Российская Академия наук
Математический институт им. В. А. Стеклова

На правах рукописи
УДК 517.957+512.72+512.71

Жеглов Александр Борисович

Пучки без кручения на многообразиях и интегрируемые системы

Специальность 01.01.06 —
«математическая логика, алгебра и теория чисел»

Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук

Москва – 2016

Оглавление

Введение

Актуальность темы

В алгебре, теории интегрируемых систем и теории уравнений в частных производных есть две классические проблемы, появившиеся и впервые исследовавшиеся еще в работах Валленберга [145], Шура [135] и Бурхнала-Чаунди [44]: это проблема явного построения семейств коммутирующих дифференциальных операторов и проблема классификации колец коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных.

В 20-х годах 20-го века Бурхнал и Чаунди дали описание пар коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов взаимно простых порядков, сведя задачу к системе уравнений, связанной с аффинной спектральной кривой (т.е. плоской кривой, заданной уравнением, задающим алгебраическое соотношение между коммутирующими операторами). Тогда же Бейкер заметил [31], что можно ввести общую собственную для коммутирующих операторов функцию; эта функция впоследствии (будучи разнообразно модифицирована) сыграла решающую роль в эффективном построении коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов произвольных порядков.

Новый прорыв в решении этих задач был совершён лишь в 70-е годы в связи с бурно развивавшейся теорией точно решаемых нелинейных уравнений в частных производных методом обратной задачи рассеяния, а также теорией конечнозонных периодических и условно периодических решений уравнения КдФ. В работах И. М. Кричевера [19], [20] была дана классификация колец коммутирущих обыкновенных дифференциальных операторов «общего положения» (т.е. для гладких спектральных кривых) в терминах «геометрических спектральных данных», а также изложена идея эффективного построения коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов произвольных порядков. Центральную роль в таком построении, а также в классификации колец, и для построения точных решений нелинейных уравнений в частных производных играла функция Бейкера-Ахиезера или ее векторный аналог. В случае, когда размерность пространства собственных функций кольца дифференциальных операторов в общей точке спектральной кривой равна 1 (такая размерность называется рангом кольца), Кричевером была дана формула для этой функции через тета-функции якобиана спектральной кривой. Классифицируемые кольца удовлетворяли некоторым ограничениям: рассматривались лишь эллиптические кольца, т.е. содержащие оператор ненулевого порядка со старшим коэффициентом 1. Это условие не слишком ограничивало общность, т.к. заменой переменной всегда можно привести кольцо к эллиптическому виду. Геометрические спектральные данные состояли, грубо говоря, из гладкой алгебраической проективной кривой произвольного рода, стабильного векторного расслоения наклона 1 (которое задавалось с помощью детерминантного дивизора и набора параметров Тюрина), и набора функциональных параметров.

В общем случае ранга >1 задача вычисления векторного аналога функции Бейкера-Ахиезера сводится, согласно классификационной теореме Кричевера, к системе сингулярных интегральных уравнений, решить которую в общем случае в явном виде не представляется возможным. Тем не менее, для построения коэффициентов коммутирующих операторов знание явного вида функции Бейкера-Ахиезера не необходимо. С. П. Новиковым и И. М. Кричевером [21] был предложен для этой цели метод деформации параметров Тюрина (задающих общее стабильное векторное расслоение на неособой кривой), с помощью которого можно в некоторых случаях строить явные примеры коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов. В той же работе они применили его для построения всех коммутирующих операторов порядков 4 и 6 со скалярными коэффициентами, порождающих кольцо ранга два, с эллиптической спектральной кривой. Впоследствии с помощью этого метода и некоторых других соображений О. И. Моховым, П. Г. Гриневичем, А. Е. Мироновым, а также их учениками были получены явные примеры большого количества других коммутирующих операторов разных рангов, со скалярными или матричными коэффициентами.

Наиболее интересные примеры таких операторов — операторы со скалярными полиномиальными коэффициентами. Первые примеры таких операторов ранга 2 и 3, отвечающих кривой рода 1, были получены Диксмье [55] чисто алгебраическими методами. П. Г. Гриневич [5] нашел условия на функциональный параметр, участвующий в описании операторов Кричевера-Новикова, при которых коэффициенты операторов принимают вид рациональных функций. В частности, он нашел условие, при котором получались и примеры Диксмье. В дальнейшем коммутирующим операторам порядков 4 и 6 были посвящены еще несколько статей зарубежных авторов [73], [122], [56], [41], [15]. Тем не менее до сих пор полного описания коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами даже порядков 4 и 6 не было найдено.

С полиномиальными примерами связана следующая гипотеза Ю. Береста. Рассмотрим полиномиальное уравнение от двух переменных в первой алгебре Вейля $A_1 = \{\sum_{j=0}^{n} u_j\partial_x^j, u_j \in \mathbb{C}[x]\}$:

$$f(X,Y) = \sum_{j,i=0}^{n} \alpha_{ij} X^i Y^j = 0, \quad X, Y \in A_1, \alpha_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Группа автоморфизмов очевидным образом действует на решениях этого уравнения. Гипотеза заключается в том, что при общих значениях коэффициентов $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$ пространство орбит конечно, если род соответствующей кривой $f = 0$ больше 1, и бесконечно в случае рода 1. Если бы гипотеза была верна для некоторой кривой рода > 1, то можно было бы получить доказательство известной гипотезы Диксмье для первой алгебры Вейля. Долгое время стоял вопрос о том, существуют ли нетривиальные решения уравнения $f = 0$, если эта спектральная кривая имеет произвольный род $g > 1$. Ответ на этот вопрос был получен А. Е. Мироновым [96]: он построил серию примеров коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами ранга 2 и 3 с гиперэллиптической спектральной кривой произвольного рода. Впоследствии О. И. Мохов [103] расширил список таких примеров для произвольного ранга. Отметим, что при построении таких примеров каждый раз необходимо решать нетривиальную систему уравнений, даже существование решений которой установить непросто. Иногда это удается сделать с помощью алгебро-геометрических методов. В работе [100], комбинируя различные методы, мы доказываем гипотезу Береста для кривых рода 1, и приводим пример гиперэллиптических кривых старшего рода, для которых она неверна.

Классификация Кричевера впоследствии была переформулирована на абстрактном алгеброгеометрическом языке. Так, для случая особых спектральных кривых она была модифицирована Мамфордом [109], а абстрактная алгебро-геометрическая версия соответствия между спектральными данными и кольцами обыкновенных дифференциальных операторов была дана В. Г. Дринфельдом [7]. В геометрических спектральных данных по Мамфорду стабильное расслоение заменялось на произвольный пучок без кручения с нулевыми когомологиями. Набор же функцональных параметров в дальнейшем превратился в выбор тривиализации этого пучка в точке кривой на «бесконечности».

Особые кривые играют важную роль для построения точных решений ряда нелинейных уравнений в частных производных: например, для уравнений Кортевега де Фриза (КдФ) или Кадомцева-Петвиашвили (КП) известные n-солитонные решения соотвествуют рациональным кривым с n двойными точками [110]. Уравнение КП особо выделяется среди точно решаемых нелинейных уравнений в частных производных, так как с ним связано решение известной проблемы Шоттки, а также огромное количество работ из разных областей математики. С этим уравнением тесно связана бесконечная иерархия уравнений — иерархия КП, конструкцию некоторых точных решений которых, строящихся по алгебро-геометрическим спектральным данным колец коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов, приводил Кричевер в упоминавшихся выше работах. В 1982 году М. Сато и Я. Сато обнаружили [133], что иерархия КП допускает линеаризацию, если ее рассматривать как динамическую систему на бесконечномерном грассмановом многообразии (грассманиане Сато). Эффективность такой точки зрения была указана в работе Сигала и Вилсона [136]. Параллельно с этой работой Муласе [105] доказал слабый вариант гипотезы С. П. Новикова, относящейся к проблеме Шоттки: θ-функция абелевого многообразия доставляет решение иерархии КП тогда и только тогда, когда это многообразие является якобианом какой-то кривой. Более того, было показано, что это абелево многообразие является орбитой КП-потоков на грассманиане Сато, и что по этой орбите легко восстанавливается сама кривая. Оказалось, что уравнения иерархии задают универсальные семейства изоспектральных деформаций колец коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов, которые параметризуются точками якобиана спектральной кривой. Попутно в этих и более поздних работах была получена еще одна модификация теоремы классификации коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов: имеется взаимно-однозначное соответствие между классами изоморфных геометрических спектральных данных ранга r (где ранг — это ранг пучка в общей точке), точками большой клетки грассманиана Сато ранга r (или классами «пар Шура»), и нормированными коммутативными алгебрами обыкновенных дифференциальных операторов ранга r с регулярными скалярными коэффициентами. Отображение, строящее по геометрическим спектральным данным точку грассманиана Сато, было названо в работах Сигала, Вилсона и Муласе отображением Кричевера. Отметим, что рассмотрение точек грассманиана Сато оказалось эффективным для нахождения точной формулы функции Бейкера-Ахиезера для коммутирующих операторов ранга один, отвечающих рацинальной особой кривой: такая формула приведена в работе Вилсона [147].

О классификации или построении явных примеров коммутирующих дифференциальных операторов в *частных производных* (ДО) известно гораздо меньше. В работе И. М. Кричевера [19] рассматривались также кольца коммутирущих дифференциальных операторов в частных производных, удовлетворящие некоторым условиям «общего положения», содержащие n (n — число переменных) операторов с алгебраически независимыми постоянными старшими символами. Для таких колец был доказан аналог леммы Бурхнала-Чаунди, определено спектральное многообразие и предложена его компактификация, а также было доказано существование однозначно определенной функции Бейкера-Ахиезера (порождающей модуля собственных функций кольца), вполне определяющей кольцо по его спектральному многообразию. Там же отмечалось, что компактифицированное спектральное многообразие имеет особенности. Обратная задача пока до сих пор не решена: неизвестно, по каким именно многообразиям или более широким спектральным данным можно построить кольцо коммутирующих ДО, есть ли аналоги точных формул функций Бейкера-Ахиезера, строящихся по многообразиям высшей размерности. Явные примеры таких колец известны, но их, в некотором смысле, не очень много. Первые нетривиальные примеры появились в работах [48], [49], [50]; они были связаны с квантовыми (деформированными) системами Калоджеро-Мозера. Системам Калоджеро-Мозера и связанным с ними примерам было посвящено с тех пор много работ, см. например обзоры [66], [47]. Кроме этих примеров, были примеры, полученные с помощью преобразования Дарбу [36]. Наконец, есть совсем недавние интересные примеры [3], [140].

В работе [25] А. Н. Паршин определил аналог отображения Кричевера для алгебраических поверхностей, точнее говоря, для геометрических данных (данных Паршина), состоящих из Коэно-Маколеевой поверхности, обильного дивизора Картье, регулярной точки, векторного расслоения и некоторых данных тривиализации. Образом отображения является некоторое бесконечномерное подпространство (обобщенное фредгольмово) в двумерном локальном поле. Позже, и другими методами, это отображение было обобщено Д. В. Осиповым [23] на данные произвольной размерности. В то же время, в работе [24] А. Н. Паршин развил элементы техники Шура для колец многомерных псевдодифференциальных операторов, а также исследовал в этих кольцах аналог иерархии КП. Таким образом, появилась надежда на то, что грассманов подход к задаче классификации может быть применен и для случая большого количества переменных.

Обобщенное отображение Кричевера-Паршина обладало свойством инъективности, причем исходные геометрические данные могли быть восстановлены по подпространству. Но оно не было сюръективным. В работе [84] мы определили новый вид геометрических данных, формальные проколотые ленты (риббоны) и пучки без кручения на них, на который переносится обобщенное отображение Кричевера-Паршина, и которое устанавливает биективное соответствие между этими данными и обобщенными фредгольмовыми подпространствами в двумерном локальном поле. Такие данные, в частности, строятся по любым данным Паршина, а последние могут быть однозначно восстановлены по первым. Риббоны и пучки без кручения на них похожи на известные в алгебраической геометрии формальные объекты: формальные схемы, получающиеся пополнением схемы вдоль подсхемы, и когерентные пучки на них. В качестве подсхемы в случае данных Паршина выступает неприводимая кривая - обильный дивизор Картье. Преимущество рассмотрения таких объектов было в том, что аналог иерархии КП, а также его модификации, изучавшиеся в препринте [151] и работе [17], задавали деформации обобщенных фредгольмовых пространств в двумерном локальном поле, а через теорему о взаимно-однозначном соответствии — деформации пучков без кручения на риббонах, в связи с чем возникал вопрос о возможной интерпертации этих иерархий как динамических систем на пространстве модулей таких пучков. Позже они помогли вывести также некоторые геометрические свойства спектральных данных колец дифференциальных операторов в частных производных.

В работе [85] было установлено, что пучки без кручения на риббонах, ограничение которых на кривую локально свободно, сами являются локально свободными. В связи с этим там же была исследована группа Пикара риббона (Pic^0). Оказалось, что при некоторых ограничениях на когомологии структурного пучка риббона она обладает структурой инд-схемы, причем множество k-точек этой инд-схемы совпадает с множеством k-точек бесконечномерной алгебраической группы — группы Пикара формальной схемы (в случае риббона, происходящего из данных Паршина — пополнения поверхности вдоль дивизора).

Несмотря на все эти результаты, оставалась неясной связь между геометрическими данными Паршина, фредгольмовыми подпространствами в двумерном локальном поле, а также теорией риббонов, и кольцами коммутирующих дифференциальных операторов. Этот пробел был устранен в работе [11], играющей центральную роль в настоящей диссертации, в которой был предложен аналог теоремы классификации колец коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов: теорема классификации коммутативных подалгебр в *пополненном* кольце дифференциальных операторов от двух переменных в терминах некоторых геометрических данных и в терминах некоторых подпространств в двумерном локальном поле, тесно связанных с геометрическими данными Паршина и с фредгольмовыми подпространствами. Объясним подробней суть этой теоремы, и ее связь с проблемой классификации колец коммутирующих ДО.

Пользуясь идеями и техникой, развитой при исследовании двумерных локальных тел в работах [9] и [10], а также развивая чисто алгебраическую технику Шура для колец многомерных псевдодифференциальных операторов, в работе [11] мы определили пополнение $\hat{D}$ кольца дифференциальных операторов от двух переменных, которое содержит кольцо дифференциальных операторов в частных производных в качестве плотного подкольца. Среди операторов этого кольца есть также разностные операторы, и все его операторы линейны и действуют на кольце ростков аналитических функций. В той же работе мы ввели понятие квази-эллиптических колец коммутирующих операторов в $\hat{D}$ — аналог эллиптических колец коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов. Эти кольца определяются тем, что содержат пару операторов специального вида. Это условие достаточно слабое: так, все кольца коммутирующих операторов, упоминавшиеся выше в разных работах, становятся квази-эллиптическими после линейной замены переменных. При этом квази-эллиптические кольца *дифференциальных* операторов обладают свойством «чистоты»: любое коммутативное кольцо, содержащее такое кольцо, лежит в D, то есть состоит лишь из дифференциальных операторов. Далее в этой работе мы доказали теорему классификации таких колец: а именно, мы установили взаимно-однозначное соответствие между классами таких колец, подпространствами определенного типа в двумерном локальном поле (двумерными парами Шура), и классами изоморфных геометрических данных, очень похожих на геометрические данные Паршина (модифицированные данные Паршина), состоящих из проективной поверхности, обильного $\mathbb{Q}$-Картье дивизора, регулярной точки на дивизоре, квази-когерентного пучка без кручения с определенными условиями на когомологии, и некоторых данных тривиализации. При этом возникает формальный аналог функции Бейкера-Ахиезера, которая строится по подпространству из пары Шура при помощи двумерного аналога теоремы Сато, доказанного в той же работе [11]. Кроме того, там же был посчитан первый пример кольца коммутирующих пополненных операторов, отвечающих простейшей паре Шура, выведены некоторые явные уравнения одной из обобщенных иерархий КП, и найдено их решение. И операторы, и решение оказались разностными операторами необычного вида, а одно из уравнений совпало с уравнением КдФ, что было обусловлено выбором подпространства в паре Шура.

Поскольку модифицированные геометрические данные Паршина классифицируют в том числе кольца *дифференциальных* операторов, возник естественный вопрос об условиях, выделяющих среди таких данных те, которые отвечают этим кольцам. В работах [86], [13], [12] были определены и исследованы спектральные данные коммутативных конечно порожденных колец с некоторыми условиями на старшие символы. Кроме того, в работе [86] отображение Кричевера-Паршина было расширено на модифицированные данные Паршина, и установлена связь с теорией риббонов (в частности, установлена связь между парами Шура и обобщенными фредгольмовыми подпространствами), а в работе [12] получены результаты о преобразованиях Дарбу колец дифференциальных операторов с рациональной спектральной поверхностью и разобрано несколько известных примеров. В итоге были выведены некоторые необходимые условия на модифицированные данные Паршина, описывающие кольца дифференциальных операторов. Эти условия сильно сузили класс допустимых геометрических данных, особенно данных, описывающих кольца ранга 1 (алгебраически интегрируемые квантовые системы). Есть гипотеза, что эти условия также достаточны.

В частности, оказалось, что достаточно рассматривать Коэно-Маколеевы поверхности с обильным рациональным $\mathbb{Q}$-Картье дивизором C с индексом самопересечения $C^2 = 1$ и с Коэно-Маколеевым пучком без кручения $\mathcal{F}$ с фиксированным полиномом Гильберта и нулевыми когомологиями. Пространство модулей таких пучков (ранга 1), наряду с групповой инд-схемой Пикара риббона, происходящего из таких геометрических данных, могут служить подходящим аналогом обобщенного якобиана спектральной кривой (из теории в размерности один), параметризующим деформации колец коммутирующих операторов.

Цель работы

Цель работы — исследование алгебро-геометрических свойств колец коммутирующих дифференциальных операторов со скалярными коэффициентами, имеющих важное значение для решения классических проблем, упомянутых в начале введения, а также доказательство существования бесконечных серий коммутирующих операторов в первой алгебре Вейля, лежащих в разных орбитах относительно действия группы автоморфизмов.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем.

1. Доказано существование бесконечных серий коммутирующих операторов в первой алгебре Вейля со спектральными кривыми произвольного рода, лежащих в разных орбитах относительно действия группы автоморфизмов.

2. Определены алгебро-геометрические спектральные данные для алгебр коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных с пустым пересечением характеристических дивизоров и исследованы их основные свойства.

3. В пополненном кольце дифференциальных операторов в частных производных от двух переменных определен класс коммутативных подалгебр, включающий в себя алгебры коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных. Алгебры из этого класса классифицированы в терминах специальных подпространств двумерного локального поля («пар Шура»), а также в терминах геометрических данных (модифицированных данных Паршина).

4. Определены формальные проколотые ленты (риббоны) и пучки без кручения на них и исследованы их основные свойства. Доказана восстанавливаемость модифицированных данных Паршина по связанным с ними риббону и пучку без кручения на нем. Установлено взаимно-однозначное соответствие между этими объектами и обобщенными фредгольмовыми подпространствами в двумерном локальном поле.

5. Изучена группа Пикара риббонов. В частности, доказана про-представимость функтора Пикара для риббонов, удовлетворяющих определенным условиям.

6. Получены необходимые условия на геометрические данные, выделяющие среди них спектральные данные алгебр коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных. Как следствие теории, получены результаты о преобразованиях Дарбу колец дифференциальных операторов с рациональной спектральной поверхностью, и о пополнении аффинной плоскости.

Методы исследования

В работе используются методы алгебраической геометрии, коммутативной алгебры, теории интегрируемых систем, а также общие методы теории многомерных локальных полей.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в алгебраической геометрии, теории интегрируемых систем и теории нелинейных дифференциальных уравнений.

Апробация работы

Результаты работы докладывались автором на семинаре отдела алгебры и теории чисел (семинар И. Р. Шафаревича) и семинаре по арифметической алгебраической геометрии в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН (МИАН), на семинаре «Дифференциальная геометрия и приложения», на семинаре «Группы Ли и теория инвариантов» и на семинаре «Узлы и теория представлений» на Механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, на семинаре «Геометрия, топология и мат. физика» отдела геометрии и топологии МИАН, на семинаре сектора мат физики ИТФ (Черноголовка), на семинаре «Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика» в Независимом московском университете, на семинаре в ИТЭФ, на семинарах в Берлинском университете им. Гумбольда и свободном университете Берлина, университете Кельна (Германия), в Саламанском университете (Испания), в центральном коллежде Лиона (Франция), в Математическом институте им. Макса Планка (Бонн, Германия), а также на международных конференциях, в том числе:

— Международная конференция (Воркшоп) «Локальные поля, алгебраическая геометрия и обобщенные иерархии КП», Гумбольдтский Университет г. Берлин, Германия, 2 - 7 июня 2005

— Международная конференция «Geometry and quantization», МИРАН, Москва, 9-23 сентября 2007

— Летняя школа-конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу, Ярославль, ЯГПУ, 2-7 июня 2008

— Международная конференция им. Л.Понтрягина «Дифференциальные уравнения и топология», Москва, МГУ, 17-22 июня 2008

— Международная конференция по геометрии и квантованию в Люксембурге GeoQuant, 31 августа - 12 сентября 2009, университет Люксембурга

— Международная конференция, посвященная 70-летию В.А. Садовничего, апрель 2009, МГУ, Москва

— Международная конференция, посвященная памяти Рохлина, С-Петербург, 10-16 января 2010

— Международная конференция «Дни геометрии в Новосибирске, 2011», посвященная 50-летию кафедры геометрии и топологии Новосибирского государственного университета

— Международная конференция “Торическая топология и автоморфные функции”, 2011, Хабаровск, ИПМ ДВО РАН

— Международная конференция «Геометрия, топология, алгебра и теория чисел, приложения», посвященная 120-летнему юбилею Бориса Делоне, 16–20 августа 2010, Москва, МИАН, МГУ им. Ломоносова,

— Четвертая международная конференция по геометрии и квантованию «Geoquant», 11–17 сентября 2011, Китай, Tianjin, Chern Institute of Mathematics,

— Международная конференция «Дни геометрии в Новосибирске, 2012, 2014, 2015», ИМ СО РАН, Новосибирск,

— Международная Конференция XVII geometrical seminar, 2012, Златибор, Сербия,

— Международная научно-практическая конференция «Математика в современном мире», посвященная 150-летию со дня рождения выдающегося российского математика Д.А. Граве, 2013, Вологда, ВГПУ,

— Международная Конференция: Around Sato's theory on soliton equations, 2013, Токио, Япония,

— Международная Конференция: 13 Serbian Mathematical Congress, 2014, Vrnjachka Banja, Сербия,

— Международная Конференция : "Torus Actions in Geometry, Topology, and Applications", Сколково, Skoltech, Москва, 16-21 февраля 2015 г.

— V школа-конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых математиков России, Коряжма, 17-23 августа 2015 г.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих 11 работах автора: [10], [16], [17], [84], [85], [11], [13], [86], [14], [12], [100].

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 6-ти глав, разбитых на параграфы, и списка литературы.

Содержание работы

Во введении приводится краткий обзор ранее известных результатов и результатов диссертации.

В первой главе напоминаются необходимые сведения и результаты о классификации колец обыкновенных дифференциальных операторов, об отображении Кричевера и его свойствах. Также первая глава содержит результаты о существовании бесконечных серий коммутирующих операторов в первой алгебре Вейля со спектральными кривыми произвольного рода, лежащих в разных орбитах относительно действия группы автоморфизмов.

§ 1.1 содержит краткое описание известных результатов и вводит обозначения. Также этот раздел содержит результаты о существовании бесконечных серий коммутирующих операторов в первой алгебре Вейля со спектральными кривыми произвольного рода, лежащих в разных орбитах относительно действия группы автоморфизмов.

В § 1.2 мы напоминаем модификацию классификации коммутирующих операторов по Мамфорду-Муласе, в том числе классификацию в терминах точек большой клетки грассманиана Сато, напоминаем конструкцию отображения Кричевера в размерности один, и доказываем необходимые для дальнейшего изложения технические свойства этого отображения, а также напоминаем связь с классической теорией уравнения КП.

Во второй главе напоминаются необходимые сведения и известные результаты о свойствах колец дифференциальных операторов в частных производных, а также доказывается теорема об общих свойствах спектральных данных.

§ 2.1 является вводным, содержит определения и краткое описание известных результатов.

В § 2.2 доказывается теорема, которая иллюстрирует основные свойства и одновременно служит определением алгебро-геометрических спектральных данных колец коммутирующих дифференциальных операторов, удовлетворяющих условиям определенного вида.

В третьей главе излагается теория, посвященная классификации коммутативных подалгебр в пополненной алгебре дифференциальных операторов от двух переменных.

В § 3.1 вводятся обозначения и определения, а также доказываются основные свойства пополненной алгебры дифференциальных операторов $\hat{D}$.

В § 3.2 вводятся дополнительные определения технического характера, необходимые для дальнейшего изложения, а также доказываются утверждения о том, что кольца коммутирующих операторов $B \subset D$, порожденные операторами с постоянными старшими символами, приводятся линейными заменами переменных к некоторому специальному виду. Этот раздел служит отчасти мотивировкой для разработки последующей теории.

В § 3.3 излагается аналог теории Шура для подкольца $\hat{E}_+$ пополненного кольца двумерных псевдодиффенциальных операторов. Для охвата возможно большего класса операторов из $\hat{D}$ вводятся подкольца в $\hat{E}_+$ с особыми условиями роста на коэффициенты операторов (условия (A_{α})). При значении $\alpha = 1$ эти условия играют особую роль для классификации коммутативных подколец в терминах алгебро-геометрических спектральных данных.

В § 3.4 классифицируются 1-квази-эллиптические кольца коммутирующих операторов в терминах подпространств определенного вида (пар Шура (A, W)) двумерного локального поля $V = k((z_1))((z_2))$. Для этого доказываются аналоги теорем Сато (описывающих соответствие между точками большой клетки грассманиана Сато и операторами из группы Вольтерра) для подпространств в V, снабженном стандартной топологией.

В § 3.5 излагается классификация 1-квази-эллиптических колец коммутирующих операторов в терминах геометрических данных $(X, j, \mathcal{F})$. Для этого доказывается эквивалентность двух категорий: категории пар Шура и категории геометрических данных.

В четвертой главе излагается теория формальных пунктированных лент (риббонов) и пучков без кручения на них.

В § 4.1 вводятся определения риббонов и пучков без кручения на них, напоминается конструкция Паршина, строящая по геометрическим спектральным данным пару подпространств $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ в двумерном локальном поле $k((u))((t))$ (другая версия пар Шура, тесно связанная с парами из предыдущей главы), а также ее обобщение на данные, состоящие из риббона и пучка без кручения на нем. В конце раздела доказывается теорема классификации данных, состоящих из риббона, пучка без кручения на нем, и некоторых тривиализаций, в терминах пар $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$, а также объясняется связь пар $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ и (A, W).

В § 4.1.2 вводятся определения и доказываются общие свойства технического характера.

В § 4.1.3 доказываются технические алгебраические результаты о свойствах когерентности пучков без кручения на риббонах.

В § 4.1.4 доказываются технические результаты о пополнении пучков на риббонах. Для этого вводится еще одно важное понятие, используемое в дальнейшем — гладкая точка риббона и пучка без кручения на нем.

В § 4.1.5 доказывается основной результат раздела 4.1: теорема классификации данных на риббоне в терминах пар $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$.

В § 4.1.6 вводится понятие «картинных» когомологий — когомологии некоторого комплекса, построенного по паре пространств $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ — и устанавливается связь этих когомологий с когомологиями пучка без кручения на риббоне, построенных по паре $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$. В случае, когда риббон и пучок происходят из геометрических спектральных данных, эти когомологии совпадают с когомологиями спектрального пучка на поверхности. Преимуществом этих когомологий является их легкая вычислимость и наглядность. Результаты этого раздела используются в следующем разделе и главе 5.

В § 4.2 излагаются результаты о группе и о функторе Пикара риббона $\mathrm{Pic}_{\mathring{X}_{\infty}}$.

В § 4.2.1 доказываются основные свойства функции порядка, определенной на структурном пучке риббона. Функция порядка играет важную роль при изучении группы Пикара риббона.

В § 4.2.2 приведен результат о строении группы Пикара риббона, определенного над артиновым кольцом.

В § 4.2.3 определяется функтор Пикара риббона $\mathrm{Pic}_{\hat{X}_\infty}$, а также функтор Пикара соответствующей ему формальной схемы Pic_{X_∞}, на категории аффинных нетеровых k-схем, и излагаются результаты о формальной группе Пикара и формальной группе Брауэра риббона. Эти результаты используются в следующих разделах, где доказывается глобальная представимость функтора Пикара.

В подразделе § 4.2.3.1 доказывается предложение технического характера о касательном пространстве к функторам Пикара в нуле.

В подразделе § 4.2.3.2 доказывается предложение технического характера о формальной группе Брауэра алгебраической поверхности. По существу, это упрощенный вариант для поля характеристики 0 результата Артина и Мазура [29] о про-представимости функтора $\widehat{Br}_X$.

В подразделе § 4.2.3.2 доказывается предложение технического характера о формальной группе Брауэра риббона.

В подразделе § 4.2.3.3 доказывается предложение технического характера о формальной группе Пикара риббона.

В § 4.2.4 доказывается теорема об обращении в ноль, необходимая для теорем представимости в следующих разделах.

В § 4.2.5 доказываются результаты о представимости функтора Pic_{X_∞}.

В § 4.2.6 доказываются основные результаты о представимости функтора Пикара риббона $\mathrm{Pic}_{\hat{X}_\infty}$. В этом же разделе определяются важные дополнительные функторы- аналоги функтора Пикара, и доказывается их представимость.

В пятой главе изложены результаты об общих геометрических свойствах данных $(X, j, \mathcal{F})$, а также необходимых условиях, выделяющих среди них спектральные данные алгебр коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных. В конце главы доказываются теоремы о преобразованиях Дарбу алгебр ДО с рациональной спектральной поверхностью и о пополнении аффинной плоскости.

В § 5.2 изучаются свойства поверхности X.

В § 5.3 изучаются свойства спектрального пучка $\mathcal{F}$. Этот раздел начинается с почти очевидного предложения о сравнении геометрических спектральных данных из главы 2 и геометрических данных $(X, j, \mathcal{F})$ главы 3. Для дальнейшего изучения свойств спектральных пучков, а также для построения явных примеров спектральных данных и соответствующих им колец коммутирующих операторов определяется расширение функтора, строящего по геометрическим данным соответствующую им пару Шура, на более широкий класс пучков. Далее сравниваются пары Шура (A, W) и $(\mathbb{A}, dw)$. Общей иллюстрацией служит следующая диаграмма.

$$\begin{array}{ccc}
 & \{\text{Комм. подалгебры в } D\} & \\
 & \bigcap & \\
 & \{\text{Комм. подалгебры в } \hat{D}\} & \\
 & \swarrow\nearrow\nwarrow\searrow & \\
\{\text{Пары } (A, W) \text{ в } k[[u]]((t))\} & \longleftrightarrow & \{\text{данные } (X, j, \mathcal{F})\} \\
\bigcap & & \bigcap \\
\{\text{Пары } (\mathbb{A}, \mathbb{W}) \text{ в } k((u))((t))\} & \longleftrightarrow & \{\text{Геом. данные с риббонами}\}
\end{array}$$

С помощью этих технических конструкций доказываются необходимые условия на геометрические спектральные данные.

В § 5.3 изложены некоторые следствия теории: результаты о преобразованиях Дарбу колец дифференциальных операторов с рациональной спектральной поверхностью, и о пополнении аффинной плоскости.

Шестая глава посвящена разбору уже известных примеров коммутирующих ДО и коммутирующих разностных операторов с точки зрения новой теории, построению новых примеров коммутирующих операторов в пополненном кольце, а также исследованию их деформаций, описываемых модификациями двумерных аналогов иерархии КП.

В § 6.1 обсуждается достаточно очевидный, но широкий класс примеров. Эти примеры получаются, например, из примеров коммутативных колец обыкновенных дифференциальных операторов (скажем, от переменной x_2) добавлением дифференцирования по другой переменной (скажем, ∂_1), которая, очевидно, коммутирует со всеми операторами в исходном кольце. Обобщая это наблюдение, мы называем коммутативные алгебры в $\hat{D}$, содержащие ∂_1, *тривиальными.* Для описания геометрических данных «тривиальных» алгебр доказывается критерий.

В § 6.2 разбираются примеры поверхностей с дивизором и точкой, для которых можно явно вычислить все возможные геометрические данные ранга один с данной поврехностью и дивизором, соответствующие пары Шура и соответствующие алгебры коммутирующих операторов в $\hat{D}$. Заодно получаются примеры поверхностей, которые не могут быть спектральными поверхностями максимальных колец *дифференциальных* операторов.

В § 6.3 определяются модифицированные системы Паршина, а в конце раздела приводится пример геометрических данных, построенных по паре Шура, соответствующие им коммутирующие операторы в $\hat{D}$, пример модифицированной системы, определяющей деформации операторов, некоторые ее уравнения — аналоги уравнения КдФ из классической теории КП, а также точные решения — аналог рациональных решений уравнения КдФ (эта система определяет также деформации ряда других «тривиальных» алгебр, а также определяет потоки на пространстве модулей Коэно-Маколеевых пучков ранга один с фиксированным полиномом Гильберта на спектральной поверхности таких алгебр).

Глава 1

Коммутирующие обыкновенные дифференциальные операторы

В этой главе напоминаются необходимые сведения и результаты о классификации колец обыкновенных дифференциальных операторов (ОДО), об отображении Кричевера и его свойствах. Также данная глава содержит результаты, полученные в работах [14], [100] о существовании бесконечных серий коммутирующих операторов в первой алгебре Вейля со спектральными кривыми произвольного рода, лежащих в разных орбитах относительно действия группы автоморфизмов.

1.1 Аналитическая теория коммутирующих ОДО

Данный раздел содержит краткое описание известных результатов и вводит обозначения, в той мере, какой они необходимы для изложения результатов работ [14], [100] о существовании бесконечных серий коммутирующих операторов в первой алгебре Вейля со спектральными кривыми произвольного рода, лежащих в разных орбитах относительно действия группы автоморфизмов. Более подробные алгебраические определения необходимых для большей части диссертации понятий, а также соответствующие теоремы, приведены в следующем разделе 1.2.

1.1.1 Вводные замечания и обзор аналитической теории

Рассмотрим k-алгебру (в этом разделе $k = \mathbb{C}$) обыкновенных дифференциальных операторов

$$D = k[[x]][\partial].$$

Напомним вкратце теорию коммутативных подалгебр в D. Впервые коммутирующие операторы рассматривались в работе Шура [135]. Бурхналл и Чаунди [44–46] и Бейкер [31] получили полную классификацию пар коммутирующих ОДО взаимно простых порядков. Современный алгебро-геометрический подход к описанию коммутативных подалгебр в D был предложен И. М. Кричевером в работах [19,20]. Этот подход впоследствии интенсивно использовался С. П. Новиковым и его школой для получения и изучения точных решений различных нелинейных уравнений в частных производных (см. например обзор [21]). В дальнейшем этот подход был формализован и развит Дринфельдом [7], Мамфордом [109], Вердье [144], Сигалом и Вилсоном [136] и Муласе [107]. В настоящее время есть огромное количество литературы на эту тему, в связи с чем затруднительно дать исчерпывающий ее список, а потому упомянем здесь лишь некоторые обзоры, связанные с теорией конечнозонного интегрирования: [90], [58], [108], [59], [121], [146], [141].

Согласно лемме Бурхнала-Чаунди [45, (2)], если

$$L_n = \sum_{j=0}^{n} v_j(x)\partial^j, \quad L_m = \sum_{k=0}^{m} u_k(x)\partial^k$$

— пара коммутирующих операторов, то существует полином $F(\lambda, \mu)$, такой что $F(L_n, L_m) = 0$. Отметим, что по лемме Шура [135] все операторы, коммутирующие с любым оператором ненулевого порядка, коммутируют между собой. Обратно, в силу [45, (4)], операторы, удовлетворяющие $F(L_n, L_m) = 0$, коммутируют. Отметим, что, хотя Бурхнал и Чаунди доказывали эти факты в предположении взаимной простоты порядков n и m, с помощью техники Шура доказательства легко переносятся на случай произвольных порядков. Еще одно предположение в их работах — о том, что старшие коэффициенты рассматриваемых операторов постоянны — получается с помощью подходящей замены переменных в кольце D (в их случае коэффициенты операторов представляют собой аналитические функции). Понятие замены переменных может быть уточнено и в нашем более формальном случае с помощью следующих простых алгебраических лемм.

Лемма 1. *Пусть φ — эндоморфизм алгебры D. Тогда существуют элемент $u \in k[[x]]$, удовлетворяющий условиям $u(0) = 0$ и $u'(0) \neq 0$, и $v \in k[[x]]$, такие что*

$$\begin{cases} x & \overset{\varphi}{\mapsto} & u \\ \partial & \overset{\varphi}{\mapsto} & \dfrac{1}{u'}\partial + v. \end{cases} \tag{1.1}$$

В частности, φ — автоморфизм алгебры D, т.е. $\mathrm{End}(D) = \mathrm{Aut}(D)$.

Доказательство Пусть $u := \varphi(x) \in D$. Нетрудно видеть, что u принадлежит $k[[x]]$ и удовлетворяет свойствам, перечисленным в лемме. Пусть $P := \varphi(\partial) = a_n\partial^n + a_{n-1}\partial^{n-1} + \dots + a_0 \in D$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, где $a_n \neq 0$. Ясно, что $[P, u] = nu'a_n\partial^{n-1} + \mathrm{l.o.t}$, откуда $[\partial, x] = 1 = [P, u]$ если и только если $n = 1$ и $a_1 = \dfrac{1}{u'}$.

Замечание 1. Пусть $w \in k[[x]]$ — единица (т.е. $w(0) \neq 0$). Тогда для внутреннего автоморфизма $\mathrm{Ad}_w : D \to D,\ P \mapsto w^{-1}Pw$ имеем:

$$\begin{cases} x & \mapsto & x \\ \partial & \mapsto & \partial + \dfrac{w'}{w}. \end{cases}$$

Заметим, что для любого $k[[x]] \ni v = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x^i = \beta_0 + \tilde{v}$, ряд $w := \exp(v) = e^{\beta_0}\exp(\tilde{v})$ — единица в $k[[x]]$. Следовательно, всякий автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(D)$, удовлетворяющий $\varphi(x) = x$, является внутренним, см. (1.1)

Лемма 2. *Пусть $P = a_n\partial^n + a_{n-1}\partial^{n-1} + \dots + a_0 \in D$, где $a_n(0) \neq 0$. Тогда существует $\varphi \in \mathrm{Aut}(D)$, такой что*

$$Q := \varphi(P) = \partial^n + b_{n-2}\partial^{n-2} + \dots + b_0 \tag{1.2}$$

для некоторых $b_0, \dots, b_{n-2} \in k[[x]]$. Более того, если $Q \in D$ — нормализованный *ОДО ненулевого порядка (т.е. ОДО вида (1.2)), и ψ — внутренний автоморфизм D, такой что $\psi(Q) = Q$, то $\psi = \mathrm{id}$.*

Доказательство По предположению, a_n — единица в $k[[x]]$. Следовательно, существует $a \in k[[x]]$, такой что $a^n = a_n$. Отсюда следует, что $P = \big(a\partial\big)^n + \mathrm{l.o.t.}$ Значит, существует замена переменных, преобразующая P в оператор вида $\widetilde{P} := \partial^n + c_{n-1}\partial^{n-1} + \cdots + c_0$. Применяя к $\widetilde{P}$ автоморфизм (1.1) с $u = x$ и $v = -\dfrac{c_{n-1}}{n}$, получаем нормализованный оператор Q. Это доказывает первое утверждение. Второе утверждение получается непосредственно.

Спектральная кривая C для пары операторов L_n, L_m определяется уравнением $F = 0$; она неприводима и может быть пополнена до проективной кривой с помощью одной точки P на бесконечности (с этого места P будет, как правило, обозначать точку на бесконечности). Она параметризует совместные собственные значения операторов L_n и L_m, т.е. если

$$L_n\psi = \lambda\psi, \quad L_m\psi = \mu\psi,$$

то $(\lambda, \mu) \in C$. Размерность пространства общих собственных функций для общей точки $(\lambda, \mu) \in C$ называется *рангом* алгебры $k[L_n, L_m]$.

Пример 1. Пусть $\Lambda \subset k = \mathbb{C}$ — решетка, и $\wp(x)$ — соответствующая функция Вейерштрасса. В 1903 году Валленберг [145] обнаружил, что ОДО

$$R = \partial^2 - 2\wp(x+\alpha) \quad \text{и} \quad Q = 2\partial^3 - 4\wp(x+\alpha)\partial - 3\wp'(x+\alpha), \tag{1.3}$$

коммутируют для всех $\alpha \in \mathbb{C}$ и удовлетворяют уравнению $Q^2 = 4R^3 + g_2R + g_3$, где g_2 и g_3 — Вейерштрассовы параметры решетки Λ, см. [145].

Пример 2. В качестве одного из вырождений примера Валленберга имеется пара коммутирующих операторов с рациональными коэффициентами и каспидальной спектральной кривой:

$$P = \partial_x^2 - 2(1-x)^{-2}, \quad Q = \partial_x^3 - 3(1-x)^{-2}\partial_x - 3(1-x)^{-3}.$$

Пример 3. В 1968 году Диксмье открыл другой интересный пример [55]: для любого $\kappa \in \mathbb{C}$ положим $L := \partial^2 + x^3 + \kappa$ и рассмотрим

$$R = L^2 + 2x \quad \text{и} \quad Q = L^3 + \frac{3}{2}\big(xL + Lx\big). \tag{1.4}$$

Тогда R и Q коммутируют и удовлетворяют соотношению $Q^2 = R^3 - \kappa$. Диксмье также показал, что подалгебра $k[R, Q] \subset D$ является *максимальной*.

Рассматривая более общие алгебры операторов, коммутирующих с L_n, L_m, И. М. Кричевер в работах [19,20] классифицировал *эллиптические* подалгебры коммутирующих операторов общего положения в терминах *спектральных данных*.

Определение 1. Коммутативная подалгебра $B \subset D$ — эллиптическая, если существует оператор ненулевого порядка $Q \in B$ вида $Q = \partial^n + q_{n-1}(x)\partial^{n-1} + \ldots + q_0(x)$.

Имеется следующее полезное наблюдение Вердье [144, Lemme 1].

Лемма 3. *Пусть B — коммутативная подалгебра в D, содержащая формальный эллиптический элемент Q. Тогда* все *элементы в B имеют постоянные старшие коэффициенты.*

Замечание 2. Существуют нетривиальные не эллиптические коммутативные подалгебры в D, т.е. не изоморфные $k[Q]$. Тем не менее, основной интерес представляют те коммутативные подалгебры в D, которые принадлежат подалгебре $k\{x\}[\partial]$ операторов, чьи коэффициенты — *сходящиеся* степенные ряды. Если $Q = a_n\partial^n + a_{n-1}\partial^{n-1} + \cdots + a_0$ —

такой оператор, то подходящей заменой вида $x \mapsto x + \varepsilon$, где $\varepsilon \in k$ и $|\varepsilon|$ достаточно мало, мы можем добиться того, что $a_n(0) \neq 0$. Заметим, что эта замена не может быть продолжена на алгебру D. Однако, можно показать, что все элементы B принадлежат $k\{x\}[\partial]$ (это следует например из теоремы Шура [108, Theorem 2.2], см. также [107, Lemma 5.3]), и можно выбрать общий радиус сходимости для всех коэффициентов всех элементов в B. Согласно лемме 2, можно трансформировать Q в нормализованный формально эллиптический дифференциальный оператор. Поэтому в дальнейшем можно по умолчанию предполагать, что все коммутативные подалгебры в D

- содержат эллиптический оператор положительного порядка
- *нормализованы*, т.е. что все элементы в B минимального положительного порядка нормализованы.

Последнее предположение избавляет от лишнего произвола в выборе коммутативных алгебр при решении проблемы классификации: если $B \subset D$ — нормализованная эллиптическая подалгебра, и φ — внутренний автоморфизм D, такой что $\varphi(B) = B$, то $\varphi = \mathrm{id}$.

Каждое такое кольцо B, согласно классификационной теореме, изоморфно кольцу мероморфных функций на *спектральной кривой* C — *неприводимой гладкой проективной алгебраической кривой рода* g над полем k — с полюсами в фиксированной точке P. Размерность пространства собственных функций операторов из кольца B в общей точке спектральной кривой называется *рангом* кольца B. Это число также совпадает с числом

$$r = rk(B) := GCD\{\mathrm{ord}(Q) | Q \in B\}.$$

Кроме кривой, по кольцу B определяются следующие геометрические спектральные данные:

- z — локальный параметр в окрестности P: $z(P) = 0$.
- Набор точек $\gamma_1, \dots \gamma_{rg} \in C$, набор чисел $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ir-1})$ — параметры Тюрина, определяющие общее (стабильное по Мамфорду) расслоение $\mathcal{F}$ ранга r и степени rg на C с набором голоморфных сечений $\eta_1, \dots, \eta_r$, удовлетворяющих соотношениям:
$$\eta_r(\gamma_i) = \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_{ij}\eta_j(\gamma_i).$$
- $\phi = (\omega_1(x), \dots, \omega_{r-1}(x))$ — некоторые (произвольные) функции.

По этим данным однозначно строится *векторная функция Бейкера-Ахиезера* $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_r)$, которая однозначно определяется следующими свойствами:

1. $\psi(x, P) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x) z^s\right) \Psi_0(x, P)$, $\xi_0 = (1, 0, \dots, 0)$, $\frac{d}{dx}\Psi_0 = A\Psi_0$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ z^{-1} + \omega_1(x) & \omega_1(x) & \omega_2(x) & \dots & \omega_{r-1}(x) & 0 \end{pmatrix}$$

2. На $C - \{P\}$ ψ мероморфна, с простыми полюсами в точках $\gamma_1, \dots, \gamma_{rg}$
3. $\mathrm{Res}_{\gamma_i} \psi_j = \alpha_{ij} \mathrm{Res}_{\gamma_i} \psi_{r-1}$.

По функции Бейкера-Ахиезера алгебра коммутирующих операторов может быть восстановлена: если f — мероморфная функция на кривой с полюсом в P порядка n, то однозначно определен оператор $L(f)$

$$L(f)\psi = f\psi, \ \mathrm{ord} L(f) = rn.$$

Пример 4. Как было замечено еще Бурхналлом и Чаунди в 1923 году, семейство Валленберга (1.3) дает полный список коммутативных подалгебр ранга один в D, у которых спектральная кривая C — эллиптическая [44, Section 8]. Для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ рассмотрим следующую функцию

$$\psi_\alpha(x,t) = \frac{\sigma(t-\alpha-x)}{\sigma(t)\sigma(x+\alpha)} \exp\big(\zeta(t)(x+\alpha)\big), \tag{1.5}$$

где σ и ζ — эллиптические функции Вейерштрасса. Тогда

$$\left\{ \begin{array}{lcl} R_z \circ \psi_\alpha(x,t) & = & \wp(t) \cdot \psi_\alpha(x,t) \\ Q_z \circ \psi_\alpha(x,t) & = & \wp'(t) \cdot \psi_\alpha(x,t). \end{array} \right. \tag{1.6}$$

Очевидно, $q = \big(\wp(t), \wp'(t)\big) \in C_0 = V(y^2 - 4x^3 - g_2 x - g_3)$ для всех $t \in k \setminus \Lambda$, где g_2 и g_3 — параметры Вейерштрасса решетки Λ. Функция $\psi_\alpha(x,t)$ — *функция Бейкера-Ахиезера* ранга один. Аналогичное выражение для функции Бейкера-Ахиезера существует для произвольной коммутативной подалгебры $B \subset D$ ранга один с гладкой спектральной кривой C, см. [19].

Основная сложность в построении операторов ранга $r > 1$ заключается в том, что функция Бейкера-Ахиезера не может быть найдена явно, за редким исключением: например, в работе [99] было показано, что класс функций Бейкера-Ахиезера содержит некоторые известные специальные функции. Тем не менее, коэффициенты коммутирующих операторов иногда можно находить и без функций БА. Одним из основных способов сделать это является метод деформаций параметров Тюрина.

Напомним этот метод из работы [21]. Главная идея этого метода заключается в изучении линейного дифференциального оператора, обращающего в ноль общие собственные функции. Общие собственные функции коммутирующих дифференциальных операторов ранга r являются решениями дифференциального уравнения порядка r

$$\psi^{(r)}(x,Q) = \chi_0(x,Q)\psi(x,Q) + \cdots + \chi_{r-1}(x,Q)\psi^{(r-1)}(x,Q).$$

Коэффициенты χ_i являются рациональными функциями на кривой C с простыми полюсами $P_1(x), \ldots, P_{rg}(x) \in C$, и со следующим разложением в ряд в окрестности точки P

$$\chi_0(x,Q) = z^{-1} + g_0(x) + O(z), \qquad \chi_j(x,Q) = g_j(x) + O(z), \quad 0 < j < r-1,$$
$$\chi_{r-1}(x,Q) = O(z).$$

Пусть $z^{-1} - \gamma_i(x)$ — локальный параметр в точке $P_i(x)$. Тогда

$$\chi_j = \frac{c_{i,j}(x)}{z^{-1} - \gamma_i(x)} + d_{i,j}(x) + O(z^{-1} - \gamma_i(x)).$$

Функции $c_{ij}(x), d_{ij}(x)$ удовлетворяют следующим уравнениям (см. [20]).

$$c_{i,r-1}(x) = -\gamma_i'(x), \tag{1.7}$$

$$d_{i,0}(x) = \alpha_{i,0}(x)\alpha_{i,r-2}(x) + \alpha_{i,0}(x)d_{i,r-1}(x) - \alpha_{i,0}'(x), \tag{1.8}$$

$$d_{i,j}(x) = \alpha_{i,j}(x)\alpha_{i,r-2}(x) - \alpha_{i,j-1}(x) + \alpha_{i,j}(x)d_{i,r-1}(x) - \alpha_{i,j}'(x), j \geq 1, \tag{1.9}$$

где $\alpha_{i,j}(x) = \frac{c_{i,j}(x)}{c_{i,r-1}(x)}$, $0 \leq j \leq r-1$, $1 \leq i \leq rg$. Чтобы найти χ_i, необходимо решить уравнения (1.7)–(1.9). Зная функции χ_i, можно найти коэффициенты операторов. В случае

$g=1$, $r=2$ Кричевер и Новиков [21] смогли решить эти уравнения и найти операторы. Так, операторы четвертого порядка имеют вид

$$L_{KN}=\left(\partial_x^2+u\right)^2+2c_x(\wp(\gamma_2)-\wp(\gamma_1))\partial_x+(c_x(\wp(\gamma_2)-\wp(\gamma_1)))_x-\wp(\gamma_2)-\wp(\gamma_1),$$

где $\gamma_1(x)=\gamma_0+c(x),\gamma_2(x)=\gamma_0-c(x)$,

$$u(x)=-\frac{1}{4c_x^2}+\frac{1}{4}\frac{c_{xx}^2}{c_x^2}+2\Phi(\gamma_1,\gamma_2)c_x-\frac{c_{xxx}}{2c_x}+c_x^2(\Phi_c(\gamma_0+c,\gamma_0-c)-\Phi^2(\gamma_1,\gamma_2)),$$

$$\Phi(\gamma_1,\gamma_2)=\zeta(\gamma_2-\gamma_1)+\zeta(\gamma_1)-\zeta(\gamma_2),$$

$\zeta(z),\wp(z)$ — функции Вейерштрасса, $c(x)$ — произвольная гладкая функция, γ_0 — константа. Оператор L_{KN} коммутирует с оператором шестого порядка $\tilde{L}_{KN}$.

Операторы ранга 3, соответствующие эллиптическим спектральным кривым, были найдены О. И. Моховым [101]. В работах [93–95,152] были построены примеры операторов ранга 2,3 со спектральными кривыми родов 2–4.

В работе [96] изучались коммутирующие операторы ранга два и порядков 4 и $4g+2$ с гиперэллиптической спектральной кривой

$$L_4\psi=\lambda\psi,\quad L_{4g+2}\psi=\mu\psi,\quad \mu^2=F_g(\lambda)=\lambda^{2g+1}+c_{2g}\lambda^{2g}+\dots+c_0.$$

Общие собственные функции операторов L_4 и L_{4g+2} удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка

$$\psi''-\chi_1(x,Q)\psi'-\chi_0(x,Q)\psi=0,\ \ Q=(\lambda,\mu)\in C,$$

где $\chi_0(x,Q),\chi_1(x,Q)$ — рациональные функции на кривой C, удовлетворяющие уравнениям (1.7)–(1.9).

Напомним несколько результатов из этой работы.

Теорема 1. *([96]) Оператор L_4 формально самомопряжен если и только если*

$$\chi_1(x,Q)=\chi_1(x,\sigma(Q)),$$

где σ — инволюция гиперэллиптической кривой C.

Теорема 2. *([96]) Если L_4 формально самосопряжен, т.е. $L_4=(\partial_x^2+V(x))^2+W(x)$, то*

$$\chi_0=-\frac{1}{2}\frac{Q_{xx}}{Q}+\frac{\mu}{Q}-V,\qquad \chi_1=\frac{Q_x}{Q},$$

где $Q=\lambda^g+a_{g-1}(x)\lambda^{g-1}+\dots+a_0(x)$, $a_0(x),\dots,a_{g-1}(x)$ — некоторые функции. Функция Q удовлетворяет уравнению

$$4F_g(\lambda)=4(\lambda-W)Q^2-4V(Q_x)^2+(Q_{xx})^2-2Q_xQ_{xxx}+2Q(2V_xQ_x+4VQ_{xx}+\partial_x^4Q).\quad (1.10)$$

Из теоремы 2 следует

Следствие 1. *Функция Q удовлетворяет линейному уравнению*

$$\partial_x^5Q+4VQ_{xxx}+6V_xQ_{xx}+2(2\lambda-2W+V_{xx})Q_x-2W_xQ=0.\quad (1.11)$$

Следствие 2. *Если $g=1$, то*

$$V=\frac{-16F_1(\frac{1}{2}(-c_2-W))+W_{xx}^2-2W_xW_{xxx}}{4W_x^2},\quad (1.12)$$

где F_1 определяет спектральную кривую $\mu^2=F_1(x)=\lambda^3+c_2\lambda^2+c_1\lambda+c_0$.

С помощью теоремы 2 было недавно построено множество примеров операторов ранга 2 (см. [52,53,116]).

1.1.2 Коммутирующие операторы с полиномиальными коэффициентами

Особый интерес представляют коммутирующие ОДО с полиномиальными коэффициентами. Кроме того, что такие коэффициенты являются наиболее хорошими со всех точек зрения функциями, примеры таких операторов связаны со следующей гипотезой Ю. Береста.

Группа автоморфизмов первой алгебры Вейля $A_1 = k[x][\partial_x]$ действует на множестве решений уравнения

$$f(X,Y) = \sum_{j,i=0}^{n} \alpha_{ij} X^i Y^j = 0, \quad X, Y \in A_1, \alpha_{ij} \in k. \tag{1.13}$$

Группа $Aut(A_1)$ порождена следующими автоморфизмами

$$\varphi_1(x) = \alpha x + \beta \partial_x, \quad \varphi_1(\partial_x) = \gamma x + \delta \partial_x, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in k, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

$$\varphi_2(x) = x + P_1(\partial_x), \quad \varphi_2(\partial_x) = \partial_x,$$
$$\varphi_3(x) = x, \quad \varphi_2(\partial_x) = \partial_x + P_2(x),$$

где P_1, P_2 — произвольные многочлены (см. [55]). Возникает естественная и важная проблема описания пространства орбит относительно действия группы $Aut(A_1)$ на множестве решений уравнения (1.13). Такое описание могло бы дать шанс сравнить эндоморфизмы $End(A_1)$ и автоморфизмы $Aut(A_1)$ алгебры Вейля. Напомним гипотезу Диксмье для алгебы A_1: $End(A_1) = Aut(A_1)$ (а общая гипотеза Диксмье для алгебры A_n стабильно эквивалентна гипотезе о якобиане, см. [76]). Берест высказал следующую интересную гипотезу:

Если риманова поверхность, соответствующая уравнению $f = 0$ с общими значениями $\alpha_{ij} \in k$ имеет род $g = 1$, то пространство орбит бесконечно, а если $g > 1$, то существует лишь конечное число орбит.

Если бы пространство орбит оказалось конечным для некоторого уравнения (1.13), то можно было бы доказать равенство $End(A_1) = Aut(A_1)$.

Рассмотрим уравнение

$$Y^2 = X^{2g+1} + c_{2g}X^{2g} + \cdots + c_1 X + c_0, \quad X, Y \in A_1, c_j \in k. \tag{1.14}$$

Теорема 3. *Для произвольного целого $m > 0$ и произвольной спектральной кривой C, заданной уравнением $\mu^2 = \lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$, существуют многочлены*

$$V_m = \alpha_{m+2}x^{m+2} + \ldots + \alpha_0, \quad W_m = \beta_m x^m + \ldots + \beta_0, \quad \alpha_{m+2} \neq 0, \beta_m \neq 0,$$

такие что оператор

$$L_{4,m} = (\partial_x^2 + V_m(x))^2 + W_m(x)$$

коммутирует с оператором шестого порядка $L_{6,m}$. Спектральная кривая операторов $L_{4,m}, L_{6,m}$ совпадает с C.

Отметим, что при $m = 1$

$$L_{4,1} = (\partial_x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)^2 + 2\alpha_3 x, \quad \alpha_3 \neq 0,$$

и при $\alpha_3 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ операторы $L_{4,1}, L_{6,1}$ совпадают с операторами Диксмье из [55]. Операторы Диксмье были первыми примерами операторов с полиномиальными коэффициентами. Возникает естественный вопрос, как получить $L_{4,m}, L_{6,m}$ из $L_{KN}, \tilde{L}_{KN}$? При $m = 1$ ответ был дан П. Г. Гриневичем в работе [5]:

- Оператор L_{KN}, соответствующий спектральной кривой $\mu^2 = 4\lambda^3 + g_2\lambda + g_3$, имеет рациональные коэффициенты если и только если

$$c(x) = \int_{q(x)}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 + g_2 t + g_3}},$$

где $q(x)$ — рациональная функция. Если $\gamma_0 = 0$ и $q(x) = x$, то L_{KN} совпадает с $L_{4,1}$.

В общем случае ответ пока неизвестен. Отметим, что аналогичная теореме 3 теорема для несамосопряженных операторов доказана в препринте [15], а ответ на вопрос о том как устроена классификация всех операторов с полиномиальными коэффициентами даже для эллиптической спектральной кривой до сих пор открыт.

Доказательство (теоремы 3)

Запишем уравнение (1.12) в виде

$$4W_x^2 V = -16F_1(\frac{1}{2}(c_2 - W)) + W_{xx}^2 - 2W_x W_{xxx}, \tag{1.15}$$

Продифференцируем обе части (1.15) по x, а затем разделим на W_x. Получим

$$-4F_1'(\frac{1}{2}(-c_2 - W)) + 2V_x W_x + 4VW_{xx} + W_{xxxx} = 0. \tag{1.16}$$

Уравнение (1.15) эквивалентно системе уравнений: уравнению (1.16) и уравнению на свободный член в (1.15)

$$\alpha_0 \beta_1^2 = -4F_1(\frac{1}{2}(c_2 - \beta_0)) + \beta_2^2 - 3\beta_1\beta_3. \tag{1.17}$$

Уравнение (1.16) эквивалентно системе из $2m+1$ уравнений с $2m+4$ переменными α_i, β_j. Заметим, что все уравнения имеют степень 2 и множество их решений состоит из точек в k^{2m+4} (с координатами α_i, β_j), которые лежат в пересечении $2m+1$ квадрик заданных этими уравнениями. По теореме [27, глава 1, теорема 7.2] пересечение X этих квадрик с кубикой (1.17) в $\mathbb{P}^{2m+4}$ (с однородными координатами α_i, β_j, u) непусто и каждая его неприводимая компонента имеет размерность больше или равную 2. По этой же причине пересечение X с гиперплоскостью $Z = \{u = 0\}$ на бесконечности непусто и каждая его неприводимая компонента имеет размерность больше или равную 1.

Для доказательства утверждения достаточно доказать, что для любого фиксированного $m > 0$ существует одномерная неприводимая компонента в $X \cap Z$. Из этого факта мы можем заключить, что аффинная часть пересечения X непуста (на самом деле, мы увидим, что эта аффинная часть содержит точку с ненулевыми координатами α_{m+2} и β_m).

Однородные части наших уравнений в $\mathbb{P}^{2m+4}$, которые не зависят от u, могут быть легко записаны: для уравнения (1.16) это в точности коэффициенты при x^i уравнения

$$4VW_{xx} + 2V_x W_x - 3W^2, \tag{1.18}$$

и для уравнения (1.17) — это

$$\alpha_0\beta_1^2 + \beta_0^3/2 = 0. \tag{1.19}$$

Следующим наблюдением является то, что уравнения (1.18), (1.19) всегда имеют решения вида

$$O = (\alpha_{m+2} \neq 0 : \beta_m \neq 0 : 0 : \ldots : 0), \quad \text{т.е.} \quad R = \alpha_{m+2}^2 x^{m+2}, \quad P = \beta_m x^m$$

для любого $m > 0$. Поэтому мы можем положить, например, $\beta_m = 1$, $\alpha_{m+2} = 3/(6m^2)$.

Докажем, что для любого фиксированного $m > 0$ любая неприводимая компонента $X \cap Z$, содержащая O, имеет размерность 1. Рассмотрим открытую аффинную окрестность O: $\beta_m = 1$. И рассмотрим пересечение $X \cap Z$ с аффинной гиперплоскостью $\beta_0 = 0$. Так как пересечение содержит ту же точку O, оно непусто и поэтому каждая его неприводимая компонента имеет размерность больше или равную нулю. Докажем что это пересечение содержит в точности одну точку O (а следовательно, все неприводимые компоненты $X \cap Z$, содержащие O, имеют размерность один).

Заметим, что из (1.19) следует, что либо $\alpha_0 = 0$, либо $\beta_1 = 0$. Если $\beta_0 = \beta_1 = 0$, то из уравнения (1.18) следует, что $\alpha_0 = 0$. С другой стороны, мы можем рассмотреть (1.18) как обыкновенное дифференциальное уравнение с полиномиальными коэффициентами на функцию $V(x)$. Решением этого уравнения является

$$V = \frac{W^3/2 + C}{W_x^2}, \quad C \in k.$$

Так как $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, то постоянная C должна быть нулем. Но тогда W должно делиться на W_x, т.е. $W = x^m$, так как $\beta_m = 1$ и $\beta_0 = 0$. Поэтому имеется только одно решение (V, W) у (1.18) и только одно решение O у соответствующих однородных уравнений.

Это означает, что имеется точка в аффинной карте $u \neq 0$ в X, которая близка к O, т.е. ее координаты α_{m+2} и β_m ненулевые.

Коммутирующие операторы ранга два и порядков 4 и $4g + 2$ с гиперэллиптической спектральной кривой рода g изучались в работе [96]. С помощью методов этой работы можно строить операторы ранга 2 при $g > 1$. Например, оператор

$$L_4^\sharp = (\partial_x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)^2 + g(g+1)\alpha_3 x, \qquad \alpha_3 \neq 0$$

коммутирует с оператором $L_{4g+2}^\sharp$ ([96]).Мохов [102] доказал, что, применяя автоморфизмы из $Aut(A_1)$ к операторам $L_4^\sharp, L_{4g+2}^\sharp$ можно получить операторы рангов $l = 2k$ и $l = 3k$, где k — положительное целое число.

Другой важный пример, построенный в [97], таков. Оператор

$$L_4^\natural = (\partial_x^2 + \alpha_1 \cosh x + \alpha_0)^2 + \alpha_1 g(g+1) \cosh x, \quad \alpha_1 \neq 0$$

коммутирует с $L_{4g+2}^\natural$. Эти операторы не коммутируют с операторами нечетного порядка [54], поэтому эти операторы имеют *истинный ранг 2*. Многочлен Q для операторов $L_4^\natural, L_{4g+2}^\natural$ имеет вид (см. [97])

$$Q(x, \lambda) = A_g(\lambda) \cosh^g x + \dots + A_1(\lambda) \cosh x + A_0(\lambda),$$

где

$$A_s = \frac{1}{8(2s+1)\alpha_1(g(g+1) - s(s+1))} \Bigg(4A_{s+5}\frac{(s+5)!}{s!} - 8A_{s+3}\frac{(s+3)!}{s!}(2\alpha_0 + s^2 + 4s + 5) -$$

$$-8A_{s+2}\frac{(s+2)!}{s!}(2s+3)\alpha_1 + 4A_{s+1}(s+1)((s+1)^2(4\alpha_0 + (s+1)^2 + 4z) \Bigg), \; 0 \leq s < g, \quad (1.20)$$

и мы предполагаем, что $A_s = 0$ при $s < 0$ и $s > g$, а A_g — константа.

Лемма 4. *([96]) Спектральная кривая операторов $L_4^\natural, L_{4g+2}^\natural$ задается уравнением*

$$\mu^2 = F_g(\lambda) = \frac{1}{4}\left(4A_0^2\lambda - 4A_0A_1\alpha_1 - 16A_2(\alpha_0+1) + 48A_4\right) + 4\alpha_0 A_1^2 + 4A_2^2 - 2A_1(6A_3 - A_1)\right),$$

где $A_j(\lambda)$ определены в (1.20).

Пример 5. Если $g = 1$, то

$$F_1(\lambda) = \lambda^3 + (\frac{1}{2} - 2\alpha_0)\lambda^2 + \frac{1}{16}(1 - 8\alpha_0 + 16\alpha_0^2 - 16\alpha_1^2)\lambda + \frac{\alpha_1^2}{4}.$$

Пример 6. При $g = 2$, положим для простоты формул $\alpha_0 = 0$.

$$F_2(\lambda) = \lambda^5 + \frac{17}{2}\lambda^4 + \frac{1}{16}(321 - 336\alpha_1^2)\lambda^3 + \frac{1}{4}(34 - 531\alpha_1^2)\lambda^2 + (1 - 189\alpha_1^2 + 108\alpha_1^4)\lambda + 24\alpha_1^2 + 513\alpha_1^4.$$

Спектральные кривые, определенные этими уравнениями, неособы при общих значениях параметров.

О. И. Мохов [103] нашел замечательную замену переменных

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})^r, \quad r = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

которая переводит операторы $L_4^\natural, L_{4g+2}^\natural$ в операторы с полиномиальными коэффициентами. В частности, $L_4^\natural$ в новых переменных выглядит так:

$$L_4^\natural = ((1 - y^2)\partial_y^2 - 3y\partial_y + aT_r(y) + b)^2 - ar^2 g(g+1)T_r(y), \quad a \neq 0,$$

где b — произвольная константа, $T_r(y)$ — многочлен Чебышева степени $|r|$. Напомним, что

$$T_0(y) = 1, \quad T_1(y) = y, \quad T_r(y) = 2yT_{r-1}(y) - T_{r-2}(y), \quad T_{-r}(y) = T_r(y).$$

Многочлены Чебышева коммутируют, т.е.

$$T_n(T_m(y)) = T_m(T_n(y)) = T_{n+m}(y).$$

Если теперь применить автоморфизм первой алгебры Вейля $A_1 = k[y][\partial_y]$

$$\varphi(y) = -\partial_y, \qquad \varphi(\partial_y) = y, \quad \varphi \in Aut(A_1)$$

к операторам $L_4^\natural, L_{4g+2}^\natural$ в новых переменных, то получатся операторы порядков $2r, (2g+1)r$ ранга r [103] и

$$\varphi(L_4^\natural) = (aT_r(\partial_y) - y^2\partial_y^2 - 3y\partial_y + y^2 + b)^2 - arg(g+1)T_r(\partial_y).$$

Теперь мы можем доказать другие две основные теоремы этого раздела.

