) \sin \alpha \cos \alpha = \tilde{c} \rho^4 \sin \beta \sin \alpha \cos \alpha + (x\rho)(c\rho) \rho^2 \sin \alpha \cos \alpha + \tilde{c} \rho^2 (c\rho) \sin \beta \sin \alpha \cos \alpha.$$

Сокращая на ненулевой (т.к.  $x \neq 0$ ) общий множитель  $\rho^2 \sin \alpha \cos \alpha$ , получаем:

$$\begin{aligned} \rho^2 (\tilde{c} \sin \beta + r^2 \sin 2\alpha) + (x\rho)(c\rho) + (c\rho)(\tilde{c} \sin \beta + r^2 \sin 2\alpha) + \rho^2 (x\rho) = \\ \rho^2 (-x\rho) + (x\rho)(c\rho) + (c\rho)(-x\rho) + \rho^2 (x\rho) = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Аналогично рассматривается случай  $\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial r} = 0$ , где опять с необходимостью  $\frac{\partial f}{\partial \rho} = 0$ . При этом достаточно рассмотреть точку, в которой отсутствуют координаты  $c, \rho, \psi$ , т.е. в которой имеет место  $\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$ . В такой точке вычисления значительно упрощаются, по сравнению с вышеприведенными.

**§ 4.3. Доказательство теоремы 2:** среди точек, в которых не определены координаты  $(c, \rho, \psi)$  и  $(c, \rho, r)$ , не более конечного числа критических для  $f$ :  $Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$

Пусть  $\Delta_h$  - множество тех точек многообразия  $Q^3(h)$ , в которых нет локальных координат  $c, \rho, \psi$  и  $c, \rho, r$ . Из системы уравнений (2.3) следует, что

$$\Delta_h = \{p \in Q_h^3 : r(p) \cdot \rho(p) \cdot x(p) \cdot (c(p) - \rho(p) + h) = 0\}.$$

Докажем, что  $\Delta_h$  содержит конечное число критических точек функции  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$ .

Множество  $\{p \in Q_h^3 : r(p) = 0\}$  представляет собой конечный набор окружностей, ни на одной из которых функция  $f$  не постоянна, так как

$$f|_{\{r=0\} \cap Q_h^3} = \pm \rho_1 \sqrt{\frac{c + h - \rho_1}{2}} \quad \text{или} \quad f|_{\{r=0\} \cap Q_h^3} = \pm \rho_2 \sqrt{\frac{c + h - \rho_2}{2}},$$

где  $c \neq const$ . Следовательно, среди его точек не более, чем конечное число критических для  $f$ . Данное множество проектируется ( $\Lambda$ ) в отрезки  $[BE]$  и  $[CD]$  (рис.1).

Если в точке  $p \in Q_h^3$  имеет место  $x(p) = 0$ , то возникают следующие два случая.

- 1) При  $\sin(2\psi(p) - \theta(p)) \neq 0$  возможно  $\Lambda(p) \in [KL]$  (3.1). Этот случай рассмотрен ниже. Если же  $\Lambda(p) \notin [KL]$ , то в точке  $p$  существуют локальные координаты  $c, \rho, \theta$ , в которых  $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$  влечет  $\sin(\theta - \alpha_0) = 0$ , что при  $x = 0$  несовместимо с  $\sin(2\psi - \theta) \neq 0$ .
- 2) При  $\sin(2\psi(p) - \theta(p)) = 0$  имеет место  $\sin(\theta(p) - \alpha_0) = 0$ , следовательно

$$\Lambda(p) \in [AB] \cup [BC] \cup [DE] \cup [EF] \cup [AD] \cup [CF]$$

(3.1, рис.1), но ни на одной из конечного набора окружностей, составляющих множество всех таких точек  $p$ , функция  $f$  не постоянна:

$$\begin{aligned} f|_{\Lambda^{-1}[EF] \cap Q_h^3} &= \pm \rho \sqrt{\frac{h_2 + h}{2}}, \\ f|_{\Lambda^{-1}[AB] \cap Q_h^3} &= \pm \rho \sqrt{-\rho + \frac{h - h_2}{2}} \pm \sqrt{-\rho^3 - h_2 \rho^2 + \tilde{c}\rho}, \\ f|_{\Lambda^{-1}[DE] \cap Q_h^3} &= \pm \rho \sqrt{-\rho + \frac{h + h_3}{2}} \pm \sqrt{-\rho^3 + h_3 \rho^2 - \tilde{c}\rho}, \\ f|_{\Lambda^{-1}[BC] \cap Q_h^3} &= \pm \rho \sqrt{\frac{h - h_3}{2}} \quad (h \geq h_3), \\ f|_{\Lambda^{-1}[AD] \cap Q_h^3 \cap \{x=0\}} &= \pm \rho \sqrt{\frac{h - h_2}{2}}, \\ f|_{\Lambda^{-1}[CF] \cap Q_h^3 \cap \{x=0\}} &= \pm \rho \sqrt{-\rho + \frac{h + h_2}{2}} \pm \sqrt{-\rho^3 + h_2 \rho^2 + \tilde{c}\rho}, \end{aligned}$$

где всюду  $\rho \neq const$ . Подмножество  $\Lambda^{-1}([AD] \cap [CF]) \cap \{x = 0\} \cap Q_h^3$  образовано следующей четверкой окружностей (при  $h > h_2$ ):

$$c = 0, \quad \rho = h2, \quad \psi = \frac{\alpha_0}{2} + \pi n, \quad r = \sqrt{\tilde{c}}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi,$$

на которых имеет место:

$$f \equiv \pm h_2 \sqrt{\frac{h - h_2}{2}} \pm \sqrt{\tilde{c}} \sqrt{h_2} \sin \left( \frac{\theta - \alpha_0}{2} \right).$$

Ясно, что у функции  $\frac{df}{d\theta}$  не более, чем конечное число нулей.

Если в точке  $p$  имеет место  $\rho(p) = 0$ , то  $\Lambda(p) \in [AF]$ . Из (2.3) следует, что в точке  $p$  существуют локальные координаты  $Q_h^3$ , две из которых —  $M_1, M_2$ . Так как

$$f = M_3(M_1^2 + M_2^2) + M_1 \xi_3 + M_2 \eta_3,$$

то  $\frac{\partial f}{\partial M_1} = \xi_3$  и  $\frac{\partial f}{\partial M_2} = \eta_3$ . Если  $df(p) = 0$ , то  $\xi_3(p) = \eta_3(p) = 0$ , следовательно  $r = 0$ , но этот случай уже рассмотрен.

В точке  $p \in Q_h^3$  имеет место  $c(p) - \rho(p) + h = 0$  тогда и только тогда, когда  $\Lambda(p) \in [KL]$  (рис.1). Здесь возможны следующие два случая.

1) Если  $x(p) \neq 0$ , то в точке  $p$  существуют координаты  $\rho, \psi, M_3$  или  $\rho, r, M_3$ . Оба эти случая рассматриваются аналогично. Т.к. функция  $c$  достигает минимума в точке  $p$ , то  $\frac{\partial c}{\partial M_3}(p) = 0$ . Т.к. функция  $r$  зависит только от  $\rho$  и  $\psi$  (соответственно  $\psi$  зависит только от  $\rho$  и  $r$ ), то  $\frac{\partial r}{\partial M_3}(p) = 0$ . Из уравнения

$$c\rho = \tilde{c} \cos(\theta - \alpha_0) - r^2 \cos(2\psi - \theta)$$

следует, что  $\frac{\partial \theta}{\partial M_3}(p) = 0$ . Отсюда  $\frac{\partial f}{\partial M_3}(p) = \rho(p)$ .

2) Если  $x(p) = 0$ , то в точке  $p$  существуют координаты  $\rho, \theta, M_3$ , в противном случае  $[KL] = [BC]$  — рассмотрено выше. Здесь также получаем  $\frac{\partial f}{\partial M_3}(p) = \rho(p)$ . Итак, если  $df(p) = 0$ , то  $\rho(p) = 0$ , но этот случай уже рассмотрен.

#### § 4.4. Доказательство теоремы 2: вывод уравнения 4.1 и системы 4.2

Доказано, что множество  $\Delta_h$  содержит конечное число критических точек  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$ . Следовательно, множество  $C_f(h) = \{p \in Q^3(h) : df(p) = 0\}$  является замыканием множества тех точек многообразия  $Q_h^3$ , в которых имеет место  $\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial \psi} = 0$  или  $\frac{\partial f}{\partial r} = 0$ . Следовательно, множество  $C_f(h)$  в координатах (2.2) определяется следующей системой уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x\rho = -\tilde{c} \sin(\theta - \alpha_0) - r^2 \sin(2\psi - \theta) \\ c\rho = \tilde{c} \cos(\theta - \alpha_0) - r^2 \cos(2\psi - \theta) \\ c^2 + \rho^2 + x^2 + 2r^2 = 2c_0 \\ x\rho \cdot \cos(\psi + \frac{\theta}{2} - \alpha_0) + \rho^2 \cos(\psi - \frac{\theta}{2}) \sin(\theta - \alpha_0) = 0 \\ x\rho = \pm r \sqrt{2\rho(c - \rho + h)} \cdot \cos(\psi - \frac{\theta}{2}) \operatorname{sgn}(M_3) \\ M_1 = \mp \sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2} \\ M_2 = \pm \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2} \\ M_3^2 = \frac{1}{2}(c - \rho + h). \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Далее мы выведем из (4.3) систему уравнений (4.2) и уравнение (4.1), связывающее энергию  $h$  с критическими значениями интеграла  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$ .

Возьмем пять первых уравнений системы (4.3), и добавим к ним еще одно:

$$\mp \frac{\tilde{c}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\rho} \sin(\theta - \alpha_0)}{r \cos(\psi - \frac{\theta}{2})} = f.$$

Левая часть этого уравнения есть значение, принимаемое  $f$  на критическом подмногообразии. В обозначениях

$$\alpha = \psi - \frac{\theta}{2}, \quad \beta = \theta - \alpha_0, \quad \kappa_{\mp} = \mp \left( \frac{2}{\tilde{c}} f \right)^{-1} \quad (4.4)$$

получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x\rho = -\tilde{c}\sin\beta - r^2\sin 2\alpha \\ c\rho = \tilde{c}\cos\beta - r^2\cos 2\alpha \\ c^2 + \rho^2 + x^2 + 2r^2 = 2c_0 \\ x\rho\cos(\alpha + \beta) + \rho^2\sin\beta\cos\alpha = 0 \\ x\rho = \pm 2r\sqrt{\rho}\sqrt{\frac{c-\rho+h}{2}}\cos\alpha \\ r\cos\alpha = \kappa_{\mp} \cdot \sqrt{\rho}\sin\beta. \end{cases} \quad (4.5)$$

Будем считать, что

$$r > 0, \quad \rho > 0, \quad x \neq 0. \quad (4.6)$$

Из 6-го уравнения (4.5) следует, что

$$r^2\sin 2\alpha = 2\operatorname{sgn}(\sin\alpha) \cdot \kappa_{\mp} \cdot \sqrt{\rho}\sin\beta\sqrt{r^2 - \kappa_{\mp}^2 \cdot \rho\sin^2\beta}, \quad r^2\cos 2\alpha = 2\kappa_{\mp}^2 \cdot \rho\sin^2\beta - r^2,$$

а (4.6) влечет  $\sin\beta \neq 0$ . С учетом этого, обозначая  $\kappa_{\mp}$  через  $\kappa$ , из 1-го и 4-го уравнений (4.5) следует:

$$(\tilde{c} + 2\operatorname{sgn}(\sin\alpha) \cdot \kappa\sqrt{\rho}\sqrt{r^2 - \kappa^2\rho\sin^2\beta})(\kappa\sqrt{\rho}\cos\beta - \operatorname{sgn}(\sin\alpha) \cdot \sqrt{r^2 - \kappa^2\rho\sin^2\beta}) = \kappa\rho^2\sqrt{\rho}. \quad (4.7)$$

Аналогично из 1-го и 5-го уравнений (4.5) следует:

$$(\tilde{c} + 2\operatorname{sgn}(\sin\alpha) \cdot \kappa\sqrt{\rho}\sqrt{r^2 - \kappa^2\rho\sin^2\beta}) = \mp 2\kappa\rho\sqrt{\frac{c - \rho + h}{2}}. \quad (4.8)$$

Из (4.7) и (4.8) получаем следующую пару уравнений:

$$\kappa\sqrt{\rho}\cos\beta = -\frac{\tilde{c}}{2\kappa\sqrt{\rho}} \mp \frac{\sqrt{\rho}(c+h)}{2\sqrt{\frac{c-\rho+h}{2}}},$$

$$\operatorname{sgn}(\sin\alpha) \cdot \sqrt{r^2 - \kappa^2\rho\sin^2\beta} = \mp\sqrt{\rho}\sqrt{\frac{c - \rho + h}{2}} - \frac{\tilde{c}}{2\kappa\sqrt{\rho}}.$$

Из 5-го и 6-го уравнений (4.5) следует:

$$x = \pm 2\kappa\sqrt{\frac{c - \rho + h}{2}}\sin\beta,$$

а из 2-го уравнения получаем, что

$$r^2 = c\rho - \tilde{c}\cos\beta + 2\kappa^2\rho\sin^2\beta, \quad \sqrt{r^2 - \kappa^2\rho\sin^2\beta} = \sqrt{c\rho - \tilde{c}\cos\beta + \kappa^2\rho\sin^2\beta}.$$

Таким образом, систему (4.5) можно преобразовать к следующему виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} r^2 = c\rho - \tilde{c}\cos\beta + 2\kappa^2\rho\sin^2\beta \\ x = \pm 2\kappa\sqrt{\frac{c-\rho+h}{2}}\sin\beta \\ \kappa\sqrt{\rho}\cos\beta = -\frac{\tilde{c}}{2\kappa\sqrt{\rho}} \mp \frac{\sqrt{\rho}(c+h)}{2\sqrt{\frac{c-\rho+h}{2}}} \\ sgn(\sin\alpha) \cdot \sqrt{c\rho - \tilde{c}\cos\beta + \kappa^2\rho\sin^2\beta} = \mp\sqrt{\rho}\sqrt{\frac{c-\rho+h}{2}} - \frac{\tilde{c}}{2\kappa\sqrt{\rho}} \\ c^2 + \rho^2 + x^2 + 2r^2 = 2c_0 \\ r\cos\alpha = \kappa\sqrt{\rho}\sin\beta, \end{array} \right. \quad (4.9)$$

где  $\kappa = \kappa_{\mp}$ . Складывая квадраты 3-го и 4-го уравнений системы (4.9) получим:

$$\tilde{c}\cos\beta = c\rho + \kappa^2\rho - \frac{(c-\rho+h)^2 + (c+h)^2}{2(c-\rho+h)}\rho \mp \frac{\tilde{c}}{\kappa} \cdot \frac{2(c+h)-\rho}{2\sqrt{\frac{c-\rho+h}{2}}} - \frac{\tilde{c}^2}{2\kappa^2\rho}.$$

Умножаем это уравнение на  $\kappa\sqrt{\rho}$  и вычитаем из него 3-е уравнение (4.9), умноженное на  $\tilde{c}$ . Результат делим на  $\sqrt{\rho}$  и преобразовываем к виду:

$$\pm\tilde{c}\sqrt{\frac{c-\rho+h}{2}} = \kappa\rho \frac{-\rho^2 + 2(h-\kappa^2)\rho + 2h(\kappa^2-h) + 2(\kappa^2-h)c}{2(c-\rho+h)}. \quad (4.10)$$

6-е уравнение системы (4.9) преобразуем к следующему виду:

$$c^2 + \rho^2 + 2\kappa^2\sin^2\beta(c-\rho+h) + 2cp - 2\tilde{c}\cos\beta + 4\kappa^2\rho\sin^2\beta = 2c_0.$$

Домножим это уравнение на  $\rho$  и вычтем из него квадрат 4-го уравнения системы (4.9), умноженный на  $2(c+\rho+h)$ . Результат умножим на  $\kappa\sqrt{\rho}$  и преобразуем к виду:

$$2\tilde{c}\kappa\sqrt{\rho}(c+h)\cos\beta = 2c_0\kappa\rho\sqrt{\rho} - h^2\kappa\rho\sqrt{\rho} \mp 2\tilde{c}\sqrt{\rho}\sqrt{\frac{c-\rho+h}{2}}(c+\rho+h) - \frac{\tilde{c}^2(c+\rho+h)}{2\kappa\sqrt{\rho}}.$$

Вычтем из этого уравнения 3-е уравнение системы (4.9), умноженное на  $2\tilde{c}(c+h)$ , получим следующее уравнение:

$$-2c_0\kappa\rho\sqrt{\rho} - \kappa\rho\sqrt{\rho}h^2 \mp \tilde{c}\sqrt{\rho}\frac{(c+h-\rho)(c+h+\rho) - (c+h)^2}{\sqrt{\frac{c-\rho+h}{2}}} - \frac{\tilde{c}^2(-c+\rho-h)}{2\kappa\sqrt{\rho}} = 0,$$

которое преобразуем к виду:

$$\pm\frac{\tilde{c}\rho^3}{\sqrt{\frac{c-\rho+h}{2}}} + \frac{\tilde{c}^2}{2\kappa}(c-\rho+h) + (2c_0 - h^2)\kappa\rho^2 = 0. \quad (4.11)$$

Уравнение (4.10) преобразуем к виду

$$\pm\tilde{c}\sqrt{\frac{c-\rho+h}{2}} = \kappa\rho \left( \kappa^2 - h - \frac{\rho^2}{2(c-\rho+h)} \right), \quad (4.12)$$

после чего заменим 4-е и 5-е уравнения системы (4.9) на уравнения (4.11) и (4.12). С учетом того, что мы проводили неравносильные преобразования при возведении в квадрат, необходимо добавить еще одно соотношение:

$$sgn(\sin\alpha) = sgn \left( \mp \sqrt{\rho} \sqrt{\frac{c - \rho + h}{2}} - \frac{\tilde{c}}{2\sqrt{\rho}} \right).$$

Так как  $\kappa = \kappa_{\mp}$ , то обозначая  $\pm\kappa_{\mp}$  через  $l$ , с учетом (4.4) получаем следующую систему уравнений, которая определяет критические значения интеграла  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$  и его критические точки, удовлетворяющие условию (4.6):

$$\begin{cases} \tilde{c}\sqrt{\frac{c-\rho+h}{2}} = l\rho(l^2 - h) - \frac{l\rho^3}{2(c-\rho+h)} \\ \frac{\tilde{c}\rho^3}{\sqrt{\frac{c-\rho+h}{2}}} = -\frac{\tilde{c}^2}{2l}(c - \rho + h) - (2c_0 - h^2)l\rho^2 \\ l\sqrt{\rho} \cos(\theta - \alpha_0) = -\left(\frac{\sqrt{\rho(c+h)}}{\sqrt{2(c-\rho+h)}} + \frac{\tilde{c}}{2l\sqrt{\rho}}\right) \\ r^2 = c\rho - \tilde{c} \cos(\theta - \alpha_0) + 2l^2\rho \sin^2(\theta - \alpha_0) \\ r \cos\left(\psi - \frac{\theta}{2}\right) = (\pm)l\sqrt{\rho} \sin(\theta - \alpha_0) \\ sgn \sin\left(\psi - \frac{\theta}{2}\right) = (\mp)sgn \left(\sqrt{\rho}\sqrt{\frac{c-\rho+h}{2}} + \frac{\tilde{c}}{2l\sqrt{\rho}}\right) \\ x = l\sqrt{2(c - \rho + h)} \sin(\theta - \alpha_0), \end{cases} \quad (4.13)$$

Учитывая свойство множества  $\Delta_h$ , переходим к замыканию множества решений системы (4.13), соответственно оговорку "удовлетворяющие условию (4.6)" опускаем.

