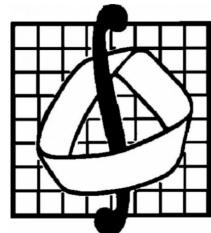


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи



ЖИЛА АЛЕКСАНДРА ИГОРЕВНА

УДК 514.154 + 517.938.5

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМЫ: «ШАР ЧАПЛЫГИНА С РОТОРОМ НА  
ПЛОСКОСТИ»

Специальность 01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:  
академик РАН Фоменко  
Анатолий Тимофеевич,  
д.ф.-м.н., проф. Ошемков  
Андрей Александрович

Москва—2020 г.

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Основные понятия</b>	<b>20</b>
1.1 Симплектические и пуассоновы многообразия . . . . .	20
1.2 Интегрируемые гамильтоновы системы . . . . .	21
1.3 Понятие конформно-гамильтоновой системы . . . . .	23
1.4 Гамильтоновы системы на пуассоновых многообразиях . . . . .	24
1.5 Невырожденные особенности отображения момента . . . . .	25
1.5.1 Невырожденные точки ранга ноль . . . . .	26
1.5.2 Невырожденные точки ранга один . . . . .	28
1.6 Топологические инварианты интегрируемых систем с двумя степенями свободы .	29
1.6.1 Изоэнергетические поверхности . . . . .	29
1.6.2 Структура критических точек на изоэнергетической поверхности . . . . .	30
1.6.3 Матрицы склейки изоэнергетических поверхностей. . . . .	30
<b>2 Шар Чаплыгина с ротором на плоскости</b>	<b>32</b>
2.1 Уравнения движения и первые интегралы . . . . .	32
2.2 Бифуркационная диаграмма . . . . .	34
2.3 Определение типов особенностей ранга 0 . . . . .	39
2.3.1 Алгоритм проверки невырожденности особых точек ранга 0 . . . . .	40
2.3.2 Координаты особых точек ранга 0 . . . . .	42
2.3.3 Оператор $A_N$ и его спектр . . . . .	44
2.3.4 Оператор $A_v$ и его спектр . . . . .	45
2.3.5 Определение типов особых точек . . . . .	46
2.4 Особенности ранга 1 . . . . .	50
2.5 Невырожденность особых точек . . . . .	52
2.6 Грубые молекулы. Сравнение систем: шар Чаплыгина и случай Жуковского . . .	53
2.7 Изоэнергетические поверхности . . . . .	54

<b>3 Классификация матриц склейки на круговых молекулах точек типа центр-центр</b>	<b>76</b>
3.1 Базисные циклы и правила задания ориентации . . . . .	77
3.2 Классификация круговых молекул точек типа центр-центр . . . . .	79
Список литературы . . . . .	86

# Введение

## Актуальность темы и степень ее разработанности

В диссертации исследуется топология слоения Лиувилля системы “шар Чаплыгина с ротором”. В работе находят активное практическое применение ранее предложенные методы вычисления инвариантов, а также теория топологической классификации, построенная А.Т.Фоменко и Х.Цишангом, а затем развитая в работах А.В.Болсинова и многих других математиков.

В классической механике существует большое количество систем с неголономными связями, которые нельзя описать в терминах гамильтоновой механики. Однако, некоторые неголономные системы сохраняют интеграл энергии и другие тензорные инварианты. Например, некоторые задачи, такие как качение шара по плоскости, обладают инвариантной мерой и после замены времени могут быть приведены к гамильтоновому виду. Таким образом, для их анализа применимы методы обычной гамильтоновой механики (в том числе и топологические). Системы, которые при замене времени становятся гамильтоновыми, называются конформно – гамильтоновыми.

В настоящей диссертации изучается топология слоения Лиувилля, то есть пространство замыканий решений системы. С помощью топологических инвариантов можно выявлять эквивалентные и неэквивалентные интегрируемые системы. Все исследования проводятся в рамках теории Фоменко классификации интегрируемых систем, основанной на инвариантах Фоменко, использующих бифуркационные комплексы (подробнее см. [4]).

В данной диссертации исследуются топологические инварианты одной конформно – гамильтоновой системы, а именно, рассматривается задача о качении уравновешенного динамически несимметричного шара с ротором по горизонтальной шероховатой плоскости. Этую систему называют также шаром Чаплыгина с ротором. Ранее в работе А.Ю. Москвина [7] для исследования динамики системы и нахождения особых решений были построены бифуркационная диаграмма отображения момента и бифуркационный комплекс. Отметим, что частным случаем данной системы является случай Жуковского, который хорошо изучен и подробно описан, например, в [4]. Естественное продолжение исследований А.Ю. Москвина — это проведение тонкого лиувилевого анализа системы. В настоящей диссертации проверена невырожденность особенностей, описано слоение Лиувилля в окрестности особых точек отображения момента, построены разде-

ляющие кривые для определения типов изоэнергетических поверхностей, найдены инварианты Фоменко и исследована грубая лиувиллевая эквивалентность данной системы с системой Жуковского.

## Цели и задачи диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Исследовать невырожденность особых точек системы шар Чаплыгина с ротором.
2. Вычислить все инварианты Фоменко системы шар Чаплыгина с ротором и среди найденных слоений Лиувилля найти слоения, которые эквивалентны ранее изученной системе Жуковского.
3. Найти топологические типы изоэнергетических поверхностей системы шар Чаплыгина с ротором.
4. Для системы шар Чаплыгина с ротором построить такие разделяющие кривые на плоскости  $\mathbb{R}^2(h, c)$  при различных значениях параметров системы, что меченные молекулы системы будут совпадать для всех точек из одной области.
5. Классифицировать матрицы склейки круговых молекул точки типа центр–центр.

## Положения, выносимые на защиту

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Для шара Чаплыгина с ротором невырожденность точек ранга 1 и 0, а также типы невырожденных особенностей системы, полностью определяются бифуркационной диаграммой отображения момента. А именно, в случае, когда у ротора нет нулевых компонент, для всех допустимых значений параметров системы верно следующее: все точки ранга 0, лежащие в прообразах точек трансверсального пересечения двух или трех дуг бифуркационной диаграммы, невырождены и имеют тип центр–центр или центр–седло; все вырожденные точки ранга 0 лежат в прообразе точек, в которых пересекаются больше трех дуг бифуркационной диаграммы; все вырожденные точки ранга 1 лежат в прообразе точек возврата и точек касания дуг бифуркационных диаграмм.
2. Существуют такие значения параметров системы Чаплыгина, что для малых уровней энергии возникают молекулы, не встречающиеся в случае Жуковского. При этом на высоких уровнях энергии данные системы грубо лиувиллево эквивалентны.

3. В системе шар Чаплыгина с ротором встречаются 3 топологических типа изоэнергетических поверхностей:  $\mathbb{R}P^3$ ,  $S^1 \times S^2$ ,  $S^3$ . Кривые, разделяющие указанные топологические типы изоэнергетических поверхностей и являющиеся множеством критических значений отображения  $H \times C : S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, c)$ , описаны явными формулами и построены при различных значениях параметров системы.
4. Кривые на плоскости  $\mathbb{R}^2(h, c)$ , разделяющие области с различными типами меченых молекул, описаны явными формулами. Получен полный, возможно избыточный, список возможных грубых молекул и топологических типов трехмерных поверхностей для всех возможных 39 допустимых кривых. Если верна гипотеза о реализуемости только 6 типов бифуркационных диаграмм для системы шар Чаплыгина с ротором, то разделяющие кривые на плоскости  $\mathbb{R}^2(h, c)$  задают ровно 27 различных областей с типами меченых молекул для всех значений девяти параметров системы, т.е. каждое из трехмерных многообразий, соответствующих допустимым кривым на этих 6 типах диаграмм, реализуется как изоэнергетическая поверхность при некоторых значениях параметров  $K, I, d$ .
5. Матрицы склейки круговых молекул точки типа центр-центр классифицированы в зависимости от взаимного расположения дуг бифуркационной диаграммы в окрестности такой точки. В частности, для каждого из возможных расположений этих дуг определено значение  $\varepsilon$ -метки: +1 или -1.

## Объект и предмет исследования

Объектом исследований является интегрируемая гамильтонова система: шар Чаплыгина с ротором.

Предмет исследования — топологические инварианты и топология слоений Лиувилля данной системы.

## Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются исключительно оригинальными, получены автором самостоятельно, и её новизна заключается в следующем:

1. Исследована невырожденность особых точек системы шар Чаплыгина с ротором.
2. Вычислены все инварианты Фоменко системы шар Чаплыгина с ротором и изучена эквивалентность данной системы и системы Жуковского.
3. Найдены топологические типы изоэнергетических поверхностей системы шар Чаплыгина с ротором.

4. Для системы шар Чаплыгина с ротором построены такие разделяющие кривые на плоскости  $\mathbb{R}^2(h, c)$  при различных значениях параметров системы, что меченные молекулы системы совпадают для всех точек из одной области.
5. Классифицированы матрицы склейки круговых молекул точки типа центр-центр.

## Методы исследования

В работе используются методы топологического анализа интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, построенные А.Т.Фоменко и Х.Цишангом, а затем развитые в работах А.В.Болсинова, А.А.Ошемкова и многих других математиков. При проверке невырожденности положений равновесия используются методы линейной алгебры и классической дифференциальной геометрии с привлечением компьютерных пакетов символьных вычислений.

## Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для установления изоморфизмов лиувиллевых слоений различных интегрируемых систем. Полученная классификация матриц склейки особенностей типа центр-центр может быть применима для вычисления инвариантов Фоменко—Цишинга интегрируемых гамильтоновых систем.

## Апробация работы

Результаты опубликованы в четырёх статьях [16], [17], [18], [19], из которых четыре опубликованы в журналах, удовлетворяющие положению о присуждении учёных степеней в МГУ. Результаты диссертации были представлены на следующих всероссийских и международных конференциях:

- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2019 МГУ», Россия, 9-12 апреля 2019
- 2018 International Conference on Topology and its Applications, Нафпактос, Греция, 7-11 июля 2018
- Международная молодежная научная школа «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы», г.Воронеж, Россия, 13-16 ноября 2017
- Молодежная Международная научная конференция «Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения», г. Воронеж, Воронежский государственный педагогический университет, Россия, 23-25 декабря 2016

- Международная конференция «Аналит, вероятность и геометрия», Москва, Россия, 25 сентября - 2 октября 2016
- Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии (26 июня - 2 июля 2016г., Казань), Казань, Россия, 26 июня - 2 июля 2016
- Александровские чтения-2016, г. Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова,
- XXIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Москва, Россия, 11-15 апреля 2016
- Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2016, Воронеж, Россия, 25-31 января 2016
- XXII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2015», Москва, Россия, 13-17 апреля 2015

Результаты диссертационной работы докладывались на семинаре «Современные геометрические методы» (мех-мат МГУ) и на семинаре «Алгебра и топология интегрируемых систем» (мех-мат МГУ).

## Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения и трех глав. Текст работы изложен на 88 страницах. Список литературы содержит 15 наименований.

## Содержание работы

Во введении формулируется цель работы, кратко излагаются ее результаты и содержание, а также освещается место данных исследований в современной механике твердого тела.

### Содержание главы 1

В **первой главе** вводятся основные понятия и излагаются ключевые теоремы топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем. Описаны фазовое пространство и конформно-гамильтоновы дифференциальные уравнения на пуассоновых многообразиях, которые возникают в задачах неголономной механики.

**Определение.** *Слоением Лиувилля*, отвечающим интегрируемой системе, называется разбиение многообразия  $M^{2n}$  на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов  $f_1, f_2, \dots, f_n$ .

В теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем традиционно рассматривают несколько типов их изоморфизмов.

**Определение.** Две интегрируемые гамильтоновы системы  $(v_1, M_1)$  и  $(v_2, M_2)$  лиувилево эквивалентны, если существует диффеоморфизм  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  переводящий слои Лиувилля одной системы в слои другой.

Это отношение можно немного ослабить, тогда получаем понятие *грубой лиувиллевой эквивалентности*.

**Определение.** Две интегрируемые гамильтоновы системы  $(v_1, M_1)$  и  $(v_2, M_2)$  грубо лиувилево эквивалентны, если существует гомеоморфизм между базами слоений Лиувилля, который локально (т.е. в окрестности каждой точки) поднимается до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля.

В главах 2 и 3 рассмотрены гамальтоновы системы с двумя степенями свободы, то есть такие, у которых фазовое симплектическое многообразие  $M$  имеет размерность 4, а интегрируемость гарантируется существованием лишь одного функционально независимого с гамильтонианом  $H$  дополнительного интеграла  $F$ . *Изоэнергетической поверхностью* называется поверхность уровня гамильтониана  $Q_h^3 = \{x \in M | H(x) = h\}$ . Полным инвариантом слоения Лиувилля на неособой изоэнергетической поверхности является *инвариант Фоменко-Цишанга*, также называемый *меченой молекулой*. Он представляет собой граф, ребра которого отвечают однопараметрическим семействам торов Лиувилля, а вершины — критическим слоям, в которых происходят бифуркции. Ребра и некоторые группы вершин этого графа снабжены числовыми метками.

**Определение** (А. Т. Фоменко). Класс лиувиллевой эквивалентности окрестности особого слоя слоения Лиувилля называется 3-атомом.

С конструктивной точки зрения, 3-атом — это трехмерное многообразие со структурой слоения Лиувилля. Это многообразие содержит ровно один сингулярный слой. Граница состоит из конечного числа торов. Количество критических окружностей на сингулярном слое называется *сложностью атома*. В книге А.В. Болсинова и А.Т. Фоменко приводится классификация возможных 3-атомов в зависимости от их сложности. В данной работе встречаются только атомы  $A$  и  $B$ .

Если каждой вершине графа, отвечающего слоению Лиувилля, сопоставить подходящий 3-атом, то получим *грубую молекулу (инвариант Фоменко)* слоения Лиувилля. Грубая молекула несет информацию о слоении Лиувилля и позволяет локально восстановить структуру вблизи как регулярных, так и сингулярных слоев.

**Теорема** (А. Т. Фоменко). *Две интегрируемые гамильтоновы системы  $(v_1, Q_1^3)$  и  $(v_2, Q_2^3)$  грубо лиувилево эквивалентны в том и только том случае, когда их грубые молекулы совпадают.*

Способ склейки глобального изоэнергетического многообразия из 3-атомов задается числовыми метками трех типов:  $r$ ,  $\varepsilon$  и  $n$ . Вместе с грубой молекулой они и составляют инвариант Фоменко-Цишанга. Имеет место следующий результат

**Теорема** (Фоменко-Цишанг). *Две интегрируемые гамильтоновы системы  $(v_1, Q_1^3)$  и  $(v_2, Q_2^3)$  лиувиллево эквивалентны в том и только том случае, когда их меченные молекулы совпадают.*

## Содержание главы 2

Во второй главе рассматривается задача о качении уравновешенного динамически несимметричного шара по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, называемая случаем шара Чаплыгина с ротором. В таком случае скорость точки контакта равна нулю. Движение шара в проекциях на главные оси, связанные с шаром, описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{M} = (M + K) \times \omega, & M = J\omega - d(\gamma, \omega)\gamma, & J = I + dE, \\ \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, & d = mr^2 \geq 0, & E = \|\delta_{ij}\|. \end{cases}$$

где  $\omega$  — вектор угловой скорости,  $\gamma$  — орт вертикали,  $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  — тензор инерции шара относительно его центра,  $m$  — масса шара,  $r$  — его радиус. Вектор  $M$  имеет смысл кинетического момента шара относительно точки контакта, вектор  $K$  — постоянный вектор момента ротора.

Система обладает четырьмя первыми интегралами:

$$H = \frac{1}{2}(M, \omega), \quad N = (M + K, M + K), \quad C = (M + K, \gamma), \quad G = (\gamma, \gamma).$$

Согласно [9], рассматриваемая система является конформно-гамильтоновой (то есть вида  $\dot{\mathbf{x}} = \mu(\mathbf{x}) \text{sgrad } H(\mathbf{x})$ ) с гамильтонианом  $H$  и приводящим множителем

$$\mu(M, \gamma) = 1/\sqrt{1 - d(\gamma, J^{-1}\gamma)}$$

относительно скобки Пуассона, которая в координатах  $(M, \gamma)$  задается следующими формулами:

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= \varepsilon_{ijk}\rho(M_k + K_k - g\gamma_k), \\ \{M_i, \gamma_j\} &= \varepsilon_{ijk}\rho\gamma_k, \\ \{\gamma_i, \gamma_j\} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_{ijk}$  — тензор Леви-Чивитта. При этом были введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{1 - d(\gamma, J^{-1}\gamma)}, \\ g &= d(\omega, \gamma) = \frac{d(J^{-1}M, \gamma)}{1 - d(\gamma, J^{-1}\gamma)}. \end{aligned}$$

Для указанной скобки Пуассона интегралы  $C$  и  $G$  являются функциями Казимира. Они расслаивают фазовое пространство  $\mathbb{R}^6(M, \gamma)$  на четырехмерные симплектические листы

$$\mathcal{M}_{c,a}^4 = \{C = c, G = a\}.$$

**Замечание.** Система шар Чаплыгина зависит от 7 параметров:  $d$ , трех компонент  $K_i$  ротора  $K = (K_1, K_2, K_3)$  и трех компонент  $I_i$  тензора инерции  $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ . Молекулы системы зависят от 9 параметров: к перечисленным выше семи добавляются значения интегралов  $C = c$  и  $H = h$ .

В дальнейшем будем считать, что ротор не имеет нулевых компонент, т.е.  $K_i \neq 0$ , а главные моменты инерции упорядочены  $0 < I_1 < I_2 < I_3$ . Параметр  $d$  не отрицателен. Отметим, что в случае  $d = 0$  система уравнений, задающая систему шар Чаплыгина с ротором, совпадает с уравнениями для случая Жуковского (см., например, [10]). В силу определения  $H$  и  $C$ , значения  $H$  всегда будут больше или равны 0.

Рассмотрим *отображение момента*, определяемое следующим образом:

$$H \times F : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, f).$$

Критическими точками называют точки, в которых ранг дифференциала отображения момента меньше двух. Образ критических точек отображения момента называют *бифуркационной диаграммой*. Обычно она состоит из набора гладких кривых, имеющих конечное число точек возврата, точек касания и точек трансверсального пересечения дуг (будем называть эти точки особыми для бифуркационной диаграммы).

Для задачи шар Чаплыгина с ротором на плоскости найдены координаты особых точек бифуркационной диаграммы системы и проверена невырожденность этих особенностей. Следующая теорема является одной из основных в диссертации.

**Теорема.** Для шара Чаплыгина с ротором невырожденность точек ранга 1 и 0, а также типы невырожденных особенностей системы полностью определяются бифуркационной диаграммой отображения момента. А именно, в случае, когда у ротора нет нулевых компонент, для всех допустимых значений перечисленных выше параметров системы выполнены следующие утверждения:

1. Все критические точки в прообразе неособых точек бифуркационных диаграмм являются невырожденными точками ранга 1. При этом, в системе присутствуют только два типа перестроек: эллиптические точки ранга 1 соответствуют перестройке типа A, а все гиперболические точки ранга 1 — перестройке типа B.
2. В прообразе любых особых точек бифуркационной диаграммы (то есть в прообразе точек возврата, точек касания и точек трансверсального пересечения дуг) лежит либо вырожденная точка ранга 1, либо точка ранга 0.
3. Все вырожденные точки ранга 1 лежат в прообразе точек возврата и точек касания дуг бифуркационных диаграмм.

4. Точки ранга 0 лежат в прообразе точек трансверсального пересечения дуг бифуркационных диаграмм.
5. Вырожденные точки ранга 0 лежат в прообразе точек, в которых одновременно пересекаются больше трех дуг бифуркационных диаграмм.
6. Все невырожденные точки ранга 0 лежат в прообразах точек трансверсального пересечения двух или трех дуг бифуркационных диаграмм.
7. В системе шар Чаплыгина с ротором из невырожденных особенностей ранга 0 присутствуют только точки типа центр–центр и центр–седло. Все особые точки типа центр–седло соответствуют прямому произведению атомов  $A$  и  $B$ .

Тип особых точек ранга 0 однозначно определяется видом бифуркационных диаграмм (и типом перестроек торов Лиувилля) в окрестности образа этой точки. Точнее, точка имеет тип центр–седло тогда и только тогда, когда в ее окрестности существует перестройка типа  $B$ .

Далее в диссертации автором найдены случаи грубой лиувиллевой эквивалентности системы Жуковского и системы шар Чаплыгина с ротором. Приведены примеры грубых молекул, которые присутствуют в обеих системах, а также найдена молекула, которая присутствует в системе шара Чаплыгина с ротором, но не встречается в случае Жуковского.

**Теорема.** 1) При значениях параметров системы “шар Чаплыгина с ротором” без нулевых компонент, таких, что  $c^2 \geq d^2 \langle J^{-1}K, J^{-1}K \rangle$ , каждому уровню  $H = \text{const}_1$  можно поставить в соответствие уровень  $H = \text{const}_2$  случая Жуковского так, что отвечающие этим уровням грубые молекулы совпадут.

2) Существуют такие значения параметров системы Чаплыгина при  $c^2 < d^2 \langle J^{-1}K, J^{-1}K \rangle$ , что для малых уровней энергии возникают молекулы, не встречающиеся в случае Жуковского.

Изоэнергетические 3-поверхности  $Q_{h,c}^3 = \{H = h, C = c, G = 1\}$  задаются двумя параметрами  $h$  и  $c$ , то есть значениями интегралов  $H$  и  $C$ , так как  $G = 1$ . Для описания топологического типа  $Q_{h,c}^3$  мы рассмотрим множество критических значений отображения  $H \times C : S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, c)$ , которое является объединением кривых, разбивающих плоскость  $\mathbb{R}^2(h, c)$  на области так, что для всех точек  $(h, c)$ , принадлежащих одной области, тип соответствующих изоэнергетических поверхностей  $Q_{h,c}^3$  будет одним и тем же. В дальнейшем такие кривые мы будем иногда называть *кривыми, разделяющими топологический тип изоэнергетических поверхностей*.

**Теорема.** Кривые на плоскости  $\mathbb{R}^2(h, c)$ , разделяющие области с различным топологическим типом изоэнергетических 3-поверхностей, состоят из следующих множеств:

1. набор кривых  $\tilde{\sigma}$

$$\begin{cases} c = \pm \sqrt{\left( \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{(J_i - \lambda)^2} \right) (d - \lambda)^2} \\ h = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^2} - d \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{(J_i - \lambda)^2} \right), \end{cases}$$

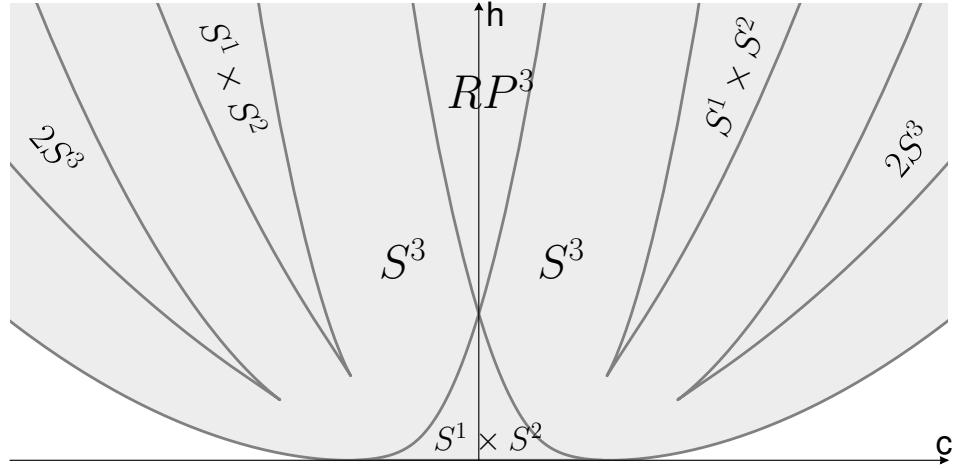
где  $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, d) \cup (d, J_1) \cup (J_1, J_2) \cup (J_2, J_3) \cup (J_3, \infty)$

2. отрезок  $\tilde{t}_0$

$$\left[ \left( 0; -\sqrt{\sum_{i=1}^3 K_i^2} \right), \left( 0; \sqrt{\sum_{i=1}^3 K_i^2} \right) \right]$$

Кривые  $\tilde{\sigma}$ , отрезок  $\tilde{t}_0$  и топологические типы изоэнергетических поверхностей для каждой области указаны на рисунке ниже.

Области с различными типами изоэнергетических поверхностей на плоскости  $\mathbb{R}^2(h, c)$ :



Чтобы описать все возможные виды меченых молекул  $W^*$  нужно определить, каким образом прямая  $h = \text{const}$  пересекает бифуркационную диаграмму.

**Теорема.** Кривые, разделяющие области с различными типами меченых молекул, состоят из объединения следующих множеств:

1. набор кривых  $\tilde{\sigma}$

$$\begin{cases} c = \pm \sqrt{\left( \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{(J_i - \lambda)^2} \right) (d - \lambda)^2} \\ h = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^2} - d \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{(J_i - \lambda)^2} \right), \end{cases}$$

где  $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, d) \cup (d, J_1) \cup (J_1, J_2) \cup (J_2, J_3) \cup (J_3, \infty)$

2. отрезок  $\tilde{t}_0$

$$\left[ \left( 0; -\sqrt{\sum_{i=1}^3 K_i^2} \right), \left( 0; \sqrt{\sum_{i=1}^3 K_i^2} \right) \right]$$

3. кривая  $\tilde{s}$

$$h = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{J_i} - \frac{c^2}{d} \right)$$

4. набор кривых  $\tilde{l}$

$$\begin{cases} c = \pm \sqrt{\left( \sum_{i=1}^3 \frac{J_i K_i^2}{(J_i - \lambda)^3} \right) \frac{(d - \lambda)^3}{d}} \\ h = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^2} - (d - \lambda) \sum_{i=1}^3 \frac{J_i K_i^2}{(J_i - \lambda)^3} \right), \end{cases}$$

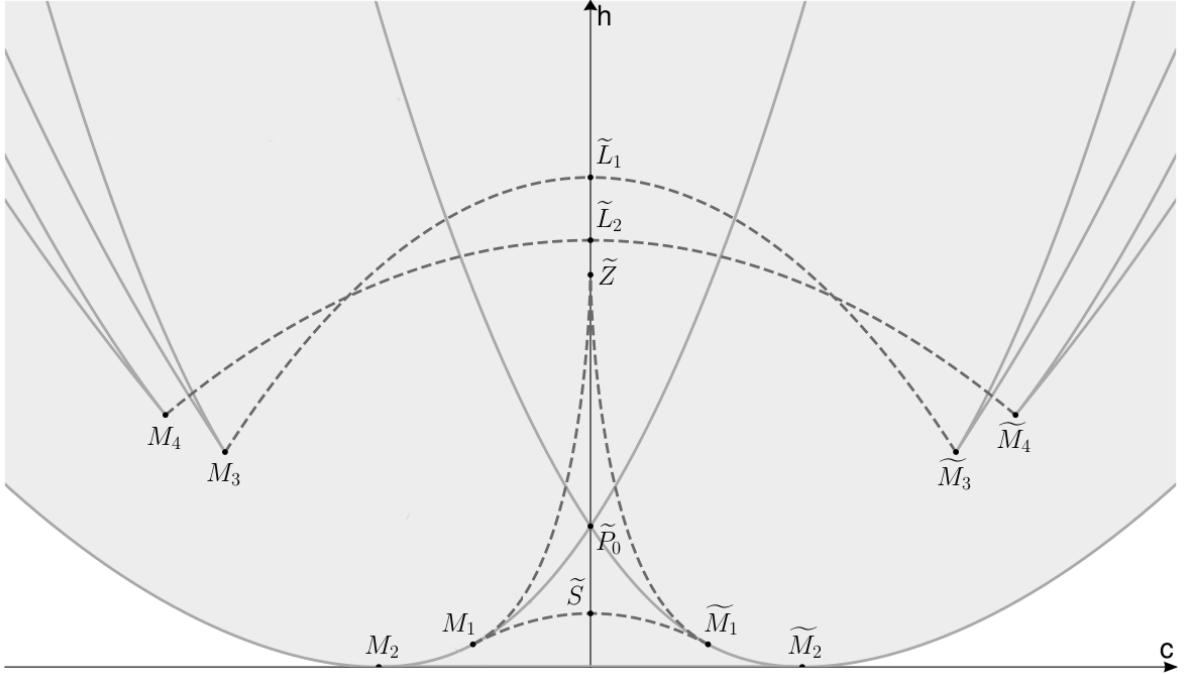
где  $\lambda$  изменяется на некоторых отрезках:  $[a_1, b_1] \subset (J_1, J_2)$  (эта часть кривой  $\tilde{l}$  соответствует точке  $L_1$  на бифуркационной диаграмме, см. рис. 2.1),  $[a_2, b_2] \subset (J_2, J_3)$  (эта часть кривой  $\tilde{l}$  соответствует точке  $L_2$  на бифуркационной диаграмме, см. рис. 2.1),  $[a_3, b_3] \subset (0, d)$  (эта часть кривой  $\tilde{l}$  соответствует точке  $L_3$  на бифуркационной диаграмме, см. рис. 2.1). При этом в концах отрезка  $[a_1, b_1]$  кривая  $\tilde{l}$  соответствует точкам возврата  $M_3$  и  $\tilde{M}_3$ , в концах отрезка  $[a_2, b_2]$  — точкам возврата  $M_4$  и  $\tilde{M}_4$ , а в концах отрезка  $[a_3, b_3]$  — точкам  $M_1$  и  $\tilde{M}_1$ .

Приведем пример набора кривых, разделяющих области с различными типами меченых молекул, полученный компьютерным анализом для значений параметров системы  $d = 1.79$ ,  $K = (3.34, 1.12, 2.82)$ ,  $I = (0.87, 2.43, 4.44)$ .

Отметим, что для точек  $\tilde{Z}, \tilde{S}, \tilde{P}_0$  порядок их координат на оси  $h$  зафиксирован для любых значений параметров системы шар Чаплыгина с ротором, а именно:  $H(\tilde{S}) < H(\tilde{P}_0) < H(\tilde{Z})$ . Это легко видно из значений координат данных точек. При этом точки  $\tilde{L}_1$  и  $\tilde{L}_2$  могут находиться на любых интервалах, на которые точки  $\tilde{Z}, \tilde{S}, \tilde{P}_0$  делят ось  $h > 0$

**Замечание.** В зависимости от взаимного расположения точек  $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \tilde{Z}, \tilde{S}, \tilde{P}_0$  относительно их координат на оси  $h$  можно получить как минимум 20 качественно различных диаграмм.

Пример: кривые, разделяющие типы молекул, при  $K = (3.34, 1.12, 2.82)$ ,  $I = (0.87, 2.43, 4.44)$ ,  $d = 1.79$ .