Теорема 4. *Множество орбит группы $Aut(A_1)$ на пространстве решений произвольного уравнения*

$$Y^2 = X^3 + c_2X^2 + c_1X + c_0, \quad X, Y \in A_1, c_j \in k$$

бесконечно.

Пусть спектральная кривая для операторов $L_4^\natural, L_{4g+2}^\natural$ задается уравнением

$$\mu^2 = \lambda^{2g+1} + c_{2g}^\natural\lambda^{2g} + \dots + c_1^\natural\lambda + c_0^\natural. \tag{1.21}$$

Теорема 5. *Множество орбит группы $Aut(A_1)$ на пространстве решений уравнения*

$$Y^2 = X^{2g+1} + c_{2g}^\natural X^{2g} + \dots + c_1^\natural X + c_0^\natural, \quad X, Y \in A_1$$

бесконечно.

Доказательство (теорем 4 и 5).

В силу теоремы 3, произвольное уравнение вида

$$Y^2 = X^3 + c_2X^2 + c_1X + c_0, \quad X, Y \in A_1$$

имеет бесконечно много решений вида $L_{4,m} = (\partial_x^2 + V_m(x))^2 + W_m(x)$, $L_{6,m}$, и уравнение

$$Y^2 = X^{2g+1} + c_{2g}^\natural X^{2g} + \cdots + c_1^\natural X + c_0^\natural, \quad X, Y \in A_1$$

тоже имеет бесконечно много решений вида $\varphi^\natural(L_4^\natural)$, $\varphi^\natural(L_{4g+2}^\natural)$, где

$$L(r) = \varphi^\natural(L_4^\natural) = ((1-y^2)\partial_y^2 - 3y\partial_y + aT_r(y) + b)^2 - ar^2g(g+1)T_r(y),$$

$T_r(y)$ — многочлен Чебышева степени $|r|$. Для доказательства теорем 4 и 5 достаточно доказать, что для $r > 10$ и $r \neq r_1$

$$\varphi(L_{4,r}) \neq L_{4,r_1}, \qquad \varphi(L(r)) \neq L(r_1),$$

для произвольного $\varphi \in Aut(A_1)$. Эти утверждения вытекают из следующей леммы.

Лемма 5. *Рассмотрим семейство операторов порядка 4 с полиномиальными коэффициентами*

$$L(r) = (a(x)\partial_x^2 + b(x)\partial_x + c_r(x))^2 + d_r(x), \quad r \in \mathbb{N},$$

где $a(x), b(x)$ — многочлены фиксированной степени, такие что

$$\mathrm{deg}a(x) > \mathrm{deg}b(x), \quad \mathrm{deg}c_r(x) = r, \quad r \geq \mathrm{deg}d_r(x).$$

Если $r > \mathrm{deg}a(x) + 8$, то

$$\varphi(L(r)) \neq L(r_1)$$

при $r \neq r_1$ для произвольного $\varphi \in Aut(A_1)$.

Мы предполагаем здесь, что $\mathrm{deg}b(x) = -\infty$ если $b(x) = 0$.

Доказательство Предположим, что существует автоморфизм $\varphi \in Aut(A_1)$, такой что при $r > \mathrm{deg}a(x) + 8$ выполняется равенство $\varphi(L(r)) = L(r_1)$ для некоторого $r \neq r_1$. Пусть

$$\varphi(x) = q_n(x)\partial_x^n + \cdots + q_0(x), \qquad \varphi(\partial_x) = p_m(x)\partial_x^m + \cdots + p_0(x),$$

где q_j, p_s — некоторые многочлены. Рассмотрим сначала случай $n = 0$. Если $n = 0$, то $m = 1$, т.к. иначе оператор $\varphi(L(r))$ имеет порядок больше четырех. Далее,

$$\varphi(a(x)\partial_x^2 + b(x)\partial_x) = a(q_0(x))(p_1(x)\partial_x + p_0(x))^2 + b(q_0(x))(p_1(x)\partial_x + p_0(x)) =$$

$$a(q_0(x))p_1^2(x)\partial_x^2 + a(q_0(x))(p_1(x)p_1'(x) + p_0(x) + b(q_0(x))p_1(x))\partial_x +$$
$$+ a(q_0(x))p_0(x) + b(q_0(x)) + b(q_0(x))p_0(x).$$

Из наших предположений вытекает, что

$$a(q_0(x))p_1^2(x) = a(x), \qquad a(q_0(x))(p_1(x)p_1'(x) + p_0(x)) + b(q_0(x))p_1(x) = b(x).$$

Следовательно, из первого тождества мы получаем, что $p_1(x)$ — константа и $q_0(x)$ — линейная функция. Из второго тождества мы получаем, что $p_0(x)$ — константа, т.к. иначе степень левой части равенства больше степени правой части равенства. Таким образом,

$$\varphi(x) = s_1x + s_2, \qquad \varphi(\partial_x) = s_3\partial_x + s_4, \quad s_j \in k.$$

Отсюда получаем, что $\varphi(L(r)) \neq L(r_1)$.

Рассмотрим теперь общий случай $n \neq 0$. Имеются следующие равенства для порядков дифференциальных операторов:

$$\mathrm{ord}\varphi(a(x)\partial_x^2) = n\mathrm{deg}a(x) + 2m, \quad \mathrm{ord}\varphi(b(x)\partial_x) = n\mathrm{deg}b(x) + m, \quad \mathrm{ord}\varphi(c_r(x)) = rn.$$

Заметим, что
$$\mathrm{ord}\varphi(a(x)\partial_x^2) = \mathrm{ord}\varphi(c_r(x)),$$
т.к. иначе, поскольку $\mathrm{ord}\varphi(a(x)\partial_x^2) > \mathrm{ord}\varphi(b(x)\partial_x)$ имели бы место равенства

$$\mathrm{ord}\varphi(a(x)\partial_x^2 + b(x)\partial_x + c_r(x)) = \mathrm{ord}\varphi(a(x)\partial_x^2 + c_r(x)) = \max\{rn, n\deg a(x) + 2m\} \geq r,$$

и, следовательно, $\mathrm{ord}\varphi(L(r)) \geq 2r > 4$, противоречие. Таким образом,

$$n\mathrm{deg}a(x) + 2m = rn. \tag{1.22}$$

Прямыми вычислениями проверяется, что

$$\mathrm{ad}(-x)^3(L(r)) = [[[L(r), x], x], x] = 24a^2(x)\partial_x + 12a(x)b(x) + 12a(x)a'(x),$$

откуда
$$\mathrm{ord}\varphi(\mathrm{ad}(-x)^3(L(r))) = 2n\mathrm{deg}a(x) + m.$$

С другой стороны,
$$\varphi(\mathrm{ad}(-x)^3(L(r))) = \mathrm{ad}(-\varphi(x))^3(\varphi(L(r))).$$

Теперь имеем:

$$\mathrm{ord}[\varphi(L(r)), \varphi(x)] \leq n+3, \qquad \mathrm{ord}[[\varphi(L(r)), \varphi(x)], \varphi(x)] \leq 2n+2,$$

$$\mathrm{ord}[[[\varphi(L(r)), \varphi(x)], \varphi(x)], \varphi(x)] \leq 3n+1.$$

Отсюда, используя (1.22) и предположение $r > \mathrm{deg}a(x) + 8$, получаем

$$3n+1 \geq \mathrm{ord}[\mathrm{ad}(-\varphi(x))^3(\varphi(L(r)))] = 2n\mathrm{deg}a(x)+m = n(r+3\mathrm{deg}a(x))/2 > \frac{n}{2}(8+4\mathrm{deg}a(x)) =$$

$$4n + 2n\mathrm{deg}a(x).$$

Противоречие.

Теоремы 4 и 5 доказаны.

Было бы интересно в будущем проверить гипотезу Береста при $g > 1$ для общего уравнения (1.13), имеющего непостоянное решение в A_1.

Замечание 3. Группа $Aut(A_1)$ действует также на множестве колец коммутирующих дифференциальных операторов с аффинными спектральными кривыми из теорем 4 и 5. Нетрудно показать, что пространство орбит в этом случае также бесконечно.

1.2 Алгебраическая теория коммутирующих ОДО

Этот раздел содержит обзор алгебраической модификации теории из первого раздела. Оставшаяся часть диссертации является во многом естественным обобщением алгебраической теории, изложенной в этом разделе. Также этот раздел содержит необходимые для дальнейшего изложения технические факты.

Определение 2. Пусть B — коммутативная подалгебра в D. Число

$$r = \mathrm{rk}(B) = \gcd\left\{\mathsf{ord}(Q)\middle|Q \in B\right\}$$

называется *рангом* B.

Теорема 6. *Пусть B — коммутативная подалгебра в D.*

1. *Алгебра B является конечно порожденной целой областью размерности Крулля один. В частности, B определяет целую аффинную алгебраическую кривую $C_0 :=$* $\mathrm{Spec}(B)$.

2. *Более того, C_0 может быть компактифицирована одной точкой P до проективной кривой C, причем точка P регулярна и определятся дискретным нормированием*

$$\mathsf{val}_p : \mathfrak{Q} \to \mathbb{Z}, \quad \frac{R}{Q} \mapsto \frac{\mathrm{ord}(Q) - \mathrm{ord}(R)}{r},$$

где $\mathfrak{Q}$ — поле частных кольца B, и r — ранг B.

Комментарии к доказательству. В приведенной форме этот результат описан в работах Мамфорда [109, Section 2] и Вердье [144, Proposition 1]. См. также [107, Theorem 3.3].

Определение 3. Проективная кривая $C = C_0 \cup \{P\}$ называется *спектральной кривой* коммутативной подалгебры $B \subset D$. Арифметический род кривой C называется *родом* алгебры B.

Пример 7. В примере Валленберга (1.3) алгебра $k[R, Q]$ имеет ранг один и род один. В примере Диксмье (1.4) алгебра $k[R, Q]$ имеет ранг два и род один *для всех* $\kappa \in \mathbb{C}$.

Определение 4. Пусть $B \subset D$ — коммутативная подалгебра. Рассмотрим правый D-модуль $F := D/xD \stackrel{\cong}{\to} k[\partial]$, $\overline{a(x)\partial^n} \mapsto a(0)\partial^n$. Очевидно, *правое* действие D на $k[\partial]$ определяется следующими правилами:

$$\left\{\begin{array}{lcl} p(\partial) \diamond \partial & = & \partial \cdot p(\partial) \\ p(\partial) \diamond x & = & p'(\partial). \end{array}\right. \tag{1.23}$$

Ограничивая действие (1.23) на подалгебру B, мы снабжаем F структурой B-модуля. Так как алгебра B коммутативна, мы будем рассматривать F как *левый* B-модуль (имея в виду естественное правое действие)

Теорема 7. *Пусть $B \subset D$ — коммутативная подалгебра ранга r. Тогда F конечно порожден и не имеет кручения над B. Более того, $\mathfrak{Q} \otimes_B F \cong \mathfrak{Q}^{\oplus r}$, т.е.* $\mathrm{rk}_B(F) = \mathrm{rk}(B)$. *Другими словами, ранг алгебры B в смысле определения 2 совпадает с рангом F, рассматриваемым как B-модуль.*

Комментарии к доказательству. В приведенной форме этот результат описан в [144, Proposition 3] и [109, Section 2]. Ср. также главу 2, где приведено обобщение этих утверждений в многомерном случае.

Напомним, что по теореме Гильберта о нулях точки кривой C_0 находятся в биективном соответствии с гомоморфизмами алгебр $B \to k$ (называемыми в дальнейшем *характерами*).

Определение 5. Пусть $q \in C_0$ — произвольная точка, и $\chi = \chi_q : B \to k$ — соответствующий характер. Назовем k-векторное пространство

$$\mathsf{Sol}\big(B,\chi\big) := \big\{f \in k[[x]] \big| Q \circ f = \chi(Q)f \text{ для всех } Q \in B\big\} \tag{1.24}$$

пространством решений алгебры B в точке q. Здесь мы рассматриваем обычное левое действие $\circ$ алгебры D на $k[[x]]$. Заметим, что $\mathsf{Sol}\big(B,\chi\big)$ имеет естественную структуру B-модуля.

Геометрическое значение B-модуля F объясняется следующей теоремой.

Теорема 8. *Следующее k-линейное отображение*

$$F \xrightarrow{\eta_\chi} \mathsf{Sol}\big(B,\chi\big)^*, \quad \partial^i \mapsto \big(f \mapsto f^{(i)}(0)\big) \tag{1.25}$$

является также B-линейным, где $\mathsf{Sol}\big(B,\chi\big)^* = \mathrm{Hom}_k\big(\mathsf{Sol}\big(B,\chi\big),k\big)$ — двойственное пространство к пространству решений. Более того, индуцированное отображение

$$B/\ker(\chi)\otimes_B F \xrightarrow{\bar{\eta}_\chi} \mathsf{Sol}\big(B,\chi\big)^* \tag{1.26}$$

является изоморфизмом B-модулей.

Доказательство Эти утверждения содержатся в [109, Section 2] или [144, Proposition 5], где даны краткие указания к доказательствам. Для удобства изложения приведем здесь подробное доказательство. Сначала заметим, что отображение

$$\mathrm{Hom}_k\big(F,k\big) \xrightarrow{\Phi} k[[x]], \quad \lambda \mapsto \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\lambda(\partial^p)x^p \tag{1.27}$$

является изоморфизмом левых D-модулей. Пусть $B \xrightarrow{\chi} k$ — характер, тогда $k = k_\chi := B/\ker(\chi)$ — левый B-модуль. Мы получаем B-линейное отображение

$$\Psi : \mathrm{Hom}_B(F,k_\chi) \xrightarrow{I} \mathrm{Hom}_k(F,k) \xrightarrow{\Phi} k[[x]], \tag{1.28}$$

где I — забывающее отображение. Образ I состоит из таких k-линейных функционалов, которые также B-линейны, т.е.

$$\mathsf{Im}(I) = \big\{\lambda \in \mathrm{Hom}_k(F,k) \;\big|\; \lambda(Q \diamond -) = \chi(Q)\cdot\lambda(-) \text{ для всех } Q \in B\big\}.$$

Отсюда следует, что $\mathsf{Im}(\Psi) = \mathsf{Sol}(B,\chi)$. Далее, имеется канонический изоморфизм B-модулей: $\mathrm{Hom}_B(F,k_\chi) \cong \mathrm{Hom}_k\big(B/\ker(\chi)\otimes_B F,k\big)$. Вновь дуализируя, получаем изоморфизм векторных пространств

$$\Psi^* : \mathsf{Sol}(B,\chi)^* \to \big(B/\ker(\chi)\otimes_B F\big)^{**} \cong B/\ker(\chi)\otimes_B F.$$

Осталось заметить, что Ψ^* также B-линеен и $\big(\Psi^*\big)^{-1} = \bar{\eta}_\chi$.

Замечание 4. Изоморфизм (1.26) имеет следующее геометрическое значение: если рассматривать F как когерентный пучок на $C_0 = \mathrm{Spec}(A)$, то для любой точки $q \in C_0$ (гладкой или особой) имеет место: $F\big|_q \cong \mathsf{Sol}(B,\chi)^*$, где $B \xrightarrow{\chi} k$ — характер, соответствующий точке q. Вследствие этого факта, F называется *спектральным модулем* алгебры B.

Следствие 3. *Пусть $B \subset D$ — коммутативная подалгебра ранга r. Тогда для любого характера $B \xrightarrow{\chi} k$ имеются неравенства: $r \le \dim_k\bigl(\mathsf{Sol}(B,\chi)\bigr) < \infty$. Более того, $\dim_k\bigl(\mathsf{Sol}(B,\chi)\bigr) \ge r+1$ если и только если χ задает* особую точку $q \in C_0$ и F не локально свободен *в q.*

По теореме 6, аффинная кривая $C_0 = \mathsf{Spec}(B)$ имеет каноническую компактификацию C. Спектральный модуль F также может быть *канонически* продолжен с C_0 на всю проективную кривую C.

Теорема 9. *Пусть B — коммутативная подалгебра в D ранга r. Тогда существует единственный пучок без кручения $\mathcal{F}$ (называемый* спектральным пучком *алгебры B) на проективной кривой $C = C_0 \cup \{P\}$, такой что*

1. *Модуль $\Gamma(C_0, \mathcal{F})$ изоморфен F рассматриваемому как B-модуль (напомним, что $B \cong \Gamma(C_0, \mathcal{O})$).*

2. *Образ канонического отображения ограничения $\Gamma(C,\mathcal{F}) \to \Gamma(C_0,\mathcal{F})$ — векторное пространство $\langle 1, \partial, \dots, \partial^{r-1}\rangle_k \subset k[\partial] = F \cong \Gamma(C_0,\mathcal{F})$. В частности, $\dim_k\bigl(\Gamma(C,\mathcal{F})\bigr) = r$.*

3. *Отображение вычисления $\Gamma(C,\mathcal{F}) \xrightarrow{\mathsf{ev}_P} \mathcal{F}\big|_P$ — изоморфизм, и $H^1(C,\mathcal{F}) = 0$.*

Комментарии к доказательству. Рассматривая длинную точную когомологическую последовательность, ассоциированную с короткой точной последовательностью когерентных пучков $0 \to \mathcal{F}(-[P]) \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}\big|_P \to 0$, сразу видно, что условие (3) теоремы 9 для $\mathcal{F}$ эквивалентно следующему.

$$H^0\bigl(C, \mathcal{F}(-[P])\bigr) = 0 = H^1\bigl(C, \mathcal{F}(-[P])\bigr). \tag{1.29}$$

Утверждение следует теперь из [107, Theorem 3.4], примененной к пучку без кручения $\mathcal{F}(-[P])$.

Напомним определение полустабильного пучка.

Определение 6. Наклон когерентного пучка без кручения (не обязательно локально свободного) $\mathcal{G}$ на C — отношение $\mu(\mathcal{G}) := \frac{\chi(\mathcal{G})}{rk(\mathcal{G})}$, где $\chi(\mathcal{G}) := \dim_k\bigl(H^0(C,\mathcal{G})\bigr) - \dim_k\bigl(H^1(C,\mathcal{G})\bigr)$ — эйлерова характеристика пучка $\mathcal{G}$, и $rk(\mathcal{G})$ — ранг $\mathcal{G}$. Когерентный пучок $\mathcal{G}$ полустабилен, если для любого подпучка $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ выполнено неравенство: $\mu(\mathcal{G}') \le \mu(\mathcal{G})$.

Следствие 4. *Пусть B — коммутативная подалгебра в D, и $\mathcal{F}$ — ее спектральный пучок.*

1. *Следующая последовательность когерентных пучков на C точна:*

$$0 \to \Gamma(C,\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{\mathsf{ev}} \mathcal{F} \to \mathcal{T} \to 0, \tag{1.30}$$

   где $\mathcal{T}$ — пучок кручения на C, чей носитель принадлежит аффинной кривой C_0.

2. *Пучок $\mathcal{F}$ полустабилен наклона один.*

Доказательство (1) Пусть $\mathcal{T} := \mathsf{Cok}\bigl(\Gamma(C,\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{\mathsf{ev}} \mathcal{F}\bigr)$. В силу условия (3) в аксиоматическом описании спектрального пучка $\mathcal{F}$ из теоремы 9, точка на бесконечности $P \in C$ не принадлежит носителю $\mathcal{T}$. Отсюда следует, что $\mathcal{T}$ — пучок кручения, чей носитель принадлежит C_0. Поскольку ранги пучков без кручения $\Gamma(C,\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}$ и $\mathcal{F}$ равны r, ранг $\ker(\mathsf{ev})$

равен нулю. Это означает, что $\ker(\mathsf{ev})$ — пучок кручения. С другой стороны, $\ker(\mathsf{ev})$ — подпучок пучка без кручения $\Gamma(C,\mathcal{F})\otimes\mathcal{O}$. Следовательно, $\ker(\mathsf{ev})=0$ и последовательность (1.30) точна.

(2) Когерентный пучок $\widetilde{\mathcal{F}} := \mathcal{F}(-[P])$ полустабилен. Действительно, из-за обращения в ноль (1.29), $\mu(\widetilde{\mathcal{F}})=0$. Если ch — подпучок в $\widetilde{\mathcal{F}}$, то $H^0(C,\mathrm{ch})=0$, а потому $\mu(\mathrm{ch})\le 0$. Отсюда, $\widetilde{\mathcal{F}}$ полустабилен, следовательно $\mathcal{F}$ также полустабилен.

Определение 7. Пусть $B\subset D$ — коммутативная подалгебра. Тогда тройка $(C,P,\mathcal{F})$ составляет часть *спектральных данных* алгебры B. В частности, $B\cong\Gamma\big(C\setminus\{P\},\mathcal{O}\big)$ как k-алгебра.

Теорема 10 (Соответствие Кричевера)**.** *Рассмотрим следующие два множества:*

$$\mathsf{DiffOp}=\left\{B\subset D \,\middle|\, B \text{ коммутативная, эллиптическая и нормализованная }\right\} \tag{1.31}$$

и

$$\mathsf{SpecData}=\left\{(C,P,\mathcal{F})\,\middle|\,\begin{array}{l} C \text{ целая проективная кривая}\\ P\in C \text{ гладкая точка}\\ \mathcal{F} \text{ без кручения, } H^1(C,\mathcal{F})=0\\ \Gamma(C,\mathcal{F})\overset{\mathsf{ev}_p}{\to}\mathcal{F}\big|_p \text{ изоморфизм}\end{array}\right\}. \tag{1.32}$$

Тогда отображение

$$\mathsf{DiffOp}\overset{K}{\to}\mathsf{SpecData},\quad B\mapsto(C,P,\mathcal{F}) \tag{1.33}$$

сюръективно. Более того, его ограничение $\mathsf{DiffOp}_1\overset{K}{\to}\mathsf{SpecData}_1$ *на множество коммутативных подалгебр $B\subset D$ ранга один, соответственно множество троек $(C,P,\mathcal{F})$ с пучком $\mathcal{F}$ ранга один, является почти биекцией (слово “почти” означает, что спектральные данные алгебр B и B' одинаковы, если и только если $B'=\varphi(B)$ для $\varphi\in\mathrm{Aut}(D)$, задаваемого умножением на скаляр $x\mapsto\alpha x$ с $\alpha\in k^*$).*

Комментарии к доказательству. В случае когда C гладкая (риманова поверхность), этот результат был доказан Кричевером [19, Т. 2.2]. Особые кривые и пучки без кручения были включены Мамфордом [109, Section 2] и Вердье [144, Proposition 4]. Их подход был в дальнейшем усовершенствован Муласе [107, Theorem 5.6], который расширил набор спектральных данных некоторыми формальными данными, чтобы получить биекцию в этой теореме, а также установил биекцию этих данных с точками большой клетки *грассманиана Сато*. Поскольку нам понадобятся многие понятия из этих конструкций, напомним их.

Чтобы соответствие Кричевера было сюръективным, к части спектральных данных необходимо что-то добавить. В аналитической теории к этим данным добавляется функция Бейкера-Ахиезера (см. раздел 1.1), в алгебраической теории — тривиализации структурного и спектрального пучков. Чтобы восстановить кольцо по спектральным данным при таком подходе используются подпространства в пространстве степенных рядов Лорана и теорема Сато. Напомним как возникают эти подпространства.

В 70-х годах была открыта конструкция, как ассоциировать с некоторыми алгебро-геометрическими данными бесконечномерное подпространство в пространстве $k((z))$ степенных рядов Лорана. Эта конструкция была успешно использована в теории интегрируемых систем, в частности, для КП и КдФ уравнений, [19, 136]. Были также найдены некоторые приложения к модулям алгебраических кривых, [28, 34]. Теперь эта конструкция известна как it отображение Кричевера, [28, 35, 107, 126, 143].

Пусть $K=k((z))$ — поле степенных рядов Лорана с фильтрацией $K(n)=z^nk[[z]]$. Если $V\cong k((z))$ — одномерное векторное пространтво над K, то мы можем выбрать фильтрацию $V(n)$ на V, так что $K(n)V(m) \subset V(n+m)$ (в дальнейшем мы не будем различать K и V, и будем по умолчанию использовать обозначение V). Пусть $V_1 := V(0)$.

Обозначим через $\mathrm{Gr}(V)$ множество k-подпространств W пространства V, так что комплекс

$$W \oplus V_1 \to V \tag{1.34}$$

является фредгольмовым. (Такие k-подпространства W также далее будем называть фредгольмовыми.) На этом множестве можно ввести структуру (бесконечномерного) проективного многообразия (грассманиана Сато), связные компоненты которого промаркированы Эйлеровой характеристикой комплекса 1.34, см. [26, 79, 143]. (Далее Эйлерова характеристика комплекса 1.34 будет также называться Эйлеровой характеристикой $\chi(W)$ или индексом пространства W.)

Замечание 5. Отметим, что существуют немного разные определения определения грассманиана Сато. Так, в книге [26] он определяется как бесконечномерное многообразие с гильбертовыми картами, и его точки — подпространства в гильбертовом пространстве. Однако в дальнейшем подробно изучалась и использовалась алгебраическая версия этого грассманиана, которая нас и будет здесь интересовать, см. также обзоры в [142] и в [119].

Рассмотрим кольцо псевдодифференциальных операторов $E = k[[x]]((\partial^{-1}))$. Очевидно, $D \subset E$. Но в E можно вычислять корни дифференциальных операторов: если $Q \in D$ — дифференциальный оператор порядка n с обратимым старшим коэффициентом, то в E определен (с точностью до умножения на корень из 1) корень L: $L^n = Q$.

В E определено естественное разложение:

$$E = E_+ \oplus E_-, \quad E_+ = D, E_- = \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i \partial^{-i}\}$$

Нетрудно проверить, что E_+, E_- — ассоциативные подалгебры.

С кольцом E связана следующая важная теорема Шура:

Теорема 11. *Для любого ОДО Q положительного порядка обозначим через B_Q множество всех ОДО, коммутирующих с Q. Существует обратимый оператор порядка ноль: $S \in k[[x]] + E_-$, такой что*

$$S^{-1} B_Q S \subset k((\partial^{-1})).$$

Следовательно,

$$B_Q \subset S \cdot k((\partial^{-1})) \cdot S^{-1} = k((Q^{-1/n})),$$

и B_Q — коммутативная алгебра.

Отметим, что оператор S определен не однозначно:

Определение 8. Обратимый оператор $S \in k[[x]] + E_-$ называется допустимым, если

$$S \partial S^{-1} \in k((\partial^{-1})).$$

Обозначение: G_a — группа допустимых операторов.

Из соотношений коммутации видно, что $E = k((\partial^{-1})) \oplus xE$, и, таким образом, отображение $E \to E/xE = V$ определяет *линейное действие* кольца E на V и также на $\mathrm{Gr}(V)$. (Мы отождествляем здесь образ ∂^{-1} с z.) Подпространство V_1 переводится действием операторов из E в подпространство V', соизмеримое с V_1. Это означает, что факторпространтво $V' + V_1/V' \cap V_1$ — конечной размерности над k. Таким образом, условие фредгольмовости из определения грассманова многообразия сохраняется.

Будем называть отображение $\rho : E \to V$ *отображением Сато.*

Наконец, обозначим через Gr_+ большую клетку Грассманова многообразия:

$$Gr_+(V) = \{W \in Gr(V) : W \oplus V(1) = V\}.$$

Теорема 12 (теорема Сато)**.** *Группа $G_- = 1 + E_-$ просто транзитивно действует на Gr_+.*

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в [107, Appendix]. Теорема Сато имеет еще одну, динамическую интерпретацию, см. подраздел 1.2.2.

С точками большой клетки тесно связано понятие *пар Шура.*

Определение 9. Пара подпространств $(A, W) \subset V$, где $W \in Gr_+$ — пара Шура, если $A \cdot W \subset W$.

Группа допустимых операторов G_a действует на множестве пар Шура:

$$T(A, W) = (TAT^{-1}, TW), \quad G_a \ni T$$

Будем говорить, что пары (A, W) и (A', W') изоморфны, если существует допустимый оператор $T \in G_a$ такой, что $T(A, W) = (A', W')$.

Ранг пары Шура — это число

$$rk(A, W) = GCD\{\mathrm{ord}\, a | a \in A\}.$$

Теорема 13. *Существует биекция:*

$$[B \quad \text{ранга } r] \Leftrightarrow [(A, W) \quad \text{ранга } r]/ \simeq$$

Доказательство этого утверждения содержится в работе [107].

Биекция из теоремы вполне конструктивна:

$$B \mapsto (A, W), \text{где} \quad A = S^{-1}BS, W = \rho(S^{-1}D) = S^{-1}V_+,$$

где $V_+ = \rho(D) = k[z]$ и S — оператор из теоремы Шура (определенный с точностью до допустимого оператора). Обратно:

$$(A, W) \mapsto B = SAS^{-1}, \text{где} \quad W = S^{-1}V_+,$$

оператор S однозначно определен по теореме Сато.

Пример 8. Вот один из примеров. Если взять рациональную кривую $y^2 = x^3$, то все пучки без кручения (с нулевыми когомологиями) описываются так: это $\mathcal{O}_C(Q - P)$ и один не локально свободный пучок $\nu_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))$. Соответствующие пары Шура:

$$W = \langle z^{-j}, \ldots, z^{-1}, 1 + \alpha z \rangle.$$

Соответствующие кольца дифференциальных операторов порождены операторами:

$$P = \partial^2 - 2\frac{\alpha}{(1 - \alpha x)^2}, \quad Q = \partial^3 - 3\frac{\alpha}{(1 - \alpha x)^2}\partial - 3\frac{\alpha}{(1 - \alpha x)^3}$$

Опишем теперь полный *алгебро-геометрический* набор спектральных данных.

Определение 10. Алгебро-геометрические спектральные данные в размерности один — это набор $\{C, P, z, \mathcal{F}, e_P\}$, где

C	проективная неприводимая кривая $/k$
$P \in C$	гладкая точка
z	формальный локальный параметр в P
$\mathcal{F}$	пучок без кручения ранга r на C
e_P	тривиализация $\mathcal{F}$ в P.

В частности, задан также изоморфизм $\pi : \hat{\mathcal{O}}_{C,P} \simeq k[[z]]$.

Схема восстановления кольца коммутирующих операторов по геометрическим данным такова. По данным $\{C, P, z, \mathcal{F}, e_P\}$ строится пара Шура с $A \simeq H^0(C\backslash P, \mathcal{O})$, $W \simeq H^0(C\backslash P, \mathcal{F})$ (отображение Кричевера), а затем восстанавливается кольцо по теореме 13. Пара Шура $A, W \subset k((u))$ строится так: A — образ группы $H^0(C\backslash P, \mathcal{O}_C)$ в пространстве $k((z))$ (который строится с помощью тривиализации π), и W — образ группы $H^0(C\backslash P, \mathcal{F})$ в пространстве $k((z))^r$ (который строится с помощью тривиализации e_P). Если выбрать другую тривиализацию пучка $\mathcal{F}$, то новое пространство W будет отличаться от старого умножением на элемент $a \in k[[z]]^*$, а пространство A не изменится.

Отметим, что в работе [107] установлено даже немного более широкое соответствие: там определены *категории* пар Шура и геометрических данных, и доказана их эквивалентность. Этот подход обобщается в размерность 2, см. главу 3.

1.2.1 Свойства отображения Кричевера в размерности один

Напомним некоторые свойства классического отображения Кричевера для пучков без кручения ранга один (подробности см. в [107], [108]; мы будем пользоваться слегка другими обозначениями, чем в этих статьях).

Имеются следующие свойства в терминах пространств A, W:

$$\mathcal{F}(nP) \simeq \mathrm{Proj}(\tilde{W}(n)), \tag{1.35}$$

где $\tilde{W} = \oplus_{n=0}^{\infty} W_n s^n$, $W_n = W \cap u^n \cdot k[[u]]$;

$$H^0(C, \mathcal{F}) \simeq W \cap k[[u]], \quad H^1(C, \mathcal{F}) \simeq \frac{k((u))}{W + k[[u]]}. \tag{1.36}$$

Напомним, что все пучки без кручения ранга один с фиксированной эйлеровой характеристикой представляют собой объединение орбит группы $\mathrm{Pic}^0(C)$. А именно (см. [136, Sec.6]), существуют максимальные пучки без кручения, т.е. пучки не изоморфные прямым образам пучков без кручения на (частичной) нормализации кривой C, и не максимальные. Если пучок максимален, то действие группы $\mathrm{Pic}^0(C)$ свободно на нем. Таким образом, любая орбита пучка без кручения ранга один — торсор над группой $\mathrm{Pic}^0(C')$, где C' — частичная нормализация C. У этого торсора определена топология, индуцированная топологией на $\mathrm{Pic}^0(C')$.

В дальнейшем нам понадобится следующий факт: если эйлерова характеристика пучка $\mathcal{F}$ на проективной кривой C равна $k \geq 0$, то существует плотное открытое подмножество V в орбите этого пучка, такое что для всякого $\mathcal{L} \in V$

$$H^1(C, \mathcal{L}) = 0, \quad h^0(C, \mathcal{L}) = k, \quad H^1(C, \mathcal{L}(-kP)) = 0, \quad H^0(C, \mathcal{L}(-kP)) = 0 \tag{1.37}$$

для некоторой точки $P \in C$. Этот факт можно доказать по индукции по k следующим образом. Для любого пучка без кручения $\mathcal{F}$ с эйлеровой характеристикой $k \geq 0$, любой фиксированной гладкой точки Q и $n \gg 0$ имеем $H^1(C, \mathcal{F}(nQ)) = 0$, $h^0(C, \mathcal{F}(nQ)) = k+n > 0$. Для любого фиксированного глобального сечения $a \in H^0(C, \mathcal{F}(nQ))$ существует плотное открытое подмножество $U \subset C$, такое что для любой точки $P \in U$ образ при вложении a в $\mathcal{O}_{C,P}$ (при любом выборе тривиализации) обратим. Тогда из свойств (1.35) и (1.36) следует, что

$$h^0(C, \mathcal{F}(nQ - P)) = n + k - 1, \quad H^1(C, \mathcal{F}(nQ - P)) = 0.$$

Тогда по индукции существует открытое подмножество $U' \subset C$, такое что для любой точки $P \in U'$

$$H^0(C, \mathcal{F}(nQ - (n+k)P)) = 0, \quad H^1(C, \mathcal{F}(nQ - (n+k)P)) = 0,$$

$$H^1(C, \mathcal{F}(n(Q - P))) = 0, \quad h^0(C, \mathcal{F}(n(Q - P))) = k.$$

Окончание доказательства теперь следует из [27, Th.12.8] для морфизма $f : Pic^0(C) \times C \to Pic^0(C)$ и пучка Пуанкаре $\mathcal{P}$.

1.2.2 Связь с теорией КП

В 70-х годах была развита богатая теория КП, которая имеет, помимо всего прочего, глубокую алгебраическую структуру. Под алгебраической структурой мы подразумеваем здесь соответствия между некоторыми решениями классических КП (КдФ и т.п.) уравнений и иерархий, геометрическими данными, кольцами коммутирующих обычных или матричных дифференциальных операторов, точками и пространтвами модулей внутри универсального грассманиана, θ-функциями якобианов алгебраических кривых, а также τ-функциями.

Напомним основные понятия классической теории КП ([108]).

Рассмотрим ассоциативную k-алгебру с единицей R и дифференцированием $\delta : R \to R$

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b), \quad a, b \in R.$$

Для любой такой алгебры стандартным образом определяется кольцо псевдодифференциальных операторов:

$$R((\delta^{-1})) \quad : \quad \sum_{i \ll +\infty} a_i \delta^i, a_i \in R$$

$$[\delta, a] = \delta(a), \quad \delta^{-1} a = a\delta^{-1} + C^1_{-1}\delta(a)\delta^{-2} + C^2_{-1}\delta^2(a)\delta^{-3} + \dots.$$

Введём зависимость операторов от формальных переменных $t = (t_1, t_2, \dots)$. Для этого определим алгебру

$$\mathcal{R} = R[[t_1, t_2, t_3, \dots]]$$

как проективный предел алгебр: $\mathcal{R} = \varprojlim_l R[[t_1, \dots, t_l]]$, или (что в данном случае одно и то же) как пополнение алгебры многочленов $R[t_1, t_2, t_3, \dots]$ относительно топологии, задаваемой псевдонормированием

$$v_t : \mathcal{R} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

определённым следующим образом: $v_t(t_n) = n$, $v_t(r) = 0$ если $0 \neq r \in R$ и ∞ иначе, $v_t(a + b) = \min\{v_t(a), v_t(b)\}$ если $a, b \in \mathcal{R}$, $v_t(r t_{i_1}^{j_1} \cdots t_{i_l}^{j_l}) = i_1 j_1 + \dots + i_l j_l$ если $r \in R$.

Теперь рассмотрим кольцо $\mathcal{R}((\partial^{-1}))$. В кольце $\mathcal{R}((\delta^{-1}))$ определено однозначное разложение:

$$\text{если} \quad A \in \mathcal{R}((\delta^{-1})), \quad \text{то} \quad A = A_+ + A_-,$$

$$\text{где} \quad A_+ \in \mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}[\delta], \quad A_- \in \mathcal{E}_- \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}[[\delta^{-1}]] \cdot \delta^{-1}.$$

В 60-х годах Лакс [87] установил следующий факт. Семейство обыкновенных дифференциальных операторов $\{P(t)\}$, зависящих от параметра, является изоспектральным если и только если $P(t)$ удовлетворяет *уравнению Лакса*

$$\frac{dP(t)}{dt} = [Q(t), P(t)], \tag{1.38}$$

где $Q(t)$ — некоторый зависящий от параметра дифференциальный оператор, и $[,]$ — обычный коммутатор операторов. Причина, по которой здесь появляется дифференциальный оператор $Q(t)$, состоит в том, что мы хотим получить изоспектральное семейство *дифференциальных* операторов. Если бы мы использовали, например, псевдодифференциальный оператор $Q(t)$, то $\{P(t)\}$ не было бы семейством дифференциальных операторов (а было бы семейством псевдодифференциальных операторов), хотя и с той же спектральной структурой.

Мы будем говорить, что оператор $P = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} p_\nu \partial^\nu$ имеет *порядок* N, если $p_N \neq 0$ и $p_\nu = 0$ для всех $\nu > N$. Мы будем говорить, что оператор P порядка N нормализован, если $p_{N-1} = 0$, и если $p_N = 1$. Нормализованный оператор P порядка $n > 0$ имеет единственный нормализованный корень n-й степени.

Предположим, что $P(t) \in \mathcal{D}$ нормализован порядка N и

$$L(t) = P(t)^{1/N} = \partial + u_2\partial^{-1} + u_3\partial^{-2} + \ldots$$

его корень. Легко показать, что уравнение Лакса (1.38) в этом случае эквивалентно уравнению

$$\frac{dL(t)}{dt} = [Q(t), L(t)]. \tag{1.39}$$

М.Муласе в работе [106, lemma 1.1] доказал следующую лемму

Лемма 6. *Пусть L — нормализованный оператор первого порядка. Если* $\ker(R \xrightarrow{\partial} R)$ *содержится в центре R, то следующие условия для $Q \in \mathcal{D}$ эквивалентны:*

(a) $[Q, L] \in \mathcal{E}_-$.

(b) Q является линейной комбинацией операторов $(L^n)_+$ над $\ker\partial$.

По существу, лемма говорит о том, что операторы $(L^n)_+$ дают все возможные изоспектральные деформации $P = L^N$. Для разных деформаций естественно ввести разные деформационные параметры. Так мы получаем *иерархию КП*

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [(L^n)_+, L]. \tag{1.40}$$

Если $k = \ker(R \xrightarrow{\partial} R)$, то (1.40) описывает универсальное семейство всех изоспектральных деформаций оператора $P = L^N$. Преимущество использования оператора $L = P^{1/N}$ вместо P заключается в том, что (1.40) не имеет отношения к порядку P. Следовательно, (1.40) — универсальное уравнение для описания семейств деформаций любого нормализованного дифференциального оператора. Если мы хотим найти универсальное семейство дифференциального оператора P порядка m, мы должны решить уравнение (1.40) для $L = \partial + u_2\partial^{-1} + u_3\partial^{-2} + \ldots$ с дополнительным условием $L^m = P \in \mathcal{D}$. Дальнейшие детали см. в работах [105, 106].

Если выводить частные уравнения из системы (1.40), т.е. уравнения на функции $u_2, u_3, \ldots$, то мы получим хорошо известное уравнение КП

$$(4u_t - u''' - 12uu')' = 3u_{yy} \qquad \text{для} \quad u(t, x, y).$$

(здесь $'$ означает производную по x). Одна из редукций этой системы, которая получается, если выполняется условие $L^2 \in \mathcal{D}$ — это уравнение КдФ

$$4u_t - 7u''' - 12uu' = 0.$$

Более подробно о выводе этих уравнений и дальнейшие детали см. в работах [118] и [108].

Замечание 6. Скажем несколько слов о решениях иерархии КП и их отношении к решениям уравнения КП. М.Муласе в работе [106] доказал однозначную разрешимость задачи Коши для классической и супер иерархий КП. Если начальное условие $L(0)$ удовлетворяет свойству $L(0)^N \in \mathcal{D}$, то решение $L(t)$ имеет геометрическое происхождение, т.е. присходит из некоторых геометрических данных, состоящих из полной алгебраической кривой, точки на ней, пучка без кручения и его тривиализации. А именно, в случае гладкой кривой определим для каждого $i \geq 1$

$$w_{-i}(t) = \frac{p_i(-\partial_t)\theta(t)}{\theta(t)}|_{t_1 \mapsto t_1 + x}, \tag{1.41}$$

где $\theta(t)$ — тета функция якобиана кривой, $\partial_t = (\partial/\partial t_1, \partial/2\partial t_2, \partial/2\partial t_2, \ldots)$ и p_i — полиномы Шура:

$$\exp(\sum t_i D^i) = \sum p_i D^i.$$

(здесь D — формальная переменная). Тогда $L(t) = S(t)\partial S(t)^{-1}$, где $S(t) = 1 + w_{-1}\partial^{-1} + w_{-2}\partial^{-2} + \ldots$.

В общем случае нужно заменить тета функцию на тау-функцию грассманиана Сато, см. [108] или [136] или [6].

Т.Шиота в работе [139] показал, что решение уравнения КП, построенное по тета функции якобиана кривой продолжается до решения всей иерархии КП. Этот факт позволил в своё время найти решение проблемы Шоттки, см., например, обзор [6].

Тау-функция сыграла впоследствии важную роль как производящая функция разнообразных топологических характеристик пространств модулей кривых, начиная с работ [148], [83]. Она была открыта Хиротой [74] для нахождения точных решений солитонных уравнений, затем формула для нее была усовершенствована Сато [132] с использованием точек грассманиана, а в цикле работ японских математиков [51] формулы для тау-функции выводились с помощью теории представлений группы петель $LGL_n(\mathbb{C})$ (ср. [136, §10]).

Отметим здесь простую связь между функцией Бейкера-Ахиезера (ранга 1) и оператором $S(t)$:

$$\psi(t, x, z) = S(t)e^{xz^{-1}}.$$

В свою очередь, оператор $S(t)$ — это оператор Сато точек грассманиана из потока КП на нем. Поясним что здесь имеется в виду.

Если $W \in \mathrm{Gr}(V)$, то мы имеем, что $T_W = \mathrm{Hom}(W, V/W)$ — касательное пространство в точке W к $Gr(V)$, и имеется естественное отображение $\mathrm{Hom}(V, V) \to T_W$. Для $n \in \mathbb{Z}$ можно определить векторное поле T_n на $\mathrm{Gr}(V)$. Оно есть образ оператора умножения на z^{-n} в пространстве V.

Классическая иерархия КП — это динамическая система, определенная на аффинном пространстве $E' := \partial + E_-$. Касательное пространство к любой точке $L \in E'$ канонически отождествляется с E_-.

Определение 11. n-ое векторное поле иерархии КП на E' определяется как $KP_n = [(L^n)_+, L]$.

Так как $(L^n)_+ = L^n - (L^n)_-$, то поле KP_n принадлежит E_-.

Множество $G = 1 + E_-$ — это группа, сохраняющая векторные поля $-(S\partial^n S^{-1})_- S$, $S \in G$. Касательное пространство к любой точке из G — это снова E_-.

Все эти многообразия, E', G, Gr_+, имеют отмеченные точки: ∂, 1, $W_0 = k[z^{-1}]$ (если $V = k((z))$).

Теорема 14 ([118], теорема 1). *(Соответствие Сато). Отображения*

$$E' \overset{\varphi}{\leftarrow} G \overset{\psi}{\to} Gr_+(V),$$

где $\varphi(S) = S\partial S^{-1}, \psi(S) = S^{-1}(W_0)$, *имеют следующие свойства*

i) для любых $S \in G$, $L = \varphi(S) \in E'$ *и* $W = \psi(S) \in Gr_+$ *диаграмма*

$$\begin{array}{ccccc}
`T_L & \overset{d\varphi_S}{\leftarrow} & T_S & \overset{d\psi_S}{\to} & T_W \\
 & & & & \| \\
\| & & \| & & Hom(W, V/W) \\
 & & & & \uparrow \\
E_- & \overset{\varphi'}{\leftarrow} & E_- & \overset{\psi'}{\to} & Hom(V,V)
\end{array}$$

коммутативна. Здесь $d\varphi_S$ *и* $d\psi_S$ — *якобианы отображений* φ, ψ *на касательном пространстве* T_S, *и отображение*

$$\varphi'(A) = [AS^{-1}, L],$$

отображение

$$\psi'(A) = -S^{-1}A \text{ , действующее на } V \text{ через отображение Сато,}$$

с $A \in E_-$.

ii) для любых $S \in G$, $L = \varphi(S) \in E'$ *и* $W = \psi(S) \in Gr_+$, *и любого* $n \geq 1$

$$d\varphi_S(-(S\partial^n S^{-1})_- S) = KP_n,$$

$$d\psi_S(-(S\partial^n S^{-1})_- S) = T_n$$

Замечание 7. Отображения φ и ψ могут быть получены из соотвествующих действий группы G на многообразия E' и $Gr(V)$. Нужно рассмотреть действия на орбитах, проходящих через ∂ и W_0 соответственно. Первая орбита — это одна из коприсоединенных орбит для (бесконечномерной) группы Ли G.

Следствие 5. . *Соответствие Сато индуцирует диаграмму биекций:*

$$E' \overset{\varphi}{\leftarrow} G/G_0 \overset{\psi}{\to} Gr_+(V)/k[[z]]^*,$$

где $G_0 = G \cap k((\partial^{-1}))$, *и действие* $k[[z]]^*$ *на* $Gr(V)$ *определяется из структуры модуля* V *над* K.

Замечание 8. Есть и другие точки зрения на иерархию КП. Работы И. М. Гельфанда, Л. А. Дикого [4] и других авторов (см. например [90]) интерпретируют их как бесконечномерные гамильтоновы системы. М. Ротштейн в [128] дает интерпретцию ограничения динамической системы КП на якобиан кривой через преобразование Фурье-Мукаи. В работах В. Г. Дринфельда и В. В. Соколова [8] определен целый ряд иерархий (обобщений иерархии КдФ — редукции иерархии КП), ассоциированных с алгебрами Каца-Муди.

Этот подход был впоследствии развит в рамках программы геометрического соответствия Ленглендса [33], [35]. Ометим, что получающиеся в рамках этой программы алгебраические интегрируемые системы связаны с проблемой классификации коммутирующих дифференциальных операторов *с матричными коэффициентами* [108, §6]. Представляется крайне интересным развить соответствие между теорией коммутирующих операторов с матричными коэффициентами и теорией коммутирующих операторов со скалярными коэффициентами. В частности, интересно понять существует ли разумный способ строить коммутирующие операторы со скалярными коэффициентами по данным коммутирующим операторам с матричными коэффициентами.

Глава 2

Алгебро-геометрические спектральные данные колец коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных

В этой главе напоминаются необходимые сведения и известные результаты о свойствах колец дифференциальных операторов в частных производных, а также доказывается теорема об общих свойствах спектральных данных из работы [86].

2.1 Вводные замечания и обзор известных свойств

В случае дифференциальных операторов в частных производных, т.е. в случае $n > 1$ переменных, вопросы, сформулированные в начале введения, являются нетривиальными даже в простейшей формулировке: как найти кольцо коммутирующих дифференциальных операторов, содержащих $n+1$ оператор $L_0, \dots, L_n$ с алгебраически независимыми постоянными старшими символами $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, такими что кольцо $\mathbb{C}[\mathbb{A}^n]$ конечно порождено как модуль над кольцом, порожденным $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, и L_0 не является полиномом от $L_1, \dots, L_n$?

Для колец дифференциальных операторов в частных производных И.М. Кричевером в работе [19] в этой ситуации были получены следующие результаты. Пусть

$$L_i = \sum_{|\alpha| \le m_i} f_{i\alpha}(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}, \ x = (x_1, \dots, x_n), \ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \ i = 0, \dots, n,$$

— дифференциальные операторы по переменным $x_1, \dots, x_n$ со скалярными коэффициентами, где

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \ \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Предположим, что старшие символы операторов $L_1, \dots, L_n$ алгебраически независимы и что множество их нулей в $\mathbb{P}^{n-1}$ пусто (см. обозначения и обзор известных свойств дифференциальных операторов ниже). Если отказаться от этих ограничений, то существуют не конечнопорожденные коммутативные кольца операторов (см. например, [80]).

Теорема 15. *([19]) Существует ненулевой полином $Q(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ такой, что*

$$Q(L_0, \dots, L_n) = 0.$$

Многообразие $X \subset \mathbb{C}^{n+1}$, заданное уравнением

$$Q(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = 0,$$

— *аффинное спектральное многообразие* операторов $L_0, \dots, L_n$. Спектральное многообразие параметризует совместные собственные значения операторов L_i:

$$L_i(x,\lambda)\psi(x,\lambda) = \lambda_i\psi(x,\lambda), \;\; \lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in X.$$

Теорема 16. *([19]) Предположим, что для точки $\lambda \in X$ общего положения существует единственная с точностью до пропорциональности совместная собственная функция ψ операторов L_i.*

Обозначим через $P_i(k)$, $k = (k_1, \dots, k_n)$ старшие символы операторов L_i, $i = 1, \dots, n$.

Существует единственное решение системы уравнений

$$L_i\psi(x,k) = P_i(k)\psi(x,k), (i = 1, \dots, n),$$

имеющее вид

$$\psi(x,k) = e^{k_1x_1+\dots+k_nx_n}(\sum_{s=0}^{\infty}\xi_s(x,k)),$$

где $\xi_s(x,k)$ — однородные по k рациональные функции степени $-s$. Кольцо операторов, коммутирующих с $L_i, 1 \le i \le n$, коммутативно. Функция $\psi(x,k)$ является собственной для всего кольца.

В [19] построено вложение многообразия X во взвешенное проективное пространство, что дает его компактификацию $\hat{X}$. Отметим, что дивизор $C = \hat{\Gamma}\backslash\Gamma$ при такой компактификации рационален (см. теорему 18 ниже). Функция Бейкера-Ахиезера $\psi(x,k)$ из теоремы имеет также имеет интерпретацию через сечение семейства спектральных пучков и через аналог оператора Сато как в разделе 1.2, см. раздел 3.5.6 ниже.

Существуют интересные примеры n-мерных коммутативных колец дифференциальных операторов со скалярными коэффициентами (см. ссылки, указанные во введении), но эффективной классификации таких колец пока не получено. Более того, не ясно, какие алгебраические многообразия могут отвечать коммутативным кольцам дифференциальных операторов. Хотя мы и выводим в этой диссертации ряд необходимых условий (см. теорему 18, следствие 23 и также пример 25), полный список их пока неизвестен.

Отметим, что наши вопросы можно переформулировать еще на языке *алгебраически интегрируемых систем* следующим образом. В работе [39] был определен квантовый аналог классического определения интегрируемой гамильтоновой системы. Квантовой вполне интегрируемой системой (КВИС) на алгебраическом многообразии X авторы называли пару (Λ, θ), где Λ — неприводимое n-мерное аффинное алгебраическое многообразие, а $\theta : \mathcal{O}_\Lambda \to D(X)$ — вложение алгебр (алгебра $D(X)$ дифференциальных операторов на X здесь выступает в качестве квантового аналога пуассоновой алгебры $\mathcal{O}(T^*X)$).

По определению, КВИС $S = (\Lambda, \theta)$ называется алгебраически интегрируемой, если она доминируется другой КВИС S' ранга один (подробности определений см. в той же статье), где ранг КВИС — размерность пространства формальных решений системы

$$\theta(g)\psi = g(\lambda)\psi, \quad g \in \mathcal{O}_\Lambda$$

в общей точке X. Эти определения в работе [39] были также обобщены на случай интегрируемых систем на формальном полидиске, который нас в основном в этой диссертации и интересует. В этом случае $X = \mathrm{Spec}(k[[x_1, x_2, \dots, x_n]])$, а символы $\mathcal{O}_X, k(X), D(X)$ обозначают соответственно $k[[x_1, \dots, x_n]]$, $k((x_1, \dots, x_n))$, $\mathcal{O}_X[\partial_1, \dots, \partial_n]$, где $\partial_i = \partial/\partial x_i$. В статье [39] был установлен критерий алгебраической интегрируемости КВИС в терминах соответствующей дифференциальной группы Галуа.

2.1.1 Обзор известных свойств

Общие замечания и обозначения

Пусть R — коммутативная k-алгебра, где k — поле характеристики нуль.

В этих обозначениях обычным образом определяется фильтрованное кольцо $D(R)$ k-линейных дифференциальных операторов и R-модуль $\mathrm{Der}(R)$ дифференцирований (см. например [18, Гл. 11] или [38]):

$$D_0(R) \subset D_1(R) \subset D_2(R) \subset \dots, \quad D_i(R)D_j(R) \subset D_{i+j}(R), \quad \mathrm{Der}(R) \subset D_1(R)$$

$D_i(R)$ определяются по индукции как под-R-бимодули кольца $\mathrm{End}_k(R)$; по определению, $D_0(R) = \mathrm{End}_R(R) = R$,

$$D_{i+1}(R) = \{P \in \mathrm{End}_k(R)| \quad \text{т. что для всех } f \in R\ [P, f] \in \mathrm{Der}(R)\}.$$

Также обычным образом определяется градуированное кольцо

$$gr(D(R)) = \oplus_{i=0}^{\infty} D_i(R)/D_{i-1}(R) \quad (D_{-1}(R) = 0)$$

и для $P \in D_i(R)$ определен *главный символ* $\sigma_i(P) = P \mod D_{i-1}(R)$. Для $P \in D_i$, $Q \in D_j$ имеем: $\sigma_i(P)\sigma_j(Q) = \sigma_{i+j}(PQ)$, $[P, Q] \in D_{i+j-1}$; поэтому $gr(D(R))$ — коммутативная градуированная R-алгебра со скобкой Пуассона

$$\{\sigma_i(P), \sigma_j(Q)\} = \sigma_{i+j-1}([P, Q])$$

с обычными свойствами.

Координаты

Определение 12. Будем говорить, что в R определена система координат $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$ если

1. отображение
$$\mathrm{Der}_k(R) \to R^n, \quad D \mapsto (D(x_1), \dots, D(x_n))$$
биективно.

2. $\cap_{D \in \mathrm{Der}_k(R)} \mathrm{Ker}\,(D) = k$.

В этом случае существуют $\partial_1, \dots, \partial_n \in \mathrm{Der}_k(R)$ такие что

$$\partial_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \mathrm{Ker}\,(\partial_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}\,(\partial_n) = k.$$

Тогда $\mathrm{Der}(R)$ — свободный R-модуль с порождающими $\partial_1, \dots, \partial_n$, и $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Легко проверить (по индукции по степени), что

$$gr(D(R)) \simeq R[\xi_1, \dots, \xi_n] \quad \text{где } \xi_i \mapsto \partial_i \mod D_0(R) \in gr_1(D(R))$$

и что для $P \in D_i(R)$, $Q \in D_j(R)$ выполняется равенство

$$\{\sigma_i(P), \sigma_j(Q)\} = \sum_{v=1}^{n} \frac{\partial \sigma_i(P)}{\partial \xi_v} \partial_v(\sigma_j(Q)) - \sum_{v=1}^{n} \frac{\partial \sigma_j(Q)}{\partial \xi_v} \partial_v(\sigma_i(P)) \tag{2.1}$$

(где ∂_v продолжается на кольцо $R[\xi_1, \dots, \xi_n]$ по правилу $\partial_v(\xi_l) = 0$).

Система $(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ называется *канонической системой координат.* Типичный пример кольца с системой координат — кольцо $k[x_1, \dots, x_n]$ или $k[[x_1, \dots, x_n]]$, где в последнем случае мы рассматриваем кольцо *непрерывных* дифференциальных операторов и пространство *непрерывных* дифференцирований относительно обычной топологии на $k[[x_1, \dots, x_n]]$ заданной максимальным идеалом. Кольцо $k[[x_1, \dots, x_n]]$ будет основным примером для большей части этой диссертации.

Замена координат

Если $(y_1, \ldots, y_n)$ — другая система координат, то определен новый базис $(\partial_1', \ldots, \partial_n')$ алгебры $\mathrm{Der}_k(R)$, и замена координат задается матрицей

$$\begin{pmatrix} \partial_1(y_1) & \ldots & \partial_n(y_1) \\ \partial_1(y_2) & \ldots & \partial_n(y_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1(y_n) & \ldots & \partial_n(y_n) \end{pmatrix} = M$$

где $(\partial_1', \ldots, \partial_n')M = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$, $(\xi_1', \ldots, \xi_n')M = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Определение 13. Если фиксирована система координат $(x_1, \ldots x_n)$, то, помимо обычной функции порядка

$$\mathbf{ord}(P) = \inf\{n | P \in D_n(R)\}$$

и обычной фильтрации, определена более тонкая Γ-фильтрация, где $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ — упорядоченная группа, снабженная анти-лексикографическим порядком.

Каждый элемент $P \in D(R)$ может быть записан как конечная сумма

$$P = \sum_{finite} p_{i_1 \ldots i_n} \partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n},$$

и мономы $p_{i_1 \ldots i_n} \partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n}$ с $p_{i_1 \ldots i_n} \neq 0$ называются *членами* P.

Старший член — это член $p_{m_1 \ldots m_n} \partial_1^{m_1} \ldots \partial_n^{m_n} \neq 0$ где $(m_1, \ldots, m_n) > (i_1, \ldots, i_n)$ для всякого другого члена.

Определение 14. Элемент $(m_1, \ldots, m_n) \in \Gamma$ называется Γ-порядком $\mathrm{ord}_\Gamma(P)$ и член $p_{m_1 \ldots m_n} \partial_1^{m_1} \ldots \partial_n^{m_n}$ называется *старшим членом* $\mathrm{HT}(P)$.

Очевидно, что $\mathrm{ord}_\Gamma(PQ) = \mathrm{ord}_\Gamma(P) + \mathrm{ord}_\Gamma(Q)$ и $\mathrm{ord}_\Gamma(P+Q) \leq \max\{\mathrm{ord}_\Gamma(P), \mathrm{ord}_\Gamma(Q)\}$, причем равенство выполнено если $\mathrm{ord}_\Gamma(P) \neq \mathrm{ord}_\Gamma(Q)$. Также $\mathrm{HT}(PQ) = \mathrm{HT}(P)\,\mathrm{HT}(Q)$ и $\mathrm{HT}(P+Q) = \mathrm{HT}(P)$ если $\mathrm{ord}_\Gamma(P) > \mathrm{ord}_\Gamma(Q)$.

Характеристическая схема

Пусть $J \subset D$ — левый идеал. Тогда определен однородный идеал $\langle \sigma_i(P), P \in J \rangle$ в кольце $gr(D)$, и подсхема, определенная этим идеалом, либо в $\mathrm{Spec}(gr(D))$, либо в $\mathrm{Proj}(gr(D))$. Обе подсхемы называются характеристическими подсхемами $\mathrm{Ch}(J)$. Мы будем рассматривать характеристическую подсхему в $\mathrm{Proj}(gr(D))$.

Если определена система координат, мы получаем $\mathrm{Proj}(gr(D)) = \mathrm{Proj}(R[\xi_1, \ldots, \xi_n]) = \mathrm{Spec}(R) \times_k \mathbb{P}_k^{n-1}$. Рассмотрим идеал $J = PD$, где P — оператор с условием $\mathbf{ord}(P) = m$. Если $\sigma_m(P) \in k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$, то мы будем говорить, что *главный символ постоянен.* В этом случае характеристическая схема является дивизором нулей многочлена $\sigma_m(P)$ в $\mathbb{P}^{n-1}$, назовем ее $\mathrm{Ch}_0(P)$. Она не меняется при k-линейных заменах координат.

Лемма 7. *Если $P_1, \ldots P_n$ — операторы с постоянными главными символами (относительно системы координат $(x_1, \ldots, x_n)$) и если $\det(\partial\sigma(P_i)/\partial\xi_j) \neq 0$, то любой оператор Q, такой что $[P_i, Q] = 0$, $i = 1, \ldots, n$, также имеет постоянный главный символ.*

Доказательство Имеется равенство

$$0 = \{\sigma(P_i), \sigma(Q)\} = \sum_j \frac{\partial(\sigma(P_i))}{\partial\xi_j} \partial_j(\sigma(Q))$$

для $i = 1, \ldots, n$. Поскольку $\det(\partial\sigma(P_i)/\partial\xi_j) \in k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ не равен нулю, получаем, что $\partial_j(\sigma(Q)) = 0$ при $j = 1, \ldots n$. Следовательно, Q имеет постоянный главный символ относительно $(x_1, \ldots, x_n)$.

2.1.2 Отображение циклов и индекс пересечения

Для удобства читателя, напомним здесь некоторые факты об отображении циклов на особых проективных многообразиях (ср. [72, §2.1]).

Пусть X — проективное неприводимое n-мерное многообразие над полем k. Пусть $\mathrm{Div}(X)$ — группа дивизоров Картье (равная $H^0(X,\ k(X)^*/\mathcal{O}_X^*)$). Дивизор D из этой группы задается данными (U_α, f_α), где $f_\alpha \in k(X)^*$, $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие X, и $f_\alpha/f_\beta \in \mathcal{O}_X^*(U_{\alpha\beta})$. Пусть $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_r \in \mathrm{Pic}(X)$.

Обозначим через $Coh_r(X)$ категорию когерентных пучков на X размерности не больше r (напомним, что размерность пучка — это размерность его носителя). Тогда определены аддитивные функции

$$Coh_{n-1}(X) \xrightarrow{Z} \mathrm{WDiv}(X)$$

по правилу $Z(\mathcal{F}) = \sum_{V\subset X} l_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x)V$, где V — простой дивизор, x — общая точка V, и

$$(\mathcal{L}_1 \cdot \ldots \mathcal{L}_r \cdot -) : Coh_r(X) \to \mathbb{Z}$$

по правилу

$$(\mathcal{L}_1 \cdot \ldots \mathcal{L}_r \cdot \mathcal{F}) = \sum_{I\subset\{1,\ldots r\}} (-1)^{r-|I|}\chi(\mathcal{L}_I \otimes \mathcal{F}),$$

где $\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{L}_{i_l}$ для $I = \{i_1, \ldots, i_l\}$, $|I| = l$ (см. [81]).

Заметим, что Z обнуляется на $Coh_{n-2}(X)$, и индекс пересечения кратности r равен нулю на $Coh_{r-1}(X)$. Заметим также, что $Z(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}) = Z(\mathcal{F})$ для $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$. Для $D \in \mathrm{Div}(X)$ определим

$$\mathcal{F}_+(D) = (\mathcal{O}(D) + \mathcal{O})/\mathcal{O} \quad \text{в } Coh_{n-1}(X)$$
$$\mathcal{F}_-(D) = (\mathcal{O}(D) + \mathcal{O})/\mathcal{O}(D).$$

Имеется равенство на носители: $\sup(D) = \sup(\mathcal{F}_+(D)) \cup \sup(\mathcal{F}_-(D))$. Определим отображение циклов $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{WDiv}(X)$

$$Z(D) = Z(\mathcal{F}_+(D)) - Z(\mathcal{F}_-(D))$$

$Z(D)$ имеет вид $\sum_V \mathrm{ord}_V(D)V$, где

$$\mathrm{ord}_V(D) = l_{\mathcal{O}_{X,x}}(\frac{1}{f}\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{X,x} \cap \frac{1}{f}\mathcal{O}_{X,x}) - l_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{X,x} \cap \frac{1}{f}\mathcal{O}_{X,x}),$$

если f — локальное уравнение $\mathcal{O}_X(D)$ в x. Отметим, что если X нормально в коразмерности один, то отображение циклов инъективно.

Пусть $S \subset X$ — ненормальный локус X; обозначим

$$\mathrm{Div}(X, S) = \{D \in \mathrm{Div}(X)| \quad \text{никакие компоненты из } \sup(D) \text{ не содержатся в } S\}.$$

Тогда $\mathrm{Div}(X, S)$ — подгруппа в $\mathrm{Div}(X)$, и Z индуцирует инъективное отображение

$$\mathrm{Div}(X, S) \to \mathrm{WDiv}(X\backslash S) \subset \mathrm{WDiv}(X)$$

(заметим, что $\mathrm{Div}(X, S) = \mathrm{Div}(X)$, если $codim(S) \geq 2$).

Если $D_1, \ldots, D_r \in \mathrm{Div}(X)$ и $\mathcal{F} \in Coh_r(X)$, будем писать $(D_1 \cdot \ldots \cdot D_r \cdot \mathcal{F})$ для обозначения индекса $(\mathcal{O}_X(D_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{O}_X(D_r) \cdot \mathcal{F})$.

Теорема 17. *Для $D_1, \ldots, D_n \in \mathrm{Div}(X)$ число $(D_1 \cdot \ldots \cdot D_n)$ зависит лишь от $Z(D_1), \ldots, Z(D_n)$.*

Доказательство В силу симметрии достаточно показать, что число $(D_1 \cdot \ldots \cdot D_n)$ зависит лишь от $Z(D_n)$. Последнее следует из точных последовательностей

$$0 \to \mathcal{O} \to (\mathcal{O} + \mathcal{O}(D_n)) \to \mathcal{F}_+(D_n) \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{O}(D_n) \to (\mathcal{O} + \mathcal{O}(D_n)) \to \mathcal{F}_-(D_n) \to 0$$

и аддитивности χ:

$$(\mathcal{O}_X(D_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{O}_X(D_{n-1}) \cdot \mathcal{F}_+(D_n)) - (\mathcal{O}_X(D_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{O}_X(D_{n-1}) \cdot \mathcal{F}_-(D_n)) =$$

$$\sum_{I \subset \{1,\ldots,n-1\}} (-1)^{n-1-|I|}(\chi(\mathcal{L}_I \otimes \mathcal{F}_+(D_n)) - \chi(\mathcal{L}_I \otimes \mathcal{F}_-(D_n))) =$$

$$\sum_{I \subset \{1,\ldots,n-1\}} (-1)^{n-1-|I|}(\chi(\mathcal{L}_I \otimes \mathcal{O}(D_n)) - \chi(\mathcal{L}_I)) = (\mathcal{O}_X(D_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{O}_X(D_n))$$

Для $\mathcal{F} \in Coh_{n-1}(X)$ число $(\mathcal{O}_X(D_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{O}_X(D_{n-1}) \cdot \mathcal{F})$ зависит лишь от $Z(\mathcal{F})$.