Исследуем вопрос о разрешимости системы (4.13). Пусть в дальнейшем

$$h^2 = 2c_0 + k\tilde{c}, \quad M = \sqrt{\frac{c - \rho + h}{2}}.$$

Первые два уравнения (4.13) запишем в виде следующей системы:

$$\begin{cases} 4\tilde{c}M^3 - 4l(l^2 - h)\rho M^2 + l\rho^3 = 0 \\ \tilde{c}M^3 - kl^2\rho^2 M + l\rho^3 = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Вычтем из 1-го уравнения этой системы 2-ое уравнение и преобразуем к виду:

$$2M = \frac{3}{kl \pm \sqrt{k^2l^2 - 3(l^2 - h)}}\rho. \quad (4.15)$$

2-ое уравнение умножим на 8 и запишем в виде:

$$\tilde{c}(2M)^3 - 4kl^2\rho^2(2M) + 8l\rho^3 = 0. \quad (4.16)$$

Подставим в уравнение (4.16) правую часть (4.15) и преобразуем к виду

$$27\tilde{c} + 8k^3l^4 - 36kl^2(l^2 - h) = \mp 8l(k^2l^2 - 3(l^2 - h))\sqrt{k^2l^2 - 3(l^2 - h)}.$$

Итак, первые два уравнения системы (4.13) равносильны следующей системе:

$$\begin{cases} 27\tilde{c} + 8k^3l^4 - 36kl^2(l^2 - h) = \mp 8l(k^2l^2 - 3(l^2 - h))\sqrt{k^2l^2 - 3(l^2 - h)} \\ \sqrt{\frac{c-\rho+h}{2}} = \frac{3}{2(kl \pm \sqrt{k^2l^2 - 3(l^2 - h)})}\rho. \end{cases} \quad (4.17)$$

Легко проверить, что система (4.13) разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы 1-е уравнение системы (4.17) относительно  $l$  и 3-е уравнение системы (4.13) относительно  $\theta$ . Последнее запишем в виде:

$$\cos(\theta - \alpha_0) = -\frac{M}{l} - \frac{\rho}{2lM} - \frac{\tilde{c}}{2l^2\rho}. \quad (4.18)$$

Если ввести обозначение:

$$K = \frac{3}{2(kl \pm \sqrt{k^2l^2 - 3(l^2 - h)})}, \quad (4.19)$$

то условие разрешимости уравнения (4.18) запишется в виде:

$$\begin{cases} 2lK^2\rho^2 + (l - 2l^2K)\rho + \tilde{c}K \leq 0 \\ 2lK^2\rho^2 + (l + 2l^2K)\rho + \tilde{c}K \geq 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

#### § 4.5. Окончание доказательства теоремы 2

Окончание доказательства теоремы 4 получаем из (4.19)(4.20)(4.17) и уравнений 3-7 системы (4.13). Из анализа поведения корней (4.1), которое получается из 1-го уравнения (4.17) заменой  $\chi = l^2$ , с последующим возведением в квадрат, с учетом соотношения

$$f = -\frac{\tilde{c}}{2l}, \quad (l = \pm\kappa_{\mp}),$$

следуют утверждения теоремы о критических значениях интеграла  $f$ . Бифуркационная диаграмма отображения момента  $M^4 \rightarrow \mathbf{R}^2(f, H)$  изображена на рис.2. Диаграмма построена по результатам анализа зависимости корней уравнения (4.1) от параметра  $h$ , согласно которых:

- 1) при  $h_1 < h < h_2$  уравнение (4.1) имеет один положительный корень  $\chi_1$ ;
- 2) при  $h_2 < h < h_0$  уравнение (4.1) имеет два различных положительных корня  $\chi_1 < \chi_2$ , причем  $\chi_2 \rightarrow +\infty$  при  $h \rightarrow h_2 + 0$ ;
- 3) при  $h_0 < h < h_3$  уравнение (4.1) имеет четыре различных положительных корня  $\chi_1 < \chi_2 < h < \chi_3 < \chi_4$ , причем  $\chi_4 \rightarrow +\infty$  при  $h \rightarrow h_3 - 0$ , а корни  $\chi_3$  и  $\chi_4$  при  $h \rightarrow h_0 + 0$  сливаются в один положительный корень (4.1), а затем исчезают;
- 4) при  $h > h_3$  уравнение (4.1) имеет три различных положительных корня  $\chi_1 < \chi_2 < \chi_3$ , причем  $\chi_1, \chi_2 < h < \chi_3$ .

Доказывается следующим образом. Делая в (4.1) замену  $\chi = |h|\lambda$  и, деля его на  $h^4 = (2c_0 + k\tilde{c})^2$ , получим следующее уравнение:

$$\left(4k(2k^2 - 9)\lambda^2 \pm 36k\lambda + \frac{27}{2\frac{c_0}{\tilde{c}} + k}\right)^2 = 64\lambda \left((k^2 - 3)\lambda \pm 3\right)^3, \quad (4.21)$$

где  $\pm$  - знак энергии  $h$ . Если при фиксированном  $k$  устремить к  $+\infty$  величину  $\frac{c_0}{\tilde{c}}$ , то в пределе получим уравнение

$$\left(4k(2k^2 - 9)\lambda^2 \pm 36k\lambda\right)^2 = 64\lambda \left((k^2 - 3)\lambda \pm 3\right)^3,$$

у которого сразу находятся корни:  $\lambda = 1$  кратности два,  $\lambda = 0$  и еще один корень  $\lambda > 1$ ; если  $h < 0$ , то имеются простые корни  $\lambda = -1$  и  $\lambda = 0$ . Если теперь при фиксированном  $k$  плавно уменьшать значение  $\frac{c_0}{\tilde{c}}$  от  $+\infty$  до  $1 + 0$ , то корни уравнения (4.21) легко усматриваются по точкам пересечения графиков его левой и правой части. При этом гладко деформируется только график левой части, в то время как правая часть не изменяется. Уравнение

$$k^4 + 8\frac{c_0}{\tilde{c}}k^3 + 18k^2 - 27 = 0 \quad (4.22)$$

из теоремы 3 появляется из условия касания графиков левой и правой части (4.21), какового касания ни при одном  $\frac{c_0}{\tilde{c}}$  нет, если  $k$  не есть положительный корень уравнения (4.22).

Рис.2-6 выполнены в Mathcad 5.0+ при следующих значениях физических параметров:

$$c_0 = 3, \tilde{c} = 2.$$

#### § 4.6. Теорема 3 о боттовости функции $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$

**Теорема 3.** 1. Интеграл  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$  является боттовским для всех регулярных значений  $h$ , кроме  $h_0 = \sqrt{2c_0 + \tilde{k} \cdot \tilde{c}}$ , где  $\tilde{k}$  — единственный положительный корень уравнения

$$k^4 + 8\frac{c_0}{\tilde{c}}k^3 + 18k^2 - 27 = 0.$$

При этом  $0 < \tilde{k} < 1$  и  $h_2 < h_0 < h_3$ .

2. Интеграл  $f : Q_{h_0}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  имеет два вырожденных критических значения, отличающихся знаками. Каждый из двух соответствующих уровней  $f$  состоит из двух связных компонент. Каждая компонента есть гомеоморфная  $T^2$  кусочно-гладкая поверхность, которая имеет негладкую особенность (ребро) вдоль вырожденной критической окружности, реализующей нетривиальный цикл тора.

3. Четверка вырожденных критических окружностей, вместе с соответствующими критическими значениями, формально определяется также, как четверка

окружностей  $f^{-1}(f_4^\pm) \cap C_f(h)$  (или совпадающая с ней четверка  $f^{-1}(f_3^\pm) \cap C_f(h)$ ) в теореме 2.

*Доказательство.* Для каждой критической окружности достаточно доказать невырожденность в одной точке.  $\Lambda$ -проекция (3.1) каждой критической окружности интеграла  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , кроме минимаксных, пересекает отрезок  $[AB]$  (рис.3-6). Пусть  $S^1$  - критическая окружность в  $Q^3(h)$ , точка  $p \in S^1$  такова, что  $\Lambda(p) \in [AB]$  и  $\rho, \psi, \theta$  - локальные координаты вблизи  $p$  ( $\psi(p) = \pm \frac{\alpha_0}{2}$ ,  $\theta(p) = -\pi + \alpha_0$ ). Координатная поверхность  $\theta \equiv -\pi + \alpha_0$  трансверсальна  $S^1$  в точке  $p$ . Ограничим интеграл  $f$  на эту поверхность и найдем гессиан  $|d^2 f(p)|$ . Легко проверить, что  $\frac{\partial f}{\partial \psi} = 0$  в каждой точке  $\rho$ -координатной линии, проходящей через  $p$ . Заметим, что эта линия проектируется в отрезок  $[AB]$ . Таким образом,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \psi \partial \rho}(p) = 0 \quad \text{и} \quad \det(d^2 f(p)) = \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2}(p) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}(p).$$

$$\text{Далее,} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2}(p) = \frac{r(r^2 + \rho^2)}{h_2 \rho} \left( \frac{r}{\sqrt{2(c - \rho + h)}} \pm \sqrt{\rho} \right).$$

Введем многочлен  $P_h(\rho)$ , отличающийся от  $\frac{\partial f}{\partial \rho}(p)$  ( $\rho = \rho(p)$ ) ненулевым множителем:

$$P_h(\rho) = (2\rho_{max} - 3\rho)^2(-\rho^3 - h_2\rho^2 + \tilde{c}\rho) + (\rho - \rho_{max})(-3\rho^2 - 2h_2\rho + \tilde{c})^2,$$

где  $\rho_{max} = \min \left( \frac{h-h_2}{2}, \sqrt{c_0 - \sqrt{c_0^2 - \tilde{c}^2}} \right)$ . Если  $h > h_2$ , то  $\{\rho(q) : q \in Q^3(h)\} = [0, \rho_{max}]$ .

Легко проверить, что  $\frac{\partial f}{\partial \rho}(p) = 0 \Leftrightarrow P_h(\rho(p)) = 0$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2}(p) = 0 \Leftrightarrow \frac{dP_h}{d\rho}(\rho(p)) = 0$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2}(p) \Rightarrow \frac{r}{\sqrt{2(c - \rho + h)}} - \sqrt{\rho} = 0$ ,  $\frac{r}{\sqrt{2(c - \rho + h)}} - \sqrt{\rho} = 0 \Rightarrow \tilde{c} - h_2\rho - \rho^2 = 4\rho(\rho_{max} - \rho)$ .

Последнее равенство несовместимо с  $P_h(\rho) = 0$ , следовательно  $\partial^2 f / \partial \psi^2(p) \neq 0$ .

Анализ зависимости от  $h$  корней  $P_h(\rho)$  показал, что

$$\exists \rho \in (0, \rho_{max}) \left( P_h(\rho) = \frac{dP_h(\rho)}{d\rho} = 0 \right) \Leftrightarrow h = h_0.$$

Отсюда следует, что только при  $h = h_0$  среди критических окружностей интеграла  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\Lambda$ -проекции которых пересекаются с отрезком  $[AB]$ , есть вырожденные. Непосредственно проверяется, что это четверка окружностей, отвечающих наибольшему положительному корню  $\chi_3 = \chi_4$  уравнения (4.1), с дословными формулировками теоремы 2.

При  $h \rightarrow h_0 + 0$  четверка окружностей  $f^{-1}(f_4^\pm) \cap C_f(h)$  попарно сливаются с четверкой  $f^{-1}(f_3^\pm) \cap C_f(h)$ , превращаясь в четверку вырожденных критических окружностей интеграла  $f : Q_{h_0}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ . При этом сливаются корни  $\chi_3$  и  $\chi_4$  уравнения (4.1), а также соответствующие  $\Lambda$ -проекции (рис.5). При  $h < h_0$  все эти объекты исчезают. Аналогично доказывается, что минимаксные окружности невырождены при всех регулярных  $h$ .

## Глава 5. Нулевой уровень интеграла Богоявленского

### § 5.1. Теорема 4 о топологической структуре нулевого уровня интеграла О.И.Богоявленского $f : M^4 \rightarrow \mathbf{R}$

Поскольку в данной задаче непосредственно вычислить сепаратрисные диаграммы [37-39] интеграла  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$  технически сложно, факт их ориентируемости не доказывался. Для вычисления графов  $\Gamma(Q_h^3, f)$  [37-39] оказалось достаточно теорем 2,3 и информации о том, сколько связных компонент имеет нулевой уровень интеграла  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$  при различных  $h$ . Последняя содержится в теореме 4. В данном случае все сепаратрисные диаграммы ориентируемы, т.к. при той структуре нулевого уровня  $f$ , которая определена теоремой 4, они очевидно не могут быть другими

**Теорема 4.** Пусть  $M_0^2(h)$  — нулевой уровень интеграла  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , тогда:

- 1) при  $h_1 < h < h_2$  подмногообразие  $M_0^2(h)$  диффеоморфно тору  $T^2$ ;
- 2) при  $h_2 < h < h_3$  подмногообразие  $M_0^2(h)$  состоит из двух связных компонент, каждая из которых диффеоморфна тору  $T^2$ ;
- 3) при  $h > h_3$  подмногообразие  $M_0^2(h)$  состоит из четырех связных компонент, каждая из которых диффеоморфна тору  $T^2$ .

*Доказательство.* Пусть  $(t, u) \in [-\pi; \pi] \times [-\pi; \pi]$  — угловые координаты стандартного тора  $S^1 \times S^1$ . Если  $h_1 < h < h_2$ , то формулы:

$$\begin{aligned} \theta &= \alpha_0 - \arccos \frac{h_3 - h - (h + h_2) \cdot \sin^2(t)}{h_3 - h + (h + h_2) \cdot \sin^2(t)} \cdot \cos(u) \cdot \operatorname{sgn}(t), \\ \rho &= \tilde{c} \cdot \frac{1 + \cos(\theta - \alpha_0)}{h_3 - h} \cdot \sin^2(t), \quad r = \sqrt{\tilde{c} \cos(\theta - \alpha_0) + h\rho - \rho^2}, \\ \psi &= \begin{cases} t \in [-\pi; -\pi/2] \cup [\pi/2; \pi] \Rightarrow \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\Omega}{2} \cdot \operatorname{sgn}(u) - \pi \\ t \in [-\pi/2; \pi/2] \Rightarrow \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\Omega}{2} \cdot \operatorname{sgn}(u), \end{cases} \quad \text{где} \\ \Omega &= \arccos \frac{(\tilde{c} \cos(\theta - \alpha_0) + h\rho)^2 - 2c_0\rho^2 + \tilde{c}^2}{2\tilde{c}r^2}, \\ c &= \frac{\tilde{c} \cos(\theta - \alpha_0) - r^2 \cos(2\psi - \theta)}{\rho}, \quad x = \frac{-\tilde{c} \sin(\theta - \alpha_0) - r^2 \sin(2\psi - \theta)}{\rho}, \\ M_1 &= \sqrt{\rho} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{sgn}(t), \quad M_2 = -\sqrt{\rho} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{sgn}(t), \\ M_3 &= \sqrt{\frac{c - \rho + h}{2}} \cdot \operatorname{sgn}(t) \cdot \operatorname{sgn} \sin \left( \psi - \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \tag{6.1}$$

определяют отображение точки  $(t, u) \in S^1 \times S^1$  в точку  $(M_1, M_2, M_3, \rho, \theta, r, \psi, c, x)$  пространства  $\mathbf{R}^9$  (в которое вложено  $M^4$  (2.3)). Угловые координаты  $\psi, \theta$  вычисляются

по модулю  $2\pi$ . Из (2.4) и (3.2) следует, что данное отображение есть диффеоморфизм стандартного тора на  $M_0^2(h)$ , которое таким образом имеет одну связную компоненту.

Множество точек плоскости  $\mathbf{R}^2(\xi_1 - \eta_2, \xi_2 + \eta_1)$  (на которой заданы полярные координаты  $\rho, \theta$  (2.2)), в которые очевидным образом проектируются точки  $M_0^2(h)$ , определяется следующим неравенством:

$$\tilde{c} \cdot \frac{1 - \cos(\theta - \alpha_0)}{h + h_2} \leq \rho \leq \tilde{c} \cdot \frac{1 + \cos(\theta - \alpha_0)}{h_3 - h}.$$

Соответствующее множество ограничено замкнутой кривой, проходящей внутри круга угловой разметки (MathCad 5.0+):

На рис. 14 проекция  $M_0^2(h)$  при  $h = 0,995h_1 + 0,005h_2$ .

На рис. 15 проекция  $M_0^2(h)$  при  $h = 0,7h_1 + 0,3h_2$ .

На рис. 16 проекция  $M_0^2(h)$  при  $h = 0,0001h_1 + 0,9999h_2$ .

В случае  $h_2 < h < h_3$  достаточно изменить одну формулу, а именно:

$$\theta = \alpha_0 - \frac{\omega_1(t) - \omega_2(t)}{2} \cdot \cos(u) \cdot \operatorname{sgn}(t) - \frac{\omega_1(t) + \omega_2(t)}{2} \cdot \operatorname{sgn}(t), \quad \text{где}$$

$$\omega_1(t) = \arccos \frac{h_3 - h - (h + h_2) \cdot \sin^2(t)}{h_3 - h + (h + h_2) \cdot \sin^2(t)}, \quad \omega_2(t) = \arccos \frac{h_3 - h - (h - h_2) \cdot \sin^2(t)}{h_3 - h + (h - h_2) \cdot \sin^2(t)},$$

чтобы получить диффеоморфизм стандартного тора на одну из связных компонент  $M_0^2(h)$ . Обращая знаки каждой из координат  $M_1, M_2, M_3$  образа

$(M_1, M_2, M_3, \rho, \theta, r, \psi, c, x) \in \mathbf{R}^9$  точки  $(c, t)$ , получим точку - образ  $(c, t)$  при диффеоморфизме на вторую связную компоненту  $M_0^2(h)$ .

Подмножество плоскости  $\mathbf{R}^2(\xi_1 - \eta_2, \xi_2 + \eta_1)$ , на которое проектируется  $M_0^2(h)$ , определяется следующим неравенством:

$$\tilde{c} \cdot \frac{1 - \cos(\theta - \alpha_0)}{h + h_2} \leq \rho \leq \min \left\{ \tilde{c} \cdot \frac{1 + \cos(\theta - \alpha_0)}{h_3 - h}, \quad \tilde{c} \cdot \frac{1 - \cos(\theta - \alpha_0)}{h - h_2} \right\}.$$

Данное множество ограничено парой симметричных замкнутых кривых, проходящих внутри круга угловой разметки:

На рис.17 проекция  $M_0^2(h)$  при  $h = 0,9999h_2 + 0,0001h_3$ .