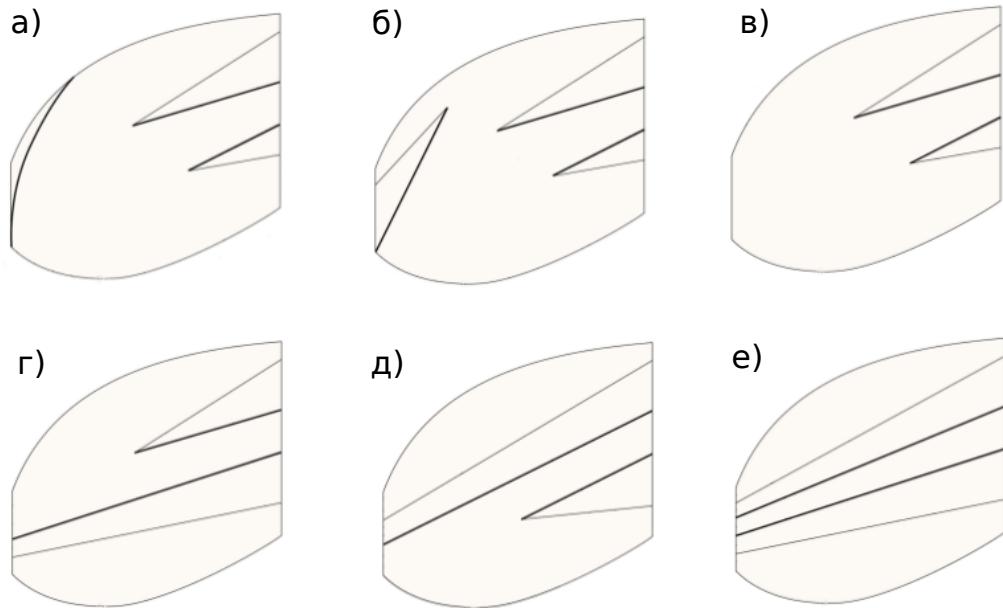
Исходя из формул бифуркационных диаграмм в теореме А.Ю. Москвина [7], единственныe точки, чье взаимное положение друг относительно друга на  $\mathbb{R}(h, n)$  мы не можем точно определить, это точки возврата  $L_1, L_2, L_3$ . Следовательно, если кроме указанных на рисунках ниже а) – е) могли бы существовать еще типы бифуркационных диаграмм, то это были бы только диаграммы ж) – л) с рисунков ниже. При этом в процессе многочисленных компьютерных экспериментов было замечено, что при увеличении значения параметра  $c$  от точки  $L_3$  стремится к прямой  $n = c^2$  со значительно большей скоростью, чем точки  $L_1$  и  $L_2$ . На основе данного наблюдения была сформулирована гипотеза:

На рисунках ниже приведены 6 бифуркационных диаграмм а) – е), обнаруженных в результате компьютерных экспериментов. Диаграммы типов ж) – л) не были обнаружены в результате компьютерных экспериментов.

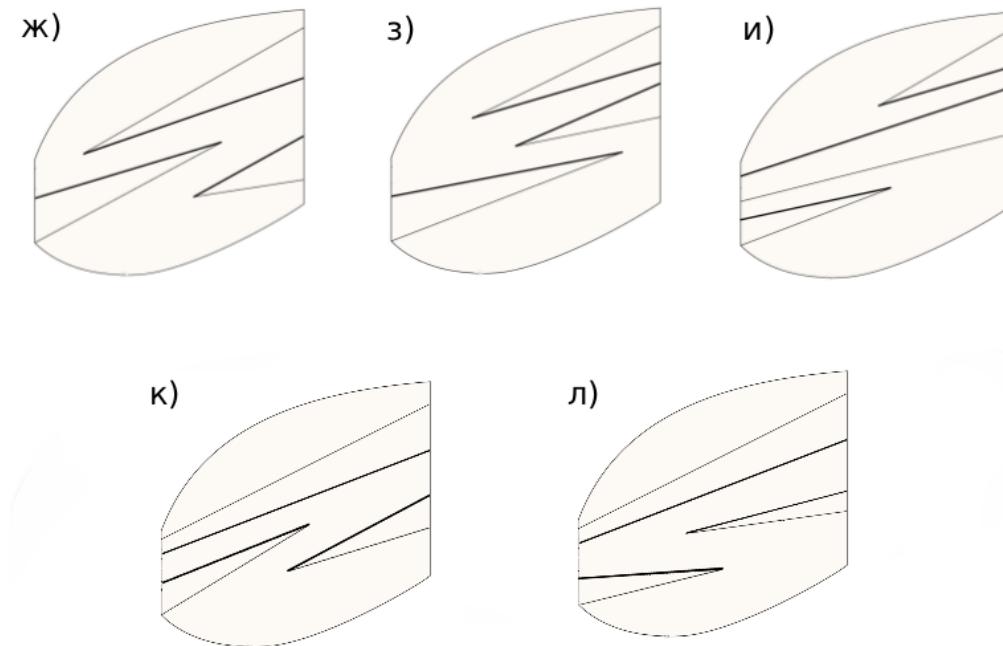
**Гипотеза.** Перечисленные на рисунке шесть типов обнаруженных в результате компьютерных экспериментов диаграмм а) – е) исчерпывают все возможные типы бифуркационных диаграмм для всех значений параметров общего положения. В том числе, ни при каких значениях параметров системы не реализуются бифуркационные диаграммы ж) – л).

В силу данной гипотезы в системе реализуются только 6 типов бифуркационных диаграмм. Для этих 6 типов нами получена классификация грубых молекул и многообразия  $Q^3$ .

Типы бифуркационных диаграмм, обнаруженные в результате компьютерных экспериментов.



Типы бифуркационных диаграмм, которые не были обнаружены в результате компьютерных экспериментов.



**Теорема.** 1. Для каждой из допустимых кривых для бифуркационных диаграмм из гипотезы (см рис. 2.9, 2.10 в пункте 2.7 второй главы диссертации) грубая молекула и топологический тип соответствующих трехмерных многообразий указаны в таблице 2.1 в пункте 2.7 второй главы диссертации.

2. Каждое из трехмерных многообразий, соответствующих допустимым кривым из пункта 1 данной теоремы реализуется как изоэнергетическая поверхность при некоторых значениях параметров  $K, I, d$ .
3. Если гипотеза верна, то существует ровно 27 различных областей с типами меченых молекул для всех значений девяти параметров системы шар Чаплыгина с ротором.

Отметим, что если и существуют бифуркационные диаграммы, не попадающие под классификацию типов диаграмм из гипотезы, то это диаграммы из списка пяти типов бифуркационных диаграмм, которые не были обнаружены в результате компьютерных экспериментов. Мы пока не знаем, существуют ли такие значения параметров системы, для которых эти диаграммы действительно реализуются. Но, тем не менее, мы вычислили молекулы и топологические типы трехмерных поверхностей для допустимых кривых 28 – 39 (см рис. 2.18 в пункте 2.7 второй главы диссертации) на этих бифуркационных диаграммах. Они указаны в таблице 2.2 в пункте 2.7 второй главы диссертации.

### Содержание главы 3

В третьей главе предложен способ явного задания ориентации базисных циклов и найдены матрицы склейки на круговых молекулах точек типа центр-центр, в зависимости от взаимного расположения дуг бифуркационной диаграммы. Этот способ помогает в дальнейшем быстро вычислять  $\varepsilon$ -метки некоторых молекул для различных интегрируемых гамильтоновых систем.

Разные авторы часто в своих работах подходят к выбор ориентации различными способами, а значение  $\varepsilon$ -метки напрямую зависит от выбора ориентации. Поэтому в данной работе предлагается введение единого подхода к выбору ориентации, согласующееся с теорией из книги [4].

Пусть две кривые на бифуркационной диаграмме, каждая из которых отвечает перестройкам типа  $A$ , пересекаются в точке, прообраз которой содержит точку ранга 0 типа центр-центр. Проведем допустимую кривую, соединяющую эти кривые на бифуркационной диаграмме, и рассмотрим тор  $T$ , лежащий в прообразе одной из ее точек. На этот тор приходят базисные циклы с торов, расположенных около двух описанных выше кривых.

Рассматривая пары циклов  $(\lambda_{\alpha_1}, \mu_{\alpha_1})$  и  $(\lambda_{\alpha_2}, \mu_{\alpha_2})$ , приходящие на тор  $T$ , как базисы в группе одномерных гомологий, мы получаем матрицу склейки:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_1} \\ \mu_{\alpha_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_2} \\ \mu_{\alpha_2} \end{pmatrix}.$$

На граничном торе полнотория в качестве первого базисного цикла  $\lambda$  берется меридиан полнотория, т.е. цикл, стягивающийся в точку внутри полнотория, а в качестве второго цикла  $\mu$  — произвольный цикл, дополняющий  $\lambda$  до базиса. Ориентация цикла  $\mu$  задается потоком  $sgrad H$ , после чего ориентация цикла  $\lambda$  однозначно определяется ориентацией на граничном торе. Зафиксируем правила, с помощью которых мы будем задавать ориентацию на граничном торе полнотория.

Пусть  $H$  — гамильтониан, а  $F$  — дополнительный интеграл гамильтоновой системы на симплектическом многообразии  $M^4$ . Рассмотрим отображение момента  $\mathcal{F} = H \times F : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, f)$ . Образ отображения момента в окрестности точки типа центр-центр на плоскости  $\mathbb{R}^2(h, f)$  выглядит как “угол”, ограниченный двумя дугами бифуркационной диаграммы. Прообраз кривой с концами на этих дугах является трехмерным многообразием  $Q_\gamma^3 = \{x \in M^4 | \mathcal{F}(x) \in \gamma\}$ , гомеоморфным трехмерной сфере  $S^3$ . При этом прообразами концов данной кривой являются критические окружности (на которых  $sgrad H$  и  $sgrad F$  зависят), а прообразами внутренних точек кривой — торы Лиувилля. Любой такой тор  $T^2$  разбивает  $Q_\gamma^3$  на два полнотория, т.е. является граничным тором для каждого из них. Ориентация на торе  $T^2$  зависит от того, для какого из двух полноторий мы рассматриваем его как граничный тор, и определяется следующим образом.

1. На симплектическом многообразии  $M^4$  ориентация задана формой  $\omega \wedge \omega$ .
2. Ориентация на многообразии  $Q_\gamma^3$  задается нормалью к  $Q_\gamma^3$  в  $M^4$ , т.е. тройка векторов  $e_1, e_2, e_3$  в касательном пространстве к  $Q_\gamma^3$  будет положительно ориентирована, если четверка векторов  $e_1, e_2, e_3, \bar{n}$  положительно ориентирована в  $M^4$ . При этом нормаль  $\bar{n}$  будем выбирать так, чтобы при отображении момента она переходила в нормаль к кривой  $\gamma$ , направленную во внешнюю сторону по отношению к треугольнику, образованному двумя дугами бифуркационной диаграммы и кривой  $\gamma$ .
3. Ориентация на торе  $T^2 \subset Q_\gamma^3$  задается нормалью  $\bar{N}$  к тору  $T^2$  в  $Q_\gamma^3$ , т.е. пара векторов  $e_1, e_2$  в касательном пространстве к  $T^2$  будет положительно ориентирована, если тройка векторов  $e_1, e_2, \bar{N}$  положительно ориентирована в  $Q_\gamma^3$ . При этом нормаль  $\bar{N}$  будем выбирать так, чтобы она была внешней нормалью для полнотория, граничным тором которого является рассматриваемый тор  $T^2$ .

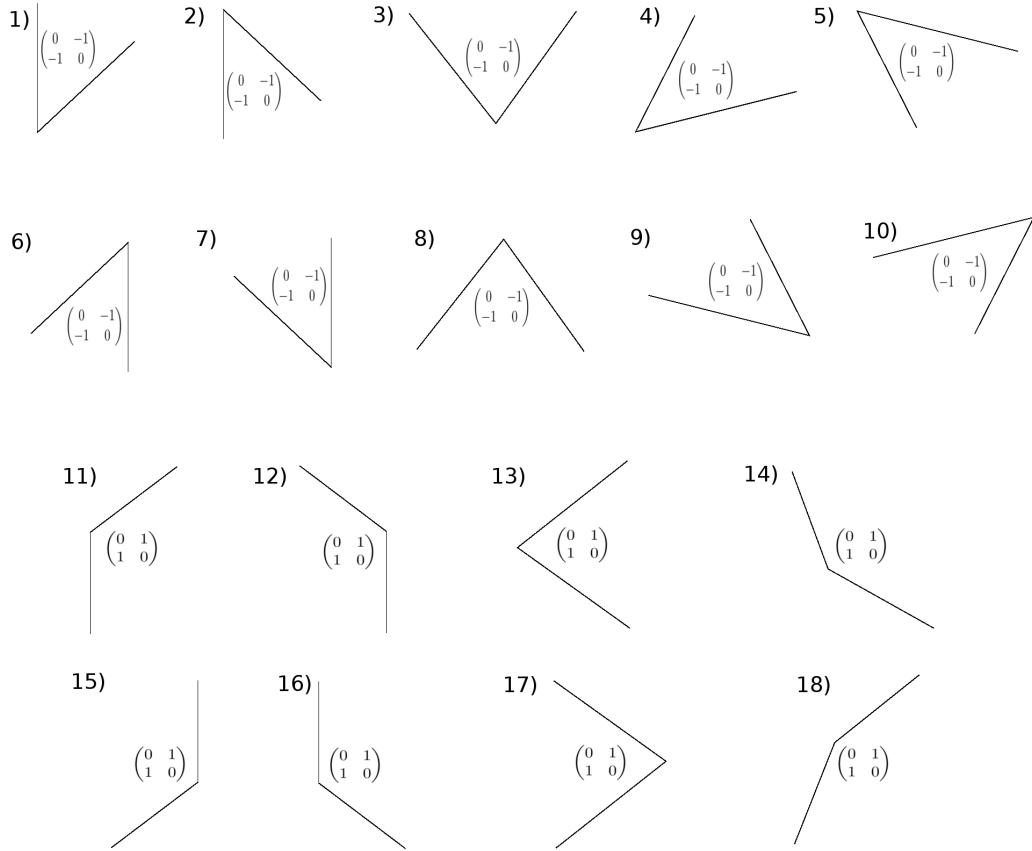
Итог: положительная ориентированность пары векторов  $e_1, e_2$  на торе  $T^2$  задается условием

$$\omega \wedge \omega(e_1, e_2, \bar{N}, \bar{n}) > 0.$$

**Теорема.** *Матрицы склейки для круговых молекул точки типа центр-центр в зависимости от взаимного расположения дуг бифуркационной диаграммы (при задании положительной*

ориентации условием  $\omega \wedge \omega(\dot{\lambda}, \dot{\mu}, \bar{N}, \bar{n}) > 0$  и подходящем выборе базисных циклов  $\lambda$  и  $\mu$ ) приведены на рисунке ниже. В частности,  $\varepsilon$ -метка равна  $-1$  для случаев 1–10 и  $1$  для случаев 11–18.

Матрицы склейки для точки центр-центр.



Вопрос о виде матриц склейки в случае точек типа центр-центр также поднимался в работе В.А. Кибкало [15]. В его работе ориентация базиса  $(u, v)$  в  $T_x T^2$  задавалась условием  $\omega \wedge \omega(\text{grad } H, N, u, v) > 0$ , где  $N$  - вектор внешней нормали 3-атома, лежащего в изоэнергетическом многообразии, т.е. множестве  $H = h$ .

В явном виде матрицы склейки на ребре круговой молекулы такой особой точки в работе [15] найдены не были. Результат В.А. Кибкало задает соотношения на допустимые базисы, применимые для задач, аналогичных решенной в работе [3]: выражение допустимых базисов для дуг бифуркационной диаграммы в терминах однозначно определенных  $\lambda$ -циклов всех этих дуг, т.е. элементов целочисленных решеток на плоскости.

## Благодарности

Автор выражает благодарность своим научным руководителям академику РАН проф. А.Т. Фоменко и д-ру физ.-мат. наук проф. А.А. Ошемкову за постановку задачи и ценные обсуж-

дения в ходе работы над диссертационной работой. Также автор благодарен всему коллективу кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ за вдохновляющую атмосферу и поддержку.

# Глава 1

## Основные понятия

### 1.1 Симплектические и пуассоновы многообразия

**Определение 1.1.1.** Скобкой Пуассона на многообразии  $M^n$  называется отображение  $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M^n) \times C^\infty(M^n) \rightarrow C^\infty(M^n)$ , удовлетворяющее следующим свойствам:

1. кососимметричность:  $\{f, g\} = -\{g, f\}$ ,
2. линейность:  $\{\lambda f + \mu g, h\} = \lambda\{f, h\} + \mu\{g, h\}$  для любых  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,
3. тождество Лейбница:  $\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$ ,
4. тождество Якоби:  $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ .

Учитывая свойства линейности, кососимметричности и тождество Лейбница, получаем, что любая скобка Пуассона на многообразии  $M^n$  может быть задана при помощи кососимметрического тензорного поля типа  $(2, 0)$  по формуле:

$$\{f, g\} = A^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}.$$

В любых локальных координатах  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  компоненты  $A^{ij}$  тензора Пуассона имеют вид  $A^{ij} = \{x^i, x^j\}$ . Исходя из тождества Якоби, получаем, что кососимметрическое тензорное поле  $A$  типа  $(2, 0)$  на многообразии является тензором Пуассона для некоторой скобки Пуассона тогда и только тогда, когда

$$A^{is} \frac{\partial A^{jk}}{\partial x^s} + A^{ks} \frac{\partial A^{ij}}{\partial x^s} + A^{js} \frac{\partial A^{ki}}{\partial x^s} = 0, \quad \forall i, j, k = 1, \dots, n.$$

Таким образом, для определения скобки Пуассона достаточно задать тензор Пуассона.

**Определение 1.1.2.** Симплектической структурой на гладком многообразии  $M$  называется дифференциальная 2-форма  $\omega$ , удовлетворяющая двум условиям:

1.  $\omega$  замкнута, то есть  $d\omega = 0$ .
2.  $\omega$  невырождена в каждой точке многообразия, то есть в любых локальных координатах  $\det \Omega(x) \neq 0$ , где  $\Omega(x) = (\omega_{ij}(x))$  — матрица формы  $\omega$ .

Многообразие, снабженное симплектической структурой, называется *симплектическим*. Из невырожденности формы  $\omega$  следует, что симплектические многообразия всегда четномерны.

Любое симплектическое многообразие является пуассоновым — тензор Пуассона при этом задается формулой  $A^{ij}\omega_{jk} = \delta_k^i$ . Можно показать, что тождество Якоби для тензора Пуассона  $A$  будет эквивалентно замкнутости формы  $\omega$ .

## 1.2 Интегрируемые гамильтоновы системы

Любая гладкая функция  $H$  на симплектическом многообразии  $(M^{2n}, \omega)$  задает на нем векторное поле  $v_H$ , называемое *гамильтоновым векторным полем* с гамильтонианом  $H$ , определяемое тождеством

$$\omega(u, v_H) = u(H),$$

где  $u$  — произвольный вектор касательного пространства, а  $u(H)$  — производная функции  $H$  вдоль вектора  $u$ . Векторное поле  $v_H$  также иногда называют *косым градиентом функции  $H$*  и обозначают  $\text{sgrad } H$ . В локальных координатах  $(x^1, \dots, x^{2n})$  компоненты этого векторного поля имеют вид:

$$(\text{sgrad } H)^i = \omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j},$$

где  $\omega^{ij}$  — элементы матрицы обратной к матрице  $\Omega = (\omega_{ij})$ .

Динамическую систему  $\dot{x} = \text{sgrad } H$  на многообразии  $(M^{2n}, \omega)$  называют *гамильтоновой системой* с  $n$  степенями свободы. Функцию  $H$  при этом называют ее *гамильтонианом*, а многообразие  $M^{2n}$  — ее *фазовым пространством*.

Функцию  $f$  на фазовом пространстве  $M$  называют *первым интегралом* гамильтоновой системы с гамильтонианом  $H$ , если она постоянна на всех траекториях системы. Другими словами, функция  $f$  является первым интегралом системы  $\dot{x} = v_H$  тогда и только тогда, когда  $v_H(f) = 0$  или, что эквивалентно,  $\{f, H\} = 0$ .

**Определение 1.2.1.** Гамильтонова система на симплектическом многообразии  $M^{2n}$  называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, если существует набор гладких функций  $f_1, f_2, \dots, f_n$  таких, что:

1.  $f_1, f_2, \dots, f_n$  — первые интегралы системы,
2. функции  $f_1, f_2, \dots, f_n$  функционально независимы на  $M^{2n}$ , то есть почти всюду на  $M^{2n}$  их дифференциалы линейно независимы:  $df_1 \wedge \dots \wedge df_n \neq 0$ ,

3.  $\{f_i, f_j\} = 0$  для любых  $i$  и  $j$ ,
4. векторные поля  $\text{sgrad } f_i$  полны для всех  $i$ , то есть естественный параметр на их интегральных траекториях определен на всей числовой прямой.

В этой работе вполне интегрируемые по Лиувиллю системы мы будем для краткости называть интегрируемыми системами. Часто в качестве первого интеграла  $f_1$  для интегрируемой системы берут гамильтониан  $H$ . В этом случае интегрируемую систему обозначают через  $(M^{2n}, \omega, H = f_1, \dots, f_n)$  или, для краткости, через  $(M^{2n}, \omega, f_1, \dots, f_n)$ .

**Определение 1.2.2.** Слоением Лиувилля, отвечающим интегрируемой системе, называется разбиение многообразия  $M^{2n}$  на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов  $f_1, f_2, \dots, f_n$ .

Для интегрируемой системы  $(M^{2n}, \omega, f_1, \dots, f_n)$  отображением момента называют отображение

$$\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n) : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

сопоставляющее точке  $x \in M^{2n}$  точку  $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n$ . Рассмотрим регулярную поверхность уровня отображения момента

$$T_\xi = \{x \in M^{2n} \mid f_i(x) = \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Регулярность означает, что дифференциалы  $df_i$  линейно независимы в каждой точке  $T_\xi$ .

Топология вполне интегрируемой гамильтоновой системы в окрестности совместной регулярной поверхности уровня ее первых интегралов полностью описывается теоремой Лиувилля.

**Теорема 1.1** (Лиувилля). Пусть на симплектическом многообразии  $(M^{2n}, \omega)$  задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система  $\dot{x} = \text{sgrad } H$ , и  $T_\xi$  — регулярная поверхность уровня отображения момента. Тогда

1. Люкая связная и компактная компонента поверхности уровня  $T_\xi$  является подмногообразием  $(M^{2n}, \omega)$ , диффеоморфным  $n$ -мерному тору  $T^n$ . Этот тор называется тором Лиувилля.
2. Слоение Лиувилля в некоторой окрестности  $U$  тора Лиувилля  $T^n$  тривиально, то есть диффеоморфно прямому произведению тора  $T^n$  на диск  $D^n$ .
3. В окрестности  $U = T^n \times D^n$  существует система координат  $s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ , называемых переменными действие-угол, со следующими свойствами:
  - (a)  $s_1, \dots, s_n$  — координаты на диске  $D^n$ ,  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — стандартные угловые координаты на торе  $T^n$ ,  $\varphi_i \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ .

$$(b) \omega = \sum d\varphi_i \wedge ds_i.$$

(c) Переменные действия  $s_i$  являются функциями от интегралов  $f_1, \dots, f_n$ .

(d) В переменных действие-угол гамильтонов поток  $\text{sgrad } H$  выпрямляется на каждом торе Лиувилля из окрестности  $U$ , то есть гамильтоновы уравнения принимают вид:

$$\dot{s}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \dots, s_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Это означает, что на каждом торе поток  $\text{sgrad } H$  задает условно периодическое движение, а траектории являются прямолинейными обмотками тора (рациональными или иррациональными).

Доказательство теоремы Лиувилля можно найти, например, в [4].

В теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем традиционно рассматривают несколько типов их изоморфизмов.

**Определение 1.2.3.** Две интегрируемые гамильтоновы системы  $(v_1, M_1)$  и  $(v_2, M_2)$  лиувиллево эквивалентны, если существует диффеоморфизм  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ , переводящий слои Лиувилля одной системы в слои другой.

Это отношение можно немного ослабить, тогда получаем понятие *грубой лиувиллевой эквивалентности*:

**Определение 1.2.4.** Две интегрируемые гамильтоновы системы  $(v_1, M_1)$  и  $(v_2, M_2)$  грубо лиувиллево эквивалентны, если существует гомеоморфизм между базами слоений Лиувилля, который локально (т.е. в окрестности каждой точки) поднимается до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля.

### 1.3 Понятие конформно-гамильтоновой системы

Задачи неголономной механики обычно нельзя представить в гамильтоновой форме, однако часто можно представить их в так называемом *конформно-гамильтоновом* виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mu(\mathbf{x}) \text{sgrad } H(\mathbf{x}),$$

где приводящий множитель  $\mu(x)$  — знакоопределенная на всем многообразии  $M^{2n}$  функция. Легко видеть, что траектории решений данного уравнения после замены времени

$$d\tau = \mu(x) dt,$$

совпадают с траекториями гамильтоновой системы  $\dot{\mathbf{x}} = \text{sgrad } H(\mathbf{x})$ .

Конформно-гамильтонову систему будем называть *интегрируемой*, если соответствующая ей гамильтонова система является интегрируемой.

## 1.4 Гамильтоновы системы на пуассоновых многообразиях

Любую скобку Пуассона можно рассматривать как отображение  $A : T^*M \rightarrow TM$ . Так же, как и для симплектического многообразия, любая гладкая функция  $H$  на пуассоновом многообразии  $(M, A)$  определяет на нем векторное поле  $v_H$ , называемое гамильтоновым векторным полем с гамильтонианом  $H$ , задаваемое формулой

$$v_H = A dH.$$

По аналогии с симплектическим случаем векторное поле  $v_H$  мы будем также называть косым градиентом функции  $H$  и обозначать через  $sgrad H$ .

Любое пуассоново многообразие естественным образом распадается на дизъюнктивное объединение подмножеств, называемых симплектическими листами, каждое из которых обладает естественной структурой симплектического многообразия. А именно, две точки принадлежат одному симплектическому листу тогда и только тогда, когда одну из них можно перевести в другую при помощи последовательных сдвигов вдоль гамильтоновых векторных полей. Каждый определенный таким образом лист является погруженным многообразием. Это следует из теоремы Дарбу-Вейнстейна о локальном устройстве пуассоновых многообразий (подробнее об этой теореме см., например, в [2]).

**Теорема 1.2** (Дарбу-Вейнстейн). *В окрестности произвольной точки  $x$  пуассонова многообразия  $M^n$  существуют локальные координаты*

$$p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m, s_1, \dots, s_k, \quad (2m + k = n),$$

в которых скобка Пуассона имеет вид

$$\{p_i, q_j\} = \delta_j^i, \quad \{s_i, s_j\} = \varphi_{ij}(s_1, \dots, s_k),$$

где все функции  $\varphi_{ij}$  обращаются в ноль в точке  $x$ . Все остальные попарные скобки координатных функций при этом равны нулю.

Видно, что в локальных координатах  $(p_i, q_j, s_k)$  из теоремы Дарбу-Вейнстейна, симплектический лист, проходящий через начало координат локально задается уравнениями  $s_k = 0$ . Симплектическая структура на нем имеет вид  $\omega = \sum_{i=1}^m dp_i \wedge dq_i$ . В общем случае пуассонова структура задаёт симплектическую структуру на каждом симплектическом листе по формуле

$$\omega(v_f, v_g) = \{f, g\}.$$

Таким образом мы можем рассматривать интегрируемые гамильтоновы системы на симплектических листах пуассонового многообразия.

На пуассоновом многообразии  $(M, A)$  две функции  $f$  и  $g$  называют *коммутирующими* или *находящимися в инволюции*, если  $\{f, g\} = 0$ . Функция  $f$  называется *функцией Казимира* скобки Пуассона, если она коммутирует с любой другой функцией на многообразии относительно этой скобки.

Многие интегрируемые гамильтоновы системы в физике и механике задаются следующим образом: рассматривается набор функций в инволюции, при этом часть из этих функций — это функции Казимира, регулярные поверхности уровня которых задают неособые симплектические листы скобки Пуассона, а оставшиеся функции задают интегрируемую гамильтонову систему на этих симплектических листах. В частности, такой вид имеет рассматриваемая в этой работе система (см. описание системы в пункте 3.1).

## 1.5 Невырожденные особенности отображения момента

Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему на  $(M^4, \omega)$  с гамильтонианом  $H$  и первым интегралом  $F$ . Отображением момента в данном случае является отображение

$$H \times F : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, f).$$

Напомним, что критическими точками называют точки, в которых ранг дифференциала отображения момента меньше двух. Образ критических точек отображения момента называют *бифуркационной диаграммой*. Иногда в литературе бифуркационную диаграмму называют диаграммой Смейла. Обычно бифуркационная диаграмма состоит из набора кривых и изолированных точек.

Для более наглядной визуализации структуры критических точек мы будем рассматривать отображение момента и двумерный комплекс  $K$ , точками которого являются отдельные компоненты связности поверхностей уровня отображения момента, то есть множеств  $(H \times F)^{-1}(y)$ , где точка  $y \in \mathbb{R}^2$  пробегает образ  $M^4$  при отображении момента.

**Определение 1.5.1.** (А.Т. Фоменко [6]) Комплекс  $K$  называется *бифуркационным комплексом* для интегрируемой системы.

Бифуркационный комплекс определяется векторным полем  $sgrad H$  и не зависит от выбора интегралов.

В этом разделе мы дадим определение одного особого класса критических точек, а именно, мы дадим определение невырожденных точек для интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Существует общее определение невырожденности особенностей отображения момента, которое можно найти в [4], но, для простоты, мы ограничимся случаем двух степеней свободы.

### 1.5.1 Невырожденные точки ранга ноль

Пусть  $\xi$  — точка ранга 0 для отображения момента интегрируемой гамильтоновой системы  $(M^4, \omega, H, F)$ , то есть

$$dH|_\xi = dF|_\xi = 0.$$

На  $T_\xi M^4$  можно корректно определить два линейных оператора

$$A_H := \Omega^{-1} d^2 H, \quad A_F := \Omega^{-1} d^2 F,$$

которые совпадают с линеаризациями векторных полей  $\text{sgrad } H$  и  $\text{sgrad } F$  в точке  $\xi$ . Оба оператора  $A_H$  и  $A_F$  удовлетворяют условию:

$$A^T \Omega + \Omega A = 0,$$

где  $\Omega$  — матрица формы  $\omega|_\xi$ , поэтому их можно рассматривать как элементы симплектической алгебры Ли  $sp(4, \mathbb{R})$ . Так как функции  $H$  и  $F$  коммутируют между собой, то линейные операторы  $A_H$  и  $A_F$  порождают в  $sp(4, \mathbb{R})$  некоторую коммутативную 2-мерную подалгебру  $K(H, F)$ .

**Определение 1.5.2.** Точка  $\xi$  ранга ноль отображения момента называется невырожденной, если подалгебра  $K(H, F)$  является картановской подалгеброй в  $sp(4, \mathbb{R})$ .

Картановские подалгебры симплектической алгебры Ли  $sp(2n, \mathbb{R})$  были классифицированы Вильямсоном (подробнее см. [4]). В двумерном случае существует эффективный способ проверки картановости подалгебры  $K(H, F)$ : коммутативная подалгебра  $sp(4, \mathbb{R})$  является картановской тогда и только тогда, когда она двумерна, и среди ее элементов найдется линейный оператор с попарно различными собственными значениями. При этом существует только 4 несопряженных между собой картановских подалгебр в  $sp(4, \mathbb{R})$ , и тип подалгебры полностью определяется спектром оператора общего положения. Таким образом, мы получаем следующий критерий невырожденности точек ранга ноль.