2.2 Геометрические свойства коммутативных колец ДО

Чтобы сформулировать главную теорему этой главы, напомним еще некоторые факты из алгебраической геометрии.

Пусть $(E^n) = (E \cdot \ldots \cdot E)$ обозначает индекс самопересечения дивизора Картье $E \in \mathrm{Div}(X)$ на X, и пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X. Согласно асимптотической теореме Римана-Роха (см. обзор в [88, ch. 1.1.D]), эйлерова характеристика $\chi(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(mE))$ является полиномом степени $\leq n$ от m,

$$\chi(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(mE)) = \mathrm{rk}(\mathcal{F}) \cdot \frac{(E^n)}{n!} \cdot m^n + O(m^{n-1}), \tag{2.2}$$

где rk означает ранг пучка.

Из результатов, приведенных в разделе 2.1.2 (см. также [72, Ch. 2]) следует, что если $E_1, E_2 \in \mathrm{Div}(X)$ таковы, что $\mathrm{Z}(E_1) = \mathrm{Z}(E_2)$, то $(E_1^n) = (E_2^n)$.

Отображение циклов Z, ограниченное на полугруппу эффективных дивизоров Картье $\mathrm{Div}^+(X)$, является инъективным отображением в полугруппу эффективных дивизоров Вейля $\mathrm{WDiv}^+(X)$, не содержащихся в сингулярном локусе. *Будем говорить*, что эффективный дивизор Вейля C на X, не содержащийся в сингулярном локусе, — "*-Картье* дивизор на X, если $lC \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{Z}\,|_{\mathrm{Div}^+(X)})$ для некоторого целого $l > 0$.

Определение 15. Пусть C — "-Картье дивизор на X. Определим индекс самопересечения (C^n) на X как

$$(C^n) = (G^n)/l^n, \tag{2.3}$$

где $G = lC$ — дивизор Картье для некоторого целого $l > 0$.

Заметим, что если $l > 0$ — минимальное число, такое что lC — дивизор Картье, то для любого другого $l' > 0$ со свойством $l'C$ быть дивизором Картье выполнено $l \mid l'$. Следовательно, используя аргументы как выше и свойство $(E_1^n) = m^n(E_2^n)$ для любых $E_1 = mE_2$, $E_2 \in \mathrm{Div}(X)$, $m \in \mathbb{Z}$, получаем, что формула (2.3) не зависит от выбора соответствующего l.

Теорема 18. *Пусть $P_1, \ldots, P_n \in D$ — некоторые коммутирующие операторы положительного порядка. Пусть B — коммутативная k-подалгебра в D, содержащая операторы $P_1, \ldots, P_n$. Предположим, что пересечение характеристических дивизоров операторов $P_1, \ldots, P_n$ пусто.*

Тогда отображение из $gr(D)$ в $gr(D)/x_1 gr(D) + ... + x_n gr(D) = k[\xi_1, ..., \xi_n]$ индуцирует вложение на $gr(B)$, и имеют место следующие свойства.

1. *$k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ конечно порожден как $\mathrm{gr}(B)$-модуль.*

2. *Кольца B и $\mathrm{gr}\, B$ — конечно порожденные целые k-алгебры размерности Крулля n.*

3. *Аффинное многообразие $U = \mathrm{Spec}\, B$ над k может быть естественным образом пополнено до n-мерного неприводимого проективного многообразия X с границей C — целым дивизором Вейля, не содержащимся в особом локусе X. Более того, C — унирациональный и обильный $\mathbb{Q}$-Картье дивизор.*

4. *B-модуль $L = D/x_1 D + \ldots + x_n D$ определяет когерентный пучок на U, который может быть естественным образом продолжен до когерентного пучка без кручения $\mathcal{L}$ на X. Более того, индекс самопересечения (C^n) на X равен $\delta^n/\mathrm{rk}(\mathcal{L})$, где*

$$\delta = \min \{\mathbf{ord}(f) - \mathbf{ord}(g) \mid f, g \in B,\ \mathbf{ord}(f) > \mathbf{ord}(g)\}.$$

Доказательство Докажем пункты 1 и 2. Пусть $m_i = \mathbf{ord}(P_i)$. Обозначим через $\sigma'_{m_i}(P_i)$ образы символов $\sigma_{m_i}(P_i)$ в $k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$. Тогда $(\sigma'_{m_1}(P_1), \ldots, \sigma'_{m_n}(P_n)) : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ — конечный морфизм в силу теоремы гильберта о нулях, поскольку система уравнений $\sigma'_{m_1}(P_1) = 0, \ldots, \sigma'_{m_n}(P_n) = 0$ задает лишь одну точку (с нулевыми координатами) в $\mathbb{A}^n$ в силу наших предположений. В частности, $\det(\partial\sigma'_{m_i}(P_i)/\partial\xi_j) \neq 0$ (как матрицы Якоби накрытия), и, следовательно, матрица $(\partial\sigma_{m_i}(P_i)/\partial\xi_j)$ обратима над кольцом $k[[x_1, \ldots, x_n]]((\xi_1^{-1}))\ldots((\xi_n^{-1}))$.

Покажем, что для произвольного элемента $Q \in B$ образ $\sigma'_{\mathbf{ord}(Q)}(Q)$ символа $\sigma_{\mathbf{ord}(Q)}(Q)$ в $k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ не равен нулю, т.е. $gr(B)$ вкладывается в $k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$, и L — это B-модуль без кручения. Предположим обратное, и пусть $N > 0$ — минимальное значение дискретного нормирования относительно максимального идеала в кольце $k[[x_1, \ldots, x_n]]$ на коэффициентах символов $\sigma_{\mathbf{ord}(Q)}(Q) \in k[[x_1, \ldots, x_n]][\xi_1, \ldots, \xi_n]$. Так как $[P_i, Q] = 0$ для $i = 1, \ldots, n$, выполняется равенство $\{\sigma_{m_i}(P_i), \sigma_{\mathbf{ord}(Q)}(Q)\} = 0$. С другой стороны, из равенства (2.1) имеем

$$\{\sigma_{m_i}(P_i), \sigma_{\mathbf{ord}(Q)}(Q)\} = \sum_{v=1}^{n} \frac{\partial\sigma_{m_i}(P_i)}{\partial\xi_v} \partial_v(\sigma_{\mathbf{ord}(Q)}(Q)) \mod (x_1, \ldots, x_n)^N$$

Таким образом, должно выполняться $\partial_v(\sigma_{\mathbf{ord}(Q)}(Q)) = 0 \mod (x_1, \ldots, x_n)^N$ для всех v, поскольку матрица $(\partial\sigma_{m_i}(P_i)/\partial\xi_j)$ обратима также над кольцом $T((\xi_1^{-1}))\ldots((\xi_n^{-1}))$, где $T = k[[x_1, \ldots, x_n]]/(x_1, \ldots, x_n)^N$. Получаем противоречие, так как N было выбрано минимальным.

Теперь мы имеем

$$k[\sigma'_{m_1}(P_1), \ldots, \sigma'_{m_n}(P_n)] \subset \mathrm{gr}(B) \subset k[\xi_1, \ldots, \xi_n]. \tag{2.4}$$

Отсюда $B_0 = k$. Но $k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ конечно порожден как $k[\sigma'_{m_1}(P_1), \ldots, \sigma'_{m_n}(P_n)]$-модуль. Следовательно, k-алгебра $\mathrm{gr}\, B$ — конечно порожденная k-алгебра размерности Крулля n. Кроме того, $k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ конечно порожден как $\mathrm{gr}\, B$-модуль. Из (2.4) следует, что $\mathrm{gr}\, B$ — кольцо без делителей нуля. Следовательно, кольцо B само без делителей нуля.

Для дальнейшего изложения будет полезно ввести аналог кольца Рисса $\tilde{B}$, построенный по фильтрации кольца B: $\tilde{B} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n s^n$. Кольцо $\tilde{B}$ — подкольцо кольца полиномов

$B[s]$. Для полей частных имеем равенство $\operatorname{Quot}\tilde{B} = \operatorname{Quot} B[s]$. Кроме того, $\operatorname{gr} B = \tilde{B}/(s)$. Пусть k-алгебра $\operatorname{gr}(B)$ порождена элементами $\sigma_{m_i}(b_i)$, $i = 1, \dots, p$ как k-алгебра, где $\mathbf{ord}(b_i) = m_i$. Легко проверить, что k-алгебра B порождена элементами b_i, $i = 1, \dots, p$ как k-алгебра, и k-алгебра $\tilde{B}$ порождена элементами $s, b_1 s^{m_1}, \dots, b_r s^{m_p}$ как k-алгебра. Отсюда мы можем вычислить размерность Крулля кольца B:

$$\dim B = \operatorname{trdeg}\operatorname{Quot} B = \operatorname{trdeg}\operatorname{Quot}\tilde{B} - 1 = \operatorname{trdeg}\operatorname{Quot}(\tilde{B}/(s)) = \operatorname{trdeg}\operatorname{Quot}(\operatorname{gr} B) = n, \tag{2.5}$$

так как (s) — простой идеал высоты 1 в кольце $\tilde{B}$ по теореме Крулля о высоте.

Докажем теперь пункт 3. Идеал $I = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_{n-1}s^n = (s)$ — однородный идеал в кольце $\tilde{B}$, поскольку этот идеал порожден однородным элементом $s \in \tilde{B}$. Кроме того, I — простой идеал, так как $\tilde{B}/I = \operatorname{gr} B$ — кольцо без делителей нуля.

Введем схемы $X = \operatorname{Proj}\tilde{B}$ и $C = \operatorname{Proj}\tilde{B}/I = \operatorname{Proj}\operatorname{gr}(B)$. Так как $\tilde{B}$ и $\operatorname{gr}(B)$ — целые k-алгебры, X и C — целые схемы. Следовательно, используя (2.5), получаем, что однородный простой идеал I задает неприводимую подсхему C коразмерности 1 в X. Более того, $X \setminus C = \operatorname{Spec}\tilde{B}_{(s)} = \operatorname{Spec} B$ — аффинное многообразие. (Здесь $\tilde{B}_{(s)}$ — подкольцо элементов степени нуль в локализации $\tilde{B}_s$ кольца $\tilde{B}$ по мультипликативной системе s^n, $n \in \mathbb{Z}$).

Для любого $n \geq 0$ обозначим однородную компоненту $\tilde{B}_n = B_n s^n \subset \tilde{B}$. Так как $\tilde{B}$ — конечно порожденная k-алгебра с $\tilde{B}_0 = k$, в силу [2, Ch.III, § 1.3, prop. 3] существует целое $d \geq 1$, такое что k-алгебра $\tilde{B}^{(d)} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \tilde{B}_{kd}$ конечно порождена элементами из $\tilde{B}_1^{(d)}$ как k-алгебра. (Здесь $\tilde{B}_1^{(d)} = \tilde{B}_d$, и $\dim_k \tilde{B}_1^{(d)} < \infty$ по формуле (2.4).) Следовательно, схема $\operatorname{Proj}\tilde{B}^{(d)} \hookrightarrow \operatorname{Proj}\operatorname{Sym}_k(\tilde{B}_1^{(d)}) \simeq \mathbb{P}_k^N$ — проективная схема над k, которая является неприводимым многообразием.

Покажем, что dC — очень обильный эффективный дивизор Картье на X. Рассмотрим подсхему C' в X, определенную однородным идеалом $I^d = (s^d)$ кольца $\tilde{B}$. Топологическое пространство подсхемы C' совпадает с топологическим пространством подсхемы C (как это видно на аффинном покрытии X). Функция $-\operatorname{ord}/\delta : (\operatorname{Quot} B)^* \to \mathbb{Z}$ сюръективна, и определяет дискретное нормирование на поле $\operatorname{Quot} B$. Локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,C}$ совпадает с кольцом нормирования этого дискретного нормирования:

$$\mathcal{O}_{X,C} = \tilde{B}_{(I)} = \{as^n/bs^n \mid n \geq 0, a \in B_n, b \in B_n \setminus B_{n-1}\}.$$

Идеал I^δ индуцирует максимальный идеал в кольце $\mathcal{O}_{X,C}$, и идеал I^d индуцирует d/δ-ю степень максимального идеала. Следовательно, если мы докажем, что идеал I^d определяет эффективный дивизор Картье на X, то отображение циклов на этом дивизоре равно $(d/\delta)C$, т.е. C — "-Картье дивизор. В силу [63, prop. 2.4.7], имеем $X = \operatorname{Proj}\tilde{B} \simeq \operatorname{Proj}\tilde{B}^{(d)}$. При этом изоморфизме подсхема C' определяется однородным идеалом $I^d \cap \tilde{B}^{(d)}$ в кольце $\tilde{B}^{(d)}$. Этот идеал порожден элементом $s^d \in \tilde{B}_1^{(d)}$. Открытые аффинные подмножетва $D_+(x_i) = \operatorname{Spec}\tilde{B}_{(x_i)}^{(d)}$ с $x_i \in \tilde{B}_1^{(d)}$ определяют покрытие схемы $\operatorname{Proj}\tilde{B}^{(d)}$. В каждом кольце $\tilde{B}_{(x_i)}^{(d)}$ идеал $(I^d \cap \tilde{B}^{(d)})_{(x_i)}$ порожден элементом s^d/x_i. Следовательно, однородный идеал $I^d \cap \tilde{B}^{(d)}$ определяет эффективный дивизор Картье.

Наконец, дивизор Картье dC очень обилен, поскольку C' — гиперплоское сечение во вложении $X = \operatorname{Proj}\tilde{B}^{(d)} \hookrightarrow \operatorname{Proj}\operatorname{Sym}_k(\tilde{B}_1^{(d)}) \simeq \mathbb{P}_k^N$. Кроме того, по пункту 1, $k[\xi_1, \dots \xi_n] \supset \operatorname{gr} B$, и $k[\xi_1, \dots \xi_n]$ — конечный $\operatorname{gr}(B)$-модуль. Следовательно, дивизор $C = \operatorname{Proj}\operatorname{gr}(B)$ — унирациональное многообразие.

Так как $\mathcal{O}_{X,C}$ — регулярное локальное кольцо, дивизор C не содержится в особом локусе в X.

Докажем теперь пункт 4. Определим пучок $\mathcal{L}$. Рассмотрим правый D-модуль

$$L = D/(x_1 D + \ldots + x_n D)$$

с фильтрацией $L_n = (D_n + x_1 D + \ldots + x_n D)/(x_1 D + \ldots + x_n D)$. Тогда имеем $L_n B_r \subseteq L_{r+n}$.

Рассмотрим другой правый D-модуль $k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ с действием D, заданным так:

$$f \circ \partial_j = f\xi_j \qquad , \qquad g \circ x_i = -\frac{\partial g}{\partial \xi_i}$$

для всех $1 \le i, j \le n$, $f, g \in k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$. Легко проверить, что отображения

$$k[\xi_1, \ldots, \xi_n] \longrightarrow L \quad : \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \xi^\alpha \mapsto \sum_\alpha a_\alpha \partial^\alpha$$

$$L \longrightarrow k[\xi_1, \ldots, \xi_n] \quad : \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} p_\alpha(x) \partial^\alpha \mapsto \sum_\alpha p_\alpha(0) \xi^\alpha,$$

где $a_\alpha \in k$, $p_\alpha \in k[[x_1, \ldots, x_n]]$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$, — изоморфизмы соответствующих D-модулей (и следовательно B-модулей). Фильтрация на $k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ — степенная фильтрация на многочленах. Следовательно, для любого целого $m \ge 0$

$$\dim_k L_m = \binom{m+n}{n} = \frac{(m+1) \cdot \ldots \cdot (m+n)}{n!}. \tag{2.6}$$

Более того, $\mathrm{gr}(L) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} L_n / L_{n-1} = k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ — конечно порожденный $\mathrm{gr}(B)$-модуль (см. пункт 1). Теперь, по индукции по степени фильтрации получаем, что если элементы $\sigma_{m_1}(v_1), \ldots, \sigma_{m_s}(v_q)$ (где $v_i \in L_{m_i}$, $\sigma_{m_i}(v_i) = v_i \mod L_{m_i - 1}$, $i = 1, \ldots, q$) порождают $\mathrm{gr}(L)$ как $\mathrm{gr}(B)$-модуль, то элементы $v_1, \ldots, v_q$ порождают L как B-модуль. Следовательно, мы получаем, что $\tilde{L} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} L_m s^m$ — конечно порожденный градуированный $\tilde{B}$-модуль без кручения, порожденный элементами $v_1 s^{m_1}, \ldots, v_q s^{m_q}$ над кольцом $\tilde{B}$. Следовательно, $\mathcal{L} = \mathrm{Proj}\, \tilde{L}$ — когерентный пучок без кручения[1] на X (см. [63, prop. 2.7.3]). Кроме того, градуированный $\mathrm{gr}\, B$-модуль $\mathrm{gr}\, L$ определяет когерентный пучок без кручения на $C = \mathrm{Proj}\, \mathrm{gr}\, B$, и $B = \tilde{B}_{(s)}$-модуль $L = \tilde{L}_{(s)}$ определяет когерентный пучок без кручения на $X \setminus C = \mathrm{Spec}\, B$.

Имеем: $X = \mathrm{Proj}\, \tilde{B}^{(d)}$. При этом изоморфизме градуированный $\tilde{B}^{(d)}$-модуль $\tilde{L}^{(d)} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \tilde{L}_{kd}$ (где $\tilde{L}_{kd} = L_{kd} s^{kd}$) определяет когерентный пучок $\mathcal{L}$ как $\mathrm{Proj}\, \tilde{L}^{(d)}$. Мы доказали, что $C' = dC$ — очень обильный дивизор Картье на проективном многообразии X. Следовательно, в силу [27, ch. III, th. 5.2],

$$H^i(X, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(mC')) = 0 \quad \text{для} \quad i > 0 \quad \text{и} \quad m \gg 0.$$

Также, по [27, ch. II, exerc. 5.9(b)], $H^0(X, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(mC')) = \tilde{L}_{md}$ для $m \gg 0$. Отсюда и из формулы (2.6), получаем

$$\chi(X, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(mC')) = \frac{(md+1) \cdot \ldots \cdot (md+n)}{n!} \quad \text{для} \quad m \gg 0.$$

Из формулы (2.2) получаем, что индекс самопересечения $(C'^n) = d^n / \mathrm{rk}(\mathcal{L})$ на X. Следовательно, индекс самопересечения $(C^n) = \delta^n / \mathrm{rk}(\mathcal{L})$ на X.

---

[1]Здесь и далее в диссертации мы используем нестандартное обозначение Proj для квазикогерентного пучка, ассоциированного с градуированным модулем. Если M — фильтрованный модуль, то мы используем обозначение $\tilde{M} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i s^i$ для аналога модуля Рисса, и такое же для фильтрованных колец.

Замечание 9. Пункт 1 предложения и частично пункт 2 следуют из [2, Ch.III, §2.9, Prop. 10]. Пункт 2 был доказан в [19] Кричевером в связи с теорией интегрируемых систем. Мы даем здесь другое доказательство в духе чистой коммутативной алгебры.

Пучок $\mathcal{L}$ — пучок Кричевера в смысле [13, introduction].

Замечание 10. Пучок $\mathcal{L}$ определяет расслоение собственных функций операторов из B на открытой части X следующим образом (мы предполагаем, что k алгебраически замкнуто). Для $U = \mathrm{Spec}(B)$ точки $p \in U(k)$ взаимно однозначно соответсвтуют характерам χ_p k-алгебры B (т.е. морфизмам k-алгебр $\chi : B \to k$, заданными максимальными идеалами кольца B). По когерентному пучку $\mathcal{L}$ строится ассоциированная аффинная схема $\mathbf{Spec}(\mathcal{L})$ вместе с морфизмом $\pi : \mathbf{Spec}(\mathcal{L}) \to X$, см. [27, ex.5.17, ch. II] (мы будем называть ее ассоциированным расслоением, поскольку это действительно векторное расслоение на открытой части X, где $\mathcal{L}$ локально свободен). Напомним, что эта схема строится путем склейки схем $\mathrm{Spec}(Sym(\mathcal{L}(V)))$ для открытых аффинных множеств V. В частности, для $p \in U$ имеем

$$\pi^{-1}(p) = \mathrm{Hom}_k(\mathcal{L}(p), k) = \mathrm{Hom}_B(L, k(p))$$

(здесь $\mathcal{L}(p)$ — слой когерентного пучка $\mathcal{L}$ в точке p, т.е. $\mathcal{L}(p) = \mathcal{L}_p \otimes_{\mathcal{O}_{X,p}} k(p)$). Эти пространства естественно изоморфны пространствам

$$\mathsf{Sol}(B, \chi_p) = \{f \in R,\ P(f) = \chi_p(P) f \quad \text{для всех } P \in B\}$$

следующим образом:

(i) имеется изоморфизм $R \simeq \mathrm{Hom}_k(L, k)$ (как векторных пространств), определенный как

$$f \mapsto \lambda_f, \quad \lambda_f(P) = P(f)(0)$$
$$\lambda \mapsto f_\lambda = \sum_v \frac{1}{v!} \lambda(\partial^v) x^v,$$

где $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n$, $v! = v_1! v_2! \dots v_n!$ и $\partial^v = \partial_1^{v_1} \dots \partial_n^{v_n}$, $x^v = x_1^{v_1} \dots x_n^{v_n}$.

(ii) при фиксированной точке $p \in U(k)$, поле $k = k(p)$ наследует структуру B-модуля, и изоморфизм (i) дает изоморфизм

$$\mathsf{Sol}(B, \chi_p) \simeq \mathrm{Hom}_B(L, k(p)) \subset \mathrm{Hom}_k(L, k).$$

Таким образом, расслоение $\mathbf{Spec}(\mathcal{L})|U$ — расслоение собственных функций кольца B, и мы можем рассматривать X, $\mathbf{Spec}(\mathcal{L})$ как продолжение спектра и расслоения собственных функций на бесконечность.

Глава 3

Коммутативные подалгебры в пополненной алгебре дифференциальных операторов

В этой главе излагается теория, посвященная классификации коммутативных подалгебр в пополненной алгебре дифференциальных операторов от двух переменных из работы [11].

Решение проблемы классификации алгебр коммутирующих операторов, которое мы предлагаем в настоящей главе, использует наш оригинальный подход, и является естественным обобщением теорем Кричевера, Мамфорда и Муласе, и также конструктивно в обе стороны. С другой стороны, оно обобщает подход М.Сато в размерности один. Методы, используемые в этой главе, по-видимому, могут быть перенесены и в высшие размерности, и мы планируем в будущем описать общий случай. Однако, лишь в размерности 2 имеются уже развитые части обобщенной теории КП, такие как теория риббонов (см. главу 4) и теория модифицированных иерархий КП Паршина (см. главу 6 и [151]). Кроме того, лишь в размерности 2 существует хорошая классификационная теория Коэно-Маколеевых пучков без кручения [42], важная для описания спектральных пучков, и эта теория не переносится в высшие размерности очевидным образом.

При этом хочется отметить, что пополненная алгебра дифференциальных операторов $\hat{D}$ естественно возникает в рамках нашего подхода (ср. замечание 82). В размерности один нет необходимости рассматривать пополнение кольца дифференциальных операторов.

Описание классификации, предложенной в этой статье, разбито на три шага. Сначала мы сводим проблему к описанию колец, удовлетворяющих некоторым специальным свойствам (1-квази-эллиптические кольца, см. определение 30). Затем мы классифицируем больший класс α-квази-эллиптических колец: а именно, все такие кольца в пополненном кольце дифференциальных операторов от двух переменных (см. параграф 3.1.2, определение 30). Мы классифицируем их в терминах пар подпространств (обобщенные пары Шура, см. определения 34, 42). Эта классификация использует обобщение теории М.Сато (см. [132], [134]), и конструктивна в обе стороны. После этого мы классифицируем обобщенные пары Шура в терминах обобщенных геометрических данных (см. определение 45). С одной стороны, эти данные являются естественным обобщением геометрических данных в одномерном случае, с другой стороны, они являются небольшой модификацией геометрических данных Паршина [118] и Осипова [23]. Изложение двух последних шагов нашей классификации похоже на изложение соответствующих результатов в размерности один в работе Муласе [107]. В частности, в качестве последнего шага классификации мы вводим две категории: категорию пар Шура (определение 44) и категорию геометрических данных (определение 47), и доказываем их антиэквивалентность. Эти категории являются естественными обобщениями соответствующих категорий из [107].

3.1 Вводные замечания и определения

В этом разделе вводятся обозначения и определения, а также доказываются основные свойства пополненной алгебры операторов.

3.1.1 Расширения кольца $D(R)$

Существует несколько стандартных способов расширить кольцо $D = D(R)$ до кольца $E \supset D$ (см. ниже), при этом в одном случае фильтрация $(D_n)_{n\geq 0}$ продолжается до фильтрации $(E_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, и $gr(E)$ — коммутативное кольцо, причем $P \in E$ обратим в E если и только если $\sigma_{\mathbf{ord}(P)}(P)$ обратим в $gr(E)$ (формальные микро-дифференциальные операторы), в другом случае продолжается Γ-фильтрация и отображение старшего члена (определенное после выбора системы координат), и выполняется следующее свойство: P обратим E если и только если коэффициент у $\mathrm{HT}(P)$ обратим в R (*формальные псевдо-дифференциальные операторы*).

Мы будем работать с формальными псевдо-дифференциальными операторами: $E = R((\partial_1^{-1}))\dots((\partial_n^{-1}))$ (ср. [24]).

Это кольцо определяется последовательно, начиная с определения кольца $A((\partial^{-1}))$, где A — ассоциативное, не обязательно коммутативное кольцо с дифференцированием d. Кольцо $A((\partial^{-1}))$ определяется как левый A-модуль всех формальных выражений вида

$$L = \sum_{i>-\infty}^{n} a_i\partial^i, \quad a_i \in A.$$

Умножение определяется по правилу Лейбница:

$$(\sum_i a_i\partial^i)(\sum_j b_j\partial^j) = \sum_{i,j,k\geq 0} C_i^k a_i d^k(b_j)\partial^{i+j-k}.$$

Здесь мы полагаем

$$C_i^k = \frac{i(i-1)\dots(i-k+1)}{k(k-1)\dots 1} \text{ если } k > 0,\ C_i^0 = 1.$$

Легко проверить, что $A((\partial^{-1}))$ будет опять ассоциативным кольцом.

Всякий элемент $P \in E$ можно формально записать как сумму $P = \sum_{\text{ß}\in\Gamma} r_{\text{ß}}\partial_1^{i_1}\dots\partial_n^{i_n}$ (здесь некоторые коэффициенты $r_{\text{ß}}$ могут быть равны нулю).

Согласно определению существует старший член $\mathrm{HT}(P) = r_{m_1\dots m_n}\partial_1^{m_1}\dots\partial_n^{m_n}$, где $r_{m_1\dots m_n} \neq 0$, и $(m_1,\dots,m_n) \geq (i_1,\dots,i_n)$ если $r_{i_1,\dots,i_n} \neq 0$. У него те же свойства, что и у старшего члена определенного в $D(R)$. Определим функцию порядка $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (m_1,\dots,m_n)$.

Замечание 11. Если $P \in E$ и если $\mathrm{HT}(P) = r_{m_1\dots m_n}\partial_1^{m_1}\dots\partial_n^{m_n}$, то $r_{m_1\dots m_n}$ обратим в R если и только если P обратим в E.

Определение 16. Пусть R — кольцо с системой координат $(x_1,\dots,x_n)$, пусть $M = (x_1R + \dots + x_nR)$ — идеал и $R/M = k$. Тогда определен правый идеал $x_1E + \dots + x_nE \subset E$ и правый E-модуль $E/(x_1E + \dots + x_nE) \simeq k((z_1))\dots((z_n))$ (изоморфизм k-векторных пространств), что определяет структуру правого E-модуля на $V = k((z_1))\dots((z_n))$. Кроме того, имеется изоморфизм $gr(R) \simeq k[x_1, \dots, x_n]$ (здесь фильтрация в R определена, как обычно, степенями идеала M), и мы будем обозначать через $\bar{a}$ образ элемента $a \in R$ в $gr(R)$.

Обозначим через M_i идеал $x_i R$ и для $a \in R$ положим

$$\mathrm{ord}_{M_i}(a) = \sup\{n | a \in M_i^n\}, \quad \mathrm{ord}_M(a) = \sup\{n | a \in M^n\}.$$

По аналогии с определениями 13, 14 в кольце $gr(R)$ можно определить более тонкую Γ-фильтрацию, где $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ упорядочена, как и прежде, анти-лексикографически, и функцию Γ-порядка ord_Γ: если $\bar{r} = \sum \bar{r}_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \in gr(R)$, то

$$\mathrm{ord}_\Gamma(\bar{r}) = \min\{(i_1, \dots, i_n) \in \Gamma | \bar{r}_{i_1 \dots i_n} \neq 0\}.$$

Теперь для $r \in R$ положим

$$\mathrm{ord}_{M_1, \dots, M_n}(r) = \mathrm{ord}_\Gamma(\bar{r}),$$

и для $P \in E$ положим

$$\mathrm{ord}_{M_1, \dots, M_n}(P) = \min_{ß \in \Gamma}\{(\mathrm{ord}_{M_1, \dots, M_n}(r_ß) \in \Gamma\}.$$

В дальнейшем мы будем писать $z^ß$ $(\partial^ß)$ вместо $z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n}$ $(\partial_1^{i_1} \dots \partial_n^{i_n})$ для мульти-индекса $ß = (i_1, \dots, i_n)$. Для $P \in E$ обозначим через $P(0)$ образ P по модулю M в V.

Заметим, что $\mathrm{ord}_M, \mathrm{ord}_{M_i}, \mathrm{ord}_{M_1, \dots, M_n}$ — (псевдо)-нормирования.

3.1.2 Пополнение

Рассмотрим полное кольцо R с M-адической топологией (M — идеал в R): $R = \varprojlim_{n \ge 0}(R/M^n)$.

Пусть $N \subset D$ — подалгебра; определим для всякой последовательности $(P_n \in N)_{n \in \mathbb{N}}$, такой что $P_n(R)$ равномерно сходится в R (т.е. для любого $k > 0$ существует $N > 0$ такое что $P_n(R) \subseteq M^k$ для $n \ge N$), k-линейный оператор $P : R \to R$

$$P(f) = \varinjlim_{n \to \infty} \sum_{v=0}^{n} P_v(f), \quad P := \sum_n P_n$$

(он может не быть дифференциальным оператором).

Обозначим через $\hat{N}$ алгебру таких операторов. Легко проверить, что она ассоциативна.

Определим также

$$\hat{D}_N = \text{ алгебра порожденная } \hat{N} \text{ и } D.$$

Если $(x_1, \dots, x_n)$ — система координат и $M = x_1 R + \dots + x_n R$, определим алгебру $\hat{D}_m := \hat{D}_N$ где $N = R[\partial_1, \dots, \partial_m]$.

Оператор P в $\hat{D}_m$ однозначно определяется по последовательности $p_{i_1 \dots i_m} = P(x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m} / i_1! \dots i_m!)$. Элементы из $\hat{D}_m$ соответствуют в точности тем последовательностям $(p_ß = p_{i_1 \dots i_m})_{ß \in \mathbb{N}^m}$, которые сходятся к нулю в M-адической топологии при $|ß| = i_1 + \dots + i_m \to \infty$. А именно,

$$(p_ß) \longleftrightarrow P = \sum_ß p_ß \partial_1^{i_1} \dots \partial_m^{i_m} = \lim_{n \to \infty}(\sum_{|ß| \le n} p_ß \partial_1^{i_1} \dots \partial_m^{i_m}).$$

Теперь определим

$$\hat{D}_{m,n-m} = \text{ алгебра, порожденная } \hat{D}_m \text{ и } D = \hat{D}_m[\partial_{m+1}, \dots, \partial_n]$$

и

$$\hat{E}_{m,n-m} = \hat{D}_m((\partial_{m+1}^{-1}))\dots((\partial_n^{-1})) \supset R[\partial_1, \dots, \partial_m]((\partial_{m+1}^{-1}))\dots((\partial_n^{-1})) = E_{m,n-m}.$$

Пример 9. В этом примере дадим другое описание колец $\hat{D}_m, \hat{D}_{m,n-m}$ в случае, который будет нас интересовать в этой статье. А именно, пусть $R = k[[x_1, x_2]]$, система координат в R — (x_1, x_2), и $M = (x_1, x_2)$ — максимальный идеал. Определим множество

$$\hat{D}_1 = \{a = \sum_{q \geq 0} a_q \partial_1^q \quad | a_q \in k[[x_1, x_2]] \text{ и для любого } N \in \mathbb{N} \text{ существует } n \in \mathbb{N} \text{ такое что}$$
$$\operatorname{ord}_M(a_m) > N \text{ для всех } m \geq n\}. \quad (3.1)$$

Определим

$$\hat{D}_{1,1} = \hat{D}_1[\partial_2], \quad \hat{E}_{1,1} = \hat{D}_1((\partial_2^{-1})).$$

Лемма 8. *Множества $\hat{D}_1 \subset \hat{D}_{1,1} \subset \hat{E}_{1,1}$ — ассоциативные кольца с единицей.*

Доказательство Очевидно, что $\hat{D}_1$ — абелева группа. Умножение двух элементов определено согласно следующей формуле: для двух рядов $A = \sum_{q \geq 0} a_q \partial_1^q$, $B = \sum_{q \geq 0} b_q \partial_1^q$

$$AB = \sum_{q \geq 0} g_q \partial_1^q, \quad \text{где } g_q = \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} C_k^l a_k \partial_1^l (b_{q+l-k}),$$

где мы полагаем $b_i = 0$ при $i < 0$. Каждый коэффициент g_q корректно определен, поскольку для каждого N существует лишь конечное число коэффициентов a_k с $\operatorname{ord}_M(a_k) < N$ и для каждого k существует лишь конечное число коэффициентов $C_k^l \neq 0$.

Для любого N существует n, такое что $\operatorname{ord}_M(a_m) > N$ для любого $m \geq n$, и существует n_1, такое что $\operatorname{ord}_M(b_m) > N + n$ для любого $m \geq n_1$. Тогда для всякого $q \geq n_1 + n$ и всякого $k < n$, $0 \leq l \leq k$ имеем: $\operatorname{ord}_M(\partial_1^l(b_{q+l-k})) \geq \operatorname{ord}_M(b_{q+l-k}) - l > N$. Следовательно, $\operatorname{ord}_M(g_q) > N$ для любого $q \geq n_1 + n$. Таким образом, умножение в $\hat{D}_1$ корректно определено. Дистрибутивность очевидна, а ассоциативность проверяется с помощью тех же аргументов, что и в [110, ch.III, §11].

Доказательство для $\hat{D}_{1,1}, \hat{E}_{1,1}$ такое же.

Действие $E_{m,n-m}$ на $V = k((z_1))\dots((z_n))$ не продолжается до действия $\hat{E}_{m,n-m}$ на V, но частично его все же можно продолжить. Чтобы объяснить это, введем еще одно понятие:

Определение 17. Члены ряда $v = \sum_{(i_1,\dots,i_n)} v_{i_1\dots i_n} z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n}$ — это элементы $v_{i_1\dots i_n} z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n}$ с $v_{i_1\dots i_n} \neq 0$, мы упорядочиваем их с помощью антилексикографического порядка на Γ, $\operatorname{ord}_\Gamma(z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n}) = (i_1, \dots, i_n)$. У каждого ряда v есть *младший член* $\operatorname{LT}(v)$ (член наименьшего порядка), чей порядок называется Γ-порядком v, $\operatorname{ord}_\Gamma(v)$.

Заметим, что $\operatorname{ord}_\Gamma$ — дискретное нормирование ранга n на V. Для действия E на V имеем неравенство:

$$\operatorname{ord}_\Gamma(vP) \geq \operatorname{ord}_\Gamma(v) - \operatorname{ord}_\Gamma(P),$$

где равенство выполняется если и только если $\operatorname{HT}(P)$ — обратимый элемент в R.

Напомним еще одно определение из теории многомерных локальных полей:

Определение 18. Начиная с дискретной топологии на поле k определим топологию на пространстве V по индукции следующим образом.

Если топология на $F = k((z_1))\dots((z_{k-1}))$ определена, рассмотрим следующую топологию на $K = F((z_k))$. Для последовательности окрестностей нуля $(U_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ в F, $U_i = F$ при $i \gg 0$, положим $U_{\{U_i\}} = \{\sum a_i z_k^i : a_i \in U_i\}$. Тогда все множества $U_{\{U_i\}}$ образуют базу открытых окрестностей нуля в $F((z_k))$. В частности, последовательность $u^{(n)} = \sum a_i^{(n)} z_k^i$ стремится к нулю если и только если существует целое m такое что $u^{(n)} \in z_k^m F[[z_k]]$ для всех n и последовательности $a_i^{(n)}$ стремятся к нулю для каждого i.

Теперь рассмотрим следующие замкнутые подпространства в V:

$$W_{m,n-m} = k[z_1^{-1},\dots,z_m^{-1}]((z_{m+1}))\dots((z_n)).$$

Легко проверить, что действие $E_{m,n-m}$ на $W_{m,n-m}$ продолжается до действия $\hat{E}_{m,n-m}$ аналогичным образом с помощью изоморфизма $\hat{E}_{m,n-m}/M\hat{E}_{m,n-m} \simeq k[z_1^{-1},\dots,z_m^{-1}]((z_{m+1}))\dots((z_n))$. В то же время, действие $\hat{E}_{m,n-m}$ на, скажем, ∂_1^{-1} (если $m \geq 1$) не определено корректно.

Замечание 12. Заметим, что элементы кольца $\hat{D}_{m,n-m}$ можно рассматривать как "обобщенные"дифференциальные операторы, поскольку они тоже действуют на элементах R, как и обычные дифференциальные операторы.

Отметим также, что в кольце $\hat{D}_{m,n-m}$ есть делители нуля. (см. пример 30 далее).

3.1.3 Дальнейшие замечания

В этом параграфе мы сделаем несколько замечаний о наших определениях колец и пространств приведенных выше.

В случае размерности один, т.е. для кольца обыкновенных дифференциальных операторов D и кольца псевдо-дифференциальных операторов E, классическая теория КП имеет дело с разложением $E = E_+ \oplus E_-$, где $E_+ = D$. Это разложение используется, в частности, для определения иерархии КП.

В работе [24] Паршин ввел аналог классической системы КП в высших размерностях, используя обобщение этого разложения. Полученная система и ее модификации изучались затем в [151].

Покажем, как наши кольца связаны с некоторым разложением в кольце E в двумерном случае. Рассмотрим кольцо $E = k[[x_1,x_2]]((\partial_1^{-1}))((\partial_2^{-1}))$.

Определение 19. Определим векторное пространство W_l как замкнутое подпространство в пространстве $k((z_1))((z_2))$, порожденное мономами $z_1^n z_2^m$, $n \leq 0$, $n,m \in \mathbb{Z}$.

Мы хотим определить разложение:

$$E = E_+^l \oplus E_-^l.$$

Определение 20. Определим "+часть E_+ (*l-дифференциальные операторы*) следующим образом:

$$E_+^l = \{A \in E | W_l A \subset W_l\},$$

и "−часть следующим образом:

$$E_-^l = k[[x_1,x_2]]\partial_1^{-1}[[\partial_1^{-1}]]((\partial_2^{-1}))$$

Лемма 9. *Множество E_+^l — ассоциативное кольцо с единицей; $E_+^l = k[[x_1,x_2]][\partial_1]((\partial_2^{-1}))$.*

Доказательство Первое утверждение следует из второго.

Множество E^l_+ является, очевидно, абелевой группой. Это моноид относительно умножения в кольце E, поскольку $A, B \in E^l_+$ и для всякого $w \in W_l$ имеем $w(AB) = (wA)B \in W_l$.

Ассоциативность и дистрибутивность умножения следует из соответствующих свойств кольца E. Ясно, что $k[[x_1, x_2]][\partial_1]((\partial_2^{-1})) \in E^l_+$.

Теперь доказательство вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 10. *Множество E^l_- — ассоциативное кольцо. Ненулевой элемент из этого множества не принадлежит E^l_+.*

Доказательство Доказательство первого утверждения очевидно. Доказательство второго утверждения аналогично доказательству предложения 3.

Лемма 11. *Существует единственное разложение*

$$E = E^l_+ \oplus E^l_-.$$

Доказательство очевидно.

В частности, мы получаем, что $E^l_+ = E_{1,1}$. **В дальнейшем мы будем также часто употреблять обозначение E_+ вместо E^l_+ и $E_{1,1}$, и $\hat{E}_+$ вместо $\hat{E}_{1,1}$. Также мы будем писать $\hat{D}$ вместо $\hat{D}_{1,1}$.**

Определение 21. Скажем, что оператор $P \in \hat{E}_+$ имеет порядок $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (k, l)$, если $P = \sum_{s=-\infty}^{l} p_s \partial_2^s$, где $p_s \in \hat{D}_1$, $p_l \in k[[x_1, x_2]][\partial_1] = D_1$, и $\mathbf{ord}(p_l) = k$.

3.2 Строго допустимые кольца

В этом разделе вводятся дополнительные определения технического характера, необходимые для дальнейшего изложения, а также доказываются утверждения о том, что кольца коммутирующих операторов $B \subset D$, порожденные операторами с постоянными старшими символами, приводятся линейными заменами переменных к некоторому специальному виду. Этот раздел служит отчасти мотивировкой для разработки последующей теории.

С этого момента и до конца главы мы будем рассматривать полную k-алгебру $R = k[[x_1, x_2]]$ с системой координат (x_1, x_2).

Лемма 12. *Пусть P, P_1, Q — элементы кольца D порядков m, k, n соответственно, все с постоянными главными символами. Пусть k — алгебраически замкнутое поле.*

1. *Если существует точка $p \in \mathrm{Supp}\,\mathrm{Ch}_0(Q) \backslash (\mathrm{Supp}\,\mathrm{Ch}_0(P) \cup \mathrm{Supp}\,\mathrm{Ch}_0(P_1))$, простая в $\mathrm{Ch}_0(Q)$, то существует линейная замена координат $(x_1, x_2) = (x_1', x_2')(a_{ij})$, такая что в новых координатах*

$$\sigma_m(P) = {\xi_2'}^m + \sum_{q=1}^{m} h_q {\xi_1'}^q {\xi_2'}^{m-q}, \tag{3.2}$$

$$\sigma_k(P_1) = a_0 {\xi_2'}^k + \sum_{q=1}^{k} a_q {\xi_1'}^q {\xi_2'}^{k-q}, \tag{3.3}$$

$$\sigma_n(Q) = \xi_1' {\xi_2'}^{n-1} + \sum_{q=2}^{n} l_q {\xi_1'}^q {\xi_2'}^{n-q}, \tag{3.4}$$

где $h_q, a_q, l_q \in k$, $a_0 \neq 0$.

2. *Если функция $\sigma_n(P)^m/\sigma_m(Q)^n$ — не константа, то для почти всех $\alpha \in k$ тройка $P, P_1, Q_\alpha = Q^n + \alpha P^m$ удовлетворяет предположениям пункта 1.*

Доказательство 1. Пусть F, F_1, G — главные символы P, P_1, G, записанные в координатах ξ_1, ξ_2. Тогда, если координаты точки p $(a_{21} : a_{22})$, то $F(a_{21}, a_{22})F_1(a_{21}, a_{22}) \neq 0$. Мы можем выбрать (a_{21}, a_{22}) таким образом, что $F(a_{21}, a_{22}) = 1$.

Мы можем выбрать (a_{11}, a_{12}) таким образом, что $\det(a_{ij}) \neq 0$ и

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\xi_1}(a_{21}, a_{22})a_{11} + \frac{\partial\sigma}{\partial\xi_2}(a_{21}, a_{22})a_{12} = 1$$

(поскольку $(\frac{\partial\sigma}{\partial\xi_1}(a_{21}, a_{22}), \frac{\partial\sigma}{\partial\xi_2}(a_{21}, a_{22})) \neq (0, 0)$, так как $(a_{21} = a_{22})$ — простой корень G).

После замены координат

$$(x_1, x_2) = (x_1', x_2')\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (\xi_1, \xi_2) = (\xi_1', \xi_2')\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

мы получаем

$$\sigma_m(P) = \tilde{F}(\xi_1', \xi_2') = F(a_{11}\xi_1' + a_{21}\xi_2', a_{12}\xi_1' + a_{22}\xi_2')$$

(и похожие выражения для $\sigma_k(P_1)$, $\sigma_n(Q)$) и $\tilde{F}(0, 1) = F(a_{21}, a_{22}) = 1$, $\tilde{F}_1(0, 1) = F_1(a_{21}, a_{22}) \neq 0$, $\tilde{G}(0, 1) = 0$,

$$\frac{\partial\tilde{G}}{\partial\xi_1}(0, 1) = \frac{\partial G}{\partial\xi_1}(a_{21}, a_{22})a_{11} + \frac{\partial G}{\partial\xi_2}(a_{21}, a_{22})a_{12} = 1.$$

Таким образом, $\sigma_m(P)$ — многочлен со старшим коэффициентом 1 относительно ξ_2', $\sigma_k(P_1)$ — многочлен со старшим коэффициентом 1 относительно ξ_2' с точностью до ненулевого множителя, и $\sigma_n(Q) = \xi_1'\tilde{H}(\xi_1', \xi_2')$, где $\tilde{H}$ — многочлен со старшим коэффициентом 1 относительно ξ_2'.

2. По предположению, F^n/G^m — не константа, поэтому если $H = GCD(F^n, G^m)$ и $F^n = F_1H$, $G^m = G_1H$, то $\deg F_1 = \deg G_1 = N > 0$. Так как F_1, G_1 взаимно просты, многочлен $G_1 + tF_1 \in k[\xi_1, \xi_2, t]$ неприводим и определяет неприводимую кривую $C \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^1$, и проекция на $\mathbb{A}^1$ определяет конечное $N : 1$ накрытие $C \to \mathbb{A}^1$.

Слои C_α над $\alpha \in k$ — дивизоры на $\mathbb{P}^1$, причем они приведены для всех $\alpha \in \mathbb{A}^1 \backslash S$, где S — конечный дивизор ветвления накрытия $C \to \mathbb{A}^1$ (ср. [27, cor. 10.7, ch.III]). Кроме того, при $\alpha \neq \beta$, имеет место равенство $C_\alpha \cap C_\beta = \emptyset$, так как у F_1, G_1 нет общих множителей.

Следовательно, существует конечное множество $T \subset \mathbb{A}^1$, такое что ни для какой точки $\alpha \in \mathbb{A}^1 \backslash T$ C_α не пересекается с конечным множеством $\operatorname{Supp}\operatorname{Ch}_0(P) \cup \operatorname{Supp}\operatorname{Ch}_0(P_1)$. Поэтому для $\alpha \in \mathbb{A}^1 \backslash (S \cup T)$ все точки C_α имеют кратность один и C_α не пересекается с $\operatorname{Supp}(\operatorname{Ch}_0(P)) \cup \operatorname{Supp}(\operatorname{Ch}_0(P_1))$. Так как $\operatorname{Supp}(\operatorname{Ch}_0(H)) \subset \operatorname{Supp}\operatorname{Ch}_0(P)$, C_α также не пересекается с $\operatorname{Supp}(\operatorname{Ch}_0(H))$.

Так как $G^m + \alpha F^n = \sigma_{mn}(Q^m + \alpha P^n) = (G_1 + \alpha F_1)H$, всякая точка из $C_\alpha \subset \operatorname{Ch}_0(Q^m + \alpha P^n)$ удовлетворяет условию пункта 1.

Определение 22. Для коммутативного кольца $B \subset D$ определим числа $\tilde{N}_B$, N_B следующим образом:

$$\tilde{N}_B = GCD\{\mathbf{ord}(a), \quad a \in B\},$$

$$N_B = GCD\{q(a), \quad a \in B \text{ такие что } \operatorname{ord}_\Gamma(a) = (0, q(a)) \text{ и } \mathbf{ord}(a) = q(a)\}.$$

Определение 23. Скажем, что коммутативное кольцо $B \subset D$ строго допустимо, если $\tilde{N}_B = N_B$ (ср. с определениями 39, 41 ниже).

Предложение 1. *Пусть B — коммутативное кольцо дифференциальных операторов, $B \subset D$, k — алгебраически замкнутое поле, и пусть B содержит два оператора P, Q порядков m, n с постоянными главными символами, причем $\sigma_m(P)^n/\sigma_n(Q)^m$ — непостоянная функция на $\mathbb{P}^1$.*

Тогда существует k-линейная замена координат как в лемме 12, такая что $N_B = \tilde{N}_B$.

Доказательство В силу леммы 12, мы без ограничения общности можем предположить что операторы P, Q удовлетворяют (3.2), (3.4) из утверждения леммы 12. Пусть X — такой оператор, что $GCD(\mathbf{ord}(X), \mathbf{ord}(P)) = \tilde{N}_B$.

По лемме 7 символ s_X оператора X является однородным многочленом с постоянными коэффициентами. Теперь по лемме 12 мы получаем, что существует α и такая замена координат, что символы s_{Q_α}, s_P, s_X, где $Q_\alpha = \alpha Q^n + P^m$, удовлетворяют равенствам

$$s_P = \partial_2'^{\mathbf{ord}(P)} + \dots, \quad s_X = \partial_2'^{\mathbf{ord}(X)} + \dots, \quad s_{Q_\alpha} = \partial_1'\partial_2'^{\mathbf{ord}(Q_\alpha)-1} + \dots.$$

Очевидно, что это и есть искомая k-линейная замена координат.

3.3 Условия роста и аналог теории Шура

В этом разделе излагается аналог теории Шура для подкольца $\hat{E}_+$ пополненного кольца двумерных псевдодиффенциальных операторов. Для охвата возможно большего класса операторов из $\hat{D}$ вводятся подкольца в $\hat{E}_+$ с особыми условиями роста на коэффициенты операторов (условия (A_α)). При значении $\alpha = 1$ эти условия играют особую роль для классификации коммутативных подколец в терминах алгебро-геометрических спектральных данных.

3.3.1 Условия роста

В этом параграфе мы даем несколько новых определений и доказываем ряд технических утверждений.

Определение 24. Скажем, что оператор $P \in \hat{E}_+$ имеет порядок $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (k, l)$, если $P = \sum_{s=-\infty}^{l} p_s \partial_2^s$, где $p_s \in \hat{D}_1$, $p_l \in k[[x_1, x_2]][\partial_1] = D_1$, и $\mathbf{ord}(p_l) = k$.

Скажем, что оператор $P \in \hat{E}_+$, $P = \sum p_{ij}\partial_1^i\partial_2^j$ порядка $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (k, l)$ *удовлетворяет условию* A_α, $\alpha \geq 0$, если

$$(A_\alpha) \qquad \mathrm{ord}_M(p_{ij}) \geq \begin{cases} 0 & \text{если } i \leq \alpha(l-j) + k \\ i - \alpha(l-j) - k & \text{иначе} \end{cases}$$

В этом случае, и если $\alpha \neq 0$, определим *полный порядок* оператора как $ford(P) := k/\alpha + l$.

Скажем, что оператор $Q \in \hat{E}_+$, $Q = \sum q_{ij}\partial_1^i\partial_2^j$ *удовлетворяет условию A_α для порядка* (k, l) если A_α выполняется для всех q_{ij}.

Определение 25. Скажем, что оператор $P \in E_+$, $P = \sum p_{ij}\partial_1^i\partial_2^j$ порядка $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (k, l)$ *удовлетворяет сильному условию* A_α, $\alpha \geq 0$, если

$$(B_\alpha) \quad p_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i > \alpha(l-j) + k.$$

Скажем, что оператор $Q \in \hat{E}_+$, $Q = \sum q_{ij}\partial_1^i\partial_2^j$ *удовлетворяет сильному условию A_α для порядка* (k, l) если B_α выполняется для всех q_{ij}.

Определение 26. Скажем, что оператор $P \in E_+$, $P = \sum p_{ij}\partial_1^i\partial_2^j$ порядка $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (k,l)$ *удовлетворяет очень сильному условию* A_α, $\alpha \geq 0$, если

$(C_\alpha)\quad p_{ij} = 0 \quad$ при $\quad i > \alpha(l-j)+k$

и старший коэффициент дифференциального оператора p_{ij} — константа.

Скажем, что оператор $Q \in \hat{E}_+$, $Q = \sum q_{ij}\partial_1^i\partial_2^j$ *удовлетворяет очень сильному условию* A_α *для порядка* (k,l), если C_α выполняется для всех q_{ij}.

Замечание 13. Очевидно, что имеются следующие импликации: $C_\alpha \Rightarrow B_\alpha \Rightarrow A_\alpha$.

Замечание 14. Легко видеть, что если $P \in \hat{E}_+$ удовлетворяет условию A_α или сильному условию A_α, то он удовлетворяет условию A_κ или сильному условию A_κ для любого $\kappa > \alpha$.

Определение 27. Пусть $P \in \hat{D}_1$, $P = \sum p_s\partial_1^s$ — оператор, удовлетворяющий следующему условию: существует число $f(P)$, такое что $\mathrm{ord}_M(p_s) \geq s - f(P)$ если $s \geq f(P)$. В этом случае скажем, что P *удовлетворяет условию* $AA_{f(P)}$.

Определение 28. Пусть $P \in D_1$, $P = \sum_{s\geq 0} p_s\partial_1^s$ — оператор, удовлетворяющий следующему условию: существует число $f(P)$, такое что $p_s = 0$ при $s > f(P)$. В этом случае скажем, что P *удовлетворяет сильному условию* $AA_{f(P)}$ (или $BB_{f(P)}$).

Определение 29. Пусть $P \in D_1$, $P = \sum_{s\geq 0} p_s\partial_1^s$ — оператор, удовлетворяющий следующему условию: существует число $f(P)$, такое что $p_s = 0$ при $s > f(P)$ и $p_{f(P)} \in k$. В этом случае скажем, что P *удовлетворяет очень сильному условию* $AA_{f(P)}$ (или $CC_{f(P)}$).

Замечание 15. Легко видеть, что если $P \in \hat{D}_1$ удовлетворяет условию AA_κ или (очень) сильному условию AA_κ, то он удовлетворяет условию $AA_{\kappa'}$ или (очень) сильному условию $AA_{\kappa'}$ для всех $\kappa' > \kappa$.

Замечание 16. Заметим, что $P \in \hat{E}_+$, $P = \sum p_s\partial_2^s$ удовлетворяет условию A_α или (очень) сильному условию A_α если и только если его коэффициенты p_s удовлетворяют условиям $AA_{\alpha(ford(P)-s)}$ или (очень) сильным условиям $AA_{\alpha(ford(P)-s)}$ соответственно.

Аналогично, P удовлетворяет A_α для порядка (k,l) или (очень) сильному условию A_α для порядка (k,l) если и только если его коэффициенты p_s удовлетворяют условиям $AA_{\alpha(l-s)+k}$ или (очень) сильным условиям $AA_{\alpha(l-s)+k}$.

Заметим также, что если P удовлетворяет A_α для порядка (k,l), то он удовлетворяет A_α для любой пары (k_1,l_1), такой что $l_1+k_1/\alpha = l+k/\alpha$. То же верно для (очень) сильных условий.

Лемма 13. *Пусть* $P_1, P_2 \in \hat{D}_1$ *удовлетворяют условиям* $AA_{f(P_1)}, AA_{f(P_1)}$ *соответственно. Тогда* P_1P_2 *— оператор, удовлетворяющий условию* $AA_{f(P_1)+f(P_2)}$.

То же утверждение верно для $P_1, P_2 \in D_1$*, удовлетворяющих сильным или очень сильным условиям.*

Доказательство Достаточно доказать лемму для $P_1 = p_i\partial_1^i$. Пусть $P_2 = \sum p_{2,j}\partial_1^j$ и $P_1P_2 = \sum_{k=0}^\infty x_k\partial_1^k$. Имеем:

$$P_1P_2 = \sum_{j=0}^{i} p_iC_i^j\partial_1^j(P_2)\partial_1^{i-j}$$

откуда

$$\mathrm{ord}_M(x_{f(P_1)+f(P_2)+l}) \geq \min_j\{\mathrm{ord}_M(p_i) + \mathrm{ord}_M(p_{2,f(P_1)+f(P_2)+l+j-i})\}.$$

Если $i \le f(P_1)$, то $f(P_1)+f(P_2)+l+j-i \ge f(P_2)+l$, откуда

$$\mathrm{ord}_M(p_i)+\mathrm{ord}_M(p_{2,f(P_1)+f(P_2)+l+j-i}) \ge l$$

для любого j.

Если $i > f(P_1)$, то

$$\mathrm{ord}_M(p_i)+\mathrm{ord}_M(p_{2,f(P_1)+f(P_2)+l+j-i}) \ge i-f(P_1)+f(P_1)+l+j-i \ge l$$

для любого j. Таким образом, $\mathrm{ord}_M(x_{f(P_1)+f(P_2)+l}) \ge l$.

Утверждение для (очень) сильных условий очевидно.

Лемма 14. *Пусть $P_1, P_2 \in \hat{E}_+$ удовлетворяют условию A_α с $\alpha \ge 1$ для порядков (k_1, l_1) и (k_2, l_2) соответственно. Тогда P_1P_2 удовлетворяет условию A_α для порядка (k_1+k_2, l_1+l_2).*

В частности, если P_1, P_2 удовлетворяют условию A_α с $\alpha \ge 1$, то P_1P_2 удовлетворяет условию A_α и $\mathrm{ord}_\Gamma(P_1P_2) = \mathrm{ord}_\Gamma(P_1)+\mathrm{ord}_\Gamma(P_2)$.

Те же утверждения справедливы для $P_1, P_2 \in E_+$, удовлетворяющих (очень) сильным условиям.

Доказательство Мы будем доказывать утверждения одновременно в (очень) сильном и не сильном случаях.

Достаточно доказать лемму для произведения двух слагаемых рядов P_1, P_2, скажем $p_k\partial_2^k$, $p_l\partial_2^l$, поскольку любое слагаемое в P_i удовлетворяет условию A_α для порядка (k_i, l_i), $i = 1, 2$. Имеем:

$$(p_k\partial_2^k)(p_l\partial_2^l) = \sum_{j=0}^{\infty} C_k^j p_k \partial_2^j(p_l)\partial_2^{k+l-j}. \tag{3.5}$$

Заметим, что p_k удовлетворяет условию $AA_{f(p_k)}$, где $f(p_k) = \alpha(l_1-k)+k_1$, p_l удовлетворяет условию $AA_{f(p_l)}$, где $f(p_l) = \alpha(l_2-l)+k_2$. Заметим также, что $\partial_2^j(p_l)$ удовлетворяет условию $AA_{f(p_l)}$ в (очень) сильном случае и условию $AA_{f(p_l)+j}$ в не сильном случае. Таким образом, по лемме 13 получаем $f(p_k\partial_2^j(p_l)) = f(p_k)+f(\partial_2^j(p_l)) \le \alpha(l_1+l_2-(k+l-j))+k_1+k_2$, откуда следует, что каждое слагаемое в (3.5) удовлетворяет условию A_α в определении 24 для порядка (k_1+k_2, l_1+l_2). Следовательно, то же верно для P_1P_2.

Ясно, что $\mathrm{ord}_\Gamma(P_1P_2) = \mathrm{ord}_\Gamma(P_1)+\mathrm{ord}_\Gamma(P_2)$. Если P_i удовлетворяют A_α, то они удовлетворяют A_α для порядков $\mathrm{ord}_\Gamma(P_i)$. Следовательно, P_1P_2 удовлетворяет A_α для порядка $\mathrm{ord}_\Gamma(P_1P_2)$, т.е. P_1P_2 удовлетворяет условию A_α.

Следствие 6. *Если оператор $S = 1-S^-$, где $S^- \in \hat{D}_1[[\partial_2^{-1}]]\partial_2^{-1}$, удовлетворяет условию A_α или (очень) сильному условию A_α с $\alpha \ge 1$, то оператор S^{-1} также удовлетворяет ему.*

Доказательство Доказательство следует из доказательства леммы 14, так как $\mathrm{ord}_\Gamma(S) = (0,0)$ и $S^{-1} = 1+\sum_{q=1}^{\infty}(S^-)^q$.

Следствие 7. *Рассмотрим множество*

$$\Pi_\alpha = \{P \in \hat{E}_+ | \quad \text{существует пара } (k,l) \in \mathbb{Z}_+ \oplus \mathbb{Z} \text{ такая что } P \text{ удовлетворяет } A_\alpha \text{ для порядка } (k,l)\} \subset \hat{E}_+. \tag{3.6}$$

Оно является ассоциативной подалгеброй (в $\hat{E}_+$) с единицей.

Доказательство Пусть $P_1, P_2 \in \Pi_\alpha$. По лемме 14 $P_1P_2 \in \Pi_\alpha$. Более того, $P_1 + P_2 \in \Pi_\alpha$, поскольку $P_1 + P_2$ удовлетворяет условию A_α для такого порядка (k_i, l_i), $i = 1, 2$, для которого значение выражения $l_i + k_i/\alpha$ больше (см. также замечание 16). Следовательно, Π_α — ассоциативная подалгебра в $\hat{E}_+$ с единицей 1.

Лемма 15. *Пусть $P, Q \in \hat{D} \subset \hat{E}_+$ — коммутирующие операторы со старшими коэффициентами 1, и пусть $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (0, k)$, $\mathrm{ord}_\Gamma(Q) = (1, l)$. Тогда*

1. *Существуют единственные операторы $L_1 \in \hat{E}_+$, $L_2 \in \hat{E}_+$, такие что $L_2^k = P$, $L_1 L_2^l = Q$, $[L_1, L_2] = 0$.*

2. *Если P, Q удовлетворяют условию A_α с $\alpha \geq 1$, то L_1, L_2 удовлетворяют условию A_α.*

3. *Если $P, Q \in D$, то $L_1, L_2 \in \hat{E}_+ \cap E$.*

4. *Если $P, Q \in D$ удовлетворяют (очень) сильному условию A_α с $\alpha \geq 1$, то L_1, L_2 удовлетворяют (очень) сильному условию A_α.*

Доказательство 1. Коэффициенты оператора $L_2 = \partial_2 + u_0 + u_{-1}\partial_2^{-1} + \ldots$ можно найти последовательно, решая систему уравнений, которая получается сравнением коэффициентов операторов P и L_2^k:

$$ku_0 = p_{k-1}, \quad ku_{-i} + F(u_0, \ldots, u_{-i+1}) = p_{k-1-i}, \tag{3.7}$$

где F — многочлен от переменных $u_0, \ldots, u_{-i+1}$ и их производных. Ясно, что эта система однозначно разрешима. Таким образом, оператор L_2 однозначно определен. Заметим, что L_2 — обратимый элемент, $L_2^{-1} \in \hat{E}_+$ и $\mathrm{ord}_\Gamma(L_2^{-1}) = (0, -1)$. Следовательно, $L_1 = QL_2^{-l}$ также однозначно определен.

Те же аргументы показывают, что справедлив пункт 3.

2 и 4. Мы будем доказывать утверждения одновременно в (очень) сильном и не сильном случаях.

Из формул (3.7) следует, что u_0 удовлетворяет A_α для порядка $\mathrm{ord}_\Gamma(L_2)$ или, эквивалентно,в силу замечания 16, u_0 удовлетворяет AA_α. Предположим, что $F(u_0, \ldots, u_{-i+1})$ в (3.7) удовлетворяет $AA_{\alpha(1+i)}$. Тогда u_{-i} будет также удовлетворять условию $AA_{\alpha(1+i)}$. Покажем, что $F(u_0, \ldots, u_{-i})$ удовлетворяет $AA_{\alpha(2+i)}$.

Имеем:

$$L_2^k = (\partial_2 + u_0 + \ldots + u_{-i}\partial_2^{-i})^k + u_{-i-1}\partial_2^{-i-2+k} + \text{члены высшего порядка.}$$

По лемме 14 и замечанию 16 оператор $(\partial_2 + u_0 + \ldots + u_{-i}\partial_2^{-i})^k$ удовлетворяет A_α. Но $F(u_0, \ldots, u_{-i})$ — коэффициент при ∂_2^{-i-2+k} у этого оператора. Таким образом, он удовлетворяет условию $AA_{\alpha(2+i)}$, см. замечание 16.

Теперь для оператора L_2 пункты 2 и 4 получаются по индукции. Оператор L_1 удовлетворяет условию A_α в силу леммы 14 и следствия 6.

3.3.2 Квази-эллиптические кольца коммутирующих операторов

Последняя лемма, а также лемма 12 служат мотивировкой для следующих определений:

Определение 30. Кольцо $B \subset \hat{E}_+$ коммутирующих операторов называется квази-эллиптическим, если оно содержит два таких оператора P, Q с постоянными старшими коэффициентами, что $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (0, k)$ (см. определение 24) и $\mathrm{ord}_\Gamma(L) = (1, l)$ для некоторых $k, l \in \mathbb{Z}$.

Кольцо B называется α-квази-эллиптическим, если P, Q удовлетворяют условию A_α.

Определение 31. Скажем, что коммутирующие операторы с постоянными равными 1 старшими коэффициентами $P, Q \in \hat{E}_+$, где $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (0, k)$, $\mathrm{ord}_\Gamma(Q) = (1, l)$, почти нормализованы, если

$$P = \partial_2^k + \sum_{s=-\infty}^{k-1} p_s \partial_2^s \quad Q = \partial_1 \partial_2^l + \sum_{s=-\infty}^{l-1} q_s \partial_2^s,$$

где $p_s, q_s \in \hat{D}_1$.

Скажем, что P, Q нормализованы, если

$$P = \partial_2^k + \sum_{s=-\infty}^{k-2} p_s \partial_2^s \quad Q = \partial_1 \partial_2^l + \sum_{s=-\infty}^{l-1} q_s \partial_2^s,$$

где $p_s, q_s \in \hat{D}_1$.

Лемма 16. *Для любых двух операторов с постоянными равными 1 старшими коэффициентами $P, Q \in \hat{D}$ порядков $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (0, k)$, $\mathrm{ord}_\Gamma(Q) = (1, l)$ имеет место:*

1. *(a) Существует обратимая функция $f \in k[[x_1, x_2]]$, такая что операторы $f^{-1}Pf, f^{-1}Qf$ почти нормализованы.*

   (b) Существует оператор $S = f + S^-$, где $S^- \in \hat{D}_1 \partial_1 \subset \hat{E}_+$ и $f \in k[[x_1, x_2]]$ обратима, такой что операторы $S^{-1}PS, S^{-1}QS$ нормализованы.

   (c) Если S_1 — другой оператор с таким свойством, то $S^{-1}S_1 \in k$.

2. *(a) Если P, Q удовлетворяют условию A_α, то почти нормализованные операторы из 1a также удовлетворяют A_α.*

   (b) Если P, Q удовлетворяют условию A_α с $\alpha = 1$, то S в 1b удовлетворяет условию A_α. В этом случае нормализованные операторы из 1b также удовлетворяют A_α.