На рис.18 проекция  $M_0^2(h)$  при  $h = 0,95h_2 + 0,05h_3$ .

На рис.19. проекция  $M_0^2(h)$  при  $h = 0,51h_2 + 0,49h_3$ .

Наконец, рассмотрим бифуркации связных компонент  $M_0^2(h)$  при  $h \rightarrow h_3 - 0$ . Мы вычисляем их тип - III [37], откуда следует п.3). Пусть  $h_2 < h < h_3$ . Следующие формулы:

$$\theta = \alpha_0 + \arccos \frac{(h_3 - h) \cdot \beta(t) - 1}{(h_3 - h) \cdot \beta(t) + 1} \cdot \cos(u), \quad \text{где} \quad \beta(t) = \frac{h - h_2 \cdot \cos(t)}{h^2 - h_2^2},$$

$$\rho = \tilde{c} (1 - \cos(\theta - \alpha_0)) \cdot \beta(t), \quad r = \sqrt{\tilde{c} \cos(\theta - \alpha_0) + h\rho - \rho^2},$$

$$\psi(t) = \begin{cases} t \leq 0, u \leq 0 \Rightarrow \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\Omega}{2} \\ t \leq 0, u \geq 0 \Rightarrow \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\Omega}{2} + \pi \\ t \geq 0, u \leq 0 \Rightarrow \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\Omega}{2} - \pi \\ t \geq 0, u \geq 0 \Rightarrow \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\Omega}{2}, \end{cases} \quad \text{где}$$

$$\Omega = \arccos \frac{(\tilde{c} \cos(\theta - \alpha_0) + h\rho)^2 - 2c_0\rho^2 + \tilde{c}^2}{2\tilde{c}r^2},$$

$$c = \frac{\tilde{c} \cos(\theta - \alpha_0) - r^2 \cos(2\psi - \theta)}{\rho}, \quad x = \frac{-\tilde{c} \sin(\theta - \alpha_0) - r^2 \sin(2\psi - \theta)}{\rho},$$

$$M_1 = \begin{cases} |u| \geq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\sqrt{\rho} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \\ |u| \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{\rho} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{sgn}(\theta + \pi - \alpha_0) \end{cases},$$

$$M_2 = \begin{cases} |u| \geq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{\rho} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \\ |u| \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\sqrt{\rho} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \operatorname{sgn}(\theta + \pi - \alpha_0) \end{cases},$$

$$M_3 = \begin{cases} |u| \geq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\sqrt{\frac{c-\rho+h}{2}} \cdot \operatorname{sgn} \sin \left(\psi - \frac{\theta}{2}\right) \\ |u| \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{c-\rho+h}{2}} \cdot \operatorname{sgn} \sin \left(\psi - \frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sgn}(\theta + \pi - \alpha_0) \end{cases} \quad (6.2)$$

определяют при  $h_2 < h < h_3$  диффеоморфизм стандартного тора на одну из связных компонент  $M_0^2(h)$ , негомотопный ранее построенному. Диффеоморфизм на вторую компоненту получается обращением знаков координат  $M_1, M_2, M_3$ . Обозначим  $T^2(h)$  произвольную из двух компонент  $M_0^2(h)$ . Равенства  $u = \pm\pi$  и  $u = 0$  определяют на торе  $T^2(h)$  пару изотопных нетривиальных циклов, которые в пределе при  $h \rightarrow h_3 - 0$  склеиваются в одну из двух седловых критических окружностей гамильтониана  $H$  (теорема 1). Теперь ясно, что тор  $T^2(h)$  перестраивается по типу III, когда  $h$  проходит через критическое значение  $h_3$  снизу.

На рис.20 проекция  $M_0^2(h)$  при  $h = 0,15h_2 + 0,85h_3$ .

На рис. 21. проекция  $M_0^2(h)$  при  $h = 0,005h_2 + 0,995h_3$ .

На рис. 22. проекция  $M_0^2(h)$  при  $h = h_3$ .

Подмножество плоскости  $\mathbf{R}^2(\xi_1 - \eta_2, \xi_2 + \eta_1)$ , в которое проектируется  $M_0^2(h)$ , при  $h \geq h_3$  определяется следующим неравенством:

$$\tilde{c} \cdot \frac{1 - \cos(\theta - \alpha_0)}{h + h_2} \leq \rho \leq \tilde{c} \cdot \frac{1 - \cos(\theta - \alpha_0)}{h - h_2}.$$

На рис. 23 изображена проекция  $M_0^2(h)$  на  $\mathbf{R}^2(\xi_1 - \eta_2, \xi_2 + \eta_1)$  при  $h = 20h_3$ .

Теорема доказана.

Рис.14-23 выполнены в Mathcad 5.0+ при  $c_0 = 3$ ,  $\tilde{c} = 2$ . Теорему 4 также иллюстрируют рис.7-9. Для вычисления проекций-диффеоморфизмов связных компонент  $M_0^2(h)$  в  $\mathbf{R}^3$  использовались формулы из теоремы 4. Метод проектирования описан в следующем разделе. На рис.7 изображен тор  $M_0^2(h)$  при  $h \rightarrow h_1 + 0$ , который стягивается на минимальную окружность гамильтониана  $H$ . На рис. 8 и 9 связная компонента  $M_0^2(h)$  перестраивается при  $h \rightarrow h_2 - 0$  и  $h \rightarrow h_3 - 0$ , соответственно.

## Глава 6. Компьютерная визуализация торов Лиувилля и бифуркаций

Для создания рис.7-9 разработан следующий метод визуализации бифуркаций торов Лиувилля. Пусть, например, тор  $T^2(c + \varepsilon)$  отвечает значению  $c + \varepsilon$  боттовского интеграла  $f_2|_{Q^3}$  при  $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ , где  $\varepsilon_0 \rightarrow +0$ . Здесь  $Q^3$  - подмногообразие уровня интеграла  $f_1$ , коммутирующего с  $f_2$ , и  $c$  - критическое значение функции  $f_2|_{Q^3}$ . Можно считать, что соответствующий полиэдр  $P_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} T^2(c + \varepsilon)$  пересекается с множеством критических точек функции  $f_2|_{Q^3}$  по единственной окружности  $S^1(c)$ . Если это не так, то малым возмущением интеграла  $f_2$  устраним на  $P_c$  все лишние критические окружности, кроме  $S^1(c)$  [37]. В частности, полиэдр  $P_c$  может совпадать с  $S^1(c)$ , которая в этом (и только в этом) случае является минимаксной. Предположим, что:

1. Для каждого  $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$  конструктивно определен гомеоморфизм  $\Phi_\varepsilon$  стандартного тора  $S^1 \times S^1$  (с угловыми координатами  $t, u$ ) на тор  $T^2(c + \varepsilon)$ .
- 1.1. Гомеоморфизм  $\Phi_\varepsilon$  непрерывно зависит от  $\varepsilon$ .
- 1.2. Для всех  $(t, u)$  существует  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Phi_\varepsilon(t, u)$ , причем сходимость равномерна по  $(t, u)$ .
2. Конструктивно определен гомеоморфизм  $\phi$  стандартной окружности  $S^1$  (с угловой координатой  $t$ ) на критическую окружность  $S^1(c)$ .
- 3.1. Если  $S^1(c)$  - седловая окружность, то  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Phi_\varepsilon(t, \pm \frac{\pi}{2}) = \phi(t)$ .
- 3.2. Если  $S^1(c)$  - минимаксная окружность, то  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Phi_\varepsilon(t, u) = \phi(t)$ .

Гомеоморфизмы  $\Phi_\varepsilon(t, u)$  фактически построены при доказательстве теоремы 4. Если  $h_1 < h < h_2$ , то гомеоморфизм  $\phi(t)$ , согласованный с (6.1) и отображающий  $S^1$  на  $H^{-1}(h_2) \cap C$  (теорема 1), в координатах  $M_1, M_2, M_3, \rho, \theta, r, \psi, c, x$  пространства  $\mathbf{R}^9 \supset M^4$  определяют следующие формулы:

$$c(t) = \frac{1}{2} \left( h_1 + \rho_1 + (h_1 - \rho_1) \cos 2t \right), \quad \text{где} \quad \rho_1 = \sqrt{c_0 - \sqrt{c_0^2 - \tilde{c}^2}},$$

$$\rho(t) = c(t) + h_2, \quad \theta(t) = \alpha_0, \quad x(t) = 0, \quad r(t) = \sqrt{\tilde{c} + h_2 \rho(t) - \rho^2(t)},$$

$$\psi(t) = \begin{cases} t \in [-\pi; -\pi/2] \cup [\pi/2; \pi] \Rightarrow \frac{\alpha_0}{2} - \pi \\ t \in [-\pi/2; \pi/2] \Rightarrow \frac{\alpha_0}{2}, \end{cases}$$

$$M_1(t) = \sqrt{\rho(t)} \cdot \sin \frac{\alpha_0}{2} \cdot \operatorname{sgn}(t), \quad M_2(t) = -\sqrt{\rho(t)} \cdot \cos \frac{\alpha_0}{2} \cdot \operatorname{sgn}(t), \quad M_3(t) = 0.$$

Соответственно, при  $h \rightarrow h_2 - 0$  на экране компьютера отображается бифуркация типа III [37] тора  $\{H = h, f = 0\}$  (рис.8). Если в этих формулах всюду заменить  $h_1, \rho_1, h_2$  на  $h_2, \rho_2, h_1$  (где  $\rho_2 = \sqrt{c_0 + \sqrt{c_0^2 - \tilde{c}^2}}$ ), то получится согласованный с (6.1) гомеоморфизм  $\phi(t)$  на минимальную окружность  $H$  (т.е. на уровень  $H = h_1$ ). При  $h \rightarrow h_1 + 0$  на экране отображается бифуркация типа I (рис.7). Наконец, согласованный с (6.2) гомеоморфизм  $\phi(t)$  на одну из двух седловых критических окружностей  $H$ , соответствующих

значению  $h_3$ , определяют следующие формулы:

$$c(t) = (\rho_2 - \rho_1) \sin^2(t/2) - \rho_2, \quad \rho(t) = c(t) + h_3, \quad \theta(t) = -\pi + \alpha_0,$$

$$x(t) = 0, \quad r(t) = \sqrt{-\tilde{c} + h_3 \rho(t) - \rho^2(t)}, \quad \psi(t) = \frac{\alpha_0}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn}(t),$$

$$M_1(t) = -\sqrt{\rho(t)} \cdot \sin \frac{\alpha_0}{2}, \quad M_2(t) = \sqrt{\rho(t)} \cdot \cos \frac{\alpha_0}{2}, \quad M_3(t) = 0.$$

Гомеоморфизм на вторую окружность  $h_3$  получается обращением знаков  $M_1, M_2$ . При  $h \rightarrow h_3 - 0$  на экране отображается бифуркация типа III (рис.9).

Как только получены формулы(или вычислительные процедуры)  $\Phi_\epsilon(t, u)$  и  $\phi(t)$ , можно строить гомеоморфизм полиэдра  $P^3 = \{p \in Q^3 : c \leq f_2(p) \leq c + \epsilon_0\}$  на 3-х мерный полиэдр в  $\mathbf{R}^3$ , который в случае 3.2 совпадает с полнотерием стандартного тора  $S^1 \times S^1$  (бифуркация типа I), а в случае 3.1 получается так: внутри каждого из плоских дисков, ограниченных меридианами стандартного тора, выверлим пару дисков, границы которых пересекаются в центре меридионального диска, т.е. в точке окружности  $S^1$ ; сверлим так, чтобы после обхода вокруг  $S^1$  каждая из дырок вернулась в исходное положение(при бифуркации типа III), или чтобы дырки поменялись местами (при бифуркации типа IV). Заметим, что дырка может совершить несколько полных оборотов вокруг оси тора. На экране компьютера мы увидим - сколько получится таких витков ?

Итак, измерим в  $\mathbf{R}^n$  евклидову длину  $s(t, u)$  дуги  $\{\Phi_\epsilon(t, u') : -\pi \leq u' \leq u\}$ . Также измерим длину  $s(t)$  окружности  $\{\Phi_\epsilon(t, u') : -\pi \leq u' \leq \pi\}$ . Пусть  $R(t, u)$  - евклидово расстояние от точки  $\Phi_\epsilon(t, u)$  до точки  $\phi(t)$ . Тогда точке  $\Phi_\epsilon(t, u)$  соотнесем точку из  $\mathbf{R}^3$ :  
 а) которая лежит в плоскости  $\mathbf{R}^2(t)$ , ортогональной  $S^1$  в точке  $t \in S^1$ ;  
 б) а также удалена от точки  $t \in S^1$  на расстояние  $R(t, u)$ ;  
 в) и повернута в некотором фиксированном направлении на угол  $s(t, u)/s(u)$  относительно прямой, по которой  $\mathbf{R}^2(t)$  пересекается с плоскостью окружности  $S^1$ . Очевидно, что для фиксированного  $\epsilon$  образы точек  $\Phi_\epsilon(t, u)$  при  $-\pi \leq t, u \leq \pi$  заполняют в  $\mathbf{R}^3$  гладко продеформированный стандартный тор, который при  $\epsilon \rightarrow +0$  перестраивается вдоль  $S^1$ : по типу I в случае 3.2, по типам III или IV в случае 3.1. Переходя к пределу при  $\epsilon \rightarrow +0$ , получаем искомый гомеоморфизм полиэдра  $P^3$ .

В настоящей задаче удалось задать гомеоморфизмы  $\Phi_\epsilon$  и  $\phi$  явными аналитическими формулами, но только для нулевого уровня интеграла Богоявленского, т.е.  $Q^3 = f^{-1}(0)$  и  $f_2 = H$ . В общем случае их можно вычислять приближенно. Построенная таким образом в  $\mathbf{R}^3$  модель бифуркации оживает на экране компьютера. Мы увидим бифуркацию типа I, или половину бифуркации типа III(IV) - вплоть до момента склеивания тора вдоль пары(одного) нетривиальных циклов. Эксперименты по компьютерной визуализации бифуркаций лиувиллевых торов, возможно впервые, проводились в 1988г. в США [13].

## Глава 7. Инвариант Фоменко-Цишанга, топология изоэнергетических поверхностей и фазового многообразия

### § 7.1. Теорема 5 о меченых молекулах $W^*(Q_h^3)$ в случае О.И.Богоявленского

При вычислении инварианта Фоменко-Цишанга мы следуем работе [7], Технически оказалось проще изобразить метки на ребрах графов, чем на молекулах — в этом несущественное терминологическое отличие от [7]. Новейшие достижения теории топологической и траекторной классификации интегрируемых систем, которая далеко продвинулась в трудах А.Т. Фоменко, А.В. Болсинова, их коллег и учеников, в том числе методы вычисления инвариантов систематизированы в [11].

**Теорема 5.** Различные значения инвариантов Фоменко-Цишанга  $W^*(Q_h^3)$ , для всех регулярных изоэнергетических поверхностей  $Q_h^3$  с боттовскими интегралами, представлены на рис.10-13 ориентированными графиками  $\Gamma(Q_h^3, f)$  с метками  $r, \varepsilon$ . Все  $n$ -метки равны нулю, либо отсутствуют. Соответствующие молекулы собраны в таб.1. Топология каждой неособой изоэнергетической поверхности  $Q_h^3$  указана в таб.1.

**Следствие** Фазовое многообразие  $M^4$  гомеоморфно  $S^2 \times S^1 \times \mathbf{R}$ .

**Доказательство.** Изоэнергетическая поверхность  $Q_h^3$  определяется системой (2.3) и уравнением  $M_3 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(c - \rho + h)}$ . При  $h \leq h_3$  множество точек поверхности  $Q_h^3$  таких, что  $M_3 = c - \rho + h = 0$ , проектируется на плоскость  $\mathbf{R}^2(c, \rho)$  в отрезок  $[KL]$  (рис.1). При  $h > h_3$  таких точек вообще нет, т.к.  $Q_h^3$  распадается на две связные компоненты

$$Q_{\pm}^3(h) = \left\{ p \in M^4 : M_3(p) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(c(p) - \rho(p) + h)} \right\}.$$

Из (2.3) следует, что  $M^4 = N^3 \times \mathbf{R}(M_3)$ . Подмногообразие  $N^3$  определяется в  $\mathbf{R}^8(M_1, M_2, \xi, \eta)$  системой (2.3). При  $h > h_3$  каждая связная компонента  $Q_h^3$  есть график над  $N^3$ , следовательно гомеоморфна  $N^3$ . Таким образом,  $M^4 = Q_+^3(h) \times \mathbf{R}(M_3)$ , а так как  $Q_+^3(h) = Q_-^3(h) = S^2 \times S^1$ , то  $M^4 = S^2 \times S^1 \times \mathbf{R}$ .

### § 7.2. Доказательство теоремы 5: вспомогательные леммы 1-4

Конструкция графов  $\Gamma(Q_h^3, f)$  прямо следует из теорем 2-4. Каждая регулярная изоэнергетическая поверхность  $Q_h^3$  склеена из штанов  $N^2 \times S^1$  ( $N^2$  — диск с двумя дырками) и полноторий  $S^1 \times D^2$  — по обращающим ориентацию диффеоморфизмам граничных торов, в соответствии со своим графиком  $\Gamma(Q_h^3, f)$ , задающим разбиение на элементарные

кирпичи [37]. Выберем на граничных торах допустимые системы координат  $(\mu_i, \lambda_i)$  и вычислим метки  $r_i, \varepsilon_i, n_k$  [7].

Предполагается, что:

- a) исходное многообразие  $M^4$  ориентировано;
  - б) каждая неособая поверхность  $Q_h^3$  ориентирована полем нормалей  $\text{grad}(H)$ ;
  - в) все кирпичи, из которых склеена каждая неособая  $Q_h^3$ , ориентированы вместе с  $Q_h^3$ .
- Пусть  $P_b^3 = f^{-1}(b)$  — поверхность уровня интеграла  $f$ , (все  $P_b^3$  являются гладкими многообразиями, т.к.  $df(p) \neq 0$  для всех  $p \in M^4$ ),  $F : M^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$  — отображение момента, переводящее  $p$  в  $(H(p), f(p))$ . Критические значения интеграла  $f : Q_l^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , в соответствии с теоремой 2, обозначаем  $f_i^\pm$  или  $f_i^\pm(l)$ , множество критических точек  $-C_f(l)$ . Пусть

$$C_f = \{p \in M^4 : \text{grad}(H)_p = \lambda \cdot \text{grad}(f)_p, \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Ясно, что  $C_f \cap Q_h^3 = C_f(h)$  для каждого регулярного  $h$ . Критические окружности гамильтониана  $H$ , соответствующие критическим значениям  $h_1, h_2, h_3$ , а также замкнутые траектории поля  $v$ , образующие эти окружности, обозначаем  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . Предполагается, что каждая критическая окружность ориентирована соответствующей траекторией.

**Лемма 1.** Существуют такие два семейства дисков  $D_-^2(l)$  и  $D_+^2(l)$ , гладко зависящих от  $l$  из  $[h_1 + \delta_1, \infty)$ , что:

- а) диск  $D_\pm^2(l)$  вложен в  $Q_l^3$  и трансверсален минимаксной окружности  $f^{-1}(f_1^\pm(l))$  интеграла  $f : Q_l^3 \rightarrow \mathbf{R}$ ;
- б)  $\partial D_\pm^2(l) \subset F^{-1}(l, b)$ ,  $b = f_1^\pm(l) \mp \varepsilon$ ;
- в)  $f_1^-(h_1 + \delta_1) + \varepsilon = f_1^+(h_1 + \delta_1) - \varepsilon = 0$  и  $\partial D_-^2(h_1 + \delta_1) = \partial D_+^2(h_1 + \delta_1)$ .