**Утверждение 1.5.1.** Точка  $\xi \in (M, \omega)$  ранга 0 для отображения момента интегрируемой гамильтоновой системы  $(M^4, \omega, H, F)$  является невырожденной тогда и только тогда, когда линеаризации  $A_H$  и  $A_F$  в точке  $\xi$  гамильтоновых векторных полей  $\text{sgrad } H$  и  $\text{sgrad } F$  обладают следующими свойствами:

1. операторы  $A_H$  и  $A_F$  линейно независимы,
2. существует линейная комбинация  $\lambda A_H + \mu A_F$ , которая имеет попарно различные ненулевые собственные значения.

При этом, невырожденная точка ранга 0 полностью определяется спектром любой линейной комбинации  $\lambda A_H + \mu A_F$  без нулевых собственных значений. А именно, тип точки следующим образом зависит от типа спектра:

- *центр-центр* – чисто мнимые корни:  $i\alpha, -i\alpha, i\beta, -i\beta$ ;
- *центр-седло* – два вещественных и два мнимых корня:  $-\alpha, \alpha, i\beta, -i\beta$ ;
- *седло-седло* – вещественные корни:  $-\alpha, \alpha, -\beta, \beta$ ;
- *фокус-фокус* – комплексные корни:  $\alpha - i\beta, \alpha + i\beta, -\alpha + i\beta, -\alpha - i\beta$ .

Слоение Лиувилля в окрестности невырожденной особой точки ранга 0 полностью определяется ее типом.

**Теорема 1.3** (Рюссман). *Пусть многообразие  $M^4$ , симплектическая структура  $\omega$  и функции  $H$  и  $F$  являются вещественно - аналитическими. Тогда в окрестности невырожденной особой точки ранга ноль  $\xi \in M^4$  всегда существуют канонические координаты  $(p_1, q_1, p_2, q_2)$ , в которых функции  $H$  и  $F$  одновременно приводятся к одному из следующих видов:*

1. *случай центр-центр:  $H = H(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2)$ ,  $F = F(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2)$ ,*
2. *случай центр-седло:  $H = H(p_1 q_1, p_2^2 + q_2^2)$ ,  $F = F(p_1 q_1, p_2^2 + q_2^2)$ ,*
3. *случай седло-седло:  $H = H(p_1 q_1, p_2 q_2)$ ,  $F = F(p_1 q_1, p_2 q_2)$ ,*
4. *случай фокус-фокус:  $H = H(p_1 q_1 + p_2 q_2, p_1 q_2 - p_2 q_1)$ ,  $F = F(p_1 q_1 + p_2 q_2, p_1 q_2 - p_2 q_1)$ .*

Подробнее о теореме Рюссмана и ее многомерных аналогах можно прочитать в [4].

Заметим, что невырожденные точки ранга 0 принципиально отличаются тем, как устроены бифуркационные диаграммы в окрестности образов этих точек. Схематично бифуркационные диаграммы для окрестностей из теоремы 1.3 изображены на рис. 1.1 (например, для точки седло – седло бифуркационная диаграмма состоит из двух трансверсально пересекающихся кривых):



Рис. 1.1: Бифуркационные диаграммы для невырожденных точек ранга 0.

### 1.5.2 Невырожденные точки ранга один

Рассмотрим теперь точку  $x$  ранга 1 интегрируемой гамильтоновой системы  $(M^4, \omega, H, F)$ . Тогда в этой точке дифференциалы  $dH$  и  $dF$  зависимы, то есть существуют числа  $\lambda$  и  $\mu$  т.ч.

$$\lambda dH(x) + \mu dF(x) = 0.$$

Здесь  $\lambda$  и  $\mu$  определены однозначно с точностью до пропорциональности. Пусть  $L$  — подпространство (в касательном пространстве к  $M^4$ ), порожденное линейно зависимыми векторами  $s\text{grad } H$ ,  $s\text{grad } F$ , а  $L'$  — трехмерное подпространство, ортогональное к  $L$  в смысле симплектической формы. Тогда  $L$  — изотропное подпространство, поэтому  $L \subset L'$  и фактор  $L'/L$  обладает естественной структурой 2-мерного линейного симплектического пространства  $\{\mathbb{R}^2, \omega_0\}$ . Обозначим через  $v$  векторное поле  $\lambda s\text{grad } H + \mu s\text{grad } F$ , обращающееся в ноль в точке  $x$ , а через  $A_v$  линеаризацию этого векторного поля в точке  $x$ . Можно показать, что оператор  $A_v$  сохраняет пространства  $L$  и  $L'$ , поэтому он порождает оператор  $\widehat{A}_v$  на  $L'/L$ , который является элементом  $\text{sp}(2, \mathbb{R})$ .

**Определение 1.5.3.** Точка  $x$  ранга 1 отображения момента называется *невырожденной* тогда и только тогда, когда у оператора  $\widehat{A}_v$  есть ненулевые собственные значения.

Так как функции  $H$  и  $F$  коммутируют, пространство  $L$  лежит в ядре оператора  $A_v$ , поэтому спектр оператора  $A_F$  отличается от спектра  $\widehat{A}_F$  добавлением нулей.

**Определение 1.5.4.** Невырожденная точка ранга 1 называется *эллиптической*, если спектр  $A_v$  содержит чисто мнимые собственные значения, и *гиперболической*, если спектр  $A_v$  имеет вещественные собственные значения.

В каждом компактном слое отображения момента невырожденные точки ранга 1 образуют набор критических окружностей. Все точки каждой из этих окружностей имеют один и тот же тип (эллиптический или гиперболический). Устройство слоения Лиувилля в окрестности особых слоев отображения момента, содержащих только невырожденные точки, подробно описано в книге Болсинова – Фоменко [4].

В данной работе встречаются только две невырожденные особенности ранга 1, соответствующие перестройки торов Лиувилля обозначаются буквами  $A$  и  $B$ . В особом слое для перестройки типа  $A$  содержится одна эллиптическая окружность, а для перестройки типа  $B$  — одна гиперболическая. Обе особенности распадаются в произведение регулярного слоения Лиувилля (то есть тривиального расслоения  $D^1 \times S^1$  на окружности) и невырожденной особенности на двумерном многообразии (то есть особенности, задаваемой функцией Морса на двумерном симплектическом многообразии  $(M^2, \omega)$ ). Перестройки  $A$  и  $B$  однозначно определяются этим свойством — хорошо известно, что существует только две морсовских особенности на 2-мерных многообразиях с одной особой точкой в слое. Обе они символически изображены на рис. 1.2.



Рис. 1.2: Морсовские особенности сложности 1.

## 1.6 Топологические инварианты интегрируемых систем с двумя степенями свободы

### 1.6.1 Изоэнергетические поверхности

Изоэнергетическими поверхностями называются трехмерные поверхности вида  $Q_h^3 = \{x \in M^4 | H(x) = h\}$ . Будем рассматривать только такие  $h$ , при которых  $Q_h^3$  компактна и  $dH \neq 0$  на  $Q_h^3$ . Тогда  $Q_h^3$  является гладким компактным подмногообразием в  $M^4$  и векторное поле  $v = \text{sgrad } H$  нигде не обращается в ноль.

**Определение 1.6.1.** Точку  $x \in Q^3$  будем называть критической, если векторы  $\text{sgrad } H$  и  $\text{sgrad } F$  в ней линейно зависимы.

Отметим, что сингулярные совместные поверхности уровня отображения момента — это в точности те поверхности, на которые попали критические точки. Теорема Лиувилля к этим поверхностям неприменима.

В случае динамических систем существует естественный аналог функции Морса, т.к. легко показать, что критические точки на  $Q^3$  не могут быть изолированы, а значит нет смысла предполагать, чтобы дополнительный интеграл  $F$  являлся функцией Морса.

**Определение 1.6.2.** Дополнительный интеграл  $F$  называется интегралом Ботта на данной изоэнергетической поверхности  $Q^3$ , если все его критические точки организованы в невырожденные критические подмногообразия.

Это означает, что множество критических точек является несвязным объединением некоторых гладких подмногообразий, причем каждое из них невырождено в следующем смысле. Второй дифференциал  $d^2F$  невырожден на подпространстве, трансверсальном к подмногообразию в каждой его точке. То есть, ограничение функции  $F$  на трансверсаль к подмногообразию является функцией Морса.

**Утверждение 1.6.1** ([4], том 1, глава 1). *Связные критические подмногообразия интеграла  $F$  на  $Q_h^3$  диффеоморфны либо окружности, либо тору, либо бутылке Кляйна.*

Далее в тексте будут рассматриваться только интегрируемые системы, для которых критические подмногообразия являются окружностями.

## 1.6.2 Структура критических точек на изоэнергетической поверхности

Дополнительный интеграл  $F$  определяет слоение Лиувилля на изоэнергетической поверхности  $Q^3$ . Если стянуть каждую компоненту связности совместной поверхности уровня в точку, то мы получим некоторый одномерный граф — базу слоения Лиувилля. Согласно теореме Лиувилля, над каждой точкой ребер такого графа “висит” один тор Лиувилля, а над вершинами — особые слои.

Будем рассматривать замкнутую особую поверхность  $Q^3$ . Оказывается, что в боттовском случае с точностью до Лиувиллевой эквивалентности существует лишь конечное число возможных перестроек (бифуркаций), если фиксировано количество критических окружностей на сингулярном слое.

**Определение 1.6.3** (А. Т. Фоменко). Класс лиувиллевой эквивалентности окрестности особого слоя слоения Лиувилля называется 3-атомом.

С конструктивной точки зрения, 3-атом — это трехмерное многообразие со структурой слоения Лиувилля. Это многообразие содержит ровно один сингулярный слой. Граница состоит из конечного числа торов. Количество критических окружностей на сингулярном слое называется *сложностью атома*. В книге А.В. Болсинова и А.Т. Фоменко приводится классификация возможных 3-атомов в зависимости от их сложности. В данной работе встречаются только атомы  $A$  и  $B$ .

Если каждой вершине графа, отвечающего слоению Лиувилля, сопоставить подходящий 3-атом, то получим *грубую молекулу* слоения Лиувилля. Грубая молекула несет информацию о слоении Лиувилля и позволяет локально восстановить структуру вблизи как регулярных, так и сингулярных слоев.

**Теорема 1.4** ([4], том 1, глава 3). *Две интегрируемые гамильтоновы системы  $(v_1, Q_1^3)$  и  $(v_2, Q_2^3)$  грубо лиувиллево эквивалентны в том и только том случае, когда их грубые молекулы совпадают.*

## 1.6.3 Матрицы склейки изоэнергетических поверхностей.

3-атомы описывают локальную структуру слоения Лиувилля в окрестности особого слоя. Для восстановления структуры слоения глобально на всем  $Q^3$  нужно знать гомеоморфизмы, по которым склеиваются границы 3-атомов. Если на граничных атомах указать по паре базисных циклов, то склеивающий гомеоморфизм будет задаваться целочисленной матрицей  $2 \times 2$  с определителем  $\pm 1$ . При этом базисные циклы можно выбрать различными способами.

Для каждого 3-атома можно определить по одному каноничному базисному циклу на каждом его граничном торе. При этом ориентация цикла однозначно задается гамильтоновым потоком системы. Выбрать второй базисный цикл таким же каноничным способом уже не получается.

Поэтому ограничиваются выбором сразу множества циклов, обладающих некоторыми общими свойствами. Вместе с первым базисным циклом они образуют *допустимую систему координат* на граничном торе 3-атома (подробнее см. [4]).

Инвариантами действия группы замен допустимых координат на множестве матриц склеек молекулы являются числовые метки  $r, \varepsilon$  и  $n$ . Они явно вычисляются по матрицам склеек. Метки  $r$  и  $\varepsilon$  расставляются на каждом ребре молекулы, а метка  $n$  ставится сразу на группе атомов, называемой *семьей*.

Числовые метки имеют наглядный топологический смысл. Метка  $r \in \{\mathbb{Q} \cap [0, 1) \cup \infty\}$  на ребре определяет беззнаковый индекс пересечения однозначно определенных базисных циклов бифуркаций, которые соединены соответствующим ребром. Метка  $\varepsilon \in \{1, -1\}$  говорит о согласованности или несогласованности ориентаций критических окружностей двух бифуркаций. Смысл метки  $n \in \mathbb{R}$  более сложный.

**Определение 1.6.4.** Грубая молекула  $W$  снабженная метками  $r_i, \varepsilon_i$  и  $n_i$  называется инвариантом Фоменко-Цишанга или меченой молекулой

**Теорема 1.5** (А.Т. Фоменко, Х. Цишанг, [4], том 1, глава 4). *Две интегрируемые гамильтоновы системы  $(v_1, Q_1^3)$  и  $(v_2, Q_2^3)$  лиувилево эквивалентны в том и только том случае, когда их меченные молекулы совпадают.*

# Глава 2

## Шар Чаплыгина с ротором на плоскости

### 2.1 Уравнения движения и первые интегралы

Рассмотрим задачу о качении уравновешенного динамически несимметричного шара по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. В таком случае скорость точки контакта равна нулю. Движение шара в проекциях на главные оси, связанные с шаром, описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{M} = M \times \omega, & M = J\omega - d(\gamma, \omega)\gamma, & J = I + dE, \\ \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, & d = mr^2 \geq 0, & E = \|\delta_{ij}\|. \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $\omega$  - вектор угловой скорости,  $\gamma$  - орт вертикали,  $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  - тензор инерции шара относительно его центра,  $m$  - масса шара,  $r$  - его радиус. Вектор  $M$  имеет смысл кинетического момента шара относительно точки контакта. С.А. Чаплыгин [12] показал, что данная система допускает четыре первых интеграла:

$$H = \frac{1}{2}(M, \omega), \quad N = (M, M), \quad C = (M, \gamma), \quad G = (\gamma, \gamma).$$

Если теперь закрепить внутрь шара ротор, то уравнения движения (2.1) примут вид:

$$\begin{cases} \dot{M} = (M + K) \times \omega, \\ \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $K$  – постоянный вектор момента ротора. При этом оставшиеся уравнения системы (2.2) останутся прежними. Система обладает аналогичными четырьмя интегралами:

$$H = \frac{1}{2}(M, \omega), \quad N = (M + K, M + K), \quad C = (M + K, \gamma), \quad G = (\gamma, \gamma).$$

Согласно [9], системы (2.1) и (2.2) являются конформно-гамильтоновыми (то есть вида  $\dot{\mathbf{x}} = \mu(\mathbf{x}) \text{sgrad } H(\mathbf{x})$ ) с гамильтонианом  $H$  и приводящим множителем

$$\mu(M, \gamma) = 1/\sqrt{1 - d(\gamma, J^{-1}\gamma)}$$

относительно скобки Пуассона, которая в координатах  $(M, \gamma)$  задается следующими формулами:

$$\begin{aligned}\{M_i, M_j\} &= \varepsilon_{ijk}\rho(M_k + K_k - g\gamma_k), \\ \{M_i, \gamma_j\} &= \varepsilon_{ijk}\rho\gamma_k, \\ \{\gamma_i, \gamma_j\} &= 0,\end{aligned}\tag{2.3}$$

где  $\varepsilon_{ijk}$  — тензор Леви-Чивитта. При этом были введены следующие обозначения:

$$\rho = \sqrt{1 - d(\gamma, J^{-1}\gamma)},\tag{2.4}$$

$$g = d(\omega, \gamma) = \frac{d(J^{-1}M, \gamma)}{1 - d(\gamma, J^{-1}\gamma)}.\tag{2.5}$$

Второе равенство в формуле (2.5) может быть получено из формулы  $M = J\omega - d(\gamma, \omega)\gamma$  системы (2.1), если домножить ее на  $J^{-1}$  и взять скалярное произведение с вектором  $\gamma$ . Используя полученные выражения для  $(\omega, \gamma)$  из (2.5), можно явно выписать вектор  $\omega$  и гамильтониан  $H$  в координатах  $(M, \gamma)$ :

$$\omega = J^{-1}M + gJ^{-1}\gamma,\tag{2.6}$$

$$H = \frac{1}{2}(M, J^{-1}M) + \frac{1}{2}g(M, J^{-1}\gamma).\tag{2.7}$$

После этого несложно проверить, что

$$\frac{\partial H}{\partial M} = \omega; \quad \frac{\partial H}{\partial \gamma} = g\omega.$$

Отметим, что в работе [7] А.Ю.Москвина была допущена ошибка при выписывании скобки Пуассона. В формулах (2.3) эта ошибка исправлена благодаря И.К. Козлову.

Для скобки Пуассона (2.3) интегралы  $C$  и  $G$  являются функциями Казимира. Они расслаивают фазовое пространство  $\mathbb{R}^6(M, \gamma)$  на четырехмерные симплектические листы

$$\mathcal{M}_{c,a}^4 = \{C = c, G = a\}.$$

**Замечание 1.** В дальнейшем в работе мы всегда будем считать, что  $G = 1$ , потому что при замене координат и параметров системы (2.2) по формулам

$$\widehat{M} = M, \quad \widehat{\gamma} = \alpha\gamma, \quad \widehat{d} = \frac{d}{\alpha^2},$$

где  $\alpha$  — произвольная константа, гамильтониан  $H$  и дополнительный интеграл  $N$  не меняются, а функции Казимира  $C$  и  $G$  умножаются на  $\alpha$  и  $\alpha^2$  соответственно. Многообразие  $\mathcal{M}_{c,1}^4$  мы будем обозначать через  $M_c^4$ .

**Замечание 2.** При замене координат  $(M, \gamma) \rightarrow (M, -\gamma)$  гамильтониан  $H$ , дополнительный интеграл  $N$  и интеграл  $G$  сохраняются, а интеграл  $C$  меняет знак. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что  $c \geq 0$ .

Введем обозначение для ограничений интегралов  $H$  и  $N$  на симплектическое многообразие  $\mathcal{M}_c^4$

$$\widehat{H} := H|_{\mathcal{M}_c^4}, \quad \widehat{N} := N|_{\mathcal{M}_c^4}.$$

В данной работе мы будем изучать особенности отображения момента

$$\widehat{H} \times \widehat{N} : \mathcal{M}_c^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, n). \quad (2.8)$$

Заметим, что система (2.1) при  $d = 0$  совпадает с уравнениями для случая Эйлера, а система (2.2) при  $d = 0$  – для случая Жуковского [10].

**Договоренности:**

1. В данной работе рассматривается случай различных собственных значений тензора  $I$ . При этом для простоты упорядочим главные моменты инерции  $0 < I_1 < I_2 < I_3$ .
2. Если не оговорено противное, будем считать, что компоненты ротора  $K = (K_1, K_2, K_3)$  не обращаются в ноль.

## 2.2 Бифуркационная диаграмма

Бифуркационные диаграммы для шара Чаплыгина с ротором были построены А.Ю. Москвиным в его работе [7].

**Теорема 2.1** (А.Ю. Москвин, [7]). *Бифуркационная диаграмма отображения момента (2.8) состоит из обединения*

1. набора кривых  $\sigma$

$$\begin{aligned} n(\lambda) &= \lambda^2 \left( \frac{K_1^2}{(J_1 - \lambda)^2} + \frac{K_2^2}{(J_2 - \lambda)^2} + \frac{K_3^2}{(J_3 - \lambda)^2} - \frac{c^2}{(d - \lambda)^2} \right) + c^2, \quad n > c^2, \\ 2h(\lambda) &= \frac{K_1^2 J_1}{(J_1 - \lambda)^2} + \frac{K_2^2 J_2}{(J_2 - \lambda)^2} + \frac{K_3^2 J_3}{(J_3 - \lambda)^2} - \frac{dc^2}{(d - \lambda)^2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

2. отрезка  $\sigma_0$  при  $c = 0$

$$n = 2dh - d(I^{-1}K, K), \quad n \in [0, d^2(I^{-1}K, I^{-1}K)],$$

3. луча  $\sigma_i$ , если  $K_i = 0$

$$n = 2J_i h - \frac{dc^2}{I_i} - \sum_{j \neq i} \frac{K_j^2}{I_j - I_i}, \quad n \geq c^2 + J_i^2 \left( \sum_{j \neq i} \frac{K_j^2}{(I_j - I_i)^2} - \frac{c^2}{I_i^2} \right),$$

4. отрезка  $\tau$  на прямой  $n = c^2$ .

5. точку  $T_0 = \{h = 0, n = (K, K)\}$  нпу  $c^2 \leq (K, K)$ .

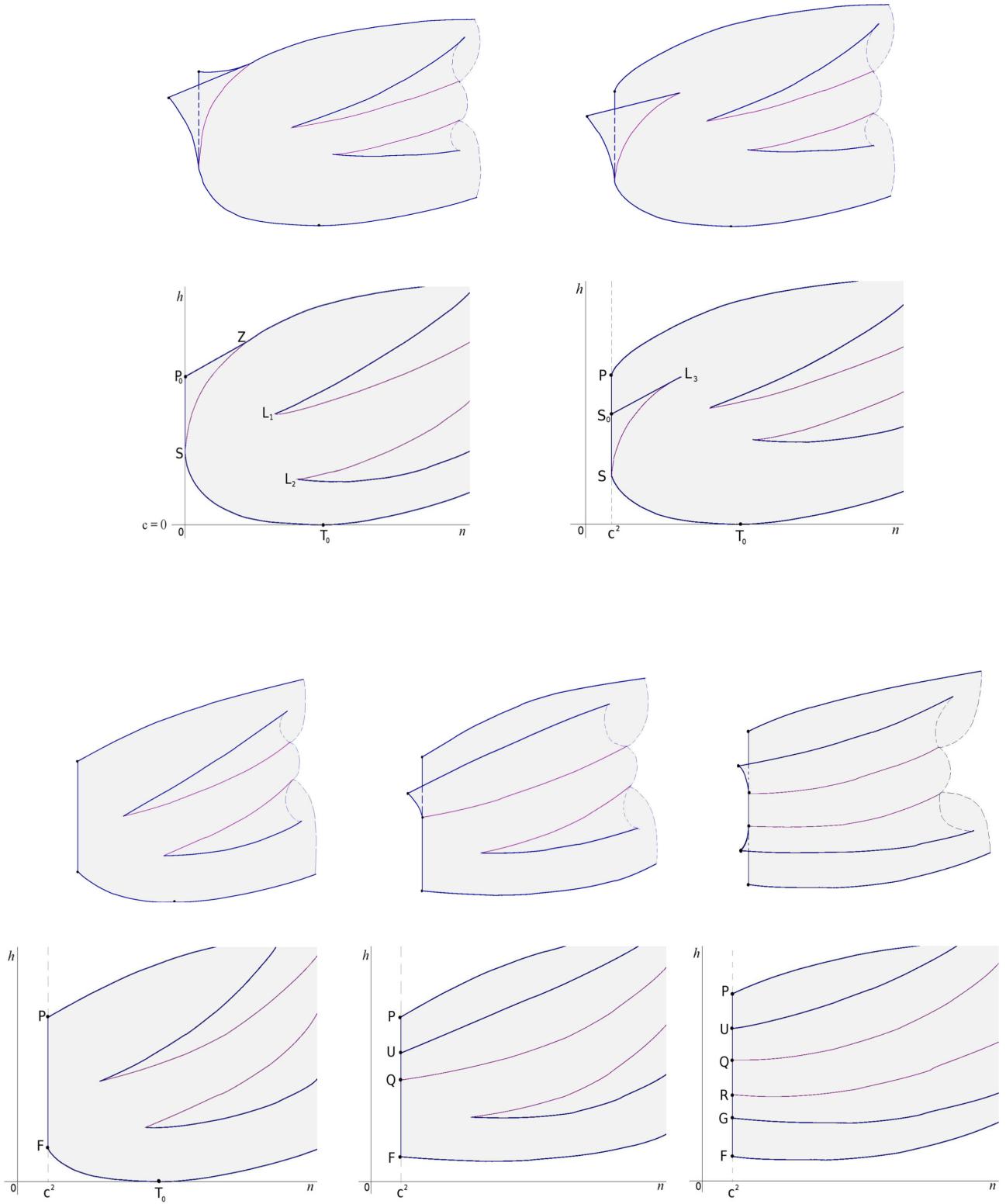


Рис. 2.1: Бифуркационные комплексы,  $K = (1, 1, 1)$ ,  $I = (1, 2, 3)$ ,  $d = 1$

Отметим, что для систем (2.1) и (2.2) выполнено неравенство  $n \geq c^2$ , поэтому на бифуркационной диаграмме будет присутствовать ограничительная прямая  $n = c^2$ . При этом  $\tau$  является наименьшим отрезком этой прямой, содержащим все точки пересечения кривых  $\sigma, \sigma_0, \sigma_i$  и точки  $T_0$  с прямой  $n = c^2$ .

Бифуркационные диаграммы системы (2.2) изображены на рис. 2.1. Верхний левый комплекс соответствует  $c = 0$ . Далее  $c$  увеличивается.

**Замечание 3.** Бифуркационные диаграммы (см. рис. 2.1) переходят друг в друга, когда  $c^2$  достигает значений  $n$ , соответствующих координатам точек возврата  $L_1, L_2, L_3$ .

**Замечание 4.** В зависимости от параметров системы точки  $L_1, L_2, L_3$  могут принимать различные геометрические положения на бифуркационных диаграммах. А именно при возрастании  $c$  первой столкнуться с прямой  $n = c^2$  может либо точка  $L_1$ , либо точка  $L_2$ . Также точка  $L_3$  относительно оси  $h$  может принимать 3 типа положений: ниже точки  $L_2$ , между точками  $L_1$  и  $L_2$ , выше точки  $L_1$ .

**Замечание 5.** На бифуркационных диаграммах (см. рис. 2.1) кривые располагаются следующим образом:

1. Отрезок  $\sigma_0$  соединяет точки  $P_0$  и  $Z$ .
2. Кривая  $\sigma, \lambda \in (-\infty, 0)$  соединяет точки  $S$  и  $T_0$  или точки  $F$  и  $T_0$ .
3. Кривая  $\sigma, \lambda \in (0, d)$  соединяет точки  $S$  и  $Z$  в случае  $c = 0$  или точки  $S$  и  $S_0$ , проходя при этом через точку  $L_3$ , когда  $c > 0$ .
4. Кривая  $\sigma, \lambda \in (d, J_1)$  уходит вправо из точки  $P$ , когда  $c > 0$ , или из точки  $Z$ , когда  $c = 0$ .
5. Кривая  $\sigma, \lambda \in (J_1, J_2)$  — это кривая с точкой возврата  $L_1$ .
6. Кривая  $\sigma, \lambda \in (J_2, J_3)$  — это кривая с точкой возврата  $L_2$ .
7. Кривая  $\sigma, \lambda \in (J_3, +\infty)$  уходит вправо из точки  $T_0$ , когда  $c^2 \leq (K, K)$ , или из точки  $F$ , когда  $c^2 > (K, K)$ .

Для удобства приведем следующий результат А.Ю. Москвина, поясняющий бифуркационную диаграмму.

**Утверждение 2.2.1.** Критические точки отображения момента (2.8) можно разбить на следующие 4 группы:

1. Критические точки ранга 0. Множество этих точек состоит из множества неподвижных точек векторного поля  $v$ , для которых  $\omega \neq 0$ , и двух точек  $\{M = 0, \gamma = \pm \frac{K}{|K|}\}$ , для которых  $\omega = 0, c = \pm |K|$  и  $h = 0$ . Для всех точек ранга 0 значение интеграла  $n = c^2$ .

2. Критические точки ранга 1, в которых  $\text{sgrad } H = 0$ . Совпадают с множеством неподвижных точек векторного поля  $v$ , т.ч.  $\omega = 0$ . Эти точки существуют только при  $c^2 < (K, K)$  и они образуют критическую окружность в прообразе точки  $T_0$  (то есть точки  $h = 0, n = (K, K)$ ).
3. Критические точки ранга 1, в которых  $\text{sgrad } N = 0$ . Для этих точек  $M + K = c\gamma$ , а вектор  $\omega$  не коллинеарен  $\gamma$  и  $M + K$ . Значение интеграла  $n = c^2$ , то есть точки лежат в прообразах дуги  $\tau$ .
4. Критические точки ранга 1, в которых  $\text{sgrad } N = 2\lambda \text{sgrad } H$ , где  $\lambda \neq 0$ . В этих точках вектора  $M = K$  и  $\gamma$  линейно независимы, и  $J\omega + K = \lambda\omega$ . Эти точки лежат в прообразе дуги  $\sigma$ , причем коэффициент пропорциональности  $\lambda$  совпадает с параметром кривых.

**Утверждение 2.2.2.** Пусть все компоненты ротора  $K_i \neq 0$ . Тогда для системы (2.2) все перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента (2.8) имеют тип  $A$  или  $B$ .

Дуги бифуркационных диаграмм, отвечающие перестройкам типа  $B$ , изображены на рис. 2.1 тонкими линиями, а дуги, отвечающие перестройкам типа  $A$  — жирными линиями.

В случае Жуковского  $d = 0$ , поэтому отрезок  $\sigma_0$  совпадает с точкой. Бифуркационная диаграмма для случая Жуковского, когда все  $K_i \neq 0$  была впервые построена Харламовым [11]. Там же произведен топологический анализ. А бифуркационная диаграмма в случае, когда ротор  $K = 0$  впервые получена Килиным [1].

Для проведения тонкого лиувиллевого анализа системы была проверена невырожденность особенностей и описано слоение Лиувилля в окрестности особых точек отображения момента (2.8).

В данной системе встречаются только две невырожденные особенности ранга 1, соответствующие перестройки торов Лиувилля обозначаются буквами  $A$  и  $B$ . В особом слое для перестройки типа  $A$  содержится одна эллиптическая окружность, а для перестройки типа  $B$  — одна гиперболическая.

На рисунке 2.2 ниже приведены 6 бифуркационных диаграмм, обнаруженных в результате компьютерных экспериментов.

Исходя из формул бифуркационных диаграмм в теореме 2.1, единственныe точки, чье взаимное положение друг относительно друга на  $\mathbb{R}(h, n)$  мы не можем точно определить, это точки возврата  $L_1, L_2, L_3$ . Следовательно, если кроме указанных на рисунке 2.2 могли бы существовать еще типы бифуркационных диаграмм, то это были бы только диаграммы с рисунка 2.3. При этом в процессе многочисленных компьютерных экспериментов было замечено, что при увеличении значения параметра  $c$  точка  $L_3$  стремится к прямой  $n = c^2$  со значительно большей скоростью, чем точки  $L_1$  и  $L_2$ . На основе данного наблюдения была сформулирована гипотеза:

Рис. 2.2: Типы бифуркационных диаграмм, обнаруженные в результате компьютерных экспериментов.