Доказательство Сначала покажем, что существует функция $f \in k[[x_1, x_2]]^*$, такая что

$$f^{-1}Pf = \partial_2^k + \sum_{s=0}^{k-1} p'_s \partial_2^s, \quad f^{-1}Qf = \partial_1 \partial_2^l + \sum_{s=0}^{l-1} q'_s \partial_2^s. \tag{3.8}$$

Пусть $Q = \sum_{s=0}^{l} q_s \partial_2^s$ и $q_l = \partial_1 \partial_2^l + g$. Простые прямые вычисления показывают, что для любой функции $f \in k[[x_1, x_2]]^*$ имеют место равенства

$$f^{-1}Pf = \partial_2^k + \sum_{s=0}^{k-1} p'_s \partial_2^s, \quad f^{-1}Qf = \partial_2^l(\partial_1 + f^{-1}\partial_1(f) + g) + \sum_{s=0}^{l-1} q'_s \partial_2^s$$

для некоторых коэффициентов $p'_s, q'_s \in \hat{D}_1$. Следовательно, можно найти необходимую функцию в виде $f = \exp(-\int g dx_1)$.

Таким образом, мы сводим проблему к операторам P, Q, которые имеют вид правых частей равенств (3.8). Аналогично рассуждая, можно найти такую функцию $f \in k[[x_2]]^*$, что, начиная с таких операторов, мы получим равенства

$$f^{-1}Pf = \partial_2^k + \sum_{s=0}^{k-1} p'_s \partial_2^s, \quad f^{-1}Qf = \partial_1 \partial_2^l + \sum_{s=0}^{l-1} q'_s \partial_2^s, \tag{3.9}$$

где ряд p'_{k-1} не имеет свободного члена. И опять прямые вычисления показывают, что для любой функции $f \in k[[x_2]]^*$ имеют место формулы

$$f^{-1}Pf = \partial_2^k + \sum_{s=0}^{k-1} p'_s \partial_2^s, \quad f^{-1}Qf = \partial_2^l(\partial_1 + f^{-1}\partial_1(f) + g) + \sum_{s=0}^{l-1} q'_s \partial_2^s,$$

где $p'_{k-1} = p_{k-1} + kf^{-1}\partial_2(f)$ (заметим, что f коммутирует с p_s). Так как $[P, Q] = 0$, должно выполняться $\partial_1(p_{k-1}) = 0$. Следовательно, можно найти искомую функцию $f \in k[[x_2]]^*$.

Заметим, что любая функция $f \in k[[x_1, x_2]]^*$, сохраняющая два оператора вида (3.9), должна быть константой. Это немедленно следует из формул выше.

Таким образом, мы свели проблему к операторам P, Q, которые выглядят как правые части равенств в (3.9). Покажем, что существует оператор $S = 1 + S^-$, $S^- \in \hat{D}_1\partial_1$, такой что

$$S^{-1}PS = \partial_2^k + \sum_{s=0}^{k-2} p'_s \partial_2^s, \quad S^{-1}QS = \partial_1\partial_2^l + \sum_{s=0}^{l-1} q'_s \partial_2^s. \tag{3.10}$$

Так как $\partial_1(p_{k-1}) = 0$, то можно искать такой оператор S, что $\partial_1(S) = 0$. Прямые вычисления (заметим, что S коммутирует с p_{k-1}) показывают, что для такого оператора

$$S^{-1}PS = \partial_2^k + (p_{k-1} + kS^{-1}\partial_2(S))\partial_2^{k-1} + \sum_{s=0}^{k-2} p'_s \partial_2^s, \quad S^{-1}QS = \partial_1\partial_2^l + \sum_{s=0}^{l-1} q'_s \partial_2^s.$$

Следовательно, мы можем найти искомый оператор в форме $S = \exp(-\int p_{k-1}/k dx_2)$. Так как p_{k-1} без свободного члена, $\partial_1(p_{k-1}) = 0$, и существует интеграл $(-\int p_{k-1}/k dx_2)$ с нормированием по x_2 $\mathrm{ord}_{M_2}(-\int p_{k-1}/k dx_2) > 0$, то эта экспонента корректно определена, и $S \in \hat{D}_1$.

Заметим, что оператор S, сохраняющий нормализованные операторы P, Q, должен быть оператором с постоянными коэффициентами. Это легко следует из вышеприведенных вычислений. Так как он обратим, он должен быть константой. Объединяя все аргументы вместе, мы получаем доказательство пунктов 1, 1c.

Доказательство пункта 2a немедленно следует из леммы 14.

Чтобы доказать пункт 2b заметим, что, согласно замечанию 16, коэффициент p_{k-1} удовлетворяет условию AA_α. Следовательно, интеграл $(-\int p_{k-1}/k dx_2)$ (см. выше) удовлетворяет условию $AA_{\alpha-1}$. Так как в нашем случае $\alpha = 1$, мы получаем что S удовлетворяет условию AA_0 как сумма операторов удовлетворяющих AA_0, поскольку $(-\int p_{k-1}/k dx_2)^s$ удовлетворяет AA_0 в силу леммы 13. Отсюда тогда следует, что S удовлетворяет A_α. Остаток доказательства следует из леммы 14 и следствия 6.

Лемма 17. *Пусть $L_1, L_2 \in \hat{E}_+$ — коммутирующие почти нормализованные операторы со старшими коэффициентами 1 порядков $\mathrm{ord}_\Gamma(L_2) = (0, 1)$, $\mathrm{ord}_\Gamma(L_1) = (1, 0)$:*

$$L_1 = \partial_1 + \sum_{q=1}^{\infty} v_q \partial_2^{-q}, \quad L_2 = \partial_2 + \sum_{q=0}^{\infty} u_q \partial_2^{-q}.$$

Тогда

1. (a) *существует оператор $S = 1 + S^-$, где $S^- \in \hat{D}_1[[\partial_2^{-1}]]\partial_2^{-1}$, такой что $S^{-1}\partial_1 S = L_1$, $S^{-1}L_{20}S = L_2$, где $L_{20} = \partial_2 + u_0$.*

   (b) *Если S_1 — другой оператор с таким свойством, то $S^{-1}S_1 \in k[\partial_1]((L_{20}^{-1}))$.*

2. *Если $L_1, L_2 \in \hat{E}_+ \cap E$, то $S \in \hat{E}_+ \cap E$.*

3. (a) *Если L_1, L_2 удовлетворяют условию A_α, где $\alpha \geq 1$, то существует S, удовлетворяющий условию $A_{2\alpha-1}$; в частности, если $\alpha = 1$, то S удовлетворяет A_α.*
   (b) *Если S_1 — другой оператор с таким свойством, то $S^{-1}S_1 \in k[\partial_1]((L_{20}^{-1}))$ и удовлетворяет $A_{2\alpha-1}$.*

Доказательство 1a. Достаточно доказать следующий факт: если

$$L_1 = \partial_1 + \sum_{q=k}^{\infty} v_q \partial_2^{-q}, \quad L_2 = \partial_2 + u_0 + \sum_{q=k}^{\infty} u_q \partial_2^{-q}, \quad [L_1, L_2] = 0,$$

то существует оператор $S_k = 1 + s_k \partial_2^{-k}$, такой что

$$S_k^{-1} L_1 S_k = \partial_1 + \sum_{q=k+1}^{\infty} v'_q \partial_2^{-q}, \quad S_k^{-1} L_2 S_k = \partial_2 + u_0 + \sum_{q=k+1}^{\infty} u'_q \partial_2^{-q}.$$

Действительно, если этот факт доказан, то $S^{-1} = \prod_{q=1}^{\infty} S_k$, где S_1 берется для исходных операторов L_1, L_2, S_2 берется для операторов $S_1^{-1} L_1 S_1, S_1^{-1} L_2 S_1$, и так далее.

Чтобы доказать этот факт, заметим сначала, что, поскольку $[L_1, L_2] = 0$, должно выполняться $\partial_2(v_k) - \partial_1(u_k) + [u_0, v_k] = 0$ и $\partial_1(u_0) = 0$. Далее,

$$S_k^{-1} \partial_1 S_k = \partial_1 + S_k^{-1} \partial_1(S_k) = \partial_1 + \partial_1(s_k) \partial_2^{-k} + \dots,$$

$$S_k^{-1} L_{20} S_k = \partial_2 + S_k^{-1} \partial_2(S_k) + S_k^{-1} u_0 S_k = \partial_2 + (\partial_2(s_k) + [u_0, s_k]) \partial_2^{-k} + \dots,$$

откуда s_k может быть найден из следующей системы:

$$\partial_1(s_k) = -v_k \quad \partial_2(s_k) + [u_0, s_k] = -u_k. \tag{3.11}$$

Эта система разрешима, поскольку $\partial_2(v_k) - \partial_1(u_k) + [u_0, v_k] = 0$ и $\partial_1(u_0) = 0$ и все коэффициенты у u_k, v_k лежат в $k[[x_1, x_2]]$.

1b. Если S_1 — другой оператор с таким свойством, то должны выполняться равенства $[S^{-1}S_1, \partial_1] = 0$, $[S^{-1}S_1, L_{20}] = 0$. Заметим, что любой элемент в $\hat{E}_+$ может быть записан как ряд из кольца $\hat{D}_1((L_{20}^{-1}))$. Предположим, что $S^{-1}S_1$ записан в виде такого ряда. Так как $[\partial_1, L_{20}] = 0$, первое условие дает равенство $\partial_1(S^{-1}S_1) = 0$, т.е. коэффициенты $S^{-1}S_1$ не зависят от x_1.

Теперь пусть $S^{-1}S_1 = \sum_{q=0}^{\infty} s_q L_{20}^{-q}$ и предположим, что s_k — первый коэффициент, такой что $[s_k, L_{20}] \neq 0$. Тогда

$$0 = [S^{-1}S_1, L_{20}] = [s_k, L_{20}] L_{20}^{-k} + \text{члены высшего порядка},$$

откуда $[s_k, L_{20}] = 0$, противоречие. Но $[s_k, L_{20}] = -\partial_2(s_k)$, поскольку $\partial_1(s_k) = 0$ и следовательно $[s_k, u_0] = 0$. Таким образом, мы получаем что коэффициенты ряда $S^{-1}S_1$ не зависят от x_2.

Это означает, что коэффициенты у $S^{-1}S_1$ должны лежать в k. Тогда из определения кольца $\hat{E}_+$ следует, что $S^{-1}S_1 \in k[\partial_1]((L_{20}^{-1}))$.

2. Доказательство такое же как в 1a.

3. В силу следствия 6, доказательство пункта 3 будет следовать из доказательства пункта 1a, если мы покажем, что операторы S_k удовлетворяют условию $A_{2\alpha-1}$. Чтобы доказать это, нужно показать, что существует решение s_k в (3.11), удовлетворяющее условию $AA_{(2\alpha-1)k}$. Но каждое решение в (3.11) можно записать в виде

$$s_k = -\int v_k dx_1 + \int (\int \partial_2(v_k) dx_1 - u_k + [u_0, \int v_k dx_1]) dx_2. \tag{3.12}$$

Мы знаем что u_k удовлетворяет условию $AA_{\alpha(1+k)}$ и v_k удовлетворяет условию $AA_{\alpha k+1}$. Значит, существует интеграл $\int v_k dx_1$, удовлетворяющий $AA_{\alpha k}$. Тогда по лемме 13 $[u_0, \int v_k dx_1]$ удовлетворяет $AA_{\alpha(k+1)}$. Член $\int \partial_2(v_k)dx_1$ будет снова удовлетворять условию $AA_{\alpha k+1}$. Так как $\alpha(k+1) \geq \alpha k+1$, мы получаем, что член $(\int \partial_2(v_k)dx_1 - u_k + [u_0, \int v_k dx_1])$ будет удовлетворять условию $AA_{\alpha(k+1)}$. Тогда существует интеграл $\int(\int \partial_2(v_k)dx_1 - u_k + [u_0, \int v_k dx_1])dx_2$ удовлетворяющий $AA_{\alpha(1+k)-1}$. Так как $\alpha(1+k)-1 \geq \alpha k$, мы получаем, что s_k будет удовлетворять $AA_{\alpha(1+k)-1}$. Но $(2\alpha-1)k \geq \alpha(1+k)-1$, поэтому существует s_k удовлетворяющий $AA_{(2\alpha-1)k}$.

В качестве следствия теории Шура получается следующий результат о "чистоте"1-квази-эллиптических подколец дифференциальных операторов в частных производных:

Предложение 2. *Пусть $B \subset D \subset \hat{D}$ — 1-квази-эллиптическое кольцо коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных. Тогда любое кольцо $B' \subset \hat{D}$ коммутирующих операторов, такое что $B' \supset B$, — кольцо дифференциальных операторов в частных производных, т.е. $B' \subset D$.*

Доказательство Если $B \subset D$, то в силу леммы 17 пункт 1b оператор S, такой что $SBS^{-1} = A \subset k[\partial_1]((\partial_2^{-1}))$, принадлежит E. Так как B' — 1-квази-эллиптическое кольцо, имеем также: $SB'S^{-1} \subset k[\partial_1]((\partial_2^{-1})) \subset E$. Следовательно, $B' \subset \hat{D} \cap E = D$.

3.4 Классификация подколец коммутирующих операторов в терминах пар Шура

В этом разделе классифицируются 1-квази-эллиптические кольца коммутирующих операторов в терминах подпространств определенного вида (пар Шура) двумерного локального поля $V = k((z_1))((z_2))$. Для этого доказываются аналоги теорем Сато (описывающих соответствие между точками большой клетки грассманиана Сато и операторами из группы Вольтерра) для подпространств в V, снабженном стандартной топологией.

3.4.1 Аналог теоремы Сато в размерности 2

В этом параграфе мы будем работать с кольцом $E = k[[x_1, x_2]]((\partial_1^{-1}))((\partial_2^{-1}))$.

Предложение 3. *Пусть $W_0 = k[z_1^{-1}, z_2^{-1}] \subset V$ — линейное пространство. Тогда $D \subset E$ можно описать следующим образом:*

$$D = \{A \in E \quad | \quad W_0 A \subseteq W_0\}.$$

Доказательство Очевидно, что $D \subset \{A \in E | W_0 A \subset W_0\}$. Для элемента $A \in E$ обозначим через A_+ сумму всех мономов в A, принадлежащих D, и положим $A_- = A - A_+$. Если $A \in E$ и $A \notin D$, то $A_- \neq 0$. В этом случае имеем

$$0 \neq z^{-\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(A_-)} A_- = \partial^{\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(A_-)}(A_-)(0) \notin W_0,$$

где равенство имеет место, поскольку $\partial^{\beta}(A_-)(0) = 0$ при $\beta < \operatorname{ord}_{M_1,M_2}(A_-)$. Так как $z^{-\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(A_-)} A_+ \in W_0$, то $z^{-\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(A_-)} A \notin W_0$. Таким образом, если A сохраняет W_0, A должно быть в D.

Предложение 4. *Имеем: $\hat{D} = \{A \in \hat{E} | W_0 A \subset W_0\}$ (здесь $W_0 = k[z_1^{-1}, z_2^{-1}] \subset W$).*

Доказательство такое же, как и доказательство предложения 3.

Напомним определение носителя k-подпространства в пространстве $k((z_1))((z_2))$.

Определение 32. Носитель k-подпространства W в пространстве $k((z_1))((z_2))$ — замкнутое k-подпространство $\mathrm{Supp}(W)$ в пространстве $k((z_1))((z_2))$, порожденное $\mathrm{LT}(a)$ для всех $a \in W$.

В размерности 1 известна теорема Сато (см. например [107], appendix), которая описывает соответствие между точками большой клетки грассманиана Сато и операторами из группы Вольтерра. Мы можем доказать следующий аналог этой теоремы в размерности два.

Теорема 19. *Для всякого замкнутого k-подпространства $W \subset k[z_1^{-1}]((z_2))$ с носителем $\mathrm{Supp}(W) = W_0 = k[z_1^{-1}, z_2^{-1}]$ существует единственный оператор $S = 1 + S^-$, где $S^- \in \hat{D}_1[[\partial_2^{-1}]]\partial_2^{-1}$, такой что $W_0 S = W$.*

Доказательство Заметим, что любой оператор $S = 1 + S^-$, где $S^- \in \hat{D}_1[[\partial_2^{-1}]]\partial_2^{-1}$, — обратим, $S^{-1} = 1 - S^- + (S^-)^2 - \ldots$. Если имеется два оператора S_1, S_2 такого типа, то $S_1 S_2 - 1 \in \hat{D}_1[[\partial_2^{-1}]]\partial_2^{-1}$.

Единственность: если есть два таких оператора S, S', то $W_0 = W_0 S' S^{-1}$, отсюда по предложению 4 $S' S^{-1} \in \hat{D}$. Таким образом, $S' S^{-1} = 1$.

Существование: для любых $(k,l) \in \mathbb{Z}_+ \oplus \mathbb{Z}_+$ должно выполняться $z_1^{-k} z_2^{-l} S \in W$. Из определения действия имеем:

$$z_1^{-k} z_2^{-l} S = \partial_1^k \partial_2^l (S)(0) + \sum, \tag{3.13}$$

где $\sum$ — конечная сумма элементов следующего типа: $const \cdot z_1^{-m} z_2^{-n} \partial_1^p \partial_2^q (S)(0)$ где $m \le k$, $n \le l$, $p \le k$, $q \le l$ и $m + p = k$, $n + q = l$.

Будем называть ряды $\partial_1^k \partial_2^l (S)(0)$ (k,l)-слоями оператора S. Заметим, что S однозначно определен своими (k,l)-слоями, где $k, l \ge 0$: (k,l)-слой — это ряд из коэффициентов при $x_1^k x_2^l$,

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} x_1^k x_2^l \partial_1^k \partial_2^l (S)(0).$$

Из формулы (3.13) следует, что (k,l)-слой S однозначно определен элементом $z_1^{-k} z_2^{-l} S \in W$ и такими (p,q)-слоями, что $(p,q) < (k,l)$.

Мы знаем, что $\mathrm{ord}_\Gamma(z_1^{-k} z_2^{-l} S) = (k,l)$. Рассмотрим базис $\{w_{i,j}, i,j \ge 0\}$ в W со свойством $w_{i,j} = z_1^{-i} z_2^{-j} + w_{i,j}^-$, где $w_{i,j}^- \in k[z_1^{-1}][[z_2]]z_2$ (заметим, что такой базис однозначно определен). Тогда с одной стороны

$$z_1^{-k} z_2^{-l} S = \sum_{0 \le (i,j) \le (k,l)} b_{i,j} w_{i,j}, \quad b_{i,j} \in k.$$

С другой стороны

$$\sum = \sum_{0 \le (i,j) \le (k,l)} a_{i,j} z_1^{-i} z_2^{-j} + \sum_{-}, \quad \text{где } \sum_{-} \in k[z_1^{-1}][[z_2]]z_2,$$

и $\partial_1^k \partial_2^l (S)(0) \in k[z_1^{-1}][[z_2]]z_2$. Таким образом, должно быть $b_{i,j} = a_{i,j}$, и следовательно элемент $z_1^{-k} z_2^{-l} S$ однозначно определяется по $\sum$.

Итак, начиная с $(k,l) = (0,0)$, мы находим сначала $(0,0)$-слой, затем, по индукции, мы находим $(k,0)$-слой для каждого $k > 0$, и затем, опять по индукции, мы находим (k,l)-слой для каждой пары (k,l).

Теорема 20. *Пусть W — k-подпространство: $W \subset k[z_1^{-1}]((z_2))$ и $\mathrm{Supp}(W) = W_0$. Пусть $\{w_{i,j}, i, j \geq 0\}$ — базис в W, однозначно определенный условиями $w_{i,j} = z_1^{-i} z_2^{-j} + w_{i,j}^-$, где $w_{i,j}^- \in k[z_1^{-1}][[z_2]]z_2$. Предположим, что все элементы $w_{i,j}$ удовлетворяют условию A_α с $\alpha \geq 1$.*

Тогда существует единственный оператор $S = 1 + S^-$ удовлетворяющий условию A_α, где $S^- \in \hat{D}_1[[\partial_2^{-1}]]\partial_2^{-1}$, такой что $W_0 S = W$.

Доказательство Мы можем повторить доказательство теоремы 19, чтобы показать, что в нашей ситуации S удовлетворяет A_α. Заметим, что S удовлетворяет A_α, если каждый (k, l)-слой удовлетворяет условию A_α для порядка (k, l).

Чтобы это показать, используем индукцию по (k, l). Имеем: $(0, 0)$-слой равен $w_{0,0}$, следовательно он удовлетворяет условию A_α для $(0, 0)$. Предположим, что каждый (p, q)-слой с $p \leq k$, $q \leq l$ и $(p, q) \neq (k, l)$ удовлетворяет A_α для порядка (p, q). Тогда из формулы (3.13) следует, что (k, l)-слой удовлетворяет условию A_α для порядка (k, l), так как каждый элемент $w_{i,j}$ удовлетворяет A_α (ср. следствие 7).

Следствие 8. *Пусть W — подпространство из теоремы. Пусть $A \subset k[z_1^{-1}]((z_2))$ — кольцо, такое что $WA \subset W$. Тогда имеется вложение $SAS^{-1} \subset \hat{D}$ (здесь мы отождествляем кольцо $k[z_1^{-1}]((z_2))$ и $k[\partial_1]((\partial_2^{-1}))$, см. определение 16).*

Доказательство Ясно, что $W_0 SAS^{-1} \subset W_0$. Тогда, в силу предложения 4, $SAS^{-1} \in \hat{D}$.

3.4.2 Классификация в терминах пар Шура

Теперь мы готовы описать классификацию удовлетворяющих некоторым условиям колец коммутирующих операторов. А именно, мы можем сделать это для всех 1-квази-эллиптических колец (см. ниже). Сначала покажем, что большое количество примеров колец коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных являются 1-квази-эллиптическими после замены координат.

А именно, рассмотрим кольцо B коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных, которое содержит два оператора P, Q с постоянными главными символами и удовлетворяющее условиям предложения 1. Операторы P, Q удовлетворяют условию A_1 для порядка (k, l) и порядка (n, m) соответственно, где $k + l = \mathbf{ord}(P)$, $n + m = \mathbf{ord}(Q)$. В силу леммы 12 в B существуют (после подходящей замены переменных) два оператора P, Q специального вида, описанного в этой лемме (мы используем здесь то же обозначение для P, Q, чтобы подчеркнуть, что эти операторы удовлетворяют условиям 3.2 и 3.4 леммы 12; мы надеемся, что это не приведет к недоразумению читателя). В частности, они удовлетворяют условию A_1, и кольцо B (после подходящей замены переменных) становится 1-квази-эллиптическим. Более того, применяя предложение 1, мы видим, что B (после подходящей замены переменных) становится строго допустимым.

Рассмотрим теперь 1-квази-эллиптическое кольцо коммутирующих операторов $B \subset \hat{D}$ (см. определение 30), и пусть P, Q — операторы с единичным старшим коэффициентом из B порядков $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (0, k)$, $\mathrm{ord}_\Gamma(Q) = (1, l)$. По лемме 15 существуют однозначно определенные операторы L_1, L_2, такие что $L_2^k = P$, $L_1 L_2^{l-1} = Q$, и эти операторы удовлетворяют условию A_1.

В силу леммы 16, 2b мы можем предполагать, что они нормализованы. Тогда по лемме 17 существует оператор S удовлетворяющий условию A_1, и $SL_1S^{-1} = \partial_1$, $SL_2S^{-1} = \partial_2$.

Лемма 18. *Пусть X — оператор, коммутирующий с P, Q. Тогда он коммутирует также с L_1, L_2.*

Доказательство Имеем:

$$0 = [P, X] = \sum_{q=0}^{k-1} L_2^q [L_2, X] L_2^{k-1-q},$$

и $\mathrm{HT}(L_2^q) = \partial_2^q$. Если $[L_2, X] \neq 0$, то $\mathrm{HT}([L_2, X]) \neq 0$ (чтобы это увидеть, здесь достаточно рассмотреть старший член оператора в $\hat{D}_1((\partial_2^{-1})) = \hat{E}_+$ относительно ∂_2), откуда $\mathrm{HT}([P, X]) = k\,\mathrm{HT}([L_2, X])\partial_2^{k-1} \neq 0$, противоречие. Таким образом, $[L_2, X] = 0$. Тогда также $[L_1, X] = 0$, поскольку $0 = [Q, X] = [L_1, X]L_2^{l-1}$.

Следствие 9. *(ср. теор. 18) Множество коммутирующих с P, Q операторов — коммутативное кольцо. Более того, все эти операторы принадлежат кольцу Π_1 (см. следствие 7).*

Доказательство Действительно, если X коммутирует с P, Q, то он коммутирует с L_1, L_2, и следовательно SXS^{-1} коммутирует с ∂_1, ∂_2, откуда следует, что SXS^{-1} — оператор с постоянными коэффициентами. Следовательно, любые два оператора, коммутирующие с P, Q, должны коммутировать друг с другом.

Чтобы доказать второе утверждение рассмотрим пространство W_0S^{-1}, где $W_0 = \langle z_1^{-i} z_2^{-j} \quad | i, j \geq 0 \rangle$. Так как S удовлетворяет условию A_1, то в силу следствия 6 S^{-1} удовлетворяет A_1, и, по определению действия, элемент $z_1^{-k} z_2^{-l} S^{-1}$ также удовлетворяет A_1 для всех $k, l \geq 0$. Заметим также, что $(W_0S^{-1})(SXS^{-1}) \subset (W_0S^{-1})$. Так как $\mathrm{Supp}(W_0S^{-1}) = \mathrm{Supp}(W_0)$, то существует базис $\{w_{i,j}, i, j \geq 0\}$ в W_0S^{-1}, однозначно определенный условиями $w_{i,j} = z_1^{-i} z_2^{-j} + w_{i,j}^-$, где $w_{i,j}^- \in k[z_1^{-1}][[z_2]]z_2$, и все элементы $w_{i,j}$ удовлетворяют условию A_1. Следовательно, оператор $w_{0,0}(SXS^{-1})$ является конечной суммой элементов $w_{i,j}$. А значит, он принадлежит Π_1 (ср. доказательство следствия 7), и следовательно $SXS^{-1} \in \Pi_1$ по лемме 14.

Итак, стартовав с 1-квази-эллиптического кольца B мы получили кольцо операторов с постоянными коэффициентами $A = SBS^{-1} \in \Pi_1$ и пространство $W = W_0S^{-1}$, $WA \subset W$, со специальным свойством. Обратное также верно по теореме 20. Теорема 20 и лемма 17 побуждают дать следующие определения:

Определение 33. Подпространство $W \subset k[z_1^{-1}]((z_2))$ называется α-пространством, если существует такой базис w_i в W, что w_i удовлетворяют условию A_α для всех i.

Определение 34. Скажем, что пара подпространств (A, W), где $A, W \subset k[z_1^{-1}]((z_2))$ и A — k-алгебра с единицей, причем $WA \subset W$, — α-пара Шура, если $A \subset \Pi_\alpha$ (см. следствие 7) и W — α-пространство.

Скажем, что α-пара Шура α-квази-эллиптична, если A — α-квази-эллиптическое кольцо (см. опр. 30; мы отождествляем здесь кольцо $k[z_1^{-1}]((z_2))$ с кольцом $k[\partial_1]((\partial_2^{-1}))$ через соответствие $z_1 \mapsto \partial_1^{-1}$, $z_2 \mapsto \partial_2^{-1}$).

Определение 35. (ср. [151, def.1]) Оператор $T \in \hat{E}_+$ называется допустимым, если он обратим, порядка нуль, и такой что $T\partial_1T^{-1}$, $T\partial_2T^{-1} \in k[\partial_1]((\partial_2^{-1}))$. Множество всех допустимых операторов обозначим через Adm (ср. классификацию допустимых операторов в [151, lemma 7]).

Оператор $T \in \hat{E}_+$ называется α-допустимым, если он допустим и удовлетворяет условию A_α (в этом случае по лемме 14 имеем $T\partial_1T^{-1}$, $T\partial_2T^{-1} \in \Pi_\alpha$. Множество всех α-допустимых операторов обозначим через Adm_α.

Скажем, что две α-пары Шура (A, W) и (A', W') эквивалентны, если $A' = T^{-1}AT$ и $W' = WT$, где T — допустимый оператор.

Лемма 19. *Всякий 1-допустимый оператор имеет вид $T = ST_0$, где $S = 1 + S^-$, $S^- \in R[\partial_1][[\partial_2^{-1}]]\partial_2$ — 1-допустимый оператор,*

$$T_0 = c_0 \exp(c_1 x_2 \partial_1) \exp(c_2 x_2 + c_3 x_1) \in \hat{D}_1,$$

с $c_0, c_1, c_2, c_3 \in k$.

Доказательство В силу леммы 17 любые два оператора с постоянными коэффициентами L_1, L_2 вида

$$L_1 = \partial_1 + \sum_{q=1}^{\infty} v_q \partial_2^{-q}, \quad L_2 = \partial_2 + \sum_{q=1}^{\infty} u_q \partial_2^{-q}$$

и удовлетворяющие условию A_1 получаются с помощью сопряжения $L_1 = S^{-1}\partial_1 S$, $L_2 = S^{-1}\partial_2 S$, где $S = 1 + S^- \in k[[x_1, x_2]][\partial_1]((\partial_2^{-1}))$ — обратимый 1-допустимый оператор.

С другой стороны, как легко проверить, для оператора

$$T_0 = c_0 \exp(c_1 x_2 \partial_1) \exp(c_2 x_2 + c_3 x_1) \in \hat{D}_1, \tag{3.14}$$

где $c_0, c_1, c_2, c_3 \in k$, имеем

$$T_0^{-1}\partial_1 T_0 = \partial_1 + c_3, \quad T_0^{-1}\partial_2 T_0 = \partial_2 + c_1\partial_1 + c_1 c_3 + c_2.$$

Таким образом, любой 1-допустимый оператор может быть записан в виде $T = ST_0$.

Определение 36. Коммутативные α-квази-эллиптические кольца B_1, $B_2 \subset \hat{D}$ эквивалентны, если существует обратимый оператор $S \in \hat{D}_1$ как в лемме 16 пункт 1b, такой что $B_1 = SB_2S^{-1}$.

Следующая лемма проясняет структуру элементов в кольце, обладающем парой нормализованных операторов, а также в любом эквивалентном ему кольце.

Лемма 20. *i) Если кольцо $B \subset \Pi_1 \cap \hat{D}$ коммутирующих операторов содержит пару нормализованных операторов P, Q порядков $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (0, k)$, $\mathrm{ord}_\Gamma(Q) = (1, l)$ ($k > 0$), то у всех операторов в B старшие коэффициенты постоянны, т.е если $L = \sum_{s=0}^{N} l_s \partial_2^s$, то l_N — оператор с постоянными коэффициентами. В частности, $l_N \in D_1$ (т.е. имеет конечный порядок).*

Более того, любой оператор $P' \in B$ порядка $\mathrm{ord}_\Gamma(P') = (0, m)$ имеет вид

$$P' = \sum_{s=0}^{m} p'_s \partial_2^s, \quad \text{где } p'_m \in k \text{ и } p'_{m-1} \text{ имеет постоянные коэффициенты}$$

и любой оператор $Q' \in B$ порядка $\mathrm{ord}_\Gamma(Q') = (1, n)$ имеет вид

$$Q' = \sum_{s=0}^{n} q'_s \partial_2^s, \quad \text{где } q'_n = c_1\partial_1 + c_0,\ c_0, c_1 \in k.$$

ii) Если $B' = S^{-1}BS$, где $S \in \hat{D}_1$, — эквивалентное 1-квазиэллиптическое кольцо, содержащее пару нормализованных операторов P', Q' порядков $\mathrm{ord}_\Gamma(P') = (0, k')$, $\mathrm{ord}_\Gamma(Q') = (1, l')$ ($k' > 0$), то S имеет вид

$$S = c_0 \exp(c_1 x_2 \partial_1) \exp(c_2 x_2 + c_3 x_1) \in \hat{D}_1,$$

где $c_0, c_1, c_2, c_3 \in k$ (ср. лемму 19).

Доказательство i) Имеем

$$0 = [P, P'] = k\partial_2(p'_m)\partial_2^{k+m-1} + k\partial_2(p'_{m-1})\partial_2^{k+m-2} + [p_{k-2}, p'_m]\partial_2^{k+m-2} + \text{члены младшей степени.} \quad (3.15)$$

Следовательно $\partial_2(p'_m) = 0$, т.е. p'_m не зависит от x_2. Тогда

$$0 = [Q, P'] = [\partial_1, p'_m]\partial_2^{m+l} + [\partial_1, p'_{m-1}]\partial_2^{l+m-1} + [q_{l-1}, p'_m]\partial_2^{l+m-1} + \text{члены младшей степени.} \quad (3.16)$$

Отсюда $[\partial_1, p'_m] = 0$ и следовательно p'_m должен быть оператором с постоянными коэффициентами. Таким образом, $p'_m \in D_1$ (и, очевидно, эти рассуждения работают для любого оператора из B). Так как $\mathrm{ord}_\Gamma(P') = (0, m)$, то p'_m — константа, и так как $\mathrm{ord}_\Gamma(Q') = (1, n)$, то q'_n должен быть многочленом первой степени. Но тогда из (3.16) получаем $[\partial_1, p'_{m-1}] = 0$, т.е. p'_{m-1} не зависит от x_1, и из (3.15) получаем $\partial_2(p'_{m-1}) = 0$, т.е. p'_{m-1} должен быть оператором с постоянными коэффициентами.

ii) Имеем $P' = S^{-1}\tilde{P}S$, $Q' = S^{-1}\tilde{Q}S$ для некоторых операторов $\tilde{P}$, $\tilde{Q} \in B$. Так как S обратим, мы, очевидно, имеем

$$S = c \in k^* \qquad \mathrm{mod}\ (x_1, x_2).$$

Следовательно, так как по пункту i) старшие члены операторов $\tilde{P}, \tilde{Q}$ — операторы с постоянными коэффициентами, должно быть $\mathrm{ord}_\Gamma(\tilde{P}) = (0, k')$ и $\mathrm{ord}_\Gamma(\tilde{Q}) = (1, l')$. Из леммы 19 мы знаем, что существует оператор S_0 вида $\exp(cx_1)$ такой что $S_0^{-1}\tilde{q}_{l'}S_0 = \partial_1$ (здесь $\tilde{q}_{l'}$ — линейный многочлен с постоянными коэффициентами). Тогда, очевидно, оператор $S' = SS_0^{-1}$ не зависит от x_1. Таким образом, $S = S'S_0$.

Из леммы 15 мы знаем, что $\tilde{P}, \tilde{Q} \in \Pi_1$, и из пункта i) мы знаем, что $\tilde{p}_{k'}, \tilde{p}_{k'-1}$ — операторы с постоянными коэффициентами (и $\tilde{p}_{k'} = \partial_2^{k'}$). Таким образом, S' имеет вид

$$S' = \exp(F(x_2, \partial_1)),$$

где F — многочлен от x_2, ∂_1. Этот многочлен линеен если и только если $\tilde{p}_{k'-1}$ линеен. Но если он не линеен, то оператор $(S')^{-1}\tilde{P}S'$ не будет удовлетворять условию A_1 (так как $\tilde{P}$ удовлетворяет A_1 при некоторых (k, l)), противоречие. Значит, он линеен, ч.т.д.

Замечание 17. Из леммы непосредственно следует, что если B содержит пару нормализованных операторов, то любое эквивалентное ему кольцо B', содержащее пару нормализованных операторов, получается из B сопряжением на оператор специального вида, и это сопряжение эквивалентно линейной замене переменных

$$\partial_2 \mapsto \partial_2 + c\partial_1 + b, \quad \partial_1 \mapsto \partial_1 + d \tag{3.17}$$

где $c, b, d \in k$. Пара Шура, соответствующая такому кольцу B', будет также эвивалентна паре, соответствующей B.

Обратно, если взять произвольную пару Шура (A, W) в данном классе эквивалентности, то соответствующее кольцо B строится как $B = SAS^{-1}$, где S теперь определяется из аналога теоремы Сато. Если (A', W') — эквивалентная пара Шура, то $A' = T^{-1}AT$, $W' = WT$ для некоторого 1-допустимого оператора T, который может быть записан в виде (см. лемму 19) $T = T'T_0$, где T_0 имеет вид как в (3.14), и $T' = 1 + T^-$, где $T^- \in \hat{D}_1[[\partial_2^{-1}]]\partial_2^{-1}$. Теперь нетрудно видеть, что соответствующий пространству W' оператор Сато равен $S' = T_0^{-1}ST'T_0$. Тогда соответствующее кольцо $B' = S'A'(S')^{-1} = T_0^{-1}BT_0$, т.е. оно получается из B линейной заменой (3.17). Оно будет автоматически содержать пару нормализованных операторов.

Объединяя все рассуждения выше вместе, получаем:

Теорема 21. *Существует взаимно-однозначное соответствие между классами эквивалентности 1-квази-эллиптических пар Шура (A, W) из определения 35 с носителем* $\mathrm{Supp}(W) = \langle z_1^{-i} z_2^{-j} \quad | i, j \geq 0 \rangle$ *и классами эквивалентности 1-квази-эллиптических колец (см. определения 30, 36) коммутирующих операторов $B \subset \hat{D}$.*

Замечание 18. Пара (A, W) — аналог пары Шура, см. [107].

Мы ограничились рассмотрением случая 1-квази-эллиптических колец в теореме 21 только из за лемм 16, 2b о возможности нормализации. То же утверждение верно если заменить слова "1-квази-эллиптические"на "квази-эллиптические". Доказательство то же.

Если имеется кольцо $B \subset D$ коммутирующих ДО, удовлетворяющее свойству из теоремы 18, то по лемме 12 и в силу предложения 1 существует линейная замена переменных, делающая это кольцо 1-квазиэллиптическим вполне допустимым. Более того, как следует из доказательств этих утверждений, почти все линейные замены переменных сохраняют свойство кольца быть 1-квазиэллиптическим вполне допустимым. В частности, для почти всех линейных замен выполняетя следующее дополнительное свойство операторов P, Q из определения 30:

$$\sigma(P) = \xi_2^k + \sum_{q=1}^{k} h_q \xi_1^q \xi_2^{k-q}, \quad h_k \neq 0; \quad \sigma(Q) = \xi_1 \xi_2^l + \sum_{q=2}^{l+1} c_q \xi_1^q \xi_2^{l+1-q}, \quad c_{l+1} \neq 0. \tag{3.18}$$

Замечание 19. Из конструкции раздела 3.4, объясняющей соответствие между геометрическими данными и 1-квазиэллиптическими вполне допустимыми кольцами, следует, что кольцо после такой линейной замены переменных соответствует данным с теми же поверхностью и дивизором, но с возможно другими пучком, точкой P и тривиализациями π, ϕ (ср. также с замечанием 32, теоремой 18 и предложением 26).

Замечание 20. Если кольцо ДО B является 1-квазиэллиптическим вполне допустимым, то, очевидно, существуют два оператора P, Q как в определении 30 с $k = l + 1 = \mathbf{ord}(P)$. В этой ситуации, повторяя рассуждения из доказательства леммы 16, пункт 1, можно увидеть, что существуют некоторые $\beta \in k$ и $f \in k[[x_1, x_2]]^*$, такие что операторы $f^{-1}(P + \beta Q)f$, $f^{-1}Qf$ нормализованы. Значит, в классе эквивалентности кольца B мы можем найти кольцо кольцо ДО с парой нормализованных операторов.

Как показывают рассуждения из замечания 17, всякая пара Шура эквивалентная паре Шура, ассоциированной с B, соответствует кольцу B', получающемуся из B линейной заменой переменных (3.17). Таким образом, B' — тоже кольцо ДО!

3.5 Классификация в терминах геометрических данных

В этом разделе излагается классификация 1-квази-эллиптических колец коммутирующих операторов в терминах геометрических данных.

Мы собираемся установить соответствие между некоторыми 1-квази-эллиптическими парами Шура и геометрическими данными из так называемого обобщенного соответствия Кричевера-Паршина, см. [118], [23] (на самом деле, мы несколько модифицируем эти данные, см. определение 45 и замечание 27 ниже). Мы будем рассматривать не все 1-квази-эллиптические пары Шура, но лишь те, которые удовлетворяют условию строгой допустимости (см. определения ниже). Подчеркнем, что такие пары включают, в частности, все пары, происходящие из колец дифференциальных операторов в частных производных, которые упоминались в начале предыдущего параграфа. В результате мы получим соответствие между 1-квази-эллиптическими строго допустимыми кольцами коммутирующих операторов в $\hat{D}$ и геометрическими данными.

Для этого нам потребуется следующий "трюк".

Лемма 21. *Пусть W — замкнутое k-подпространство $W \subset k[z_1^{-1}]((z_2))$ с носителем $\mathrm{Supp}(W) = \langle z_1^{-i} z_2^{-j} \quad | i,j \geq 0 \rangle$. Пусть $\{w_{i,j}, i,j \geq 0\}$ — базис в W, однозначно определенный условиями $w_{i,j} = z_1^{-i} z_2^{-j} + w_{i,j}^-$, где $w_{i,j}^- \in k[z_1^{-1}][[z_2]]z_2$. Предположим, что все элементы $w_{i,j}$ удовлетворяют условию A_α с $\alpha \geq 1$.*

Тогда существует изоморфизм

$$\psi_\alpha : W \to W'$$

пространства W с замкнутым k-подпространством $W' \subset k[[u]]((t))$ с носителем $\mathrm{Supp}(W') = \langle u^i t^{-j[\alpha]-i} \quad | i,j \geq 0 \rangle$, где $[\alpha]$ — наименьшее целое число большее или равное α.

Доказательство Рассмотрим композицию отображений $z_1 \mapsto u' := z_1^{-1}$, $z_2 \mapsto t^{[\alpha]}$, и $u' \mapsto u = u't$. Согласно условиям леммы образы элементов $w_{i,j}$ будут корректно определенными элементами из $k[[u]]((t))$, композиция этих отображений является, очевидно, k-линейным отображением и изоморфизмом W на замкнутое k-подпространство $W' \subset k[[u]]((t))$ с нужными свойствами. В дальнейшем будем обозначать эту композицию через ψ_α.

Следствие 10. *Пусть W — замкнутое k-подпространство как в лемме, и пусть $\alpha = 1$. Тогда W' из леммы имеет носитель $\mathrm{Supp}(W') = \langle u^i t^{-j} \quad | i,j \geq 0, i-j \leq 0 \rangle$.*

Более того, в этом случае изоморфизм ψ_1 индуцирует изоморфизм

$$\psi_1 : k[z_1^{-1}]((z_2)) \cap \Pi_1 \to k[[u]]((t)).$$

Доказательство очевидно.

Определение 37. Обозначим через ν_t или ν_2 дискретное нормирование поля $k((u))((t))$ рядов по t. Обозначим через ν_u или ν_1 дискретное нормирование поля $k((u))$. Эти нормирования образуют нормирование ранга два $\nu = \mathrm{ord}_\Gamma$ (ср. определение 17) поля $k((u))((t))$: $\nu(a) = (\nu_u(\bar{a}), \nu_t(a))$, где $\bar{a}$ обозначает вычет элемента $at^{-\nu_t(a)}$ в кольце нормирования ν_t.

Замечание 21. Рассмотрим подпространство W в $k[[u]]((t))$ с носителем $\mathrm{Supp}(W) = \langle u^i t^{-j} \quad | i,j \geq 0, i-j \leq 0 \rangle$ (ср. следствие 10). Пусть A — стабилизатор пространства W: $A \cdot W \subset W$. Для всякого элемента $a \in A$ имеем $\mathrm{LT}(a) \in \mathrm{Supp}(W)$, поскольку для всякого элемента $w \in W$ с $\mathrm{LT}(w) = 1$ выполнено $\mathrm{LT}(aw) = \mathrm{LT}(a)$. Таким образом, $\mathrm{Supp}(A) \subset \mathrm{Supp}(W)$. Следующая общая теорема была доказана в [16].

Пусть пространство $V = k((u))((t))$, и определим подпространства $\mathcal{O}_1 = k((u))[[t]]$, $\mathcal{O}_2 = k[[u]]((t))$. Для любого целого n, для любого k-подпространства $W \subset V$ пусть $W(n) = (t^n \mathcal{O}_1 \cap W)/(t^{n+1}\mathcal{O}_1 \cap W)$. Заметим, что $W(n)$ естественным образом вкладывается в пространство $k((u))$. Определим

$$\chi(W(n)) = \dim_k(W(n) \cap k[[u]]) - \dim_k(V/(W(n) + k[[u]])$$

Теорема 22. *Пусть W — k-подпространство в пространстве V, такое что для любого целого числа n пространство $W(n)$ является Фредгольмовым подпространством в одномерном локальном поле (см. 1.34), и $\chi(W(n)) = a + bn$, где $b < 0$. Пусть кольцо A — это k-подпространство пространства V, такое что $A \supset k$, $A \cdot W \subset W$. Тогда*

a) для любого элемента $a \in A$ мы имеем $\nu_u(a) \leq b\nu_t(a)$.

b) $\mathrm{trdeg}_k \mathrm{Quot}(A \cap \mathcal{O}_2) \leq 2$, и поле $\mathrm{Quot}(A \cap \mathcal{O}_2)$ конечно порождено над основным полем k.

Доказательство a) Предположим обратное. Тогда существует элемент $x \in A$, такой что $\nu_u(x) > b\nu_t(x)$. Мы имеем $x \cdot W \subset W$ и $x \cdot W(0) \subset W(m)$. Легко увидеть, что $\chi(x \cdot W(0)) = \chi(W(0)) + \nu_u(x)$. Теперь мы имеем

$$\chi(W(m)) = a + bm < a + \nu_u(x) = \chi(W(0)) + \nu_u(x) = \chi(x \cdot W(0)) \leq \chi(W(m)),$$

то есть противоречие.

b) Вместо этого случая мы докажем более общий результат:

Лемма 22. *Пусть B — подкольцо в двумерном локальном поле V, такое что $k \subset B$ и выполняется следующее условие:*

для каждого элемента $a \in B$ мы имеем $0 \leq \nu_u(a) \leq -\pi\nu_t(a)$, $\pi > 0$.

Тогда $\mathrm{trdeg}_k \operatorname{Quot} B \leq 2$ и поле $\operatorname{Quot} B$ конечно порождено над основным полем k.

Доказательство Рассмотрим подпространство $\triangle(N) = \{a \in B | \nu_t(a) > -N\}$, где целое число $N > 0$. Отметим, что это подпространство имеет конечную размерность над полем k, и эта размерность не больше чем πN^2.

В самом деле, если эта размерность больше чем πN^2, то кольцо B должно содержать элемент x, такой что $\nu_u(x) > -\pi\nu_t(x)$, получаем противоречие.

Заметим, что $\mathrm{trdeg}_k B < 2$, если и только если $\nu_u(a) = l\nu_t(a)$ для некоторой константы l и всех элементов $a \in B$. В самом деле, если имеются два элемента a, b, такие что последнее условие не выполняется, то они должны быть алгебраически независимы, так как младшие мономы этих элементов алгебраически независимы. Обратно, если $\nu_u(a) = l\nu_t(a)$ для всех $a \in B$, то носители (мономы младших степеней) всех элементов из B лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, и поэтому можно применить аргументы из, например, [107, Prop. 3.2.], чтобы получить $\mathrm{trdeg}_k B < 2$.

Предположим теперь, что $\mathrm{trdeg}_k B \geq 2$. Выберем два элемента $a, b \in B$, такие что $\nu_u(a)/\nu_t(a) \neq \nu_u(b)/\nu_t(b)$. Это означает, что их носители не лежат на одной прямой, которая проходит через начало координат. Эти элементы существуют, так как $\mathrm{trdeg}_k B \geq 2$, и вследствие аргументов из предыдущего абзаца. Теперь, они алгебраически независимы. Мы можем оценить размерность подпространства, порожденного над полем k степенями элементов a, b, которые лежат в подпространстве $\triangle(N)$ для некоторого N. Ясно, что эта размерность больше, чем

$$\frac{1}{2} \cdot (-\frac{N}{\nu_t(a)} - 1)(-\frac{N}{\nu_t(b)} - 1)eN^2 + lN + r$$

для некоторых действительных чисел e, l, r и для каждого достаточно большого числа N. (Для получения этой оценки мы рассматриваем паллелограмм, построенный по векторам, выходящими из начала координат и заканчивающимися в точках $a^{[-N/\nu_t(a)]}$ и $b^{[-N/\nu_t(a)]}$ соотвественно.)

Теперь предположим, что поле $\operatorname{Quot} B$ имеет бесконечную размерность над полем $\operatorname{Quot} k[a, b]$. Тогда возьмём M линейно независимых над кольцом $k[a, b]$ элементов $a_1, \dots a_M$, где число M удовлетворяет условию $Me > \pi$. Без потери общности мы можем предположить, что $\nu_t(a_1) \leq \nu_t(a_i)$ для всех i. Так как размерность подпространства, порождённого над полем k степенями элементов a, b, которые лежат в подпространстве $\triangle(N + M\nu_t(a_1))$, больше чем $e(N + M\nu_t(a_1))^2 + l(N + M\nu_t(a_1)) + r$ для каждого достаточно большого числа N, то мы получим, что размерность подпространства, порождённого над полем k элементами $a_1, \dots a_M$, умноженными на степени элементов a, b, лежащие в подпространстве $\triangle(N + M\nu_t(a_1))$, больше чем $M(e(N + M\nu_t(a_1))^2 + l(N + M\nu_t(a_1)) + r)$ для каждого достаточно большого числа N. Последнее подпространство находится внутри пространства $\triangle(N)$. С другой стороны, так как $Me > \pi$, то для каждого достаточно большого числа N мы имеем

$$M(e(N+M\nu_t(a_1))^2+l(N+M\nu_t(a_1))+r)>\pi N^2>\dim_k \triangle(N).$$

Мы получили противоречие. Следовательно, в этом случае, поле $\mathrm{Quot}\, B$ имеет конечную размерность над полем $\mathrm{Quot}\, k[a,b]$, поэтому $\mathrm{trdeg}_k \mathrm{Quot}\, B$ =2 и поле $\mathrm{Quot}\, k[a,b]$ конечно порождено над полем k.

Лемма доказана.

Теорема доказана.

Замечание 22. Как мы видели в доказательстве леммы, $\mathrm{trdeg}_k B=1$, если и только если носители всех элементов из кольца B лежат на одной прямой, которая проходит через начало координат (Более того, рассуждая как в [107, Prop. 3.2.], можно показать, что кольцо B конечно порождено над полем k и имеет размерность 1 по Круллю.)

Если $\mathrm{trdeg}_k B=0$, то $B=k$.

Замечание 23. Существенно, что в теореме 22 мы рассматриваем пересечение $A\cap\mathcal{O}_2$. Для самого кольца A пункт b) теоремы 22 может быть не верен, как показывает следующий пример.

Рассмотрим подпространство $W=\{a\in V|\nu_u(a)\le -\nu_t(a)\}$. Можно проверить, что подпространство W удовлетворяет условиям теоремы 22, и что $A=W$. Но так как кольцо A содержит подполе $k((ut^{-1}))$, то поле $\mathrm{Quot}\, A$ имеет бесконечную степень трансцендентности над полем k.

Если стартовать с кольца B коммутирующих операторов как в теореме 21(см. также замечание 18) и применить следствие 10 к паре (W,A) из замечания 18, мы получим пару (W,A) в $k[[u]]((t))$ как выше со свойством $\mathrm{trdeg}(\mathrm{Quot}(A))=2$ и с другим свойством, которое мы выделим в следующем определении.

Определение 38. Для кольца $A\subset k[[u]]((t))$ определим число

$$N_A=GCD\{\nu_t(a),\quad a\in A \quad \text{такой что} \quad \nu(a)=(0,*)\},$$

где $*$ обозначает любое значение нормирования.

Будем говорить, что кольцо A допустимо, если существует элемент $a\in A$ со свойством $\nu(a)=(1,*)$.

В частности, кольцо A, полученное из кольца B выше является допустимым, поскольку B содержит оператор специального вида (условие квази-эллиптичности). Образ этого оператора после преобразования из леммы 21 удовлетворяет свойству из определения допустимого кольца.

Предложение 1 служит мотивировкой для следующего определения.

Определение 39. Для кольца $A\subset k[[u]]((t))$ определим число

$$\tilde{N}_A=GCD\{\nu_t(a),\quad a\in A\}.$$

Скажем, что кольцо A строго допустимо, если оно допустимо и $\tilde{N}_A=N_A$.

Определение 40. Скажем, что 1-квази-эллиптическое кольцо $A\subset k[z_1^{-1}]((z_2))$ из определения 34 строго допустимо, если его образ $\psi_1(A)$ при изоморфизме из леммы 21 строго допустим.

Замечание 24. Заметим, что образ $\psi_1(A)$ 1-квази-эллиптического кольца A допустим. Обратно, кольцо $\psi_1^{-1}(A)$, где A — допустимое кольцо, — 1-квази-эллиптическое кольцо.

Для 1-квази-эллиптических коммутативных колец $B \subset \hat{D}$ можно обобщить определения 22, 23, и эти определения будут тесно связаны с определениями 38, 39: по теореме 21 B соответствует паре Шура (A, W) с точностью до эквивалентности, т.е. кольцо A определено с точностью до сопряжения на 1-допустимый оператор. Однако, всегда $A \subset \Pi_1$ и A — 1-квази-эллиптическое кольцо.

Определение 41. Для 1-квази-эллиптического коммутативного кольца $B \subset \hat{D}$ положим числа $\tilde{N}_B$, N_B равными числам $\tilde{N}_A$, N_A (см. определение 40). Скажем, что B строго допустимо, если A строго допустимо.

Мы утверждаем, что наше определение корректно, т.е. не зависит от сопряжения кольца A на 1-допустимый оператор. Как мы видели в доказательстве следствия 9, каждый оператор X из A записывается в виде конечной суммы $X = \sum c_{ij} w_{0,0}^{-1} w_{i,j}$, $c_{ij} \in k$. Пусть (k, l) — максимальная пара чисел (относительно антилексикографического порядка), такая что $c_{kl} \neq 0$ и $k + l \geq i + j$ для всех (i, j) с $c_{ij} \neq 0$. Легко видеть, что $\nu(\psi_1(X)) = (k, l)$. Пусть T — 1-допустимый оператор. Тогда, используя лемму 14, получаем, что $\nu(\psi_1(TXT^{-1})) = \nu(\psi_1(X)) = (k, l)$. А значит, определение чисел $\tilde{N}_B$, N_B не зависит от сопряжения.

Снова используя лемму 14, можно увидеть, что это определение совпадает с определениями 22, 23, если $B \subset D$. Особо отметим, что ранг кольца B, определенный как $N_B = \tilde{N}_B$, меньше либо равен ранга пучка общих собственных функций операторов из B. Это будет следовать из предложений 26, 28 и теоремы 18.

Мы будем пользоваться обозначением $\mathbf{rk}(B)$ для ранга во втором смысле.

Определение 42. Пару (A, W), где $A, W \subset k[[u]]((t))$, будем называть парой Шура ранга r, если выполняются следующие условия:

1. A — k-алгебра с единицей, $\mathrm{Supp}(W) = \langle u^i t^{-j} \quad | i, j \geq 0, i - j \leq 0 \rangle$ и $A \cdot W \subset W$.

2. A — строго допустимое кольцо (см. определение 39), A конечно порождена как k-алгебра, $\mathrm{trdeg}(\mathrm{Quot}(A)) = 2$ и $N_A = r$.

Обозначим через $\mathcal{S}_r$ множество всех пар Шура ранга r.

Замечание 25. Ясно, что для данной пары Шура (A, W) пара $(\psi_1^{-1}(A), \psi_1^{-1}(W))$ (см. следствие 10, где дано определение ψ_1) является 1-квази-эллиптичской парой Шура из определения 34. Обратно, если (A, W) — 1-квази-эллиптическая пара Шура, такая что A — строго допустимое кольцо, то $(\psi_1(A), \psi_1(W))$ — пара Шура.

Определение 43. Для данного подпространства $W \subset k[[u]]((t))$ определим действие оператора $T \in \Pi_1$ (см. следствие 7) на W по формуле

$$WT = \psi_1(\psi_1^{-1}(W)T).$$

Если T — 1-допустимый оператор (см. опр. 35) и $A \subset k[[u]]((t))$ — подкольцо, определим

$$T^{-1}AT = \psi_1(T^{-1}\psi_1^{-1}(A)T).$$

Определение 44. Определим категорию пар Шура $\mathcal{S}$ следующим образом:

1. $Ob(\mathcal{S}) = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_r$.

2. Морфизм $T : (A_2, W_2) \to (A_1, W_1)$ двух пар состоит из подкрученных вложений

$$T^{-1}A_2T \hookrightarrow A_1, \quad W_2T \hookrightarrow W_1,$$

где T — произвольный 1-допустимый оператор.

На самом деле, как это следует из определений, $W_2T = W_1$ как k-подпространство во втором вложении $W_2T \hookrightarrow W_1$.

По паре Шура можно естественным образом построить геометрические данные. Опишем, как это сделать.

3.5.1 Некоторые технические конструкции

Лемма 23. *Пусть $A \subset k[[u]][[t]]$ — коммутативная k-алгебра с единицей, причем $\mathrm{Supp}(A) \subset \langle u^i t^{-j} \quad | i,j \geq 0, i-j \leq 0\rangle$. Положим $\tilde{A} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$, где $A_n = A \cap t^n k[[u]][[t]]$. Пусть $\mathrm{trdeg}(\mathrm{Quot}(A)) = 2$ и пусть либо $\mathrm{gr}(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n/A_{n-1}$, либо $\tilde{A}$ конечно порождены как k-алгебры. Тогда*

1. *Однородный идеал $I = \tilde{A}(-1)$ прост и определяет приведенную неприводимую замкнутую подсхему C на проективной поверхности $X = \mathrm{Proj}\,\tilde{A}$, которая является обильным эффективным "-Картье дивизором.*

2. *Если A — допустимое кольцо и $N_A = 1$, то центр P нормирования ν, индуцированного на поле частных $\mathrm{Quot}(\tilde{A})$ одноименным нормированием двумерного локального поля $k((u))((t))$, является замкнутой регулярной точкой кривой C и поверхности X (ср. [27, ch.II, ex.4.5]).*

Доказательство 1) Доказывается так же, как аналогичное утверждение в теореме 18.

2) Так как X — проективная схема (а следовательно, собственная над k, см. напр. [27, ch.II, §4]), существует единственныйт центр P нормирования ν, см. [27, ch.II, ex.4.5]. Заметим, что P принадлежит аффинному множеству $\mathrm{Spec}\,\tilde{A}_{(x)}$, где $x \in \tilde{A}$ — элемент со свойствами $\nu(x) = (0,*)$, $x \notin I$ (такой элемент существует, поскольку $N_A = 1$), так как $\tilde{A}_{(x)}$ принадлежит кольцу нормирования R_ν: действительно, если $x \in \tilde{A}_k$, то $\nu_t(x) = k$, и $\nu(a/x^l) = (p,q)$, где $p,q \geq 0$ для всех $a \in \tilde{A}_{kl}$. Более того, легко видеть, что элемент $x^{-1} \in k((u))((t))$ (мы рассматриваем здесь $\tilde{A}_k = A_k$ как векторное подпространство в $k((u))((t))$, так что $x \in k((u))((t)))$ удовлетворяет свойству $x^{-1} \in k[[u]][[t]] = k[[u,t]]$. Таким образом, есть естественное вложение $\tilde{A}_{(x)} \hookrightarrow k[[u,t]]$.

Так как A — допустимое кольцо и $N_A = 1$, то существуют элементы $u', t' \in \tilde{A}_{(x)}$ со свойствами $\nu(u') = (1,0)$ и $\nu(t') = (0,1)$. Пусть $B = \tilde{A}_{(x)}$ и пусть $p \in B$ — идеал, соответствующий точке P. Ясно, что $u', t' \in p$ и $p = B \cap (u,t)$, где (u,t) — идеал в $k[[u,t]]$. Таким образом, $B/p \simeq k$ и следовательно p — максимальный идеал. Так как всякий элемент $a \in k[[u,t]]$ с $\nu(a) = (0,0)$ обратим, получаем $B_p \subset k[[u,t]]$. Обозначим через p' максимальный идеал в B_p.

Определим линейную топологию на B_p, беря в качестве открытых идеалов идеалы вида $M_k := (u,t)^k \cap B_p$. Она отделима, поскольку $\cap (u,t)^k = 0$ в кольце $k[[u,t]]$. Так как $p \subset (u,t)$, то также $p'^k \subset M_k$ для всех k. Таким образом, имеется точная последовательность проективных систем:

$$0 \to M_k/p'^k \to B_p/p'^k \to B_p/M_k \to 0.$$

Заметим, что все естественные гомоморфизмы $M_{k+1}/p'^{k+1} \to M_k/p'^k$ сюръективны. Действительно, для данного $a \in M_k$ можно найти такие константы $c_i \in k$, $i = 0, \ldots k$, что $a - \sum_{i=0}^k c_i u'^i t'^{k-i} \in M_{k+1}$. Так как $\sum_{i=0}^k c_i u'^i t'^{k-i} \in p'^k$, то a принадлежит образу группы M_{k+1}/p'^{k+1}. Таким образом, система $\{M_k/p'^k\}$ удовлетворяет условию Миттаг-Лефлера, и следовательно имеется сюръективный гомоморфизм топологических колец

$$\rho : \hat{B}_p \to \tilde{B}_p,$$

где $\hat{B}_p = \varprojlim B_p/p'^k$, $\tilde{B}_p = \varprojlim B_p/M_k$. Заметим, что ρ сохраняет кольцо $k[u',t']$, и это кольцо плотно в $\tilde{B}_p$.

С другой стороны, существует естественный гомоморфизм топологических колец $\rho' : k[[u',t']] \to \hat{B}_p$, который также сохраняет кольцо $k[u',t']$. Таким образом, композиция $\rho\rho'$ — гомоморфизм полных топологических колец, сохраняющий $k[u',t']$, и кольцо $k[u',t']$ плотно в обоих кольцах. Следовательно, это — изоморфизм $k[[u',t']] \simeq \tilde{B}_p$. Таким образом, кольцо $\tilde{B}_p$ регулярно размерности Крулля 2.

В силу [1, corol.11.19] имеем неравенство $\dim \hat{B}_p \le 2$, откуда следует, что ρ должно быть инъективно, т.е. оно должно быть изоморфизмом. Тогда по [1, prop. 11.24] кольцо B_p регулярно, т.е. P — регулярная замкнутая точка на X.

Легко видеть, что $(t) \cap B = I_{(x)}$, где (t) — идеал в кольце $k[[u,t]]$. Таким образом, существует вложение $B/I_{(x)} \hookrightarrow k[[u]]$. Повторяя рассуждения аналогичные приведенным выше, получаем $(\widehat{B/I_{(x)}})_p \simeq k[[u]]$, откуда следует, что P — регулярная точка на C.

Лемма 24. *Пусть $A \subset k[[u]]((t))$ — строго допустимое кольцо. Тогда существует ряд с единичным старшим коэффициентом $t' \in k[[u]]((t))$ с нормированием $\nu(t') = (0, N_A)$ и ряд с единичным старшим коэффициентом $u' \in k[[u]]((t))$ с нормированием $\nu(u') = (1,0)$, такие что $A \subset k[[u']]((t')) \subset k[[u]]((t))$ и в $k[[u']]((t'))$ кольцо A имеет число $N'_A = 1$.*

Доказательство Так как A строго допустим, то существуют два элемента $a, b \in A$, такие что $\nu(a) = (0,k_1)$, $\nu(b) = (0,k_2)$ и $GCD(k_1,k_2) = N_A$. Тогда существует обратимый ряд с единичным старшим коэффициентом $t' \in A_{ab} \subset k[[u]]((t))$, такой что $\nu(t') = (0,N_A)$ и следовательно существует ряд с единичным старшим коэффициентом $u' \in A_{ab}$, такой что $\nu(u') = (1,0)$.

Пусть $v \in A$ — произвольный элемент с нормированием $\nu(v) = (k, lN_A)$. Тогда мы можем выбрать константу $c_{k,l} \in k$ таким образом, что $\nu(v - c_{k,l}u'^k t'^l) = (k_1, l_1N_A) < (k, lN_A)$. Если продолжить эту процедуру, мы получим последовательность констант $c_{k,l}, c_{k_1,l_1}, \ldots$, такую что

$$v - \sum c_{k_i,l_i} u'^{k_i} t'^{l_i} = 0$$

(легко видеть, что ряд в формуле сходится). Таким образом, $A \subset k[[u']]((t'))$. В кольце $k[[u']]((t'))$ имеем $GCD(\nu_{t'}(a), \nu_{t'}(b)) = 1$. Следовательно, $N'_A = 1$.

Предложение 5. *Пусть $W, A \subset k[[u]]((t))$ — подпространства, такие что $\mathrm{Supp}(W) = \langle u^i t^{-j} \quad | i,j \ge 0, i-j \le 0\rangle$, A — кольцо, стабилизатор пространства W: $A \cdot W \subset W$ (ср. замечание 21). Предположим, что $\mathrm{trdeg}(\mathrm{Quot}(A)) = 2$, $\mathrm{gr}(A)$ либо $\tilde{A}$ конечно порождена как k-алгебра и A — строго допустимое кольцо, $A \subset k[[u']]((t'))$ (см. лемму 24). Положим $\tilde{W} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} W_n$ (где W_n определяются так же как A_n). Тогда*

1. *Пучок $\mathcal{F} = \mathrm{Proj}(\tilde{W})$ — квазикогерентный пучок без кручения на поверхности X, построенной по $A \subset k[[u']]((t'))$ как в лемме 23. Более того, имеются естественные вложения $\mathcal{O}_P$-модулей $\mathcal{F}_P \hookrightarrow k[[u,t]]$ и колец $\widehat{\mathcal{O}}_P \hookrightarrow k[[u',t']] \subset k[[u,t]]$, где последнее вложение является изоморфизмом.*

2. *Пусть $C' = dC$ — очень обильный дивизор Картье на X из леммы 23.*

   Естественные вложения $H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \hookrightarrow \mathcal{F}(nC') \simeq \mathcal{F}_P \hookrightarrow k[[u,t]]$, определенные при помощи вложения $\mathcal{F}_P \hookrightarrow k[[u,t]]$ из пункта 1, в композиции с гомоморфизмами $k[[u,t]] \to k[[u,t]]/(u,t)^{ndN_A+1}$ дают изоморфизмы

   $$H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \simeq k[[u,t]]/(u,t)^{ndN_A+1}$$

   для всех $n \ge 0$.

Доказательство 1). Те же рассуждения, которые использовались в доказательстве леммы 23, пункт 2, показывают, что имеются естественные вложения колец $\mathcal{O}_P \hookrightarrow k[[u',t']] \subset k[[u,t]]$, $\widehat{\mathcal{O}}_P \simeq k[[u',t']] \hookrightarrow k[[u,t]]$. Они определяют структуру $\mathcal{O}_P$ и $\widehat{\mathcal{O}}_P$-модулей на $k[[u,t]]$. Так как $\tilde{W}$ — $\tilde{A}$-модуль без кручения, пучок $\mathcal{F}$ также без кручения. Поэтому есть естественно определенное вложение $\mathcal{O}_P$-модулей $\mathcal{F}_P \hookrightarrow k[[u,t]]$.