**Лемма 2.** Существуют такие два семейства ориентированных окружностей  $\lambda_{2+}(l')$  и  $\lambda_{2-}(l')$ , гладко зависящих от  $l'$  из  $[h_2, \infty)$ , что:

- а)  $\lambda_{2\pm}(l')$  — один из двух изотопных циклов, которые сепаратрисная диаграмма седловой критической окружности  $C_f \cap f^{-1}(f_2^\pm(l'))$  интеграла  $f : Q_{l'}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  высекает на торе  $F^{-1}(l', b)$ ,  $b = f_2^\pm(l') \pm \varepsilon(l')$ ;
- б) гладкая функция  $\varepsilon(l')$  монотонно не убывает,  $\varepsilon(h_2) = 0$  и  $\forall l' \geq h_2 + \delta_2 (\varepsilon(l') \equiv \varepsilon)$ ;
- в) окружность  $\lambda_{2+}(h_2) = \lambda_{2-}(h_2)$  образована траекторией  $\gamma_2$ ;
- г) ориентация каждой из окружностей  $\lambda_{2\pm}(l')$  индуцирована замкнутой траекторией поля  $v$ , порождающей соответствующую седловую окружность.

Т.к. все минимаксные окружности  $f^{-1}(f_1^\pm(l))$  изотопны между собой вдоль бифуркационной диаграммы (рис.2), и аналогично изотопны все седловые окружности  $C_f \cap f^{-1}(f_2^\pm(l'))$ , то для достаточно малых  $\varepsilon$ ,  $\delta_1$  и  $\delta_2$  указанные семейства, очевидно (рис.2), существуют. Отметим, что два изотопных цикла, которые сепаратрисная

диаграмма высекает на торе  $F^{-1}(l', b)$ ,  $b = f_2^\pm(l') \pm \varepsilon(l')$ , при  $l' \rightarrow h_2$  сливаются в траекторию  $\gamma_2$ .

**Лемма 3.** Для каждой из двух связных компонент подмногообразия

$N^4 = \{p \in M^4 : f_2^-(l') < f(p) < f_2^+(l'), l' > h_2\}$  существуют такие четыре семейства ориентированных окружностей  $\lambda_{3+}(l')$ ,  $\lambda_{3-}(l')$ ,  $\mu_{3+}(l')$ ,  $\mu_{3-}(l')$ , гладко зависящих от  $l'$  из  $[h_2 + \delta_3, \infty)$ , что:

- a)  $\lambda_{3\pm}(l')$  — нетривиальный цикл, который сепаратрисная диаграмма седловой критической окружности  $C_f \cap f^{-1}(f_2^\pm(l'))$  интеграла  $f : Q_{l'}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  высекает на торе  $F^{-1}(l', b)$ ,  $b = f_2^\pm(l') \mp \varepsilon$ ;
- б)  $\mu_{3\pm}(l')$  — цикл, дополнительный к  $\lambda_{3\pm}(l')$  на торе  $F^{-1}(l', b)$ ;
- в)  $f_2^-(h_2 + \delta_3) + \varepsilon = f_2^+(h_2 + \delta_3) - \varepsilon = 0$  и, без учета ориентаций окружностей,  $\lambda_{3+}(h_2 + \delta_3) = \lambda_{3-}(h_2 + \delta_3)$ ,  $\mu_{3+}(h_2 + \delta_3) = \mu_{3-}(h_2 + \delta_3)$ ;
- г) ориентация каждой из окружностей  $\lambda_{3\pm}(l')$  индуцирована замкнутой траекторией поля  $v$ , порождающей соответствующую седловую окружность;
- д) каждая окружность  $\mu_{3\pm}(l')$  ориентирована так, что базис  $(\mu_{3\pm}(l'), \lambda_{3\pm}(l'))$  определяет ориентацию края подмногообразия  $\{p \in Q_{l'}^3 : f(p) \geq f_2^+(l') - \varepsilon\}$  или, соответственно,  $\{p \in Q_{l'}^3 : f(p) \leq f_2^-(l') + \varepsilon\}$ .

Замечание. Если  $f_2^\pm(l') = f_1^\pm(l)$ , то окружность  $\mu_{3\pm}(l')$  представляет собой один из двух овалов, на которые разрывается  $\partial D_\pm^2(l)$ , когда при гомотопии  $\tau$  проходит через уровень  $H = h_2$ .

**Лемма 4.** Пусть  $\forall l' \in [h_2, \infty) \mu_{1\pm}(l)$  — образ цикла  $\lambda_{2\pm}(l')$  при изотопии вдоль интегральных линий поля  $-grad(H|_{P_b^3})$  при  $b = f_1^\pm(l) \mp \varepsilon = f_2^\pm(l') \pm \varepsilon(l')$ . Перенесем на  $\mu_{1\pm}(l)$  ориентацию цикла  $\lambda_{2\pm}(l')$ . Получаем такое гладкое семейство ориентированных окружностей  $\mu_{1\pm}(l)$ ,  $l \in [h_1 + \delta_1, \infty)$ , что  $\mu_{1\pm}(l)$  в пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  совпадает с минимаксной окружностью  $f_1^\pm(l)$ , ориентированной соответствующей замкнутой траекторией  $v$ .

*Доказательство.*

Очевидно (рис.2), что соответствующее  $l'$  существует и единственно для каждого  $l$ . Пусть  $h = \pm\sqrt{2c_0 + k \cdot \tilde{c}}$ . Так как  $h \in (h_1, h_2)$ , то  $k \in [-2\frac{c_0}{\tilde{c}}, -2]$ .

При  $\rho \in \left[0, \frac{h+h_3}{1-k/2}\right]$  точка  $p$  с координатами (2.2), удовлетворяющими уравнениям

$$\theta = \alpha_0, \quad c = -\frac{k}{2}\rho - h, \quad \cos(2\psi - \alpha_0) = \frac{\tilde{c} + h\rho + \frac{k}{2}\rho^2}{\tilde{c} + h\rho - \rho^2}, \quad r^2 = \tilde{c} + h\rho - \rho^2,$$

$$x = -\frac{r^2 \sin(2\psi - \alpha_0)}{\rho}, \quad M_1 = \mp\sqrt{\rho} \cdot \sin \frac{\alpha_0}{2}, \quad M_2 = \pm\sqrt{\rho} \cdot \cos \frac{\alpha_0}{2}, \quad 2M_3^2 = c - \rho + h,$$

пробегает окружность  $S_h^1$ , которая реализует нетривиальный цикл на торе  $F^{-1}(h, 0)$ . При  $h = h_1$  окружность  $S_{h_1}^1$  совпадает с  $\gamma_1$ . При  $h = h_2$  окружность  $S_{h_2}^1$  совпадает с  $\gamma_2$ .

Таким образом, построена изотопия  $\gamma_1$  на  $\gamma_2$ . Докажем, что ориентации окружностей при этом совпадают. Параметризуем  $S_{h_1}^1$  параметром  $t \in [-1, 1]$ :

при  $t \in [-1, -1/2]$   $c = 2(\rho_2 - h_2)t + 2\rho_2 - h_2$  и  $\psi = \frac{\alpha_0}{2}$

при  $t \in [-1/2, 0]$   $c = -2(\rho_2 - h_2)t + h_2$  и  $\psi = \frac{\alpha_0}{2} - \pi$

при  $t \in [0, 1/2]$   $c = 2(\rho_2 - h_2)t + h_2$  и  $\psi = \frac{\alpha_0}{2} - \pi$

при  $t \in [1/2, 1]$   $c = -2(\rho_2 - h_2)t + 2\rho_2 - h_2$  и  $\psi = \frac{\alpha_0}{2}$

Аналогично параметризуем окружность  $S_{h_2}^1$  — для этого заменим  $h_2$  и  $\rho_2$  на  $h_1$  и  $\rho_1$ . Непосредственно проверяется, что введенная параметризация задает на обеих окружностях ориентации соответствующих траекторий  $v$  (1.1). Итак, изотопия  $S_h^1$  сохраняет ориентацию. Следовательно, при изотопии вдоль интегральных линий поля  $grad(H|_{P_0^3})$ , с точностью до гомотопии в  $F^{-1}(h_2, 0)$ , произойдет слияние ориентированных окружностей  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Из связности прямой  $f(M^4)$  следует аналогичное свойство всех пар критических окружностей  $f^{-1}(f_1^\pm)$  и  $C_f \cap f^{-1}(f_2^\pm)$  при  $f_1^\pm = f_2^\pm$ . Лемма доказана.

**Замечание.** Все критические окружности интеграла  $H : P_b^3 \rightarrow \mathbf{R}$  невырождены, кроме  $S_\pm^1(h_0)$  (теорема 3), поэтому существуют сепаратрисные диаграммы всех седловых окружностей  $C_f \cap f^{-1}(f_2^\pm)$  [37]. В лемме 4 изотопия вдоль интегральных линий происходит по какой-либо одной из двух выходящих ветвей сепаратрисной диаграммы интеграла  $-H : P_b^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , отвечающей седловой критической окружности  $C_f \cap f^{-1}(b)$ . При этом семейство выбранных ветвей непрерывно зависит от  $b$ .

Каждую граничную окружность  $\partial D_\pm^2(l)$  ориентируем так, чтобы базис  $(\mu_{1\pm}(l), \partial D_\pm^2(l))$  определял ориентацию края подмногообразия  $\{p \in Q_l^3 : f(p) \geq f_1^+(l) - \varepsilon\}$  или, соответственно,  $\{p \in Q_l^3 : f(p) \leq f_1^-(l) + \varepsilon\}$ .

### § 7.3. Доказательство теоремы 5: метки при $h_1 < h < h_2$

$f(Q_h^3) = [f_1^-, f_1^+]$ ,  $Q_h^3$  склеена из двух кирпичей:  $Q_+^3 = \{p \in Q_h^3 : f(p) \geq f_1^+ - \varepsilon\}$  и  $Q_-^3 = \{p \in Q_h^3 : f(p) \leq f_1^- + \varepsilon\}$ . Каждый кирпич гомеоморфен  $S^1 \times D^2$ .

Пусть  $T_\pm^2 = \partial Q_\pm^3 = F^{-1}(h, b)$ ,  $b = f_1^\pm \mp \varepsilon$ .  $\forall l \in [h_1 + \delta_1, h]$  тор  $F^{-1}(l, b)$ ,  $b = f_1^\pm(l) \mp \varepsilon$  подвергнем изотопии  $\tau$  вдоль интегральных линий поля  $grad(H|_{P_b^3})$  на тор  $F^{-1}(h, b)$ , вложенный в  $Q_h^3$ . При  $b \in [f_1^- + \varepsilon, f_1^+ - \varepsilon]$ , очевидно, получим изотопию  $\varphi_b : T^2 \rightarrow Q_h^3$  тора  $T_+^2$  на торе  $T_\pm^2$ . Пусть  $\mu_\pm(b)$  — образ окружности  $\mu_{1\pm}(l)$ , а  $\lambda_\pm(b)$  — образ окружности  $\partial D_\pm^2(l)$  при изотопии  $\tau$ . Циклы  $\mu_\pm(b)$  и  $\lambda_\pm(b)$  образуют базис на торе  $F^{-1}(h, b)$ .

Пусть  $(\mu_\pm, \lambda_\pm) = (\mu_\pm(b), \lambda_\pm(b))$   $b = f_1^\pm \mp \varepsilon$ . Из лемм 1, 2 и 4 следует, что:

a)  $\lambda_+(0) = \lambda_-(0)$  и  $\mu_+(0) = \mu_-(0)$ ;

б)  $\mu_\pm = \mu_{1\pm}(h)$ ,  $\lambda_\pm = \partial D_\pm^2(h)$ ;

в)  $(\mu_\pm, \lambda_\pm)$  — допустимый базис тора  $T_\pm^2$ .

Изотопия  $\varphi_b$  переводит базис  $(\mu_-, \lambda_-)$  в базис  $(\mu_+, \lambda_+)$ . Ориентации всех окружностей  $\mu_\pm(b)$  согласованы, т.к. они гладко перенесены из гладкого семейства замкну-

тых траекторий поля  $v$ , образующих критические окружности  $f_2^\pm$ . На окружности  $\lambda_+(0) = \lambda_-(0)$  возникают две противоположные ориентации из семейств  $\{\lambda_+(b) : b \geq 0\}$  и  $\{\lambda_-(b) : b \leq 0\}$ , соответственно противоположным ориентациям общего края подмногообразий  $\{p \in Q_h^3 : f(p) \geq 0\}$  и  $\{p \in Q_h^3 : f(p) \leq 0\}$ . Изотопия  $\varphi_b$ , очевидно, индуцирует склейку изэнергетической поверхности  $Q_h^3$  из полноторий  $Q_\pm^3$ . Матрица склейки в базисах  $(\mu_-, \lambda_-)$  и  $(\mu_+, \lambda_+)$  имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,  $r = \frac{1}{0} = \infty$  и  $\varepsilon = \text{sign}(1) = 1$  [7]. Метка  $n$ , в данном случае, отсутствует.

#### § 7.4. Доказательство теоремы 5: метки при $h_2 < h < h_0$

$f(Q_h^3) = [f_1^-, f_1^+]$ ,  $Q_h^3$  склеена из четырех кирпичей:

$$Q_{1+}^3 = \{p \in Q_h^3 : f(p) \geq f_1^+ - \varepsilon\}, \quad Q_{1-}^3 = \{p \in Q_h^3 : f(p) \leq f_1^- + \varepsilon\},$$

$$Q_{2+}^3 = \{p \in Q_h^3 : f_1^+ - \varepsilon \leq f(p) \leq f_2^+ + \varepsilon\}, \quad Q_{2-}^3 = \{p \in Q_h^3 : f_2^- - \varepsilon \leq f(p) \leq f_2^- + \varepsilon\},$$

$Q_{1\pm}^3 = S^1 \times D^2$  — полноторие,  $Q_{2\pm}^3 = S^1 \times N^2$  — штаны.

Аналогично случаю  $h_1 < h < h_2$ , используя лемму 3, построим допустимые системы координат на каждом из двух торов, составляющих  $F^{-1}(h, b)$   $b = f_2^+ - \varepsilon$ , и на каждом из двух торов, составляющих  $F^{-1}(h, b)$   $b = f_2^- + \varepsilon$ . Каждая из матриц склейки имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответственно  $r = \frac{-1}{0} = \infty$  и  $\varepsilon = \text{sign}(-1) = -1$ .

Найдем матрицу склейки полнотория  $Q_{1+}^3$  со штанами  $Q_{2+}^3$ .

Пусть  $T_1^2 = F^{-1}(h, b) = \partial Q_{1+}^3$ ,  $b = f_1^+ - \varepsilon$ ,  $T_2^2 = F^{-1}(h, b) \subset \partial Q_{2+}^3$ ,  $b = f_2^+ + \varepsilon$ . Число  $\delta_2$  из леммы 2 выберем так, что  $h_2 + \delta_2 < h$ .  $\forall l' \in [h_2; \infty)$  существует такое единственное  $l(l') \in [h_1 + \delta_1, l']$ , что  $f_1^+(l(l')) - \varepsilon = f_2^+(l') + \varepsilon(l')$  (рис.2). Для некоторого и единственного  $l'_h > h$  имеет место  $l(l'_h) = h$ .  $\forall l' \in [h, l'_h]$  тор  $F^{-1}(l(l'), b)$ ,  $b = f_1^+(l(l')) - \varepsilon$  подвергнем изотопии  $\tau$  вдоль интегральных линий поля  $\text{grad}(H|_{P_b^3})$  на торе  $F^{-1}(h, b)$ , вложенный в  $Q_h^3$ . При  $b \in [f_2^+ + \varepsilon, f_1^+ - \varepsilon]$  получим изотопию  $\phi_b : T^2 \rightarrow Q_h^3$  тора  $T_2^2$  на торе  $T_1^2$ , которая индуцирует склейивание штанов  $Q_{2+}^3$  с полноторием  $Q_{1+}^3$ . Пусть  $\mu_+(b) \subset F^{-1}(h, b)$  — образ окружности  $\partial D_+^2(l(l'))$  и  $\lambda_+(b) \subset F^{-1}(h, b)$  — образ окружности  $\mu_{1+}(l(l'))$  при изотопии  $\tau$ . Перенесем также ориентации окружностей. Получим базис  $(\mu_+(b), \lambda_+(b))$  на торе  $F^{-1}(h, b)$ ,  $\forall b \in [f_2^+ + \varepsilon, f_1^+ - \varepsilon]$ . Из определения циклов  $\mu_{1\pm}(l)$  следует, что  $\lambda_+(f_2^+ + \varepsilon) = \lambda_{2+}(h)$ . Ориентации также совпадают. Циклы  $\partial D_+^2(h) = \mu_+(f_1^+ - \varepsilon)$  и  $\mu_{1+}(h) = \lambda_+(f_1^+ - \varepsilon)$  при изотопии  $\tau$  остаются на месте, следовательно, изотопия  $\phi_b$  переводит базис  $(\lambda_+(f_2^+ + \varepsilon), \mu_+(f_2^+ + \varepsilon))$  в допустимый базис  $(\mu_{1+}(h), \partial D_+^2(h))$  на торе  $T_1^2$ .

Докажем, что базис  $(\mu_+(f_2^+ + \varepsilon), \lambda_+(f_2^+ + \varepsilon))$  является допустимым. Отождествим базис циклов на торе с базисом из векторов, касательных к циклам в точке пересечения. Базис  $(grad(H), grad(f|Q_h^3), \lambda_+(f_2^+ + \varepsilon), \mu_+(f_2^+ + \varepsilon))$  задает исходную ориентацию многообразия  $M^4$ , т.к. он связан гладким переносом вдоль траекторий  $grad(H|_{P_b^3})$ ,  $b = f_2^+ + \varepsilon$  с ориентирующим базисом  $(grad(H), grad(f|Q_{l(h)}^3), \mu_{1+}(l(h)), \partial D_+^2(l(h)))$ . Следовательно, базис  $(grad(H), -grad(f|Q_h^3), \mu_+(f_2^+ + \varepsilon), \lambda_+(f_2^+ + \varepsilon))$  также является ориентирующим и, очевидно, базис  $(\mu_+(f_2^+ + \varepsilon), \lambda_+(f_2^+ + \varepsilon))$  задает ориентацию края штанов  $Q_{2+}^3$ , согласованную с ориентацией  $Q_h^3$ . Таким образом, базис  $(\mu_+(f_2^+ + \varepsilon), \lambda_+(f_2^+ + \varepsilon))$  определяет допустимую систему координат на торе  $T_2^2$  [7].