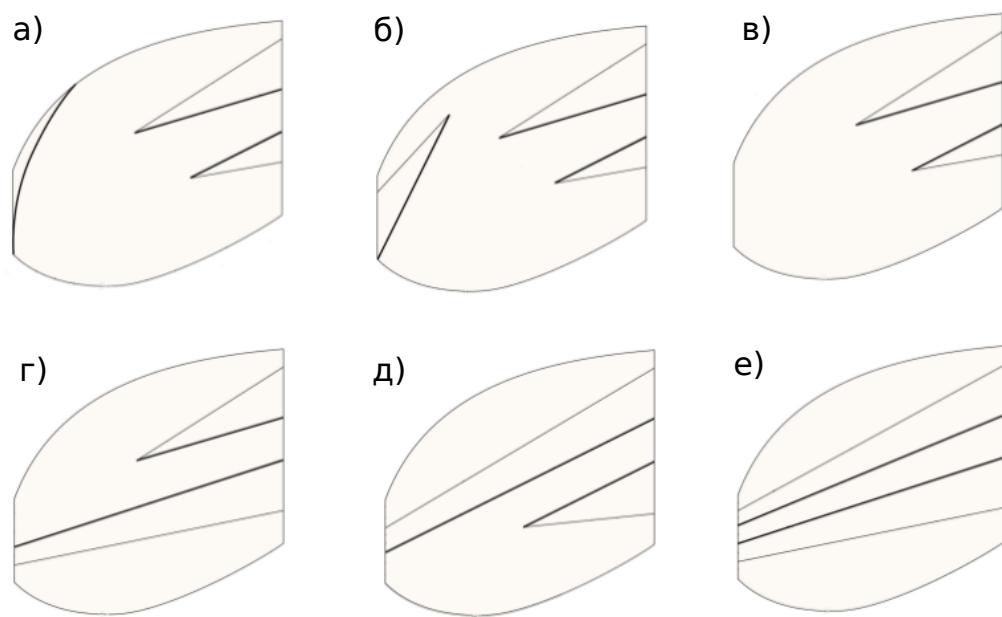
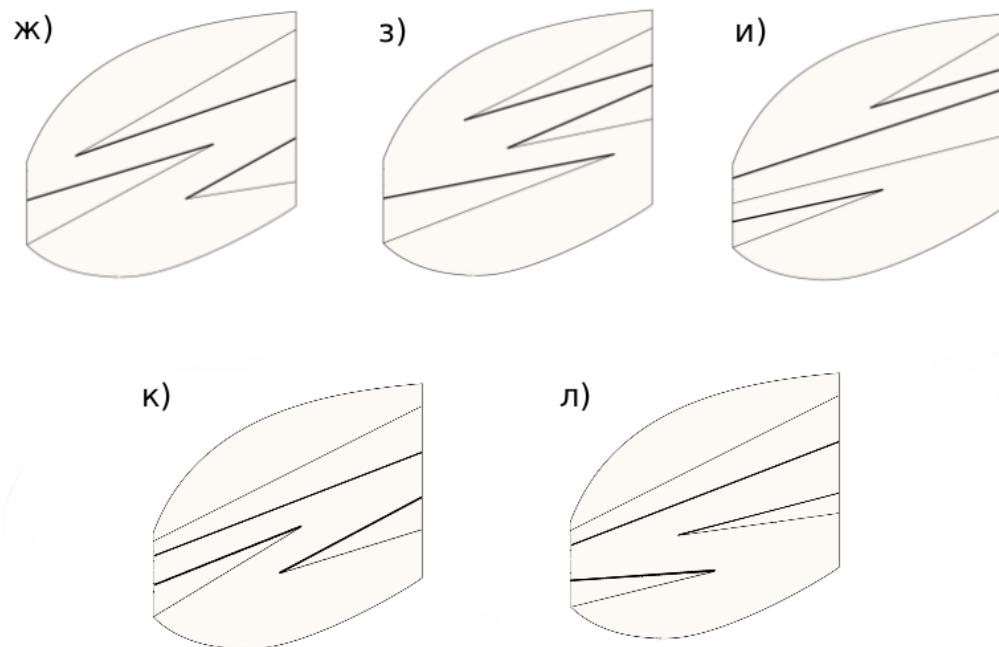


Рис. 2.3: Типы бифуркационных диаграмм, которые не были обнаружены в результате компьютерных экспериментов.



**Гипотеза 1.** Перечисленные на рисунке 2.2 шесть типов обнаруженных в результате компьютерных экспериментов диаграмм  $a) - e)$  исчерпывают все возможные типы бифуркационных диаграмм для всех значений параметров общего положения. В том числе, ни при каких значениях параметров системы не реализуются бифуркационные диаграммы  $ж) - л)$  на рисунке 2.3.

## 2.3 Определение типов особенностей ранга 0

Описание типов невырожденных особенностей ранга 0 приведено в следующей теореме.

**Теорема 2.2.** Пусть все компоненты ротора  $K$  не равны 0. Тогда образы точек ранга 0 отображения момента (2.8) — это следующие точки бифуркационной диаграммы:

1. Точки пересечения кривых  $\sigma$ , заданных уравнением (2.9), с прямой  $n = c^2$  при  $\lambda \neq 0$  и  $c \neq 0$ .
2. Точки  $\widehat{L}_1, \widehat{L}_2 = \{2h = \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^2} - \frac{dc^2}{(d - \lambda)^2}, n = c^2\}$  при  $c^2 = (d - \lambda)^2 \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{(J_i - \lambda)^2}$ .
3. Точка  $\widehat{S} = \{2h = \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{J_i} - \frac{c^2}{d}, n = c^2\}$  при  $c^2 = d^2 \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{J_i^2}$ .
4. Точка  $P_0 = \{h = \frac{1}{2}(I^{-1}K, K), n = c^2\}$ , если  $c = 0$ .
5. Точка  $\widehat{T}_0 = \{h = 0, n = c^2\}$ , если  $c^2 = (K, K)$ .

В прообразе точек  $\widehat{L}_1, \widehat{L}_2$  и  $\widehat{S}$  лежит по одной вырожденной точке ранга 0.

В прообразе точки  $P_0$  лежат две точки типа центр–центр.

В прообразе точки  $\widehat{T}_0$  лежит одна точка типа центр–центр.

В прообразе каждой точки из семейства 1 лежит одна невырожденная точка ранга 0. При этом

- Это точка типа центр–центр, если  $(\lambda - D) \det(J - \lambda E) n'_\lambda > 0$ .
- Это точка типа центр–седло, если  $(\lambda - D) \det(J - \lambda E) n'_\lambda < 0$ .
- Это вырожденная точка ранга 0, если  $(\lambda - D) \det(J - \lambda E) n'_\lambda = 0$ .

**Замечание 6.** 1. Образы всех точек ранга 0 лежат на прямой  $n = c^2$ .

2. Точка  $\widehat{S}$  — это точка пересечения кривых  $\sigma$  с прямой  $n = c^2$  в точке  $\lambda = 0$  в случае, когда она совпадает с точкой возврата  $L_3$ .

3. Точка  $P_0$  — это точка пересечения отрезков  $\sigma_0$  и  $\tau$ .
4. Точка  $\widehat{T}_0$  — это точка  $T_0$  в случае, когда она лежит на прямой  $n = c^2$ .
5. Точки  $\widehat{L}_1, \widehat{L}_2$  — это точки возврата  $L_1, L_2$  кривых  $\sigma$ , когда они лежат на прямой  $n = c^2$ .

**Следствие 1.** Для бифуркационных диаграмм на рис. 2.1 верно следующее:

1. В прообразе точек  $P, U, G, F, S_0$  лежит по одной точке типа центр–центр.
2. В прообразе точек  $Q$  и  $R$  лежит по одной точке типа центр–седло.
3. В прообразе точки  $P_0$  лежит две точки типа центр–центр.
4. В прообразе точек  $L_1, L_2, L_3, S$  лежат вырожденные точки ранга 1, которые образуют по одной критической окружности.
5. В прообразе точки  $T_0$  лежит одна невырожденная критическая окружность эллиптического типа.

Оставшаяся часть данного раздела посвящена доказательству теоремы 2.2.

### 2.3.1 Алгоритм проверки невырожденности особых точек ранга 0

Для доказательства теоремы 2.2 мы воспользуемся критерием невырожденности точек ранга 0 из утверждения 1.5.1. Однако, вначале нам придется немного обобщить этот критерий, поскольку он сформулирован для гамильтоновых систем на симплектических многообразиях, а шар Чаплыгина с ротором является конформно–гамильтоновой системой на пуассоновом многообразии.

Вначале мы перейдем от симплектических многообразий к пуассоновым. Заметим, что в пуассоновом случае необязательно рассматривать ограничения линеаризации косых градиентов интегралов на симплектические листы.

**Утверждение 2.3.1.** Пусть  $F$  — функция на пуассоновом многообразии  $(N^m, A)$ , а  $\widehat{F}$  — ограничение функции  $F$  на симплектический лист  $(M^{2n}, \omega) \subset (N^m, A)$ . Тогда спектр линеаризации поля  $sgrad F$  отличается от спектра линеаризации поля  $sgrad \widehat{F}$  в особой точке  $x \in (M^{2n}, \omega)$  добавлением  $\text{codim } M^{2n} = m - 2n$  нулей.

Это утверждение легко следует из следующего простого утверждения, которое, например, можно найти в работе И.К. Козлова [8].

**Утверждение 2.3.2.** Пусть в локальных координатах  $(p^1, \dots, p^k, q^1, \dots, q^k, z^1, \dots, z^m)$  в окрестности точки  $x_0$  скобка Пуассона имеет вид  $\sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial p^i} \wedge \frac{\partial}{\partial q^i}$ . Пусть  $x_0$  — критическая точка для гамильтонового векторного поля  $v_F$  с гамильтонианом  $F$ . Тогда линеаризация  $A_F$  гамильтонова векторного поля  $v_F$  имеет вид

$$A_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} & \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial z} \\ -\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} & -\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} & -\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial z} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Утверждение 2.3.3.** Пусть функции  $H$  и  $F$  на пуассоновом многообразии  $(N^m, A)$  задают интегрируемую гамильтонову систему на 4-мерном симплектическом листе  $(M^4, \omega) \subset (N^m, A)$ , и пусть в точке  $x_0 \in (M^4, \omega)$  векторные поля  $\text{sgrad } H$  и  $\text{sgrad } F$  обращаются в ноль. Тогда точка  $x_0$  является невырожденной точкой ранга 0 тогда и только тогда, когда линеаризации  $A_H$  и  $A_F$  векторных полей  $\text{sgrad } H$  и  $\text{sgrad } F$  удовлетворяют следующим условиям:

1. Существуют две нетривиальные линейные комбинации  $\lambda_1 A_H + \mu_1 A_F$  и  $\lambda_2 A_H + \mu_2 A_F$ , спектры которых не получаются друг из друга умножением на константу.
2. Существует линейная комбинация  $\lambda A_H + \mu A_F$ , у которой собственные значения различны и не равны нулю.

*Доказательство.* Из утверждения 2.3.1 следует, что пункт (2) эквивалентен пункту (2) утверждения 1.5.1. После этого для доказательства эквивалентности пунктов (1) достаточно заметить, что если ограничения операторов  $A_H$  и  $A_F$  линейно зависимы на  $TM^4$ , то спектры их различных комбинаций  $\lambda A_H + \mu A_F$  получаются друг из друга умножением на константу.  $\square$

Перейдем теперь от гамильтоновых систем к конформно-гамильтоновым. В этом случае вместо линеаризации косого градиента гамильтониана  $\text{sgrad } H$  можно рассматривать линеаризацию исходного векторного поля  $v = \mu \text{sgrad } H$ .

**Утверждение 2.3.4.** Пусть векторное поле  $v$  обращается в ноль в некоторой точке  $x \in M$ . Тогда для любой функции  $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}$  линеаризация векторного поля  $\mu \cdot v$  в точке  $x$  отличается от линеаризации векторного поля  $v$  в этой точке домножением на  $\mu$ .

*Доказательство.* Из того, что  $v|_x = 0$ , получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(\mu \cdot v^i) = \frac{\partial \mu}{\partial x^j} v^i + \mu \cdot \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \mu \cdot \frac{\partial v^i}{\partial x^j}.$$

$\square$

Используя утверждения 2.3.3 и 2.3.4 мы проверим невырожденность точек ранга 0 отображения момента (2.8). Для этого мы сделаем следующее:

1. В пункте **3.3.2** мы найдем все особые точки ранга 0 отображения момента (2.8).
2. Затем в пункте **3.3.3** мы найдем линеаризацию  $A_N$  векторного поля  $\text{sgrad } N$  в этих точках и вычислим его спектр.
3. В пункте **3.3.4** мы найдем спектр линеаризации  $A_v$  исходного векторного поля (2.2).
4. На основании спектров операторов  $A_v$  и  $A_N$  в пункте **3.3.5** мы установим невырожденность точек ранга 0 и определим их типы.

### 2.3.2 Координаты особых точек ранга 0

**Лемма 2.3.** Особые точки ранга 0 системы (2.2) с ротором  $K$  без нулевых компонент при отображении момента (2.8) имеют следующие координаты:

1. Если  $c \neq 0$  и  $c \neq \pm|K|$ :

$$\begin{cases} \gamma = \frac{\kappa}{c} \omega, \\ M = I\omega, \end{cases} \quad (2.10)$$

где вектор  $\omega$  и параметр  $\kappa$  находятся из условий:

$$\begin{cases} \omega = -(I - \kappa E)^{-1} K, \\ c^2 = \kappa^2 \left( \frac{K_1^2}{(I_1 - \kappa)^2} + \frac{K_2^2}{(I_2 - \kappa)^2} + \frac{K_3^2}{(I_3 - \kappa)^2} \right). \end{cases} \quad (2.11)$$

2. Если  $c = \pm|K|$ , то добавляется еще одна точка

$$\begin{cases} \gamma = \frac{K}{c}, \\ M = \omega = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

3. Если  $c = 0$ :

$$\begin{cases} \gamma = \pm \frac{\omega}{|\omega|}, \\ M = -K, \end{cases} \quad (2.13)$$

где  $\omega = -I^{-1}K$ .

*Доказательство.* В соответствии с первым пунктом утверждения 2.2.1 точки ранга 0 — это либо точки (2.12), либо неподвижные точки векторного поля  $v$  для некоторого  $\omega \neq 0$ . Для нахождения

особых точек ранга 0 выпишем систему уравнений, полученную из уравнений движения (2.2) и условий на функции Казимира  $C$  и  $G$ :

$$\begin{cases} (M + K) \times \omega = 0, \\ \gamma \times \omega = 0, \\ (M + K, \gamma) = c, \\ (\gamma, \gamma) = 1, \\ M = I\omega + d\gamma \times (\omega \times \gamma). \end{cases}$$

Решая ее, получаем

$$\begin{cases} \gamma = \pm \frac{\omega}{|\omega|}, \\ M = c\gamma - K, \\ M = I\omega. \end{cases} \quad (2.14)$$

Если  $c = 0$ , то мы сразу получаем уравнение (2.13). В случае  $c \neq 0$  введем обозначение  $\kappa := \pm \frac{c}{|\omega|}$ . Тем самым мы получаем уравнения (2.10), выражающие  $\gamma$  и  $M$  через  $\omega$ .

После этого уравнение на вектор  $\omega$  из (2.11) получаются после подстановки (2.10) в (2.14), а уравнение на  $\kappa$  из (2.11) получается из условия  $(\gamma, \gamma) = 1$ .  $\square$

**Следствие 2.** 1. Образы всех точек ранга 0 лежат на прямой  $n = c^2$ , более того, для всех точек ранга 0 выполняется равенство  $M + K = c\gamma$ .

2. Образ точки, заданной формулой (2.12), совпадает с точкой  $\widehat{T}_0$  из теоремы 2.2. Образы всех точек ранга 0 лежат на кривых  $\sigma$ , заданных формулой (2.9). При этом, так же как и для точек ранга 1 (см. пункт 4 утверждения 2.2.1) параметр  $\lambda$  находится из условий  $J\omega + K = \lambda\omega$ .

3. Для точек ранга 0 выполнено тождество

$$\lambda = \kappa + d$$

**Следствие 3.** Зависимость  $\kappa$  от  $c^2$  из (2.11) можно проиллюстрировать графиком  $c^2 = \widehat{f}(\kappa)$  на рисунке 2.4

$$\widehat{f}(\kappa) = \kappa^2 \left( \frac{K_1^2}{(I_1 - \kappa)^2} + \frac{K_2^2}{(I_2 - \kappa)^2} + \frac{K_3^2}{(I_3 - \kappa)^2} \right).$$

Таким образом, из уравнения шестой степени на  $\kappa$  получаем от 1 до 6 действительных решений. Каждому из них соответствует по одному значению  $\omega$ , что согласуется с видом бифуркационной диаграммы из теоремы 2.1. Отметим, что точка, заданная формулой (2.12), соответствует значению  $\kappa = \infty$  в формуле (2.11).

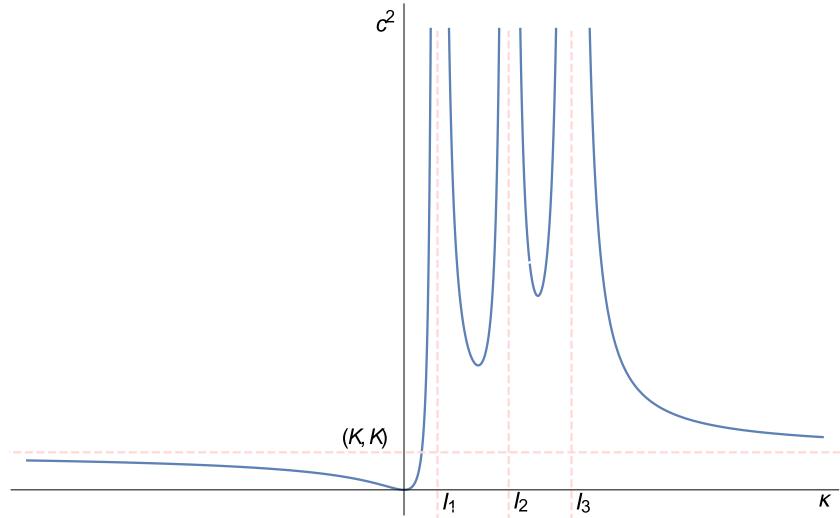


Рис. 2.4: Зависимость  $\kappa$  от  $c^2$

### 2.3.3 Оператор $A_N$ и его спектр

В этом разделе мы опишем оператор  $A_N$  и найдем его собственные значения и собственные вектора в особых точках ранга 0 отображения момента (2.8). Оператор  $A_N$  находится явно как линеаризация векторного поля

$$\text{sgrad } N = 2\rho (-g\gamma \times (M + K), \gamma \times (M + K))$$

с последующей подстановкой в него координат особых точек ранга 0 из леммы 2.3.

**Утверждение 2.3.5.** В особых точках ранга 0 из леммы 2.3 линеаризация гамильтонового векторного поля  $\text{sgrad } N$  имеет вид

$$A_N = 2\rho \begin{pmatrix} gQ & -cgQ \\ -Q & cQ \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_3 & -\gamma_2 \\ -\gamma_3 & 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Следствие 4.** Спектр оператора  $A_N$  состоит из четырех нулей и пары комплексно-сопряженных значений:  $\pm 2i(c + g)\rho$ .

Если  $c + g \neq 0$ , то ядро оператора  $A_N$  порождается векторами  $(0, \gamma)$ ,  $(\gamma, 0)$  и векторами вида  $(cR, R)$ , где  $R$  – вектор, ортогональный вектору  $\gamma$  (если  $c + g = 0$ , то ядро оператора  $A_N$  совпадает со всем пространством).

Паре комплексно-сопряженных собственных значений соответствует подпространство, порожденное векторами вида  $\mathbf{p} = (-gP, P)$ , где  $P$  – вектор, ортогональный вектору  $\gamma$ . При этом

$$A_N(A_N \mathbf{p}) = -4\rho^2(c + g)^2 \mathbf{p}.$$

### 2.3.4 Оператор $A_v$ и его спектр

В этом разделе мы рассмотрим линеаризацию векторного поля  $v$ , заданного формулой (2.2).

**Утверждение 2.3.6.** В координатах  $(M, \gamma)$  матрица  $A_v$  линеаризацию векторного поля  $v$  в особых точках ранга 0 из леммы 2.3 имеет вид:

$$A_v \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \left( \left[ c\gamma \times \left( \frac{\partial \omega}{\partial M} q - \frac{1}{\kappa} q \right) \right] + \left[ c\gamma \times \frac{\partial \omega}{\partial \gamma} p \right], \right. \\ \left. \left[ \gamma \times \frac{\partial \omega}{\partial M} q \right] + \left[ \gamma \times \left( \frac{\partial \omega}{\partial \gamma} p - \frac{c}{\kappa} p \right) \right] \right),$$

где  $\omega$  задана формулой (2.6).

В утверждении 2.3.6 точка в пространстве  $\mathbb{R}^6$  рассматривается как пара 3-мерных векторов  $(p, q)$ , а  $\frac{\partial \omega}{\partial M} = \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial M_j} \right)$  и  $\frac{\partial \omega}{\partial \gamma} = \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial \gamma_j} \right)$  — это  $3 \times 3$  матрицы, где  $i, j = 1, 2, 3$ .

Теперь найдем спектр оператора  $A_v$ .

**Утверждение 2.3.7.** Оператор  $A_v$  обладает спектром  $\sigma(A_v) = \{0, 0, \pm i|\omega|, \pm i\sqrt{\frac{p}{q}}\}$ , где  $p$  и  $q$  имеют следующий вид:

- Если  $c \neq 0$ , то

$$p = -c^4(-I_1 + \kappa)(-I_2 + \kappa)(-I_3 + \kappa) \left( \frac{I_1 K_1^2}{(I_1 - \kappa)^3} + \frac{I_2 K_2^2}{(I_2 - \kappa)^3} + \frac{I_3 K_3^2}{(I_3 - \kappa)^3} \right),$$

$$q = c^4 I_1 I_2 I_3 + c^2 d \kappa^2 \left( \frac{I_1(I_2 + I_3)K_1^2}{(I_1 - \kappa)^2} + \frac{I_2(I_1 + I_3)K_2^2}{(I_2 - \kappa)^2} + \frac{(I_1 + I_2)I_3 K_3^2}{(I_3 - \kappa)^2} \right) +$$

$$+ c^2 d^2 \kappa^2 \left( \frac{I_1 K_1^2}{(I_1 - \kappa)^2} + \frac{I_2 K_2^2}{(I_2 - \kappa)^2} + \frac{I_3 K_3^2}{(I_3 - \kappa)^2} \right).$$

- Если  $c = 0$ , то

$$p = I_1^2 I_2^2 I_3^2,$$

$$q = I_3(I_2^2 I_3 K_1^2 + I_1(I_1(I_2 + I_2^2 + I_3) + I_2(I_3 + I_2(1 + 3I_2 + I_3)))K_2^2) + I_1^2 I_2^2 K_3^2.$$

Напомним, что в соответствии с леммой (2.3),  $|\omega| = \pm \frac{c}{\kappa}$  если  $c \neq 0$ , и  $|\omega|^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{I_i^2}$  если  $c = 0$ .

*Доказательство.* Выпишем характеристический многочлен для оператора  $A_v$  из утверждения 2.3.6:

$$\chi(\lambda) = \lambda (\lambda^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \left( \lambda^3 + \frac{a_1}{a_2} \lambda + \frac{a_0}{a_2} \right),$$

где

$$a_0 = c^4(I_3^2(-K_2w_1 + (K_1 + 2I_1w_1)w_2)w_3 - I_1(K_1 + I_1w_1)(K_3w_2 - K_2w_3) + I_2^2w_2(K_3w_1 - (K_1 + 2I_1w_1 - 2I_3w_1)w_3) + I_2(2w_2(-I_3K_3w_1 - I_3^2w_1w_3 + I_1(K_1 + I_1w_1)w_3) + K_2(K_3w_1 - (K_1 + 2I_1w_1 - 2I_3w_1)w_3)) + I_3(-K_2K_3w_1 + w_2(K_1(K_3 - 2I_1w_3) + 2I_1w_1(K_3 - I_1w_3)))),$$

$$a_1 = c^2(c^2(I_1^3w_1^2 - I_1^2w_1(-2K_1 + (I_2 + I_3)w_1) + I_2^3w_2^2 + I_2^2w_2(2K_2 - I_3w_2) + I_3(K_3 + I_3w_3)^2 + I_2(K_2^2 - I_3K_2w_2 - I_3w_3(K_3 + I_3w_3)) + I_1(K_1^2 - (I_2 + I_3)K_1w_1 - I_2^2w_2^2 - I_3w_3(K_3 + I_3w_3) + I_2(-K_2w_2 + I_3(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2))) + d(K_1^2w_2^2 + 3I_1K_1w_1w_2^2 - 3I_2K_1w_1w_2^2 + 2I_1^2w_1^2w_2^2 - 4I_1I_2w_1^2w_2^2 + 2I_2^2w_1^2w_2^2 + K_3^2(w_1^2 + w_2^2) + K_3(-2K_1w_1 - 3I_1w_1^2 + 3I_3w_1^2 - 3I_2w_2^2 + 3I_3w_2^2)w_3 + K_1^2w_3^2 + 3I_1K_1w_1w_3^2 - 3I_3K_1w_1w_3^2 + 2I_1^2w_1^2w_3^2 - 4I_1I_3w_1^2w_3^2 + 2I_3^2w_1^2w_3^2 + 2I_2^2w_2^2w_3^2 - 4I_2I_3w_2^2w_3^2 + 2I_3^2w_2^2w_3^2 + K_2^2(w_1^2 + w_3^2) - K_2w_2(2K_1w_1 + 3I_1w_1^2 - 3I_2w_1^2 + 2K_3w_3 - 3I_2w_2^2 + 3I_3w_2^2))\kappa^2),$$

$$a_2 = c^4I_1I_2I_3 + c^2d(I_2I_3(w_2^2 + w_3^2) + I_1(I_2(w_1^2 + w_2^2) + I_3(w_1^2 + w_3^2)))\kappa^2 + d^2(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)(I_1w_1^2 + I_2w_2^2 + I_3w_3^2)\kappa^4.$$

Многочлен  $\chi(\lambda)$  имеет три очевидных корня:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2} = \pm i|\omega|$ .

Теперь подставим значения компонент вектора  $\omega = \{w_1, w_2, w_3\}$  из леммы 2.3. А именно, если  $c \neq 0$ , то:

$$w_1 = -\frac{K_1}{I_1 - \kappa}, \quad w_2 = -\frac{K_2}{I_2 - \kappa}, \quad w_3 = -\frac{K_3}{I_3 - \kappa},$$

если же  $c = 0$ , то  $\omega = -I^{-1}K$ .

Несложно проверить, что многочлен  $\left(\lambda^3 + \frac{a_1}{a_2}\lambda + \frac{a_0}{a_2}\right)$  после подстановки вектора  $\omega$  перейдет в многочлен  $\left(\lambda^3 + \frac{p}{q}\lambda\right)$ , где  $p$  и  $q$  указаны в условии доказываемого утверждения.

Значит, есть еще корни  $\lambda_4 = 0$ ,  $\lambda_{5,6} = \pm i\sqrt{\frac{p}{q}}$ . Таким образом, оператор  $A_v$  обладает спектром

$$\sigma(A_v) = \{0, 0, \pm i|\omega|, \pm i\sqrt{\frac{p}{q}}\}.$$

Что и требовалось доказать.  $\square$

### 2.3.5 Определение типов особых точек

Теперь, когда мы нашли координаты особых точек и спектры операторов  $A_v$  и  $A_N$ , приступим к непосредственному доказательству теоремы 2.2, которое будет основываться на утверждении 2.3.3.

#### 1. Вырожденность точек $\widehat{L}_1, \widehat{L}_2$ .

Прежде всего докажем, что точки  $\widehat{L}_1, \widehat{L}_2$  характеризуются свойством  $p = 0$ . В точках возврата кривых  $\sigma, \lambda \in (J_1, J_2)$ ,  $\sigma, \lambda \in (0, d)$  и  $\sigma, \lambda \in (J_2, J_3)$  из (2.9) выполняется условие  $n'_\lambda = 0$ . Так как нас интересует случай таких  $c$ , когда точки  $L_1, L_2, L_3$  лежат на прямой

$n = c^2$ , то, учитывая уравнения (2.9), точки возврата удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{(J_i - \lambda)^2} = \frac{c^2}{(\lambda - d)^2}, \\ \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{(J_i - \lambda)^3} = -\frac{c^2}{(\lambda - d)^3}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Заметим, что последний сомножитель из  $p$  можно записать в виде

$$\frac{I_1 K_1^2}{(I_1 - \kappa)^3} + \frac{I_2 K_2^2}{(I_2 - \kappa)^3} + \frac{I_3 K_3^2}{(I_3 - \kappa)^3} = \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{(I_i - \kappa)^2} + \kappa \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{(I_i - \kappa)^3}.$$

Из системы (2.15) (учитывая, что  $\lambda = d + \kappa$ ,  $J = I + dE$ ), получаем, что  $p = 0$ . Как следствие, в точках  $\widehat{L}_1, \widehat{L}_2$  спектр оператора  $A_v$  равен  $\sigma(A_v) = \{0, 0, 0, 0, \pm \frac{c}{\kappa}i\}$ . Заметим, что обратное тоже верно, а именно, из уравнений  $p = 0$  и  $n = c^2$  вытекает система (2.15).

Вырожденность данных точек следует из того, что они лежат в прообразах точек, в которых одновременно пересекаются четыре дуги бифуркационной диаграммы, что противоречит теореме 1.3 о невырожденных особенностях.

2. *Невырожденность точки  $\widehat{T}_0$ .* Для проверки невырожденности точек используем утверждение 2.3.3. Точки в прообразе  $T_0$  неподвижные, то есть  $\text{sgrad } H = 0$ . Согласно утверждению 2.3.4 достаточно изучить спектр  $A_v$ . В данном случае, используя утверждение 2.3.6,

$$A_v = \frac{c}{\varphi} \begin{pmatrix} cW & 0 \\ W & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } W = \{W_1, W_2, W_3\} \quad \text{и}$$

$$\varphi = (c^2 I_1 I_2 + d I_1 K_1^2 + d I_2 K_2^2)(c^2 I_3 + d(K_1^2 + K_2^2)) + d(c^2(I_1 + I_2)I_3 + d(I_1 + I_3)K_1^2 + d(I_2 + I_3)K_2^2)K_3^2 + d^2 I_3 K_3^4,$$

при этом

$$W_1 = \begin{pmatrix} d(I_2 - I_3)K_1 K_2 K_3 \\ K_3(c^2 I_2 I_3 + d(I_2 K_2^2 + I_3(K_1^2 + K_3^2))) \\ -K_2(c^2 I_2 I_3 + d I_2(K_1^2 + K_2^2) + d I_3 K_3^2) \end{pmatrix}$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} -K_3(c^2 I_1 I_3 + d(I_1 K_1^2 + I_3(K_2^2 + K_3^2))) \\ d(-I_1 + I_3)K_1 K_2 K_3 \\ K_1(c^2 I_1 I_3 + d I_1(K_1^2 + K_2^2) + d I_3 K_3^2) \end{pmatrix}$$

$$W_3 = \begin{pmatrix} K_2(c^2 I_1 I_2 + d(I_1 K_1^2 + I_2(K_2^2 + K_3^2))) \\ -K_1(c^2 I_1 I_2 + d(I_2 K_2^2 + I_1(K_1^2 + K_3^2))) \\ d(I_1 - I_2)K_1 K_2 K_3 \end{pmatrix}$$

Заметим, что  $\varphi > 0$ . Таким образом, спектр  $A_v$  состоит из четырех нулей и двух чисто мнимых ненулевых значений  $\lambda_{1,2}$ , отличных от собственных значений оператора  $A_N$ :

$$\lambda_{1,2} = \pm c^2 i \sqrt{\frac{(I_1 K_1^2 + I_2 K_2^2 + I_3 K_3^2)}{\varphi}}.$$

В данном случае, ядро оператора  $A_v$  порождается векторами  $(0, \gamma)$ ,  $(\gamma, 0)$  и векторами вида  $(-gP, P)$ , где  $P$  — вектор, ортогональный вектору  $\gamma$ . Паре ненулевых собственных значений  $\lambda_{1,2}$  соответствует подпространство, порожденное векторами вида  $(cR, R)$ , где  $R$  — вектор, ортогональный вектору  $\gamma$ . При этом

$$A_v(A_v(cR, R)) = \lambda_{1,2}^2(cR, R)$$

Из следствия 4 видим, что единственным ненулевым парам собственных значений операторов  $A_v$  и  $A_N$  соответствуют различные собственные вектора. Значит по утверждению 2.3.3 получаем, что точка  $\widehat{T}_0$  невырождена и имеет тип центр – центр.