Замечание 26. Так как W содержит элементы с любыми значениями нормирования вида $(0,k)$, $k \le 0$ (из-за наших предположений на носитель W), существуют элементы $f_1,\dots,f_{N_A} \in \mathcal{F}_P \subset k[[u,t]]$, такие что $\nu(f_i) = (0,i-1)$, $i=1,\dots N_A$. Ясно, что пучок $\mathcal{F}$ может быть представлен как прямой предел когерентных пучков, $\mathcal{F} = \varinjlim \mathcal{F}_i$, причем $f_1,\dots,f_{N_A} \in \mathcal{F}_{iP}$ для любого i. Рассмотрим отображение

$$\mathcal{O}_P^{\oplus N_A} \to \mathcal{F}_{iP} \subset k[[u,t]], \quad (a_1,\dots a_{N_A}) \mapsto a_1f_1+\dots+a_{N_A}f_{N_A}. \tag{3.19}$$

Ясно, что это вложение $\mathcal{O}_P$-модулей (так как элементы a_if_i имеют разные значения нормирования в кольце $k[[u,t]]$ и нет кручения, их сумма не может быть равной нулю). Рассуждая как в доказательстве леммы 23, пункт 2, получаем, что отображение

$$\widetilde{\mathcal{O}}_P^{\oplus N_A} \to \widetilde{\mathcal{F}}_{iP} \simeq k[[u,t]]$$

является изоморфизмом $\widehat{\mathcal{O}}_P$-модулей для каждого i (пополнение берется относительно M_k-адической топологии). Кроме того, имеется сюръективный гомоморфизм модулей $\rho : \widehat{\mathcal{F}}_P \to \widetilde{\mathcal{F}}_P$. Этот гомоморфизм может иметь нетривиальное ядро, см. например замечание 72 и следствие 27.

2). Так как $\mathcal{F}$ — пучок без кручения, определены канонические вложения $H^0(X,\mathcal{F}(nC')) \hookrightarrow \mathcal{F}_P(nC')$ для всех $n \ge 0$. Имеем $\mathcal{F}_P(nC') \simeq \mathcal{F}_P$, и изоморфизм этих $\mathcal{O}_P$-модулей задается умножением на x^{-1}, где $x \in \tilde{A}$ — элемент со свойством $\nu(x) = (0,-ndN_A)$, как в доказательстве пункта 2 леммы 23. В доказательстве пункта 1 мы также видели, что $\mathcal{F}_P \hookrightarrow k[[u,t]]$.

Заметим, что для всех n имеются изоморфизмы $\mathrm{Proj}(\tilde{W}(ndN_A)) \simeq \mathrm{Proj}(\tilde{W}^{(dN_A)}(n))$ по [63, prop. 2.4.7], и $\mathrm{Proj}(\tilde{W}^{(dN_A)}(n)) \simeq \mathrm{Proj}(\tilde{W}^{(dN_A)})(n) \simeq \mathcal{F}(nC')$ по [27, ch.II, prop.5.12]. Аналогично, $\mathrm{Proj}(\tilde{A}(ndN_A)) \simeq \mathcal{O}_X(nC')$. Чтобы закончить доказательство, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 25. *Имеют место равенства* $H^0(X,\mathrm{Proj}(\tilde{W}(ndN_A))) = W_{ndN_A}$, $H^0(X,\mathrm{Proj}(\tilde{A}(ndN_A))) = A_{ndN_A}$ *для всех* $n \ge 0$.

Доказательство Доказательство одинаковое для обоих пучков. Мы проведем его для пучка $\mathcal{F}$.

По определению, $W_{ndN_A} = (\tilde{W}^{(dN_A)}(n))_0 \subset H^0(X,\mathrm{Proj}(\tilde{W}(ndN_A)))$. Положим $\tilde{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A'_n$, где A'_n — подпространства, определенные в $k[[u']]((t'))$. Заметим, что $A'_n = A_{nN_A}$, так что $\tilde{W}^{(dN_A)}(n)$ — градуированный $\tilde{A}^{(d)}$-модуль. Напомним (ср. лемму 23) что алгебра $\tilde{A}^{(d)}$ порождена $\tilde{A}_d$ как k-алгебра.

Пусть $a \in H^0(X,\mathrm{Proj}(\tilde{W}(ndN_A)))$, $a \notin W_{ndN_A}$. Тогда $a = (a_1,\dots,a_k)$, где $a_i \in (\tilde{W}^{(dN_A)}(n))_{(x_i)}$, $x_i \in \tilde{A}_d$ — порождающие пространства $\tilde{A}_d$, такие что $x_1 = 1_1^d$, и $a_i = a_j$ в $\tilde{A}_{x_ix_j}$ (здесь 1_1 обозначает элемент 1 в компоненте $\tilde{A}_1$).

Имеем $a_i = \tilde{a}_i/x_i^{k_i}$ ($\tilde{a}_i \in \tilde{W}^{(dN_A)}(n)_{k_i} = \tilde{W}_{(k_i+n)dN_A}$), $a_1 = \tilde{a}_1/x_1^{k_1}$ и $k_1 > 0$ так как $a \notin W_{ndN_A}$. Действительно, если $\tilde{a}_1 \in (\tilde{W}^{(dN_A)}(n))_0 = W_{ndN_A}$, то $a = \tilde{a}_1$, поскольку $\tilde{W}^{(dN_A)}(n)$ — $\tilde{A}^{(d)}$-модуль без кручения, противоречие. Таким образом, имеем

$$\tilde{a}_1 \in (\tilde{W}^{(dN_A)}(n))_{k_1} \backslash (\tilde{W}^{(dN_A)}(n))_{k_1-1}$$

(или, эквивалентно, $(n+k_1)dN_A \ge \nu_t(\tilde{a}_1) > (n+k_1-1)dN_A$).

Тогда для $x_i \in \tilde{A}_d \backslash \tilde{A}_{d-1}$ (такой элемент x_i существует, поскольку все элементы из $\tilde{A}_{d-1} \subset \tilde{A}_d$ лежат в идеале, определяющем дивизор C) имеем $x_i^{k_i} \in \tilde{A}_{dk_i} \backslash \tilde{A}_{dk_i-1}$ (или, эквивалентно, $\nu_t(x_i^{k_i}) = dk_iN_A$), и следовательно

$$\tilde{a}_1 x_i^{k_i} \in (\tilde{W}^{(dN_A)}(n))_{k_1+k_i} \backslash (\tilde{W}^{(dN_A)}(n))_{k_1+k_i-1},$$

так как $\nu_t(\tilde{a}_1 x_i^{k_i}) > (n+k_1+k_i-1)dN_A$.

С другой стороны, мы имеем равенство $\tilde{a}_1 x_i^{k_i} = \tilde{a}_i x_1^{k_1}$, и

$$\tilde{a}_i x_1^{k_1} \in (\tilde{W}^{(dN_A)}(n))_{k_1+k_i-1} \subset (\tilde{W}^{(dN_A)}(n))_{k_1+k_i},$$

так как $\nu_t(\tilde{a}_i x_1^{k_1}) = \nu_t(\tilde{a}_i) \le (n+k_i+k_1-1)dN_A$, противоречие. Таким образом, $a \in W_{ndN_A}$.

Теперь мы имеем вложения $H^0(X, \mathcal{F}(nC')) = W_{ndN_A} \hookrightarrow \mathcal{F}(nC')_P \simeq \mathcal{F}_P \hookrightarrow k[[u,t]]$, определенные умножением на x^{-1}. Из-за условий на носитель пространства W композиция с гомоморфизмами $k[[u,t]] \to k[[u,t]]/(u,t)^{ndN_A+1}$ дает изоморфизмы

$$H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \simeq k[[u,t]]/(u,t)^{ndN_A+1}$$

для каждого $n \ge 0$. Заметим, что они не зависят от выбора изоморфизма $\mathcal{F}_P(nC') \simeq \mathcal{F}_P$.

Теперь мы собираемся установить соответствие между парами Шура и геометрическими данными из леммы 23 и предложения 5. Наиболее подходящий способ сделать это — установить категорную эквивалентность, обобщающую соответствующую эквивалентность в одномерном случае, см. [107, th.4.6], поскольку мы имеем дело с большим количеством данных.

3.5.2 Геометрические данные

Определение 45. Набор $(X, C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi)$ будем называть геометрическими данными ранга r (или модифицированными геометрическими данными Паршина), если он состоит из следующих данных (где мы фиксируем кольцо $k[[u,t]]$ для всех данных):

1. X — приведенная неприводимая проективная алгебраическая поверхность, определенная над полем k;

2. C — приведенный неприводимый обильный $\mathbb{Q}$-Картье дивизор на X;

3. $P \in C$ — замкнутая k-точка, регулярная на C и на X;

4. $$\pi : \widehat{\mathcal{O}}_P \longrightarrow k[[u,t]]$$

   — локальный гомоморфизм локальных k-алгебр, удовлетворяющий следующему свойству. Если f — локальное уравнение кривой C в точке P, то $\pi(f)k[[u,t]] = t^r k[[u,t]]$, и индуцированное отображение $\pi : \hat{\mathcal{O}}_{C,P} = \hat{\mathcal{O}}_P/(f) \to k[[u]] = k[[u,t]]/(t)$ — изоморфизм. (Определение π не зависит от выбора подходящего f. Кроме того, из этого определения следует, что π — вложение, $k[[u,t]]$ — свободный $\widehat{\mathcal{O}}_P$-модуль ранга r относительно π. Более того, для любого элемента g из максимального идеала $\mathcal{M}_P$ кольца $\mathcal{O}_P$, такого что элементы g и f порождают $\mathcal{M}_P$, имеют место равенства $\nu(\pi(f)) = (0, r)$, $\nu(\pi(g)) = (1, 0)$.)

5. $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок без кручения на X.

6. $\phi : \mathcal{F}_P \hookrightarrow k[[u,t]]$ — вложение $\mathcal{O}_P$-модулей, удовлетворяющее следующим условиям для всякого $n \geq 0$ (отметим, что согласно пункту 4 этого определения, $k[[u,t]]$ — $\mathcal{O}_P$-модуль относительно π). Согласно пункту 2 существует минимальное натуральное число d, такое что $C' = dC$ — очень обильный дивизор на X. Пусть $\gamma_n : H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \hookrightarrow \mathcal{F}(nC')_P$ обозначает вложение (это вложение, поскольку $\mathcal{F}(nC')$ — квазикогерентный пучок без кручения на X). Пусть $\epsilon_n : \mathcal{F}(nC')_P \to \mathcal{F}_P$ обозначает естественный изоморфизм $\mathcal{O}_P$-модулей, заданный умножением на элемент $f^{nd} \in \mathcal{O}_P$, где $f \in \mathcal{O}_P$ выбран как в пункте 4. Пусть $\tau_n : k[[u,t]] \to k[[u,t]]/(u,t)^{ndr+1}$ обозначает естественный эпиморфизм колец. Мы требуем, чтобы отображение

$$\tau_n \circ \phi \circ \epsilon_n \circ \gamma_n \;:\; H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \longrightarrow k[[u,t]]/(u,t)^{ndr+1}$$

было изоморфизмом. (Эти условия на отображение ϕ не зависят от выбора подходящего элемента f.)

Множество всех данных ранга r обозначим через $\mathcal{Q}_r$.

Замечание 27. Наше определение геометрических данных слегка более общее, чем аналогичные определения в работах [118], [23]. В частности, мы не требуем, чтобы поверхность была Коэно-Маколеевой, дивизор C может быть не дивизором Картье, но "-Картье, и пучок $\mathcal{F}$ может не быть локально свободным.

Эти ограничения в определениях работ [118], [23] объясняются тем, что геометрические данные с этими ограничениями могут быть восстановлены с помощью некоторой комбинаторной конструкции по подпространствам, лежащим в образе отображения Кричевера-Паршина (см. там же). В некоторых случаях эта конструкция может быть перенесена на более широкий класс данных, см. предложение 30 в главе 5.

Замечание 28. Отметим, что ранг r геометрических данных в общем случае отличается от ранга пучка $\mathcal{F}$, ср. замечание 72 в главе 5.

Если $\mathcal{F}_P$ — свободный $\mathcal{O}_P$-модуль ранга r, то ϕ индуцирует изоморфизм $\hat{\phi} : \widehat{\mathcal{F}}_P \simeq k[[u,t]]$ $\widehat{\mathcal{O}}_P$-модулей. Это условие выполняется, если $\mathcal{F}$ — когерентный пучок ранга r, см. следствие 27 в главе 5.

Замечание 29. Заметим, что любые две тривиализации $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2 : \hat{\mathcal{F}}_P \simeq k[[u,t]]$ пучка ранга один отличаются умножением на элемент $a \in k[[u,t]]^*$. В некоторых случаях условия на отображение ϕ в последнем пункте определения можно переписать в чисто алгебро-геометрическом смысле, см. предложение 30 ниже.

Альтернативное определение геометрических данных

В этом параграфе мы предлагаем альтернативное определение геометрических данных. Это определение может показаться специалистам более "геометрическим".

Введем следующие обозначения:

$T = \operatorname{Spec} k[[u,t]] \supset T_1 = \operatorname{Spec} k[[u]]$ (схема определенная уравнением $t = 0$), $O = \operatorname{Spec}(k) \in T_1$, $R = k[[u,t]]$, $\mathcal{M} = (u,t) \subset R$.

Определение 46. Геометрические данные (ранга r) — это тройка $(X, j, \mathcal{F})$, где X — неприводимая проективная поверхность,

$$j : T \to X$$

— доминантный k-морфизм, и $\mathcal{F} \subset j_*\mathcal{O}_T$ — квазикогерентный подпучок, удовлетворяющий следующим условиям:

1. $j_*(T_1) = C \subset X$ — кривая[1] (автоматически неприводимая), и через $P = j(O)$ — точку, регулярную в C и в X.

2. $T_1 \times_X \{P\} = \{O\}$, $T \times_X C = rT_1$ (расслоенное произведение здесь — подсхема в T, и rT_1 — эффективный дивизор Картье в T), число r называется рангом тройки $(X, j, \mathcal{F})$.

3. Существует эффективный, очень обильный дивизор Картье $C' \subset X$ с циклом $Z(C') = dC$, и для всех $n > 0$ индуцированное отображение (вложением $\mathcal{F} \subset j_*\mathcal{O}_T$)
$$H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \to H^0(X, j_*\mathcal{O}_T(nC')) = H^0(T, \mathcal{O}_T(ndrT_1)) = Rt^{-ndr} \to Rt^{-ndr}/\mathcal{M}^{ndr+1}t^{-ndr} \quad (3.20)$$
— изоморфизм.

Доказательство эквивалентности двух определений мы оставляем читателю.

Замечание 30. Для геометрических данных выполняются следующие свойства:
1) C — $\mathbb{Q}$-Картье дивизор и $C^2 = (C' \cdot C)/d = (C')^2/d^2$.
2) $H^0(X, \mathcal{F}) \simeq k$ (в силу (3)), поэтому есть естественное вложение $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{F}$.
3) $\mathcal{F}$ — пучок без кручения на X, и если $\mathcal{F}$ когерентен, то
$$\mathrm{rk}(\mathcal{F})(C^2) = r^2.$$
Действительно, для $\mathcal{F}$ имеем
$$\chi(\mathcal{F}(nC')) = \frac{(ndr+1)(ndr+2)}{2}.$$
Если $\mathcal{F}$ когерентен ранга m, то $\mathcal{F} \sim \mathcal{O}_X^m$ ($\sim$ означает, что старшие члены полиномов Гильберта пучков совпадают). Для любого когерентного пучка $\mathcal{G}$ на X функция $\chi(\mathcal{G}(nC'))$ полиномиальна степени $\dim(\mathcal{G}) = l$ с положительным старшим коэффициентом ($\in \mathbb{Z}/l!$), так что $\chi(\mathcal{F}(nC')) \sim m\chi(\mathcal{O}_X(nC'))$ и $d^2r^2/2 = m(C')^2/2$.

Предложение 6. *Если вложение $\mathcal{O}_{X,P} \to \mathcal{F}_P$ — изоморфизм, то $r = 1$. Далее, $\mathcal{O}_X = \mathcal{F}$ если и только если $X = \mathbb{P}^2$ и C — прямая в $\mathbb{P}^2$.*

Доказательство Если C задается уравнением $f = 0$ в малой окрестности точки P (по (1) кольцо $\mathcal{O}_{X,P}$ регулярно, и $\mathcal{O}_{C,P} = \mathcal{O}_{X,P}/f\mathcal{O}_{X,P}$), то $fR = t^rR$ (в силу (2)) и $\mathcal{F}(nC')_P = (\mathcal{F}_P)_{f^{nd}}$. В силу (3) имеем
$$Rt^{-ndr} = H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \oplus \mathcal{M}^{ndr+1}t^{-ndr},$$
так что $Rt^{-ndr} = \mathcal{F}_Pt^{-nd} + \mathcal{M}^{ndr+1}t^{-ndr}$, и если $\mathcal{F}_P = \mathcal{O}_{X,P}$, то получаем $R = k[[u, t^r]] + \mathcal{M}^{ndr+1}$ (для доказательства мы можем предполагать, что u, t^r — порождающие идеала $\hat{\mathcal{M}}_{X,P} = \mathcal{M}_{X,P}\hat{\mathcal{O}}_{X,P}$). Это возможно только при $r = 1$. Если $\mathcal{O}_X = \mathcal{F}$, то мы получаем канонические базисы для всех групп $H^0(X, \mathcal{O}_X(nC'))$ вида v_{ij}, $0 \le i \le i + j \le nd$, и $v_{ij}v_{hm} = v_{i+h,j+m}$ в $H^0(X\backslash C, \mathcal{O}_X) =: A$ (v_{ij} соответствует элементу u^it^j при изоморфизме в (3)). Таким образом, $A = k[x, y]$ с $x = v_{10}$, $y = v_{01}$ (и тогда $v_{ij} = x^iy^j$).

Так как
$$X = \mathrm{Proj} \oplus_{n\ge0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nC')) = \mathrm{Proj}(\oplus_{n\ge0} A_ns^n),$$
где $A_n = \sum_{i+j\le nd} kx^iy^j$, мы получаем (подстановкой $x = x'/z$, $y = y'/z$, $s = z^d$)
$$\oplus_{n\ge0} A_ns^n = k[(x')^i(y')^jz^k | i + j + k = m],$$
т.е. X — вложенная отображением Веронезе степени d плоскость $\mathbb{P}^2$. Так как $C^2 = 1$, получаем что C — прямая.

[1]Обозначение: для морфизма нетеровых схем $f : X \to Y$ и замкнутой подсхемы $Z \subset X$, через $f_*Z \subset Y$ мы обозначаем замкнутую подсхему, определенную идеалом $\ker(\mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^*} f_*\mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Z)$

3.5.3 Ассоциированные пары Шура

Для геометрических данных
$(X, C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi)$ ранга r определим пару подпространств

$$W, A \subset k[[u]]((t)),$$

где A — фильтрованная подалгебра в $k[[u]]((t))$ и W — фильтрованный A-модуль, следующим образом:

Пусть f^d — локальная порождающая идеала $\mathcal{O}_X(-C')_P$, где $C' = dC$ — очень обильный дивизор Картье (см. определение 45, пункт 6). Тогда $\nu(\pi(f^d)) = (0, r^d)$ в кольце $k[[u,t]]$, и следовательно $\pi(f^d)^{-1} \in k[[u]]((t))$. Таким образом, имеются естественные вложения для любого $n > 0$

$$H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \hookrightarrow \mathcal{F}(nC')_P \simeq f^{-nd}(\mathcal{F}_P) \hookrightarrow k[[u]]((t)),$$

где последнее вложение — это вложение $f^{-nd}\mathcal{F}_P \overset{\phi}{\hookrightarrow} f^{-nd}k[[u,t]] \hookrightarrow k[[u]]((t))$ (ср. определение 45, пункт 6). Следовательно, определено вложение

$$\chi_1 \; : \; H^0(X \backslash C, \mathcal{F}) \simeq \varinjlim_{n>0} H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \hookrightarrow k[[u]]((t)).$$

Определим $W \overset{\text{def}}{=} \chi_1(H^0(X \backslash C, \mathcal{F}))$. Аналогично определяется вложение
$H^0(X \backslash C, \mathcal{O}) \hookrightarrow k[[u]]((t))$ (и мы будем также обозначать его χ_1). Определим $A \overset{\text{def}}{=} \chi_1(H^0(X \backslash C, \mathcal{O}))$.

Из этой конструкции следует, что

$$A \subset k[[u']]((t')) \subset k[[u]]((t)), \tag{3.21}$$

где $t' = \pi(f)$, $u' = \pi(g)$ (см. также определение 45, пункт 4). Таким образом, на A определена фильтрация A_n, индуцированная фильтрацией $t'^{-n}k[[u']][[t']]$ на пространстве $k[[u']]((t'))$:

$$A_n = A \cap t'^{-n}k[[u']][[t']] = A \cap t^{-nr}k[[u]][[t]] \tag{3.22}$$

Аналогичная фильтрация определена на пространстве $W \subset k[[u]]((t))$:

$$W_n = W \cap t^{-nr}k[[u]][[t]]. \tag{3.23}$$

Заметим, что $W_{nd} \simeq H^0(X, \mathcal{F}(nC'))$ по определению 45, пункт 6, и по конструкции отображения χ_1, так что $\mathcal{F} \simeq \mathrm{Proj}(\tilde{W})$, где $\tilde{W} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} W_n s^n$.

Заметим, что пространство W удовлетворяет условию 1 определения 42. Как следует из определения $A \subset k[[u']]((t')) = k[[u]]((t^r))$, где $t' = \pi(f)$, $u' = \pi(g)$ (ср. определение 45, пункт 4). Также $\mathrm{Supp}(A) \subset \mathrm{Supp}(W)$, так как $1 \in \mathrm{Supp}\, W$ и W является (по конструкции) A-модулем без кручения. Ясно, что $\mathrm{trdeg}(\mathrm{Quot}(A)) = 2$ и A конечно порождена как k-алгебра. Согласно пункту 4 определения 45 имеем $N_A \geq r$, $\tilde{N}_A \geq r$.

Ассоциированные пары Шура для альтернативных геометрических данных

Ту же пару подпространств (W, A) можно определить также в терминах альтернативного определения геометрических данных. А именно, каждой тройке $(X, j, \mathcal{F})$ мы сопоставляем пару (A, W), $A \subset R[t^{-1}] = k[[u]]((t))$, $W \subset R[t^{-1}]$, где $A = H^0(X \backslash C, \mathcal{O}_X) \simeq \varinjlim_{n>0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nC'))$ вложено посредством отображения

$$j^* : H^0(X, \mathcal{O}_X(nC')) \to H^0(X, j_*\mathcal{O}_T(nC')) = H^0(X, j_*\mathcal{O}_T(ndrT_1)) = R \cdot t^{-ndr}$$

и аналогично определяется W для $\mathcal{F} \subset j_* \mathcal{O}_T$. A — фильтрованное подкольцо с фильтрацией $A_n = A \cap R \cdot t^{-nr}$, и W — фильтрованный A-модуль с фильтрацией $W_n = A \cap R \cdot t^{-nr}$.

Пара (A, W) определяет тройку $(X, j, \mathcal{F})$, где X и $\mathcal{F}$ определяются так же, как выше, и морфизмы $j : T \to X$, $\mathcal{F} \subset j_* \mathcal{O}_T$ определяются через вложения $A \subset k[[u]]((t))$, $W \subset k[[u]]((t))$.

Некоторые леммы технического характера

Лемма 26. *Для геометрических данных $(X, C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi)$ ранга r имеем: $H^0(X, \mathcal{O}_X(nC')) \simeq A_{nd}$ для всех $n \geq 0$, где $C' = dC$ — обильный дивизор Картье. В частности, имеется изоморфизм $X \simeq \mathrm{Proj}(\tilde{A})$, где $\tilde{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n s^n$.*

Доказательство По определению кольца A имеем:

$$A_{nd} = \{a \in A | f^{nd} a \in k[[u]][[t]]\} = \{a \in A | \nu_t(f^{nd} a) \geq 0\}.$$

Также по определению имеем: $\chi_1(H^0(X, \mathcal{O}_X(nC'))) \subset A_{nd}$. Пусть $a \in A_{nd}$. Тогда

$$a \in \chi_1(H^0(X, \mathcal{O}_X(mC')))$$

для некоторого $m \geq n$. Покажем, что $a \in \chi_1(H^0(X, \mathcal{O}_X(nC')))$. Предположим обратное: $a \notin \chi_1(H^0(X, \mathcal{O}_X(nC')))$. Ниже мы будем отождествлять a со своим прообразом в $H^0(X \backslash C, \mathcal{O}_X)$ или в $f^{-nd}(\mathcal{O}_{X,P})$.

Существует окрестность $U(P)$ точки P, где обильный дивизор Картье C' задается элементом f^d. Так как $a \in A_{nd}$, имеем: $a \in f^{-nd}(\mathcal{O}_{X,P})$; таким образом, $a|_{U(P)} \in \Gamma(U(P), \mathcal{O}_X(nC'))$. Теперь мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} & & a & \hookrightarrow & H^0(C, \mathcal{O}_X(mC')/\mathcal{O}_X(nC')) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to \Gamma(U(P), \mathcal{O}_X(nC')) \to & & \Gamma(U(P), \mathcal{O}_X(mC')) & \xrightarrow{\alpha} & H^0(U(P) \cap C, \mathcal{O}_X(mC')/\mathcal{O}_X(nC')) \end{array},$$

где вертикальные стрелки — вложения (правая вертикальная стрелка — вложение, так как $\mathcal{O}_X(mC')/\mathcal{O}_X(nC') \simeq \mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X((n-m)C')) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(mC')$ и $(C, \mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X((n-m)C'))$ — неприводимая схема из-за свойств дивизора C).

Но $\alpha(a) = 0$, противоречие. Итак, $a \in H^0(X, \mathcal{O}_X(nC'))$.

Лемма 27. *Кольцо A, соответствующее геометрическим данным $(X, C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi)$ ранга r, удовлетворяет следующему свойству: существует константа $K \geq 0$, такая что для всех достаточно больших $n \geq 0$ и всех $l \leq nr - K$ пространство A_n содержит элемент a с нормированием $\nu(a) = (-nr, l)$.*

В частности, кольцо A строго допустимо.

Доказательство Из леммы 26 следует $X \simeq \mathrm{Proj} \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{nd}$ (ср. [118, lemma 9]). Таким образом, кольцо $\tilde{A}^{(d)} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{nd}$ конечно порождено как k-алгебра (ср. [149, Corol. 10.3]). Тогда кольцо $\tilde{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ тоже конечно порождено как k-алгебра, так как $\tilde{A} = \bigoplus_{l=0}^{d-1} \tilde{A}^{(d,l)}$, где модули $\tilde{A}^{(d,l)} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_{di+l}$, $0 < l < d$ естественно изоморфны идеалам в $\tilde{A}^{(d)}$, которые конечно порождены как $\tilde{A}^{(d)}$-модули.

Имеем

$$\mathrm{Proj}(\tilde{A}(-1)) \simeq \mathrm{Proj}(\tilde{A}^{d,-1}) \text{ по [63, prop.2.4.7]}, \ \mathrm{Proj}(\tilde{A}^{d,-1}(n)) \simeq (\mathrm{Proj}(\tilde{A}^{d,-1}))(nC')$$

(см. [27, ch.II,prop.5.12]). Следовательно, для всех больших n $H^0(X, (\mathrm{Proj}(\tilde{A}(-1)))(nC')) \simeq A_{nd-1}$ (ср. [27, ch.II, ex.5.9]; аргументы из доказательства леммы 25 показывают, что $H^0(X, \mathrm{Proj}(\tilde{A}^{d,-1}(n)) = A_{nd-1})$. Заметим, что пучок $\mathrm{Proj}(\tilde{A}(-1))$ — пучок идеалов $\mathcal{I}$ дивизора C (можно рассуждать как в доказательстве леммы 23 и/или заметить, что локализация идеала $I = \tilde{A}(-1)$ относительно любого элемента $a \in A_n$ с нормированием $\nu_t(a) = -rn$ (то есть $a \notin \tilde{A}(-1)$) совпадает с идеалом нормирования ν_t в кольце $\tilde{A}_{(a)}$). Таким образом, для всех больших n имеем $H^0(C, \mathcal{O}_C(nC')) \simeq A_{nd}/A_{nd-1}$ и имеем естественные вложения

$$\begin{aligned} &H^0(C, \mathcal{O}_C(nC')) \hookrightarrow \mathcal{O}_C(nC')_P, \\ &\qquad \varphi_n : \mathcal{O}_C(nC')_P \simeq \mathcal{O}_X(nC')_P/\mathcal{I}(nC')_P \overset{f^{nd}}{\hookrightarrow} \mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{I}_P = \\ &\qquad\qquad = \mathcal{O}_{X,P}/(f) \simeq \mathcal{O}_{C,P} \hookrightarrow k[[u,t]]/(t) \simeq k[[u]] \end{aligned} \tag{3.24}$$

такие что образ $H^0(C, \mathcal{O}_C(nC'))$ в $k[[u,t]]/(t)$ совпадает с образом отображения $A_{nd}/A_{nd-1} \overset{f^{nd}}{\hookrightarrow} k[[u,t]]/(t)$.

С другой стороны, для пучка $\mathcal{F}_n = \mathcal{O}_C(nC')$ имеются аналогичные конструкции подпространства W_n в $k((u))$, происходящие из одномерного соответствия Кричевера (ср. [118]). А именно, для каждого $q \geq 0$ имеются естественные вложения

$$H^0(C, \mathcal{F}_n(qP)) \hookrightarrow \mathcal{F}_n(qP)_P \simeq g^{-q}(\mathcal{F}_{n,P}) \hookrightarrow k((u)),$$

где последнее вложение — это вложение

$$g^{-q}\mathcal{F}_{n,P} \overset{\varphi_n}{\hookrightarrow} g^{-q}k[[u]] = u^{-q}k[[u]] \hookrightarrow k((u))$$

(ср. определение 45, пункт 4; мы отождествляем здесь элемент g из определения и его образ в $k[[u]]$). Следовательно, мы имеем вложение (ср. определение 3.5.3) $H^0(C \backslash P, \mathcal{F}_n) \hookrightarrow k((u))$, чей образ обозначим через W_n. Если $d'P$ — очень обильный дивизор Картье, то, рассуждая как в лемме 26, получаем $H^0(C, \mathcal{F}_n(qd'P)) \simeq W_{n,qd'}$, где $W_{n,qd'} = W_n \cap u^{-qd'}k[[u]]$. Для больших n по теореме Римана-Роха для кривых получаем $\dim_k(H^0(C, \mathcal{F}_n(qd'P))) - \dim_k(H^0(C, \mathcal{F}_n((q-1)d'P))) = d'$ для всех $q \geq 0$. Таким образом, $\dim_k(W_{n,qd'}/W_{n,(q-1)d'}) = d'$, и следовательно пространство W_n содержит элемент с произвольным заданным отрицательным значением нормирования ν_u.

Теперь рассмотрим пучок $\mathcal{F}'_n = \mathcal{F}_n(-d'P)$. Для каждого $q \geq 0$ имеются естественные вложения

$$H^0(C, \mathcal{F}'_n(qP)) \hookrightarrow \mathcal{F}'_n(qP)_P \simeq g^{-q}(\mathcal{F}'_{n,P}) \hookrightarrow k((u)),$$

где последнее вложение — это вложение $g^{-q}\mathcal{F}'_{n,P} \simeq g^{-q+d'}\mathcal{F}_{n,P} \overset{g^{-d'}\varphi_n}{\hookrightarrow} u^{-q}k[[u]] \hookrightarrow k((u))$. Следовательно, мы имеем вложение $H^0(C \backslash P, \mathcal{F}'_n) \hookrightarrow k((u))$, чей образ $W'_n = g^{-d'}W_n$. Снова по теореме Римана-Роха мы получаем, что для достаточно больших n пространство W'_n содержит элементы любых заданных отрицательных значений нормирования ν_u. Более того, существует константа $K \geq 0$, такая что для всех достаточно больших n пространство W_n содержит элементы любых заданных значений l нормирования ν_u, если $l \leq ndr - K$ (поскольку по определению 45 пункт 6 пространство W_n не содержит элементов с нормированием большим чем ndr). В частности, отсюда следует, что пространство A_{nd} содержит элементы любых заданных значений $(-ndr, l)$ нормирования ν, если $l \leq ndr - K$. Таким образом, кольцо A допустимо.

Теперь мы можем повторить все рассуждения выше для пучка $\mathcal{I}(nC')|_C$. Заметим, что $H^0(C, \mathcal{I}(nC')|_C) \simeq A_{nd-1}/A_{nd-2}$, и образ вложения $H^0(C, \mathcal{I}(nC')|_C) \hookrightarrow k[[u,t]]/(t)$ — это $f^{nd-1}(A_{nd-1}) \mod (t)$. Следовательно, для достаточно больших n пространство A_{nd-1} содержит элементы любых заданных значений $(-(nd-1)r, l)$ нормирования ν, если $l \le (nd-1)r - K$. Таким образом, $N_A = r$ и кольцо A строго допустимо, поскольку $\tilde{N}_A | N_A$ и $\tilde{N}_A \ge r$.

Продолжая рассуждать в том же духе, получим, что для достаточно больших n каждое пространство A_n содержит элементы любых заданных значений $(-nr, l)$ нормирования ν, если $l \le nr - K$.

Лемма 28. *Пусть (A, W) — пара Шура ранга r. Тогда $\tilde{A} = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ и $\mathrm{gr}(A) = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} A_n/A_{n-1}$ — конечно порожденные k-алгебры (ср. лемму 23).*

Доказательство Пусть A порождена элементами $t_1, \dots, t_m$ как k-алгебра. Обозначим через $t_{1,s_1}, \dots, t_{m,s_m}$ соответствующие однородные элементы в $\tilde{A}$, где для каждого i s_i обозначает минимальное число, такое что $t_i \in A_{s_i}$. Без ограничения общности мы можем предположить, что среди порождающих есть элементы a, b с $GCD(\nu_t(a), \nu_t(b)) = r$, $\nu(a) = (0, \nu_t(a))$, $\nu(b) = (0, \nu_t(b))$, и элемент c с $\nu(c) = (1, *)$ (так как A строго допустимое кольцо).

Рассмотрим конечно порожденную k-подалгебру $\tilde{A}_1 = k[1_1, t_{1,s_1}, \dots, t_{m,s_m}] \subset \tilde{A}$ (здесь через 1_1 обозначен элемент $1 \in A_1$). Рассуждая как в доказательстве леммы 23 и предложения 5, мы можем построить геометрические данные $(X, C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi)$ ранга r из определения 45. Заметим, что $H^0(X \backslash C, \mathcal{O}_X) \simeq (\tilde{A}_1)_{(1_1)} \simeq A$. Следовательно, пространство, построенное по данным в определении 3.5.3, будет совпадать с A. Тогда по лемме 26 $H^0(X, \mathcal{O}_X(nC')) \simeq A_{nd}$, где $C' = dC$ — обильный дивизор Картье. Следовательно, кольцо $\tilde{A}^{(d)}$ — конечно порожденная k-алгебра (см. например [149, corol. 10.3]). Поэтому $\tilde{A}$ — конечно порожденная k-алгебра (ср. начало доказательства леммы 27). Алгебра $\mathrm{gr}(A)$ конечно порождена, поскольку $\mathrm{gr}(A) \simeq \tilde{A}/(1_1)$.

3.5.4 Категория геометрических данных

В этом параграфе мы даем определение категории $\mathcal{Q}$ геометрических данных, а также альтернативное определение.

Определение 47. Определим категорию $\mathcal{Q}$ геометрических данных следующим образом:

1. Множество объектов:
$$Ob(\mathcal{Q}) = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}_r,$$
где $\mathcal{Q}_r$ обозначает множество геометрических даныых ранга r.

2. Морфизм
$$(\beta, \psi) : [(X_1, C_1, P_1, \mathcal{F}_1, \pi_1, \phi_1)] \longrightarrow [(X_2, C_2, P_2, \mathcal{F}_2, \pi_2, \phi_2)]$$
двух объектов состоит из морфизма поверхностей $\beta : X_1 \to X_2$ и гомоморфизма $\psi : \mathcal{F}_2 \to \beta_* \mathcal{F}_1$ пучков на X_2 таких что:

   (a) $\beta|_{C_1} : C_1 \to C_2$ — морфизм кривых, и $\beta^{-1}(X_2 \backslash C_2) = X_1 \backslash C_1$;

   (b)
$$\beta(P_1) = P_2.$$

(c) Существует непрерывный изоморфизм k-алгебр $h : k[[u,t]] \to k[[u,t]]$ (в естественной линейной топологии, в которой база окрестностей нуля порождена степенями максимального идеала), такой что

$$h(u) = u \mod (u^2) + (t), \quad h(t) = t \mod (ut) + (t^2),$$

и следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} H^0(X_2 \backslash C_2, \mathcal{O}_2) \arrow[r, "\beta^\sharp"] \arrow[d, "\chi_2"] & H^0(X_1 \backslash C_1, \mathcal{O}_1) \arrow[d, "\chi_1"] \\ k[[u]]((t)) \arrow[r, "\hat{h}"] & k[[u]]((t)), \end{tikzcd}$$

где $\hat{h}$ обозначает естественное расширение отображения h до автоморфизма k-алгебры $k[[u]]((t))$.

(d) Существует изоморфизм $k[[u,t]]$-модулей $\xi : k[[u,t]] \simeq h_*(k[[u,t]])$ (который задается умножением на обратимый элемент $\xi \in k[[u,t]]^*$), такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} H^0(X_2 \backslash C_2, \mathcal{F}_2) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\chi_2"] & H^0(X_2 \backslash C_2, \beta_* \mathcal{F}_1) = H^0(X_1 \backslash C_1, \mathcal{F}_1) \arrow[d, "\chi_1"] \\ k[[u]]((t)) \arrow[r, "\hat{\xi}"] & h_*(k[[u]]((t))) = k[[u]]((t)). \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Альтернативное определение категории

Можно дать альтернативное определение категории следующим образом. Множество объектов определяется как и раньше, т.е. объект из $\mathcal{Q}_r$ — тройка $(X, j, \mathcal{F})$ ранга r.

Определим морфизм двух объектов $(X_1, j_1, \mathcal{F}_1) \to (X_2, j_2, \mathcal{F}_2)$ как пару (β, ψ), где $\beta : X_1 \to X_2$ — доминантный морфизм поверхностей, $\psi : \mathcal{F}_2 \to \beta_* \mathcal{F}_1$ — морфизм квазикогерентных пучков, удовлетворяющие следующим условиям:

1. $(\beta^{-1} C_2)_{red} = C_1$
2. существует $h \in Aut_k(T)$ такой что $h_*(T_1) = T_1$,

$$h^*(u) = u \mod (u^2) + (t), \quad h^*(t) = t \mod (ut) + (t^2),$$

и диаграмма

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "h"] & X_1 \arrow[d, "\beta"] \\ T \arrow[r, "j_2"] & X_2 \end{tikzcd}$$

коммутативна;

3. существует $\xi \in Aut_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{O}_T)$ (т.е. элемент из R^*), такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{F}_2)_{P_2} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\cap"] & (\mathcal{F}_1)_{P_1} \arrow[d, "\cap"] \\ R \arrow[r, "\xi"] & R \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Композиция с вторым морфизмом (β', ψ') определяется как $(\beta', \psi') \circ (\beta, \psi) = (\beta'\beta, (\beta')_*(\psi)\psi')$.

Замечание 31. Отметим, что, вообще говоря, морфизм пар $\beta : (X_1, C_1) \to (X_2, C_2)$ индуцирует вложение $H^0(X_2 \backslash C_2, \mathcal{O}_{X_2}) \hookrightarrow H^0(X_1 \backslash C_1, \mathcal{O}_{X_1})$ если и только если $(\beta^{-1}C_2)_{red} = C_1$.

В этом утверждении часть "если"очевидна, докажем его в обратную сторону. Без ограничения общности пусть $d > 0$ — такое целое, что $C_1' = dC_1$ и $C_2' = dC_2$ — эффективные очень обильные дивизоры Картье. Тогда $\beta^* C_1' = mC_2' + E$, где либо $E = 0$, либо E — эффективный дивизор Картье.

Если $A = H^0(X_1 \backslash C_1, \mathcal{O}_{X_1})$, $q = H^0(X_1 \backslash C_1, \mathcal{O}_{X_1}(-E))$ (т.о. q — обратимый идеал), то $\mathrm{Spec}(A) = X_1 \backslash C_1$, $\mathrm{Spec}(\cap_n q^{-n}) = X_1 \backslash \beta^{-1}(C_2)$. Если $B = H^0(X_2 \backslash C_2, \mathcal{O}_{X_2})$, то $A \subset \cap_n q^{-n}$, и модуль $\cap_n q^{-n}$ конечен над B. Если $B \subset A$, то из точной последовательности

$$0 \to A/B \to (\cap_n q^{-n})/B \to (\cap_n q^{-n})/A \to 0$$

следует, что $(\cap_n q^{-n})$ должен быть конечным A-модулем, что ведет к противоречию, если $E \neq 0$.

Замечание 32. Условие на $h^*(u)$, $h^*(t)$ из пункта 2 определения важно для того чтобы установить категорную эквивалентность с категорией пар Шура. Дело в том, что автоморфизмы вида $h^*(u) = c_1 u$, $h^*(t) = c_2 t$, примененнные к паре Шура, приводят (после применения квази-обратного функтора из теоремы 23 ниже) к геометрическим данным с пучком $\mathcal{F}$ отличным от пучка данных исходной пары Шура (т.е. к данным не изоморфным исходным). Этот эффект был известен уже в классической теории КП как действие скейлингового преобразования (см. [136, §4,§7]).

3.5.5 Эквивалентность категорий

Определение 48. Определим отображение $\chi : Ob(\mathcal{Q}) \to Ob(\mathcal{S})$ следующим образом.

Если $q = (X, C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi) \in Ob(\mathcal{Q})$ — элемент из $\mathcal{Q}_r$, то положим

$$\chi(q) = (\chi_1(H^0(X \backslash C, \mathcal{O}_X)), \chi_1(H^0(X \backslash C, \mathcal{F}))) \in \mathcal{S}_r.$$

Как следует из замечаний выше и леммы 27, $\chi(q)$ — пара Шура ранга r.

Следующая лемма будет нужна для доказательства эквивалентности категорий $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{S}$.

Лемма 29. *Пусть $u', v' \in k[[u,t]]$ — ряды с единичными старшими коэффициентами с нормированиями $\nu(u') = (1,0)$, $\nu(v') = (0,1)$. Тогда существует допустимый оператор $T \in \mathrm{Adm}_{\alpha}$, такой что $T^{-1}uT = u'$, $T^{-1}vT = v'$.*

Это легкое следствие лемм 17, 3 и 16, 2b.

Напомним, что для данной категории Υ через Υ^{op} обозначается категория с теми же объектами, но с противоположными морфизмами.

Теорема 23. *Отображение χ из определения 48 индуцирует контравариантный функтор*

$$\chi : \mathcal{Q} \to \mathcal{S}^{op},$$

который является эквивалентностью категорий.

Доказательство Сначала покажем, что отображение χ индуцирует биекцию $\chi_r : \mathcal{Q}_r \to \mathcal{S}_r$.

Это будет следовать из леммы 28, леммы 26, предложения 5, леммы 23, леммы 25 и следующего утверждения (ср. например [118, lemma 9]). Пусть X — проективная схема над полем, $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X, и C' — обильный дивизор Картье на X. Тогда $X \simeq \mathrm{Proj}(S)$ и $\mathcal{F} \simeq \mathrm{Proj}(F)$, где $S = \oplus_{m\ge 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(mC'))$, $F = \oplus_{m\ge 0} H^0(X, \mathcal{F}(mC'))$.

Имея в виду это утверждение, стартуя с геометрических данных $q = (X, C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi)$ ранга r, мы можем восстановить их по паре Шура $\chi(q) = (A, W)$ ранга r следующим образом: $X \simeq \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{nd})$ (см. лемму 26), и $\mathrm{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{nd}) \simeq \mathrm{Proj}\,\tilde{A}$. Дивизор C и точка P однозначно восстанавливаются по дискретному нормированию ν_t и нормированию ν кольца $k[[u]]((t))$. В силу [63, prop.2.6.5] композиция канонических гомоморфизмов $\Gamma_*(\mathcal{F}) \to \Gamma_*(\mathrm{Proj}(\Gamma_*(\mathcal{F}))) \to \Gamma_*(\mathcal{F})$ (обозначения см. там же) — тождественный изоморфизм. В частности, гомоморфизм $\Gamma_*(\mathrm{Proj}(\Gamma_*(\mathcal{F}))) \to \Gamma_*(\mathcal{F})$ сюръективен. По определению геометрических данных $\mathrm{Proj}(\Gamma_*(\mathcal{F})) \simeq \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} W(-ndr, 1))$ (и $\mathrm{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} W(-ndr, 1)) \simeq \mathrm{Proj}\,\tilde{W}$ по [63, prop. 2.4.7]). По лемме 25 $\Gamma_*(\mathrm{Proj}(\Gamma_*(\mathcal{F}))) = \Gamma_*(\mathcal{F})$. Следовательно, канонический гомоморфизм $\mathrm{Proj}(\Gamma_*(\mathcal{F})) \to \mathcal{F}$ должен быть изоморфизмом (иначе существует $n \gg 0$, при котором $H^0(X, \mathrm{Proj}(\Gamma_*(\mathcal{F}(nC'))) \to H^0(X, \mathcal{F}(nC'))$ — не изоморфизм). Таким образом, $\mathcal{F} \simeq \mathrm{Proj}(\tilde{W})$. Гомоморфизмы π и ϕ естественно определяются по вложениям подпространств A, W в $k[[u]]((t))$.

Обратно, стартуя с пары $(A, W) \in \mathcal{S}_r$, по лемме 28, лемме 23, предложению 5 мы можем построить геометрические данные $q \in \mathcal{Q}_r$. Применяя к ним отображение χ, мы получим ту же пару (ср. доказательство леммы 28).

Теперь покажем как определить функтор χ на морфизмах. Начнем с морфизма $(\beta, \psi) : q_1 \to q_2$ между двумя данными. У нас есть автоморфизм $h : k[[u,t]] \to k[[u,t]]$ из определения 47, 2c. По лемме 29 существует допустимый оператор $T_1 \in \mathrm{Adm}_1$, такой что

$$T_1^{-1} u T_1 = h(u), \quad T_1^{-1} v T_1 = h(v).$$

Более того, как следует из доказательства леммы 17, мы можем найти T_1, такой что $1 \cdot T_1 = 1$.

Автоморфизм h продолжается до автоморфизма колец $h : k[[u]]((t)) \to k[[u]]((t))$ очевидным образом. Таким образом,

$$k[[u]]((t)) \ni f(u,v) \mapsto f(h(u), h(v)) = f(T_1^{-1} u T_1, T_1^{-1} v T_1) = T_1^{-1} f(u,v) T_1 \in k[[u]]((t)).$$

Изоморфизм $k[[u,t]]$-модулей $\xi : k[[u,t]] \to h_* k[[u,t]]$ из определения 47, 2d задается умножением на один обратимый элемент $\xi \in k[[u,t]]^*$. Он определяет 1-допустимый оператор $T_2 = \psi_1^{-1}(\xi)$ (см. следствие 10). Так как это оператор с постоянными коэффициентами, $T_2^{-1} A T_2 = A$ для любого подмножества $A \subset k[[u]]((t))$.

Теперь пусть $(A_i, W_i) = \chi(q_i)$, $i = 1, 2$. Так как из определений 3.5.3 и 47, 2c мы имеем, что

$$\begin{array}{ccc} H^0(X_2 \backslash C_2, \mathcal{O}_2) & \xrightarrow{\beta^*} & H^0(X_1 \backslash C_1, \mathcal{O}_1) \\ \downarrow{\scriptstyle \chi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \chi_1} \\ k[[u]]((t)) & \xrightarrow{h} & k[[u]]((t)), \end{array}$$

получаем

$$T_1^{-1} T_2^{-1} A_2 T_2 T_1 = T_1^{-1} A_2 T_1 = h(A_2) = h\chi_2(H^0(X_2 \backslash C_2, \mathcal{O}_2)) \subset \chi_1(H^0(X_1 \backslash C_1, \mathcal{O}_1)) = A_1.$$

С другой стороны, из определений 3.5.3 и 47, 2d мы имеем, что

$$\begin{array}{ccc} H^0(X_2\backslash C_2,\mathcal{F}_2) & \xrightarrow{\widehat{\psi}} & H^0(X_2\backslash C_2,\beta_*\mathcal{F}_1)=H^0(X_1\backslash C_1,\mathcal{F}_1) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \chi_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \chi_1} \\ k[[u]]((t)) & \xrightarrow{\xi} & h_*(k[[u]]((t)))=k[[u]]((t)). \end{array}$$

Изоморфизм ξ полностью определен образом $\xi(1)=1\cdot T_2$. Каждый элемент $k[[u]]((t))$-модуля $k[[u]]((t))$ имеет вид $a\cdot 1$, где $a\in k[[u]]((t))$. Отсюда

$$\xi(a\cdot 1)=h(a)\cdot\xi(1)=\xi(1)T_1^{-1}aT_1.$$

Следовательно, мы можем заключить, что $\xi=T\overset{\text{def}}{=}T_2T_1$, принимая во внимание следующую последовательность равенств:

$$\xi(a\cdot 1)=1\cdot T_2\cdot T_1^{-1}aT_1=1\cdot T\cdot T^{-1}aT=aT.$$

Итак, имеем:

$$W_2T=\xi(\chi_2(H^0(X_2\backslash C_2,\mathcal{F}_2)))\subset\chi_1(H^0(X_1\backslash C_1,\mathcal{F}_1))=W_1.$$

T — 1-допустимый оператор и $T^{-1}A_2T\subset A_1$ и $W_2T\subset W_1$. Следовательно, мы построили морфизм

$$\chi(\beta,\psi):(A_2,W_2)\to(A_1,W_1)$$

и наш функтор определен.

Покажем, что χ задает анти-эквивалентность категорий. Для этого нам осталось построить обратный функтор на морфизмах в $\mathcal{S}$.

Пусть $T:(A_2,W_2)\to(A_1,W_1)$ — морфизм пар Шура, определенный с помощью допустимого оператора $T\in\mathrm{Adm}_1$. Это означает, что имеются вложения

$$T^{-1}A_2T\subset A_1\quad\text{и}\quad W_2T\subset W_1. \tag{3.25}$$

Пусть X_i — проективные поверхности, определенные по A_i, и $\mathcal{F}_i$ — пучки без кручения, определенные по W_i, $i=1,2$. Заметим, что W_1 имеет естественную структуру $T^{-1}A_2T$-модуля. Следовательно, вложения (3.25) определяют морфизм (так как сопряжение и умножение на T сохраняет фильтрацию на A_2 и на W_2, и следовательно определены вложения градуированных колец и модулей) $\beta:X_1\to X_2$ и морфизм пучков $\psi:\mathcal{F}_2\to\beta_*\mathcal{F}_1$. Как видно из имеющегося вложения градуированных колец, свойства 2a и 2b определения 47 для морфизма β выполняются.

Так как T 1-допустим, имеем $T^{-1}k[[u,t]]T\simeq k[[u,t]]$, что дает изоморфизм $h:k[[u,t]]\to k[[u,t]]$. Более того, T задает изоморфизм $k[[u]]((t))$-модуля $k[[u]]((t))$ и $T^{-1}k[[u]]((t))T$-модуля $k[[u]]((t))T$. Так как $k[[u]]((t))$ порожден элементом 1 как $k[[u]]((t))$-модуль, $T:k[[u]]((t))\to k[[u]]((t))$ определяется его образом $\xi\overset{\text{def}}{=}1\cdot T\in k[[u,t]]$. То есть ξ — обратимый элемент, $\xi\in k[[u,t]]^*$. Каждый элемент $k[[u]]((t))$ однозначно представляется в виде $a\cdot 1$, где $a\in k[[u]]((t))$. Имеем

$$T(a\cdot 1)=(1\cdot T)T^{-1}aT=h(a)\xi.$$

Легко проверяется, что h удовлетворяет условию 2c определения 47 и ξ определяет изоморфизм $k[[u,t]]$-модулей

$$\xi:k[[u,t]]\to k[[u,t]],$$

который удовлетворяет условию 2d определения 47. Это завершает доказательство.

Обозначим множество классов изоморфных пар Шура через $\mathcal{S}/\operatorname{Adm}_1$ и множество классов изоморфных геометрических данных через $\mathcal{M}$. По теореме 23 получаем

Следствие 11. *Существует естественная биекция*

$$\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{S}/\operatorname{Adm}_1.$$

Комбинируя теорему 21 и теорему 23 получаем

Теорема 24. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством классов эквивалентных* 1*-квази-эллиптических строго допустимых конечно порожденных* k*-алгебр операторов в* $\hat{D}$ *ранга* r *(см. определения 30, 36, 41) и множеством классов изоморфных геометрических данных* $\mathcal{M}$ *ранга* r *(см. определения 45, 47).*

Замечание 33. Возникает естественный вопрос: эквивалентны ли категория коммутативных алгебр операторов и категория пар Шура?

Ответ на этот вопрос отрицательный уже в одномерном случае, см. [107], введение. Можно естественным образом определить категорию коммутативных алгебр операторов. Но она не будет эквивалентна категории пар Шура и категории геометрических данных, поскольку в конструкции в теореме 21, которая строит пару Шура по кольцу операторов, был важен выбор операторов L_1, L_2; при выборе других операторов мы получим другую пару Шура, изоморфную первой.

Замечание 34. Должно быть возможно расширить категорию геометрических данных, чтобы включить в нее также схемы не конечного типа над k, и доказать эквивалентность этой категории и расширенной категории пар Шура, где кольцо A не обязательно конечно порождено над k.

3.5.6 Модули Бейкера-Ахиезера

В этом разделе мы дадим описание многомерных функций Бейкера-Ахиезера из теорем Кричевера (см. начало главы 2 и первый раздел главы 1) и модулей Бейкера-Ахиезера из работ разных авторов в терминах сечений семейств спектральных пучков.

Накаяшики ввел модули Бейкера – Ахиезера (БА-модули) на алгебраических многообразиях в работах [112], [113] для построения примеров коммутирующих операторов с матричными коэффициентами. Они являются естественными обобщениями бимодулей Дринфельда [7] (дальнейшее развитие этих идей см. в [129], [130], [131]). БА-модуль M состоит из функций $\psi(x, P)$, $x \in \mathbb{C}^n$, $P \in X$, где X — n-мерное проективное алгебраическое многообразие. При фиксированном x ψ является сечением пучка на X, кроме того, ψ имеет существенную особенность на дивизоре $Y \subset X$. Элементы $\psi \in M$ обладают следующими свойствами:

- $\partial_{x_j}\psi \in M$ и $f(x)\psi \in M$, где $f(x)$ — аналитическая функция в некоторой окрестности фиксированной точки x_0;
- $\lambda\psi \in M$ для любой рациональной функции λ на X с полюсом в Y.

Эти свойства означают, что M является модулем над кольцом дифференциальных операторов $\mathcal{D}_n = \mathcal{O}[\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}]$, где $\mathcal{O}$ — кольцо аналитических функций в окрестности x_0, а также модулем над кольцом рациональных функций A_Y на X с полюсом в Y. Особый интерес представляют конечнопорожденные свободные БА-модули над $\mathcal{D}_n$, поскольку в этом случае конструкция позволяет строить коммутативные кольца дифференциальных операторов. Выберем базис $\psi_1(x,P),\dots,\psi_N(x,P)$ в M. Тогда для $\lambda\in A_Y$ существует единственный дифференциальный оператор $D(\lambda)$ с матричными коэффициентами такой, что

$$D(\lambda)\Psi(x,P)=\lambda(P)\Psi(x,P),$$

где $\Psi(x,P)=(\psi_1(x,P),\dots,\psi_N(x,P))^\top$. Для другой функции $\mu\in A_Y$

$$D(\mu)\Psi(x,P)=\mu(P)\Psi(x,P),$$

откуда вытекает равенство $(D(\lambda)D(\mu)-D(\mu)D(\lambda))\Psi=0$. Из свободности $\mathcal{D}_n$-модуля M следует, что оператор $D(\lambda)D(\mu)-D(\mu)D(\lambda)$ нулевой, то есть $D(\lambda)$ и $D(\mu)$ коммутируют.

По мотивам определения 45, назовем пучок $\mathcal{F}$ на проективном многообразии X *пучком Кричевера (К-пучком)*, если он является когерентным пучком без кручения и обладает следующим свойством:

$$\dim_{\mathbb{C}}H^0(X,\mathcal{F}(mY'))=\dim_{\mathbb{C}}\{\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/(x_1,\dots x_n)^{md+1}\},\tag{3.26}$$

Теорема 25. *Пусть X — спектральное многообразие коммутативного кольца B n-мерных дифференциальных операторов ранга 1 со скалярными коэффициентами, старшие символы которых имеют постоянные коэффициенты.*

На X существует семейство пучков Кричевера. Более точно, на $X\times U$, где $U\subset\mathbb{C}^n$ — некоторая область, существует пучок $\mathcal{F}_x$ такой, что $\mathcal{F}_x|_{X\times x}$ является пучком Кричевера ранга 1. Кроме того, определены операторы ковариантного дифференцирования $\nabla_1,\dots,\nabla_n$

$$\nabla_i:\mathrm{H}^0(X\times U,\mathcal{F}_{x,m})\to\mathrm{H}^0(X\times U,\mathcal{F}_{x,m+1}),\ \nabla_i\nabla_j=\nabla_j\nabla_i,$$

где $\mathcal{F}_{x,m}=\mathcal{F}_x(m(Y'\times U))$. Множество глобальных сечений

$$\cup_{m=0}^{\infty}\mathrm{H}^0(X\times U,\mathcal{F}_{x,m})$$

является свободным модулем ранга 1 над $\mathbb{C}[\nabla_1,\dots,\nabla_n]$.

Доказательство Определим пучок $\mathcal{F}_x$ на $X\times U$ следующим образом. Рассмотрим $B\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_U$-модуль, где $\mathcal{O}_U$ — кольцо аналитических на U функций:

$$M=\mathcal{D}_n(\psi(x,k))e^{-x_1k_1-\ldots-x_nk_n},$$

где ψ — функция из теоремы 16. Как следует из этой теоремы, M — модуль без кручения. На нем определена естественная фильтрация $\{M_i\}$ по степени относительно k, и очевидно, что M с этой фильтрацией — фильтрованный $B\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_U$-модуль. Таким образом, $\tilde{M}=\oplus_{q=0}^{\infty}M_i$ — градуированный $\tilde{B}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_U$-модуль без кручения. Далее, заметим, что, как и в доказательстве теоремы 18, мы имеем: $gr(M)\simeq\mathcal{O}_U[\xi_1,\dots,\xi_n]\supset gr(B)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_U$ — конечно порожденный модуль над $gr(B)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_U$. Тогда в силу [2, Ch.III, §2.9, corol.1] $\tilde{M}$ — конечно порожденный $\tilde{B}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_U$-модуль, а потому $\mathcal{F}_x:=\mathrm{Proj}(\tilde{M})$ — когерентный пучок без кручения на $X\times U$.

Заметим, что определены пучки без кручения $\mathcal{F}_{x,m}:=\mathrm{Proj}(\tilde{M}(m))$; имеем $\mathcal{F}_{x,m}\hookrightarrow\mathcal{F}_{x,m+1}$, поскольку $\tilde{M}(m)\hookrightarrow\tilde{M}(m+1)$, и $\mathcal{F}_{x,md}=\mathcal{F}_x(mY')$, поскольку в силу [27, ch.II, prop.5.12] $\mathcal{F}_x(mY')\simeq\mathrm{Proj}(\tilde{M}^{(d)}(m))$, и $\mathrm{Proj}(\tilde{M}^{(d)}(m))\simeq\mathrm{Proj}(\tilde{M}(md))$ в силу [63, prop. 2.4.7].

Утверждение о том, что $\mathcal{F}_x$ задает семейство пучков Кричевера следует из более сильного утверждения:

Лемма 30. *(ср. лемма 25) Имеем $H^0(X\times U,\mathcal{F}_{x,m})=M_m$.*

Доказательство По определению, мы всегда имеем $M_m \subset H^0(X\times U,\mathcal{F}_{x,m})$. Пусть $a\in H^0(X\times U,\mathcal{F}_{x,m})$, $a\notin M_m$. Тогда $a=(a_1,\dots,a_k)$, где $a_i\in M(\tilde{m})_{(b_i)}$, $b_i\in\tilde{B}_d$ — порождающие пространства $\tilde{B}_d$ (а также порождающие алгебры $\tilde{B}^{(d)}$), причем $x_1=1^d$ и $a_i=a_j$ в $\tilde{B}_{b_ib_j}$.

Имеем: $a_i=\tilde{a}_i/b_i^{k_i}$ ($\tilde{a}_i\in M_{k_id+m}$), $a_1=\tilde{a}_1/1^{k_1}$ и $k_1>0$, т.к. $a\notin M_m$. Действительно, если бы $\tilde{a}_1\in M_m$, то $a=\tilde{a}_1$, т.к. $\tilde{M}(m)$ — $\tilde{B}$-модуль без кручения — противоречие.

Таким образом, $\tilde{a}_1\in(\tilde{M}(m))_{k_1}\backslash(\tilde{M}(m))_{k_1-1})$. Тогда для $b_i\in\tilde{B}_d\backslash\tilde{B}_{d-1}$ (такие элементы существуют по определению числа d) имеем $b_i^{k_i}\in\tilde{B}_{dk_i}\backslash\tilde{B}_{dk_i-1}$, и следовательно, $\tilde{a}_1b_i^{k_i}\in(\tilde{M}(m))_{k_1+dk_i}\backslash(\tilde{M}(m))_{k_1+dk_i-1}$. С другой стороны, мы имеем равенство $\tilde{a}_1b_i^{k_i}=\tilde{a}_i1^{k_1}$, и $\tilde{a}_i1^{k_1}\in(\tilde{M}(m))_{k_1+dk_i-1}\subset(\tilde{M}(m))_{k_1+dk_i}$, противоречие. Значит, $a\in M_m$.

Пучок $\mathcal{F}_x$ имеет ранг 1, т.к. мы рассматриваем кольцо B ранга 1 (ср. [20, lemma 4.3]).

Заметим, что из леммы вытекает и существование дифференцирований ∇_i: для $m\in M_i$ определим $\nabla_i(m)=\partial_i(me^{x_1k_1+\dots+x_nk_n})e^{-x_1k_1-\dots-x_nk_n}\in M_{i+1}$.

Последнее утверждение теоремы следует из теоремы 16.

Пусть B — коммутативное кольцо дифференциальных операторов, X — спектральное многообразие из теоремы 25. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 26. *На X существует свободный модуль Бейкера – Ахиезера ранга 1, порожденный*

$$\psi(x,k)=\xi(x,k)e^{x_1k_1+\dots+x_nk_n},$$

где $\xi(x,k)$ – сечение пучка Кричевера на X, такой, что образом морфизма $A_Y\to\mathcal{D}_n$, заданного формулой $D(\lambda)\psi=\lambda\psi$, $\lambda\in A_Y$, является кольцо B.

Теорема следует непосредственно из теоремы 16. А именно, положим

$$M=\mathcal{D}_n\psi(x,k).$$

M — модуль Бейкера – Ахиезера, поскольку всякая мероморфная функция на X с полюсом в Y является элементом коммутативного кольца операторов, коммутирующих с $L_1,\dots,L_n$. Ясно, что этот модуль свободен и порожден $\psi(x,k)$.

Замечание 35. Для кольца $\hat{D}$ и для поверхности из определения 45 можно ввести естественное обобщение понятия формального модуля Бейкера-Ахиезера или формальных функций Бейкера-ахиезера как собственных векторов кольца B из теоремы 24 (ср. [19, §4]), хотя этот модуль (или функции) в общем случае будут отличаться от тех, которые рассматривались в работе [19].

А именно, рассмотрим выражение $e^{\varepsilon}=\exp(x_1z_1^{-1}+x_2z_2^{-1})$ и определим действие

$$\partial_1(e^{\varepsilon})=z_1^{-1}e^{\varepsilon},\quad \partial_2(e^{\varepsilon})=z_2^{-1}e^{\varepsilon},$$

$$\partial_1^{-1}(e^{\varepsilon})=z_1e^{\varepsilon},\quad \partial_2^{-1}(e^{\varepsilon})=z_2e^{\varepsilon}.$$

Теперь определим $\hat{D}$-модуль $M=\hat{D}e^{\varepsilon}$. Будем называть его элементы формальными функциями Бейкера-Ахиезера.

Пусть B,P,Q,L_1,L_2,S — кольцо и операторы, рассматривавшиеся в параграфе 3.4.2. Определим формальную БА-функцию, соответствующую B как

$$\psi_B(x,z)=S^{-1}(e^{\varepsilon}).$$

Тогда имеем:

$$P\psi_B(x,z)=z_2^{-k}\psi_B(x,z),\quad Q\psi_B(x,z)=z_1^{-1}z_2^{1-l}\psi_B(x,z).$$

Заметим, что собственные значения отличны от символов операторов даже если P,Q — дифференциальные операторы в частных производных как в [19, §4].

В общем случае, для произвольного элемента $b \in B$ имеем $b\psi_B(x,z) = a\psi_B(x,z)$, где a — ряд от переменных z_1, z_2. Если применить замену переменных ψ_1 из следствия 10 к элементу a, мы получим ряд от u, t, который является выражением мероморфной функции, соответствующей элементу b, на поверхности X в терминах локальных параметров точки P (см. определение 45). Таким образом, M может рассматриваться как аналог БА-модуля, и $\psi_1(\psi_B(x,z))$ может рассматриваться как аналог BA-функции из [19, §4].

Глава 4

Формальные пунктированные ленты (риббоны) и пучки без кручения на них

В этой главе излагается теория формальных пунктированных лент (риббонов) и пучков без кручения на них. Результаты этой главы содержатся в работах [84], [85].

4.1 Формальные пунктированные ленты (риббоны) и двумерные локальные поля

В этом разделе вводятся определения риббонов и пучков без кручения на них, напоминается конструкция Паршина, строящая по геометрическим спектральным данным пару подпространств $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ в двумерном локальном поле $k((u))((t))$ (другая версия пар Шура, тесно связанная с парами из предыдущей главы), а также ее обобщение на данные, состоящие из риббона и пучка без кручения на нем. В конце раздела доказывается теорема классификации данных, состоящих из риббона, пучка без кручения на нем, и некоторых тривиализаций, в терминах пар $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$, а также объясняется связь пар $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ и (A, W).

4.1.1 Вводные замечания

Риббоны были введены в работе [84], чтобы решить проблему неоднозначности соответствия Кричевера в размерности 2 (см. Введение). Термин "риббон"произошел из работы [77], где был определен похожий объект (точнее, наши риббоны — более широкие объекты: риббоны из [77] — это $(C, \mathcal{A}_0)$ в нашей терминологии). Мы раскладываем отображение Кричевера в композицию следующих отображений

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{геометрические данные} \\ (X, C, p, \mathcal{F}, e_p, u, t) \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{c} \text{геометрические данные} \\ \text{на риббонах} \end{array} \right\} \mapsto \left\{ \text{ пары } (\mathbb{W}, \mathbb{A}) \right\}$$

4.1.2 Категория формальных пунктированных лент (риббонов)

Пусть S — нетерова базисная схема.