Итак, в допустимых координатах граничных торов склейка штанов  $Q_{2+}^3$  с полноторием  $Q_{1+}^3$  задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно  $r = \frac{0}{1} = 0$  и  $\varepsilon = sign(1) = 1$ . Точно такая матрица склеивает штаны  $Q_{2-}^3$  с полноторием  $Q_{1-}^3$ . Склейка штанов  $Q_{2+}^3$  и  $Q_{1-}^3$  порождает семью ребер графа  $\Gamma(Q_h^3, f)$  [7], однако из вида всех четырех матриц склейки следует, что соответствующая  $n$ -метка равна нулю.

### § 7.5. Доказательство теоремы 5: метки при $h_0 < h < h_3$

При переходе через  $h_0$  не происходит топологической перестройки изоэнергетической поверхности  $Q_h^3$ , так как  $h_0$  не является критическим значением гамильтониана  $H$ . Вычисленный в п.2 изоэнергетический инвариант Фоменко-Цишанга однозначно определяет топологию  $Q_h^3$ , которая гомеоморфна тору  $T^3$  при  $h_2 < h < h_3$ . При  $h = h_0$  нарушается боттовость интеграла  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (теорема 3), поэтому внутри подмногообразия  $\{p \in Q_h^3 : f_2^- + \varepsilon \leq f(p) \leq f_2^+ - \varepsilon\}$  происходит бифуркация лиувиллева слоения — на графике  $\Gamma(Q_h^3, f)$  вырастают четыре "рога" (рис.13), что соответствует появлению четырех пар критических окружностей (теорема 2). Каждая пара состоит из седловой  $f_4^\mp$  и минимаксной  $f_3^\mp$  окружностей, которые при  $h \rightarrow h_0 + 0$  сливаются в вырожденную критическую окружность  $S_\pm^1(h_0)$ . (заметим, что  $f_4^-, f_3^- > 0$ , а  $f_4^+, f_3^+ < 0$  — теорема 2). Матрицы склейки минимаксных полноторий  $f_1^\pm$  и  $f_3^\pm$  с соответствующими штанами имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица склейки каждой из двух пар штанов  $f_4^+ - \varepsilon \leq f \leq f_4^+ + \varepsilon$  и  $f_4^- - \varepsilon \leq f \leq f_4^- + \varepsilon$

по граничным торам  $f_4^- - \varepsilon$  и  $f_4^+ + \varepsilon$  имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данные матрицы вычисляются с использованием очевидных аналогов лемм 2-4.

Зафиксируем одну из двух связных компонент подмногообразия

$$N^4 = \{p \in M^4 : f_2^-(l') < f(p) < f_2^+(l'), l' > h_2\}.$$

Соответственно,  $F^{-1}(h, b)$  обозначает тот единственный тор, который вложен в эту компоненту. В дальнейшем мы не делаем подобных оговорок. Найдем матрицу склейки штанов  $f_4^- - \varepsilon \leq f \leq f_4^- + \varepsilon$  со штанами  $f_2^+ - \varepsilon \leq f \leq f_2^+ + \varepsilon$  по граничным торам  $f_4^- + \varepsilon$  и  $f_2^+ - \varepsilon$ .

**Лемма 5.** Пусть  $h \in [h_0, h_3]$ ,  $f_4^\pm(h) = f_2^\pm(l') \mp \varepsilon$  и  $\sigma_h^\pm$  - образ окружности  $C_f \cap f^{-1}(f_4^\pm(h))$  при изотопии вдоль траекторий поля  $-grad(H|_{P_b^3})$ ,  $b = f_4^\pm(h)$  на уровне  $H = l'$ . Перенесем на  $\sigma_h^\pm$  ориентацию траектории  $f_4^\pm(h)$ . Тогда  $\sigma_h^\pm$  гомотопна в  $F^{-1}(l', b)$  окружности  $\mu_{3\pm}(l')$ . В одной связной компоненте подмногообразия  $N^4$  ориентации окружностей при данной гомотопии совпадают, а во второй обращаются.

*Доказательство.* Поясним, что при  $h \in (h_0, h_3]$  изотопия вдоль поля  $-grad(H|_{P_b^3})$  происходит по какой-либо одной из двух выходящих ветвей сепаратрисной диаграммы интеграла  $-H : P_b^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , отвечающей седловой критической окружности  $C_f \cap f^{-1}(f_4^\pm(h))$ . Очевидно, что при  $f_4^\mp(h) \rightarrow f_4^\mp(h_0)$  существует предельное положение ветви сепаратрисной диаграммы, состоящее из гладкого семейства траекторий, выходящих из вырожденной критической окружности  $S_\pm^1(h_0)$ . При  $h = h_0$  изотопия происходит вдоль интегральных линий из данного семейства. Из связности отрезка  $[f_4^+(h_0), f_4^-(h_0)]$  следует, что утверждение леммы достаточно доказать для  $h = h_3$ . Соотношения

$$\theta - \alpha_0 \in \left[ -\arccos \left( \frac{h_3 - h_2 - 2h}{h_2 + h_3} \right), -\arccos \left( \frac{2h - h_2 - h_3}{h_2 - h_3} \right) \right], \quad \psi = \frac{\theta}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\rho = \frac{\tilde{c} |\sin(\theta - \alpha_0)|}{\sqrt{2c_0 - h^2 - 2\tilde{c} \cdot \cos(\theta - \alpha_0)}}$$

однозначно определяют в  $F^{-1}(h, 0)$  такую окружность  $S_h^1$ , что  $S^1(h_3) = \gamma_3$ .  
Окружность  $S_{h_2}^1$  однозначно определяется следующими соотношениями :

$$\theta - \alpha_0 \in \left[ -\arccos \left( \frac{h_3 - 3h_2}{h_2 + h_3} \right), 0 \right], \quad \psi = \frac{\theta}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\begin{cases} \theta \neq \alpha_0 \Rightarrow \rho = \sqrt{\tilde{c}} \cdot \cos \frac{\theta - \alpha_0}{2} \\ \theta = \alpha_0 \Rightarrow \rho \in \left[ \sqrt{\tilde{c}}, \sqrt{c_0 + \sqrt{c_0^2 - \tilde{c}^2}} \right] \end{cases}$$

При  $h \in [h_2, h_3]$  получаем в  $P_0^3$  гомотопию  $\beta_h^+$  окружности  $\gamma_3$ . Обращая знак  $\theta - \alpha_0$  получим аналогичную гомотопию  $\beta_h^-$ . Очевидно, что  $S_{h_2}^1$  гомотопна в полиэдре  $F^{-1}(h_2, 0)$  половине восьмерки, в которую склеивается при  $\delta_3 \rightarrow +0$  пара окружностей  $\mu_{3\pm}(h_2 + \delta_3)$  (лемма 3) из различных связных компонент  $N^4$ . На рис.8 изображен полиэдр  $F^{-1}(h_2, 0)$  и две пары окружностей, склеившихся по общим дугам седловой критической окружности  $\gamma_2$  (на рисунке общие дуги слева и справа). При этом склеиваются  $\beta_h^+$  и  $\beta_h^-$  образы окружностей  $\gamma_3$  из различных компонент  $N^4$ . Соответственно, получаются пара частично совпадающих окружностей  $S_{h_2}^1, s_{h_2}^1$ , изображенные на рис.8 слева. Каждая окружность пары подобно меридиану охватывает один из двух торов, склеившихся вдоль  $\gamma_2$ . Справа изображена аналогичная пара частично совпадающих окружностей, полученных изотопиями  $\beta_h^-$  и  $\beta_h^+$  из различных компонент  $N^4$ , взятых в том же порядке, что и для первой пары. Перенесем на  $S_{h_2}^1, s_{h_2}^1$  ориентацию траектории  $\gamma_3$ . Окружности  $S_{h_2}^1, s_{h_2}^1$  сливаются вдоль связного куска траектории  $\gamma_2$ . Непосредственно проверяется, что направление общего участка траектории, определяемое ориентацией каждой из окружностей  $S_{h_2}^1, s_{h_2}^1$ , совпадает с направлением движения по траектории. Если сдвинуть эти окружности вдоль  $\text{grad}(H|_{P_0^3})$  на уровень  $H = h_2 + \delta_3$ , то получится пара ориентированных окружностей, расположенных в разных компонентах  $N^4$ , гомотопных в каждом из двух торов, составляющих  $F^{-1}(h_2 + \delta_3, 0)$ , циклам  $\mu_{3\pm}(h_2 + \delta_3)$ . Очевидно, что одна из гомотопий сохраняет, а другая обращает ориентацию циклов, как элементов допустимых базисов (рис.8). Лемма доказана.

Пусть  $f_4^-(h) = f_2^+(l') - \varepsilon$ ,  $l \in [l', h]$  и  $b = f_2^+(l) - \varepsilon$ .

Если  $b > f_4^-(h_0)$ , то сдвинем тор  $F^{-1}(l, b)$  вдоль интегральных линий векторного поля  $\text{grad}(H|_{P_b^3})$  на уровень  $H = h$ . Такие сдвиги назовем трансформациями.

Если  $b < f_4^-(h_0)$ , то подвернем тор  $F^{-1}(l, b)$  следующей трансформации.

- 1) Сдвинем вдоль интегральных линий поля  $\text{grad}(H|_{P_b^3})$  на такой уровень  $H = h'$ , что  $f_4^-(h') = b = f_2^+(l) - \varepsilon$ . При  $l = h'$  тор склеится вдоль критической окружности  $C_f \cap f^{-1}(f_4^-(h'))$  и превратится в полиэдр  $F^{-1}(h', f_4^-(h'))$ .
- 2) Один из двух торов, на которые разрывается тор  $F^{-1}(l, b)$  при прохождении  $l$  через значение  $h'$ , сдвинем на уровень  $H = h$  вдоль семейства интегральных линий поля  $\text{grad}(H|_{P_b^3})$ , уходящего в бесконечность (второе семейство упирается в максимальную окружность  $f_3^-(h'') = b$ ).

Для каждой входящей и той из выходящих ветвей сепаратрисной диаграммы (седловой окружности  $f_4^-(h)$ ), которая уходит в бесконечность, при  $f_4^-(h) \rightarrow f_4^-(h_0)$  существует предельное положение, состоящее из гладкого семейства траекторий, входящих в, или соответственно покидающих вырожденную критическую окружность  $S_+^1(h_0)$ . Заметим,

что вторая(конечная) из выходящих ветвей при этом стягивается на  $S_+^1(h_0)$  и исчезает. Очевидно, что построенное семейство трансформаций, непрерывно зависящих от  $b \in [f_4^-(h), f_4^-(h_0)] \cup (f_4^-(h_0), f_2^+(h) - \varepsilon]$ , непрерывно продолжается на весь отрезок  $[f_4^-(h), f_2^+(h) - \varepsilon]$ .

Далее, вместе с каждым тором  $F^{-1}(l, b)$  трансформируем базис  $(\mu_{3+}(l), \lambda_{3+}(l))$ . При этом очевидным образом трансформируется ориентация циклов базиса. В результате получим базис  $(\lambda_+(h), \mu_+(h))$  на торе  $T_+^2 \subset F^{-1}(h, f_4^-(h) + \varepsilon)$ . Из леммы 5 следует, что окружность  $\lambda_+(h)$  гомотопна в  $T_+^2$  нетривиальному циклу, который высекает сепаратрисная диаграмма критической окружности  $f_4^-(h^*)$  интеграла  $f : P_b^3 \rightarrow \mathbf{R}$ , где  $b = f_4^-(h) + \varepsilon = f_4^-(h^*)$ . Ввиду малости  $\varepsilon$ , данный цикл близок на торе  $T_+^2$  (следовательно гомотопен) нетривиальному циклу, который высекает сепаратрисная диаграмма критической окружности  $f_4^-(h)$  интеграла  $f : Q_h^3 \rightarrow \mathbf{R}$ . Базис  $(\mu_{3+}(h), \lambda_{3+}(h))$  на торе  $F^{-1}(h, f_2^+(h) - \varepsilon)$  при трансформации остается на месте. Очевидным образом ("снизу вверх") получаем склеивающую гомотопию  $\psi_b^+(h) : T^2 \rightarrow Q_h^3$ , которая переводит базис  $(\lambda_+(h), \mu_+(h))$  в допустимый базис  $(\mu_{3+}(h), \lambda_{3+}(h))$  граничного тора штанов  $f_2^+(h) - \varepsilon \leq f \leq f_2^+(h)$ , сохраняя ориентации циклов. Аналогично случаю  $h_2 < h < h_0$  доказывается, что базис  $(\mu_+(h), \lambda_+(h))$  определяет ориентацию края штанов  $f_4^-(h) - \varepsilon \leq f \leq f_4^-(h) + \varepsilon$ . Из леммы 5 следует, что ориентация цикла  $\lambda_+(h)$ , трансформированная из  $\mu_{3+}(l)$  ( $f_2^+(l) - \varepsilon = f_4^-(h) + \varepsilon$ ), индуцирована ориентацией траектории  $f_4^+(h)$  только для одной из двух связных компонент подмногообразия  $N^4$ , в то время как для другой компоненты эти ориентации противоположны. Следовательно, в одной компоненте подмногообразия  $N^4$  базис  $(\mu_+(h), \lambda_+(h))$  — допустимый, а в другой компоненте допустимым является базис  $(-\mu_+(h), -\lambda_+(h))$ . Соответственно, матрицы склейки равны

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы склейки штанов  $f_4^+ - \varepsilon \leq f \leq f_4^+ + \varepsilon$  со штанами  $f_2^- - \varepsilon \leq f \leq f_2^- + \varepsilon$  по граничным торам  $f_4^+ - \varepsilon$  и  $f_2^- + \varepsilon$  имеют противоположные знаки, т.к. ориентация цикла  $\mu_{3\pm}(l)$  обращается при переходе через нулевой уровень  $f$  (при  $f_2^+(l) - \varepsilon = f_2^-(l) + \varepsilon = 0$ ), а ориентации всех циклов  $\lambda_{3\pm}(l)$  согласованы с ориентациями траекторий  $f_2^\pm(l)$  векторного поля  $v$ , следовательно согласованы между собой.

Матрицы склейки, соответствующие всем ребрам графа  $\Gamma(Q_h^3, f)$ , найдены. По матрицам склейки вычисляются метки  $r_i, \varepsilon_i, n_i$  [7].

## § 7.6. Доказательство теоремы 5: метки при $h > h_3$

Зафиксируем связную компоненту подмногообразия  $N^4$ . При  $h \rightarrow h_3 - 0$  критичес-

кие окружности  $f_4^+(h)$  и  $f_4^-(h)$  сливаются с траекторией  $\gamma_3$ , и при  $h > h_3$  исчезают. Очевидно, что существует такое семейство восьмерок  $\sigma_+(h) \vee \sigma_{0+}(h)$ , непрерывно зависящих от  $h \in (h_0, h_3)$ , что:

- а)  $\sigma_+(h) \vee \sigma_{0+}(h) \subset F^{-1}(h, f_4^-(h))$ ;
- б) каждая окружность восьмерки есть меридиан одного из двух торов, склеившихся в полиэдр  $F^{-1}(h, f_4^-(h))$  вдоль общей параллели  $C_f \cap f^{-1}(f_4^-(h))$ , которая инцидентна центру восьмерки;
- в)  $\sigma_+(h)$  — меридиан максимального полнотория  $f \geq f_3^-(h) - \varepsilon$ ;
- г) цикл  $\mu_+(h)$  (определенный выше при  $h_0 < h < h_3$ ) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  внутри полиэдра  $f_4^-(h) \leq f \leq f_4^-(h) + \varepsilon$  гомотопируется к окружности  $\sigma_{0+}(h)$ .

На полиэдре  $F^{-1}(h, f_4^+(h))$  имеются аналогичная восьмерка  $\sigma_-(h) \vee \sigma_{0-}(h)$ . При  $h \rightarrow h_3 - 0$  восьмерки  $\sigma_+(h) \vee \sigma_{0+}(h)$  и  $\sigma_-(h) \vee \sigma_{0-}(h)$  так склеиваются в одну восьмерку  $\sigma_+(h_3) \vee \sigma_-(h_3)$ , что  $\sigma_+(h_3) = \sigma_{0-}(h_3)$  и  $\sigma_-(h_3) = \sigma_{0+}(h_3)$ . После этого поверхность  $Q_h^3$  разрывается вдоль окружности  $\gamma_3$ . То же самое происходит во второй связной компоненте  $N^4$ . Так  $Q_h^3$  распадается на две связные компоненты с противоположными знаками координаты  $M_3$ . При этом каждая из двух восьмерок  $\sigma_+(h_3) \vee \sigma_-(h_3)$  распадается на пару окружностей  $\sigma_{\pm}(h)$ , которые остаются меридианами минимаксных полноторий  $|f - f_3^{\mp}(h)| \leq \varepsilon$ . Итак, при  $h > h_3$ , в одной связной компоненте  $Q_h^3$  склеивается пара полноторий  $f \geq f_3^-(h) - \varepsilon$  со штанами  $f_2^-(h) - \varepsilon \leq f \leq f_2^-(h) + \varepsilon$ , а в другой связной компоненте склеивается пара полноторий  $f \leq f \leq f_3^+(h) + \varepsilon$  со штанами  $f_2^+(h) - \varepsilon \leq f \leq f_2^+(h) + \varepsilon$ . Очевидно, что при  $h \geq h_3$  можно так непрерывно продолжить семейство базисов  $(\lambda_{\pm}(h), \mu_{\pm}(h))$  и гомотопий  $\psi_b^{\pm}(h)$  (определенных выше при  $h_0 < h < h_3$ ), что:

- а)  $\mu_{\pm}(h_3) = \sigma_{\pm}(h_3)$ ;
  - б)  $\mu_{\pm}(h)$  — меридиан минимаксного полнотория  $|f - f_3^{\mp}(h)| \leq \varepsilon$ ;
  - в)  $\lambda_{\pm}(h)$  — параллель этого полнотория, гомотопная минимаксной окружности  $f_3^{\mp}(h)$ ;
  - г) гомотопия  $\psi_b^{\pm}(h)$  переводит базис  $(\lambda_{\pm}(h), \mu_{\pm}(h))$  в допустимый базис  $(\mu_{3\pm}(h), \lambda_{3\pm}(h))$ .
- Если ориентация окружности  $\lambda_{\pm}(h)$  не согласована с ориентацией минимаксной траектории, которой она гомотопна в полнотории, то заменим ориентации циклов  $\lambda_{\pm}(h)$  и  $\mu_{\pm}(h)$  на противоположные. Ясно, что базис  $(\lambda_{\pm}(h), -\mu_{\pm}(h))$  определяет ориентацию края полнотория  $|f - f_3^{\mp}(h)| \leq \varepsilon$  и является допустимым. Как в случае  $h_0 < h < h_3$ , из леммы 5 следует, что в другой связной компоненте  $N^4$  матрица изменит знак.

Итак матрицы, приклеивающие по два минимаксных полнотория к каждой из двух связных компонент  $Q_h^3$ , имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По матрицам склейки вычисляются метки  $r_i, \varepsilon_i$ . Метки  $n_i$  в данном случае отсутствуют. Теорема 5 доказана.

## Приложение

Подписи к рисункам.

рис. 1. Проекции на  $R^2(c, \rho)$  изоэнергетических поверхностей  $Q_h^3$  при различных значениях  $h$ .

рис. 2. Бифуркационная диаграмма.

рис. 3. Проекции критических окружностей на  $R^2(c, \rho)$  при  $h_1 < h < h_2$ .