3. *Условия невырожденности точек.* Из Утверждения 2.3.7 оператор  $A_v$  обладает спектром

$$\sigma(A_v) = \{0, 0, \pm i|\omega|, \pm i\sqrt{\frac{p}{q}}\}.$$

Он может иметь менее 4 ненулевых собственных значений только в случаях, разобранных выше в пунктах 1 и 2, а именно:

- если  $|\omega| = 0$ , это условие отвечает точке  $\widehat{T}_0$ .
- если  $p = 0$ , это условие отвечает точкам  $\widehat{L}_1, \widehat{L}_2$ .

Из следствия 4 оператор  $A_N$  обладает спектром

$$\sigma(A_N) = \{0, 0, 0, 0, \pm 2i(c+g)\rho\}.$$

Из леммы 2.3 и вида  $g = d(\omega, \gamma)$  мы можем сделать вывод, что в случае  $c \neq 0$  для точек ранга 0, определяемых формулами (2.10) и (2.11), выполняется условие  $c+g = \frac{c}{\kappa}(d+\kappa)$ , а в случае  $c = 0$  для точек ранга 0, определяемых формулами (2.13), выполняется условие  $g = d$ .

Таким образом, спектр  $A_N$  нулевой, то есть  $c+g = 0$  в следующих случаях:

- если  $c \neq 0$ ,  $\kappa = -d$ , это условие отвечает точке  $\widehat{S}$  (из тривиальности спектра  $A_N$  и Утверждения 2.3.3 следует ее вырожденность).
- если  $c = 0$ ,  $d = 0$ , этот случай отвечает системе Жуковского.

Заметим, что для доказательства невырожденности точек достаточно доказать, что операторы  $A_v$  и  $A_N$  имеют 4 и 2 ненулевых собственных значения соответственно. Действительно, пункт (1) утверждения 2.3.3 будет выполнен, т.к. спектры операторов  $A_v$  и  $A_N$ , имеющие разное число ненулевых значений, нельзя перевести друг в друга умножением на константу. При этом не нужно проверять, что собственные значения оператора  $A_v$  различны — пункт (2) утверждения 2.3.3 будет выполнен, т.к. в рассматриваемом случае спектр некоторой линейной комбинации  $A_{H+\mu N}$  будет иметь 4 различных собственных значения.

#### 4. Определение типов невырожденных точек.

Теперь рассмотрим особые точки, в которых спектры операторов  $A_v$  и  $A_N$  содержат 4 и 2 ненулевых собственных значения соответственно. Эти точки невырождены и в данном пункте мы определим их типы.

В случае  $c = 0$  ранее найденные корни характеристического многочлена  $\lambda_{5,6} = \pm i\sqrt{\frac{p}{q}} \in \mathbb{C}$ , так как  $\frac{p}{q} > 0$ .

Теперь рассмотрим случай  $c \neq 0$ . Легко заметить, что  $q > 0$  (из предыдущего пункта, утверждение 2.3.7), следовательно  $\lambda_{5,6}$  будут принимать действительные или комплексные значения в зависимости только от знака  $p$ .

Теперь, для того, чтобы оценить как меняется знак  $p$  в зависимости от  $\kappa$ , представим последний множитель в выражении для  $p$  в виде графика ниже (см. рис. 2.5):

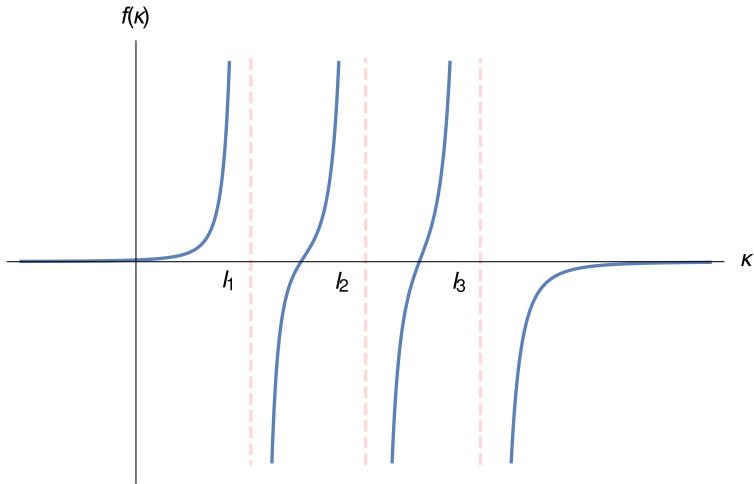


Рис. 2.5

Здесь введено обозначение

$$f(\kappa) = \left( \frac{I_1 K_1^2}{(I_1 - \kappa)^3} + \frac{I_2 K_2^2}{(I_2 - \kappa)^3} + \frac{I_3 K_3^2}{(I_3 - \kappa)^3} \right).$$

Тогда  $p$  представляется в виде

$$p = -c^4(-I_1 + \kappa)(-I_2 + \kappa)(-I_3 + \kappa)f(\kappa).$$

Исходя из данного графика и вида  $p$  следует, что:

- (a) если  $\kappa \in \{(-\infty, I_1) \cup (I_1, \varepsilon_1) \cup (\varepsilon_2, I_3) \cup (I_3, +\infty)\} \Rightarrow p > 0 \Rightarrow \lambda_{5,6} \in \mathbb{C}$ ,
- (b) если  $\kappa \in \{(\varepsilon_1, I_2) \cup (I_2, \varepsilon_2)\} \Rightarrow p < 0 \Rightarrow \lambda_{5,6} \in \mathbb{R}$ ,

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — точки, в которых  $f(\kappa) = 0$ . Значит, получаем утверждение теоремы 2.2 для невырожденных точек.

## 2.4 Особенности ранга 1

Невырожденность точек ранга 1 также была исследована в работе А.Ю. Москвина [7]. При этом в работе использовалась следующая терминология: эллиптические критические окружности назывались устойчивыми, а гиперболические — неустойчивыми. Приведем доказанный им результат, перефомулировав его с учетом используемой в данной работе терминологии.

**Теорема 2.4** (А.Ю. Москвин [7]). *В прообразе каждой внутренней точки*

1. *кривых из набора  $\sigma$  лежит одна эллиптическая критическая окружность, если выражение  $(\lambda - D) \det(J - \lambda E)n'_\lambda$  положительно, и одна гиперболическая, если отрицательно.*
2. *отрезка  $\sigma_0$  лежат две эллиптические критические окружности.*
3. *луча  $\sigma_i$  лежат две эллиптические критические окружности если  $i = 1, 3$ , и две гиперболические — если  $i = 2$ .*
4. *отрезка  $\tau$  лежат либо неподвижные точки, являющиеся критическими точками ранга 0, либо точки ранга 1. При  $c \neq 0$  все критические точки ранга 1 являются невырожденными точками ранга 1 эллиптического типа.*

Таким образом для доказательства пункта 1 теоремы 2.5 остается проверить невырожденность критических окружностей в прообразе точек отрезка  $\tau$  при  $c = 0$  и точки  $T_0$ .

**Утверждение 2.4.1.** 1. *В прообразе точки касания  $S$  на бифуркационной диаграмме (рис. 2.1) лежат вырожденные окружности, и все точки в прообразе имеют ранг 1. Все критические точки ранга 1, лежащие в прообразе точек отрезка  $\tau$ , за исключением точки  $S$ , являются невырожденными точками ранга 1 эллиптического типа.*

2. *Если  $c^2 \neq (K, K)$ , то в прообразе точки  $T_0$  лежит одна эллиптическая критическая окружность. Если  $c^2 = (K, K)$ , то в прообразе  $T_0$  лежит одна точка ранга 0.*

*Доказательство.* Для доказательства невырожденности точек ранга 1 мы используем определение 1.5.3.

1. Все точки, удовлетворяющие равенству  $n = c^2$ , являются особыми точками для поля  $\text{sgrad } N$ . По определению 1.5.3 остается доказать, что спектр линеаризации  $A_N$  поля  $\text{sgrad } N$  содержит пару ненулевых чисто мнимых собственных значений. Спектр оператора  $A_N$  описан в пункте 3. (см. следствие 4 к утверждению 2.3.5): кроме 4 нулей он также содержит числа  $\pm 2i\rho(c+g)$ . Заметим, что точки, удовлетворяющие условию  $n = c^2$  также удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} M + K = c\gamma, \\ J\omega + K = (c+g)\gamma. \end{cases} \quad (2.16)$$

Поэтому, если спектр  $A_N$  тривиален, то есть  $c+g=0$ , то

$$\begin{cases} J\omega = -K, \\ d(\omega, \gamma) = -c, \end{cases} \quad (2.17)$$

Откуда следует, что

$$h = \frac{1}{2}(M, \omega) = \frac{1}{2}(c\gamma - K, -J^{-1}K) = \frac{1}{2}\left(-\frac{c^2}{d} + (K, J^{-1}K)\right)$$

Это наименьшее возможное значение  $h$  для отрезка  $\tau$ , поэтому все точки, в которых  $c+g=0$  лежат в прообразе нижнего конца отрезка  $\tau$ . Все остальные точки ранга 1 являются невырожденными эллиптическими точками.

2. В прообразе точки  $T_0 = \{h=0, n=(K, K)\}$  лежат точки, заданные уравнениями

$$\begin{cases} M = 0, \\ (\gamma, \gamma) = 1, \\ (K, \gamma) = c. \end{cases} \quad (2.18)$$

При этом  $\omega = 0$  и  $g = 0$ . Действительно, из теоремы 2.1 и формулы (2.7) для  $H$  следует, что

$$H = \frac{1}{2}(M, J^{-1}M) + \frac{1}{2} \cdot \frac{(M, J^{-1}\gamma)^2}{1 - d(\gamma, J^{-1}\gamma)}.$$

Оба слагаемых в сумме неотрицательны, поэтому  $h = 0$  только если  $M = 0$ . Множество точек (2.18) образуют окружность, если  $c^2 < (K, K)$  и состоит из одной точки, если  $c^2 = (K, K)$ .

При  $c^2 < (K, K)$  точки ранга 1 в прообразе точки  $T_0$  невырождены, т.к. у оператора  $A_v$  линеаризации  $\text{sgrad } H$  есть 2 ненулевых чисто мнимых собственных значения. Это доказывается аналогично доказательству невырожденности точки  $\widehat{T}_0$ .

□

## 2.5 Невырожденность особых точек

Итоговый результат может быть сформулирован следующим образом:

**Теорема 2.5.** Для шара Чаплыгина с ротором невырожденность точек ранга 1 и 0, а так же типы невырожденных особенностей системы полностью определяются бифуркационной диаграммой отображения момента. А именно, в случае, когда у ротора нет нулевых компонент, выполнены следующие утверждения:

1. Все критические точки в прообразе неособых точек бифуркационных диаграмм являются невырожденными точками ранга 1. При этом, в системе присутствуют только два типа перестроек: эллиптические точки ранга 1 соответствуют перестройке типа A, а все гиперболические точки ранга 1 — перестройке типа B.
2. В прообразе любых особых точек бифуркационной диаграммы (то есть в прообразе точек возврата, точек касания и точек трансверсального пересечения дуг) лежит либо вырожденная точка ранга 1, либо точка ранга 0.
3. Все вырожденные точки ранга 1 лежат в прообразе точек возврата и точек касания бифуркационных диаграмм.
4. Точки ранга 0 лежат в прообразе трансверсальных точек пересечения дуг бифуркационных диаграмм.
5. Вырожденные точки ранга 0 лежат в прообразе точек, в которых одновременно пересекаются больше трех дуг бифуркационных диаграмм.
6. Все невырожденные точки ранга 0 лежат в прообразах трансверсальных точек пересечения двух или трех дуг бифуркационных диаграмм.
7. В системе из невырожденных особенностей ранга 0 присутствуют только точки типа центр–центр и центр–седло. Все особые точки типа центр–седло соответствуют прямому произведению атомов A и B.

Тип особых точек ранга 0 однозначно определяется видом бифуркационных диаграмм (и типом перестроек торов Лиувилля) в окрестности образа этой точки. Точнее, точка имеет тип центр–седло тогда и только тогда, когда в ее окрестности существует перестройка типа B.

*Доказательство.* Доказательство теоремы 2.5 разбито на несколько частей. А именно, подробнее о пунктах 1 и 3 про точки ранга 1 написано в разделе 2.4, пункты 4 — 7 про точки ранга 0 доказаны в разделе 2.3, а пункт 2 вытекает из всех остальных пунктов теоремы.  $\square$

## 2.6 Грубые молекулы. Сравнение систем: шар Чаплыгина и случай Жуковского

Если точка, двигаясь по плоскости  $\mathbb{R}^2(n, h)$  на рисунке, пересекает бифуркационную диаграмму, то торы Лиувилля, лежащие в прообразе этой точки, некоторым образом перестраиваются. Вид перестроек для системы шар Чаплыгина с ротором описан в теореме 2.5. Некоторые из линий  $H = \text{const}$  на бифуркационной диаграмме, соответствующие регулярным значениям энергии, показаны на рисунке штрихпунктиром (кривые 1 – 4), а соответствующие им молекулы определены ниже.

**Теорема 2.6.** 1) При значениях параметров системы “шар Чаплыгина с ротором” без нулевых компонент, таких, что  $c^2 \geq d^2 \langle J^{-1}K, J^{-1}K \rangle$ , каждому уровню  $H = \text{const}_1$  можно поставить в соответствие уровень  $H = \text{const}_2$  случая Жуковского так, что отвечающие этим уровням грубые молекулы совпадут.

2) Существуют такие значения параметров системы Чаплыгина при  $c^2 < d^2 \langle J^{-1}K, J^{-1}K \rangle$ , что для малых уровней энергии возникают молекулы, не встречающиеся в случае Жуковского.

*Доказательство.* Отметим, что значениям  $c^2 \geq d^2 \langle J^{-1}K, J^{-1}K \rangle$  соответствуют бифуркационные диаграммы, изображенные на рисунке 2.6, в –  $\partial$ , а значениям  $c^2 < d^2 \langle J^{-1}K, J^{-1}K \rangle$  – бифуркационные диаграммы, изображенные на рисунке 2.6, а и б.

При доказательстве теоремы, чтобы сопоставить явные координаты особых точек из утверждения 2.7.1 и бифуркационные диаграммы из теоремы 2.1 при подстановке конкретных значений параметров  $K, I, d, c$ , были использованы средства программы Wolfram Mathematica.

Рассмотрим случай  $c^2 \geq d^2 \langle J^{-1}K, J^{-1}K \rangle$ . Для каждого вида бифуркационных диаграмм, изображенных на рисунке 2.6, в –  $\partial$ , существует диаграмма случая Жуковского такого же вида. Проводя уровни  $H = \text{const}$ , мы будем получать такие же молекулы, как и в случае Жуковского. Все они исчерпываются типами 1, 2 и 3 из таблицы.

Рассмотрим случай  $c^2 < d^2 \langle J^{-1}K, J^{-1}K \rangle$ . Только при таких значениях  $c$  на бифуркационной диаграмме присутствуют точки  $Z$  (когда  $c = 0$ ) и  $L_1$ . Тогда может быть проведена допустимая кривая 4, изображенная на рисунке 2.6, которая соответствует грубой молекуле типа 4. Это прямая  $h = 3, 2$ , построенная при  $K = (3, 7; 1, 23; 3, 84)$ ,  $I = (0, 1; 2, 39; 7, 38)$ ,  $d = 1, 02$ ,  $c = 2, 5$ . Таким образом, мы доказали существование такой молекулы в случае шара Чаплыгина, которая не встречается в случае Жуковского.  $\square$

В качестве примера можно привести явные значения параметров системы, при которых достигаются молекулы из теоремы 2.6. Рассмотрим  $K = (3, 84; 1, 12; 2, 82)$ ,  $I = (0, 24; 1, 12; 4, 44)$ ,  $d = 0, 34$ . Подставим эти значения в уравнения из утверждения 2.7.1, тем самым для всех точек,

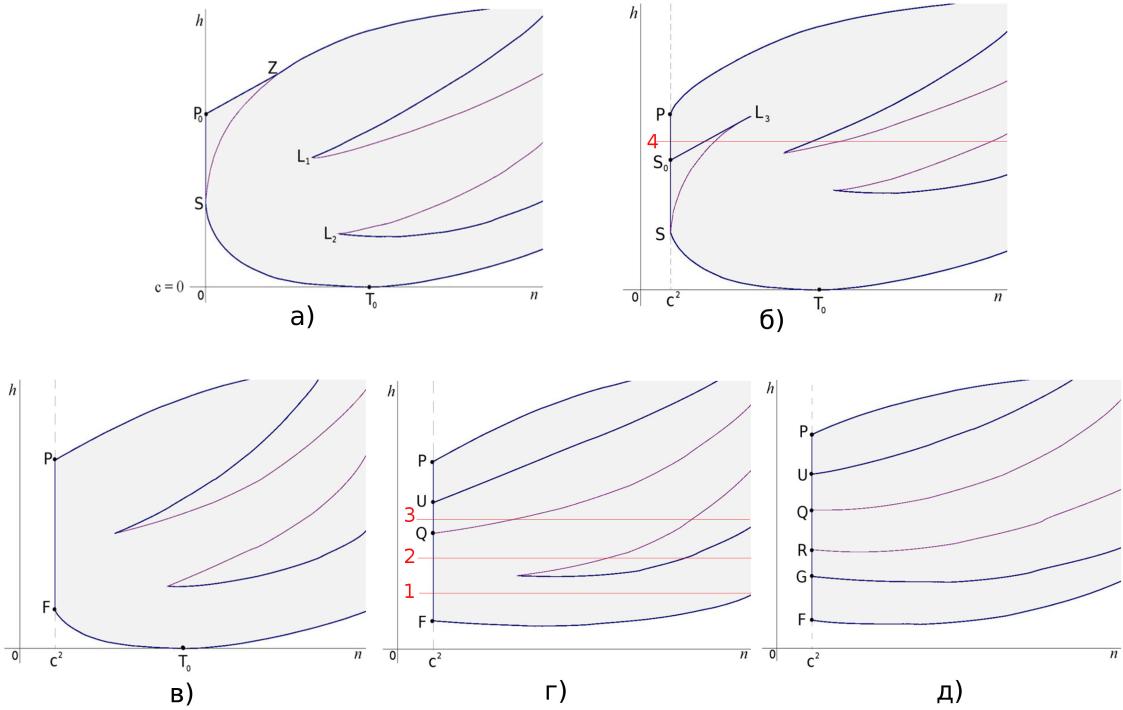


Рис. 2.6: Бифуркационные диаграммы,  $d = 0.34, K = (3.84, 1.12, 2.82), I = (0.24, 1.12, 4.44)$

которые влияют на тип молекул, мы найдем координаты  $h$  и  $n$ , в которых единственным неизвестным параметром останется только  $c$ . Тогда прямым подсчетом легко проверить, что:

прямой 1 на рисунке 2.6, заданной уравнением  $h = 1,5$  при  $c = 3,9$ , соответствует молекула типа 1;

прямой 2, заданной уравнением  $h = 4$  при  $c = 7$ , — молекула типа 2;

прямой 3, заданной уравнением  $h = 4,7$  при  $c = 7$ , — молекула типа 3.

Грубые молекулы системы “шар Чаплыгина с ротором”

Тип 1	$A — A$	Тип 2	$A \begin{cases} / \\ \backslash \end{cases} B — A$
Тип 3	$A \begin{cases} / \\ \backslash \end{cases} B — B \begin{cases} / \\ \backslash \end{cases} A$	Тип 4	$A \begin{cases} / \\ \backslash \end{cases} B \begin{cases} / \\ \backslash \end{cases} B — B \begin{cases} / \\ \backslash \end{cases} A$

## 2.7 Изоэнергетические поверхности

Изоэнергетические 3-поверхности  $Q_{h,c}^3 = \{H = h, C = c, G = 1\}$  задаются двумя параметрами  $h$  и  $c$ , то есть значениями интегралов  $H$  и  $C$ , так как  $G = 1$ . Для описания топологического типа

$Q_{h,c}^3$  мы рассмотрим множество критических значений отображения  $H \times C : S^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, c)$ , которое является объединением кривых, разбивающих плоскость  $\mathbb{R}^2(h, c)$  на области так, что для всех точек  $(h, c)$  принадлежащих одной области тип соответствующих изоэнергетических поверхностей  $Q_{h,c}^3$  будет одним и тем же. В дальнейшем такие кривые мы будем называть *кривыми, разделяющими топологический тип изоэнергетических поверхностей*.

**Утверждение 2.7.1.** Координаты  $(h, c)$  особых точек бифуркационной диаграммы из теоремы 2.1 можно вычислить по следующим формулам:

1. точки  $L_1, L_2, L_3$  задаются системой уравнений

$$\begin{cases} n = \lambda^2 \left( \frac{K_1^2}{(J_1 - \lambda)^2} + \frac{K_2^2}{(J_2 - \lambda)^2} + \frac{K_3^2}{(J_3 - \lambda)^2} - \frac{c^2}{(d - \lambda)^2} \right) + c^2 \\ 2h = \frac{K_1^2 J_1}{(J_1 - \lambda)^2} + \frac{K_2^2 J_2}{(J_2 - \lambda)^2} + \frac{K_3^2 J_3}{(J_3 - \lambda)^2} - \frac{dc^2}{(d - \lambda)^2} \\ \frac{dc^2}{(d - \lambda)^3} = \sum_{i=1}^3 \frac{J_i K_i^2}{(J_i - \lambda)^3} \end{cases} \quad (2.19)$$

где координатам  $L_1$  соответствует значение  $\lambda \in (J_1, J_2)$ , координатам  $L_2$  — значение  $\lambda \in (J_2, J_3)$  и координатам  $L_3$  — значение  $\lambda \in (0, d)$ .

2. точка  $P_0$  имеет координаты  $h = \frac{1}{2} \langle I^{-1}K, K \rangle$  и  $n = 0$

$$3. \text{ точка } S \text{ имеет координаты } h = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{J_i} - \frac{c^2}{d} \right) \text{ и } n = c^2$$

4. точка  $T_0$  имеет координаты  $h = 0$  и  $n = \langle K, K \rangle$  при  $c^2 \leq \langle K, K \rangle$

5. точки  $S_0, P, U, Q, R, G, F$  задаются системой уравнений

$$\begin{cases} n = c^2 \\ 2h = \frac{K_1^2 J_1}{(J_1 - \lambda)^2} + \frac{K_2^2 J_2}{(J_2 - \lambda)^2} + \frac{K_3^2 J_3}{(J_3 - \lambda)^2} - \frac{dc^2}{(d - \lambda)^2} \\ \frac{K_1^2}{(J_1 - \lambda)^2} + \frac{K_2^2}{(J_2 - \lambda)^2} + \frac{K_3^2}{(J_3 - \lambda)^2} = \frac{c^2}{(d - \lambda)^2} \end{cases} \quad (2.20)$$

6. точка  $Z$  имеет координаты  $h = \frac{1}{2} (\langle I^{-1}K, K \rangle + d \langle I^{-1}K, I^{-1}K \rangle)$  и  $n = d^2 \langle I^{-1}K, I^{-1}K \rangle$

*Доказательство.* Рассмотрим все особые точки системы шар Чаплыгина.

1. Точки  $L_1, L_2, L_3$  лежат на кривых  $\sigma$  из теоремы 2.1, а значит, задаются уравнениями (2.9), что дает нам первые два уравнения системы (2.19). Если точки являются точками возврата кривых  $\sigma$ , то  $n'_\lambda = 0$  и  $h'_\lambda = 0$ . Имеем

$$n'_\lambda = 2\lambda \left( \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^3} - \frac{dc^2}{(d - \lambda)^3} \right), \quad h'_\lambda = \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^3} - \frac{dc^2}{(d - \lambda)^3}. \quad (2.21)$$

Это дает нам третье уравнение системы (2.19). Решая его относительно  $\lambda$  и подставляя найденные значения в остальные уравнения системы мы получаем искомые координаты точек  $L_1, L_2, L_3$ .

2. Точка  $P_0$  — это точка пересечения прямой  $n = c^2$  с отрезком  $\sigma_0$  из п. 2 теоремы 2.1. Так как эта точка существует только в случае  $c = 0$ , то из уравнения для  $\sigma_0$  при подстановке в него  $n = 0$  получаем явные координаты  $P_0$ .
3. Точка  $S$  — образ вырожденной особой точки ранга 1 отображения момента (2.8) — является точкой касания кривых  $\sigma$  и прямой  $n = c^2$ . Подставляя условие  $n = c^2$  в уравнения из п. 1 теоремы 2.1, в случае  $\lambda = 0$  получаем явные координаты  $S$ .
4. Координаты точки  $T_0$  уже заданы явно в теореме 2.1.
5. Первые два уравнения системы (2.20) отражают принадлежность точек  $S_0, P, U, Q, R, G, F$  одновременно кривым  $\sigma$  и прямой  $n = c^2$ . Подставив условие  $n = c^2$  в уравнение (2.9) при  $\lambda \neq 0$  мы получим третье уравнение системы (2.20). Решая его относительно  $\lambda$  и подставляя найденные значения в остальные уравнения системы (2.20), мы получаем искомые координаты.
6. Точка  $Z$  находится на пересечении кривых  $\sigma$  и отрезка  $\sigma_0$ , при этом она является концевой точкой отрезка  $\sigma_0$ , в которой достигается максимальное значение  $n$  из п. 2 теоремы 2.1. Подставив это значение  $n = d^2 \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{I_i^2}$  в уравнение из п. 2 теоремы 2.1, получим значение координаты  $h$ .

□

**Утверждение 2.7.2.** *Если рассматривать кривые  $\sigma$  из пункта 1 теоремы 2.1 как графики функций  $h(n)$ , то эти функции являются монотонно возрастающими на своих частях, соответствующих  $\lambda \in (0, d), \lambda \in (d, J_1), \lambda \in (J_1, J_2), \lambda \in (J_2, J_3), \lambda \in (J_3, +\infty)$  и монотонно убывающими для  $\lambda \in (-\infty, 0)$ .*

*Доказательство.* Из (2.21) следует, что  $n'_\lambda = 2\lambda h'_\lambda$ . А значит  $h'_n > 0$  при  $\lambda > 0$  и  $h'_n < 0$  при  $\lambda < 0$ .

□

**Лемма 2.7.** *Гамильтониан  $H$  в случае  $c = 0$  имеет два критических значения:*

1.  $H = 0$ . На критическом уровне лежит ровно одна критическая окружность на которой функция  $H$  достигает минимума. При отображении момента эта критическая окружность отображается в точку  $T_0$  на бифуркационной диаграмме (см. рис. 2.1).
2.  $H = \frac{1}{2}(I^{-1}K, K)$ . Критический уровень содержит две критические точки. Их образ при отображении момента есть точка  $P_0$  на бифуркационной диаграмме (см. рис. 2.1).

*Доказательство.* Для нахождения критических точек  $H$  рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{grad} H = \lambda \operatorname{grad} G + \mu \operatorname{grad} C \\ C = 0 \\ G = 1 \end{cases} \quad (2.22)$$

Подставим в (2.22) выражения первых интегралов системы и гамильтониана (2.7) через  $M$  и  $\gamma$ :

$$\begin{cases} \omega = \mu\gamma \\ g\omega = 2\lambda\gamma + \mu(M + K) \\ (M + K, \gamma) = 0 \\ (\gamma, \gamma) = 1, \end{cases} \quad (2.23)$$

где коэффициент  $g$  определяется формулой (2.5), а  $\omega$  – формулой (2.6).

Домножив первые два уравнения системы (2.23) скалярно на  $(M + K)$ , мы получаем, что  $(\omega, M + K) = 0$  и  $g(\omega, M + K) = \mu(M + K, M + K)$ . Значит,  $\mu(M + K, M + K) = 0$ . Следовательно, либо  $\mu = 0$ , либо  $M = -K$ . Рассмотрим каждый из вариантов.

1. Случай  $\mu = 0$ . Из системы (2.23), учитывая (2.6), получаем:

$$\begin{cases} J^{-1}M + gJ^{-1}\gamma = 0 \\ (M + K, \gamma) = 0 \\ (\gamma, \gamma) = 1. \end{cases} \quad (2.24)$$

Подставим значение коэффициента  $g$  в первое уравнение системы (2.24), а потом домножим скалярно на  $\gamma$ :

$$(\gamma, J^{-1}M) + \frac{d(J^{-1}\gamma, \gamma)(J^{-1}M, \gamma)}{1 - d(\gamma, J^{-1}\gamma)} = 0.$$

Значит,  $(\gamma, J^{-1}M) = 0$ , и отсюда  $g = 0$ . Поэтому критические точки  $H$  в данном случае задаются системой

$$\begin{cases} M = 0 \\ (K, \gamma) = 0 \\ (\gamma, \gamma) = 1. \end{cases}$$

Видно, что они образуют критическую окружность, а значение гамильтониана при этом равно 0.

2. Случай  $M = -K$ . Из системы (2.23) и выражения (2.6) получаем:

$$\begin{cases} M = -K \\ J^{-1}M + gJ^{-1}\gamma = \mu\gamma \\ g\omega = 2\lambda\gamma \\ (\gamma, \gamma) = 1. \end{cases} \quad (2.25)$$

Умножив второе уравнение системы (2.25) скалярно на  $\gamma$  получаем:

$$\mu = (J^{-1}M, \gamma) + g(J^{-1}\gamma, \gamma). \quad (2.26)$$

Для нахождения  $\gamma$  во второе уравнение системы (2.25) подставим выражение (2.5) для  $g$  и выражение (2.26) для  $\mu$ :

$$\begin{aligned} J^{-1}M - gJ^{-1}\gamma &= (J^{-1}M, \gamma)\gamma + g(J^{-1}\gamma, \gamma)\gamma - gJ^{-1}\gamma = \\ &= (J^{-1}M, \gamma)\gamma + \frac{d(J^{-1}M, \gamma)}{1 - d(\gamma, J^{-1}\gamma)} ((J^{-1}\gamma, \gamma)\gamma - J^{-1}\gamma) = (\gamma - dJ^{-1}\gamma) \frac{(J^{-1}M, \gamma)}{1 - d(\gamma, J^{-1}\gamma)}. \end{aligned}$$

Используя равенство  $J = I + dE$  получаем, что

$$I^{-1}M = \gamma \frac{(J^{-1}M, \gamma)}{1 - d(\gamma, J^{-1}\gamma)}.$$

Из полученного условия зависимости  $I^{-1}M$  и  $\gamma$ , а также условия  $(\gamma, \gamma) = 1$  следует, что:

$$\gamma = \pm \frac{I^{-1}M}{|I^{-1}M|}.$$

Значит, координаты критической точки:

$$\begin{cases} M = -K \\ \gamma = \pm \frac{I^{-1}M}{|I^{-1}M|} \end{cases}$$

□

**Теорема 2.8.** Кривые на плоскости  $\mathbb{R}^2(h, c)$ , разделяющие области с различным топологическим типом изоэнергетических 3-поверхностей, состоят следующих множеств:

1. набор кривых  $\tilde{\sigma}$

$$\begin{cases} c = \pm \sqrt{\left( \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{(J_i - \lambda)^2} \right) (d - \lambda)^2} \\ h = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^2} - d \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{(J_i - \lambda)^2} \right), \end{cases} \quad (2.27)$$

где  $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, d) \cup (d, J_1) \cup (J_1, J_2) \cup (J_2, J_3) \cup (J_3, \infty)$

2. отрезок  $\tilde{t}_0$

$$\left[ \left( 0; -\sqrt{\sum_{i=1}^3 K_i^2} \right), \left( 0; \sqrt{\sum_{i=1}^3 K_i^2} \right) \right]$$

Кривые  $\tilde{\sigma}$ , отрезок  $\tilde{t}_0$  и топологические типы изоэнергетических поверхностей для каждой области указаны на рисунке 2.7.