Определение 49. Формальная лента, или риббон $(C, \mathcal{A})$ над S состоит из следующих данных.

1. Плоское семейство приведенных алгебраических кривых $\tau : C \to S$.

2. Пучок $\mathcal{A}$ коммутативных $\tau^{-1}\mathcal{O}_S$-алгебр на C.

3. Убывающая фильтрация подпучками $(\mathcal{A}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ пучка $\mathcal{A}$ при помощи $\tau^{-1}\mathcal{O}_S$-подмодулей, которая удовлетворяет следующим аксиомам:

   (a) $\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}$, $1 \in \mathcal{A}_0$ (таким образом, $\mathcal{A}_0$ — подкольцо, и для любого $i \in \mathbb{Z}$ пучок $\mathcal{A}_i$ — это $\mathcal{A}_0$-подмодуль);

   (b) $\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_1$ — структурный пучок $\mathcal{O}_C$ кривой C;

   (c) для каждого i пучок $\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+1}$ (который $\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_1$-модуль по (3a)) — это когерентный пучок на C, плоский над S, и для любой точки $s \in S$ пучок $\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+1}\mid_{C_s}$ не содержит когерентных подпучков с конечным носителем и изоморфен пучку $\mathcal{O}_{C_S}$ на плотном открытом подмножестве;

   (d) $\mathcal{A} = \varinjlim_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}_i$, и $\mathcal{A}_i = \varprojlim_{j>0} \mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+j}$ для каждого i.

Замечание 36. Из пункта (3c) определения следует, что если C_s (для $s \in S$) – неприводимая кривая, то пучок $\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+1}\mid_{C_s}$ является пучком без кручения на C_s для любого $i \in \mathbb{Z}$.

Обозначение. Для краткости будем называть риббон $(C, \mathcal{A})$ над $\operatorname{Spec} R$, где R – это кольцо, как риббон над R.

Пример 10. Типичный и наиболее важный пример риббона — риббон, возникающий из спектральной поверхности и дивизора. Пусть X — алгебраическая поверхность над полем k, и $C \subset X$ — приведенный эффективный дивизор Картье. Тогда можно следующим образом построить риббон $(C, \mathcal{A})$ над k:

$$\mathcal{A} := \mathcal{O}_{\hat{X}_C}(*C) = \varinjlim_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\hat{X}_C}(-iC) = \varinjlim_{i\in\mathbb{Z}} \varprojlim_{j\geq 0} J^i/J^{i+j}$$

$$\mathcal{A}_i := \mathcal{O}_{\hat{X}_C}(-iC) = \varprojlim_{j\geq 0} J^i/J^{i+j}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

где $\hat{X}_C$ — формальная схема, являющаяся пополнением X вдоль C, и J — пучок идеалов, определяющий кривую C на X (пучок J — обратимый пучок).

Предложение 7. *1. Для любого $i \geq 0$ окольцованное пространство $X_i = (C, \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1})$ является схемой, плоской над S.*

2. Для любого $j \in \mathbb{Z}$ и любого $i \geq 0$ пучок $\mathcal{A}_j/\mathcal{A}_{j+i+1}$ — когерентный пучок на X_i, плоский над S.

3. Если $X_\infty = (C, \mathcal{A}_0)$, то X_∞ — локально окольцованное пространство, и имеются замкнутые вложения схем

$$X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_i \subset X_{i+1} \subset \ldots,$$

такие что $X_\infty = \varinjlim_{i\geq 0} X_i$ в категории локально окольцованных пространств.

Доказательство Докажем первое утверждение в предложении.

Вначале покажем, что X_i являются локально окольцованными пространствами. По определению, мы имеем, что X_0 это схема $(C, \mathcal{O}_C)$. Следовательно, X_0 является локально окольцованным пространством. Мы имеем, что для каждого $i \geq 0$ подпучок $\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+1} \subset \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1}$ является нильпотентным пучком идеалов в силу (3a) определения 49. Рассмотрим следующую точную тройку пучков на C:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+1} \longrightarrow \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1} \xrightarrow{\pi_i} \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_i \longrightarrow 0. \tag{4.1}$$

Для каждой точки $P \in C$ рассмотрим росток в P каждого пучка из этой последовательности. Получим следующую точную последовательность:

$$0 \longrightarrow (\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+1})_P \longrightarrow (\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1})_P \xrightarrow{(\pi_i)_P} (\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_i)_P \longrightarrow 0. \tag{4.2}$$

Применим теперь индукцию на i. По индукционному предположению полагаем, что кольцо $(\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_i)_P$ является локальным кольцом с максимальным идеалом $\mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{M}'$ – идеал $\pi_i^{-1}(\mathcal{M})$. Тогда этот идеал является единственным максимальным идеалом в $(\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1})_P$. Поэтому это кольцо является локальным кольцом. В самом деле, если $a \in (\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1})_P \backslash \mathcal{M}'$, тогда a должен быть обратимым в кольце $(\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1})_P$, так как $(\pi_i)_P(a)$ обратим в кольце $(\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_i)_P$, и $(\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+1})_P$ – нильпотентный идеал в кольце $(\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1})_P$.

Во-вторых, покажем, что есть естественные морфизмы $X_i \xrightarrow{\tau_i} S$ локально окольцованных пространств для каждого $i \geq 0$, и что эти морфизмы являются плоскими. Применим индукцию по $i \geq 0$. Для каждого $i \geq 0$ морфизм τ_i состоит из топологического морфизма $\tau : C \to S$ и морфизма пучков

$$\tau_i^\sharp \ : \ \mathcal{O}_S \to \tau_*(\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1}), \qquad \text{где}$$
$$\tau_i^\sharp(U) \ : \ \mathcal{O}_S(U) \ni a \longmapsto a \cdot 1 \in \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1}(\tau^{-1}(U))$$

для каждого открытого подмножества $U \subset S$. Для каждой $P \in C$ морфизм

$$(\tau_i^\sharp)_P \ : \ (\mathcal{O}_S)_{\tau(P)} \longrightarrow (\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1})_P$$

является локальным морфизмом, потому что его композиция с морфизмом $(\pi_i)_P$ является локальным морфизмом по предположению индукции.

Теперь для каждого $i \geq 0$ морфизм τ_i представляет собой плоский морфизм в виду известных результатов касательно плоских модулей (см. например [91, ch. 2, §3]), так как для каждой $P \in C$ $(\mathcal{O}_S)_{\tau(P)}$-модули $(\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+1})_P$ и $(\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_i)_P$ являются плоскими $(\mathcal{O}_S)_{\tau(P)}$-модулями по предположению индукции по i и по (3c) в определении 42(49). Поэтому мы получаем из точной последовательности (4.2) что $(\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1})_P$ является плоским $(\mathcal{O}_S)_{\tau(P)}$-модулем.

В третьих, мы покажем, что локально окольцованное пространство X_i это схема для каждой $i \geq 0$. Рассмотрим любое аффинное открытое подмножество $U \subset C$. Последовательность (4.1) ведет к следующей точной тройке:

$$0 \to \mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+1}(U) \longrightarrow \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1}(U) \xrightarrow{\pi} \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_i(U) \longrightarrow 0. \tag{4.3}$$

Эта последовательность является точной последовательностью, потому что пучок $\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+1}$ является когерентным пучком на C, и U – это аффинное множество. Имеем, что $\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1}(U)$ и $\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_i(U)$ кольца, и мы хотим показать, что $(U, (\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1})|_U) \simeq \mathrm{Spec}(\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1}(U))$.

Ясно, что топологическое пространство $\underline{\mathrm{Spec}}(\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1}(U)) = U$. В силу этого $\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+1}(U)$ является нильпотентным идеалом в кольце $\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1}(U)$, из точной последовательности (4.3), по индукции по i получаем, что тождественное отображение на кольце $\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1}(U)$ индуцирует хорошо определенный морфизм пучков на U :

$$\gamma \ : \ \widetilde{\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1}(U)} \longrightarrow (\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1}) \, |_U \ ,$$

где для любого $\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1}(U)$-модуля N из $\widetilde{N}$ обозначим соответствующий квазикогерентный пучок на $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1}(U))$. Отображение γ это изоморфизм, что вытекает из следующей точной диаграммы пучков на U:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+1}(U)} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1}(U)} & \to & \widetilde{\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_i(U)} & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & (\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+1})|_U & \longrightarrow & (\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1})|_U & \to & (\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1})|_U & \longrightarrow 0
\end{array}$$

Левая вертикальная стрелка этой диаграммы является изоморфизмом (3c) из 49. Правая вертикальная стрелка является изоморфизмом по индукции по i. Следовательно, средняя вертикальная стрелка γ также изоморфизм. Таким образом, мы доказали, что X_i это схема для каждого $i \geq 0$. Это завершает доказательство первого утверждения предложения.

Докажем второе утверждение предложения. Как и выше, доказательство проведем по индукции по i. Мы имеем следующую точную тройку $\mathcal{O}_{X_i}$-модулей:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_{j+i}/\mathcal{A}_{j+i+1} \longrightarrow \mathcal{A}_j/\mathcal{A}_{j+i+1} \longrightarrow \mathcal{A}_j/\mathcal{A}_{j+i} \longrightarrow 0.$$

По определению, пучок $\mathcal{A}_{j+i}/\mathcal{A}_{j+i+1}$ является когерентным пучком на X_i, и плоским пучком над S. Пучок $\mathcal{A}_j/\mathcal{A}_{j+i}$ является когерентным пучком $\mathcal{O}_{X_{i-1}}$-модулей, и плоским пучком над S, по предположению индукции. Поэтому этот пучок также является когерентным пучком модулей $\mathcal{O}_{X_i}$, так как обе модульные структуры совпадают на этом пучке. Тем самым, пучок $\mathcal{A}_j/\mathcal{A}_{j+i+1}$ является когерентным (см. [27, prop. 5.7]) и плоским над S (см. [27, prop. 9.1]). Мы доказали второе утверждение предложения.

Третье утверждение предложения легко следует из точной последовательности (4.1).

Определение 50. 1. Морфизм φ риббонов над S

$$\varphi : (C, \mathcal{A}) \to (C', \mathcal{A}')$$

— это морфизм окольцованных пространств над S, сохраняющий фильтрации, т. е. для отображения $\varphi^\sharp : \mathcal{A}' \to \varphi_*(\mathcal{A})$, для любых $i \in \mathbb{Z}$ верно

$$\varphi^\sharp(\mathcal{A}'_i) \subset \varphi_*(\mathcal{A}_i).$$

2. Изоморфизм риббонов — это морфизм, который имеет правый и левый обратный.

Замена базы

Обозначение. Будем также обозначать риббон $(C, \mathcal{A})$ как $\mathring{X}_\infty$.

Для ленты $\mathring{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ над S, и морфизма $\alpha : S' \longrightarrow S$ нетеровых схем определим следующим образом ленту с заменой базы $\mathring{X}'_\infty = (C', \mathcal{A}')$ над S':

$$C' := C \times_S S',$$

$$\mathcal{A}'_j := \varprojlim_{i \geq 1} (\mathcal{A}_j/\mathcal{A}_{j+i}) \boxtimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$$

для любого $j \in \mathbb{Z}$. Из утверждения 2 предложения 7 для всех $j \in \mathbb{Z}$, $i \geq 0$ имеем

$$(\mathcal{A}_{j+1}/\mathcal{A}_{j+i+1}) \boxtimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'} \subseteq (\mathcal{A}_j/\mathcal{A}_{j+i+1}) \boxtimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}.$$

Следовательно, имеем

$$\ldots \subset \mathcal{A}'_{j+1} \subset \mathcal{A}'_j \subset \mathcal{A}'_{j-1} \subset \ldots,$$

и определим

$$\mathcal{A}' := \varinjlim_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}'_i.$$

По определению имеем $\mathcal{A}'_j/\mathcal{A}'_{j+1} = (\mathcal{A}_j/\mathcal{A}_{j+1}) \boxtimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ для любого $j \in \mathbb{Z}$, и все аксиомы из определения риббона выполняются.

Предложение 8. *Для риббона $\mathring{X}'_\infty = (C', \mathcal{A}')$, полученного с помощью замены базы $S' \to S$, выполняются следующие свойства:*

- $X'_i = X_i \times_S S'$ *для любого* $i \geq 0$.
- $\mathcal{A}'_j/\mathcal{A}'_{j+i+1} = (\mathcal{A}_j/\mathcal{A}_{j+i+1}) \boxtimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S'}$ *для любого* $j \in \mathbb{Z}$ *и любого* $i \geq 0$.

Доказательство. Доказательство ясно из определения риббона и предложения 7.

4.1.3 Когерентные пучки на риббоне

Способом, аналогичным определению ленты, можно определить понятие *пучка без кручения* на ленте.

Определение 51. Пусть $\mathring{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ – риббон над схемой S. Будем говорить, что $\mathcal{N}$ — пучок без кручения ранга r на $\mathring{X}_\infty$, если $\mathcal{N}$ — пучок $\mathcal{A}$-модулей на C с убывающей фильтрацией $(\mathcal{N}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ в $\mathcal{N}$ по $\mathcal{A}_0$-подмодулям, который удовлетворяет следующим аксиомам.

1. $\mathcal{N}_i\mathcal{A}_j \subseteq \mathcal{N}_{i+j}$ для любых i, j.

2. Для каждого i пучок $\mathcal{N}_i/\mathcal{N}_{i+1}$ — когерентный пучок на C, плоский над S, и для любого $s \in S$ пучок $\mathcal{N}_i/\mathcal{N}_{i+1}|_{C_S}$ имеет когерентный подпучок с конечным носителем, и изоморфен $\mathcal{O}_{C_S}^{\oplus r}$ на открытом плотном множестве

3. $\mathcal{N} = \varinjlim\limits_i \mathcal{N}_i$ и $\mathcal{N}_i = \varprojlim\limits_{j>0} \mathcal{N}_i/\mathcal{N}_{i+j}$ для каждого i.

Замечание 37. Из утверждения 2 определения 51 следует, что если C_s (для $s \in S$) является неприводимой кривой, то пучок $\mathcal{N}_i/\mathcal{N}_{i+1} \mid_{C_s}$ — это пучок без кручения ранга r на C_s для любых $i \in \mathbb{Z}$.

Если в этом определении ослабить условие 2, сказав, что $\mathcal{N}_i/\mathcal{N}_{i+1}$ — квазикогерентный пучок $\mathcal{O}_C$-модулей, мы получим определение *инд-про-квазикогерентного пучка.*

Инд-про-квазикогерентные пучки

Определение 52. Пусть $\mathring{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ – риббон, и $\mathcal{F}$ – пучок $\mathcal{A}$-модулей. Будем называть $\mathcal{F}$ *инд-про-когерентным (Инд-про-квазикогерентным)* на $\mathring{X}_\infty$ если он имеет убывающую фильтрацию пучка $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ со следующими свойствами.

1. $\mathcal{A}_i\mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_{i+j}$.

2. $\mathcal{F}_j/\mathcal{F}_{j+1}$ является когерентным (квазикогерентным) $\mathcal{O}_C$-модулем для любого j.

3. $\mathcal{F}_i = \varprojlim\limits_j \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i+j}$.

4. $\mathcal{F} = \varinjlim\limits_i \mathcal{F}_i$.

Напомним, что проективная система $(D_i, i \in \mathbb{N})$ абелевых групп с отображениями $\phi_{i'i}$ удовлетворяют *МЛ-условию* (условию Миттаг–Леффлера), тогда и только тогда, когда для каждого $i \in \mathbb{N}$ убывающее семейство подгрупп $\{\phi_{i'i}(D_{i'}) \subset D_i \mid i' \geq i \in \mathbb{N}\}$ стабилизируется.

Нам понадобится следующая лемма, которую легко доказать, с помощью [27, prop. 9.1].

Лемма 31. *Если*

$$0 \longrightarrow (K_i) \longrightarrow (A_i) \longrightarrow (B_i) \longrightarrow (C_i) \longrightarrow 0$$

— точная последовательность проективных систем абелевых групп по отношению к $\mathbb{N}$, *и проективные системы* $(K_i, i \in \mathbb{N})$ *и* $(A_i, i \in \mathbb{N})$ *удовлетворяют МЛ-условию, тогда индуцированная последовательность проективных пределов*

$$0 \longrightarrow \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} K_i \longrightarrow \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} A_i \longrightarrow \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} B_i \longrightarrow \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} C_i \longrightarrow 0$$

также точна.

Предложение 9. *Пусть* $\mathring{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ *– это риббон и* $\mathcal{F}$ *– инд-про-квазикогерентный пучок на* $\mathring{X}_\infty$*. Тогда верно следующее.*

1. $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i+j+1}$ *– квазикогерентный* $\mathcal{O}_{X_j}$*-модуль для любых* $j \geq 0$, $i \in \mathbb{Z}$.
2. $\mathcal{F}_i(U)/\mathcal{F}_j(U) \to (\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_j)(U)$ *– изоморфизм для всех* $i < j$ *и для любого аффинного открытого подмножества* $U \subset C$.
3. *Если* $\mathring{X}_\infty$ *– это риббон над артиновым кольцом, тогда для любого аффинного открытого подмножества* $U \subset C$ *имеем* $H^1(U, \mathcal{F}_i) = H^1(U, \mathcal{F}) = 0$.

Доказательство Доказательство утверждения 1 данного предложения аналогично доказательству утверждения 2 предложения 7.

Докажем утверждение 2 предложения. У нас всегда есть точная последовательность

$$0 \to \mathcal{F}_j(U) \to \mathcal{F}_i(U) \to (\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_j)(U),$$

и для $i < j < k$ имеем точные последовательности

$$0 \to (\mathcal{F}_j/\mathcal{F}_k)(U) \to (\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_k)(U) \to (\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_j)(U) \to 0,$$

поскольку, согласно утверждению 1, $\mathcal{F}_j/\mathcal{F}_k$ – это квазикогерентный пучок $\mathcal{O}_{X_{k-j-1}}$-модулей.

Далее, поскольку $\mathcal{F}_i(U) = \varprojlim_{k \geq i} (\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_k)(U)$ и все отображения $(\mathcal{F}_j/\mathcal{F}_{k+1})(U) \to (\mathcal{F}_j/\mathcal{F}_k)(U)$ сюръективны, мы также имеем сюръекции $\mathcal{F}_i(U) \to (\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_j)(U)$ (см. Лемма 31).

Докажем утверждение 3 предложения. Поскольку C — это кривая над артиновым кольцом, каждое открытое подмножество открытого аффинного множества U снова аффинно. Возьмем вложение $\mathcal{F}_i \hookrightarrow W$ в вялый пучок, тогда $H^1(U, \mathcal{F}_i)$ – коядро $W(U) \to (W/\mathcal{F})(U)$, и мы должны показать, что любое сечение $(W/\mathcal{F})(U)$ поднимается до сечения $W(U)$.

Поскольку пространство U, с которым мы имеем дело является нетеровым, мы имеем самое большое открытое множество $U' \subseteq U$ в котором существует подъем w' заданного сечения. Мы покажем, что предположение $U' \subsetneq U$ ведет к противоречию. Пусть $p \in U \backslash U'$, тогда найдем окрестность $U'' \subset U$ точки p и подъем w'' на U'' заданного сечения. Если бы $U' \cap U'' = \varnothing$, мы бы могли расширить (U', w') до $(U' \cup U'', w'$ на U', w'' на $U'')$. Если $U' \cap U'' \neq \varnothing$, то получаем сечение $a = w' - w''$ из $\mathcal{F}_i(U' \cap U'')$.

Мы *утверждаем*, что $\mathcal{F}_i(U') \oplus \mathcal{F}_i(U'') \to \mathcal{F}_i(U' \cap U'')$ сюръективно, поэтому можем записать $a = a' - a''$, где $a' \in \mathcal{F}_i(U')$, $a'' \in \mathcal{F}_i(U'')$. Тогда $w|_{U'} = w' - a'$ и $w|_{U''} = w'' - a''$ определили бы подъем в $U' \cup U''$, и тем самым U' было бы не максимальным.

Доказательство утверждения. Имеем точную последовательность проективных систем

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{j+1}(U' \cup U'') & \to & \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{j+1}(U') \oplus \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{j+1}(U'') & \to & \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{j+1}(U' \cap U'') & \to 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & (\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_j)(U' \cup U'') & \to & (\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_j)(U') \oplus (\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_j)(U'') & \to & (\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_j)(U' \cap U'') & \to 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow &
\end{array}$$

где все стрелки сюръективны. Тем самым проективный предел остается точным (см. Лемма 31). Для $\mathcal{F}$ это утверждение выполнено, поскольку когомологии коммутируют с $\varinjlim$.

Следствие 12. *Пусть* $\mathring{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ *– это риббон над* A*, где* A *– это артиново кольцо. Пусть* $\mathcal{F}$ *– инд-про-квазикогерентный пучок на* $\mathring{X}_\infty$*, и* C *– это проективная кривая над* A*.*

1. *Если* $C = U_1 \cup U_2$*, где* U_1 *и* U_2 *аффинные открытые подмножества, тогда имеем точную последовательность*

$$0 \to H^0(C, \mathcal{F}) \to H^0(U_1, \mathcal{F}) \oplus H^0(U_2, \mathcal{F}) \to H^0(U_1 \cap U_2, \mathcal{F}) \to H^1(C, \mathcal{F}) \to 0.$$

2. *Если* $\mathcal{F}$ *инд-про-когерентный пучок, тогда*

$$H^*(C, \mathcal{F}) = \varinjlim_{i} \varprojlim_{j \geq i} H^*(X_{j-i}, \mathcal{F}_i / \mathcal{F}_{j+1}).$$

Доказательство Первое утверждение этого следствия – это точная последовательность Майера-Виеториса, согласно утверждению 3 предложения 9, поскольку U_1 и U_2 – аффинные множества.

Докажем теперь второе утверждение этого следствия. Заметим, что для любого $j \in \mathbb{Z}$ проективная система $(H^0(C, \mathcal{F}_j / \mathcal{F}_{j+i}), i \in \mathbb{N})$ удовлетворяет МЛ-условию, потому что $H^0(C, \mathcal{F}_j / \mathcal{F}_{j+i})$ – это артинов A-модуль для любых i, j, и отображения в проективную систему являются отображениями A-модулей.

Заметим, что, поскольку C – кривая над артиновым кольцом, существуют некоторые аффинные открытые подмножества U_1 и U_2 из C такие что $C = U_1 \cup U_2$. Для любого фиксированного $j \in \mathbb{Z}$ проективная система $(H^0(U_1, \mathcal{F}_j / \mathcal{F}_{j+i}) \oplus H^0(U_2, \mathcal{F}_j / \mathcal{F}_{j+i}), i \in \mathbb{N})$ удовлетворяет МЛ-условию в силу утверждения 2 предложения 9.

Теперь, поскольку когомологии коммутируют с точными пределами, второе утверждение этого следствия следует из первого утверждения, с учетом леммы 31.

Свойство когерентности

Замечание 38. Пучок $\mathcal{A}$ может быть не когерентным в обычном смысле (согласно Э. Картану, см. [137]).

Напомним, что пучок $\mathcal{F}$ $\mathcal{A}$-модулей на топологическом пространстве X является когерентным, если он удовлетворяет следующим двум свойствам.

1. $\mathcal{F}$ локально конечного типа, т.е. для любой точки $x \in X$ существуют открытое $U \ni x$ и конечное число сечений $s_1, \dots, s_p \in \mathcal{F}(U)$ таких, что для любой $y \in U$ слой $\mathcal{F}_y$ порожден образами $s_1, \dots, s_p$ над $\mathcal{A}_y$.

2. Пучок $\mathcal{K} = ker((\mathcal{F}|_U)^{\oplus q} \xrightarrow{(f_1, \dots, f_q)} (\mathcal{F}|_U))$, где $f_i \in \mathcal{A}(U)$ для некоторого открытого U, является пучком локально конечного типа. Отображение $\xrightarrow{(f_1, \dots, f_q)}$ отображает элемент $(a_1, \dots, a_q)$ в $\sum a_i f_i$.

Пучок $\mathcal{A}$ называется когерентным, если он когерентный как $\mathcal{A}$-модуль.

Рассмотрим следующее окольцованное пространство: $(C, \mathcal{O}_C((t))^Q)$, где C — приводимая алгебраическая кривая над полем k, $Q \in C$ — замкнутая точка, и пучок $\mathcal{O}_C((t))^Q$ определен следующим образом

$$\mathcal{O}_C((t))^Q(U) := \{ \sum_{i=l}^{\infty} c_i t^i, \text{ где } c_i \in \mathcal{O}_C(U) \text{ при } i \geq 0 \text{ и } c_i \in \mathcal{J}_Q(U) \text{ при } i < 0 \},$$

где $\mathcal{J}_Q$ — пучок идеалов точки Q. Очевидно, это пучок и $(C, \mathcal{O}_C((t))^Q)$ является риббоном над полем k. Этот пучок является аналогом пучка $\mathcal{O}_X((t))^{\surd}$ из [78].

Пример 11. Это пример некогерентного пучка $\mathcal{A}$ риббона.

Пусть C — плоская аффинная сингулярная кубическая кривая, заданная уравнением $y^2 = x^2(x+1)$ над полем k, $Q \in C$ — замкнутая точка $x = y = 0$. Покажем, что пучок $\mathcal{A} = \mathcal{O}_C((t))^Q$ некогерентен.

Если бы он был когерентен, тогда по определению для каждого $q \geq 1$ и $f_1, \dots f_q \in \mathcal{A}(U)$ пучок $\mathcal{K} = ker((\mathcal{A}|_U)^{\oplus q} \xrightarrow{(f_1,\dots,f_q)} (\mathcal{A}|_U))$ должен был быть локально конечного типа. Возьмем $U \ni Q$, $q = 2$, и пусть f_1, f_2 будут образами x, y в $\mathcal{O}_C(U)$. Пусть $V \subset U$, $Q \in V$ — открытые множества, такие, что $\mathcal{K}(V)$ является конечно порожденным в каждой точке.

Рассмотрим элемент $(b_1, b_2) \in \mathcal{K}(V)$, такой, что b_1, b_2 являются образами $-y, x$ в $\mathcal{O}_C(U)$. Тогда $(b_1, b_2) \in \mathcal{J}_Q((t))^{\oplus 2}(V)$, но $(b_1, b_2) \notin \mathcal{J}_Q^2((t))^{\oplus 2}(V)$. Заметим, что элементы $(b_1 t^m, b_2 t^m) \in \mathcal{K}(V)$ для любого $m \in \mathbb{Z}$, и тоже удовлетворяют этому условию.

Заметим, что для каждого $(a_1, a_2) \in \mathcal{K}(V)$ имеем $a_i = \sum a_{ij} t^j$, где $a_{ij} \in \mathcal{J}_Q(V)$. Действительно, должно быть $f_1 a_{1j} + f_2 a_{2j} = 0$ для всех j, и это тождество выполняется только если a_{ij} являются полиномами от f_1, f_2 без свободных членов, т.е. принадлежат идеалу $\mathcal{J}_Q(V)$.

Пусть $g_1, \dots g_l$ — порождающие $\mathcal{K}(V)$. Пусть они имеют порядки (q_i, q_i'), $i = 1, \dots l$, где порядок элемента $a \in \mathcal{A}(V)$ равен степени (относительно t) наименьшего члена a. Для каждого $m \in \mathbb{Z}$ должно выполняться

$$(b_1 t^m, b_2 t^m) = \sum_{i=1}^{l} w_{im} g_i \tag{4.4}$$

где $w_{im} \in \mathcal{A}(V)$. Если $M = \min\{q_1, \dots, q_l, q_1' \dots, q_l'\}$, то все коэффициенты t^j с $j < M$ в правой части формулы (4.4) должны принадлежать $\mathcal{J}_Q^2(V)^{\oplus 2}$ для каждого m. Но если $m \ll 0$, тогда имеются коэффициенты при t^j, если $j < M$, в левой части формулы (4.4), которые не принадлежат $\mathcal{J}_Q^2(V)^{\oplus 2}$ (и то же самое верно для их образов в стебле Q). Получаем противоречие.

Аналогично можно показать, что идеал $\mathcal{J}_Q(V)((t)) \subset \mathcal{A}(V)$ не является конечно порожденным, т.е. кольцо $\mathcal{A}(V)$ не нётерово.

Для удобства, введем также следующее определение.

Определение 53. Пучок колец $\mathcal{F}$ на топологическом пространстве X называется слабо нётеровым, если существует открытое аффинное покрытие $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ такое, что $\mathcal{F}(U_\alpha)$ — нётерово кольцо для любого $\alpha \in I$.

Пример 12. Это пример когерентного, но не слабо Нётерового пучка $\mathcal{A}$ риббона.

Рассмотрим окольцованное пространство $(C, \mathcal{A} = \mathcal{O}_C((t))^Q)$, где C — приводимая алгебраическая кривая над полем k, $Q \in C$ — гладкая точка. Докажем что пучок $\mathcal{A}$ является когерентным пучком колец. Для того, чтобы доказать, что пучок $\mathcal{A}$ является когерентным пучком колец, достаточно доказать, что пучок $\mathcal{K}$ из определения когерентности (см. замечание 38 выше) является пучком локально конечного типа.

Рассмотрим открытое $U \subset C$. Если $U \not\ni Q$, то имеем $(\mathcal{A}|_U)^{\oplus q} \simeq (\mathcal{O}_C((t))|_U)^{\oplus q}$ и поэтому для любого аффинного открытого подмножества $V \subset U$ кольцо $(\mathcal{A}|_U)(V)$ является Нётеровым. Ясно, что $\mathcal{K}(V) = (\mathcal{K}'(V))_t$ и $\mathcal{A}(V) = (\mathcal{A}'(V))_t$, где

$$\mathcal{K}' = ker((\mathcal{A}'|_U)^{\oplus q} \xrightarrow{(f_1 t^k,\dots,f_q t^k)} (\mathcal{A}'|_U)), \quad \mathcal{A}' = \mathcal{O}_C[[t]]$$

для достаточно большого k (заметим что определение пучка $\mathcal{K}$ не зависит от замен $(f_1, \dots, f_q) \mapsto (f_1 t^k, \dots, f_q t^k)$). Локально окольцованное пространство $(C, \mathcal{A}')$ является Нётеровой формальной схемой (таким образом, $\mathcal{A}'$ является когерентным пучком, см. [62, ch.I, §10.10]), следовательно $\mathcal{K}'$ – локально конечного типа, т.е. для каждой точки $P \in U$ there существует открытое $V \subset U$, $P \in V$ и порождающие $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ $\mathcal{K}'(V)$ над $\mathcal{A}'(V)$ такие, что их образы порождают стебли $\mathcal{K}'_x$ для каждого $x \in V$. Очевидно, что $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ – также порождающие $\mathcal{A}(V)$-модуля $\mathcal{K}(V)$, и они также порождают стебли $\mathcal{K}_x$ над $\mathcal{A}_x$ для каждого $v \in V$, т.е. $\mathcal{K}$ – локально конечного типа.

Пусть теперь $U \ni Q$, $f_1, \ldots, f_q \in \mathcal{A}(U)$. Наш пучок $\mathcal{A}$ является подпучком пучка $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{O}_C((t))$, который является когерентным, как было доказано ранее. Определим пучок

$$\tilde{\mathcal{K}} = ker((\tilde{\mathcal{A}}|_U)^{\oplus q} \stackrel{(f_1,\ldots,f_q)}{\longrightarrow} (\tilde{\mathcal{A}}|_U)).$$

Это пучок локально конечного типа, и $\mathcal{K}$ является подпучком $\tilde{\mathcal{K}}$ как пучок абелевых групп.

Для заданного элемента $a = \sum\limits_j a_j t^j \in \tilde{\mathcal{A}}(V)$, $Q \in V$ определим его Q-порядок следующим образом:

$$\mathrm{ord}_Q(a) = \begin{cases} \min\{j \ : \ a_j \notin \mathcal{J}_Q\} \\ \infty, \quad \text{если для любого} \quad j \quad a_j \in \mathcal{J}_Q. \end{cases}$$

Ясно, что для любых $a, b \in \tilde{\mathcal{A}}(V)$ имеем

$$\mathrm{ord}_Q(ab) = \mathrm{ord}_Q(a) + \mathrm{ord}_Q(b).$$

Для заданного элемента $\alpha \in \tilde{\mathcal{A}}^{\oplus q}(V)$, $Q \in V$ определим его Q-порядок как минимум Q-порядков компонент α, т.е.

$$\mathrm{ord}_Q(\alpha) = \min\{a_1, \ldots, a_q\} \quad \text{для} \quad \alpha = (a_1, \ldots, a_q).$$

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — порождающие $\tilde{\mathcal{A}}(V)$-модуля $\tilde{\mathcal{K}}(V)$, $V \ni Q$, такие, что их образы порождают стебли $\tilde{\mathcal{K}}_x$ при каждом $x \in V$. Без ограничения общности можно предположить, что V является аффинным открытым множеством таким, что максимальный идеал точки Q в $\mathcal{O}_C(V)$ является главным идеалом (y), $y \in \mathcal{O}_C(V)$. Предположим еще, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathcal{K}(V)$, т.к. иначе мы можем заменить их на $\alpha_1 t^{l_1}, \ldots \alpha_k t^{l_k}$. Т.к. максимальный идеал точки Q в $\mathcal{O}_C(V)$ является главным идеалом, имеем $\alpha_i = y^{k_i}\alpha'_i$, где $k_i \geq 0$ и $\mathrm{ord}_Q(\alpha'_i) < \infty$. Предположим, что $\alpha'_i \in \mathcal{K}(V)$ снова после умножения их на некоторые степени t. Очевидно, элементы $\alpha'_i \in \mathcal{K}(V)$ также являются порождающими $\tilde{\mathcal{K}}(V)$ и слоев $\tilde{\mathcal{K}}_x$ для любой $x \in V$. Поэтому мы можем положить $\mathrm{ord}_Q(\alpha_i) = 0$ для любого $1 \leq i \leq k$.

Без ограничения общности предположим, что первая компонента α_1 – ноль Q-порядка. Поскольку кольцо $\mathcal{O}_C(V)$ имеет размерность 1, можем заменить $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ на $\alpha_1, \alpha_2 + x_2\alpha_1, \ldots, \alpha_k + x_k\alpha_1$ для некоторых $x_2, \ldots, x_k \in \mathcal{A}(V)$ таких, что первые компоненты элементов $\alpha_2 + x_2\alpha_1, \ldots, \alpha_k + x_k\alpha_1$ имеют бесконечный Q-порядок. Если Q-порядок элемента $\alpha_i + x_i\alpha_1$ конечен, мы можем вновь положить его равным нулю после умножения его на подходящую степень t.

Элементы $\alpha_1, \alpha_2 + x_2\alpha_1, \ldots, \alpha_k + x_k\alpha_1$ снова являются порождающими $\tilde{\mathcal{K}}(V)$ (и $\tilde{\mathcal{K}}_x$ при каждом $x \in V$). Они образуют $k \times q$ матрицу, элементы которой лежат в $\mathcal{A}(V)$ (элемент $\alpha_i + x_i\alpha_1$ является i-ой строкой). Соответствующая $k \times q$-матрица их Q-порядков имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \ldots & * \\ \infty & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \infty & * & \ldots & * \end{pmatrix},$$

где некоторые строки могут состоять лишь из бесконечностей, и минимальной возможной величиной в каждой строке является нуль.

При перестановки некоторых строк нашей матрицы система порождающих $\tilde{\mathcal{K}}(V)$ и $\mathcal{K}_x$ для каждого $x \in V$ не поменяется. Поэтому можно считать, что наша матрица обладает следующим свойством: матрица ее Q-порядков имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & * & & & & \dots & & & & * \\ \infty & \star & \dots & \star & 0 & * & & \dots & & * \\ \infty & \star & & & \dots & & \star & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & & & & \dots & & & & \ddots & * \\ \infty & \infty & & & & \dots & & & & \infty \\ \vdots & & & & & \dots & & & & \\ \infty & \infty & & & & \dots & & & & \infty \end{pmatrix},$$

где $\star > 0$. (Последние строки содержат лишь ∞.)

Ясно, что вышеупомянутые элементарные преобразования строк ведут к новой системе порождающих $\tilde{\mathcal{K}}(V)$ (и $\tilde{\mathcal{K}}_x$ при каждом $x \in V$).

Поэтому, повторяя такие элементарные преобразования и перестановки строк с нулевым Q-порядком, получим систему порождающих $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, которые удовлетворяют следующему дополнительному свойству: при каждом $1 \le i \le k$ либо $\mathrm{ord}_Q(\alpha_i) = \infty$, либо $\mathrm{ord}_Q(\alpha_i) = 0$, и α_i имеет l_i-компоненту нулевого Q-порядка такую, что соответствующие l_i-компоненты всех других элементов α_j, $j \ne i$ имеют бесконечные Q-порядки, матрица Q-порядков следующая:

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * & \infty & * & \dots & * & \infty & * & \dots & * \\ \infty & \star & \dots & \star & 0 & * & \dots & * & \infty & * & \dots & * \\ \infty & \star & \dots & \star & \infty & \star & \dots & \star & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \star & \cdots & \star & \infty & \star & \cdots & \star & \infty & \star & \ddots & * \\ \infty & \infty & & & & & \dots & & & & & \infty \\ \vdots & & & & & & \dots & & & & & \\ \infty & \infty & & & & & \dots & & & & & \infty \end{pmatrix}.$$

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ будут нулями Q-порядка и $\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_k$ будут ∞ Q-порядка. Тогда $\alpha_j = y^{k_j}\alpha''_j$, $j \ge l+1$, где $\mathrm{ord}_Q(\alpha''_j) < \infty$. После умножения α''_j на некоторую степень t получим $\alpha_j = y^{k_j}t^{m_j}\alpha'_j$, $j \ge l+1$ для некоторых $k_j > 0$ и m_j таких, что $\mathrm{ord}_Q(\alpha'_j) = 0$.

Мы утверждаем, что элементы $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \alpha'_{l+1}, \dots, \alpha'_k$ являются порождающими $\mathcal{A}(V)$-модуля $\mathcal{K}(V)$ такими, что их образы порождают ростки $\mathcal{K}_x$ для любого $x \in V$.

Действительно, если $x \in V$, $x \ne Q$, то это очевидно в силу выбора элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ в начале, т.к. $\mathcal{K}_x = \tilde{\mathcal{K}}_x$. Пусть теперь $b \in \mathcal{K}_Q$. Тогда $b = \sum b_j\alpha_j$ для некоторого $b_j \in \tilde{\mathcal{A}}_Q$. Имеем $b_j\alpha_j \in \mathcal{K}_Q$ для всех $j \ge l+1$, т.к. $\mathrm{ord}_Q(b_j\alpha_j) = \infty$. Первая компонента α_1 нулевого Q-порядка, и Q-порядки первых компонент всех других α_i, $i \ge 2$ бесконечны. Т.к. $b \in \mathcal{K}_Q$, поэтому Q-порядок первой компоненты $b_1\alpha_1$ должен быть больше или равен нулю. Отсюда, $\mathrm{ord}_Q(b_1) \ge 0$ и $b_1 \in \mathcal{A}_Q$. Аналогично, $b_j \in \mathcal{A}_Q$ при $j \le l$. Теперь для $j \ge l+1$ имеем $b_j\alpha_j = b_jy^{k_j}t^{m_j}\alpha'_j$ с $k_j > 0$ и $b'_j := b_jy^{k_j}t^{m_j} \in \mathcal{A}_Q$, т.к. $k_j > 0$. Поэтому

$$b = \sum_{i=1}^{l} b_i\alpha_i + \sum_{j=l+1}^{k} b'_j\alpha'_j,$$

где $b_i, b'_j \in \mathcal{A}_Q$, что и требовалось.

Тем не менее, пучок $\mathcal{A}$ не является слабо Нётеровым. Например, рассмотрим следующую бесконечную возрастающую систему идеалов в $\mathcal{A}(U)$ (для любого $U \ni Q$):

$$J_k := \{c = \sum_{i=l}^{\infty} c_it^i, \text{ где } c_i \in \mathcal{J}_Q(U) \text{ и } c_i \in \mathcal{J}_Q^2(U) \text{ при } i < -k \}.$$

Ясно, что $J_1 \subset J_2 \subset \dots$ не стабилизируется.

Замечание 39. Случай, рассмотренный в примере 12, подобен случаю ранга 2 нормированного кольца $\mathcal{O}' = k[[t]] + uk((t))[[u]]$ в 2-мерном локальном поле $k((t))((u))$. Кольцо $\mathcal{O}'$ также не Нётерово (см. [117]), но можно доказать вышеупомянутым методом, что кольцо $\mathcal{O}'$ когерентно.

Пример 13. Рассмотрим еще один пример. Пусть C — приведенная алгебраическая кривая над полем k. Рассмотрим окольцованное пространство $(C, \mathcal{A})$, где

$$\mathcal{A} = \{\sum_{j=N}^{\infty} \mathcal{O}_C \cdot t_j, \quad t_0 = 1, \quad t_i t_j = 0 \text{для всех } i, j \neq 0\}$$

Ясно, что $\mathcal{A}$ является пучком, который удовлетворяет всем условиям определения 49. Поэтому $(C, \mathcal{A})$ является риббоном.

Очевидно, что пучок $\mathcal{A}$ тоже не когерентный и не является слабо Нётеровым. Более того, $\mathcal{A}_0$ некогерентно. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть ядро умножения на t_1. Ясно, что это ядро не может быть локально конечного типа.

При определенных условиях на пучок $\mathcal{A}$ риббона можно доказать в следующей лемме, что он будет когерентным, также как и любой пучок без кручения конечного ранга на этом риббоне будет когерентным. (Определим пучки без кручения позже, смотрите определение 51 и замечание 41).

Определение 54. Будем говорить, что пучок $\mathcal{A}$ риббона $(C, \mathcal{A})$ удовлетворяет (*), если выполняется следующее условие:

существует аффинное открытое покрытие $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ кривой C такое, что для любого $\alpha \in I$ существует $k > 0$ и обратимая секция $a \in \mathcal{A}_k(U_\alpha) \subset \mathcal{A}(U_\alpha)$.

Определение 55. Для открытого множества U определим функцию порядка ord_U на $\mathcal{A}(U)$ следующим способом: если элемент $b \in \mathcal{A}_l(U) \backslash \mathcal{A}_{l+1}(U)$, то $\mathrm{ord}_U(b) = l$. Иногда, если это ясно из контекста, мы будем пропускать индекс U.

Докажем следующую лемму.

Лемма 32. *Пусть пучок $\mathcal{A}$ риббона $(C, \mathcal{A})$ удовлетворяет (*). Тогда он слабо Нётеров и когерентный. Более того, для любого аффинного открытого подмножества U в C кольцо $\mathcal{A}(U)$ является Нётеровым кольцом.*

Доказательство Пусть $\{U_\alpha\}$ будет покрытием из (*). Для открытого $U_\alpha \subset C$ пусть $a \in \mathcal{A}^*(U_\alpha)$, $a \in \mathcal{A}_k(U_\alpha)$, $k > 0$. Из определения риббона (определение 49) следует что $a^{-1} \in \mathcal{A}_l(U_\alpha) \backslash \mathcal{A}_{l+1}(U_\alpha)$, где $l \le -k$. Ясно, что $\mathcal{A}(U_\alpha) = \mathcal{A}_0(U_\alpha)_a$. Из предложений 7 и 9, кольцо $\mathcal{A}_0(U_\alpha)/\mathcal{A}_{-l}(U_\alpha)$ Нётерово.

Пусть $\tilde{I} \subset \mathcal{A}(U_\alpha)$ — некоторый идеал. Пусть $I = \tilde{I} \cap \mathcal{A}_0(U_\alpha)$. Положим $I_{-l} = I/I \cap \mathcal{A}_{-l}(U_\alpha)$. Пусть $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_s$ будут порождающими I_{-l} в $\mathcal{A}_0(U_\alpha)/\mathcal{A}_{-l}(U_\alpha)$, и $g_1, \dots, g_s$ будут любыми их представителями в I. Пусть $x \in I$ – произвольный элемент, $x \in \mathcal{A}_j(U_\alpha) \backslash \mathcal{A}_{j+1}(U_\alpha)$. Если $j < -l$, то существуют $b_1, \dots, b_s \in \mathcal{A}_0(U_\alpha)$ такие, что $x - \sum_m b_m g_m \in \mathcal{A}_i(U_\alpha) \backslash \mathcal{A}_{i+1}(U_\alpha)$ с $i \ge -l$. Если $j \ge -l$, то $a^{-1}x \in I$, и для некоторого $m \ge 1$ имеем $a^{-m}x \in \mathcal{A}_i(U_\alpha) \backslash \mathcal{A}_{i+1}(U_\alpha)$ с $0 \le i < -l$. Повторяем эту процедуру. Т.к. $\mathrm{ord}(a) > 0$ и $\mathcal{A}_0(U_\alpha)$ полное хаусдорфово пространство, получаем что $g_1, \dots, g_s$ порождают I, отсюда $\tilde{I}$. Поэтому $\mathcal{A}(U_\alpha)$ — Нётерово кольцо.

Аналогично можем показать, что $\mathcal{A}_0(U_\alpha)$ – тоже Нётерово кольцо. А именно, для идеала $J \subset \mathcal{A}_0(U_\alpha)$ пусть $\tilde{J}$ будет идеалом, порожденным J в $\mathcal{A}(U_\alpha)$. Если $\tilde{J} = (1)$, то $a^r \in J$

для некоторого $r > 0$. Для любого $i \geq -lr$ имеем $(a^r) \supseteq \mathcal{A}_i(U_\alpha)$. Следовательно, элементы $g_1, \ldots, g_s$, образы которых находятся в $\mathcal{A}_0(U_\alpha)/\mathcal{A}_{-lr}(U_\alpha)$, порождают идеал $J/J \cap \mathcal{A}_{-lr}(U_\alpha)$, и элемент a^r породит идеал J.

Если $\tilde{J} \neq (1)$, то $\tilde{J} = (g_1, \ldots, g_s)$, как и ранее, где $g_1, \ldots, g_s \in \mathcal{A}_0(U_\alpha)$. Как было показано выше, для любого достаточно большого i элемент $x \in J \cap \mathcal{A}_i(U_\alpha)$ может быть написан в виде $x = a^h \sum_m b_m g_m$ с $b_1, \ldots, b_s \in \mathcal{A}_0(U_\alpha)$, $h > 0$. С другой стороны, для достаточно большого h имеем $a^h g_1, \ldots, a^h g_s \in J$. Поэтому существует натуральное N такое, что для любого $x \in J \cap \mathcal{A}_i(U_\alpha)$ с $i > N$ имеем $x \in (a^h g_1, \ldots, a^h g_s) \subset \mathcal{A}_0(U_\alpha)$. Теперь, если $g'_1, \ldots, g'_t \in J$ — представители порождающих идеала $J/J \cap \mathcal{A}_N(U_\alpha)$, то система $g'_1, \ldots, g'_t, a^h g_1, \ldots, a^h g_s$ является системой порождающих идеала J.

Чтобы показать, что $\mathcal{A}$ когерентный, достаточно доказать, что пучок $\mathcal{K}$ из определения когерентного пучка (см. Замечание 38) является пучком локально конечного типа для каждого U_α.

Для любого открытого $V \subset U_\alpha$ имеем $\mathcal{K}(V) = (\mathcal{K}'(V))_a$ и $\mathcal{A}(V) = (\mathcal{A}_0(V))_a$, где

$$\mathcal{K}' = ker((\mathcal{A}_0|_{U_\alpha})^{\oplus q} \xrightarrow{(f_1 a^k, \ldots, f_q a^k)} (\mathcal{A}_0|_{U_\alpha}))$$

для достаточно большого k (как в примере 12). Имеем также

$$\varprojlim_{n \geq 0} \mathcal{A}_0(V)/a^n \mathcal{A}_0(V) = \mathcal{A}_0(V),$$

т.к. для идеала $(a) = a\mathcal{A}_0(V)$ всегда выполнено $\mathcal{A}_n \supseteq (a)^n \supseteq \mathcal{A}_i(V)$ при $i \geq -ln$ и для любого n, и $(a)^n \supseteq \mathcal{A}_i(V) \supseteq (a)^i$ для $n \leq [i/(-l)]$.

Собирая все вместе, получаем, что следующие локально окольцованные пространства изоморфны:

$$(U_\alpha, \mathcal{A}_0|_{U_\alpha}) \simeq (\widehat{\operatorname{Spec} \mathcal{A}_0(U_\alpha)})_Y,$$

где Y — замкнутая подсхема $\operatorname{Spec} \mathcal{A}_0(U_\alpha)$, заданная идеалом (a), и формальная Нётерова схема $(\widehat{\operatorname{Spec} \mathcal{A}_0(U_\alpha)})_Y$ является дополнением схемы $\operatorname{Spec} \mathcal{A}_0(U_\alpha)$ вдоль Y. Таким образом, из [62, ch.I, §10.10] следует, что пучок $\mathcal{A}_0|_{U_\alpha}$ когерентный, а пучок $\mathcal{K}'$ $\mathcal{A}_0|_{U_\alpha}$-модулей – локально конечного типа. Следовательно, пучок $\mathcal{K}$ $\mathcal{A}|_{U_\alpha}$-модулей является пучком локально конечного типа.

Покажем последнее свойство леммы. Во первых, заметим, что для любого открытого $V \subset U_\alpha$ кольцо $\mathcal{A}(V)$ удовлетворяет (*) и поэтому Нётерово, как было показано ранее. Т.к. для открытого аффинного $U = \underline{\operatorname{Spec} B}$ существует база топологии, содержащая открытые множества $D(f) \simeq \underline{\operatorname{Spec} B_f}$, и любое аффинное множество квазикомпактно, можно покрыть множество U конечным числом аффинных открытых множеств $U_i \simeq \underline{\operatorname{Spec} B_{f_i}}$ таких, что кольца $\mathcal{A}(U_i)$ удовлетворяют (*) и являются Нётеровыми. По определению риббона и по предложению 9, можно взять $B = \mathcal{A}_0(U)/\mathcal{A}_1(U)$ и $f_i \in \mathcal{A}_0(U)/\mathcal{A}_1(U)$, f_i порождают идеал (1) кольца B.

Теперь докажем следующее утверждение. Пусть $I \subset \mathcal{A}(U)$ будет идеалом и $\phi_i : \mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(U_i)$ являются гомоморфизмами ограничения, $i = 1, \ldots, r$. Тогда

$$I = \bigcap_i \phi_i^{-1}(\phi_i(I) \cdot \mathcal{A}(U_i)).$$

Очевидно, мы имеем $I \subset \bigcap_i \phi_i^{-1}(\phi_i(I) \cdot \mathcal{A}(U_i))$. Пусть теперь

$$b \in \bigcap_i \phi_i^{-1}(\phi_i(I) \cdot \mathcal{A}(U_i)) \quad , \quad b \in \mathcal{A}_k(U) \backslash \mathcal{A}_{k+1}(U).$$

Пусть

$$\phi_i(b) = \sum_{j=1}^{r_i} \phi_i(a_j) g_j,$$

где $g_j \in \mathcal{A}(U_i)$, $a_j \in I$. Имеем $\phi_i(b) \in \mathcal{A}_k(U_i)$ и поэтому

$$\phi_i(b) \mod \mathcal{A}_{k+1}(U_i) = \sum_{j=1}^{r_i} (\phi_i(a_j) \mod \mathcal{A}_{k+1-\mathrm{ord}(g_j)}(U_i))(g_j \mod \mathcal{A}_{k+1-\mathrm{ord}(a_j)}(U_i)).$$

Рассмотрим гомоморфизмы

$$\bar{\phi}_i^j : \mathcal{A}_{\mathrm{ord}(g_j)}(U)/\mathcal{A}_{k+1-\mathrm{ord}(a_j)}(U) \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathrm{ord}(g_j)}(U_i)/\mathcal{A}_{k+1-\mathrm{ord}(a_j)}(U_i),$$

которые индуцируются отображением ϕ_i. По предложению 7, пучок $\mathcal{A}_{\mathrm{ord}(g_j)}/\mathcal{A}_{k+1-\mathrm{ord}(a_j)}$ является когерентным пучком на схеме $X_l = (C, \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{l+1})$, где $l = k - \mathrm{ord}(a_j) - \mathrm{ord}(g_j)$ (предположим, что $l \geq 0$, т.к. иначе наш пучок тривиальный и доказывать нечего). Поэтому $\bar{\phi}_i^j$ является отображением локализации, и для любого элемента $x \in \mathcal{A}_{\mathrm{ord}(g_j)}(U_i)/\mathcal{A}_{k+1-\mathrm{ord}(a_j)}(U_i)$ существует натуральное n такое, что $f_{ij}^n x = \bar{\phi}_i^j(\tilde{x})$, где $\tilde{x} \in \mathcal{A}_{\mathrm{ord}(g_j)}(U)/\mathcal{A}_{k+1-\mathrm{ord}(a_j)}(U)$, $f_{ij} \in \mathcal{A}_0(U)/\mathcal{A}_{l+1}(U)$ и $f_{ij} \mod \mathcal{A}_1(U) = f_i$ (см. [27, lemma 5.3]). Отметим, что можно выбрать $f_{ij} = \tilde{f}_i \mod \mathcal{A}_{l+1}(U)$, где $\tilde{f}_i$ является фиксированным представителем f_i в $\mathcal{A}_0(U)$, для всех j. Следовательно, существует натуральное N такое, что

$$\phi_i(\tilde{f}_i^N)\phi_i(b) \mod \mathcal{A}_{k+1}(U_i) = \sum_{j=1}^{r_i} (\phi_i(a_j g_j') \mod \mathcal{A}_{k+1}(U_i)),$$

где $g_j' \in \mathcal{A}(U)$ и

$$\phi_i(g_j') \mod \mathcal{A}_{k+1-\mathrm{ord}(a_j)}(U_i) = \phi_i(\tilde{f}_i^N) g_j \mod \mathcal{A}_{k+1-\mathrm{ord}(a_j)}(U_i).$$

Пусть k' – такое целое, что $a_j g_j' \in \mathcal{A}_{k'}(U)$ для любого j (заметим, что $k' \leq k$). Тогда, повторяя рассуждения выше для когерентного пучка $\mathcal{A}_{k'}/\mathcal{A}_{k+1}$, получаем, что существует натуральное M такое, что

$$\tilde{f}_i^M b \mod \mathcal{A}_{k+1}(U) \in I \mod \mathcal{A}_{k+1}(U).$$

Заметим, что можно выбрать одно и то же M для всех i и что элементы $\tilde{f}_i^M$ порождают идеал (1) в $\mathcal{A}_0(U)$, т.е., $\sum_i c_i \tilde{f}_i^M = 1$ для некоторого $c_i \in \mathcal{A}_0(U)$. Следовательно,

$$b \mod \mathcal{A}_{k+1}(U) = \sum c_i \tilde{f}_i^M b \mod \mathcal{A}_{k+1}(U) \in I \mod \mathcal{A}_{k+1}(U).$$

Поэтому существует $b_1 \in I$, $b_1 \in \mathcal{A}_k(U)$ такое, что $(b - b_1) \in \bigcap_i \phi_i^{-1}(\phi_i(I) \cdot \mathcal{A}(U_i))$ и $\mathrm{ord}(b - b_1) > \mathrm{ord}(b)$. Проведем рассуждения, приведенные выше, для элемента $b - b_1$ и т.д. Т.к. кольцо $\mathcal{A}(U)$ имеет полную хаусдорфовую топологию, получаем, что $b \in I$.

Теперь легко показать, что кольцо $\mathcal{A}(U)$ Нётерово. Пусть $I_1 \subset I_2 \subset \dots$ будет возрастающей цепью идеалов в $\mathcal{A}(U)$. Тогда для каждого i цепь

$$\phi_i(I_1) \cdot \mathcal{A}(U_i) \subset \phi_i(I_2) \cdot \mathcal{A}(U_i) \subset \dots$$

стабильна, т.к. $\mathcal{A}(U_i)$ является Нётеровым кольцом. Т.к. существует только конечное число i, первая цепь также стабильна и $\mathcal{A}(U)$ является Нётеровым кольцом.

Определение 56. Риббон $(C, \mathcal{A})$ называется алгебраизуемым, если он локально изоморфен на C риббону из примера 10.

Пример 14. Пучок $\mathcal{A} = \mathcal{O}_{\hat{X}_C}(*C)$, с фильтрацией $\mathcal{A}_i = \mathcal{O}_{\hat{X}_C}(-iC)$ на поверхности X с эффективным приведенным дивизором Картье C из примера 10 удовлетворяет условиям леммы 32. Действительно, локальное уравнение C в X является обратимым элементом, который принадлежит $\mathcal{A}_1(U)$, и его обратный принадлежит $\mathcal{A}_{-1}(U)$.

В частности, отсюда следует, что риббоны из примера 11, примера 12 и примера 13 не алгебраизуемы, т.к. они не слабо Нётеровы.

Замечание 40. Структурные пучки алгебраизуемых риббонов удовлетворяют более сильному свойству, которое полезно при изучении группы Пикарда риббона, см. предложение 16 ниже.

Пример 15. Рассмотрим пример риббона со слабой Нётеровой и когерентной структурой пучка $\mathcal{A}$, но который не является алгебраизуемым. Его можно построить точно так же, как и в примере 13.

Пусть C – приведенная алгебраическая кривая над полем k. Рассмотрим окольцованное пространство $(C, \mathcal{A})$, где

$$\mathcal{A} = \{\sum_{j=N}^{\infty} \mathcal{O}_C \cdot t_j, \quad t_0 = 1, \quad t_{2i} = t_2^i, \quad t_{2i+1} = t_1 t_2^i, \quad t_1^2 = 0\}.$$

Ясно, что $\mathcal{A}$ является пучком, который удовлетворяет всем условиям определения 49. Поэтому $(C, \mathcal{A})$ является риббоном. По лемме 32 $\mathcal{A}$ является слабо Нётеровым и когерентным пучком (т.к. t_2 является обратимым сечением $\mathcal{A}(U)$ для любого открытого $U \subset C$). Но $(C, \mathcal{A})$ не алгебраизуем, т.к. если бы он был алгебраизуем, то должно было бы существовать открытое аффинное покрытие C такое, что для любого открытого U из этого покрытия существует обратимый элемент a, который принадлежит $\mathcal{A}_1(U) \backslash \mathcal{A}_2(U)$ и $a^{-1} \in \mathcal{A}_{-1}(U) \backslash \mathcal{A}_0(U)$. Очевидно, что нет таких сечений в $\mathcal{A}(U)$ для каждого U.

Замечание 41. Если пучок $\mathcal{A}$ риббона $\mathring{X}_\infty$ удовлетворяет условию (*) из определения 54, то любой пучок без кручения $\mathcal{N}$ ранга r в $\mathring{X}_\infty$ — когерентный. Доказательство этого факта точно такое же, как и в лемме 32.

С другой стороны, если $\mathcal{A}$ является только когерентным, то существует пучок без кручения, который не является когерентным, как это следует из следующего примера.

Пример 16. Рассмотрим риббон $(C, \mathcal{A} = \mathcal{O}_C((t))^Q)$ из примера 12. Пучок $\mathcal{A}$ когерентен, но не является слабо Нётеровым. Пучок $\mathcal{N} := \mathcal{O}_C((t))$ с естественной фильтрацией является пучком без кручения ранга 1 на $\mathring{X}_\infty$. Но росток $\mathcal{N}_Q$ не может быть конечно порожден: для любого конечного числа сечений $g_1, \dots, g_k \in \mathcal{N}(V)$, $Q \in V$ существует бесконечное число элементов t^l, $l \ll 0$, которые не могут быть порождены элементами g_i. Таким образом, $\mathcal{N}$ не может быть конечного типа и, следовательно, не является когерентным.

Аналитические риббоны

В случае поля $\mathbf{C}$ мы также можем работать в аналитической категории для того, чтобы определить риббоны над $\mathbf{C}$, заменяя "алгебраический когерентный" на "аналитический когерентный пучок"(для $\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$) в определении 49. Тогда мы получим понятие аналитического риббона $(C, \mathcal{A})$.

Мы определяем аналитический инд-про-когерентный пучок $\mathcal{F}$ на аналитическом риббоне $\mathring{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ как фильтрованный пучок $\mathcal{A}$-модулей (с убывающей фильтрацией по подпучкам), удовлетворяющей свойствам 1, 3, 4 и свойству

$$2'.\ \mathcal{F}_j/\mathcal{F}_{j+1} \text{ – аналитический когерентный пучок на } C \text{ для любого } j \in \mathbb{Z}$$

вместо свойства 2 из определения 52.

Замечание 42. Поскольку топологическое пространство, с которым мы имеем дело, не является Нетеровым в этом случае, мы должны взять пучок $\mathcal{F}$, ассоциированный с предпучком $\mathcal{F}' : V \mapsto \varinjlim_i \mathcal{F}_i(V)$.

Имеем следующее предложение (сравните с предложением 9).

Предложение 10. *Для аналитичного инд-про-когерентного пучка $\mathcal{F}$ выполнены следующие свойства в аналитическом риббоне $\mathring{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$, где C – неприводимая комплексная алгебраическая кривая.*

1. *$\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i+j+1}$ – аналитический когерентный пучок на X_j для любого $j \geq 0$, $i \in \mathbb{Z}$.*
2. *$\mathcal{F}_i(U)/\mathcal{F}_j(U) \to (\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_j)(U)$ – изоморфизм при $i < j$ и для открытых множеств Штейна $U \subset C$.*
3. *$H^q(U, \mathcal{F}_i) = 0$ для любого открытого подмножества Штейна $U \subset C$ и $q > 0$, $i \in \mathbb{Z}$.*

Замечание 43. Отметим, что каждое комплексное аналитическое пространство размерности 1, которое не имеет компактных несводимых компонент, является пространством Штейна (см., например, [114]).

Доказательство Доказательство утверждения 1 и утверждения 2 этого предложения точно такое же, как и в предложении 9. (Мы пользуемся тем, что для любого аналитического когерентного пучка $\mathcal{G}$ на пространстве Штейна U выполнено $H^q(U, \mathcal{G}) = 0$ при $q > 0$.)

Теперь докажем утверждение 3 этого предложения. В силу замечания 43, любое открытое подмножество V подмножества Штейна $U \subset C$ снова является пространством Штейна. Поэтому, если $\{U_\alpha\}$ – открытое покрытие U, тогда каждое открытое U_α является пространством Штейна. Пусть $\check{\mathbb{C}}^\bullet(\{U_\alpha\}, \mathcal{F}_i)$ – комплекс Чеха этого накрытия для пучка $\mathcal{F}_i$. Получаем

$$\check{\mathbb{C}}^\bullet(\{U_\alpha\}, \mathcal{F}_i) = \varprojlim_{j>i} \check{\mathbb{C}}^\bullet(\{U_\alpha\}, \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_j).$$

Рассмотрим следующий естественный комплекс $D_i^\bullet$ для любого $i \in \mathbb{Z}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_i(U) \longrightarrow \check{\mathbb{C}}^0(\{U_\alpha\}, \mathcal{F}_i) \longrightarrow \check{\mathbb{C}}^1(\{U_\alpha\}, \mathcal{F}_i) \longrightarrow \dots,$$

т.е. $D_i^n = 0$ при $n < -1$, $D_i^{-1} = \mathcal{F}_i(U)$, и $D_i^n = \check{\mathbb{C}}^n(\{U_\alpha\}, \mathcal{F}_i)$ при $n \geq 0$.

Для любого $i \in \mathbb{Z}$

$$D_i^\bullet = \varprojlim_{j>i} D_{i,j}^\bullet,$$

где комплекс $D_{i,j}^\bullet$ определен следующим естественным образом для любых $j \geq i \in \mathbb{Z}$: $D_{i,j}^n = 0$ при $n < -1$, $D_{i,j}^{-1} = (\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_j)(U)$, и $D_{i,j}^n = \check{\mathbb{C}}^n(\{U_\alpha\}, \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_j)$ при $n \geq 0$.

Из утверждения 2 этого предложения получим что для любого фиксированного $i \in \mathbb{Z}$, для любого $n \in \mathbb{Z}$ проективная система $(D_{i,j}^n, j \geq i)$ удовлетворяет МЛ-условию, потому что отображения в этой проективной системе являются сюръективными.

Для любых $j \geq i \in \mathbb{Z}$ комплекс $D^\bullet_{i,j}$ – ациклический, потому что когомологии Чеха

$$\check{H}^0(\{U_\alpha\}, \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_j) = (\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_j)(U),$$

$$\check{H}^n(\{U_\alpha\}, \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_j) = H^n(U, \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_j) = 0 \quad \text{для любого} \quad n > 0.$$

Следовательно, для любого $i \in \mathbb{Z}$ комплекс $D^\bullet_i$ – ациклический комплекс, как это следует из следующей леммы.

Лемма 33. *Пусть $(K^\bullet_l, l \geq 0)$ – проективная система ациклических комплексов $K^\bullet_l$ абелевых групп. Предположим, что для любого $n \in \mathbb{Z}$ проективная система $(K^n_l, l \geq 0)$ удовлетворяет МЛ-условию. Тогда комплекс*

$$K^\bullet = \varprojlim_{l \geq 0} K^\bullet_l$$

ацикличен.

Доказательство Пусть отображения $d^n_l : K^n_l \to K^{n+1}_l$, $n \in \mathbb{Z}$ является дифференциалами в комплексе $K^\bullet_l$, $l \geq 0$. Имеем следующие точные последовательности:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d^n_l \longrightarrow K^n_l \longrightarrow \mathbf{I}d^n_l \longrightarrow 0. \tag{4.5}$$

Поскольку комплекс $K^\bullet_l$ является ацикличным комплексом, то $\mathbf{I}d^n_l = \mathrm{Ker}\, d^{n+1}_l$ для любого n.

Так как для любого n проективная система $(K^n_l, l \geq 0)$ удовлетворяет МЛ-условию, получаем из точной последовательности (4.5), что для любого n проективная система $(\mathbf{I}d^{n-1}_l, l \geq 0) = (\mathrm{Ker}\, d^{n+1}, l \geq 0)$ удовлетворяет МЛ-условию. Пусть отображения $d^n : K^n \to K^{n+1}$ являются дифференциалами в комплексе $K^\bullet$. Теперь, используя лемму 31 и то, что всегда $\mathrm{Ker}\, d_n = \varprojlim_{n \geq 0} \mathrm{Ker}\, d^l_n$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, получаем, что проективный предел по отношению к $l \geq 0$ последовательностей (4.5) даст следующую точную последовательность для любого $n \in \mathbb{Z}$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, d^n \longrightarrow K^n \longrightarrow \mathbf{I}d^n \longrightarrow 0.$$

Следовательно, для любого $n \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\mathbf{I}d^n = \varprojlim_{l \geq 0} \mathbf{I}d^n_l = \varprojlim_{l \geq 0} \mathrm{Ker}\, d^{n+1}_l = \mathrm{Ker}\, d^{n+1}.$$

Следовательно, комплекс $K^\bullet$ – ацикличен. Лемма доказана.