рис. 4. Проекции критических окружностей на  $R^2(c, \rho)$  при  $h_2 < h < h_0$ .

рис. 5. Проекции критических окружностей на  $R^2(c, \rho)$  при  $h_0 < h < h_3$ .

рис. 6. Проекции критических окружностей на  $R^2(c, \rho)$  при  $h > h_3$ .

рис. 7. Нулевой уровень интеграла  $f : Q_h^3 \rightarrow R$  при  $h_1 < h < h_2$ ,  $h \rightarrow h_1 + 0$ .

рис. 8. Нулевой уровень интеграла  $f : Q_h^3 \rightarrow R$  при  $h = h_2$ .

рис. 9. Одна из двух связных компонент нулевого уровня интеграла  $f : Q_h^3 \rightarrow R$  при  $h = h_3$ .

рис. 10. Инвариант Фоменко-Цишанга при  $h_1 < h < h_2$ .

рис. 11. Инвариант Фоменко-Цишанга при  $h_2 < h < h_0$ .

рис. 12. Инвариант Фоменко-Цишанга при  $h_0 < h < h_3$ .

рис. 13. Инвариант Фоменко-Цишанга при  $h > h_3$ .

таб. 1. Слово-молекулы и топологическая структура изоэнергетических поверхностей.

рис. 14. Проекция  $M_0^2(h)$  на плоскость  $R^2(\xi_1 - \eta_2, \xi_2 + \eta_1)$  при  $h = 0,995h_1 + 0,005h_2$ .

рис. 15. Проекция  $M_0^2(h)$  на плоскость  $R^2(\xi_1 - \eta_2, \xi_2 + \eta_1)$  при  $h = 0,7h_1 + 0,3h_2$ .

рис. 16. Проекция  $M_0^2(h)$  на плоскость  $R^2(\xi_1 - \eta_2, \xi_2 + \eta_1)$  при  $h = 0,0001h_1 + 0,9999h_2$ .

рис. 17. Проекция  $M_0^2(h)$  на плоскость  $R^2(\xi_1 - \eta_2, \xi_2 + \eta_1)$  при  $h = 0,9999h_2 + 0,0001h_3$ .

рис. 18. Проекция  $M_0^2(h)$  на плоскость  $R^2(\xi_1 - \eta_2, \xi_2 + \eta_1)$  при  $h = 0,95h_2 + 0,05h_3$ .

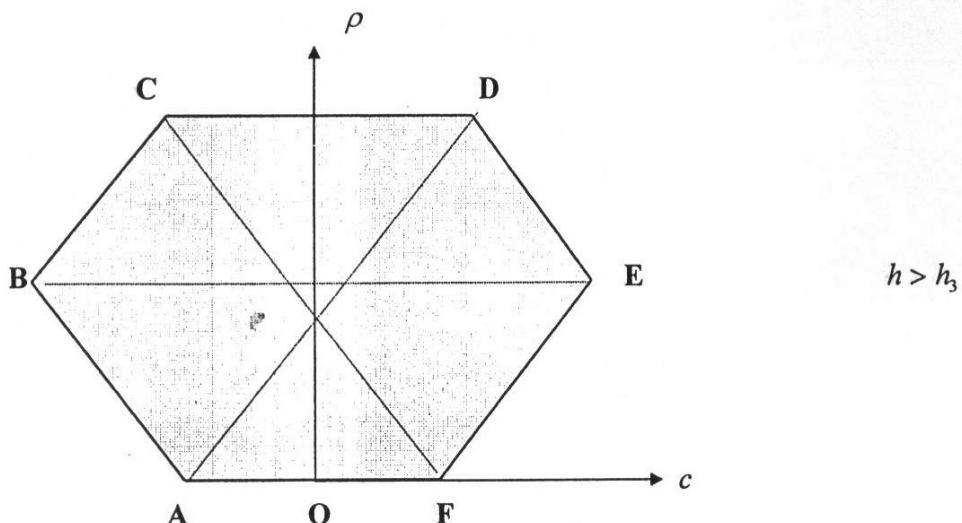
рис. 19. Проекция  $M_0^2(h)$  на плоскость  $R^2(\xi_1 - \eta_2, \xi_2 + \eta_1)$  при  $h = 0,51h_2 + 0,49h_3$ .

рис. 20. Проекция  $M_0^2(h)$  на плоскость  $R^2(\xi_1 - \eta_2, \xi_2 + \eta_1)$  при  $h = 0,15h_2 + 0,85h_3$ .

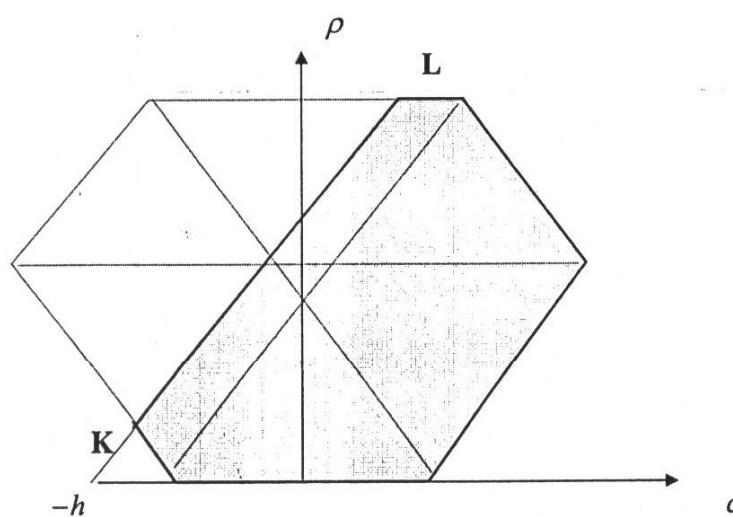
рис. 21. Проекция  $M_0^2(h)$  на плоскость  $R^2(\xi_1 - \eta_2, \xi_2 + \eta_1)$  при  $h = 0,005h_2 + 0,995h_3$ .

рис. 22. Проекция  $M_0^2(h)$  на плоскость  $R^2(\xi_1 - \eta_2, \xi_2 + \eta_1)$  при  $h = h_3$ .

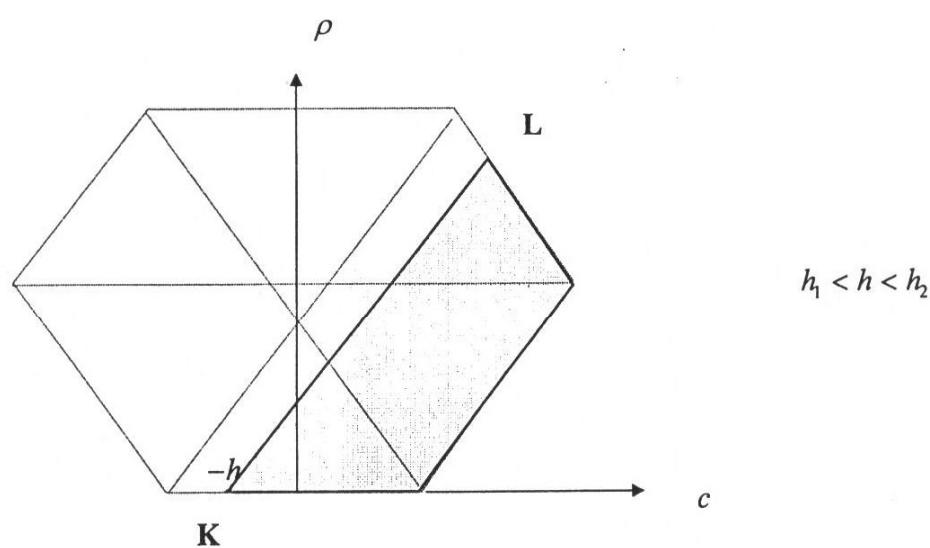
рис. 23. Проекция  $M_0^2(h)$  на плоскость  $R^2(\xi_1 - \eta_2, \xi_2 + \eta_1)$  при  $h = 20h_3$ .



$$h > h_3$$



$$h_2 < h < h_3$$



$$h_1 < h < h_2$$

Рис.1. Проекции на  $R^2(c, \rho)$  изоэнергетических поверхностей  $Q_h^3$  при различных значениях  $h$ .

**f**

$\Sigma$

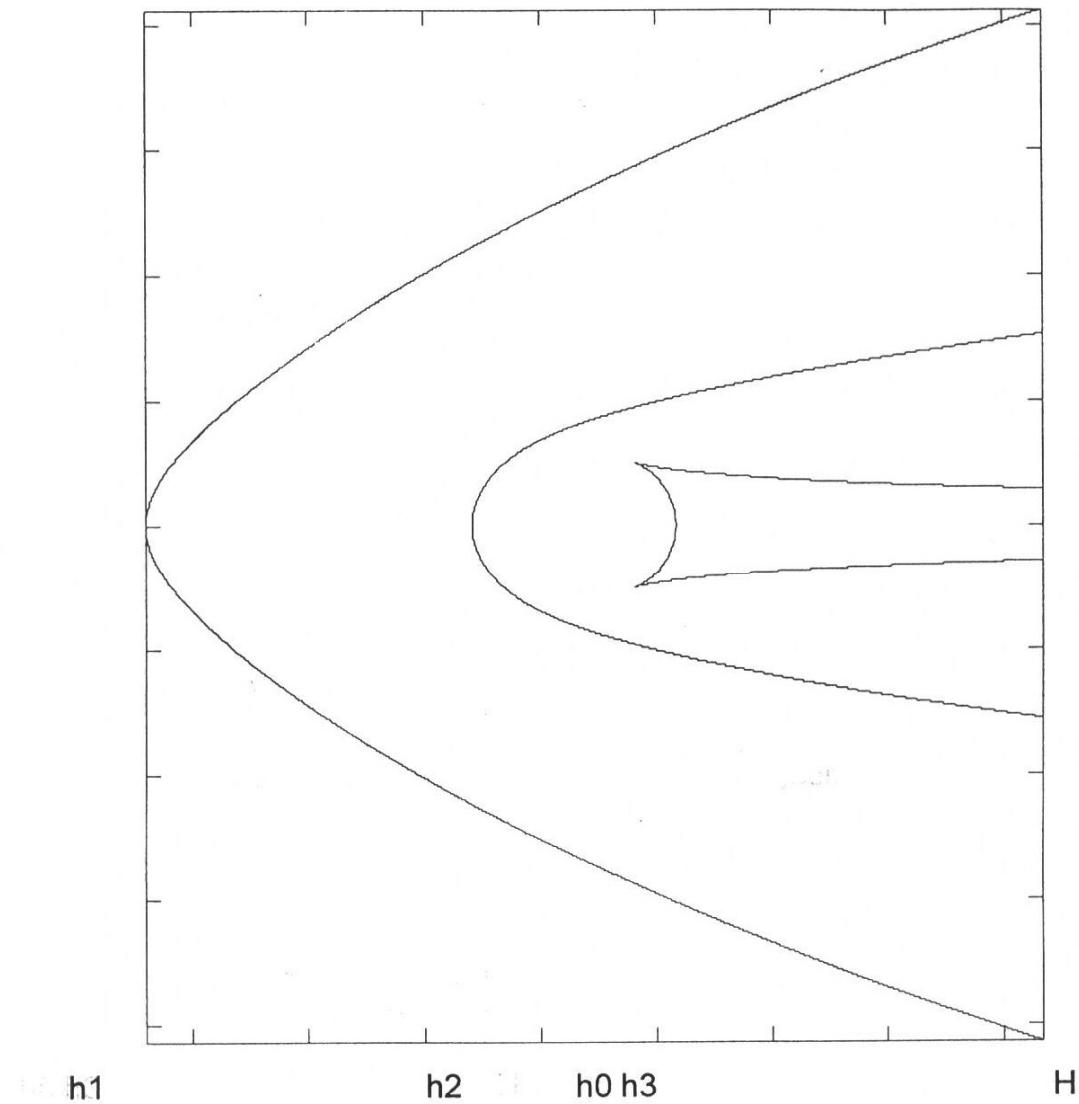


Рис.2 Бифуркационная диаграмма.

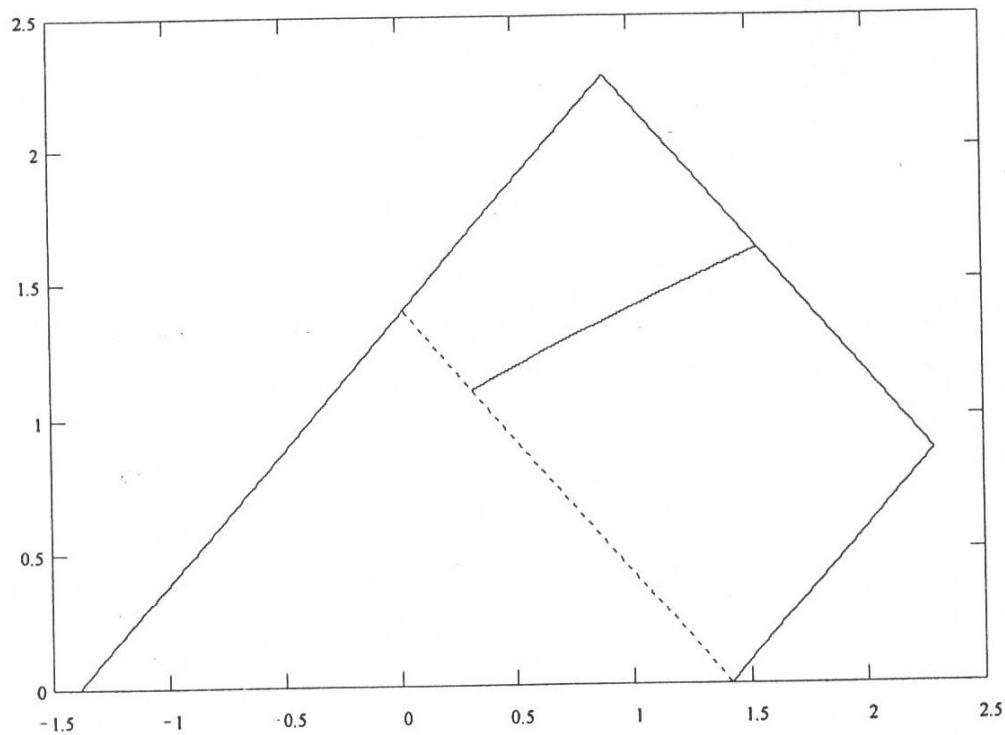


Рис. 3 Проекции критических окружностей на  $R^2(c, \rho)$  при  $h_1 < h < h_2$

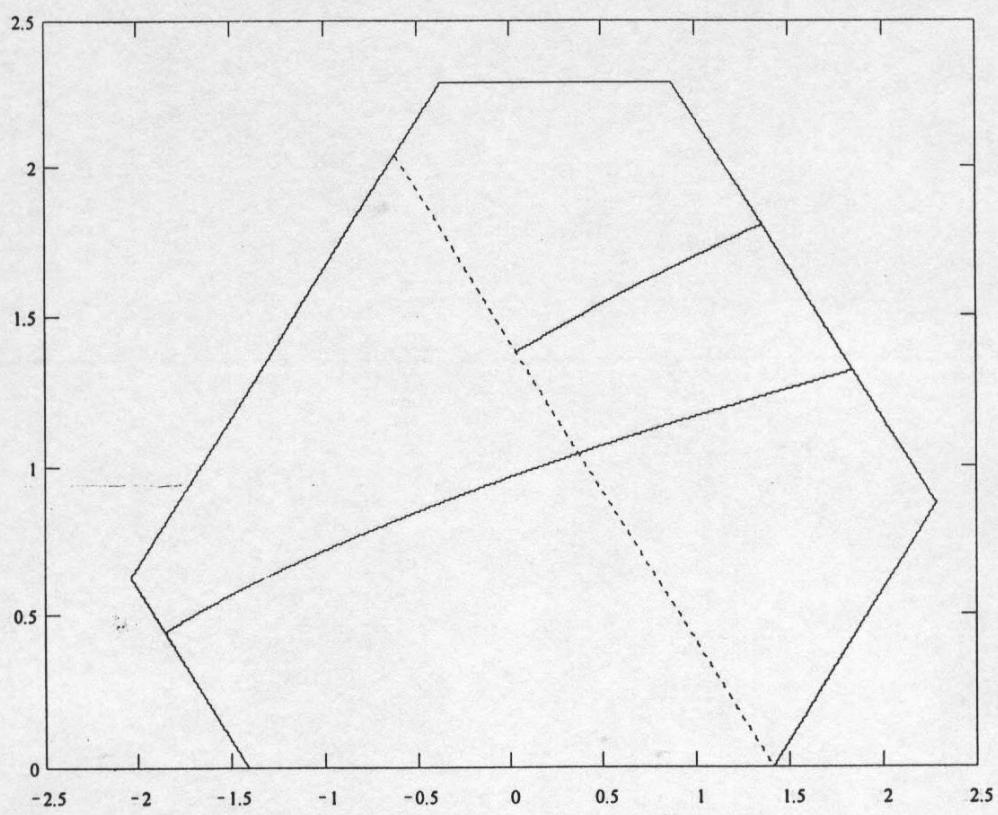


Рис. 4 Проекции критических окружностей на  $R^2(c, \rho)$  при  $h_2 < h < h_0$ .