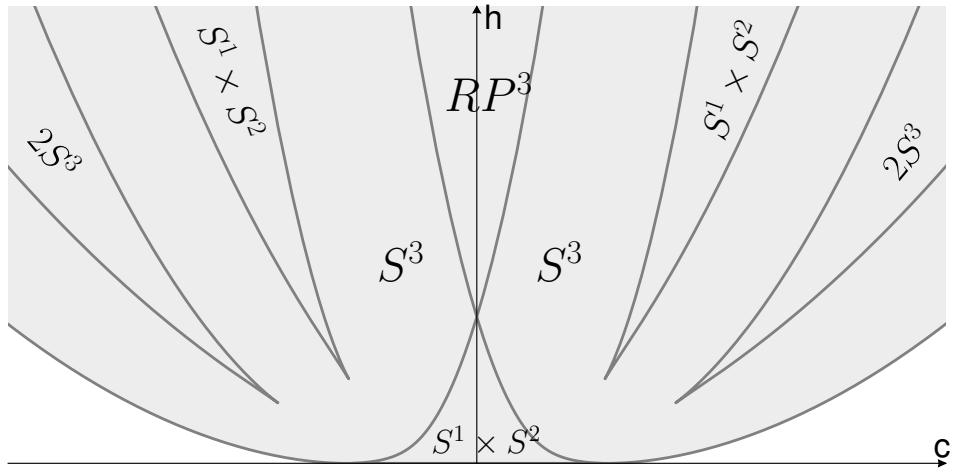


Рис. 2.7: Области с различными типами изоэнергетических поверхностей на плоскости  $\mathbb{R}^2(h, c)$ .

*Доказательство.* Критическим значениям функции  $H$  соответствуют точки  $T_0, P_0, S_0, P, U, Q, R, G, F$  на бифуркационных диаграммах (см. теорему 2.1). Значения  $n$  и  $h$  для этих точек (кроме  $T_0$ ) задаются уравнениями (2.20). Поэтому второе и третье уравнения (2.20) можно рассматривать как параметрическую  $(h(\lambda), n(\lambda))$  запись кривых  $\tilde{\sigma}$ , разделяющих области с различным топологическим типом. Отрезок  $\tilde{t}_0$  соответствует точке  $T_0$  (см. п. 4 утверждения 2.7.1). Точке пересечения кривых  $\tilde{\sigma}$  с осью  $h$  соответствует точке  $P_0$ .

Чтобы понять, каков топологический тип изоэнергетических поверхностей, заметим, что при  $d \rightarrow 0$  уравнения, задающие систему шар Чаплыгина с ротором, стремятся к уравнениям системы Жуковского. Причем при изменении  $d$  кривые  $\tilde{\sigma}$  не меняются, а происходит лишь изменение параметра  $\lambda$  на константу в уравнениях (2.27). При этом неограниченные области на бифуркационной диаграмме Жуковского, для которых 3-многообразие  $Q$  гомеоморфно  $2S^3, S^1 \times S^2, S^3, \mathbb{RP}^3$ , переходят в соответствующие области на рис. 2.7. В треугольнике около начала координат многообразия  $Q_{h,c}^3$  гомеоморфны  $S^1 \times S^2$ . Это можно увидеть благодаря редукции к случаю Жуковского, а также с помощью леммы 2.7, поскольку в прообразе каждой точки отрезка  $t_0$  лежит ровно одна критическая окружность, на которой функция  $H$  достигает минимума.  $\square$

Чтобы описать все возможные виды меченых молекул  $W^*$  нужно определить каким образом прямая  $h = \text{const}$  пересекает бифуркационную диаграмму на рис. 2.1.

**Теорема 2.9.** *Кривые, разделяющие области с различными типами меченых молекул, состоят из объединения следующих множеств (см. рис. 2.8):*

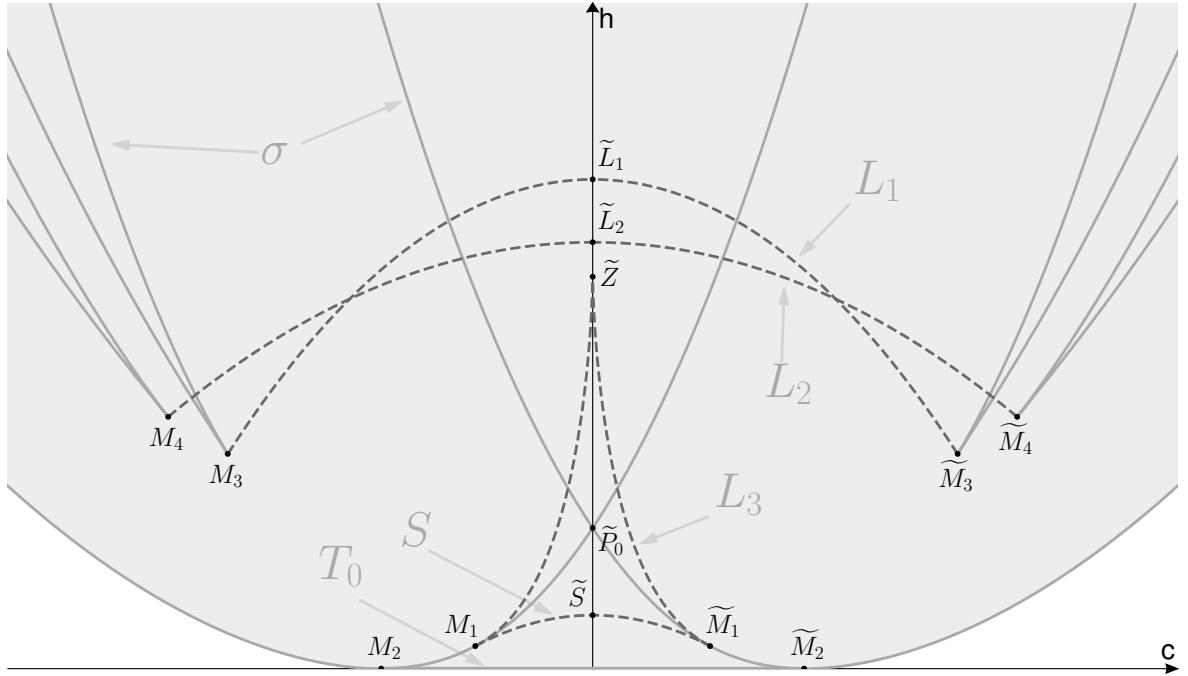


Рис. 2.8: Пример: кривые, разделяющие типы меченых молекул, при  $K = (3.34, 1.12, 2.82)$ ,  $I = (0.87, 2.43, 4.44)$ ,  $d = 1.79$ .

1. набор кривых  $\tilde{\sigma}$

$$\begin{cases} c = \pm \sqrt{\left( \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{(J_i - \lambda)^2} \right) (d - \lambda)^2} \\ h = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^2} - d \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{(J_i - \lambda)^2} \right), \end{cases}$$

где  $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (0, d) \cup (d, J_1) \cup (J_1, J_2) \cup (J_2, J_3) \cup (J_3, \infty)$

2. отрезок  $\tilde{t}_0$

$$\left[ \left( 0; -\sqrt{\sum_{i=1}^3 K_i^2} \right), \left( 0; \sqrt{\sum_{i=1}^3 K_i^2} \right) \right]$$

3. кривая  $\tilde{s}$

$$h = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{J_i} - \frac{c^2}{d} \right)$$

4. набор кривых  $\tilde{l}$

$$\begin{cases} c = \pm \sqrt{\left( \sum_{i=1}^3 \frac{J_i K_i^2}{(J_i - \lambda)^3} \right) \frac{(d - \lambda)^3}{d}} \\ h = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^2} - (d - \lambda) \sum_{i=1}^3 \frac{J_i K_i^2}{(J_i - \lambda)^3} \right), \end{cases}$$

где  $\lambda$  изменяется на некоторых отрезках:  $[a_1, b_1] \subset (J_1, J_2)$  (эта часть кривой  $\tilde{l}$  соответствует точке  $L_1$  на бифуркационной диаграмме, см. рис. 2.1),  $[a_2, b_2] \subset (J_2, J_3)$  (эта часть кривой  $\tilde{l}$  соответствует точке  $L_2$  на бифуркационной диаграмме, см. рис. 2.1),  $[a_3, b_3] \subset (0, d)$  (эта часть кривой  $\tilde{l}$  соответствует точке  $L_3$  на бифуркационной диаграмме, см. рис. 2.1). При этом в концах отрезка  $[a_1, b_1]$  кривая  $\tilde{l}$  соответствует точкам возврата  $M_3$  и  $\tilde{M}_3$ , в концах отрезка  $[a_2, b_2]$  — точкам возврата  $M_4$  и  $\tilde{M}_4$ , а в концах отрезка  $[a_3, b_3]$  — точкам  $M_1$  и  $\tilde{M}_1$ .

*Доказательство.* При переходе через точки возврата и касания переходит бифуркация лиувилевого слоения. Получается, что для определения областей с одинаковыми мечеными молекулами к кривым, разделяющим области с различными изоэнергетическими поверхностями, нужно добавить кривые, соответствующие точкам  $L_1, L_2, L_3, S, Z$ .

На рисунке 2.8 сплошными линиями обозначены кривые, разделяющие типы изоэнергетических поверхностей, а пунктирными — дополнительные кривые, разделяющие различные типы молекул. На верхнем левом графике для каждой кривой стрелочками указаны их прообразы, чьи координаты отписаны в утверждении 2.7.1. Так же на этом графике обозначены следующие точки:

1.  $\widetilde{P}_0$  — это точка, являющаяся образом точки  $P_0$ , имеющая координаты:

$$\begin{cases} c = 0 \\ h = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{I_i} \end{cases}$$

2.  $\widetilde{Z}$  — это точка пересечения оси  $h$  с кривой, в прообразе которой лежат точки  $L_3$ , она является образом точки  $Z$  и имеет координаты:

$$\begin{cases} c = 0 \\ h = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{I_i} + d \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{I_i^2} \right) \end{cases}$$

3. Точки  $\widetilde{L}_1, \widetilde{L}_2$  — это точки пересечения оси  $h$  с кривыми, в прообразе которых лежат точки  $L_1$  и  $L_2$  соответственно.

4.  $\widetilde{S}$  — это точка пересечения оси  $h$  с кривой в прообразе которой лежит точка  $S$ . Она имеет координаты:

$$\begin{cases} c = 0 \\ h = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{J_i} \end{cases}$$

5. Точками  $\widetilde{M}_1$ ,  $\widetilde{M}_3$ ,  $\widetilde{M}_4$ ,  $M_1$ ,  $M_3$  и  $M_4$  обозначены точки пересечения кривых, которые соответствуют ситуациям из замечания 3, а именно случаям пересечения клюев  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  с прямой  $n = c^2$  на бифуркационных диаграммах на рисунке 2.1 из теоремы 2.4.

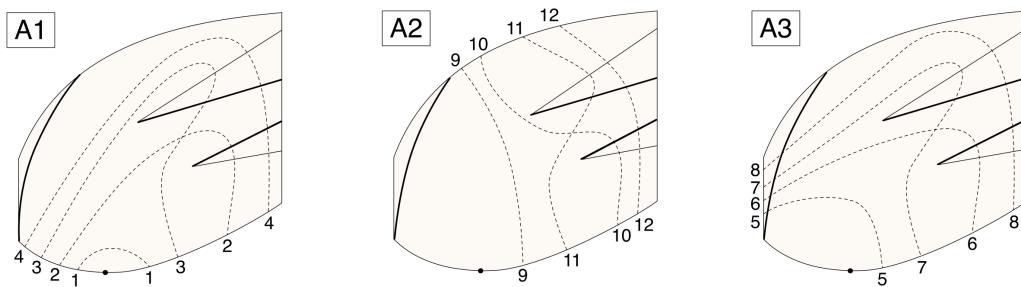
Отметим, что для точек  $\widetilde{Z}$ ,  $\widetilde{S}$ ,  $\widetilde{P}_0$  порядок их координат на оси  $h$  зафиксирован для любых значений параметров системы шар Чаплыгина с ротором, а именно:  $H(\widetilde{S}) < H(\widetilde{P}_0) < H(\widetilde{Z})$ . Это легко видно из значений выписанных выше координат данных точек. При этом точки  $\widetilde{L}_1$  и  $\widetilde{L}_2$  могут находиться на любых интервалах, на которые точки  $\widetilde{Z}$ ,  $\widetilde{S}$ ,  $\widetilde{P}_0$  делят ось  $h > 0$

□

**Замечание 7.** В зависимости от взаимного расположения точек  $\widetilde{L}_1$ ,  $\widetilde{L}_2$ ,  $\widetilde{Z}$ ,  $\widetilde{S}$ ,  $\widetilde{P}_0$  относительно их координат на оси  $h$  можно получить как минимум 20 качественно различных диаграмм.

В силу гипотезы 1 в системе реализуются только 6 типов бифуркационных диаграмм. Для этих 6 типов нами получена классификация грубых молекул и многообразия  $Q^3$ .

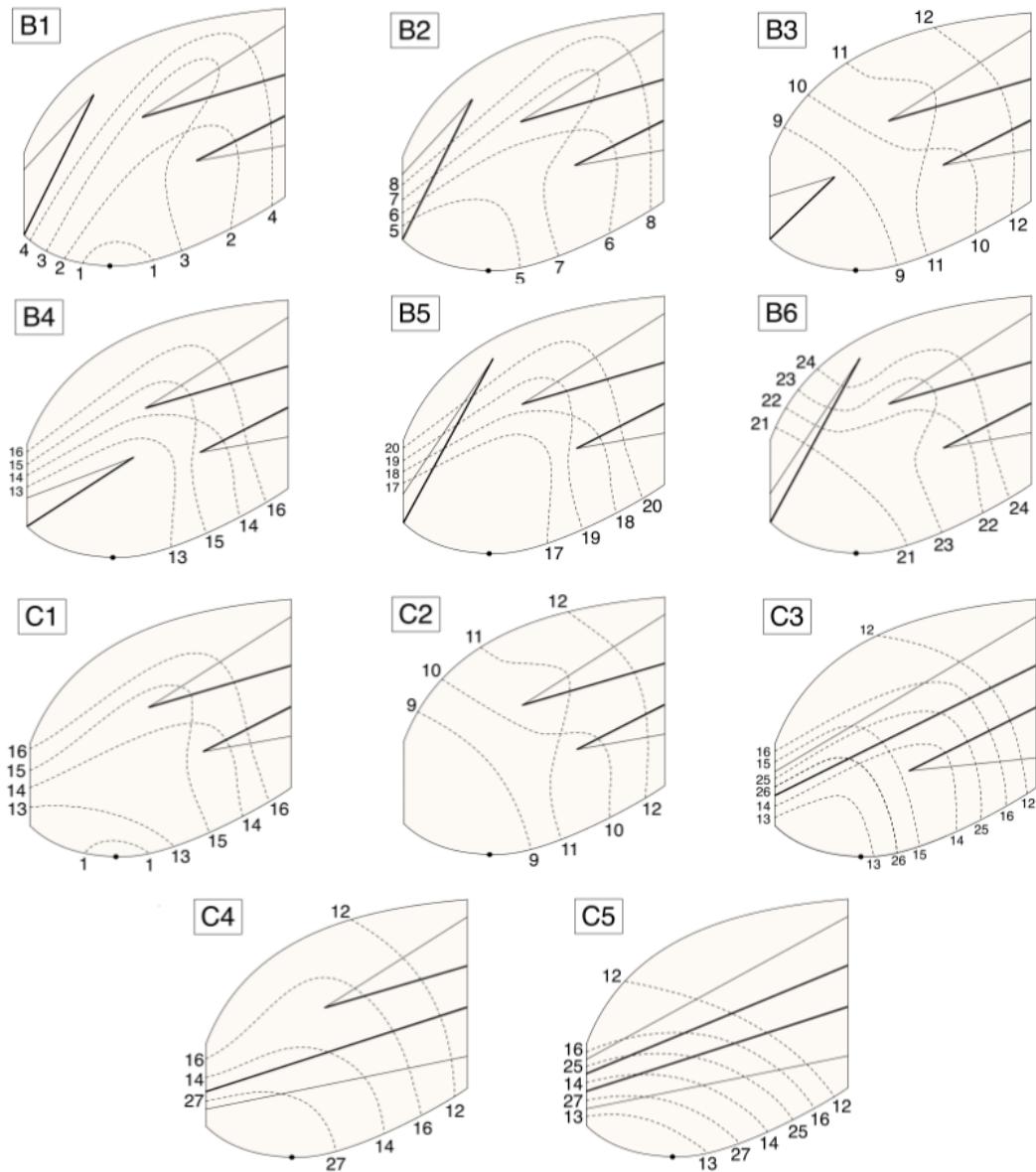
Рис. 2.9: Допустимые кривые при  $c = 0$



Исторически рассматривают прямые  $H = \text{const}$ , пересекающие бифуркационные диаграммы, но допускается рассмотрение  $Q^3$  в прообразе допустимых кривых, пересекающих трансверсально дуги бифуркационной диаграммы и не проходящих через ее особые точки. На рисунках 2.9 и 2.10 они изображены пунктирными линиями. На самом деле на рисунках 2.9 и 2.10 изображены все типы прямых  $H = \text{const}$  для 6 типов бифуркационных диаграмм из гипотезы 1, но мы для удобства изображаем их гладкими кривыми, чтобы изобразить несколько линий на одном и том же рисунке бифуркационной диаграммы. Иначе пришлось бы рисовать много похожих бифуркационных диаграмм в зависимости от взаимного расположения точек возврата и касания бифуркационных диаграмм. В доказательстве теоремы 2.10 дальше будут приведены картинки, где пунктирные прямые нарисованы прямыми при некоторых явных значениях параметров системы.

**Теорема 2.10.** 1. Для каждой из допустимых кривых на рис. 2.9, 2.10 грубая молекула и топологический тип соответствующих трехмерных многообразий указаны в таблице 2.1. В п. 7 трехмерное многообразие несвязно: оно имеет 2 компоненты, каждая из которых описывается приведенной в данном пункте таблицы молекулой.

Рис. 2.10: Допустимые кривые при  $c > 0$



2. Каждое из трехмерных многообразий, соответствующих кривым 1 – 27 на рис. 2.9, 2.10 реализуется как изоэнергетическая поверхность при некоторых значениях параметров  $K, I, d$ .
3. Если точки возврата кривых  $\tilde{s}$  из теоремы 2.9, обозначенные  $\widetilde{M}_3, \widetilde{M}_4, M_3, M_4$  на рис. 2.8, лежат вне криволинейного треугольника с вершинами  $M_1, \widetilde{M}_1, \widetilde{Z}$ , образованного кривыми  $\tilde{s}$  и  $\tilde{l}$  при  $\lambda \subset [a_3, b_3]$  (это условие эквивалентно гипотезе 1), то существует ровно 27 различных областей, каждой из которых отвечает своя меченая молекула. Эти 27 областей существуют для всех параметров системы общего положения. При этом при каждом наборе значений семи параметров  $K = (K_1, K_2, K_3)$ ,  $I = (I_1, I_2, I_3)$ ,  $d$  системы шар Чаплыгина с ротором возникает только некоторое подмножество этих 27 областей.

**Комментарий к таблице 2.1:** Номера допустимых кривых в таблице 2.1 соответствуют номерам кривых на рисунках 2.9 и 2.10. В столбце “Топологический тип” указан топологический тип 3-многообразия лежащего в прообразе допустимых кривых, чьи номера указаны в столбце “Номера допустимых кривых”. Значение дополнительного интеграла  $N$  на бифуркационных диаграммах растет слева направо, поэтому мы получаем “похожий” вид молекул, отличающихся направлением. Например, “похожи” молекулы для допустимых кривых 14 и 17 (строки 2 и 3 в таблице 2.1).

Таблица 2.1: Молекулы и топологические типы для допустимых кривых на рис. 2.9, 2.10 .

№	Топологический тип	Молекула	Номера допустимых кривых на рис. 2.9, 2.10
1	$S^3$	A — A	13
2	$S^3$	A \ \ / A — B — A	17
3	$S^3$	A — B \ \ / A — A	14
4	$S^3$	A \ \ / A — B — B — A \ \ / A — A	16, 18
5	$S^3$	A \ \ / A — B \ \ / A — B — A	19

Таблица 2.1: продолжение

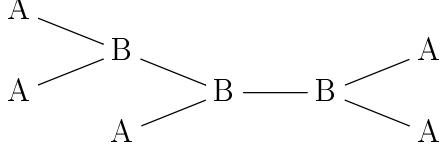
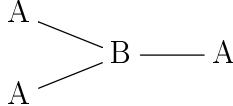
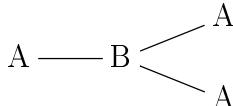
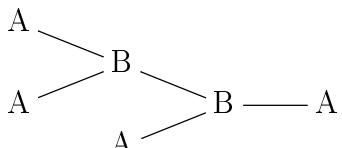
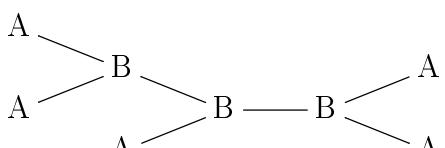
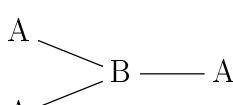
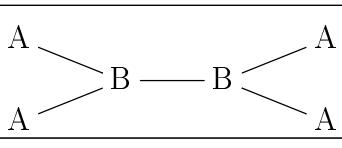
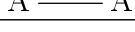
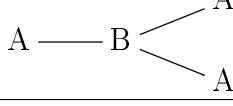
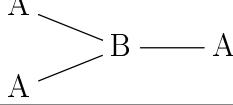
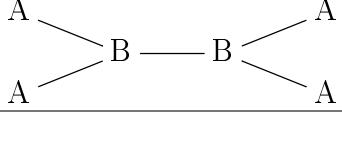
6	$S^3$		20
7	$2S^3$		27
8	$2S^3$		26
9	$\mathbb{R}P^3$		9
10	$\mathbb{R}P^3$		10
11	$\mathbb{R}P^3$		23
12	$\mathbb{R}P^3$		24
13	$\mathbb{R}P^3$		11, 21
14	$\mathbb{R}P^3$		12, 22
15	$S^1 \times S^2$		1
16	$S^1 \times S^2$		2
17	$S^1 \times S^2$		3, 5, 15
18	$S^1 \times S^2$		4, 6, 25

Таблица 2.1: продолжение

19	$S^1 \times S^2$	<pre> graph TD     A1[A] --&gt; B1[B]     A1 --&gt; B2[B]     B1 --&gt; A2[A]     B2 --&gt; A3[A]   </pre>	7
20	$S^1 \times S^2$	<pre> graph TD     A1[A] --&gt; B1[B]     A1 --&gt; B2[B]     B1 --&gt; A2[A]     B2 --&gt; A3[A]     A3 --&gt; B3[B]     A3 --&gt; B4[B]   </pre>	8

*Доказательство.* Докажем третий пункт теоремы. Рассмотрим кривосторонний треугольник, образованный точками  $\widetilde{M}_1$ ,  $\widetilde{Z}$ ,  $M_1$  и  $\widetilde{S}$  на рис. 2.8. В точках  $\widetilde{M}_1$  и  $M_1$  одновременно выполняются условие принадлежности их к кривой  $\widetilde{s}$  и условие на координаты точки  $\widetilde{S}$ , найденное в теореме 2.2 ( $\widetilde{S}$  — точка пересечения точки  $L_3$  и прямой  $n = c^2$ ). Значит, точки  $\widetilde{M}_1$  и  $M_1$  имеют координаты:

$$\begin{cases} c = \pm d^2 \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{J_i^2} \\ h = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{J_i} - \frac{1}{2} d \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{J_i^2} \end{cases}$$

Из значений координат видно, что точки  $\widetilde{M}_1$  и  $M_1$  будут всегда располагаться ниже по оси  $h$ , чем точка  $\widetilde{S}$ .

Функция, задающая кривую  $\widetilde{s}$ , будет всегда выпуклой, т.к. в ней  $h_c'' = -\frac{2}{d} < 0$ . При этом она будет монотонно возрастающей на своей части от точки  $M_1$  до точки  $\widetilde{S}$  и монотонно убывающей от точки  $\widetilde{S}$  до  $\widetilde{M}_1$ , т.к.  $h_c' = -\frac{2c}{d}$ .

Теперь проверим выпуклость и отсутствие разрывов функций, задающих кривые  $\widetilde{l}$ . В данных точках:

$$c'_\lambda = -\frac{3(d-\lambda)^2}{\pm 2d \sqrt{\left( \sum_{i=1}^3 \frac{J_i K_i^2}{(J_i - \lambda)^3} \right) \frac{(d-\lambda)^3}{d}}} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{J_i K_i^2}{(J_i - \lambda)^3} - (d-\lambda) \sum_{i=1}^3 \frac{J_i K_i^2}{(J_i - \lambda)^4} \right),$$

$$h'_\lambda = \frac{3}{2} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{J_i K_i^2}{(J_i - \lambda)^3} - (d-\lambda) \sum_{i=1}^3 \frac{J_i K_i^2}{(J_i - \lambda)^4} \right).$$

Получаем, что:

$$h'_c = -\frac{\pm d}{(d-\lambda)^2} \sqrt{\left( \sum_{i=1}^3 \frac{J_i K_i^2}{(J_i - \lambda)^3} \right) \frac{(d-\lambda)^3}{d}}$$

Значит, функции, задающие кривые  $\widetilde{l}$ , монотонно убывают при  $c > 0$ , т.к. в этом случае  $h'_c < 0$ , и монотонно возрастают при  $c < 0$ . В случае  $c = 0$  имеем критическую точку, т.к.  $h'_c = 0$ .

Рассмотрим теперь  $h''_c$  на функциях, задающих кривые  $\tilde{l}$ .

$$\begin{aligned}
h''_c &= \frac{h''_\lambda c'_\lambda - c''_\lambda h'_\lambda}{(c'_\lambda)^3} = \\
&= \left( d \left( 6 \left( -1.5 \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^3} + 1.5(d - \lambda) \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^4} \right) \left( \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^4} - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. (d - \lambda) \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^5} \right) - \left( \frac{2.25 \left( -(d - \lambda) \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^4} + \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^3} \right)^2}{(d - \lambda) \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^3}} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - 4.5 \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^4} \left( (d - \lambda) \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^4} - \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^3} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^3} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \frac{1}{d - \lambda} \left( 4.5(d - \lambda) \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^4} - 4.5 \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^3} \right) + \frac{1}{d - \lambda} \left( 3 \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^3} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - 9(d - \lambda) \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^4} + 6(d - \lambda)^2 \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^5} \right) \right) \left( 1.5 \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^3} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - 1.5(d - \lambda) \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^4} \right) \right) \left( \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^3} \right) \right) / \left( \left( 1.5(d - \lambda) \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^4} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. 1.5 \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^3} \right)^3 (d - \lambda) \right) = \\
&= d \left( (d - \lambda) \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^3} \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^4} + 0.5 \left( \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^3} \right)^2 - 1.5(d - \lambda)^2 \cdot \right. \\
&\quad \left. \left( \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^4} \right)^2 \right) / \left( 1.5(d - \lambda)^2 \left( (d - \lambda) \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^4} - \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^3} \right)^2 \right) = \\
&= \frac{d \left( 3(d - \lambda) \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^4} + \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^3} \right)}{3(d - \lambda)^2 \left( \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^3} - (d - \lambda) \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^4} \right)} \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Для того, чтобы оценить знак выражения (2.28) посмотрим отдельно на знаки его числителя и знаменателя. Рассмотрим функции  $f_1$  и  $f_2$ , заданные следующим образом :

$$f_1(\lambda) = 3(d - \lambda) \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^4} + \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^3},$$

$$f_2(\lambda) = \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^3} - (d - \lambda) \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2 J_i}{(J_i - \lambda)^4}.$$

Построим графики данных функций.

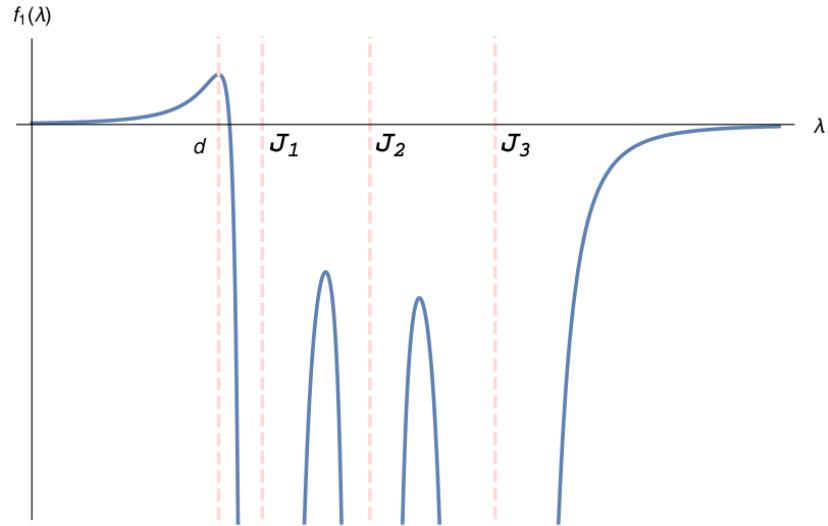


Рис. 2.11: График функции  $f_1$

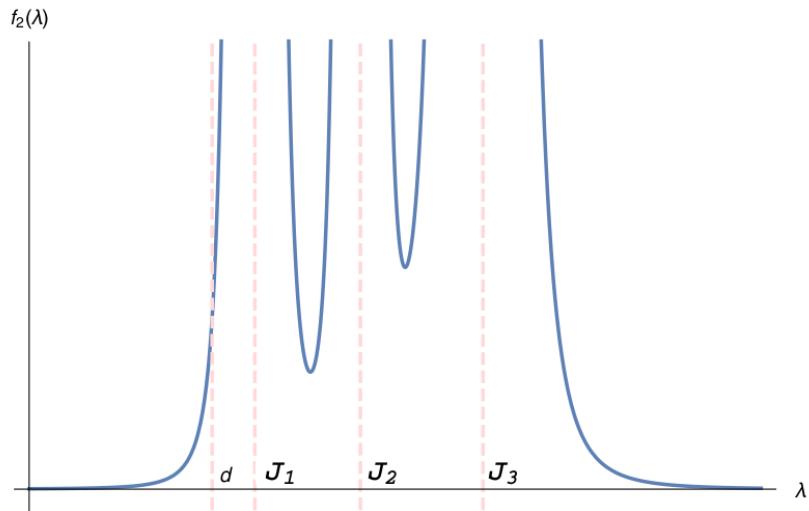


Рис. 2.12: График функции  $f_2$

Теперь можем сделать следующие выводы относительно кривых  $\tilde{l}$ :

- если  $\lambda \in [a_3, b_3]$ , то  $h_c'' > 0$  (т.к.  $f_1(\lambda) > 0$  и  $f_2(\lambda) > 0$ ), функция, задающая кривую  $\tilde{l}$ , вогнутая.
- если  $\lambda \in [a_1, b_1]$ , то  $h_c'' < 0$  (т.к.  $f_1(\lambda) < 0$  и  $f_2(\lambda) > 0$ ), функция, задающая кривую  $\tilde{l}$ , выпуклая.

- если  $\lambda \in [a_2, b_2]$ , то  $h_c'' < 0$  (т.к.  $f_1(\lambda) < 0$  и  $f_2(\lambda) > 0$  ), функция, задающая кривую  $\tilde{l}$ , выпуклая.

Значит, на разбиение плоскости  $\mathbb{R}^2(h, c)$  на области с типами молекул влияет то, как именно кривые  $\tilde{l}$  при  $\lambda \in [a_1, b_1]$  и  $\lambda \in [a_2, b_2]$  пересекают остальные разделяющие кривые. Рассмотрим области, образованные кривыми  $\tilde{l}$  при  $\lambda \in [a_3, b_3]$ ,  $\tilde{s}$ ,  $\tilde{\sigma}$  и отрезком  $\tilde{t}_0$ .

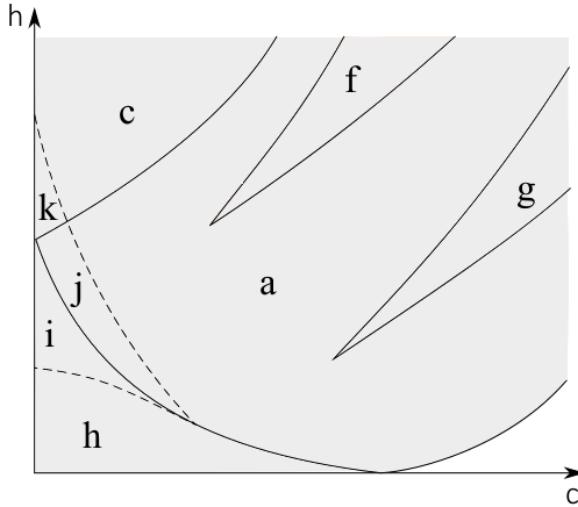


Рис. 2.13: Постоянные области без учета кривых  $\tilde{l}$  при  $\lambda \in [a_1, b_1]$  и  $\lambda \in [a_2, b_2]$

Мы получим 8 различных областей, изображенных на рисунке 2.13, которые не будут качественно меняться при изменении параметров  $K, I, d$ . При добавлении к кривым на рисунке 2.13 двух кривых  $\tilde{l}$  при  $\lambda \in [a_1, b_1]$  и  $\lambda \in [a_2, b_2]$  мы получим полный список кривых из теоремы 2.9. При этом, для областей  $a, i, j, h, c, k$  верно, что они могут разбиться на максимум 3 части при пересечении с кривыми  $\tilde{l}$  при  $\lambda \in [a_1, b_1]$  и  $\lambda \in [a_2, b_2]$ . Часть области, которая будет находиться ниже обеих рассматриваемых кривых  $\tilde{l}$ , обозначим через название данной области с индексом 1. Часть, которая будет выше обеих кривых - с индексом 4. Части области, находящейся между кривыми  $\tilde{l}$ , припишем индекс 2, если в этой области ниже находится кривая  $\tilde{l}$  при  $\lambda \in [a_1, b_1]$ , и индекс 3 — иначе. Отметим, что часть области может совпадать со всей областью, если кривые  $\tilde{l}$  эту область не пересекают. Правило простановки индексов не меняется. Таким образом, мы получим 24 области с различными типами молекул, которые могут возникать в системе шар Чаплыгина с ротором. Область  $f$  может разбиться на максимум 2 части при пересечении с кривой  $\tilde{l}$  при  $\lambda \in [a_2, b_2]$ . Область  $g$  останется неизменной. Таким образом, суммарно мы получим 27 различных областей.

Докажем первые два пункта теоремы. Молекулы допустимых кривых на бифуркационных диаграммах  $A1, A2, A3$  на рис. 2.9, соответствующих случаю  $c = 0$ , совпадают с молекулами кривых на бифуркационных диаграммах  $B1, B3, B2$  на рис. 2.10, соответствующих случаю  $c > 0$ . Это вытекает из вида кривых, разделяющих области с различными типами молекул, из

теоремы 2.9. Рассмотрим малое увеличение параметра  $c$ . Из точки  $\widetilde{P}_0$  выходят две расходящиеся ветви кривой  $\widetilde{\sigma}$ , образовывая новую область, которой не было в случае  $c = 0$ . Остальные же области являются продолжением областей в случае  $c = 0$ , значит тип молекул не меняется.

Покажем теперь, что каждое из трехмерных многообразий, отвечающих допустимым кривым 1–27 на рис. 2.9, 2.10, реализуется в виде изоэнергетической поверхности. Выберем конкретные значения параметров  $K$ ,  $I$  и  $d$  и рассмотрим получающиеся для них бифуркационные диаграммы и соответствующие им кривые, разделяющие типы молекул. Кривые  $H = \text{const}$  ниже обозначены такими же номерами, что и соответствующие им допустимые кривые. Уровни значений  $c$ , для которых построены бифуркационные диаграммы, отмечены на диаграмме с кривыми, разделяющими типы молекул, тонкими серыми линиями. Рисунки 2.14, 2.15, 2.16, 2.17 построены с помощью графических пакетов на языке Python по формулам из теорем 2.9 и 2.1 при подобранных значениях параметров системы  $K$ ,  $I$  и  $d$ . На рисунках 2.15 и 2.16 отдельно увеличены и вынесены влево участки разделяющих кривых на плоскости  $\mathbb{R}^2(h, c)$ , чтобы было удобнее обозначать названия областей на них. Так как кривые, разделяющие типы молекул, симметричны относительно оси  $h$  будем изображать их только при  $c > 0$ . В каждом из четырех случаев ниже в таблицах приведены соотношения номеров кривых и областей с различными типами молекул.

- $K = (3.24, 0.7, 2.87)$ ,  $I = (0.87, 2.44, 4.17)$ ,  $d = 1.63$ . См. рис. 2.14.

Область	$i_1$	$j_1$	$k_1$	$c_1$	$c_2$
Прямая	5	17	21	9	11

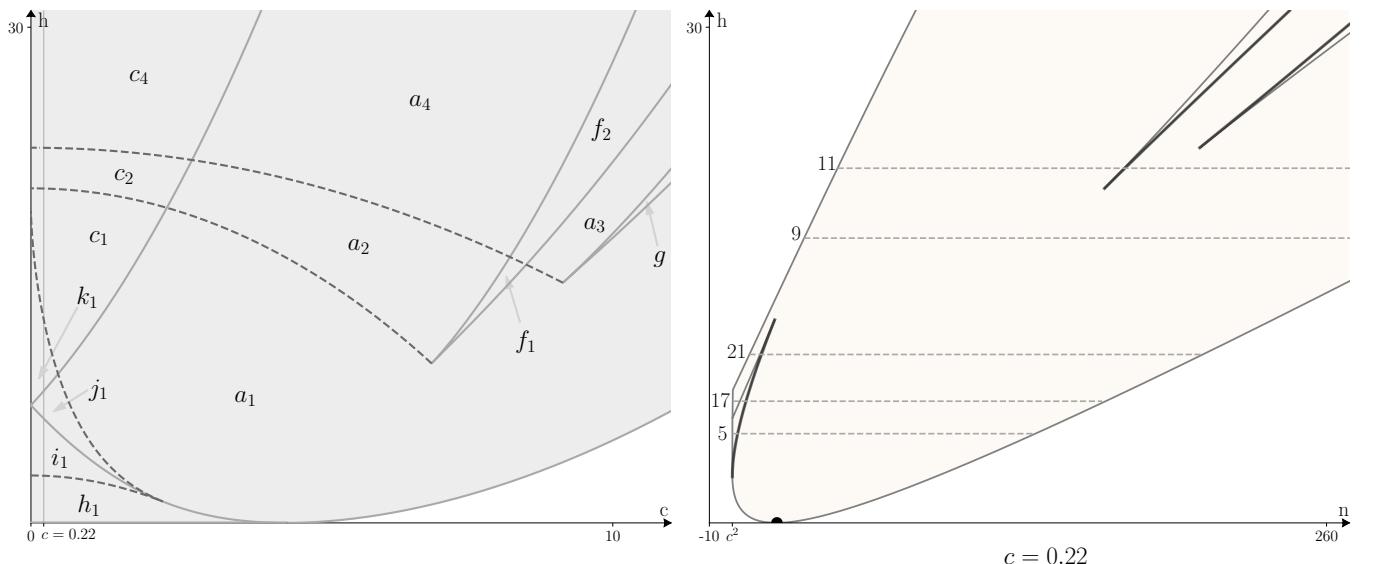


Рис. 2.14: Соответствие изоэнергетических поверхностей и допустимых кривых при  $K = (3.24, 0.7, 2.87)$ ,  $I = (0.87, 2.44, 4.17)$ ,  $d = 1.63$

- $K = (0.43, 0.48, 1.23)$ ,  $I = (0.1, 1.53, 4.2)$ ,  $d = 0.48$ . См. рис. 2.15.

Область	$i_2$	$j_2$	$k_2$	$k_4$	$h_1$	$f_1$	$a_2$	$a_4$	$c_4$
Прямая	7	19	23	24	1	26	15	16	12

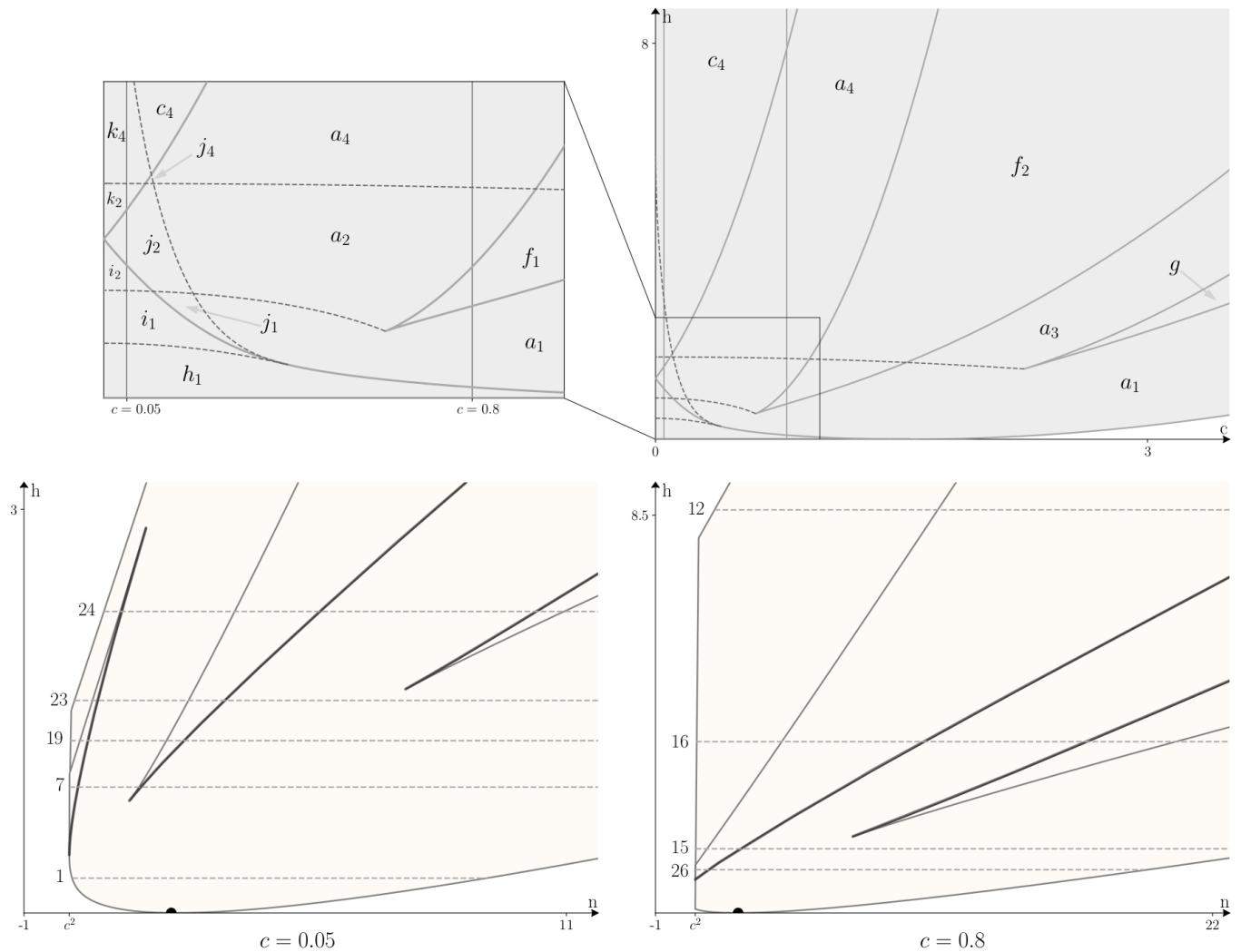


Рис. 2.15: Соответствие изоэнергетических поверхностей и допустимых кривых при  $K = (0.43, 0.48, 1.23)$ ,  $I = (0.1, 1.53, 4.2)$ ,  $d = 0.48$

- $K = (1.1, 1, 5.56)$ ,  $I = (0.06, 1.23, 7.48)$ ,  $d = 0.15$ . См. рис. 2.16.

Область	$h_2$	$h_4$	$i_4$	$j_4$
Прямая	3	4	8	20

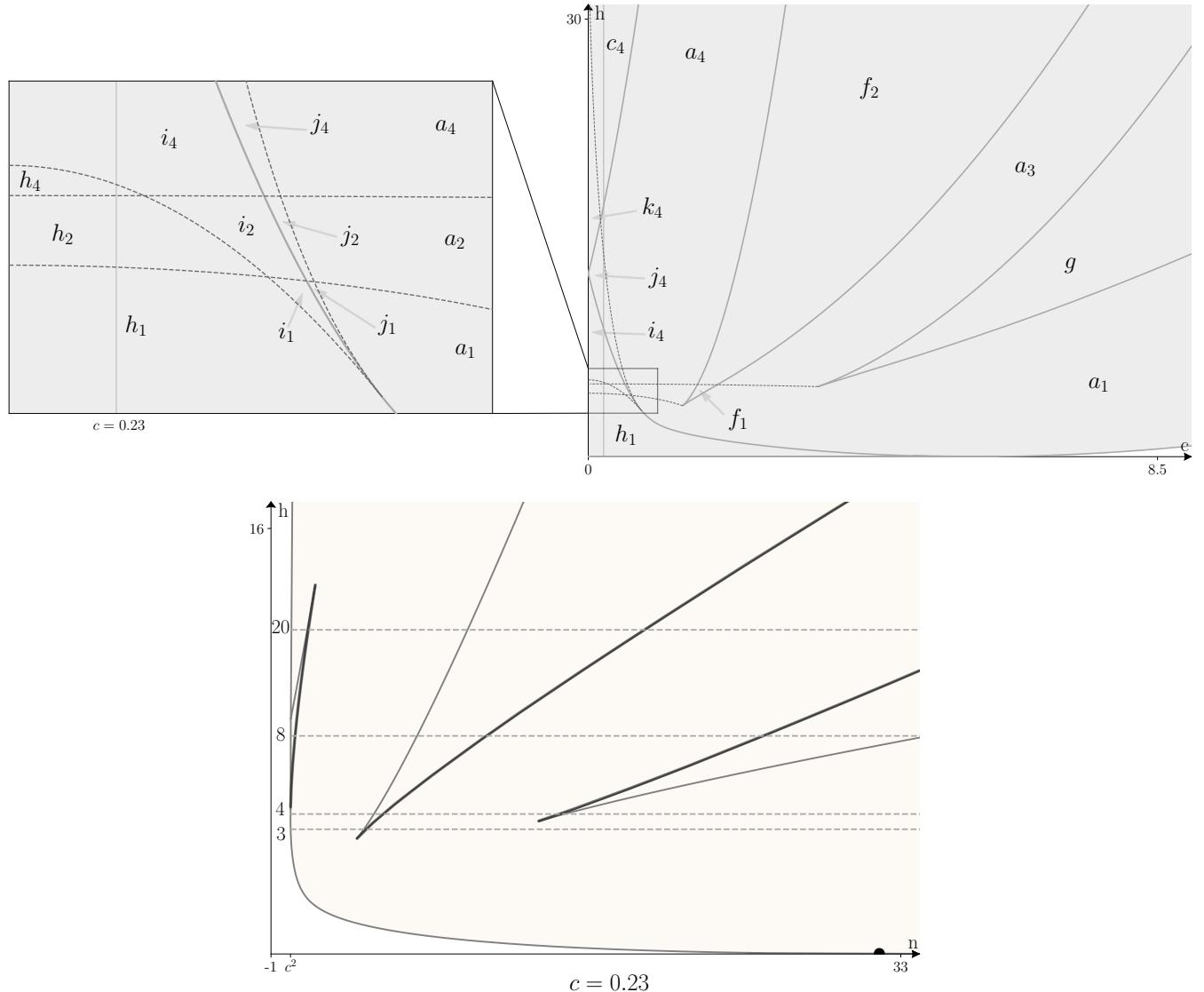


Рис. 2.16: Соответствие изоэнергетических поверхностей и допустимых кривых при  $K = (1.1, 1, 5.56)$ ,  $I = (0.06, 1.23, 7.48)$ ,  $d = 0.15$

- $K = (0.76, 0.81, 0.59)$ ,  $I = (0.32, 1.42, 9.56)$ ,  $d = 0.48$ . См. рис. 2.17.

Область	$h_3$	$i_3$	$j_3$	$k_3$	$c_3$	$a_1$	$g$	$a_3$	$f_2$
Прямая	2	6	18	22	10	13	27	14	25

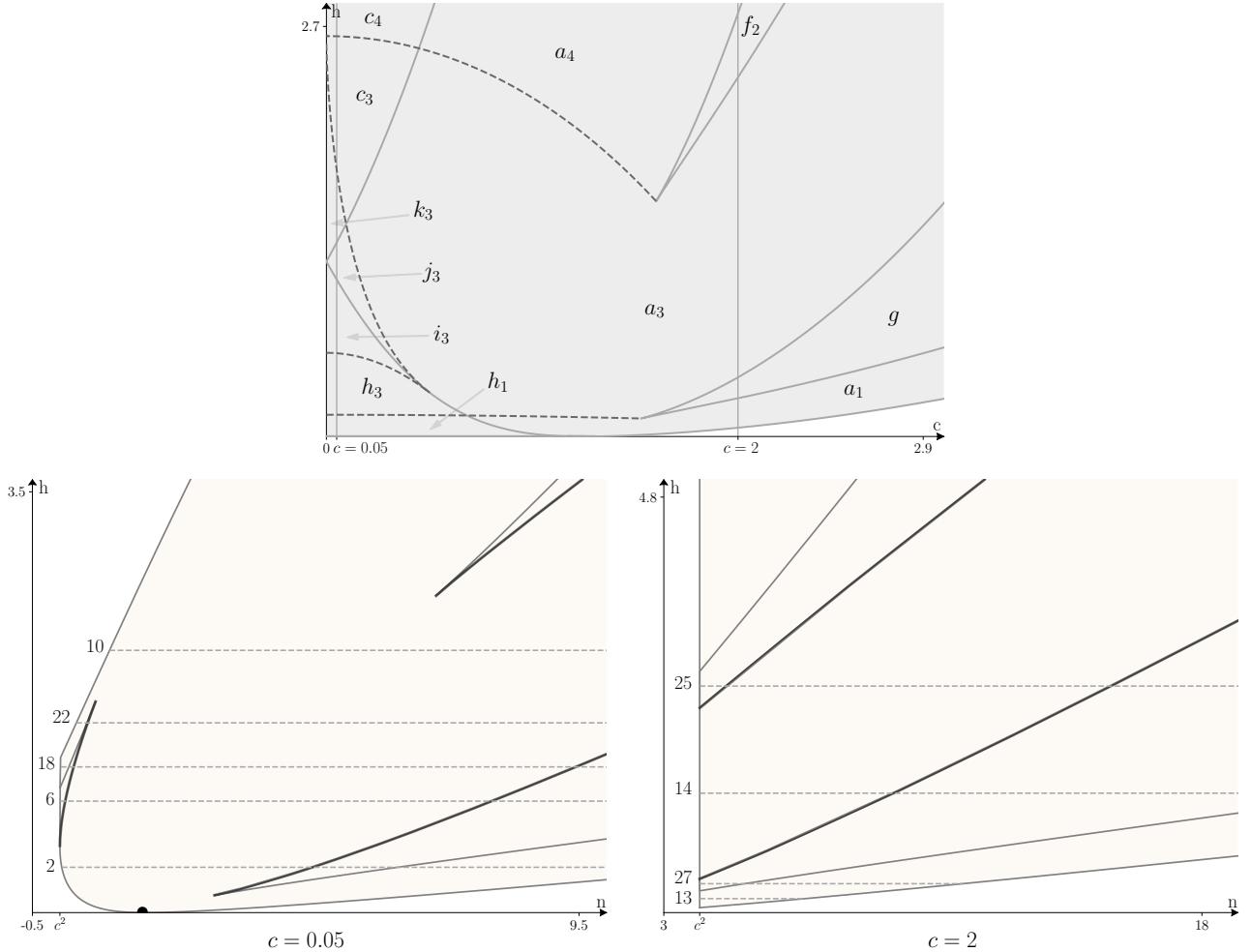


Рис. 2.17: Соответствие изоэнергетических поверхностей и допустимых кривых при  $K = (0.76, 0.81, 0.59)$ ,  $I = (0.32, 1.42, 9.56)$ ,  $d = 0.48$

□

### Комментарий к теореме 2.10:

Для пяти бифуркационных диаграмм на рис. 2.3 мы пока не знаем, существуют ли такие значения параметров системы, для которых эти диаграммы действительно реализуются. Но, тем не менее, мы вычислили молекулы и топологические типы трехмерных поверхностей для допустимых кривых 28 – 39 (рис. 2.18) на этих бифуркационных диаграммах. Они указаны в таблице 2.2. Напомним, что если и существуют бифуркационные диаграммы, не попадающие под классификацию типов диаграмм из гипотезы 1, то это диаграммы из списка на рис. 2.3.

Допустимые кривые 28 – 39 соответствуют случаям попадания точек возврата  $\widetilde{M}_3$ ,  $\widetilde{M}_4$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  внутрь криволинейного треугольника с вершинами  $M_1$ ,  $\widetilde{M}_1$ ,  $\widetilde{Z}$  на рис. 2.8. Диаграмма D3 на рис. 2.18 объединяет в себе допустимые кривые для диаграмм 3 и 5 рис. 2.3.

Рис. 2.18: Допустимые кривые при  $c > 0$  для бифуркационных диаграмм обсуждавшихся в гипотезе 1. А именно, гипотетически возможных типов диаграмм, которые могли бы появиться в системе шар Чаплыгина с ротором, но гипотеза 1 утверждает, что они, на самом деле, не реализуются.

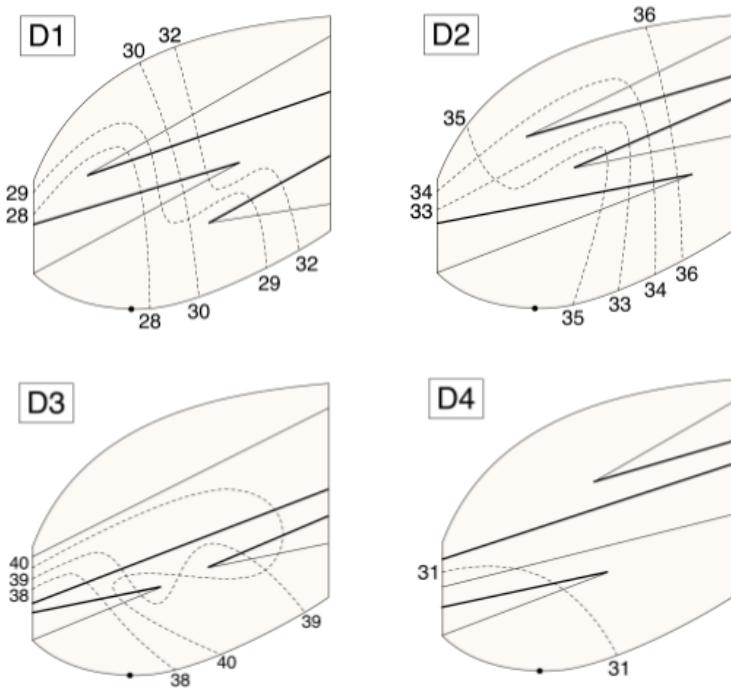


Таблица 2.2: Молекулы и топологические типы для допустимых кривых на рис. 2.18.

№	Топологический тип	Молекула	Номера допустимых кривых на рис. 2.18
1	$S^3$		28
2	$S^3$		29, 34
3	$S^3$		33

Таблица 2.2: продолжение

4	$2S^3$	<pre> graph LR     A1 --- B1     A1 --- B2     B1 --- A2     B1 --- A3   </pre>	31
5	$\mathbb{R}P^3$	<pre> graph LR     A1 --- B1     A1 --- B2     A2 --- B3     A2 --- B4     B1 --- A3     B1 --- A4     B2 --- A5   </pre>	32, 36
6	$\mathbb{R}P^3$	<pre> graph LR     A1 --- B1     A1 --- B2     A2 --- B3     A2 --- B4     B1 --- A3     B1 --- A4     B2 --- A5   </pre>	35
7	$\mathbb{R}P^3$	<pre> graph LR     A1 --- B1     A1 --- B2     A2 --- B3     A2 --- B4     B1 --- A3     B1 --- A4     B2 --- A5   </pre>	30
8	$S^1 \times S^2$	<pre> graph LR     A1 --- B1     A1 --- B2     A2 --- B3     A2 --- B4     B1 --- A3     B1 --- A4     B2 --- A5   </pre>	37
9	$S^1 \times S^2$	<pre> graph LR     A1 --- B1     A1 --- B2     A2 --- B3     A2 --- B4     B1 --- A3     B1 --- A4     B2 --- A5   </pre>	38, 39

## Глава 3

# Классификация матриц склейки на круговых молекулах точек типа центр-центр

В теории топологических инвариантов Фоменко–Цишанга хорошо известно, что для точек типа центр-центр  $r$ -метка на круговой молекуле всегда равна 0. Про  $\varepsilon$ -метку известно, что она зависит от ориентации многообразия  $Q^3$ , ориентации критических окружностей дополнительного интеграла  $F$  интегрируемой системы и ориентации ребер молекулы. В данной работе рассмотрен способ явного задания ориентации базисных циклов и найдены матрицы склейки на круговых молекулах точек типа центр-центр в зависимости от расположения дуг бифуркационной диаграммы.

Исследования в области механики твердого тела включают в себя изучение топологии фазового пространства интегрируемых систем, классификацию особенностей, построение бифуркационных диаграмм и определение типов бифуркаций, вычисление глобальных и локальных инвариантов слоения Лиувилля, траекторных инвариантов. С помощью топологических инвариантов можно выявлять эквивалентные и неэквивалентные интегрируемые системы. Все исследования проводятся в рамках теории Фоменко–Цишанга классификации интегрируемых систем, основанной на инвариантах Фоменко (называемых грубыми молекулами) и инвариантах Фоменко–Цишанга (называемых мечеными молекулами), использующих бифуркационные комплексы (подробности см. в [5, 13, 14, 4]).

Одним из способов построения меченой молекулы произвольной допустимой кривой является извлечение информации о метках и базисных циклах из круговых молекул особых точек (про круговые молекулы подробнее см. в работе [3]). Особые точки типа центр-центр встречаются почти в каждой интегрируемой системе, но, тем не менее, на данный момент известны только  $r$ -метки на их круговых молекулах и допустимые базисы, соответствующие (как в [15]) дугам бифуркационной диаграммы, пересекающихся в таких точках, см. [3]. В данной работе

вычислены различные матрицы склейки в случае точек типа центр-центр, на основе которых в дальнейшем можно будет вычислять  $\varepsilon$ -метки молекул.

Разные авторы часто в своих работах подходят к выбор ориентации различными способами, а значение  $\varepsilon$ -метки напрямую зависит от выбора ориентации. Поэтому в данной работе предлагается введение единого подхода к выбору ориентации, согласующееся с теорией из книги [4].

### 3.1 Базисные циклы и правила задания ориентации

Круговая молекула для точки типа центр-центр имеет вид  $A-A$ . Мы хотим явно построить базисные циклы и выписать соответствующие матрицы склейки для торов, лежащих в прообразе точек допустимой кривой, соединяющей дуги бифуркационной диаграммы, отвечающие перестройкам типа  $A$ .

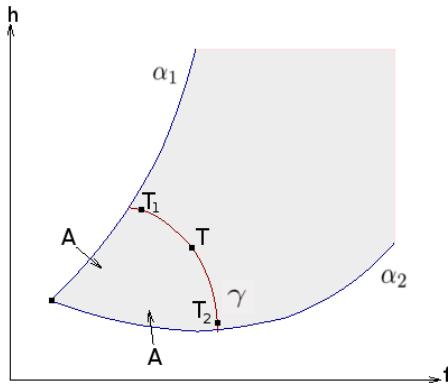


Рис. 3.1: Допустимая кривая  $\gamma$

Пусть кривые  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  на бифуркационной диаграмме, каждая из которых отвечает перестройкам типа  $A$ , пересекаются в точке, прообраз которой содержит точку ранга 0 типа центр-центр (см. рисунок 3.1). Проведем допустимую кривую  $\gamma$  и рассмотрим тор  $T$ , лежащий в прообразе одной из ее точек. На этот тор приходят базисные циклы с торах  $T_1$  и  $T_2$ , расположенных около кривых  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :

$$A_{\alpha_1} \rightarrow (\lambda_{\alpha_1}, \mu_{\alpha_1}), \quad A_{\alpha_2} \rightarrow (\lambda_{\alpha_2}, \mu_{\alpha_2}).$$

Эти циклы  $\lambda_{\alpha_i}, \mu_{\alpha_i}$  выбираются на торах  $T_1$  и  $T_2$  так, чтобы были выполнены следующие условия:

1. направление цикла  $\mu_{\alpha_i}$  совпадает с направлением  $sgrad H$  на соответствующей критической окружности,
2. цикл  $\lambda_{\alpha_i}$  стягивается в точку при приближении к соответствующей дуге  $\alpha_i$ ,
3. пара циклов  $(\lambda_{\alpha_i}, \mu_{\alpha_i})$  положительно ориентирована на торе  $T_i$ .