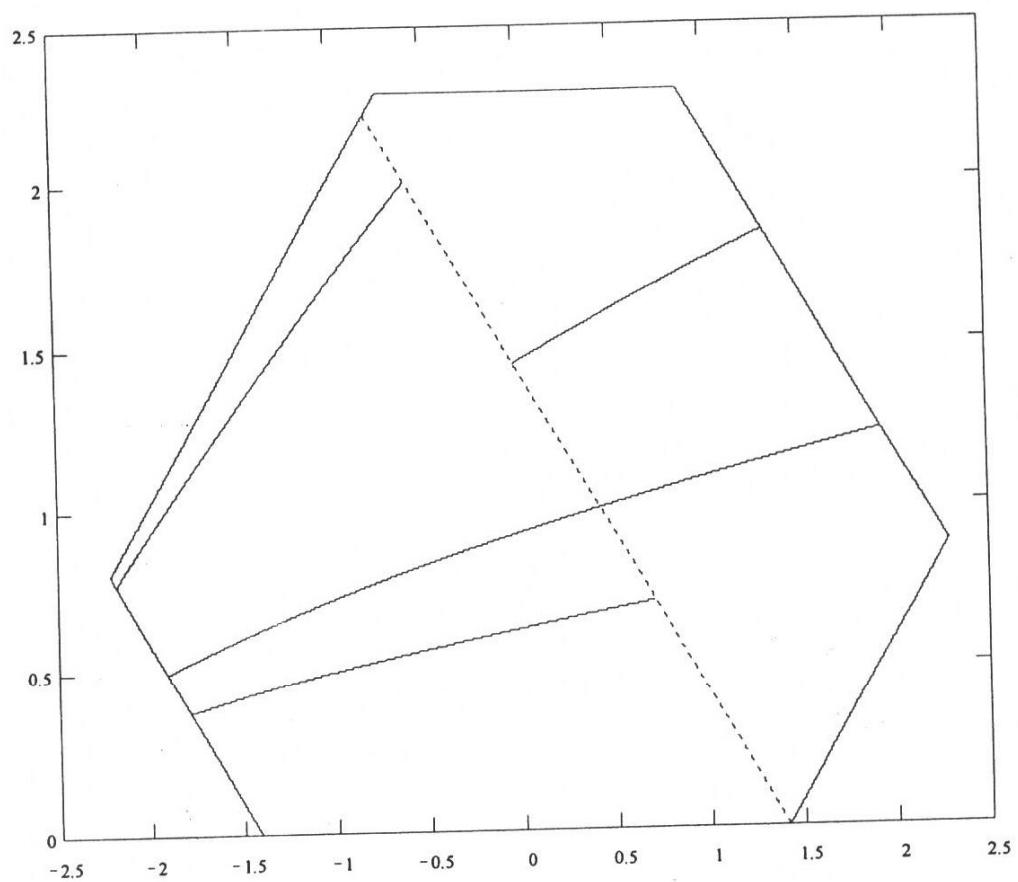


Рис. 5. Проекции критических окружностей на  $R^2(c, \rho)$  при  $h_0 < h < h_3$ .

$$h > h_3$$

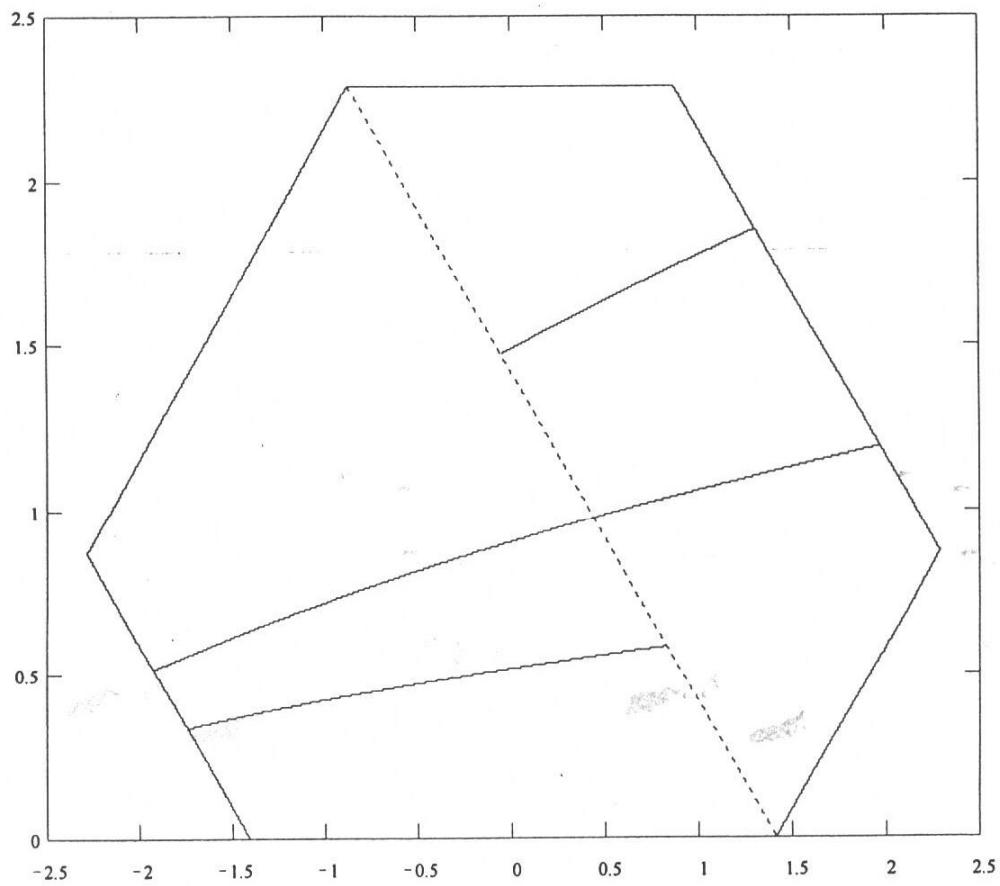


Рис.6 Проекции критических окружностей на  $R2(c, \rho)$  при  $h > h_3$ .

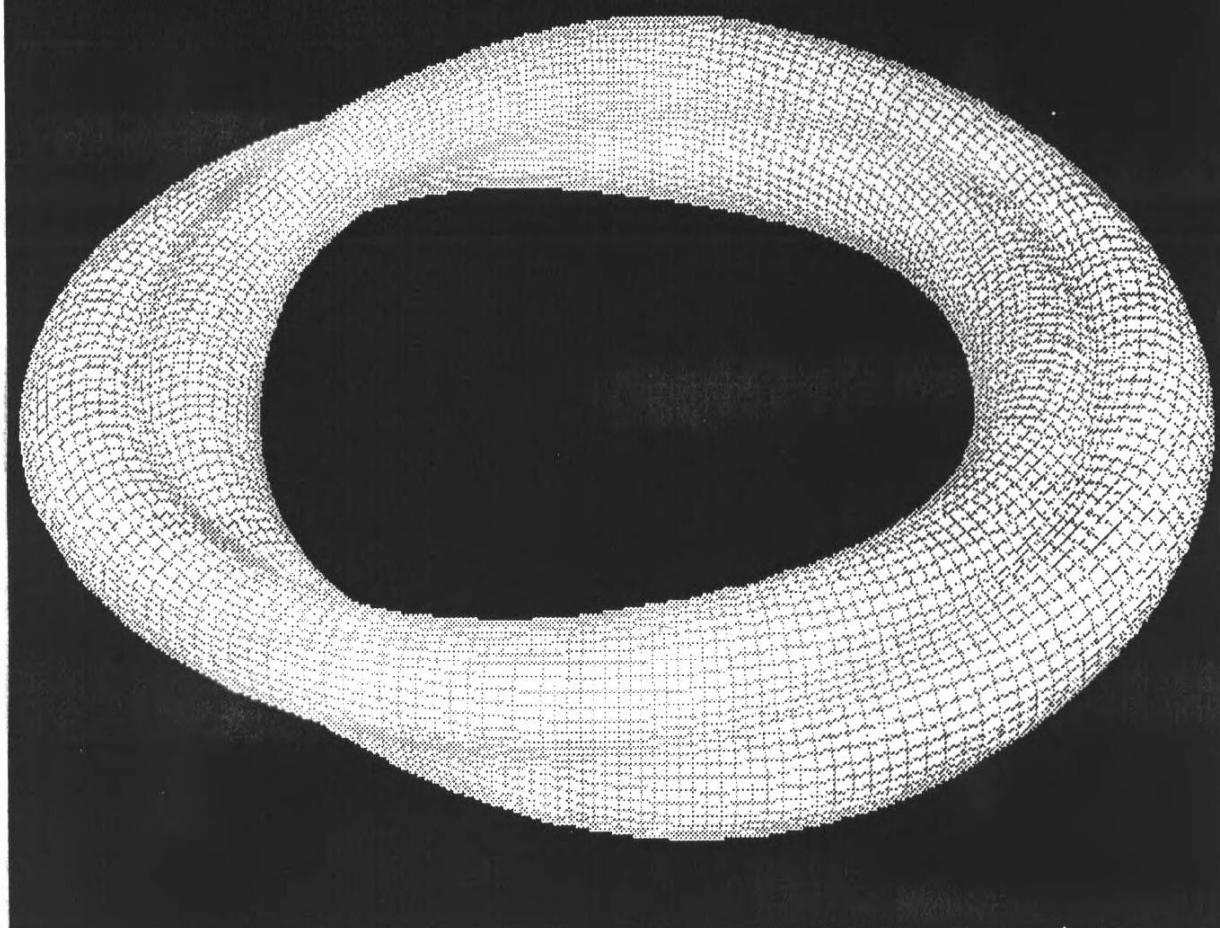


Рис. 7. Нулевой уровень интеграла  $f: Q_h^3 \rightarrow R$ , при  
 $h_1 < h < h_2$ ,  $h \rightarrow h_1 + 0$ .

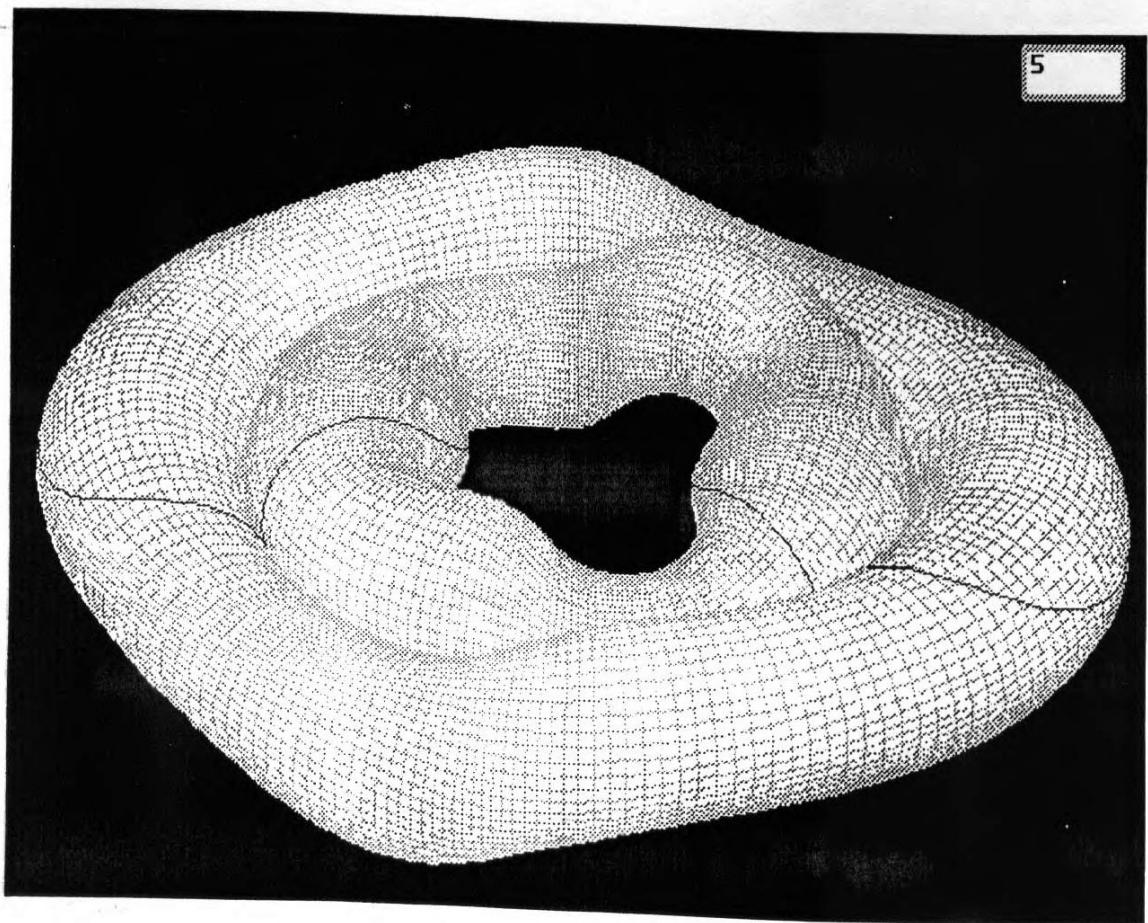


Рис. 8. Нулевой уровень интеграла  $f: Q_h^3 \rightarrow R$  при  $h = h_2$ .

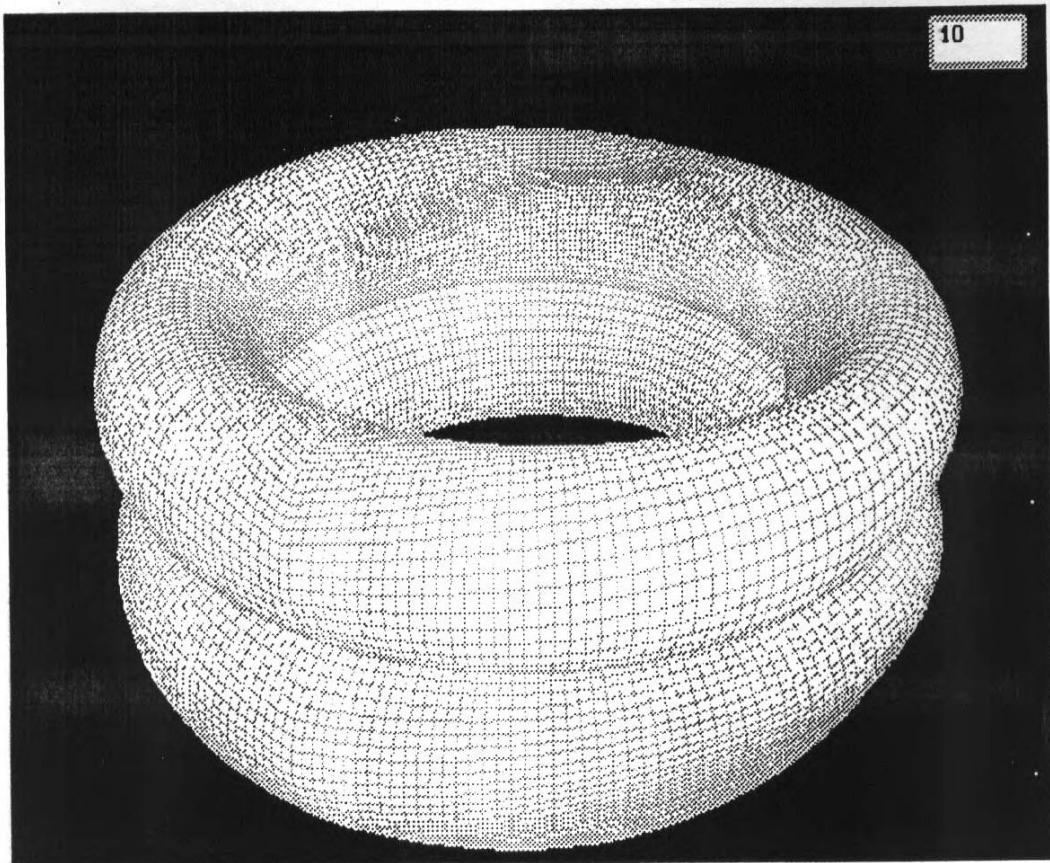


Рис. 9. Одна из двух связных компонент нулевого уровня интеграла  
 $f: Q_h^3 \rightarrow R$  при  $h = h_3$ .

Рис. 10.



Рис.11.

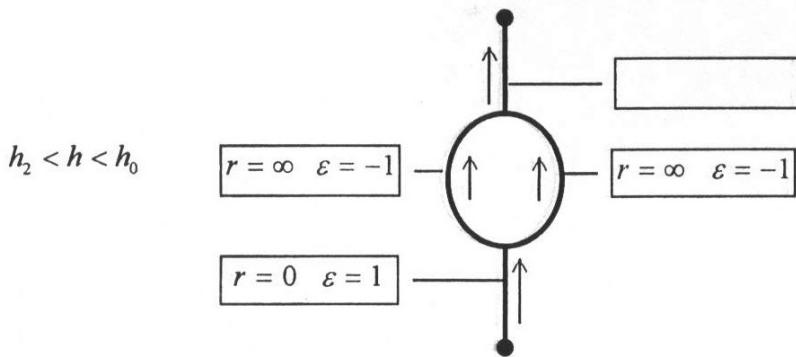


Рис.12.

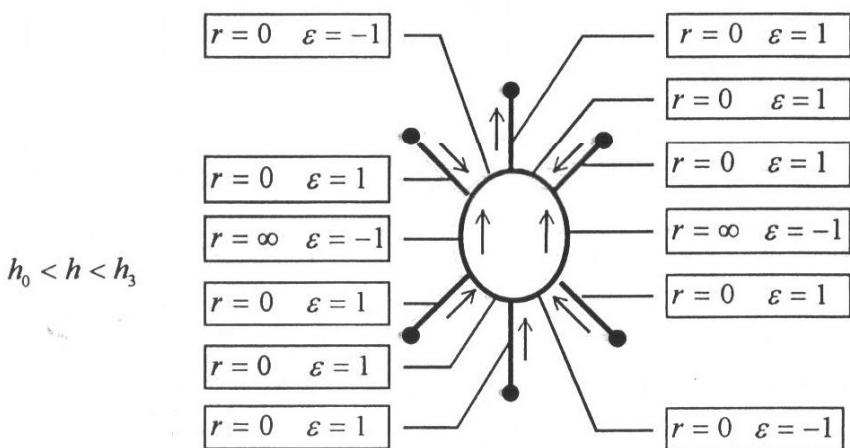


Рис.13.

$h > h_3$

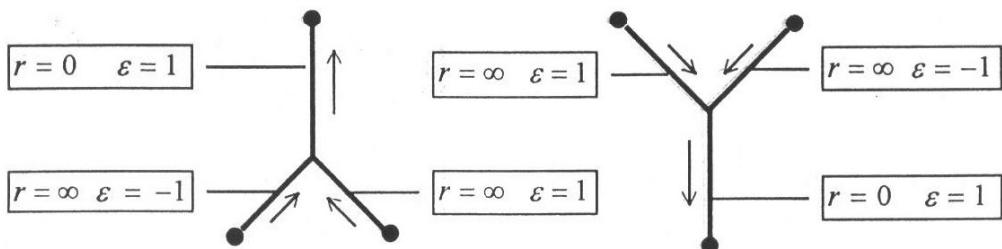


Рис. 10-13: Инвариант Фоменко-Цишанга при различных значениях энергии  $h$ .

$H = h$	$W(Q_h^3)$	$Q_h^3$
$h_1 < h < h_2$	$A \text{ --- } A$	$S^2 \times S^1$
$h_2 < h < h_0$	$A \text{ --- } B \text{ (with a loop) } B \text{ --- } A$	$T^3$
$h_0 < h < h_3$	$\begin{array}{c} A \\   \\ A-B \\   \\ B-B \\   \\ A-B \\   \\ B-B \\   \\ A \end{array}$	$T^3$
$h > h_3$	$\begin{array}{cc} A & A \\   &   \\ A-B & B-A \\   &   \\ A & A \end{array}$	$2(S^2 \times S^1)$

Таблица 1. Молекулы и топологические типы изоэнергетических поверхностей  $Q_h^3$ .