Рассматривая пары циклов  $(\lambda_{\alpha_1}, \mu_{\alpha_1})$  и  $(\lambda_{\alpha_2}, \mu_{\alpha_2})$ , приходящие на тор  $T$  с торов  $T_1$  и  $T_2$  соответственно, как базисы в группе одномерных гомологий, мы получаем матрицу склейки:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_1} \\ \mu_{\alpha_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_2} \\ \mu_{\alpha_2} \end{pmatrix}.$$

Как указано выше, на граничном торе полнотория в качестве первого базисного цикла  $\lambda$  берется меридиан полнотория, т.е. цикл, стягивающийся в точку внутри полнотория, а в качестве второго цикла  $\mu$  — произвольный цикл, дополняющий  $\lambda$  до базиса. Ориентация цикла  $\mu$  задается потоком  $sgrad H$ , после чего ориентация цикла  $\lambda$  однозначно определяется ориентацией на граничном торе. Зафиксируем правила, с помощью которых мы будем задавать ориентацию на граничном торе полнотория.

Пусть  $H$  — гамильтониан, а  $F$  — дополнительный интеграл гамильтоновой системы на симплектическом многообразии  $M^4$ . Рассмотрим отображение момента  $\mathcal{F} = H \times F : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, f)$ . Образ отображения момента в окрестности точки типа центр-центр на плоскости  $\mathbb{R}^2(h, f)$  выглядит как “угол”, ограниченный двумя дугами бифуркационной диаграммы (см. рис. 3.1). Прообраз кривой  $\gamma$  с концами на этих дугах является трехмерным многообразием  $Q_\gamma^3 = \{x \in M^4 | \mathcal{F}(x) \in \gamma\}$ , гомеоморфным трехмерной сфере  $S^3$ . При этом прообразами концов кривой  $\gamma$  являются критические окружности (на которых  $sgrad H$  и  $sgrad F$  зависят), а прообразами внутренних точек кривой — торы Лиувилля. Любой такой тор  $T^2$  разбивает  $Q_\gamma^3$  на два полнотория, т.е. является граничным тором для каждого из них. Ориентация на торе  $T^2$  зависит от того, для какого из двух полноторий мы рассматриваем его как граничный тор, и определяется следующим образом.

1. На симплектическом многообразии  $M^4$  ориентация задана формой  $\omega \wedge \omega$ .
2. Ориентация на многообразии  $Q_\gamma^3$  задается нормалью к  $Q_\gamma^3$  в  $M^4$ , т.е. тройка векторов  $e_1, e_2, e_3$  в касательном пространстве к  $Q_\gamma^3$  будет положительно ориентирована, если четверка векторов  $e_1, e_2, e_3, \bar{n}$  положительно ориентирована в  $M^4$ . При этом нормаль  $\bar{n}$  будем выбирать так, чтобы при отображении момента она переходила в нормаль к кривой  $\gamma$ , направленную во внешнюю сторону по отношению к треугольнику, образованному двумя дугами бифуркационной диаграммы и кривой  $\gamma$ .
3. Ориентация на торе  $T^2 \subset Q_\gamma^3$  задается нормалью  $\bar{N}$  к тору  $T^2$  в  $Q_\gamma^3$ , т.е. пара векторов  $e_1, e_2$  в касательном пространстве к  $T^2$  будет положительно ориентирована, если тройка векторов  $e_1, e_2, \bar{N}$  положительно ориентирована в  $Q_\gamma^3$ . При этом нормаль  $\bar{N}$  будем выбирать так, чтобы она была внешней нормалью для полнотория, граничным тором которого является рассматриваемый тор  $T^2$ .

Итог: положительная ориентированность пары векторов  $e_1, e_2$  на торе  $T^2$  задается условием

$$\omega \wedge \omega(e_1, e_2, \bar{N}, \bar{n}) > 0. \tag{3.1}$$

Отметим, что в случае, когда кривая  $\gamma$  задана уравнением  $H = \text{const}$  (в этом случае  $Q_\gamma^3$  называется изоэнергетической поверхностью) в качестве нормалей  $\bar{n}$  и  $\bar{N}$  можно брать  $\pm \text{grad } H$  и  $\pm \text{grad } F$  соответственно.

## 3.2 Классификация круговых молекул точек типа центр-центр

Пусть  $P \in M^4$  — особая точка типа центр-центр. Тогда образ окрестности точки  $P$  при отображении момента  $\mathcal{F} = H \times F$  есть часть плоскости  $\mathbb{R}^2(h, f)$ , ограниченная дугами бифуркационных кривых  $\alpha$  и  $\delta$ , выходящими из точки  $\mathcal{F}(P) = (H(P), F(P))$ . Мы хотим описать базисные циклы и матрицы склейки для кривых  $\gamma$  с концами на дугах  $\alpha$  и  $\delta$  (см. рис. 3.1). Это даст нам возможность по виду дуг  $\alpha$  и  $\delta$  легко определять  $\varepsilon$ -метку в дальнейшем.

Если мы заменим гамильтониан  $H$  и интеграл  $F$  на функции  $\tilde{H} = \tilde{h}(H, F)$  и  $\tilde{F} = \tilde{f}(H, F)$ , то для новой интегрируемой системы с гамильтонианом  $\tilde{H}$  и интегралом  $\tilde{F}$  критические точки (где гамильтониан и интеграл зависят) не изменятся, а дуги  $\alpha$  и  $\delta$  бифуркационной диаграммы перейдут в новые дуги  $\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{\delta}$  под действием диффеоморфизма  $(h, f) \rightarrow (\tilde{h}(h, f), \tilde{f}(h, f))$ . Действуя таким образом, можно менять вид дуг  $\alpha$  и  $\delta$ . Для простоты будем считать, что образ точки  $P$  при этом диффеоморфизме не меняется, т.е. все дуги (старые и новые) выходят из одной и той же точки  $(H(P), F(P)) = (\tilde{H}(P), \tilde{F}(P))$ .

Для любой критической окружности  $S^1$ , лежащей в прообразе некоторой точки дуги  $\alpha$  или дуги  $\delta$ , во всех ее точках  $\text{sgrad } H$  и  $\text{sgrad } \tilde{H}$  будут пропорциональны. Так как ориентация на цикле  $\mu$  определяется направлением  $\text{sgrad } H$  на критической окружности, то для того, чтобы понять, как изменится матрица склейки при замене  $H$  и  $F$  на  $\tilde{H}$  и  $\tilde{F}$ , нужно знать знак коэффициента пропорциональности между  $\text{sgrad } H$  и  $\text{sgrad } \tilde{H}$ .

**Лемма 3.1.** *Пусть  $\alpha(t) = (h(t), f(t))$  — одна из дуг бифуркационной диаграммы, выходящая из точки типа центр-центр, для системы с гамильтонианом  $H$  и интегралом  $F$ , а  $\tilde{\alpha}(t) = (\tilde{h}(h(t), f(t)), \tilde{f}(h(t), f(t)))$  — соответствующая ей дуга бифуркационной диаграммы для системы с гамильтонианом  $\tilde{H} = \tilde{h}(H, F)$  и интегралом  $\tilde{F} = \tilde{f}(H, F)$ . Тогда в точках критической окружности, лежащей в прообразе точки  $\alpha(t)$*

$$\text{sgrad } \tilde{H} = \frac{d\tilde{h}/dt}{dh/dt} \text{sgrad } H.$$

*Доказательство.* Пусть  $\beta(t)$  — кривая в  $M^4$ , образ которой при отображении момента  $\mathcal{F}$  есть бифуркационная кривая  $\alpha(t)$ . Тогда

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt}(H(\beta(t))) = dH\left(\frac{d\beta}{dt}\right).$$

Аналогично для функции  $\tilde{H}$ :

$$\frac{d\tilde{h}}{dt} = \frac{d}{dt}(\tilde{H}(\beta(t))) = d\tilde{H}\left(\frac{d\beta}{dt}\right).$$

Если  $\text{sgrad } \tilde{H} = k \cdot \text{sgrad } H$ , то  $d\tilde{H} = k \cdot dH$ , а значит,  $\frac{d\tilde{h}}{dt} = k \cdot \frac{dh}{dt}$ .  $\square$

Из леммы 3.1 следует, что направления потоков  $\text{sgrad } H$  и  $\text{sgrad } \tilde{H}$  на критических окружностях, лежащих в прообразе бифуркационной кривой в малой окрестности точки  $P$  типа центр-центр, одинаковы, если вектора скорости кривых  $\alpha$  и  $\tilde{\alpha}$  в точке  $\mathcal{F}(P) = (H(P), F(P))$  лежат в одной и той же полуплоскости с границей  $h = H(P)$ . И наоборот, направления потоков  $\text{sgrad } H$  и  $\text{sgrad } \tilde{H}$  противоположны, если эти вектора лежат в разных полуплоскостях. Отметим, что мы не рассматриваем случай, когда вектор скорости бифуркационной кривой в точке  $\mathcal{F}(P)$  перпендикулярен оси  $h$ , так как в этом случае вектор  $\text{sgrad } H$  может быть нулевым, что не позволяет применить правило для ориентации цикла  $\mu$ .

Ясно, что применяя подходящий диффеоморфизм  $(h, f) \rightarrow (\tilde{h}(h, f), \tilde{f}(h, f))$ , мы можем “выпрямить” дуги  $\alpha$  и  $\delta$ , т.е. заменить функции  $H$  и  $F$  на такие функции  $\tilde{H}$  и  $\tilde{F}$ , что бифуркационная диаграмма в окрестности точки  $\mathcal{F}(P)$  будет выглядеть, как пара лучей с теми же касательными векторами в точке  $\mathcal{F}(P)$ . Дифференциал такого диффеоморфизма будет тождественным в точке  $\mathcal{F}(P)$ , т.е. направления потока  $\text{sgrad } H$  на критических окружностях не поменяется.

Более того, можно считать, что в некоторых симплектических координатах  $(q_1, q_2, p_1, p_2)$

$$H = \frac{1}{2}(a(p_2^2 + q_2^2) + k(p_1^2 + q_1^2)), \quad F = \frac{1}{2}(b(p_1^2 + q_1^2) + m(p_2^2 + q_2^2)), \quad (3.2)$$

где  $a, b = \pm 1$  и  $k \neq 0$ . Тогда

$$\text{sgrad } H = (kp_1, ap_2, -kq_1, -aq_2), \quad \text{sgrad } F = (bp_1, mp_2, -bq_1, -mq_2), \quad (3.3)$$

а множество особых точек системы задается либо условием  $p_1 = q_1 = 0$ , либо условием  $p_2 = q_2 = 0$ . Получаем, что луч  $\delta$  задается условиями  $f = amh$ ,  $2ah \geq 0$ , и в прообразах его точек лежат окружности  $\{p_1 = q_1 = 0, p_2^2 + q_2^2 = 2ah\}$ , а луч  $\alpha$  задается условиями  $h = bkf$ ,  $bf \geq 0$ , и в прообразах его точек лежат окружности  $\{p_2 = q_2 = 0, p_1^2 + q_1^2 = 2bf\}$ .

Расположение лучей  $\alpha$  и  $\delta$  зависит от знаков констант  $a, b, k, m$ . Рассмотрим один из возможных случаев:  $a = b = 1, m = 0, k > 0$ .

**Лемма 3.2.** Для системы с гамильтонианом  $H = \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2 + k(p_1^2 + q_1^2))$ , где  $k > 0$ , и интегралом  $F = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2)$  матрица склейки на ребре  $A - A$  круговой молекулы особой точки  $P = (0, 0, 0, 0)$  имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  (при некотором выборе базисных циклов). В частности,  $\varepsilon$ -метка равна  $-1$ .

*Доказательство.* Опишем явное построение базисных циклов  $\lambda_\alpha, \mu_\alpha, \lambda_\delta, \mu_\delta$ .

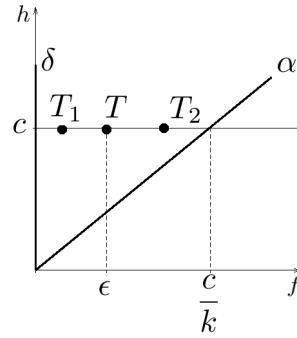


Рис. 3.2: Случай  $a = b = 1, m = 0, k > 0$ .

- Для рассматриваемых гамильтониана  $H$  и интеграла  $F$  луч  $\delta$  задается условиями  $f = 0, h \geq 0$ , а луч  $\alpha$  — условиями  $h = kf, f \geq 0$ . Рассмотрим в качестве кривой  $\gamma$ , соединяющей лучи  $\alpha$  и  $\delta$ , отрезок  $\{h = c, 0 \leq f \leq \frac{c}{k}\}$  и соответствующее многообразие  $Q_\gamma^3$ . Для каждого тора Лиувилля  $T = \{h = c, f = \varepsilon\} \subset Q_\gamma^3$  со стороны луча  $\delta$  на него приходят циклы  $(\lambda_\delta, \mu_\delta)$  с тора  $T_1$ , а со стороны прямой  $\alpha$  — циклы  $(\lambda_\alpha, \mu_\alpha)$  с тора  $T_2$  (см. рис. 3.2). В симплектических координатах  $(q_1, q_2, p_1, p_2)$  тор  $T$  можно запараметризовать следующим образом:

$$\begin{cases} q_1 = \sqrt{2\varepsilon} \cos \varphi, & q_2 = \sqrt{2(c - k\varepsilon)} \cos \psi \\ p_1 = \sqrt{2\varepsilon} \sin \varphi, & p_2 = \sqrt{2(c - k\varepsilon)} \sin \psi \end{cases} \quad (3.4)$$

- Найдем циклы  $\lambda_\delta$  и  $\mu_\delta$ . Из формул (3.3) для выбранных значений параметров  $a = b = 1, m = 0, k > 0$  с учетом формул (3.4) получаем, что на торе  $T = \{h = c, f = \varepsilon\}$

$$\text{sgrad } H = (k\sqrt{2\varepsilon} \sin \varphi, \sqrt{2(c - k\varepsilon)} \sin \psi, -k\sqrt{2\varepsilon} \cos \varphi, -\sqrt{2(c - k\varepsilon)} \cos \psi). \quad (3.5)$$

Если  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то этот вектор при  $\varphi = \varphi_0, \psi = \psi_0$  стремится к вектору

$$\text{sgrad } H|_{(\varphi_0, \psi_0), \varepsilon \rightarrow 0} = (0, \sqrt{2c} \sin \psi_0, 0, -\sqrt{2c} \cos \psi_0). \quad (3.6)$$

Цикл  $\mu_\delta$  можно выбрать следующим образом:

$$\mu_\delta : \begin{cases} \varphi = \varphi_0 \\ \psi = \psi_0 - t \end{cases} \quad (3.7)$$

Действительно, тогда вектор скорости кривой (3.7) имеет вид

$$\dot{\mu}_\delta = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{p}_1, \dot{p}_2) = (0, \sqrt{2(c - k\varepsilon)} \sin(\psi_0 - t), 0, -\sqrt{2(c - k\varepsilon)} \cos(\psi_0 - t))$$

и, очевидно, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $\varphi = \varphi_0, \psi = \psi_0$  стремится к вектору (3.6), что и требовалось.

Теперь найдем цикл  $\lambda_\delta$ . Так как он должен стягиваться при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то из (3.4) следует, что он задается уравнением  $\psi = \text{const}$ . Поэтому нужно лишь выбрать на нем правильное

направление в соответствии с условием (3.1). Выбирая цикл  $\lambda_\delta$  следующим образом

$$\lambda_\delta : \begin{cases} \varphi = \varphi_0 + t \\ \psi = \psi_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

проверим, что в точке  $(\varphi_0, \psi_0)$  условие (3.1) выполнено для четверки векторов:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_\delta = (-\sqrt{2\varepsilon} \sin \varphi_0, 0, \sqrt{2\varepsilon} \cos \varphi_0, 0) \\ \dot{\mu}_\delta = (0, \sqrt{2(c - k\varepsilon)} \sin \psi_0, 0, -\sqrt{2(c - k\varepsilon)} \cos \psi_0) \\ \text{grad } F = (\sqrt{2\varepsilon} \cos \varphi_0, 0, \sqrt{2\varepsilon} \sin \varphi_0, 0) \\ \text{grad } H = (k\sqrt{2\varepsilon} \cos \varphi_0, \sqrt{2(c - k\varepsilon)} \cos \psi_0, k\sqrt{2\varepsilon} \sin \varphi_0, \sqrt{2(c - k\varepsilon)} \sin \psi_0) \end{cases}$$

Действительно,  $\omega \wedge \omega(\dot{\lambda}_\delta, \dot{\mu}_\delta, \text{grad } F, \text{grad } H) = 8\varepsilon(c - k\varepsilon) > 0$ , т.е. базис  $(\lambda_\delta, \mu_\delta)$ , заданный формулами (3.8) и (3.7), положительно ориентирован на граничном торе полнотория, соответствующего лучу  $\delta$ .

3. Аналогичным образом построим циклы  $\lambda_\alpha$  и  $\mu_\alpha$ . Задавая цикл  $\mu_\alpha$  формулами

$$\mu_\alpha : \begin{cases} \varphi = \varphi_0 - s \\ \psi = \psi_0 \end{cases} \quad (3.9)$$

получаем, что его вектор скорости

$$\dot{\mu}_\alpha = (\sqrt{2\varepsilon} \sin(\varphi_0 - s), 0, -\sqrt{2\varepsilon} \cos(\varphi_0 - s), 0)$$

при  $\varepsilon \rightarrow \frac{c}{k}$  и  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\psi = \psi_0$  стремится к вектору, пропорциональному вектору

$$\text{sgrad } H|_{(\varphi_0, \psi_0), \varepsilon \rightarrow \frac{c}{k}} = (\sqrt{2kc} \sin \varphi_0, 0, -\sqrt{2kc} \cos \varphi_0, 0),$$

с коэффициентом  $\frac{1}{k} > 0$ . Далее, определяя цикл  $\lambda_\alpha$  формулами

$$\lambda_\alpha : \begin{cases} \varphi = \varphi_0 \\ \psi = \psi_0 + s \end{cases} \quad (3.10)$$

получаем, что он стягивается в точку при  $\varepsilon \rightarrow \frac{c}{k}$ . Проверка условия (3.1) для четверки векторов

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_\alpha = (0, -\sqrt{2(c - k\varepsilon)} \sin \psi_0, 0, \sqrt{2(c - k\varepsilon)} \cos \psi_0) \\ \dot{\mu}_\alpha = (\sqrt{2\varepsilon} \sin \varphi_0, 0, -\sqrt{2\varepsilon} \cos \varphi_0, 0) \\ -\text{grad } F = (-\sqrt{2\varepsilon} \cos \varphi_0, 0, -\sqrt{2\varepsilon} \sin \varphi_0, 0) \\ \text{grad } H = (k\sqrt{2\varepsilon} \cos \varphi_0, \sqrt{2(c - k\varepsilon)} \cos \psi_0, k\sqrt{2\varepsilon} \sin \varphi_0, \sqrt{2(c - k\varepsilon)} \sin \psi_0) \end{cases}$$

дает  $\omega \wedge \omega(\dot{\lambda}_\alpha, \dot{\mu}_\alpha, -\text{grad } F, \text{grad } H) = 8\varepsilon(c - k\varepsilon) > 0$ . Это означает, что базис  $(\lambda_\alpha, \mu_\alpha)$ , заданный формулами (3.10) и (3.9), положительно ориентирован на граничном торе полнотория, соответствующего лучу  $\alpha$ .

4. Для найденных базисных циклов находим матрицу склейки:

$$\begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ \mu_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_\delta \\ \mu_\delta \end{pmatrix}.$$

□

Из доказанной леммы 3.2, в которой рассмотрен один из возможных случаев расположения лучей  $\alpha$  и  $\delta$ , теперь можно вывести утверждение про все остальные случаи.

**Теорема 3.3.** *Матрицы склейки для круговых молекул точки типа центр-центр в зависимости от взаимного расположения дуг бифуркационной диаграммы (при задании положительной ориентации условием  $\omega \wedge \omega(\dot{\lambda}, \dot{\mu}, \bar{N}, \bar{n}) > 0$  и подходящем выборе базисных циклов  $\lambda$  и  $\mu$ ) приведены на рисунке 3.3. В частности,  $\varepsilon$ -метка равна  $-1$  для случаев 1–10 и  $1$  для случаев 11–18.*

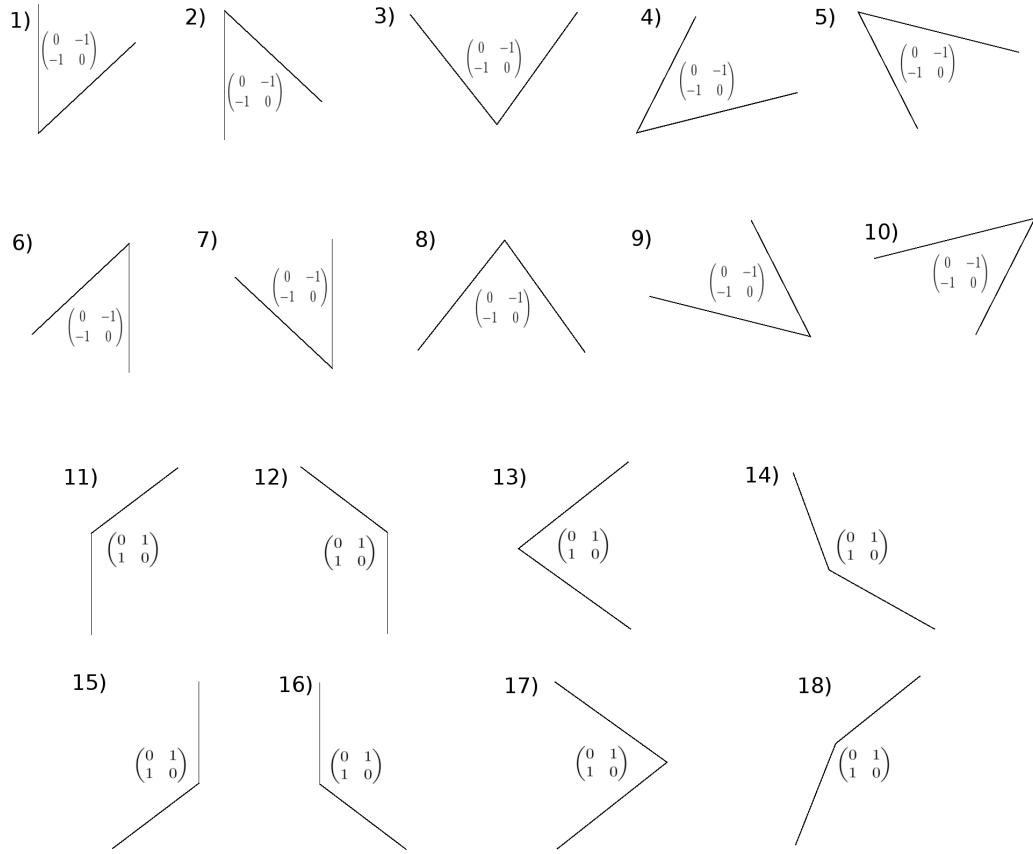


Рис. 3.3: Матрицы склейки для точки центр-центр.

*Доказательство.* Обозначим гамильтониан и интеграл, рассмотренные в лемме 3.2, через  $H_0$  и  $F_0$ , а параметр  $k$  гамильтониана  $H_0$  (который в лемме 3.2 предполагался положительным) через

$k_0$ . Тогда гамильтониан  $H$  и интеграл  $F$ , заданные формулой (3.2), линейно выражаются через  $H_0$  и  $F_0$ :

$$H = aH_0 + (k - ak_0)F_0, \quad F = mH_0 + (b - mk_0)F_0.$$

Это означает, что с помощью линейного диффеоморфизма  $(h, f) \rightarrow (\tilde{h}, \tilde{f}) = (ah + (k - ak_0)f, mh + (b - mk_0)f)$  мы можем перевести лучи  $\alpha$  и  $\delta$ , рассмотренные в лемме 3.2, в любую другую пару лучей.

Легко проверяется, что случаям 1–10 на рис. 3.3 при этом соответствует условие  $ak > 0$ , которое эквивалентно тому, что ориентация критических окружностей, заданная потоком  $sgrad H$ , при этом либо не поменяется, либо поменяется сразу для обоих лучей  $\alpha$  и  $\delta$ . В силу леммы 3.1 это означает, что матрица склейки при этом не поменяется.

Аналогично, случаям 11–18 на рис. 3.3 соответствует условие  $ak < 0$ , которое эквивалентно тому, что ориентация критических окружностей, заданная потоком  $sgrad H$ , поменяется ровно для одного из лучей  $\alpha$  или  $\delta$ . В матрице склейки при этом изменятся знаки.  $\square$

Вопрос о виде матриц склейки в случае точек типа центр–центр также поднимался в работе В.А. Кибкало [15]. В его работе ориентация базиса  $(u, v)$  в  $T_x T^2$  задавалась условием  $\omega \wedge \omega(\text{grad } H, N, u, v) > 0$ , где  $N$  – вектор внешней нормали 3-атома, лежащего в изоэнергетическом многообразии, т.е. множестве  $H = h$ .

**Теорема 3.4** (В.А. Кибкало). *Пусть точка  $L$  – особая точка бифуркационной диаграммы типа центр–центр. Пусть  $\varepsilon_i = \pm 1, i = 1, 2$  – знаки производных  $H$  по направлению пересекающихся дуг  $\gamma_i, i = 1, 2$  соответственно. Тогда допустимые базисы  $\lambda_i, \mu_i$  для дуг  $\gamma_i$  могут быть выбраны такими, что*

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix}.$$

В явном виде матрицы склейки на ребре круговой молекулы такой особой точки в работе [15] найдены не были. Теорема 3.4 задает соотношения на допустимые базисы, применимые для задач, аналогичных решенной в работе [3]: выражение допустимых базисов для дуг бифуркационной диаграммы в терминах однозначно определенных  $\lambda$ -циклов всех этих дуг, т.е. элементов целочисленных решеток на плоскости.

## Заключение

В диссертации были получены результаты о топологических свойствах системы шар Чаплыгина с ротором. Полностью исследована невырожденность особенностей данной системы. Вычислены все инварианты Фоменко данной системы и изучена эквивалентность данной системы

и системы Жуковского. Сформулирована гипотеза о существовании только шести типов бифуркационных диаграмм для данной системы. В рамках этой гипотезы показано, что существует ровно 27 различных областей с одинаковым типом инвариантов системы (для всех значений девяти параметров системы). Изучены все возможные допустимые кривые, и получен, возможно избыточный, список возможных грубых молекул и топологических типов трехмерных поверхностей для допустимых кривых. Следующими перспективными шагами в теме изучения системы шар Чаплыгина с ротором может быть построение инвариантов Фоменко-Цишанга данной системы и подробное изучение того, верна ли гипотеза о шести типах бифуркационных диаграмм. Отдельным направлением в диссертации является классификация матриц склейки круговых молекул точки типа центр-центр. Это исследование носит теоретический характер, и может быть полезно для будущих вычислений  $\varepsilon$ -меток для некоторых молекул в различных системах.

# Литература

- [1] Kilin A.A., *The dynamics of chaplin ball: the qualitative and computeral analysis*, Reg. & Chaot. Dyn. 2001. **6**, No. 3. p. 291–306.
- [2] A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds*, Differential Geometry 1983. **18**, p. 523–557.
- [3] Болсинов А.В., Рихтер П.Х., Фоменко А.Т., *Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской*, Матем. сб. 2000. **191**, No.2, с. 3–42
- [4] Болсинов А.В. Фоменко А.Т., *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, Ижевск: РХД, 1999.
- [5] Фоменко А.Т., *Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости*, Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. **50**, No. 6. с. 1276–1307.
- [6] Фоменко А.Т., *Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю*, Функциональный анализ и его приложения. 1988. **22**, No. 4, с. 38–51.
- [7] Москвин А.Ю., *Топология особенностей дробно-рациональных интегрируемых систем*, Кандидатская диссертация 2010.
- [8] Козлов И.К., *Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли  $so(4)$* , Матем. сб. 2014. **205**, No. 4. с. 79–120.
- [9] Борисов А.В. & Мамаев И.С., *Гамильтонность задачи Чаплыгина о качении Шара*, Мат. заметки 1987. **70**, No. 5. с. 793–795.
- [10] Борисов А.В. & Мамаев И.С., *Динамика твердого тела*, РХД, Ижевск 2005.
- [11] Харламов М.П., *Топологический анализ интегрируемых задачи динамики твердого тела*, Ленинград: Изд-во Ленинградского Университета 1988.
- [12] Чаплыгин С.А., *О катании шара по горизонтальной плоскости*, Мат. сб. 1903. **24**.

- [13] Фоменко А.Т., Ципшанг Х., *О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике*, Докл. АН СССР. 1987. **294**, No. 2. с. 283–287.
- [14] Фоменко А.Т., Ципшанг Х., *О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем*, Изв. АН СССР. 1988. **52**, No. 2. с. 378–407.
- [15] V. Kibkalo, *Topological Analysis of the Liouville Foliation for the Kovalevskaya Integrable Case on the Lie Algebra  $so(4)$* , Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. **39**, No. 9. p. 1331–1334.

## Список публикаций автора по теме диссертации

### Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ

- [16] Жила А.И., *Топологические типы изоэнергетических поверхностей системы “шар Чаплыгина с ротором”*, Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2020. — N.3. — с.52–56.
- [17] Жила А.И., *Классификация матриц склейки на круговых молекулах точек типа центр-центр*, Фундаментальная и прикладная математика. — 2019. — **22**, No.6. — с.85–94.
- [18] Zhila A.I., *Comparison of the system “chaplygin ball with a rotor” and the zhukovskii system from the rough liouville equivalence point of view*, Moscow University Mathematics Bulletin. — 2017. — Vol. 72, no. 6. — P. 245–250.
- [19] Zhila A.I., *Chaplygin’s ball with a rotor: Non-degeneracy of singular points*, Moscow University Mathematics Bulletin. — 2016. — Vol. 71, no. 2. — P. 45–54.

## Тезисы докладов

- [20] Жила А. И., *Матрицы склейки на круговых молекулах точек типа центр-центр*, Материалы Международного научного форума "Ломоносов-2019". — Секция "Математика и механика подсекция "Геометрия и топология". — Москва: Москва, 2019.
- [21] Zhila A., *Chaplygin ball with a rotor: topological analysis*, ABSTRACT BOOK of 2018 International Conference on Topology and its Applications / Ed. by C. Δ. Илиадис. — University of Patras, Greece, Patras, 2018. — P. 223–223.

- [22] Жила А. И., *Изоэнергетические поверхности системы: шар Чаплыгина с ротором*, Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. — Т. 1 из 7. — Издательско-полиграфический центр Научная книга Воронеж, 2017. — С. 77–78.
- [23] Жила А. И., *Грубый лиувиллев анализ системы шар Чаплыгина с ротором*, Материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна — 2016. — Научная книга Воронеж, 2016. — С. 157–159.
- [24] Жила А. И., *Топологические инварианты системы шар Чаплыгина с ротором*, Материалы Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии, посвященной юбилеям П.А. и А.П. Широковых. — Издательство АН РТ Казань, 2016. — С. 168–169.
- [25] Жила А. И., *Топологический анализ системы: шар Чаплыгина с ротором*, Материалы молодежной международной научной конференции Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения. — Т. 1 из 5. — Издательско-полиграфический центр Научная книга Воронеж, 2016. — С. 125–126.