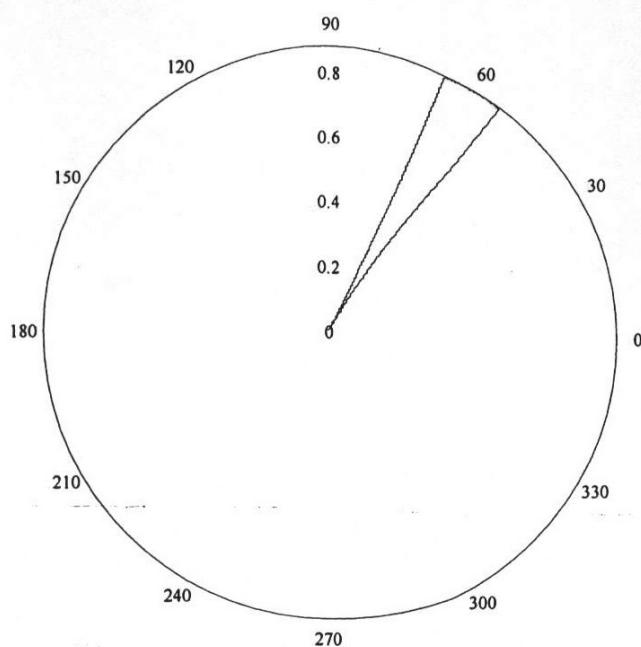


Рис. 14

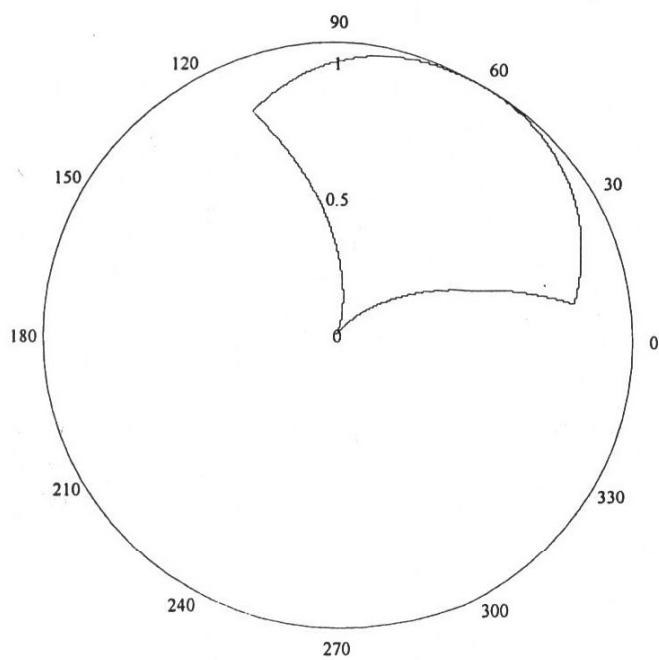


Рис. 15

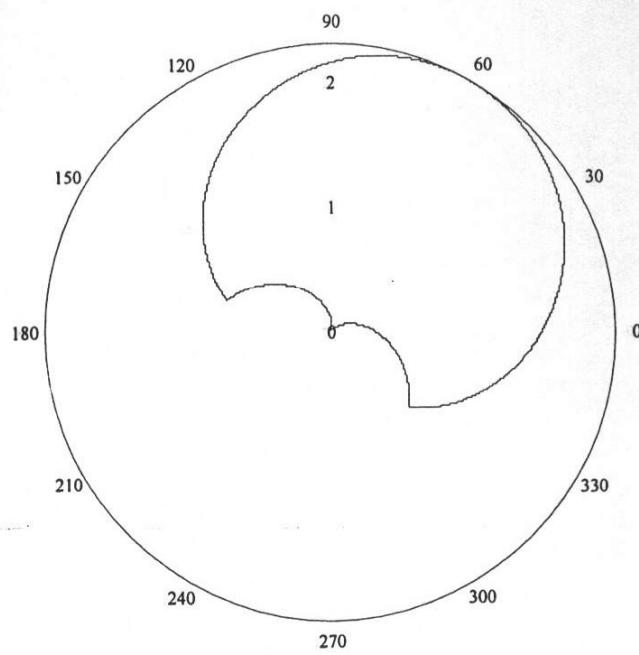


Рис. 16

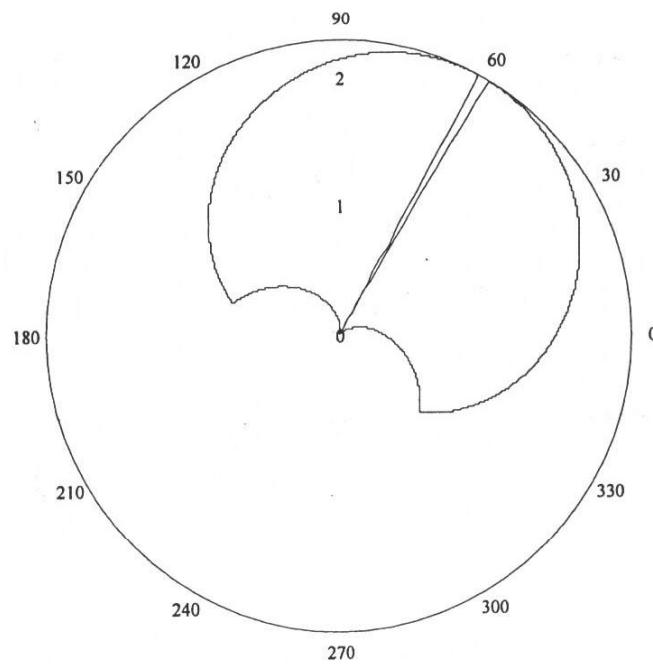


Рис. 17

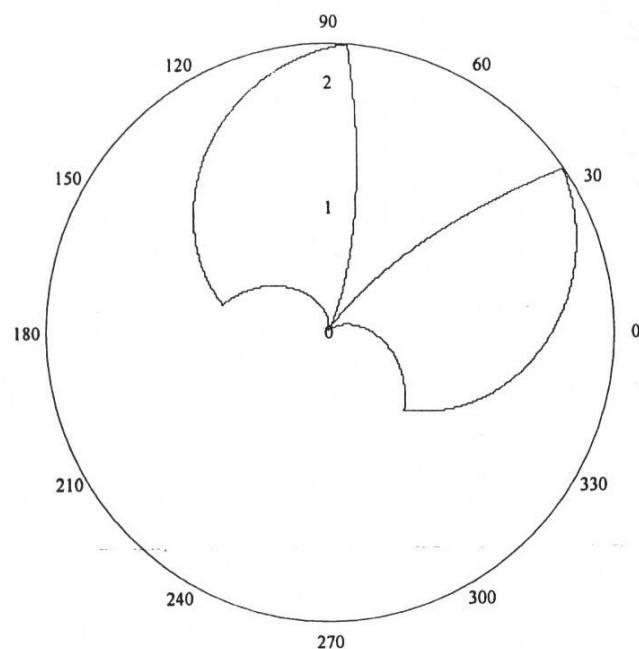


Рис. 18

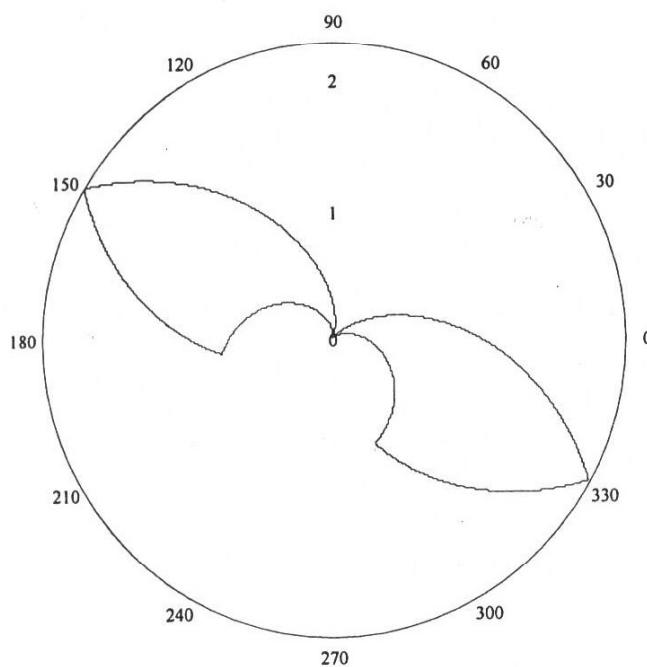


Рис. 19

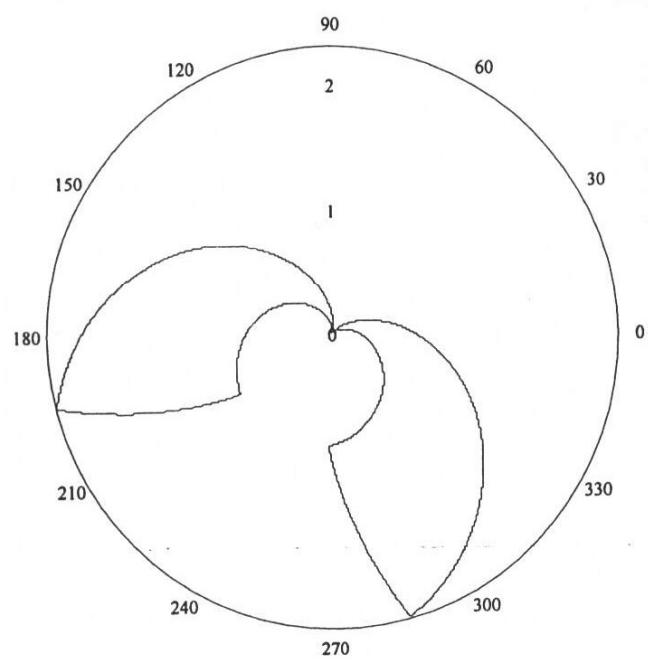


Рис. 20

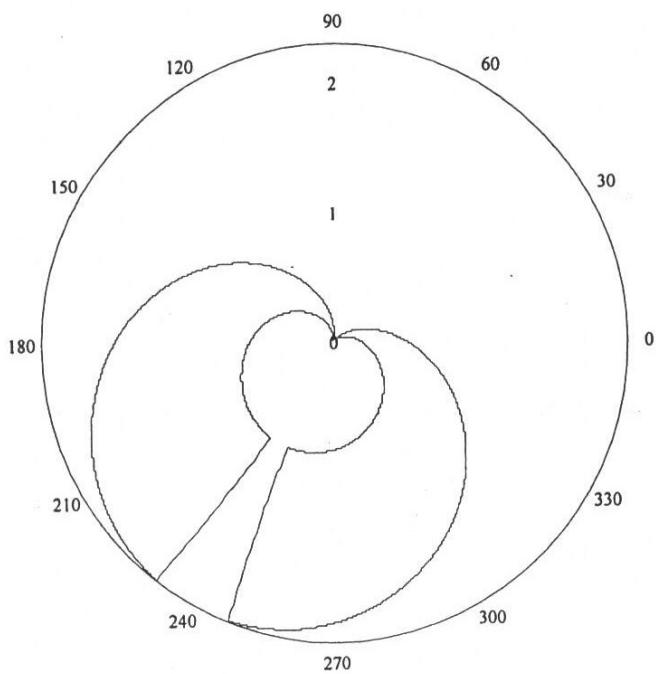


Рис. 21

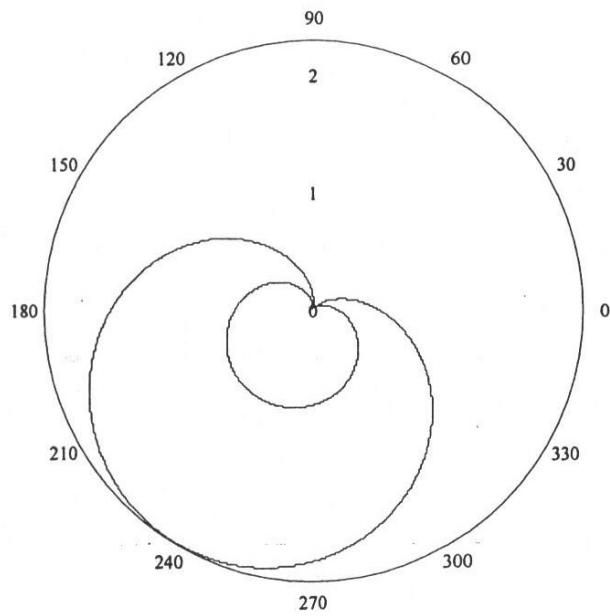


Рис. 22

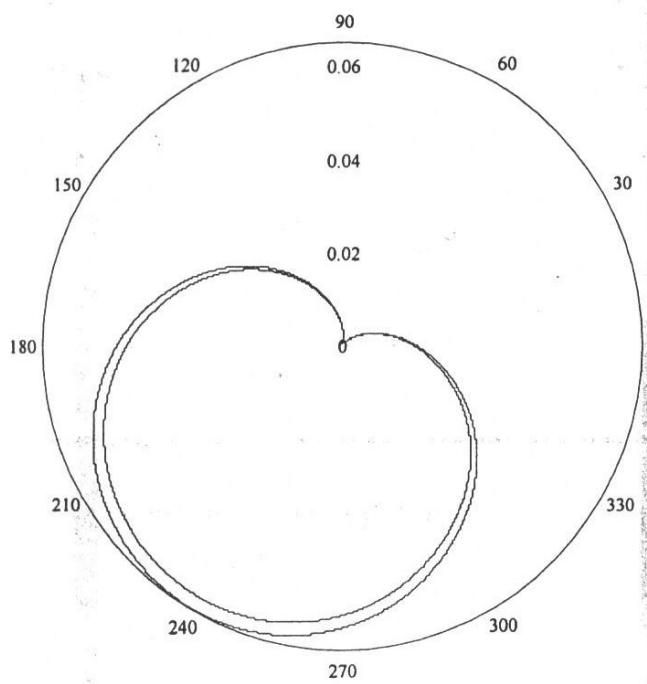


Рис. 23

## Литература

- [1] Арнольд В.И. *Математические методы классической механики*. М. Наука, 1974г.
- [2] A.I. Bobenko, A.G. Reyman, M.A. Semenov-Tian-Shansky. *The Kowalewski top 99 years later: a Lax pair, generalizations and explicit solutions*. Comm.Math.Phys. 1989. V.122. N2. P.321-354.
- [3] Богоявленский О. И. *Динамика твердого тела с п эллипсоидальными полостями, заполненными магнитной жидкостью*. ДАН СССР. 1983. Т.272, N 6. С. 1364-1367.
- [4] Богоявленский О. И. *Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики*. Изв. АН СССР. Сер.мат. -1984г. т.48. N 5. стр.883-938
- [5] Богоявленский О. И., Г. Ф. Ивах. *Топологический анализ интегрируемых случаев В.А.Стеклова*. УМН.- 1985.- т.40, N.4.-С.145-146.
- [6] Богоявленский О. И. *Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера*. ДАН СССР.- 1986.-Т.287, N 5.-С.1105-1108.
- [7] Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. *Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*. УМН.- 1990, т.45, вып.2
- [8] Bolsinov A. V. *Methods of calculation of the Fomenko-Zieschang invariant*. Adv.in Soviet Math.- 1991.- V.6.-P.147-183.
- [9] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. *Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации.I,II* Матем.сб.-1994.-Т.185, N4.-С. 27-80; N5.-С. 27-78.
- [10] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. *Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем*. М.Наука. 1997г.
- [11] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Топология.Геометрия.Классификация*. Эдиториал.УРСС.1998г.
- [12] Браилов А. В., Фоменко А. Т. *Топология интегральных многообразий интегрируемых систем*. Мат.сб.- 1987.- Т.133, N 3.- С.- 375-385.

- [13] Channell P.J, Scovel C. Symplectic integration of Hamiltonian systems. II Preprint LA-UR-88-1828. Los Alamos National Laboratory.- Los Alamos, USA, 1988.
- [14] Делоне Н. Б. Алгебраические интегралы движения твердого тела около неподвижной точки. Санкт-Петербург. 1892.
- [15] Жуковский Н. Е. Геометрическая интерпретация рассмотренного С.В. Ковалевской случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. В 7 т. Л. 1948. т.1.
- [16] Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. В 2 т. М. 1949. т.1.
- [17] Зотьев Д. Б. Инвариант Фоменко-Цишанга в интегрируемом случае О.И. Богоявленского. Регулярная и хаотическая динамика. 2000. N4.
- [18] Ковалевская С. В. Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. М. 1940.
- [19] Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике. УМН.- 1983, т.38, вып.1. с.3-67.
- [20] Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. - М. Изд-во МГУ. 1980.
- [21] Komarov I. V. A generalization of the Kowalewski top. Phys.Lett. 123A, 14-15(1987)
- [22] Лагранж Ж. Аналитическая механика. В 2 т. Л. 1950. т.1.
- [23] Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса. УМН.- 1982, т.37, вып.5. с.3-49.
- [24] Орел О. Е., Рябов П. Е. Бифуркационные множества в одной задаче о движении твердого тела в жидкости и ее обобщении. Регулярная и хаотическая динамика. 3. 1998. N 2. С.82-91.
- [25] Ошемков А. А. Боттовские интегралы интегрируемых гамильтоновых систем. Геометрия, дифференциальные уравнения и механика. -М.: МГУ, 1986.-С. 115-117.
- [26] Oshemkov A. A. The phase topology of some integrable Hamiltonian systems on  $so(4)$ . Бакинская международная топологическая конференция. Часть 2. Тезисы.-Баку: Ин-т мат. АН СССР ; Ин-т мат. и мех. АН Азерб.ССР.-1987.-с.230.
- [27] Oshemkov A. A. Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations Adv.in Soviet Math.- 1991.- V.6.-P.67-146.

- [28] Ошемков А. А. Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела. Труды семинара по векторному и тензорному анализу. -М.: Изд-во МГУ, 1993.-Вып.25,ч.2.-С.23-109.
- [29] Переломов А. М. Представление Лакса для систем типа С.В.Ковалевской. Функциональный анализ и его приложения.-1982. N 16. с.80-81. УМН.- 1989, т.44, вып.1
- [30] Смейл С. Топология и механика. УМН.- 1972. т.27, N2.
- [31] Татаринов Я. В. Портреты классических интегралов задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. Вест. Моск. ун-та. 1974. Вып.6.
- [32] Татаринов Я. В. Глобальный взгляд на динамику твердого тела. Описание конфигураций. Вест. Моск. ун-та. 1978. Вып.4.
- [33] Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости. Изв. АН СССР. Сер.мат. -1986.- Т.50. N6.- С.1276-1307.
- [34] Фоменко А. Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем. ДАН СССР.- 1986.-Т.287, N 5.-С. 1071-1075.
- [35] Фоменко А. Т. Качественная геометрическая теория интегрируемых систем, классификация изоэнергетических поверхностей и бифуркаций торов Лиувилля при критических значениях энергии. Геометрия и теория особенностей в нелинейных уравнениях.- (Новое в глобальном анализе).-Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1987.-С. 118-139.
- [36] Фоменко А. Т., Цишанг Х. О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем. Изв. АН СССР. Сер.мат.- 1988. - Т.52. N2.- С.378-407.
- [37] Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. МГУ.- 1988
- [38] Фоменко А. Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю. Функциональный анализ и его приложения.-1988.-Т.22, N 4-С.38-51. УМН.- 1989, т.44, вып.1
- [39] Фоменко А. Т. Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем. УМН.- 1989, т.44, вып.1
- [40] Фоменко А. Т., Цишанг Х. Критерий топологической эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Изв. АН СССР. Сер.мат.- 1989.

- [41] Харламов М. П. *Топологический анализ классических интегрируемых случаев в динамике твердого тела.* ДАН СССР.- 1983.-Т.273, N 6.-С. 1322-1325.
- [42] Харламов М. П. *Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела.* Ленинград. 1988 г.
- [43] Харламов М. П., Рябов П. Е. *Бифуркации первых интегралов в случае Ковалевской-Яхьи.* Регулярная и хаотическая динамика. 2. 1997. N 2. С.25-40.
- [44] Харламов П. В. *Лекции по динамике твердого тела.* Новосибирск. 1965.
- [45] Харламов П. В., Коваль В. И. *Движение гиростата Ковалевской в случае Делоне.* Мех. тверд. тела. 1982. Вып.14.
- [46] Якоби К. *Лекции по динамике.* М. 1933.