Теперь закончим доказательство предложения 10. Мы доказали, что $\check{H}^q(\{U_\alpha\}, \mathcal{F}_i) = 0$ для любого $i \in \mathbb{Z}$ и любого $q > 0$. Следовательно $\check{H}^q(U, \mathcal{F}_i) = 0$ для любого $i \in \mathbb{Z}$ для любого $q > 0$. Поэтому, для любого $i \in \mathbb{Z}$

$$H^1(U, \mathcal{F}_i) = \check{H}^1(U, \mathcal{F}_i) = 0.$$

Более того, имеем спектральную последовательность с начальным членом

$$E^{pq}_2 = \check{H}^p(U, \mathrm{ch}^q(\mathcal{F}_i)) \Longrightarrow H^{p+q}(U, \mathcal{F}_i), \tag{4.6}$$

где $\mathrm{ch}^q(\mathcal{F}_i)$ – предпучок $V \subset U \mapsto \mathrm{ch}^q(\mathcal{F}_i)(V) = H^q(V, \mathcal{F}_i)$ (см. [60]). Таким образом, поскольку любое открытое подмножество $V \subset U$ вновь является подпространством Штейна, в нашей ситуации получаем

$$H^2(U, \mathcal{F}_i) = \check{H}^0(U, \mathrm{ch}^2(\mathcal{F}_i)).$$

Для того, чтобы получить $H^2(U, \mathcal{F}_i) = 0$, достаточно показать, что для любой точки $x \in C$

$$\varinjlim_{x \in V \subset C} H^2(V, \mathcal{F}_i) = 0.$$

Это следует из следующего факта ([60, lemma 3.8.2]: для любой точки $x \in C$, для любого $p > 0$

$$\varinjlim_{x \in V \subset C} H^p(V, \mathcal{F}_i) = 0 \tag{4.7}$$

Теперь с помощью индукции по q, теми же самыми методами, как и в случае $q = 2$ используем спектральную последовательность (4.6) и равенство (4.7), получаем, что $H^q(U, \mathcal{F}_i) = 0$ для всех $q > 0$. Предложение доказано.

Следствие 13. *Пусть $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_\infty = (C, \mathcal{A})$ – аналитический риббон. Пусть $\mathcal{F}$ – аналитический инд-про-когерентный пучок на $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_\infty$, и C – неприводимое компактное пространство.*

1. *Если $C = U_1 \cup U_2$, где U_1 и U_2 – открытые подпространства Штейна, то имеем точную последовательность для любых $i \in \mathbb{Z}$*

$$0 \to H^0(C, \mathcal{F}_i) \to H^0(U_1, \mathcal{F}_i) \oplus H^0(U_2, \mathcal{F}_i) \to H^0(U_1 \cap U_2, \mathcal{F}_i) \to H^1(C, \mathcal{F}_i) \to 0.$$

2. *$H^*(C, \mathcal{F}_i) = \varprojlim_{j>i} H^*(C, \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_j)$, $i \in \mathbb{Z}$.*

3. *$H^q(C, \mathcal{F}_i) = 0$ для $q > 1$, $i \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство близко к доказательству следствия 12 предложения 9. Мы должны использовать следующую точную последовательность Майера-Виеториса для пучка $\mathcal{G}$ на C:

$$\ldots \longrightarrow H^{k-1}(U_1 \cap U_2, \mathcal{G}) \longrightarrow H^k(C, \mathcal{G}) \longrightarrow H^k(U_1, \mathcal{G}) \oplus H^k(U_2, \mathcal{G}) \longrightarrow \ldots$$

4.1.4 Пополнение пучков на риббонах

В этом разделе доказываются технические результаты о пополнении пучков на риббонах.

Пусть $\overset{\circ}{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ – риббон над полем k. Для точки $x \in C$ обозначим $\mathcal{A}_{0,x}$ локальное кольцо, которое является слоем пучка $\mathcal{A}_0$ в точке x. Пусть $\mathcal{M}_x$ – это максимальный идеал $\mathcal{A}_{0,x}$. В дальнейшем нам потребуется сравнить два следующих кольца.

Определение 57. Обозначим $\widehat{\mathcal{A}}_{0,x}$ $\mathcal{M}_x$-адическое дополнение кольца $\mathcal{A}_{0,x}$. За $\tilde{\mathcal{A}}_{0,x}$ обозначим кольцо

$$\tilde{\mathcal{A}}_{0,x} = \varprojlim_i \widehat{\mathcal{O}}_{X_i,x}.$$

Предложение 11. 1. *Следующая диаграмма морфизмов локальных колец*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{0,x} & \to & \widehat{\mathcal{A}}_{0,x} \\ \| & & \downarrow \alpha \\ \mathcal{A}_{0,x} & \to & \tilde{\mathcal{A}}_{0,x} \end{array}$$

коммутативна, где горизонтальные стрелки инъективны.

2. *Если $\dim_k(\mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2) < \infty$, то кольцо $\widehat{\mathcal{A}}_{0,x}$ нетерово и α сюръективно, и размерность Крулля $\tilde{\mathcal{A}}_{0,x}$: $dim\tilde{\mathcal{A}}_{0,x} \geq 2$. Более того, $\tilde{I}_j = I_j\tilde{\mathcal{A}}_{0,x}$, где $\tilde{I}_j = Ker(\tilde{\mathcal{A}}_{0,x} \to \widehat{\mathcal{O}}_{X_i,x})$, $I_j = \mathcal{A}_{j,x}$.*

Доказательство Докажем утверждение 1 предложения. Определим линейную топологию на $A := \mathcal{A}_{0,x}$ взяв в качестве открытых идеалов все идеалы $\mathcal{Q}$ конечной кодлины, которые содержат некоторый идеал $I_i := \mathcal{A}_{i,x}$. Таким образом, множество $\{\mathcal{Q}\}$ идеалов содержит идеалы $I_i + \mathcal{M}_x^n$ для всех i, n, поскольку A/I_i нетерово, и таким образом она грубее либо эквивалентна $\mathcal{M}_x$-адической топологии, и она отделима (поскольку для любого $a \neq 0$ в A существует I_i с $a \neq 0 \mod I_i$, и n с $a \mod I_i \notin \mathcal{M}_x^n(A/I_i)$, отсюда $a \notin \mathcal{M}_x^n + I_i = \mathcal{Q}$).

Утверждение 1 верно, поскольку $\tilde{A}$ является дополнением A по отношению к $\{\mathcal{Q}\}$-топологии.

Докажем утверждение 2 предложения. Напомним, что $k(x) = A/\mathcal{M}_x$. Если $\dim_{k(x)}(\mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2) = n < \infty$, то $gr_{\mathcal{M}_x}(A)$ нетерово (как образ сюръекции $Sym_{A/\mathcal{M}_x}(\mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2) \to gr_{\mathcal{M}_x}(A)$) и $\dim_{k(x)}(A/\mathcal{M}_x^{k+1}) \le C_{n+k}^n$. Следовательно, $\widehat{A}$ – нетерово в силу [2, ch. III, §2.9, corol.2] (поскольку $gr_{\{\widehat{\mathcal{M}_x^i}\}}(\widehat{A}) = gr_{\mathcal{M}}(A)$), и $\widehat{A}$, $\tilde{A}$ оба имеют линейную топологию, которая линейно компактна. (Топология $\widehat{A}$ линейно компактна, поскольку $\dim_k \widehat{A}/\widehat{\mathcal{M}_x^i} < \infty$, см. [2, ch.III, §2]). Поскольку α – непрерывный гомоморфизм и A плотно в $\tilde{A}$ и в $\widehat{A}$, получаем, что α сюръективно с ядром $\cap_{\mathcal{Q}}\widehat{\mathcal{Q}} = \cap_j \widehat{I}_j$ ($\widehat{I}$ – это $\mathcal{M}_x$-адичекое дополнение идеала). Топология $\tilde{A}$ является $\tilde{\mathcal{M}}_x$-адической топологией.

Докажем, что $\tilde{I}_j = I_j\tilde{A}$. Имеем $\tilde{I}_j/\tilde{I}_{j+k} = I_j\widehat{A/I_{j+k}} = I_j\tilde{A}/\tilde{I}_{j+k}$, следовательно, $\tilde{I}_j = I_j\tilde{A} + \tilde{I}_{j+k}$ для любого $k > 0$. Но поскольку $\tilde{A}$ – Нётерово, идеал $I_j\tilde{A}$ (как и любой идеал в $\tilde{A}$) замкнут в $\mathcal{M}_x$-адической топологии и $\{\tilde{I}_j\}$-топология лучше (поскольку $\tilde{A}$ линейно компактно). Следовательно, $\tilde{I}_j = I_j\tilde{A}$.

Для того, чтобы доказать, что $dim\tilde{A} \ge 2$, выберем элемент $u \in \mathcal{M}_x$, являющийся подъемом не делителя нуля в $\mathcal{M}_{C,x} = \mathcal{M}_x/I_1$. Докажем, что $l(A/(I_{j+1} + uA)) \ge j + 1$. С помощью индукции по j это следует из следующей точной последовательности

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & I_j/I_{j+1} & \to & A/I_{j+1} & \to & A/I_j & \to 0 \\ & \downarrow u & & \downarrow u & & \downarrow u & \\ 0 \to & I_j/I_{j+1} & \to & A/I_{j+1} & \to & A/I_j & \to 0 \end{array}$$

так как выполнено утверждение (3c) определения 49, так что $l((I_j/I_{j+1})/u(I_j/I_{j+1})) \ge 1$, $l((A/I_1)/u(A/I_1)) = l(A/(I_1 + uA)) \ge 1$, $l((A/I_{j+1})/u(A/I_{j+1})) = l((A/I_j)/u(A/I_j)) + l((I_j/I_{j+1})/u(I_j/I_{j+1}))$.

Тем самым $l(\tilde{A}/(\tilde{I}_j + u\tilde{A})) \ge j$, и $l(\tilde{A}/u\tilde{A}) = \infty$. Поскольку u не является делителем нуля в $\tilde{A} = \varprojlim \widehat{A/I_j}$, выполнено неравенство $dim\tilde{A} > 1$.

Следствие 14. *Предположим, что* $\dim_{k(x)}(\mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2) = 2$. *Тогда в обозначениях предложения 11 выполнены следующие свойства.*

1. α *– изоморфизм*
2. $\tilde{\mathcal{A}}_{0,x}$ *– двумерное регулярное кольцо.*

Доказательство Мы знаем, что $dim\hat{\mathcal{A}}_{0,x} \ge dim\tilde{\mathcal{A}}_{0,x}$. Ввиду [2, ch.III, §3, prop.3], фильтрация $\{\widehat{\mathcal{M}_x^i}\}$ является $\widehat{\mathcal{M}_x}$-стабильной в кольце $\hat{\mathcal{A}}_{0,x}$. Тогда с учетом [1, prop.11.4, th. 11.14], имеем $dim\hat{\mathcal{A}}_{0,x} = \deg \chi_{\mathcal{M}_x}(n) = \deg g(n)$, где $\chi_{\mathcal{M}_x}(n)$, $g(n)$ – характеристические полиномы для фильтраций $\{\widehat{\mathcal{M}_x}^i\}$, $\{\widehat{\mathcal{M}_x^i}\}$, и $2 = dim\, Sym_{A/\mathcal{M}_x}(\mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2) \ge \deg g(n)$ (поскольку $g(n) \le \chi_\nu(n)$ для всех $n \gg 0$, где χ_ν – характеристический полином кольца $(Sym_{A/\mathcal{M}_x}(\mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2))_\nu$, где простой идеал $\nu = \bigoplus_{n=1}^\infty S^n(\mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2)$).

Следовательно, используя утверждение 2 предложения 11, получаем $dim\tilde{\mathcal{A}}_{0,x} = dim\hat{\mathcal{A}}_{0,x} = 2$ и $\tilde{\mathcal{A}}_{0,x}$ есть двумерное регулярное кольцо с простым идеалом (0). Поэтому $ker(\alpha)$ должен быть простым идеалом, и, значит, $ker(\alpha) = 0$, поскольку иначе $dim\hat{\mathcal{A}}_{0,x} > 2$.

Предложение 12. *Группа $\mathcal{A}_x^*/\mathcal{A}_{0,x}^*$ нетривиальна тогда и только тогда, когда существует натуральное $i > 0$ такое, что $\mathcal{A}_{i,x}\mathcal{A}_{-i,x} = \mathcal{A}_{0,x}$. В этом случае выполнены следующие свойства.*

1. *Все $\mathcal{A}_{j,x}$ $(j \in \mathbb{Z})$ являются конечно-порожденными $\mathcal{A}_{0,x}$-модулями.*

2. *Обратимые множества $\mathcal{A}_{j,x}$, т.е. те, для которых $\mathcal{A}_{j,x}\mathcal{A}_{-j,x} = \mathcal{A}_{0,x}$, образуют циклическую группу $\{\mathcal{A}_{id,x} | i \in \mathbb{Z}\}$ с некоторым $d > 0$.*

Доказательство Если $\mathcal{A}_{i,x}\mathcal{A}_{-i,x} = \mathcal{A}_{0,x}$, то существует конечное множество элементов $a_i \in \mathcal{A}_{i,x}$, $b_i \in \mathcal{A}_{-i,x}$, $i = 1, \dots, r$ таких, что $\sum a_i b_i = 1$.

Поскольку $\mathcal{A}_{0,x}$ – локальное кольцо, существует одна пара (a_i, b_i) с $a_i b_i \in \mathcal{A}_{0,x}^*$, поэтому существует пара (a, b), $a \in \mathcal{A}_{i,x}$, $b \in \mathcal{A}_{-i,x}$ с $ab = 1$.

Теперь из того, что $ab = 1$, $a \in \mathcal{A}_{i,x}$, $b \in \mathcal{A}_{-i,x}$, получаем $\mathcal{A}_{i,x} = \mathcal{A}_{0,x}a$, $\mathcal{A}_{-i,x} = \mathcal{A}_{0,x}b$. Так как если $a' \in \mathcal{A}_{j,x}$ и $a'b = f \in \mathcal{A}_{0,x}$, то $0 = ((a' - fa)b)a = a' - fa$, следовательно $a' = fa$. Аналогично, $\mathcal{A}_{ki,x} = \mathcal{A}_{0,x}a^k$, $\mathcal{A}_{-ki,x} = \mathcal{A}_{0,x}b^k$, поскольку $a^k b^k = 1$.

Если $\mathcal{A}_{i,x}\mathcal{A}_{-i,x} = \mathcal{A}_{0,x}$, $\mathcal{A}_{j,x}\mathcal{A}_{-j,x} = \mathcal{A}_{0,x}$ и $d = gcd(i,j)$, то $\mathcal{A}_{d,x}\mathcal{A}_{-d,x} = \mathcal{A}_{0,x}$. Ибо если $\mathcal{A}_{i,x} = \mathcal{A}_{0,x}a$, $\mathcal{A}_{j,x} = \mathcal{A}_{0,x}a'$ и $d = mi + nj$, то $a^m a'^n \in \mathcal{A}_{d,x}$, и если $b = a^{-1}$, $b' = a'^{-1}$, то $b^m b'^n \in \mathcal{A}_{-d,x}$ и $(a^m a'^n)(b^m b'^n) = 1$.

Тем самым, утверждение 2 этого предложения доказано. Для того, чтобы доказать утверждение 1 предложения, заметим, что для любого $\mathcal{A}_{j,x}$ существует $k = dj$, кратное d такое, что $\mathcal{A}_{k,x} \subset \mathcal{A}_{j,x}$, и $\mathcal{A}_{j,x}/\mathcal{A}_{k,x}$ – конечно-порожденный $\mathcal{A}_{0,x}$-модуль.

Следствие 15. *Если существует гладкая точка P на неприводимой кривой C такая, что $\mathcal{A}_{1,P}\mathcal{A}_{-1,P} = \mathcal{A}_{0,P}$, то $\dim_{k(P)}(\mathcal{M}_P/\mathcal{M}_P^2) = 2$.*

Доказательство Из предложения 12 мы знаем, что в нашем случае $\mathcal{A}_{i,P} = \mathcal{A}_{0,P}a^i$ для всех $i \geq 1$. Поскольку P – гладкая точка, имеем $\mathcal{M}_{C,P} = \mathcal{O}_{C,P}\bar{u}$ для некоторого $\bar{u} \in \mathcal{M}_{C,P}$. Пусть $u \in \mathcal{A}_{0,P}$ – представитель $\bar{u}$. Тогда, ясно, что u, a порождают идеал $\mathcal{M}_P$ в кольце $\mathcal{A}_{0,P}$ и линейно независимы в $\mathcal{M}_P/\mathcal{M}_P^2$. Таким образом, мы заключаем, что $\dim_{k(P)}(\mathcal{M}_P/\mathcal{M}_P^2) = 2$.

Определение 58. Будем говорить, что точка $P \in C$ является гладкой точкой на риббоне $\mathring{X}_\infty$, если следующие условия выполнены.

1. P — гладкая точка C.

2. $(\widehat{\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+1}})_P \otimes (\widehat{\mathcal{A}_j/\mathcal{A}_{j+1}})_P \to (\widehat{\mathcal{A}_{i+j}/\mathcal{A}_{i+j+1}})_P$ — изоморфизм $\widehat{\mathcal{O}}_{C,P}$-модулей, и это отображение индуцировано отображением из определения риббона: $\mathcal{A}_i \cdot \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}$.

Пример 17. Пусть $\mathring{X}_\infty$ – риббон из примера 10, где $P \in C$ – гладкая точка кривой C и поверхности X. Тогда очевидно, что P — гладкая точка риббона $\mathring{X}_\infty$.

Замечание 44. Все риббоны из примеров 11 и 12 имеют открытые окрестности, в которых у них есть гладкие точки и они алгебраизуемы.

Предложение 13. *Пусть P — гладкая k–точка риббона $(C, \mathcal{A})$. Тогда*

$$\tilde{\mathcal{A}}_{0,P} \simeq \hat{\mathcal{A}}_{0,P} \simeq k[[u,t]],$$

где $t\tilde{\mathcal{A}}_{0,P} = \tilde{\mathcal{A}}_{1,P}$ и $\widehat{\mathcal{O}}_{C,P} \simeq k[[\tau(u)]]$, где $\tau : \tilde{\mathcal{A}}_{0,P} \to \widehat{\mathcal{O}}_{C,P}$ — каноническое отображение.

Доказательство Изоморфизм $\tilde{\mathcal{A}}_{0,P} \simeq \hat{\mathcal{A}}_{0,P}$ следует из следствий 15 и 14. Теперь докажем, что $\widehat{\mathcal{O}}_{X_i,P} \simeq k[[u]][t]/t^i$ для некоторых u, t. Доказательство проведем по индукции по i.

Если $i = 1$, тогда $\widehat{\mathcal{O}}_{X_1,P} = \widehat{\mathcal{O}}_{C,P} \simeq k[[u]]$ для некоторого u. Предположим, что мы доказали утверждение для $(i-1)$. У нас есть точная тройка:

$$0 \to (\widehat{\mathcal{A}_{i-1}/\mathcal{A}_i})_P \to \widehat{\mathcal{O}}_{X_i,P} \xrightarrow{\gamma} \widehat{\mathcal{O}}_{X_{i-1},P} \to 0.$$

Пусть $\tilde{u}, \tilde{t} \in \widehat{\mathcal{O}}_{X_i,P}$ — элементы с $\gamma(\tilde{u}) = u$, $\gamma(\tilde{t}) = t$. Из определения гладкой точки следует, что $\tilde{t}^{i-1}$ является порождающим $\widehat{\mathcal{O}}_{C,P}$-модуля $(\widehat{\mathcal{A}_{i-1}/\mathcal{A}_i})_P$. Следовательно, $\widehat{\mathcal{O}}_{X_i,P} \simeq k[[u]][t]/t^i$.

Переходя к проективному пределу по i, получаем требуемое.

Определение 59. Произвольные элементы u, t из предложения 13 называются *формальными локальными параметрами* риббона $(C, \mathcal{A})$ в гладкой точке P.

Определение 60. Пусть $\mathring{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ — риббон над полем k. Будем говорить, что точка $P \in C$ — это гладкая точка пучка без кручения $\mathcal{N}$ на $\mathring{X}_\infty$ если выполнены следующие условия.

1. P — гладкая точка $\mathring{X}_\infty$.
2. $(\widehat{\mathcal{N}_i/\mathcal{N}_{i+1}})_P \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{C,P}} (\widehat{\mathcal{A}_j/\mathcal{A}_{j+1}})_P \to (\widehat{\mathcal{N}_{i+j}/\mathcal{N}_{i+j+1}})_P$ – изоморфизм $\widehat{\mathcal{O}}_{C,P}$-модулей, и это отображение индуцировано отображением из определения $\mathcal{N}$: $\mathcal{N}_i \cdot \mathcal{A}_j \subset \mathcal{N}_{i+j}$.

Аналогично предложению 13 мы имеем следующее предложение.

Предложение 14. *Пусть P — гладкая точка пучка без кручения $\mathcal{N}$ ранга r на риббоне $\mathring{X}_\infty$ над полем k. Тогда*

$$\widetilde{\mathcal{N}}_{0,P} \simeq \widetilde{\mathcal{A}}_{0,P}^{\oplus r},$$

где $\widetilde{\mathcal{N}}_{0,P} = \varprojlim_{j \geq 0} (\widehat{\mathcal{N}_0/\mathcal{N}_j})_P$.

Доказательство С помощью индукции по j и с помощью точной последовательности

$$0 \to (\widehat{\mathcal{N}_{j-1}/\mathcal{N}_j})_P \to (\widehat{\mathcal{N}_0/\mathcal{N}_j})_P \to (\widehat{\mathcal{N}_0/\mathcal{N}_{j-1}})_P \to 0$$

мы доказываем, что $(\widehat{\mathcal{N}_0/\mathcal{N}_j})_P \simeq (\widehat{\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_j})_P^{\oplus r}$. Затем мы переходим к проективному пределу.

Пример 18. Пусть $\mathring{X}_\infty$ — риббон из примера 10. Пусть E — локально свободный пучок ранга r на поверхности X. Тогда

$$\mathring{E}_C := \varinjlim_i \varprojlim_j E(iC)/E(jC)$$

является пучком без кручения ранга r на $\mathring{X}_\infty$. Любая точка $P \in C \subset X$, гладкая на C и на X, будет гладкой точкой на $\mathring{E}_C$.

Замечание 45. Аналогично определению 57 мы имеем два $\mathcal{A}_{0,P}$-модуля: $\widetilde{\mathcal{N}}_{0,P}$ и $\widehat{\mathcal{N}}_{0,P}$, где последний является $\mathcal{M}_P$–адическим дополнением модуля $\mathcal{N}_{0,P}$. Проводя схожие рассуждения, что и в доказательстве предложения 11, мы получим, что если $\dim_k \mathcal{N}_{0,P}/\mathcal{M}_P\mathcal{N}_{0,P} < \infty$, то естественный гомоморфизм $\mathcal{A}_{0,P}$–модулей

$$\widehat{\mathcal{N}}_{0,P} \xrightarrow{\alpha} \widetilde{\mathcal{N}}_{0,P}$$

сюръективен.

Если P — гладкая точка пучка без кручения $\mathcal{N}$ ранга r, то $\widehat{\mathcal{A}}_{0,P} \simeq \widetilde{\mathcal{A}}_{0,P}$, $\dim_{k(P)} \mathcal{N}_{0,P}/\mathcal{M}_P\mathcal{N}_{0,P} = r$ и следовательно α является изоморфизмом $\widetilde{\mathcal{A}}_{0,P}$–модулей.

По геометрическим данным $(X, j, \mathcal{F})$ из предыдущей главы, где $\mathcal{F}$ — когерентный пучок, каноническим образом строится риббон с пучком без кручения конечного ранга (равного рангу $\mathcal{F}$) с гладкой точкой.

Предложение 15. *По геометрическим данным $q = (X, C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi)$ из определения 45, где $\mathcal{F}$ — когерентный пучок ранга r (не обязательно совпадающий с рангом данных), каноническим образом строятся геометрические данные $\tilde{q}$, состоящие из риббона $(C, \mathcal{A})$ над полем k, пучка без кручения $\mathcal{N}$ ранга r с гладкой точкой P, формальные локальные параметры u', t' и тривиализация $e_P : \hat{\mathcal{N}}_{0,P} \to \hat{\mathcal{A}}^r_{0,P} \simeq k[[u', t']]^r$. Таким образом, имеется отображение*

$$\Phi : q \mapsto \tilde{q}.$$

Конструкция данных $\tilde{q}$ обобщает конструкцию геометрического риббона из примера 10.

Доказательство Пусть $(X, C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi)$ — геометрические данные из определения 45, и $\mathcal{F}$ — когерентный пучок ранга r на X (r не обязательно равен рангу данных).

Тогда мы можем определить риббон $\mathring{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ и пучок без кручения $\mathcal{N}$ на нем следующим образом. Напомним, что по этим данным определены подпространства W, A в $k[[u]]((t))$ (см. раздел 3.5.3) и $X \simeq \mathrm{Proj}(\tilde{A})$, $\mathcal{F} \simeq \mathrm{Proj}(\tilde{W})$.

Пусть $X_\infty = (C, \hat{\mathcal{A}}_0)$ — формальная схема, пополнение X вдоль C. Определим семейство пучков $\mathcal{A}_i = \hat{\mathcal{B}}_{-i} = \widehat{\mathrm{Proj}(\tilde{A}(-i))}$ на X_∞. Так как функтор $\mathcal{B}_i \mapsto \hat{\mathcal{B}}_i$ — точный функтор (см. например [27, Corol. 9.8]), имеем $\mathcal{A}_i \supset \mathcal{A}_{i+1}$ для всех i. Очевидно, для всех i пучки $\mathcal{B}_i/\mathcal{B}_{i-1} \simeq \hat{\mathcal{B}}_i/\hat{\mathcal{B}}_{i-1}$ без кручения на C и $\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{O}_C$. Умножение в кольце A индуцирует отображение умножения $\mathcal{B}_i\mathcal{B}_j \subset \mathcal{B}_{i+j}$, и следовательно, отображение умножения $\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}$. Таким образом, пучок $\mathcal{A} = \varinjlim \mathcal{A}_i$ определяет структуру риббона $(C, \mathcal{A})$ согласно определению 49. Аналогичным образом определим пучок $\mathcal{N} = \varinjlim \mathcal{N}_i$, где $\mathcal{N}_i = \hat{\mathcal{F}}_{-i} = \widehat{\mathrm{Proj}(\tilde{W}(-i))}$. Пучки $\mathcal{N}_i/\mathcal{N}_{i+1}$ не имеют кручения и когерентны для всех i.

Покажем, что $\mathcal{N}$ — пучок без кручения ранга r на риббоне $(C, \mathcal{A})$ в смысле определения 51, и что точка P — гладкая для пучка $\mathcal{N}$. Так как P — гладкая точка на C, мы должны проверить, что отображение

$$(\widehat{\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}})_P \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{C,P}} (\widehat{\mathcal{B}_j/\mathcal{B}_{j-1}})_P \longrightarrow (\widehat{\mathcal{F}_{i+j}/\mathcal{F}_{i+j-1}})_P,$$

индуцированное отображением умножения $\mathcal{F}_i \cdot \mathcal{B}_j \subset \mathcal{F}_{i+j}$, — изоморфизм. Это следует из того, что $(\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1})_P \simeq \mathcal{O}^r_{C,P}$, $(\mathcal{B}_j/\mathcal{B}_{j-1})_P \simeq \mathcal{O}_{C,P}$ (т.к. они без кручения, и P — гладкая точка на C). Из последних фактов также следует, что $\mathcal{N}$ — пучок без кручения ранга r (ср. следствие 27).

4.1.5 Обобщенное отображение Кричевера–Паршина

В этом разделе доказывается основной результат раздела 4.1: теорема классификации данных на риббоне в терминах пар $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$.

Докажем вначале одну техническую лемму.

Лемма 34. *Пусть $(C, \mathcal{A}, P, u, t)$ – риббон над полем k с гладкой k–точкой P и формальными локальными параметрами u, t. Тогда $u \in \hat{\mathcal{A}}_{0,P}$ определяет эффективный дивизор Картье $p_{u,i}$ на схеме X_i для любых i такой, что $\theta_i^* p_{u,i} = p_{u,i-1}$ и $p_{u,1} = P$, где*

$$\theta_i : X_{i-1} \to X_i$$

является каноническим отображением.

Доказательство В силу предложения 13 имеем $\widehat{\mathcal{O}}_{X_i,P} \simeq k[[u]][t]/t^i$, так как P — гладкая точка рибона $(C,\mathcal{A})$. За $\tilde{p}_{u,i} = u{\cdot}k[[u]][t]/t^i$ обозначим идеал в $\widehat{\mathcal{O}}_{X_i,P}$. Пусть $p'_{u,i} := \tilde{p}_{u,i} \cap \mathcal{O}_{X_i,P}$ — идеал в $\mathcal{O}_{X_i,P}$.

Для некоторого $j > 0$ имеем $\mathcal{M}_P^j \cdot k[[u]][t]/t^i \subset \tilde{p}_{u,i}$, где $\mathcal{M}_P$ — максимальный идеал $\mathcal{O}_{X_i,P}$. Следовательно, $\mathcal{M}_P^j \mathcal{O}_{X_i,P} \subset p'_{u,i}$. Пусть $\tilde{u} \in \mathcal{O}_{X_i,P}$ такой элемент, что $\beta(\tilde{u})$ совпадает с $\hat{\beta}(u)$, где $\beta, \hat{\beta}$ – следующие естественные отображения

$$
\begin{array}{ccccc}
\beta & : & \mathcal{O}_{X_i,P} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X_i,P}/\mathcal{M}_P^j \\
 & & & & \| \\
\hat{\beta} & : & \widehat{\mathcal{O}}_{X_i,P} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{O}}_{X_i,P}/\widehat{\mathcal{M}}_P^j
\end{array}
$$

Тогда $\tilde{u} \in p_{u,i'}$ и $\tilde{u}{\cdot}\widehat{\mathcal{O}}_{X_i,P} = \tilde{p}_{u,i}$. Следовательно, $p'_{u,i}{\cdot}\widehat{\mathcal{O}}_{X_i,P} = \tilde{p}_{u,i}$, и $p'_{u,i} = \tilde{u}\mathcal{O}_{X_i,P}$ определяет эффективный дивизор Картье $p_{u,i}$ в некоторой аффинной открытой окрестности точки $P \in X_i$ (и на X_i). По построению, $\theta_i^* p_{u,i} = p_{u,i-1}$.

Замечание 46. По построению идеала $p'_{u,i}$ (или дивизора $p_{u,i}$) получаем, что он однозначно определяется свойствами $p'_{u,i} \cdot \widehat{\mathcal{O}}_{X_i,P} = u \cdot \widehat{\mathcal{O}}_{X_i,P}$, $\theta_i^* p_{u,i} = p_{u,i-1}$, и $p'_{u,1} = \mathcal{M}_P \subset \mathcal{O}_{C,P}$.

Дадим теперь определения классифицируемых объектов. Сначала определим данные на риббонах.

Определение 61. Пусть $(\mathring{X}_\infty, \mathcal{N})$, $(\mathring{X}'_\infty, \mathcal{N}')$ — два риббона над полем k с двумя пучками без кручения ранга r на них. Будем говорить, что пара $(\mathring{X}_\infty, \mathcal{N})$ изоморфна паре $(\mathring{X}'_\infty, \mathcal{N}')$, если существует изоморфизм

$$\varphi \ : \ \mathring{X}_\infty \longrightarrow \mathring{X}'_\infty$$

риббонов (см. определения 50) и изоморфизм

$$\psi \ : \ \mathcal{N}' \to \varphi_*(\mathcal{N})$$

градуированных $\mathcal{A}'$-модулей, т.е. $\psi(\mathcal{N}'_i) = \varphi_*(\mathcal{N}_i)$ и $\psi(ln) = \varphi^\sharp(l)\psi(n)$ для любых сечений $n \in \mathcal{N}'(U)$, $l \in \mathcal{A}'(U)$ над открытым $U \subset C'$.

Определение 62. Рассмотрим следующие геометрические данные $(C, \mathcal{A}, \mathcal{N}, P, u, t, e_P)$, где

- $(C,\mathcal{A})$ — риббон над полем k,
- $\mathcal{N}$ — пучок без кручения ранга r на $(C,\mathcal{A})$,
- $P \in C$ — гладкая k–точка пучка $\mathcal{N}$,
- u, t — формальные локальные параметры риббона в P,
- $e_P : \widetilde{\mathcal{N}}_{0,P} \to \widetilde{\mathcal{A}}_{0,P}^{\oplus r} \simeq k[[u,t]]^{\oplus r}$ — изоморфизм $\widetilde{\mathcal{A}}_{0,P}$–модулей.

Будем говорить, что данные $(C, \mathcal{A}, \mathcal{N}, P, u, t, e_P)$ изоморфны данным $(C', \mathcal{A}', \mathcal{N}', P', u', t', e'_P)$, если существует изоморфизм (см. определения 61)

$$(\varphi, \psi) \ : \ (C, \mathcal{A}, \mathcal{N}) \longrightarrow (C', \mathcal{A}', \mathcal{N}')$$

такой, что $\varphi(P) = P'$, $\varphi_P^\sharp(t') = t$, $\varphi_P^\sharp(u') = u$, где $\varphi_P^\sharp : \widetilde{\mathcal{A}'}_{0,P} \to \widetilde{\mathcal{A}}_{0,P}$ — изоморфизм локальных колец, индуцированный отображением $\varphi^\sharp$, и диаграмма

$$
\begin{array}{ccc}
\widetilde{\mathcal{N}'}_{0,P} & \overset{\psi_P}{\to} & \widetilde{\mathcal{N}}_{0,P} \\
\downarrow e'_P & & \downarrow e_P \\
\widetilde{\mathcal{A}'}_{0,P} & \overset{\varphi_P^\sharp}{\to} & \widetilde{\mathcal{A}}_{0,P}
\end{array}
$$

коммутативна, где изоморфизм ψ_P индуцирован отображением ψ.

Определение 63. Пусть $K = k((u))((t))$ — двумерное локальное поле. Определим следующие k-подпространства в K:

$$\mathcal{O}(n) = t^n k((u))[[t]]$$

для любых n. Для любых k-подпространств $\mathbb{W} \subset K^{\oplus r}$ и любых $j > i \in \mathbb{Z}$ определим

$$\mathbb{W}(i,j) = \frac{W \cap \mathcal{O}(i)^{\oplus r}}{W \cap \mathcal{O}(j)^{\oplus r}} \text{ и}$$

$$\mathbb{W}(n) = \frac{\mathbb{W} \cap t^n k((u))[[t]]^{\oplus r}}{\mathbb{W} \cap t^{n+1} k((u))[[t]]^{\oplus r}}.$$

Имеем естественный изоморфизм $\mathcal{O}(i)/\mathcal{O}(j) = k((u))^{\oplus(j-i)}$, следовательно, $\mathbb{W}(i,j)$, $\mathbb{W}(n)$ — k-подпространства пространства $k((u))^{\oplus r(j-i)}$, $k((u))^r$ соответственно. Отметим, что последнее пространство имеет естественную локально линейно компактную топологию.

k-подпространство $\mathbb{W}$ в $k((u))((t))^{\oplus r}$ называется *обобщенным Фредгольмовым подпространством*, если для любого $n \in \mathbb{Z}$ k-подпространство $\mathbb{W}(n)$ в $k((u))^{\oplus r}$ является Фредгольмовым подпространством (по отношению к $k[[u]]^{\oplus r}$).

Определение 64. Пусть $\mathbb{W}$ — k-подпространство в $K^{\oplus r} = k((u))((t))^{\oplus r}$, $\mathbb{A}$ — k-подалгебра в $K = k((u))((t))$. (Можно рассматривать $K^{\oplus r}$ как K-модуль, так что произведение $\mathbb{A} \cdot \mathbb{W} \subset K^{\oplus r}$ определено.)

Предположим, что $\mathbb{A} \cdot \mathbb{W} \subset \mathbb{W}$, и $\mathbb{A}(i, i+1) \subset k((u))$ — подпространства Фредгольма по отношению к $k[[u]]$, $\mathbb{W}(i, i+1) \subset k((u))^{\oplus r}$ — подпространства Фредгольма по отношению к $k[[u]]^{\oplus r}$ для любых $i \in \mathbb{Z}$. Тогда пару k-подпространств $(\mathbb{A}, \mathbb{W}) \subset K \oplus K^{\oplus r}$ назовем *обобщенной парой Шура* .

Замечание 47. По индукции по $j - i > 0$ имеем, что если $\mathbb{W}(i, i+1)$ — подпространство Фредгольма в $k((u))^{\oplus r}$ по отношению к $k[[u]]^{\oplus r}$ для любых $i \in \mathbb{Z}$, то $\mathbb{W}(i,j)$ — подпространство Фредгольма в $k((u))^{\oplus r(j-i)}$ по отношению к $k[[u]]^{\oplus r(j-i)}$ для любых $j > i$. Аналогично, если $\mathbb{A}(i, i+1)$ — подпространство Фредгольма в $k((u))$ по отношению к $k[[u]]$ для любых $i \in \mathbb{Z}$, то $\mathbb{A}(i,j)$ — подпространство Фредгольма в $k((u))^{\oplus(j-i)}$ по отношению к $k[[u]]^{\oplus(j-i)}$ для любых $j > i$.

Основной результат раздела — следующая

Теорема 27. *Обобщенные пары Шура* $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ *находятся во взаимно-однозначном соответствии с данными* $(C, \mathcal{A}, \mathcal{N}, P, u, t, e_P)$ *из определения 62 с точностью до изоморфизма, при этом мы дополнительно предполагаем, что* C *— проективная неприводимая кривая.*

Следствие 16. *k-подалгебры* $\mathbb{A}$ *из определения 64 находятся взаимно–однозначном соответствии с данными* $(C, \mathcal{A}, P, u, t)$ *с точностью до изоморфизма, где* C *должна быть проективной неприводимой кривой.*

Доказательство Следствие следует из теоремы, если возьмем $\mathcal{N} = \mathcal{A}$, $\mathbb{W} = \mathbb{A}$, и $e_P = 1$.

Докажем теперь теорему. Имеем следующую диаграмму отображений для любого когерентного пучка M на схеме X_i и для любого $i \geq 0$.

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma(X_i \backslash P, M) & \stackrel{\alpha_M}{\to} & \Gamma(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X_i,P} \backslash P, M) & \stackrel{\beta_M}{\to} & \Gamma(\operatorname{Spec} \widehat{\mathcal{O}}_{X_i,P} \backslash P, M) \\
 & & \| & & \| \\
 & & M \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{O}_{X_i,\eta_i} & & M \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{O}_{X_i,\eta_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \widehat{\mathcal{O}}_{X_i,P}
\end{array}$$

где η_i — общая точка схемы X_i.

Пусть теперь $M = \mathcal{N}_k/\mathcal{N}_{k+i+1}$ для некоторого k. Тогда, по утверждению 1 предложения 9 и утверждения 2 предложения 7, M — когерентный пучок на схеме X_i. С помощью индукции по i покажем, что отображение α_M является вложением. Это верно при $i = 0$, потому, что $\mathcal{N}_k/\mathcal{N}_{k+1}$ — пучок без кручения на C. Имеем следующую коммутативную диаграмму для произвольного $i \geq 1$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \Gamma(X_i \backslash P, \mathcal{N}_{i+k}/\mathcal{N}_{i+k+1}) & \to & \Gamma(X_i \backslash P, \mathcal{N}_k/\mathcal{N}_{i+k+1}) & \to & \Gamma(X_i \backslash P, \mathcal{N}_k/\mathcal{N}_{k+i}) & \to 0 \\
& \downarrow \alpha_{\mathcal{N}_{i+k}/\mathcal{N}_{i+k+1}} & & \downarrow \alpha_{\mathcal{N}_k/\mathcal{N}_{i+k+1}} & & \downarrow \alpha_{\mathcal{N}_k/\mathcal{N}_{i+k}} & \\
0 \to & (\mathcal{N}_{i+k}/\mathcal{N}_{i+k+1})_{\eta_i} & \to & (\mathcal{N}_k/\mathcal{N}_{i+k+1})_{\eta_i} & \to & (\mathcal{N}_k/\mathcal{N}_{k+i})_{\eta_i} & \to 0, \\
& & & & & \| & \\
& & & & & (\mathcal{N}_k/\mathcal{N}_{k+i})_{\eta_{i-1}} &
\end{array}$$

поскольку $\mathcal{N}_{i+k}/\mathcal{N}_{i+k+1}$ — когерентный $\mathcal{O}_{X_i}$-модуль и структура $\mathcal{O}_{X_i}$-модуля на $\mathcal{N}_k/\mathcal{N}_{k+i}$ точно такая же, как структура $\mathcal{O}_{X_{i-1}}$-модуля. Следовательно, по гипотезе индукции, левые и правые вертикальные стрелки являются вложениями. Следовательно, средняя стрелка также является вложением.

Отображение $\beta_{\mathcal{N}_k/\mathcal{N}_{i+k+1}}$ является вложением для пучка $\mathcal{N}_k/\mathcal{N}_{i+k+1}$. Следовательно, отображение
$\beta_{\mathcal{N}_k/\mathcal{N}_{i+k+1}} \circ \alpha_{\mathcal{N}_k/\mathcal{N}_{i+k+1}}$ является вложением для пучка $\mathcal{N}_k/\mathcal{N}_{i+k+1}$.

При $k = 0$ имеем

$$\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{O}_{X_i,\eta_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \widehat{\mathcal{O}}_{X_i,P} \simeq k((u))[t]/t^{i+1},$$

потому что мы зафиксировали формальные локальные параметры u, t нашего риббона в P.

При $k > 0$ имеем

$$\mathcal{A}_k/\mathcal{A}_{k+i+1} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{O}_{X_i,\eta_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \widehat{\mathcal{O}}_{X_i,P} \simeq t^k \cdot k((u))[t]/t^{i+1}$$

как идеал в $\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1+k} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{O}_{X_i,\eta_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \widehat{\mathcal{O}}_{X_i,P} \simeq k((u))[t]/t^{i+k+1}$.

По определению гладкой точки на риббоне, имеем естественное спаривание при $k < 0$

$$(\widehat{\mathcal{A}_k/\mathcal{A}_{k+i+1}})_P \otimes (\widehat{\mathcal{A}_{-k}/\mathcal{A}_{-k+i+1}})_P \to (\widehat{\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1}})_P,$$

и элемент $t^{-k} \mod \widetilde{\mathcal{A}}_{-k+i,P} \in (\widehat{\mathcal{A}_{-k}/\mathcal{A}_{-k+i+1}})_P$. Тогда, по индукции по $i \geq 0$ получим, что

$$(\widehat{\mathcal{A}_k/\mathcal{A}_{k+i+1}})_P \xrightarrow{\times t^{-k}} (\widehat{\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1}})_P \simeq k((u))[t]/t^{i+1}$$

является изоморфизмом. Следовательно,

$$\varinjlim_k \varprojlim_{i \geq 0} (\widehat{\mathcal{A}_k/\mathcal{A}_{k+i+1}})_P \simeq k((u))((t)).$$

Кроме того, $\mathcal{A} = \varinjlim\limits_k \varprojlim\limits_{i \geq 0} \mathcal{A}_k/\mathcal{A}_{k+i+1}$. Следовательно, кольцо

$$\mathbb{A} := \varinjlim_k \varprojlim_{i \geq 0} \Gamma(X_i \backslash P, \mathcal{A}_k/\mathcal{A}_{k+i+1}) \subset k((u))((t))$$

является k–подалгеброй, которая удовлетворяет условиям теоремы.

Аналогично, используя тривиализацию e_P и формальные локальные параметры u, t, получим изоморфизм

$$\varinjlim_k \varprojlim_{i\geq 0} (\widehat{\mathcal{N}_k/\mathcal{N}_{k+i+1}})_P \simeq k((u))((t))^{\oplus r}$$

и подпространство

$$\mathbb{W} := \varinjlim_k \varprojlim_{i\geq 0} \Gamma(X_i \backslash P, \mathcal{N}_k/\mathcal{N}_{k+i+1}) \subset k((u))((t))^{\oplus r}$$

– это k-подпространство, которое удовлетворяет условиям теоремы.

Таким образом, имея геометрические данные $(C, \mathcal{A}, \mathcal{N}, P, u, t, e_P)$ из определения 62, мы построили пару Шура $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ из определения 64.

Сейчас мы построим геометрические данные, имея пару Шура. Во-первых, отметим, что

$$\Gamma(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X_i,P} \backslash P, \mathcal{A}_k/\mathcal{A}_{k+i+1}) \varinjlim_{n\geq 0} \Gamma(X_i, \mathcal{A}_k/\mathcal{A}_{k+i+1}(np_{u,i})),$$

где $p_{u,i}$ — эффективный дивизор Картье на X_i, который был построен 34 выше.

Рассмотрим k-подпространства при $j > i \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{A}(i,j) \subset k((u))^{\oplus(j-i)} \quad \text{и}$$

$$U_n(i,j) = u^{-n} \cdot k[[u]]^{\oplus(j-i)} \subset k((u))^{\oplus(j-i)}.$$

Если $i = 0$, то пространство $\bigoplus_{n\geq 0}(U_n(0,j) \cap \mathbb{A}(0,j))$ — градуированное кольцо. Положим

$$X_{j-1} = \operatorname{Proj}(\bigoplus_{n\geq 0}(U_n(0,j) \cap \mathbb{A}(0,j))).$$

Образ вложения $\bigoplus_{n\geq 0}(U_{n-1}(0,1) \cap \mathbb{A}(0,1))$ в $\bigoplus_{n\geq 0}(U_n(0,1) \cap \mathbb{A}(0,1))$ – однородный идеал, который определяет точку $P \in X_0$.

Если $j > i \in \mathbb{Z}$, то $\bigoplus_{n\geq 0}(U_n(i,j) \cap \mathbb{A}(i,j))$ является градуированным модулем над градуированным кольцом $\bigoplus_{n\geq 0}(U_n(0,j-i) \cap \mathbb{A}(0,j-i))$. Тогда определим

$$\mathcal{A}(i,j) = \widetilde{\bigoplus_{n\geq 0}(U_n(i,j) \cap \mathbb{A}(i,j))},$$

т.е. это когерентный пучок на $X_{(j-i)}$, который связан с соответствующим градуированным модулем. Поскольку не существует делителей нулей в поле $k((u))$, пучок $\mathcal{A}(i,i+1)$ — пучок без кручения на C для любого i.

Для всех $j > i \in \mathbb{Z}$ имеем сюръективные морфизмы $\mathcal{A}(i,j+1) \to \mathcal{A}(i,j)$ и инъективные морфизмы $\mathcal{A}(i,j) \to \mathcal{A}(i-1,j)$. Также, из определений, мы имеем отображения для всех $i < j$, $k < l$

$$\mathbb{A}(i,j) \otimes_k \mathbb{A}(k,l) \longrightarrow \mathbb{A}(i+k, \min(j+k, i+l)), \tag{4.8}$$

которые также хорошо определены, если мы перейдем к проективным пределам по j и l.

Таким образом, мы определяем пучки $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_i$, $i \in \mathbb{Z}$ следующим образом

$$\mathcal{A} := \varinjlim_i \varprojlim_{j\geq i} \mathcal{A}(i,j), \quad \mathcal{A}_i = \varprojlim_{j\geq i} \mathcal{A}(i,j).$$

Отображение, заданное формулой (4.8), определяет умножение $\mathcal{A}_i \cdot \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}$. Кроме того, $\widetilde{\mathcal{A}}_{0,P} = k[[u,t]]$, и, следовательно, u, t — формальные локальные параметры риббона $(X_0, \mathcal{A})$ в точке P.

Аналогично, определим пучки модулей $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_i$, $i \in \mathbb{Z}$ следующим образом

$$\mathcal{N} := \varinjlim_{i} \varprojlim_{j \geq i} \mathcal{N}(i,j), \qquad \mathcal{N}_i = \varprojlim_{j \geq i} \mathcal{N}(i,j),$$

где $\mathcal{N}(i,j) = \widetilde{N}$, $N = \bigoplus_{n \geq 0}((u^{-n} \cdot k[[u]]^{\oplus r(j-i)}) \cap \mathbb{W}(i,j))$, т.е. $\mathcal{N}(i,j)$ — когерентный пучок $\mathcal{O}_{X_{(j-i-1)}}$–модулей, который связан с соответствующим градуированным модулем, при всех $j > i$. По построению, имеем естественный изоморфизм

$$e_P \; : \; \widetilde{\mathcal{N}}_{0,P} \to k[[u,t]]^{\oplus r}.$$

Только что построенное отображение $(\mathbb{A}, \mathbb{W}) \mapsto (X_0, \mathcal{A}, \mathcal{N}, P, u, t, e_P)$ является обратным к отображению, которое было построено в первой части доказательства этой теоремы, так как пучок $\mathcal{N}_i/\mathcal{N}_j \simeq \Gamma_*(\widetilde{\mathcal{N}_i/\mathcal{N}_{j+1}})$ для всех $j > i \in \mathbb{Z}$, где градуированный модуль

$$\Gamma_*(\mathcal{N}_i/\mathcal{N}_j) = \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X_{j-i-1}, \mathcal{N}_i/\mathcal{N}_j(np_{u,j-i-1})),$$

определяет когерентный пучок на схеме

$$X_{j-i-1} = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X_{j-i-1}, \mathcal{O}_{X_{j-i-1}}(np_{u,j-i-1}))),$$

поскольку $\mathcal{O}_{X_{j-i-1}}(p_{u,j-i-1})$ — обильный пучок на X_{j-i-1}. Последнее вытекает из следующей леммы.

Лемма 35. *Для любых $i > 0$ пучок $\mathcal{O}_{X_i}(p_{u,i})$ — обильный пучок на X_i.*

Доказательство X_i — собственная схема (так как X_0 — проективная кривая). Поэтому, с учетом [27, ch.III, prop.5.3] достаточно доказать, что для любого $l > 0$ для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X_i существует $n_0 > 0$ такое, что для любого $n > n_0$ $H^l(X_i, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{X_i}(np_{u,i})) = 0$.

Воспользуемся индукцией по i. Если $i = 1$, то $p_{u,1}$ — точка P на проективной кривой $C = X_0$, т.е. она является обильным дивизором. Если $i > 1$, рассмотрим точную последовательность $\mathcal{O}_{X_i}$–модулей

$$0 \to \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{A}_{i-1}/\mathcal{A}_i \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{O}_{X_i}(np_{u,i}) \to \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{O}_{X_i}(np_{u,i}) \to$$
$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} (\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i-1}) \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{O}_{X_i}(np_{u,i}) \to 0.$$

Структура $\mathcal{O}_{X_i}$–модуля модулей $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{A}_{i-1}/\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} (\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i-1})$ совпадает со структурой $\mathcal{O}_{X_{i-1}}$–модуля. Следовательно, их когомологии на X_i совпадают с когомологиями на X_{i-1}. Таким образом, из длинной точной последовательности когомологий по предположению индукции получаем для всех $n > n_0$ и всех $l > 0$ $H^l(X_i, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{X_i}(np_{u,i})) = 0$.

Теорема доказана.

Замечание 48. Конструкции подпространств и геометрических данных, приведенные в теореме, являются обобщениями отображений Кричевера, построенных в работах [118], [23]. Если геометрические данные взять на риббоне, который получается из поверхности и приведенного эффективного дивизора Картье на ней, как в примере 10, то эти конструкции совпадут.

4.1.6 «Картинные» когомологии

В этом разделе вводится понятие «картинных» когомологий — когомологии некоторого комплекса, построенного по паре пространств $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ — и устанавливается связь этих когомологий с когомологиями пучка без кручения на риббоне, построенных по паре $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$. В случае, когда риббон и пучок происходят из геометрических спектральных данных, эти когомологии совпадают с когомологиями спектрального пучка на поверхности. Преимуществом этих когомологий является их легкая вычислимость и наглядность. Результаты этого раздела используются в главе 5.

Пусть $\mathbb{W}$ — k-подпространство в $k((u))((t))^{\oplus r}$. Пусть

$$\mathcal{O}_1 = k((u))[[t]] \qquad , \qquad \mathcal{O}_2 = k[[u]]((t))$$

— k-подпространства в $k((u))((t))$. Рассмотрим следующий комплекс.

$$(\mathbb{W} \cap \mathcal{O}_2^{\oplus r}) \oplus (\mathbb{W} \cap \mathcal{O}_1^{\oplus r}) \oplus (\mathcal{O}_1^{\oplus r} \cap \mathcal{O}_2^{\oplus r}) \longrightarrow \mathbb{W} \oplus \mathcal{O}_2^{\oplus r} \oplus \mathcal{O}_1^{\oplus r} \longrightarrow k((u))((t))^{\oplus r} \tag{4.9}$$

где первое отображение определено как

$$(a_0, a_1, a_2) \mapsto (a_1 - a_0, a_2 - a_0, a_2 - a_1),$$

а второе как

$$(a_{01}, a_{02}, a_{12}) \mapsto a_{01} - a_{02} + a_{12}.$$

Замечание 49. Предположим, что k-подпространство $W \subset k((u))((t))^{\oplus r}$ — часть обобщенной пары Шура

$$(\mathbb{A}, \mathbb{W}) \subset k((u))((t)) \oplus k((u))((t))^{\oplus r}.$$

Пусть, по теореме 27, пара $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ соответствует данным $(C, \mathcal{A}, \mathcal{N}, P, u, t, e_P)$. Предположим, что риббон $(C, \mathcal{A})$ происходит из алгебраической проективной поверхности X, пучок без кручения $\mathcal{N}$ происходит из локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на X, и. т.д. Это означает, что данные $(C, \mathcal{A}, \mathcal{N}, P, u, t, e_P)$ происходят из данных $(X, C, \mathcal{F}, P, u, t, e_P)$, где X — алгебраическая проективная поверхность, C — приведенный эффективный дивизор Картье, $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок ранга r на X, $P \in C$ — гладкая точка на X и C, u, t — формальные локальные параметры X в P, такие что $t = 0$ задает кривую C на X в формальной окрестности точки P на X, e_P — формальная тривиализация пучка $\mathcal{F}$ в P. Предположим также, что X — поверхность Коэно-Маколея, и C — обильный дивизор на X. В этой ситуации в работах [23,118] было доказано, что группы когомологий комплекса (4.9) совпадают с группами когомологий $H^*(X, \mathcal{F})$.

Наша цель теперь состоит в том, чтобы в общей ситуации сравнить когомологии комплекса (4.9) с когомологиями пучков $\mathcal{N}_i$, где $\mathcal{N}$ — пучок без кручения на риббоне $(C, \mathcal{A})$, в случае когда, например, этот риббон не происходит из алгебраической поверхности.

Лемма 36. *Когомологии комплекса совпадают со следующими k-векторными пространствами:*

$$\mathcal{H}^0(\mathbb{W}) = \mathbb{W} \cap \mathcal{O}_1^{\oplus r} \cap \mathcal{O}_2^{\oplus r},$$

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{W}) = \frac{\mathbb{W} \cap (\mathcal{O}_1^{\oplus r} + \mathcal{O}_2^{\oplus r})}{\mathbb{W} \cap \mathcal{O}_1^{\oplus r} + \mathbb{W} \cap \mathcal{O}_2^{\oplus r}},$$

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{W}) = \frac{k((u))((t))^{\oplus r}}{\mathbb{W} + \mathcal{O}_1^{\oplus r} + \mathcal{O}_2^{\oplus r}}.$$

Доказательство Имеется следующая точная последовательность:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_1^{\oplus r} \cap \mathcal{O}_2^{\oplus r} \longrightarrow \mathcal{O}_1^{\oplus r} \oplus \mathcal{O}_2^{\oplus r} \longrightarrow \mathcal{O}_1^{\oplus r} + \mathcal{O}_2^{\oplus r} \longrightarrow 0,$$

где $\mathcal{O}_1^{\oplus r} + \mathcal{O}_2^{\oplus r}$ рассматривается как k-подпространство в $k((u))((t))^{\oplus r}$. Теперь возьмем фактор-комплекс комплекса (4.9)по следующему ацикличному комплексу:

$$\mathcal{O}_1^{\oplus r} \cap \mathcal{O}_2^{\oplus r} \longrightarrow \mathcal{O}_1^{\oplus r} \cap \mathcal{O}_2^{\oplus r} \longrightarrow 0.$$

Получаем следующий комплекс:

$$(\mathbb{W} \cap \mathcal{O}_2^{\oplus r}) \oplus (\mathbb{W} \cap \mathcal{O}_1^{\oplus r}) \longrightarrow \mathbb{W} \oplus (\mathcal{O}_2^{\oplus r} + \mathcal{O}_1^{\oplus r}) \longrightarrow k((u))((t))^{\oplus r}.$$

Группы когомологий последнего комплекса совпадают с группами когомологий комплекса (4.9). А потому утверждение леммы теперь очевидно.

Определение 65. Пространства $\mathcal{H}^i(\mathbb{W})$, $0 \le i \le 2$ называются «картинными когомологиями» пространства $\mathbb{W}$.

Теорема 28. *Пусть $\mathbb{W}$ — часть пары Шура*

$$(\mathbb{A}, \mathbb{W}) \subset k((u))((t)) \oplus k((u))((t))^{\oplus r}.$$

Пусть $(C, \mathcal{A}, \mathcal{N}, P, u, t, e_P)$ — соответствующие этой паре данные. Тогда

$$\mathcal{H}^0(\mathbb{W}) = H^0(C, \mathcal{N}_0), \tag{4.10}$$

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{W}) = \frac{H^0(C, \mathcal{N}/\mathcal{N}_0)}{\frac{H^0(C,\mathcal{N})}{H^0(C,\mathcal{N}_0)}}, \tag{4.11}$$

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{W}) = H^1(C, \mathcal{N}/\mathcal{N}_0). \tag{4.12}$$

Доказательство По определению пучка без кручения на риббоне, имеем $\mathcal{N}_0 = \varprojlim_{i>0} \mathcal{N}_0/\mathcal{N}_i$. Следовательно,

$$H^0(C, \mathcal{N}_0) = \varprojlim_{i>0} H^0(C, \mathcal{N}_0/\mathcal{N}_i) = \varprojlim_{i>0} (\mathbb{W}(0,i) \cap \mathcal{O}_2^{\oplus r}) = \mathbb{W} \cap \mathcal{O}_1^{\oplus r} \cap \mathcal{O}_2^{\oplus r}.$$

Здесь мы использовали теорему 2 из [23], где соответсвующий комплекс строился для вычисления в нашем случае когомологий когерентных пучков $\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_i$-модулей $\mathcal{N}_0/\mathcal{N}_i$ на 1-мерной схеме $X_{i-1} = (C, \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_i)$. Формула (4.10) доказана.

Теперь докажем формулу (4.11). Имеем

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{W}) = \frac{\mathbb{W} \cap (\mathcal{O}_1^{\oplus r} + \mathcal{O}_2^{\oplus r})}{\mathbb{W} \cap \mathcal{O}_1^{\oplus r} + \mathbb{W} \cap \mathcal{O}_2^{\oplus r}} = \frac{\frac{\mathbb{W} \cap (\mathcal{O}_1^{\oplus r} + \mathcal{O}_2^{\oplus r})}{\mathbb{W} \cap \mathcal{O}_1^{\oplus r}}}{\frac{\mathbb{W} \cap \mathcal{O}_1^{\oplus r} + \mathbb{W} \cap \mathcal{O}_2^{\oplus r}}{\mathbb{W} \cap \mathcal{O}_1^{\oplus r}}} = \frac{\frac{\mathbb{W} \cap (\mathcal{O}_1^{\oplus r} + \mathcal{O}_2^{\oplus r})}{\mathbb{W} \cap \mathcal{O}_1^{\oplus r}}}{\frac{\mathbb{W} \cap \mathcal{O}_2^{\oplus r}}{\mathbb{W} \cap \mathcal{O}_2^{\oplus r} \cap \mathcal{O}_1^{\oplus r}}}.$$

Заметим, что

$$\mathbb{W} \cap \mathcal{O}_2^{\oplus r} = \varinjlim_{i} \varprojlim_{j>i} \mathbb{W}(i,j) \cap \mathcal{O}_2^{\oplus r} = \varinjlim_{i} \varprojlim_{j>i} H^0(C, \mathcal{N}_i/\mathcal{N}_j) = H^0(C, \mathcal{N}).$$

Здесь мы использовали теорему 2 из [23] для когерентного пучка $\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{j-i}$-модулей $\mathcal{N}_i/\mathcal{N}_j$ на 1-мерной схеме $X_{j-i-1} = (C, \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{j-i})$. Следовательно, используя это и формулу (4.10), имеем

$$\frac{\mathbb{W} \cap \mathcal{O}_2^{\oplus r}}{\mathbb{W} \cap \mathcal{O}_2^{\oplus r} \cap \mathcal{O}_1^{\oplus r}} = \frac{H^0(C, \mathcal{N})}{H^0(C, \mathcal{N}_0)}.$$

Следовательно, чтобы доказать формулу (4.11), мы должны проверить, что

$$\frac{\mathbb{W}\cap(\mathcal{O}_1^{\oplus r}+\mathcal{O}_2^{\oplus r})}{\mathbb{W}\cap\mathcal{O}_1^{\oplus r}} = H^0(C,\mathcal{N}/\mathcal{N}_0). \tag{4.13}$$

В силу предложения 9 имеем $H^1(C\setminus p,\mathcal{N}_0)=0$. Следовательно, из точной тройки пучков на кривой C

$$0\longrightarrow\mathcal{N}_0\longrightarrow\mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{N}/\mathcal{N}_0\longrightarrow 0$$

мы имеем

$$H^0(C\setminus p,\mathcal{N}/\mathcal{N}_0)=\frac{H^0(C\setminus p,\mathcal{N})}{H^0(C\setminus p,\mathcal{N}_0)}=\frac{\mathbb{W}}{\mathbb{W}\cap\mathcal{O}_1^{\oplus r}}=\frac{\mathbb{W}+\mathcal{O}_1^{\oplus r}}{\mathcal{O}_1^{\oplus r}}.$$

Теперь, беря индуктивный предел комплексов из теоремы 2 в [23], получаем, что

$$H^0(C,\mathcal{N}/\mathcal{N}_0)=\frac{\mathbb{W}+\mathcal{O}_1^{\oplus r}}{\mathcal{O}_1^{\oplus r}}\cap\frac{\mathcal{O}_1^{\oplus r}+\mathcal{O}_2^{\oplus r}}{\mathcal{O}_1^{\oplus r}},$$

где пересечение рассматривается в k-векторном пространстве $\frac{k((u))((t))^{\oplus r}}{\mathcal{O}_1^{\oplus r}}$.

Существует естественный изоморфизм k-подпространств в k-векторном пространстве $\frac{k((u))((t))^{\oplus r}}{\mathcal{O}_1^{\oplus r}}$:

$$\frac{\mathbb{W}\cap(\mathcal{O}_1^{\oplus r}+\mathcal{O}_2^{\oplus r})}{\mathbb{W}\cap\mathcal{O}_1^{\oplus r}}=\frac{\mathbb{W}}{\mathbb{W}\cap\mathcal{O}_1^{\oplus r}}\cap\frac{\mathcal{O}_1^{\oplus r}+\mathcal{O}_2^{\oplus r}}{\mathcal{O}_1^{\oplus r}}.$$

Таким образом, мы проверили формулу (4.13). Следовательно, мы доказали формулу (4.11).

Докажем теперь формулу (4.12). Имеем

$$H^1(C,\mathcal{N}/\mathcal{N}_0)=\varinjlim_{i<0}H^1(C,\mathcal{N}_i/\mathcal{N}_0)=\varinjlim_{i<0}\frac{\frac{t^i\cdot\mathcal{O}_1^{\oplus r}}{\mathcal{O}_1^{\oplus r}}}{\frac{\mathbb{W}\cap t^i\cdot\mathcal{O}_1^{\oplus r}}{\mathcal{O}_1^{\oplus r}}+\frac{\mathcal{O}_2^{\oplus r}}{\mathcal{O}_2^{\oplus r}\cap\mathcal{O}_1^{\oplus r}}}=\frac{k((u))((t))^{\oplus r}}{\mathbb{W}+\mathcal{O}_1^{\oplus r}+\mathcal{O}_2^{\oplus r}}.$$

Здесь мы использовали комплекс из теоремы 2 в [23], чтобы вычислить первые когомологии когерентного пучка $\mathcal{N}_i/\mathcal{N}_0$ на схеме $X_{-i-1}=(C,\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{-i})$, $i<0$. Формула (4.12) доказана.

4.2 Группа Пикара и функтор Пикара риббона

В этом разделе излагаются результаты о группе Пикара и о функторе Пикара риббона $\mathrm{Pic}_{\mathring{X}_\infty}$.

4.2.1 Функция порядка

В этом разделе доказываются основные свойства *функции порядка*, определенной на структурном пучке риббона. Функция порядка играет важную роль при изучении группы Пикара риббона.

Для произвольного топологического пространства U через $W_U(\mathbb{Z})$ обозначим пучок функций на U со значениями в $\mathbb{Z}$. Пусть $\mathring{X}_\infty$ — риббон над нетеровой схемой S. Предположим, что для любой точки $s\in S$ существует точка $P_s\in\mathring{X}_{\infty,s}$, такая что $(\mathcal{A}_{s,1})_{P_s}(\mathcal{A}_{s,-1})_{P_s}=(\mathcal{A}_{s,0})_{P_s}$ и что топологическое пространство риббона $\mathring{X}_{\infty,s}$ неприводимо. Предположим также, что морфизм $\tau: C\to S$ имеет локально конечный тип.

Замечание 50. Эти предположения выполнены, например, в случае риббонов вида $\mathring{X}_{\infty,S}$, где $S \to \operatorname{Spec} k$ — замена базы, а $\mathring{X}_{\infty}$ — риббон над алгебраически замкнутым полем k с неприводимым топологическим пространством и с гладкой точкой.

Действительно, в этом случае для каждой $s \in S$ подлежащее топологическое пространство риббона $\mathring{X}_{\infty,s}$ является неприводимой кривой в силу [150, vol.I, ch.III, §15, th.40, cor.1] (см. также [27, ch. II, ex.3.20]), и τ — морфизм конечного типа. Если P — гладкая точка риббона $\mathring{X}_{\infty}$, и P_s — замкнутая точка , отображающаяся в P, то P_s — гладкая точка риббона $\mathring{X}_{\infty,s}$. Причина состоит в том, что мы можем поднять элементы $t \in \mathcal{A}_{1,P}$, $t' \in \mathcal{A}_{-1,P}$ с $tt' = 1$ до аналогичных элементов $t_s \in \mathcal{A}_{1,P_s}$, $t'_s \in \mathcal{A}_{-1,P_s}$. Тогда, например, рассуждения из доказательства предложения 12 показывают, что P_s гладка.

Определение 66 (Функция порядка)**.** Определим морфизм пучков множеств (функцию порядка)

$$\mathbf{ord}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^* \to W_C(\mathbb{Z}), \quad \mathbf{ord}_{\mathcal{A}}(a)(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max\{i | a|_{U_s} \in \mathcal{A}_{s,i}(U_s)\},$$

где $a \in \mathcal{A}^*(U)$ для открытого $U \subset C$, $x \in U$, $s = \tau(x)$.

Определение корректно благодаря следующему предложению.

Предложение 16. *Пусть* $\mathring{\mathrm{X}}_{\infty}$ *— риббон над полем k с неприводимой кривой в качестве топологического пространства. Предположим, что существует точка $x \in C$, такая что $\mathcal{A}_{1,x}\mathcal{A}_{-1,x} = \mathcal{A}_{0,x}$. Тогда функция порядка совместима с гомоморфизмами ограничения $\mathcal{A}^*(U) \to \mathcal{A}^*(V)$ для произвольных открытых $V \subset U$, и она является гомоморфизмом из $\mathcal{A}^*(U)$ в $\mathbb{Z}$ для любого открытого U.*

Доказательство Как было показано в доказательстве предложения 12, существует обратимый элемент $a \in \mathcal{A}_{1,x} \backslash \mathcal{A}_{2,x}$ такой, что $a^{-1} \in \mathcal{A}_{-1,x}$. Таким образом, существует открытое $U \ni x$ такое, что $a \in \mathcal{A}_1(U)$, $a^{-1} \in \mathcal{A}_{-1}(U)$.

Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 37. *Рассмотрим риббон $(C, \mathcal{A})$, где C – неприводимая кривая над полем k. Пусть пучок $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию (*) (см. определение 54) со следующим дополнительным свойством: для любого открытого U_α из (*) существует обратимое сечение $a \in \mathcal{A}_1(U_\alpha) \backslash \mathcal{A}_2(U_\alpha)$ такое, что $a^{-1} \in \mathcal{A}_{-1}(U_\alpha)$.*

Тогда функция порядка ord *уважает гомоморфизмы ограничения $\mathcal{A}^*(U) \to \mathcal{A}^*(V)$ для открытых $V \subset U$, и функция порядка* ord_U *является гоморфизмом из $\mathcal{A}^*(U)$ в $\mathbb{Z}$ для любого открытого U.*

Доказательство Первое утверждение леммы следует из второго. Действительно, если $V \subset U$ – два открытых подмножества и $b \in \mathcal{A}^*(U)$, $\mathrm{ord}_U(b) = k$, тогда $\mathrm{ord}_U(b^{-1}) = -k$. Имеем $\mathrm{ord}_V(b|_V) \geq \mathrm{ord}_U(b)$. Если мы предположим, что $\mathrm{ord}_V(b|_V) > \mathrm{ord}_U(b)$, то $\mathrm{ord}_V((b|_V)^{-1}) < -k = \mathrm{ord}_U(b^{-1})$. Но $(b|_V)^{-1} = b^{-1}|_V$ и $\mathrm{ord}_V(b^{-1}|_V) \geq \mathrm{ord}_U(b^{-1}) = -k$, получаем противоречие.

Теперь докажем следующее утверждение леммы. Для начала, докажем его для любого U_α. Заметим, что для любого $b \in \mathcal{A}^*(U_\alpha)$ и любого $k \in \mathbb{Z}$ имеем $\mathrm{ord}_{U_\alpha}(ba^k) = \mathrm{ord}_{U_\alpha}(b) + k$, где a – обратимый элемент из $\mathcal{A}_1(U_\alpha) \backslash \mathcal{A}_2(U_\alpha)$ такой что $a^{-1} \in \mathcal{A}_{-1}(U_\alpha)$. В самом деле, по определению риббона $\mathrm{ord}_{U_\alpha}(bc) \geq \mathrm{ord}_{U_\alpha}(b) + \mathrm{ord}_{U_\alpha}(c)$ для любых $b, c \in \mathcal{A}^*(U_\alpha)$. Пусть $\mathrm{ord}_{U_\alpha}(ba) > \mathrm{ord}_{U_\alpha}(b) + 1$. Тогда

$$\mathrm{ord}_{U_\alpha}(b) = \mathrm{ord}_{U_\alpha}(baa^{-1}) \geq \mathrm{ord}_{U_\alpha}(ba) - 1 > \mathrm{ord}_{U_\alpha}(b),$$

и мы приходим к противоречию.

Заметим, что $\mathrm{ord}_{U_\alpha}(bc) = \mathrm{ord}_{U_\alpha}(b) + \mathrm{ord}_{U_\alpha}(c)$ если $\mathrm{ord}_{U_\alpha}(c) = 0$. В самом деле, если бы $\mathrm{ord}_{U_\alpha}(bc) > \mathrm{ord}_{U_\alpha}(b)$, то тогда это бы означало, что $\bar{b}\bar{c} = 0$, где $\bar{b} \in \mathcal{A}_{\mathrm{ord}(b)}(U_\alpha)/\mathcal{A}_{\mathrm{ord}(b)+1}(U_\alpha)$,

$\bar{c} \in \mathcal{O}_C(U_\alpha)\mathcal{A}_0(U_\alpha)/\mathcal{A}_1(U_\alpha)$. Но $\bar{c}, \bar{b} \neq 0$, и $\mathcal{A}_{\mathrm{ord}(b)}/\mathcal{A}_{\mathrm{ord}(b)+1}$ – пучок без кручения, по определению, следовательно, приходим к противоречию.

Для любых $b, c \in \mathcal{A}^*(U_\alpha)$ имеем

$$\mathrm{ord}_{U_\alpha}(bc) = \mathrm{ord}_{U_\alpha}(ba^{-\mathrm{ord}(b)}a^{\mathrm{ord}(b)}c) = \mathrm{ord}_{U_\alpha}(ba^{-\mathrm{ord}(b)}) + \mathrm{ord}_{U_\alpha}(a^{\mathrm{ord}(b)}c) = \mathrm{ord}_{U_\alpha}(b) + \mathrm{ord}_{U_\alpha}(c).$$

Рассуждения из начала доказательства показывают, что для любого открытого $V \subset U_\alpha$ $\mathrm{ord}_V(a|_V) = 1$, и $\mathrm{ord}_V((a|_V)^{-1}) = -1$. Следовательно, ord_V – также гомоморфизм на $\mathcal{A}^*(V)$.

Предположим теперь, что U – произвольное открытое не пустое подмножество в C. Тогда $U = \cup_\alpha(U \cap U_\alpha)$, и $\mathrm{ord}_{U\cap U_\alpha}$ – гомоморфизм для любого α. Пусть $b \in \mathcal{A}^*(U)$, $\mathrm{ord}_U(b) = k$. Предположим, что существует β такое, что $\mathrm{ord}_{U\cap U_\beta}(b|_{U\cap U_\beta}) = l > k$. Тогда для любого α имеем $U \cap U_\beta \cap U_\alpha \neq \varnothing$ и $\mathrm{ord}_{U\cap U_\beta\cap U_\alpha}(b|_{U\cap U_\beta \cap U_\alpha}) = l$ и, следовательно, $\mathrm{ord}_{U\cap U_\alpha}(b|_{U\cap U_\alpha}) = l$. Поскольку $\mathcal{A}_l$ является подпучком $\mathcal{A}$, это бы означало, что $b \in \mathcal{A}_l(U)$. Противоречие.

Таким образом, для любых $b, c \in \mathcal{A}^*(U)$ имеем

$$\mathrm{ord}_U(bc) = \mathrm{ord}_{U\cap U_\alpha}((bc)|_{U\cap U_\alpha}) = \mathrm{ord}_{U\cap U_\alpha}(b|_{U\cap U_\alpha}) + \mathrm{ord}_{U\cap U_\alpha}(c|_{U\cap U_\alpha}) = \mathrm{ord}_U(b) + \mathrm{ord}_U(c).$$

Лемма доказана.

В силу леммы функция порядка является гомоморфизмом на U и на всех открытых подмножествах из U. Пусть $V \subset C$, $V \neq C$, $V \nsubseteq U$ –открытое множество. Поскольку C — приведенная неприводимая кривая, то V должно быть аффинным и $V \cap U$ также аффинное. Без потери общности можем положить $V \cap U = D(f')$, где $V = \underline{\mathrm{Spec}}(B)$, $f' \in B$, $B = \mathcal{O}_C(V)$. Пусть f – представитель f' в $\mathcal{A}_0(V)$. Ясно, что он является обратимым $\mathcal{A}_0(V \cap U)$. Пусть $b = a|_{V\cap U}$. Знаем, что b обратим, $\mathrm{ord}(b) = 1$, $\mathrm{ord}(b^{-1}) = -1$. Поскольку пучки $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_{-1}/\mathcal{A}_0$ когерентны и $V \cap U$ аффинное, существует натуральное n такое, что

$$f^n b \mod \mathcal{A}_2(V\cap U) = \phi_{VD(f')}(\bar{b}), \qquad f^n b^{-1} \mod \mathcal{A}_0(V\cap U)\phi_{VD(f')}(\overline{b^{-1}}),$$

где $\phi_{VD(f')} : \mathcal{A}(V) \to \mathcal{A}(D(f'))$ – гомоморфизм ограничения, и $\bar{b} \in \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_2(V)$, $\overline{b^{-1}} \in \mathcal{A}_{-1}/\mathcal{A}_0(V)$, в силу [27, lemma 5.3] и по предложению 9. Пусть $\tilde{b}, \widetilde{b^{-1}}$ – представители $\bar{b}, \overline{b^{-1}}$ в $\mathcal{A}_1(V)$, $\mathcal{A}_{-1}(V)$ соответственно. Тогда $\mathrm{ord}_V(\tilde{b}\widetilde{b^{-1}}) \geq 0$ и

$$\mathrm{ord}_V(\tilde{b}\widetilde{b^{-1}}) \leq \mathrm{ord}_{V\cap U}(\phi_{VD(f')}(\tilde{b}\widetilde{b^{-1}}))$$

по свойствам $\mathcal{A}$. Но $\phi_{VD(f')}(\tilde{b}\widetilde{b^{-1}}) = f^{2n} \mod \mathcal{A}_1(V \cap U)$, откуда $\mathrm{ord}_V(\tilde{b}\widetilde{b^{-1}}) = 0$.

Заметим, что для любого $d \in \mathcal{A}(V)$ имеем $\mathrm{ord}_V(dc) = \mathrm{ord}_V(d) + \mathrm{ord}_V(c)$, если $\mathrm{ord}_V(c) = 0$. Действительно, если бы $\mathrm{ord}_V(dc) > \mathrm{ord}_V(d)$, то это бы означало, что $\bar{d}\bar{c} = 0$, где $\bar{d} \in \mathcal{A}_{\mathrm{ord}(d)}(V)/\mathcal{A}_{\mathrm{ord}(d)+1}(V)$, $\bar{c} \in \mathcal{O}_C(V)$. Но кривая C является приведенной и неприводимой, и $\mathcal{A}_{\mathrm{ord}(d)}/\mathcal{A}_{\mathrm{ord}(d)+1}$ является пучком без кручения по определению. Откуда мы получаем противоречие.

Теперь, повторяя рассуждения из доказательства леммы 37, получаем $\mathrm{ord}_V(d\tilde{b}^k) = \mathrm{ord}_V(d) + k$ для любого целого k и для любых $d, c \in \mathcal{A}^*(V)$

$$\mathrm{ord}_V(dc) = \mathrm{ord}_V(d\widetilde{b^{-1}}^{\mathrm{ord}(d)}\tilde{b}^{\mathrm{ord}(d)}c) = \mathrm{ord}_V(d\widetilde{b^{-1}}^{\mathrm{ord}(d)}) + \mathrm{ord}_V(\tilde{b}^{\mathrm{ord}(d)}c) = \mathrm{ord}_V(d) + \mathrm{ord}_V(c).$$

Наконец, если $V = C$, то можем применить рассуждения из окончания доказательства леммы 37.

Предложение доказано.

В ситуации, когда выполнены условия предложения 16, можно сказать нечто про группу $H^1(C, \mathcal{A}^*)$.

Предложение 17. *Пусть* $\mathring{\mathrm{X}}_\infty$ *– риббон с неприводимой кривой* C. *Предположим, что функция порядка* ord *является гомоморфизмом из* $\mathcal{A}^*(V)$ *в* $\mathbb{Z}$ *для любого открытого* $V \subset C$. *Тогда* $\mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^* \subseteq \mathbb{Z}_C$.

Пусть пучок $\mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^*|_U$ *является постоянным для любого открытого множества* U, *равным* $d\mathbb{Z}$. *(Мы предполагаем, что это* U *максимально.) Имеем следующее.*

1. *Если* $H^0(C, \mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^*) = md\mathbb{Z}$ *для некоторого* $m \neq 0$, *то* $H^1(C, \mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^*)$ *– конечная абелева группа порядка меньше либо равного* m^{s-1}, *если* $s > 1$, *и равного 0 иначе.*

2. *Если* $H^0(C, \mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^*) = 0$, *то* $\mathrm{rk}(H^1(C, \mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^*)) \leq s - 1$ *если* $s > 1$, *и* $H^1(C, \mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^*) = 0$ *иначе.*

В обоих случаях s *– число критических точек* $\mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^*$, *т.е.* $s = \sharp(C \setminus U)$.

Доказательство Если $a \in \mathcal{A}_x^* \cap (\mathcal{A}_{j,x} \backslash \mathcal{A}_{j+1,x})$, где $x \in C$ – точка и $b \in \mathcal{A}_x^*$ – обратный к a, то $b \in \mathcal{A}_x^* \cap (\mathcal{A}_{-j,x} \backslash \mathcal{A}_{-j+1,x})$. Тогда $\mathcal{A}_{j,x} = \mathcal{A}_{0,x}a$. Соотношения $\mathcal{A}_{j,x} = \mathcal{A}_{0,x}a$, $\mathcal{A}_{-j,x} = \mathcal{A}_{0,x}b$ и $ab = 1$ расширяются на окрестность U точки x.

Поскольку $\mathcal{A}_j/\mathcal{A}_{j+1}$ – пучок без кручения, получаем, что если $a \in \mathcal{A}^*(U)$, то существует единственное $j \in \mathbb{Z}$ такое, что $a_x \in \mathcal{A}_{j,x} \backslash \mathcal{A}_{j+1,x}$, и обратное b удовлетворяет $b_x \in \mathcal{A}_{-j,x} \backslash \mathcal{A}_{-j+1,x}$, и $\mathcal{A}_j|_U = \mathcal{A}_0|_U a$, $\mathcal{A}_{-j}|_U = \mathcal{A}_0|_U b$. Таким образом, в этом случае получаем инъекцию

$$\mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^* \to \mathbb{Z}_C, \quad a \mapsto j = \mathrm{ord}(a)$$

($\mathbb{Z}_C$ – постоянный пучок на C). Это изоморфизм тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_{-1}$ – взаимнодвойственные обратимые $\mathcal{A}_0$-модули.

По нашему предположению либо $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}_0^*$, либо существует наименьшее целое положительное d такое, что существует точка x и элемент $a \in \mathcal{A}_x^*$ порядка d. Тогда существует наибольшее открытое множество U, где $\mathcal{A}_d, \mathcal{A}_{-d}$ – обратимые взаимнодвойственные модули.

Тогда $\mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^* \subset d\mathbb{Z}$ и коядро является пучком с носителем в $C \backslash U$. Если $H^0(C, \mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^*) = 0$, то по крайней мере один росток пучка $d\mathbb{Z}/(\mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^*)$ в этих точках равен $d\mathbb{Z}$. Если $H^0(C, \mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^*) = md\mathbb{Z}$, то ростки пучка $d\mathbb{Z}/(\mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^*)$ в этих точках являются конечными группами, чьи порядки меньше либо равны m. Теперь, используя длинную точную когомологическую последовательность короткой последовательности

$$0 \to \mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^* \xrightarrow{\mu} d\mathbb{Z} \to coker(\mu) \to 0,$$

получим доказательство. (Мы пользуемся тем, что первые когомологии постоянного пучка на неприводимом пространстве равны нулю в топологии Зарисского.)

Следствие 17. *Если существует точка* P *на неприводимой кривой* C *такая, что* $\mathcal{A}_{1,P}\mathcal{A}_{-1,P} = \mathcal{A}_{0,P}$, *то выполнены следующие свойства.*

Вложение пучков $\mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^* \xrightarrow{\mathrm{ord}} \mathbb{Z}_C$ *является изоморфизмом на открытом подмножестве* $U \subset C$. *Кроме того, в оставшихся точках* $C \backslash U$, *ростки* $(\mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^*)_x$ *являются циклическими подгруппами* $d_x\mathbb{Z}$ *из* $\mathbb{Z}$. *Если* $H^0(C, \mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^*) = d\mathbb{Z}$ *при* $d > 0$, *тогда все* d_x *являются делителями* d.

Доказательство очевидно.

Пример 19. Если кривая C не является неприводимой, то тогда функция порядка не обязательно является гомоморфизмом из $\mathcal{A}(U)^*$ в $\mathbb{Z}$ для открытого $U \subset C$.

Например, если мы возьмем алгебраизуемый риббон из примера 10, где X – аффинная плоскость и C – кривая, заданная уравнением $xy = 0$, то элементы x и y будут обратимыми элементами нулевого порядка для любого открытого $U \subset C$ такого, что U содержит точку $(x = 0, y = 0)$. (xy) – обратимый элемент из $\mathcal{A}(U)$, и, следовательно, $x^{-1} = y(xy)^{-1}$, $y^{-1} = x(xy)^{-1}$. Но $\mathrm{ord}_U(xy) = 1$, таким образом, ord_U не является горморфизмом.

Функция порядка особенно хорошо ведет себя, если выполняется условие из леммы 37:

Определение 67. Скажем, что пучок $\mathcal{A}$ риббона $(C, \mathcal{A})$ удовлетворяет условию (**), если существует покрытие кривой C открытыми аффинными множествами $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$, такое что для любого $\alpha \in I$ существует обратимое сечение $a \in \mathcal{A}_1(U_\alpha) \subset \mathcal{A}(U_\alpha)$ с $a^{-1} \in \mathcal{A}_{-1}(U_\alpha)$.

Замечание 51. Условие (**) выполняется, например, для риббонов, приходящих из алгебраической поверхности и дивизора Картье. В этом случае элементы a — локальные уравнения дивизора Картье на поверхности.

Если выполняется условие (**), то автоматически выполняются условия из начала этого раздела. Доказательство такое же как в замечании 50.

Предложение 18. *Предположим, что пучок $\mathcal{A}$ риббона $(C, \mathcal{A})$ удовлетворяет условию (**). Пусть пучок без кручения $\mathcal{N}$ ранга r удовлетворяет следующему условию: пучок $\mathcal{N}_0/\mathcal{N}_1$ локально свободен на C. Тогда пучок $\mathcal{N}$ — локально свободный ранга r на риббоне $(C, \mathcal{A})$.*

Доказательство Докажем, что если открытое аффинное множество V кривой C таково, что $V \subset U_\alpha$ для некоторого $\alpha \in I$ (см. определение 67) и $\mathcal{N}_0/\mathcal{N}_1 \mid_V \simeq \mathcal{O}_V^{\oplus r}$, то $\mathcal{N} \mid_V \simeq \mathcal{A}^{\oplus r} \mid_V$.

Пусть $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_r \in \mathcal{N}_0/\mathcal{N}_1(V)$ — базис над $\mathcal{O}_C(V)$. Выберем некоторые элементы $c_1, \dots, c_r \in \mathcal{N}_0(V)$, такие что для любого $1 \le i \le r$ элемент c_i отображается в элемент $\bar{c}_i$ при естественном отображении $\mathcal{N}_0(V) \longrightarrow \mathcal{N}_0/\mathcal{N}_1(V)$. (По предложению 9, последнее отображение сюръективно, следовательно, такие элементы $c_1, \dots, c_r$ существуют.)

Рассмотрим отображение $\mathcal{A} \mid_V$-модулей:

$$\phi : \mathcal{A}^{\oplus r} \mid_V \longrightarrow \mathcal{N} \mid_V \qquad \phi(\bigoplus_{1\le i\le r} a_i) = \sum_{1\le i\le r} a_i \cdot c_i,$$

где $a_i \in \mathcal{A}(U)$ для $1 \le i \le r$ и открытого $U \subset V$.

Сначала покажем, что отображение ϕ сюръективно. Пусть элемент $b \in \mathcal{N}(U)$, $b \ne 0$ для открытого $U \subset V$. Тогда $b \in \mathcal{N}_{l_1}(U) \setminus \mathcal{N}_{l_1+1}(U)$ для некоторого $l_1 \in \mathbb{Z}$. Следовательно, элемент $b_1 = a^{-l_1} \cdot b \in \mathcal{N}_0(U) \setminus \mathcal{N}_1(U)$, где элемент $a \in \mathcal{A}_1(V) \setminus \mathcal{A}_2(V)$ таков, что $a^{-1} \in \mathcal{A}^{-1}(V)$. Пусть $\bar{b}_1 \in \mathcal{N}_0/\mathcal{N}_1(U)$ — образ элемента b_1. Имеем

$$\bar{b}_1 = \sum_{1\le i\le r} \bar{e}_{1,i} \cdot \bar{c}_i,$$

где $\bar{e}_{1,i} \in \mathcal{O}_C(U)$, $1 \le i \le r$. Выберем некоторые элементы $e_{1,i} \in \mathcal{A}_0(U)$, такие что для любого $1 \le i \le r$ образ элемента $e_{1,i}$ в $\mathcal{A}_0(U)/\mathcal{A}_1(U) = \mathcal{O}_C(U)$ совпадает с элементом $\bar{e}_{1,i}$ (см. также предложение 9). Теперь если $b_1 \ne \sum_{1\le i\le r} e_{1,i} \cdot c_i$, то элемент

$$(b_1 - \sum_{1\le i\le r} e_{1,i} \cdot c_i) \quad \in \quad \mathcal{N}_{l_2}(U) \setminus \mathcal{N}_{l_2+1}(U)$$

для некоторого $l_2 \in \mathbb{N}$, где $l_2 \ge 1$. Следовательно, элемент

$$b_2 = a^{-l_2} \cdot (b_1 - \sum_{1\le i\le r} e_{1,i} \cdot c_i) \quad \in \quad \mathcal{N}_0(U) \setminus \mathcal{N}_1(U).$$

И мы можем повторить ту же процедуру с b_2 как с b_1 выше, и т.д.

Теперь элемент

$$d = a^{l_1} \cdot (\bigoplus_{1\le i\le r} e_{1,i} + a^{l_2} \cdot (\bigoplus_{1\le i\le r} e_{2,i} + \dots))$$

корректно определен в $\mathcal{A}(U)^{\oplus r}$ как сходящийся ряд, поскольку $\mathcal{A}(U)$ — полное пространство, и $l_n \geq 1$ при $n > 1$. И, по построению, $\phi(d) = b$, поскольку $\mathcal{A}(V)^{\oplus r}$ — хаусдорфово пространство. Следовательно, ϕ сюръективно.

Далее, покажем, что ϕ — инъективное отображение $\mathcal{A}^{\oplus r}\mid_V$-модулей. Пусть пучок $\mathcal{K}$ — ядро отображения ϕ. Пусть $g \in \mathcal{K}(U)$, $g \neq 0$ для некоторого открытого $U \subset V$. Имеем $g \in \mathcal{A}_l(U)^{\oplus r} \setminus \mathcal{A}_{l+1}(U)^{\oplus r}$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}$, тогда $a^{-l} \cdot g \in \mathcal{A}_0(U)^{\oplus r} \setminus \mathcal{A}_1(U)^{\oplus r}$. Пусть $e = (e_1, \dots, e_r) \in \mathcal{O}_C(U)^{\oplus r}$ — образ $a^{-l} \cdot g$ при естественном отображении. Так как $a^{-l} \cdot g \in \mathcal{K}$, имеем

$$\sum_{1 \leq i \leq r} e_i \cdot \bar{c}_i = 0.$$

Следовательно, для любого $1 \leq i \leq r$ $e_i = 0$, поскольку $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_r$ — базис над $\mathcal{O}_C(U)$. Отсюда $a^{-l} \cdot g \in \mathcal{A}_1(U)^{\oplus r}$. Противоречие.

Теперь мы хотим определить условия, при которых ord является морфизмом пучков групп, и при которых он пропускается через пучок $\mathbb{Z}_C \subset W_C(\mathbb{Z})$ локально постоянных функций. Мы также хотим описать в этих случаях ядро функции порядка.

Если $S = \operatorname{Spec} K$, где K — поле, то определение функции порядка совпадает с определением 55. В предложениях 16, 17 мы привели некоторые достаточные условия для того, чтобы функция порядка была гомоморфизмом (очевидно, в этом случае она локально постоянна), см. также контр-пример 19.

Лемма 38. *При наших предположениях (см. начало раздела) имеем: для каждой точки P_s существует аффинная окрестность $U_{P_s} \subset C$, такая что все пучки $\mathcal{A}_j|_{U_{P_s}}$ являются обратимыми пучками $\mathcal{A}_0|_{U_{P_s}}$-модулей и $\mathcal{A}_{-j}|_{U_{P_s}} = \mathcal{A}_j^{-1}|_{U_{P_s}}$.*

Доказательство Во-первых, докажем, что естественный гомоморфизм $\mathcal{O}_{C,P_s}$-модулей

$$(\mathcal{A}_{-1}/\mathcal{A}_0)_{P_s} \otimes_{\mathcal{O}_{C,P_s}} (\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_2)_{P_s} \longrightarrow (\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_1)_{P_s} = \mathcal{O}_{C,P_s} \tag{4.14}$$

является изоморфизмом.

Поскольку, по нашим предположениям, существует изоморфизм

$$[(\mathcal{A}_{-1}/\mathcal{A}_0)_{P_s} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s)] \otimes_{\mathcal{O}_{C,s}} [(\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_2)_{P_s} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s)] \simeq \mathcal{O}_{C_s,P_s},$$

гомоморфизм (4.14) сюръективен по лемме Накаямы. Пусть K — ядро этого отображения. Тогда, так как $\mathcal{O}_{C,P_s}$ — плоский $\mathcal{O}_{S,s}$-модуль, следующая последовательность точна (в силу [1, ch.2, ex.26]):

$$0 \longrightarrow K \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s) \longrightarrow ((\mathcal{A}_{-1}/\mathcal{A}_0)_{P_s} \otimes_{\mathcal{O}_{C,P_s}} (\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_2)_{P_s}) \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s) \longrightarrow \mathcal{O}_{C_s,P_s} \longrightarrow 0.$$

Так как

$$((\mathcal{A}_{-1}/\mathcal{A}_0)_{P_s} \otimes_{\mathcal{O}_{C,P_s}} (\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_2)_{P_s}) \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s) \simeq [(\mathcal{A}_{-1}/\mathcal{A}_0)_{P_s} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s)] \otimes_{\mathcal{O}_{C,s}} [(\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_2)_{P_s} \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s)],$$

мы получаем $0 = K \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s) = K/\mathcal{M}_s K$. Следовательно, $K = 0$ по лемме Накаямы.

Теперь пусть U_{P_s} — аффинная окрестность, в которой существуют элементы $\bar{t}' \in \mathcal{A}_{-1}/\mathcal{A}_0(U_{P_s})$, $\bar{t} \in \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_2(U_{P_s})$, такие что $\overline{tt'} = 1$. Тогда, в силу предложения 9, мы можем поднять элементы $\bar{t}, \bar{t}'$ и найти $t' \in \mathcal{A}_{-1}(U_{P_s})$, $t \in \mathcal{A}_1(U_{P_s})$, такие что $tt' = 1$. Тогда для любого j имеем $\mathcal{A}_j|_{U_{P_s}} = t^j(\mathcal{A}_0|_{U_{P_s}})$ (сравни с рассуждениями в доказательстве предложения 12).

Замечание 52. Если для любого $s \in S$ риббон $\mathring{X}_{\infty,s}$ удовлетворяет условию $(**)$ из определения 67, то утверждения леммы справедливы для пучков $\mathcal{A}_j$ на всем пространстве C (не только в окрестности U_{P_s}). Доказательство то же.

Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Пусть S — целая схема. Мы утверждаем, что отображение порядка на $\mathcal{A}^*|_{U_{P_s}}$ пропускается через $\mathbb{Z}_C|_{U_{P_s}}$, и является морфизмом пучков абелевых групп. Более того, $(\mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^*)|_{U_{P_s}} \simeq \mathbb{Z}_C|_{U_{P_s}}$.

Пусть $a \in \mathcal{A}^*(U_{P_s})$, и j — наибольшее целое число, такое что $a \in \mathcal{A}_j(U_{P_s})$. Тогда $j = \mathrm{ord}(a)(x)$ для любого $x \in U_{P_s}$. Действительно, по лемме 38 существует обратимый элемент $t \in \mathcal{A}_1(U_{P_s})$. Значит, $a = a_0 t^j$ с $a_0 \in \mathcal{A}_0(U_{P_s}) \backslash \mathcal{A}_1(U_{P_s})$. Если $a^{-1} \in \mathcal{A}_k(U_{P_s}) \backslash \mathcal{A}_{k+1}(U_{P_s})$, то $a^{-1} = b_0 t^k$, $b_0 \in \mathcal{A}_0(U_{P_s}) \backslash \mathcal{A}_1(U_{P_s})$. Тогда $1 = a^{-1}a = a_0 b_0 t^{j+k}$, откуда $j + k \le 0$ и $a_0 b_0 = t^{-j-k} \notin \mathcal{A}_1(U_{P_s})$, поскольку $\mathcal{A}_0(U_{P_s})/\mathcal{A}_1(U_{P_s}) \simeq \mathcal{O}_C(U_{P_s})$ не имеет делителей нуля, так как C неприводима и приведена, как следует из наших предположений (см. замечание 53 ниже).

Следовательно, $j + k = 0$, $b_0 = a_0^{-1}$ и $a_0 \in \mathcal{A}_0^*(U_{P_s})$, $a = a_0 t^j$, $b^{-1} = a_0^{-1} t^{-j}$. Очевидно, что это свойство сохраняется при замене базы $s \to S$, следовательно $j = \mathrm{ord}(a)(x)$ для любой точки $x \in U_{P_s}$. Таким образом, отображение порядка пропускается через $\mathbb{Z}_C|_{U_{P_s}}$, и является, очевидно, морфизмом пучков абелевых групп с $(\mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^*)|_{U_{P_s}} \simeq \mathbb{Z}_C|_{U_{P_s}}$, так как $\mathrm{ord}(t)|_{U_{P_s}} = 1$.

Замечание 53. C неприводима, поскольку S неприводима. Действительно, предположим обратное. Тогда существуют два открытых подмножества $U_1 \subset C$, $U_2 \subset C$ с $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Так как $\tau : C \to S$ плоский и локально конечного типа, он открыт, и следовательно $\tau(U_1) \cap \tau(U_2) \neq \varnothing$. Таким образом, если $s \in \tau(U_1) \cap \tau(U_2)$, то $C_s \cap U_1 \neq \varnothing$, $C_s \cap U_2 \neq \varnothing$, и следовательно C_s приводима, что противоречит нашему предположению.

Чтобы доказать, что C приведен, предположим противное. Мы можем предполагать, что S аффинна и нильрадикалы $Nil(\mathcal{O}_C(U)) \neq 0$ для любого открытого U. Пусть S' — нормализация S и $\tau' : C' \to S'$ — замена базы. Так как C плоска над S, имеем $Nil(\mathcal{O}_{C'}(U \times_S S')) \neq 0$ для любого аффинного $U \subset C$, поскольку имеется вложение $Nil(\mathcal{O}_C(U)) \hookrightarrow Nil(\mathcal{O}_{C'}(U \times_S S'))$. Для любой точки $s \in S'$ коразмерности 1 пусть $T \in C'$ с $\tau'(T) = s$. Тогда мы имеем $Nil(\mathcal{O}_{C',T}) \neq 0$. Но $\mathcal{O}_{C',T}$ — плоский $\mathcal{O}_{S',s}$-модуль, и $\mathcal{O}_{S',s}$ — регулярное локальное кольцо размерности 1. Более того, $\mathcal{O}_{C',T} \otimes k(s) \simeq \mathcal{O}_{C',T}/u\mathcal{O}_{C',T} \simeq \mathcal{O}_{C'_s,T}$, где u — порождающая максимального идеала кольца $\mathcal{O}_{S',s}$, не имеет делителей нуля, поскольку, по нашим предположениям, C_s — неприводимая кривая. Следовательно, $\mathcal{O}_{C',T}/u\mathcal{O}_{C',T} \simeq \mathcal{O}_{C',T,red}/u\mathcal{O}_{C',T,red}$, где $\mathcal{O}_{C',T,red} = \mathcal{O}_{C',T}/Nil(\mathcal{O}_{C',T})$. Заметим также, что u не является делителем нуля в $\mathcal{O}_{C',T,red}$, так как он не является делителем нуля в $\mathcal{O}_{C',T}$ по локальному критерию плоскости ([2, ch.III, §5, th.1] или [27, ch.III, lemma 10.3.A]). Следовательно, $\mathcal{O}_{C',T,red}$ — плоский $\mathcal{O}_{S',s}$-модуль по этому критерию. Отсюда $Nil(\mathcal{O}_{C',T}) \otimes k(s) = 0$, и по лемме Накаямы $Nil(\mathcal{O}_{C',T}) = 0$, противоречие.

Замечание 54. В ситуации замечания 52 утверждения нашего случая справедливы для всего пространства C. Доказательство то же.

Теперь мы утверждаем, что отображение порядка на $\mathcal{A}^*$ пропускается через $\mathbb{Z}_C$ на всем пространстве C (хотя и может быть $(\mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^*) \not\simeq \mathbb{Z}_C$).

Действительно, пусть U — окрестность точки $x \in C$, $a \in \mathcal{A}^*(U)$. Тогда в силу предложения 16 и по определению, для всех точек $y \in U_s$, где $s = \tau(x)$, имеем $\mathrm{ord}(a)(y) = \mathrm{ord}(a)(x)$, поскольку C_s неприводима. Так как C неприводима, имеем $U \cap U_{P_q} \neq \varnothing$ для всех $q \in S$. Тогда, рассуждая как выше, имеем $\mathrm{ord}(a)(x) = \mathrm{ord}(a)(y)$ для всех $y \in U \cap U_{P_s}$. Аналогично, для $x' \in U$, $s' = \tau(x')$ имеем $\mathrm{ord}(a)(x') = \mathrm{ord}(a)(y)$ для всех $y \in U \cap U_{P_{s'}}$. Так как $U \cap U_{P_{s'}} \cap U_{P_s} \neq \varnothing$, получаем $\mathrm{ord}(a)(x) = \mathrm{ord}(a)(x')$ для всех $x' \in U$.

Замечание 55. Мы можем определить отображение ord в нашем случае как в определении 55:

$$ord(a) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{j\in\mathbb{Z}}\{j| \quad a \in \mathcal{A}_j(U)\},$$

где $a \in \mathcal{A}^*(U)$. Тогда мы утверждаем, что $ord(a) = \mathrm{ord}(a)(x)$ для всех $x \in U$.

Действительно, мы доказали выше, что $\mathrm{ord}(a)(x) = \mathrm{ord}(a)(x')$ для всех $x' \in U$ и

$$\mathrm{ord}(a|_{U_{P_s}\cap U})(y) = ord(a|_{U_{P_s}\cap U}) \geq ord(a)$$

для всех $y \in U_{P_s} \cap U$. Если бы $ord(a|_{U_{P_s}\cap U}) > ord(a)$, то это бы означало, что образ элемента $\bar{a} \in \mathcal{A}_{ord(a)}/\mathcal{A}_{ord(a)+1}(U)$ при отображении $\varphi : \mathcal{A}_{ord(a)}/\mathcal{A}_{ord(a)+1}(U) \to (\mathcal{A}_{ord(a)}/\mathcal{A}_{ord(a)+1})_\eta(U_\eta)$, где η — общая точка на S, равен нулю. Но φ — инъективное отображение, поскольку $\mathcal{A}_{ord(a)}/\mathcal{A}_{ord(a)+1}(U)$ — плоский $\mathcal{O}_S(\tau(U))$-модуль, $\mathcal{A}_{ord(a)}/\mathcal{A}_{ord(a)+1}$ — когерентный пучок, и отображение $\mathcal{O}_S(\tau(U)) \to \mathcal{O}_{S,\eta}$ — вложение. Таким образом, $ord(a|_{U_{P_s}\cap U}) = ord(a)$ и $ord(a) = \mathrm{ord}(a)(x)$ для всех $x \in U$.

Случай 2. Пусть S — приведенная схема. Мы утверждаем, что имеют место те же утверждения, что и в Случае 1.

Пусть $a \in \mathcal{A}^*(U_{P_s})$ и $j = \mathrm{ord}(a)(x)$, где мы можем предположить, что $x \in C$ — такая точка, что $s = \tau(x)$ принадлежит нескольким неприводимым компонентам $S_1, \ldots S_k$ (без ограничения общности мы можем предположить $S = S_1 \cup \ldots \cup S_k$). По Случаю 1 мы знаем, что $a_0 = at^{-j}|_{C_{S_i}} \in \mathcal{A}^*_{S_i,0}(U_{P_s,S_i})$. Для всех $l, m \in \mathbb{Z}$ имеются точные последовательности пучков фильтрованных $\mathcal{A}_0$-модулей

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_{m,S_1\cup(S_2\cup\ldots\cup S_l)} \longrightarrow \mathcal{A}_{m,S_1} \times \mathcal{A}_{m,(S_2\cup\ldots\cup S_l)} \longrightarrow \mathcal{A}_{m,S_1\cap(S_2\cup\ldots\cup S_l)} \longrightarrow 0.$$

Следовательно, используя очевидные индуктивные рассуждения и точные последовательности, мы получаем $a_0 \in \mathcal{A}_0(U_{P_s})$. Аналогично, $b_0 = a^{-1}t^j \in \mathcal{A}_0(U_{P_s})$ и $a_0 b_0 = 1$. Таким образом, $a_0, b_0 \in \mathcal{A}^*_0(U_{P_s})$.

Значит, $\mathrm{ord}(a)$ локально постоянна на U_{P_s}.

Замечание 56. В ситуации замечания 52 утверждения нашего случая справедливы для всего пространства C. Доказательство то же.

Чтобы показать, что $\mathrm{ord}(a)$ локально постоянна на любом $U \subset C$, мы можем повторить рассуждения из конца Случая 1, поскольку C_s неприводима (а значит, $U \cap U_{P_s} \neq \varnothing$, и $U \cap U_{P_s} \cap S_i \times_S C \neq \varnothing$ для всех $i = 1, \ldots k$ (то есть, $U \cap U_{P_{s'}} \cap U_{P_s} \neq \varnothing$ для $s' \in S_i$, $k \in \{1, \ldots, k\}$)).

Заметим, что, используя замечание 55 и рассуждения выше, элемент $a \in \mathcal{A}^*(U)$ с $\mathrm{ord}(a) \equiv 0$ должен принадлежать $\mathcal{A}^*_0(U)$.

Случай 3. Пусть S — произвольная нетерова схема. Пусть $Y \longrightarrow S$ и $X \longrightarrow S$ — морфизмы схем. Рассмотрим $W = Y \times_S X$ с естественными отображениями проекции $p : W \longrightarrow Y$ и $q : W \longrightarrow X$. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок $\mathcal{O}_Y$-модулей на Y, и $\mathcal{G}$ — пучок $\mathcal{O}_X$-модулей на X. Напомним определение пучка $\mathcal{O}_W$-модулей $\mathcal{F} \boxtimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{G}$ на W:

$$\mathcal{F} \boxtimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} p^*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_W} q^*(\mathcal{G}).$$

Замечание 57. Пусть $\mathcal{M}$ — пучок $\mathcal{O}_{S'}$-модулей на S'. Тогда построим пучок $\mathcal{A}_{S',j}$-модулей $\mathcal{A}_j \widehat{\boxtimes}_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M} := \varprojlim_{i\geq 1} (\mathcal{A}_j/\mathcal{A}_{j+i}) \boxtimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M}$ на $C_{S'}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$, и пучок $\mathcal{A}_{S'}$-модулей $\mathcal{A} \widehat{\boxtimes}_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M} := \varinjlim_{j} \mathcal{A}_j \widehat{\boxtimes}_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M}$ на $C_{S'}$. Теперь пусть $\mathcal{N}$ — когерентный пучок $\mathcal{O}_S$-модулей на S. Тогда имеем

$\mathcal{A}_j\widehat{\boxtimes}_{\mathcal{O}_S}\mathcal{N} = \mathcal{A}_j \boxtimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{N}$ и $\mathcal{A}\widehat{\boxtimes}_{\mathcal{O}_S}\mathcal{N} = \mathcal{A} \boxtimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{N}$. В самом деле, второе утверждение следует из первого, поскольку тензорное произведение коммутирует с индуктивным пределом. Чтобы доказать первое утверждение, заметим, что оно очевидно когда $\mathcal{N} = \mathcal{O}_S^{\oplus r}$, и что функтор $\mathcal{A}_j\widehat{\boxtimes}_{\mathcal{O}_S}(\cdot)$ — точный функтор на категории когерентных пучков на S. Теперь, используя рассуждения, похожие на доказательство предложения 10.13 из книги [1], мы получаем, что естественное отображение $\mathcal{A}_j \boxtimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{A}_j\widehat{\boxtimes}_{\mathcal{O}_S}\mathcal{N}$ является изоморфизмом.

Пусть $\mathcal{N}_S \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Ker}\,(\mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_{S_{red}})$ — нильрадикал. Так как $\mathcal{N}_S$ — когерентный пучок на S, из рассуждений замечания 57 следует, что

$$\mathcal{N}_S\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \tau^*(\mathcal{N}_S) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{A} = \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A} \to \mathcal{A}_{S_{red}}), \quad \mathcal{N}_S\mathcal{A}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \tau^*(\mathcal{N}_S) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{A}_0 = \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_{S_{red},0})$$

и

$$\mathcal{A}^*_{S_{red}} = \mathcal{A}^*/(1 + \mathcal{N}_S\mathcal{A}), \quad \mathcal{A}^*_{S_{red},0} = \mathcal{A}^*_0/(1 + \mathcal{N}_S\mathcal{A}_0).$$

Так как $\mathcal{A}/\mathcal{A}_0$ плоский над S, мы получаем, сравнивая точные последовательности

$$0 \to \mathcal{N}_S\mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_{S_{red},0} \to 0, \quad 0 \to \mathcal{N}_S\mathcal{A} \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}_{S_{red}} \to 0,$$

что $\mathcal{N}_S\mathcal{A} \cap \mathcal{A}_0 = \mathcal{N}_S\mathcal{A}_0$, и следовательно $1 + \mathcal{N}_S\mathcal{A}_0 = (1 + \mathcal{N}_S\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}^*_0$.

Заметим, что, по определению, функция порядка на $\mathcal{A}^*$ совпадает с функцией порядка на $\mathcal{A}^*_{S_{red}}$. Суммируя все сказанное выше, получаем

Предложение 19. *1. Если $\overset{\circ}{X}_\infty$ — риббон над нетеровой схемой S, удовлетворяющий предположениям в начале раздела, то*

(a) Функция порядка

$$\mathbf{ord}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathbb{Z}_C$$

— морфизм пучков групп.

(b) Существуют окрестности $U_{P_s} \subset C$, такие что для каждой U_{P_s} отображение $\mathrm{ord}\,|_{U_{P_s}}$ — сюрьективный морфизм.

(c) Имеет место равенство пучков

$$\mathrm{Ker}\,(\mathbf{ord}_{\mathcal{A}}) = \mathcal{A}^*_0 \cdot (1 + \mathcal{N}_S\mathcal{A}) \simeq \mathcal{A}^*_0 \coprod_{1+\mathcal{N}_S\mathcal{A}_0} (1 + \mathcal{N}_S\mathcal{A}),$$

где в правой части стоит амальгамированная сумма, и $\mathcal{N}_S\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \tau^*(\mathcal{N}_S) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{A} = \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A} \to \mathcal{A}_{S_{red}})$.

2. Если $\overset{\circ}{X}_\infty$ — риббон, полученный заменой базы из риббона $(C, \mathcal{A})$ над полем k, удовлетворяющего условию (**), то

(a) Утверждение (1b) этого предложения выполняется для $U_{P_s} = C$.

(b) Используя экспоненциальное и логарифмическое отображения, можно записать равенства пучков

$$\mathrm{Ker}\,(\mathbf{ord}_{\mathcal{A}}) = \mathcal{A}^*_0 \coprod_{\mathcal{N}_S \boxtimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}_0} \mathcal{N}_S \boxtimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A},$$

где $\mathcal{N}_S \boxtimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A} = p^*(\mathcal{N}_S) \otimes_{\mathcal{O}_{S\times C}} q^*(\mathcal{A})$, p, q — проекции $S \times C$ на S и C соответственно.

(c) *Имеют место следующие точные последовательности пучков*

$$1 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(\mathbf{ord}_{\mathcal{A}}) \longrightarrow \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathbb{Z}_C \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_S \boxtimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}/\mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^* \longrightarrow \mathbb{Z}_C \longrightarrow 0,$$

$$1 \longrightarrow \mathcal{A}_0^* \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(\mathbf{ord}_{\mathcal{A}}) \longrightarrow \mathcal{N}_S \boxtimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}/\mathcal{A}_0 \longrightarrow 0.$$

Доказательство Доказательство утверждений 1 было дано выше. Доказательство утверждений 2 получается, если использовать степенные ряды для $\log(1+z)$ при отождествлении: $1+\mathcal{N}_S\mathcal{A} \simeq \mathcal{N}_S\mathcal{A}$, $1+\mathcal{N}_S\mathcal{A}_0 \simeq \mathcal{N}_S\mathcal{A}_0$ и $1+\mathcal{N}_S\mathcal{A}/((1+\mathcal{N}_S\mathcal{A})\cap\mathcal{A}_0^*) = 1+\mathcal{N}_S\mathcal{A}/1+\mathcal{N}_S\mathcal{A}_0$ с $\mathcal{N}_S\mathcal{A}/\mathcal{N}_S\mathcal{A}_0 = \mathcal{N}_S \boxtimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}/\mathcal{A}_0$.

4.2.2 Группа Пикара риббона

В этом разделе приведен результат о строении группы Пикара риббона, определенного над артиновым кольцом.

Напомним, что для окольцованного пространства $\mathring{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ группа Пикара определена как $Pic(\mathring{X}_\infty) = H^1(C, \mathcal{A}^*)$, и для окольцованного пространства $X_\infty = (C, \mathcal{A}_0)$ группа Пикара $Pic(X_\infty) = H^1(C, \mathcal{A}_0^*)$ соответственно.

Предложение 20. *Пусть* $\mathring{\mathrm{X}}_\infty = (C, \mathcal{A})$ *– риббон над артиновым кольцом* A. *Предположим, что* C *– это либо проективная, либо аффинная кривая над* $\mathrm{Spec}\,A$. *Тогда*

$$Pic(X_\infty) = \varprojlim_{i\geq 0} Pic(X_i).$$

Доказательство Для любых $j \geq i \geq 0$ обозначим следующие пучки $\mathcal{G}_{i,j} = \frac{1+\mathcal{A}_{i+1}}{1+\mathcal{A}_{j+1}}$ на C. Тогда имеем следующие точные последовательности:

$$1 \longrightarrow \mathcal{G}_{i,j} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_j}^* \longrightarrow \mathcal{O}_{X_i}^* \longrightarrow 1. \tag{4.15}$$

Для любого $i \geq 0$ обозначим следующий пучок $\mathcal{G}_i = 1 + \mathcal{A}_{i+1} \subset \mathcal{A}_0^*$ на C. Тогда

$$\mathcal{G}_i = \varprojlim_{j\geq i} \mathcal{G}_{i,j}.$$

Для любых $j \geq i \geq 0$ имеем следующие точные последовательности:

$$1 \longrightarrow \mathcal{G}_{j,j+1} \longrightarrow \mathcal{G}_{i,j+1} \longrightarrow \mathcal{G}_{i,j} \longrightarrow 1. \tag{4.16}$$

Для любого $j \geq 0$ имеем $\mathcal{G}_{j,j+1} \simeq \mathcal{A}_{j+1}/\mathcal{A}_{j+2}$. Следовательно, из последовательности (4.16) получим, что для любого аффинного открытого подмножества $U \subset C$ отображения $H^0(U, \mathcal{G}_{i,j+1}) \to H^0(U, \mathcal{G}_{i,j})$ сюръективны для любых $j \geq i \geq 0$, и по индукции по j получаем, что $H^1(U, \mathcal{G}_{i,j}) = 0$ для любых $j \geq i \geq 0$. Следовательно, рассуждая так же, как и при доказательстве утверждения 3 предложения 9, получим, что $H^1(U, \mathcal{G}_i) = 0$ для любого $i \geq 1$.

Поскольку C является кривой над артиновым кольцом, существует некоторые аффинные открытые подмножества U_1 и U_2 из C такие что $C = U_1 \cup U_2$. Следовательно, следующая последовательность Майера-Виеториса точна:

$$0 \to H^0(C, \mathcal{G}_i) \to H^0(U_1, \mathcal{G}_i) \oplus H^0(U_2, \mathcal{G}_i) \to H^0(U_1 \cap U_2, \mathcal{G}_i) \to H^1(C, \mathcal{G}_i) \to 0. \tag{4.17}$$

Также для любых $j \geq i \geq 0$ имеем следующие точные последовательности:

$$0 \to H^0(C, \mathcal{G}_{i,j}) \to H^0(U_1, \mathcal{G}_{i,j}) \oplus H^0(U_2, \mathcal{G}_{i,j}) \to H^0(U_1 \cap U_2, \mathcal{G}_{i,j}) \to H^1(C, \mathcal{G}_{i,j}) \to 0. \tag{4.18}$$

Отметим, что для любого фиксированного $i \geq 0$ проективная система $(H^0(U_1, \mathcal{G}_{i,j}) \oplus H^0(U_2, \mathcal{G}_{i,j}), j \geq i)$ удовлетворяет МЛ-условию, поскольку отображения в этой системе сюръективны. По той же самой причине, если кривая C – аффинная, то для любого фиксированного $i \geq 0$ проективная система $(H^0(C, \mathcal{G}_{i,j}), j \geq i)$ удовлетворяет МЛ-условию. Если кривая C проективная, то рассмотрим следующие точные последовательности, которые следуют из последовательностей (4.15):

$$0 \longrightarrow H^0(C, \mathcal{G}_{i,j}) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{O}^*_{X_j}) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{O}^*_{X_i}). \tag{4.19}$$

Получим, что A-модули $(H^0(C, \mathcal{O}_{X_j}), j \geq 0)$ удовлетворяют МЛ-условию, поскольку являются артиновыми A-модулями. Следовательно, группы $H^0(C, \mathcal{O}^*_{X_j}) = H^0(C, \mathcal{O}_{X_j})^*$ удовлетворяют МЛ-условию как обратимые элементы соответствующих алгебр, для которых: 1) мы имеем МЛ-условие и 2) отображения в проективной системе имеют нильпотентные ядра. Откуда, для фиксированного $i \geq 0$ из точной последовательности (4.19) получим, что проективная система $(H^0(C, \mathcal{G}_{i,j}), j \geq i)$ удовлетворяет МЛ-условию как система ядер отображений в постоянную группу $H^0(C, \mathcal{O}^*_{X_i})$.

Теперь применим лемму 31 для того, чтобы получить, что для фиксированного $i \geq 0$ точная последовательность (4.17) является проективным пределом точных последовательностей (4.18) по отношению к $j \geq i$. Следовательно

$$H^1(C, \mathcal{G}_i) = \varprojlim_{j \geq i} H^1(C, \mathcal{G}_{i,j}).$$

Пусть $i = 0$, тогда из точной последовательности (4.15) получим следующую точную последовательность при $j \geq 0$:

$$0 \longrightarrow H^0(C, \mathcal{G}_{0,j}) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{O}^*_{X_j}) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{O}^*_C) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1(C, \mathcal{G}_{0,j}) \longrightarrow H^1(C, \mathcal{O}^*_{X_j}) \longrightarrow H^1(C, \mathcal{O}^*_C) \longrightarrow 0.$$

Каждый член этой последовательности удовлетворяет МЛ-условию по отношению j. (Для нулевых когомологий это доказано выше, для первых когомологий это следует из отсутствия вторых когомологий на кривой.) Следовательно, используя лемму 33, получим, что следующая последовательность точна:

$$0 \to \varprojlim_{j \geq 0} H^0(C, \mathcal{G}_{0,j}) \to \varprojlim_{j \geq 0} H^0(C, \mathcal{O}^*_{X_j}) \to H^0(C, \mathcal{O}^*_C) \to$$
$$\to \varprojlim_{j \geq 0} H^1(C, \mathcal{G}_{0,j}) \to \varprojlim_{j \geq 0} H^1(C, \mathcal{O}^*_{X_j}) \to H^1(C, \mathcal{O}^*_C) \to 0. \tag{4.20}$$

Из точной последовательности

$$1 \longrightarrow \mathcal{G}_0 \longrightarrow \mathcal{A}^*_0 \longrightarrow \mathcal{O}^*_C \longrightarrow 1$$

получаем следующую точную последовательность:

$$0 \longrightarrow H^0(C, \mathcal{G}_0) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{A}^*_0) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{O}^*_C) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1(C, \mathcal{G}_0) \longrightarrow H^1(C, \mathcal{A}^*_0) \longrightarrow H^1(C, \mathcal{O}^*_C) \longrightarrow 0. \tag{4.21}$$

Имеем естественное отображение точной последовательности (4.21) в точную последовательность (4.20), и мы знаем, что отображения на каждом члене за исключением одного члена последовательности, являются изоморфизмами. Но тогда оставшееся отображение

$$H^1(C, \mathcal{A}^*_0) \longrightarrow \varprojlim_{j \geq 0} H^1(C, \mathcal{O}^*_{X_j})$$

также является изоморфизмом.

Следствие 18. *В условиях предложения 20 предположим, что C является аффинной кривой. Тогда $Pic(X_\infty) = Pic(C)$.*

Доказательство следует из предложения и из того, что $H^1(C, \mathcal{G}_{j,j+1}) = 1$ для любого $j \geq 0$.

Пример 20. Пусть $\mathring{X}_\infty$ – риббон из примера 10 (так что выполняется условие (**)). Предположим также, что $(C \cdot C) \neq 0$, и C – неприводимая кривая. Получаем, что условие $\mathcal{A}_{1,P}\mathcal{A}_{-1,P} = \mathcal{A}_{0,P}$ следствия 15 выполенено в каждой точке $P \in C$ (ср. доказательство предложения 12). Следовательно, по предложению 17 и следствию 15 имеем следующую точную последовательность пучков на C:

$$1 \longrightarrow \mathcal{A}_0^* \longrightarrow \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

и $H^0(C, \mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^*) = \mathbb{Z}$, $H^1(C, \mathcal{A}^*/\mathcal{A}_0^*) = 0$. Это дает следующую точную последовательность:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} Pic(X_\infty) \to Pic(\mathring{X}_\infty) \to 0,$$

где $\alpha(1) = \mathcal{A}_1$. (Отображение α является инъективным, потому что $\alpha(1)$ не является элементом кручения в группе $Pic(X_\infty)$. Действительно, образ $\alpha(1)$ в $Pic(C)$ имеет степень, равную $-(C \cdot C) \neq 0$.) Таким образом, получаем, что $Pic(\mathring{X}_\infty) \simeq Pic(X_\infty)/\langle \mathcal{A}_1 \rangle \simeq Pic(X_\infty)/\mathbb{Z}$.

Для каждого i имеем точную последовательность

$$0 \to H^1(C, \frac{1+\mathcal{A}_1}{1+\mathcal{A}_{i+1}}) \to Pic(X_i) \to Pic(C) \to 0$$

и, следовательно, имеем отображение

$$Pic(X_i) \xrightarrow{deg} \mathbb{Z} \to 0, \quad \mathcal{L} \mapsto deg(\mathcal{L}|_C).$$

По нашим предположениям $deg(\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_{i+1}) = d = -(C \cdot C) \neq 0$. Следовательно, имеем следующие точные диаграммы для любого i:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & Pic^0(X_i) & \to & Pic(X_i) & \to & \mathbb{Z} & \to 0 \\
 & \uparrow & & \bigcup & & \bigcup & \\
 & 0 & \to & \langle \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_{i+1} \rangle & \simeq & d\mathbb{Z} & \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

откуда

$$0 \to Pic^0(X_i) \to Pic(X_i)/\langle \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_{i+1} \rangle \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \to 0.$$

Проективная система $(Pic(X_i), i \geq 0)$ удовлетворяет МЛ-условию (как система первых когомологий на кривой), следовательно, $(Pic^0(X_i), i \geq 0)$ удовлетворяет МЛ-условию (как система ядер отображений в $\mathbb{Z}$). Переходя к проективному пределу, получаем точную последовательность

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & Pic^0(X_\infty) & \to & Pic(X_\infty)/\langle \mathcal{A}_1 \rangle & \to & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} & \to 0 \\
 & & & \| & & & \\
 & & & Pic(\mathring{X}_\infty) & & &
\end{array}$$

В частности, когда $X = \mathbb{P}^2$, $C = \mathbb{P}^1 \subset X$, имеем $d = -1$ и, следовательно, $Pic^0(X_\infty) \simeq Pic(\mathring{X}_\infty)$. На $Pic^0(X_\infty)$ существует структура схемы (см., например, [89]), так, что в этом случае структура схемы существует также и на $Pic(\mathring{X}_\infty)$.

Пример 21. Пусть $\overset{\circ}{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ — такой риббон, что C — неприводимая кривая. Предположим, что функция порядка является гомоморфизмом (см., например, предложение 16 выше.) Тогда каждый элемент $\mathcal{N} \in Pic(\overset{\circ}{X}_\infty)$ дает пучок без кручения ранга 1 на $\overset{\circ}{X}_\infty$ после фиксации фильтрации на $\mathcal{N}$. (Всевозможные фильтрации образуют $\mathbb{Z}$-торсер.) Действительно, функция порядка ord дает гомоморфизм:

$$\gamma \quad : \quad H^1(C, \mathcal{A}^*) \longrightarrow H^1(C, \mathbb{Z}).$$

А препятствием для нахождения фильтраций на $\mathcal{N}$ является $\gamma(\mathcal{N}) \neq 0$. Но любая локальная $\mathbb{Z}$-система на неприводимом пространстве C является тривиальной в топологии Зарисского, т.е. $H^1(C, \mathbb{Z}) = 0$. Таким образом, мы имеем фильтрацию на $\mathcal{N}$.

4.2.3 Функтор Пикара риббона

В этом разделе определяется функтор Пикара риббона $\mathrm{Pic}_{\overset{\circ}{X}_\infty}$, а также функтор Пикара соответствующей ему формальной схемы Pic_{X_∞}, на категории аффинных нетеровых k-схем, и излагаются результаты о формальной группе Пикара и формальной группе Брауэра риббона. Эти результаты используются в следующих разделах, где доказывается глобальная представимость функтора Пикара.

Пусть $\overset{\circ}{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ — риббон над полем k.

Определение 68. Пусть $\mathcal{B}$ — категория аффинных нетеровых k-схем. Определим контравариантные функторы Пикара $Pic_{\overset{\circ}{X}_\infty}$ и Pic_{X_∞} из $\mathcal{B}$ в категорию абелевых групп:

(i) $Pic_{\overset{\circ}{X}_\infty}(S) \overset{\text{def}}{=} Pic(\overset{\circ}{X}_{\infty,S}) = H^1(C_S, \mathcal{A}^*_S)$;

(ii) $Pic_{X_\infty}(S) \overset{\text{def}}{=} Pic(X_{\infty,S}) = H^1(C_S, \mathcal{A}^*_{S,0})$.

Касательное пространство Зарисского

В этом разделе доказывается предложение технического характера о касательном пространстве к функторам Пикара в нуле.

Напомним определение касательного пространства Зарисского к функтору в 0. Пусть $\overset{\circ}{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ — риббон над полем k. Пусть $E = k \oplus k \cdot \epsilon$, где $\epsilon^2 = 0$, — k-алгебра.

$$T_{Pic_{\overset{\circ}{X}_\infty}}(0) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Ker}\,(Pic_{\overset{\circ}{X}_\infty}(\mathrm{Spec}\, E) \longrightarrow Pic_{\overset{\circ}{X}_\infty}(\mathrm{Spec}\, k)).$$

Аналогично,

$$T_{Pic_{X_\infty}}(0) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Ker}\,(Pic_{X_\infty}(\mathrm{Spec}\, E) \longrightarrow Pic_{X_\infty}(\mathrm{Spec}\, k)).$$

Имеет место следующее предложение.

Предложение 21. *Пусть* $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_\infty = (C, \mathcal{A})$ *— риббон над полем* k.

1. *Имеются равенства* $T_{Pic_{\overset{\circ}{X}_\infty}}(0) = H^1(C, \mathcal{A})$ *и* $T_{Pic_{X_\infty}}(0) = H^1(C, \mathcal{A}_0)$.

2. *Пусть риббон* $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_\infty$ *соответствует некоторой обобщенной фредгольмовой* k*-подалгебре* A *в* $k((u))((t))$ *(после выбора гладкой точки* $P \in C$ *риббона, формальных локальных параметров* u, t*, см. теорему 27). Тогда имеется следующая точная последовательность* k*-векторных пространств:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^1(A) \longrightarrow T_{Pic_{X_\infty}}(0) \longrightarrow T_{Pic_{\overset{\circ}{X}_\infty}}(0) \longrightarrow \mathcal{H}^2(A) \longrightarrow 0. \qquad (4.22)$$

Доказательство Пусть $R = \operatorname{Spec} E$. Обозначим пучки после замены базы

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A}_R = \mathcal{A} \oplus \epsilon \cdot \mathcal{A} \qquad , \qquad \mathcal{A}'_0 = \mathcal{A}_{R,0} = \mathcal{A} \oplus \epsilon \cdot \mathcal{A}_0,$$

где $\epsilon^2 = 0$. Тогда имеются следующие канонические разложения:

$$\mathcal{A}'^* = \mathcal{A}^* \times (1 + \epsilon \cdot \mathcal{A}) = \mathcal{A}^* \times \mathcal{A};$$

$$\mathcal{A}'^*_0 = \mathcal{A}^*_0 \times (1 + \epsilon \cdot \mathcal{A}_0) = \mathcal{A}^*_0 \times \mathcal{A}_0.$$

Следовательно, имеем:

$$H^1(C, \mathcal{A}'^*) = H^1(C, \mathcal{A}^*) \times H^1(C, \mathcal{A});$$
$$H^1(C, \mathcal{A}'^*_0) = H^1(C, \mathcal{A}^*_0) \times H^1(C, \mathcal{A}_0).$$

Отсюда мы получаем

$$T_{Pic_{\mathring{X}_\infty}}(0) = H^1(C, \mathcal{A}) \qquad , \qquad T_{Pic_{X_\infty}}(0) = H^1(C, \mathcal{A}_0). \tag{4.23}$$

Имеется следующая точная последовательность пучков на C:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{A}_0 \longrightarrow 0.$$

Отсюда мы получаем следующую длинную точную последовательность

$$0 \longrightarrow \frac{H^0(C, \mathcal{A}/\mathcal{A}_0)}{\frac{H^0(C,\mathcal{A})}{H^0(C,\mathcal{A}_0)}} \longrightarrow H^1(C, \mathcal{A}_0) \longrightarrow H^1(C, \mathcal{A}) \longrightarrow H^1(C, \mathcal{A}/\mathcal{A}_0) \longrightarrow 0. \tag{4.24}$$

Используя эту последовательность, формулы (4.23) и теорему 28, получаем точную последовательность (4.22).

Замечание 58. Согласно замечанию 49 и лемме 36, если риббон $\mathring{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ происходит из алгебраической проективной Коэно-Маколеевой поверхности X и обильного дивизора Картье C на X, то точная последовательность (4.22) преобразуется к следующей точной последовательности:

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow T_{Pic_{X_\infty}}(0) \longrightarrow T_{Pic_{\mathring{X}_\infty}}(0) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow 0.$$

Формальная группа Брауэра алгебраической поверхности

В этом разделе доказывается предложение технического характера о формальной группе Брауэра алгебраической поверхности.

Пусть X — проективная алгебраическая поверхность над полем k. Напомним следующее определение формальной группы Брауэра поверхности X из статьи [29].

Определение 69. Пусть $\mathbb{C}$ — категория аффинных артиновых локальных k-схем с полем вычетов k (т.е. полная подкатегория аффинных k-схем, такая что $S \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ если и только если $S = \operatorname{Spec} B$ для артиновой локальной k-алгебры B с полем вычетов k). *Формальная группа Брауэра* $\widehat{Br}_X$ поверхности X — контравариантный функтор из $\mathbb{C}$ в категорию абелевых групп, заданный по следующему правилу:

$$\widehat{Br}_X(S) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Ker}\,(H^2(X \times_k S, \mathcal{O}^*_{X \times_k S}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}^*_X)),$$

где $S \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$.

Мы используем топологию Зарисского для определения функтора $\widehat{Br}_X$. Но, как было замечено в [29, ch. II] (из-за фильтрации с факторами-когерентными пучками), мы можем использовать, например, этальную топологию, т.е. имеется следующее равенство:

$$\widehat{Br}_X(S) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Ker}\,(H^2_{\acute{e}t}(X \times_k S, \mathcal{O}^*_{X\times_k S}) \longrightarrow H^2_{\acute{e}t}(X, \mathcal{O}^*_X)),$$

где $S \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$. Это объясняет название "формальная группа Брауэра".

В [29, corollary 4.1] было доказано, что при некоторых условиях на X функтор $\widehat{Br}_X$ про-представим формальной групповой схемой $\widehat{\mathbf{Br}}_X$, которая является формальной группой (для полей k произвольной характеристики). Это означает, что для любой $S \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$:

$$\widehat{Br}_X(S) = \mathrm{Hom}_{form.sch.}(S, \widehat{\mathbf{Br}}_X),$$

где $\mathrm{Hom}_{form.sch.}$ берется в категории формальных схем.

Так как мы предположили, что $\mathrm{char}\, k = 0$, мы дадим здесь простое доказательство того, что функтор $\widehat{Br}_X$ всегда про-представим.

Лемма 39. *Функтор $\widehat{Br}_X$ из категории $\mathbb{C}$ в категорию абелевых групп про-представим формальной групповой схемой $\widehat{\mathbf{Br}}_X = \mathrm{Spf}\,\widehat{Sym}_k(H^2(X, \mathcal{O}_X)^*)$, где групповой закон в формальной группе $\widehat{\mathbf{Br}}_X$ задан как $v \longmapsto v \otimes 1 + 1 \otimes v$, $v \in H^2(X, \mathcal{O}_X)^*$.*

Доказательство По определению, мы имеем k-алгебру

$$\widehat{Sym}_k(H^2(X, \mathcal{O}_X)^*) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \prod_{i=0}^{\infty} S^i(H^2(X, \mathcal{O}_X)^*),$$

где $S^i(\cdot)$ — k-векторное пространство симметричных тензоров степени i над полем k, $S^0(\cdot) = k$. $\widehat{Sym}_k(H^2(X, \mathcal{O}_X)^*)$ — топологическая локальная k-алгебра над дискретным полем k. Эта топология задается топологией бесконечного произведения дискретных пространств.

Для всякой $S = \mathrm{Spec}\, B \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ имеем $B = k \oplus I$, где I — максимальный идеал в кольце B, $\dim_k I < \infty$ и $I^n = 0$ для некоторого $n \geq 0$. Рассмотрим дискретную топологию на кольце B. Тогда

$$\mathrm{Hom}_{form.sch.}(S, \mathrm{Spf}\,\widehat{Sym}_k(H^2(X, \mathcal{O}_X)^*)) = \mathrm{Hom}_{k-alg.,cont}(\widehat{Sym}_k(H^2(X, \mathcal{O}_X)^*), B) =$$

$$= \mathrm{Hom}_k(H^2(X, \mathcal{O}_X)^*, I) = H^2(X, \mathcal{O}_X) \otimes_k I,$$

где $\mathrm{Hom}_{k-alg.,cont.}$ берется в категории топологических k-алгебр. Мы используем также, что $H^2(X, \mathcal{O}_X)^{**} = H^2(X, \mathcal{O}_X)$, поскольку $\dim_k H^2(X, \mathcal{O}_X) < \infty$.

С другой стороны, для пучка $\mathcal{O}'_X = \mathcal{O}_{X\times_k S}$ после замены базы на X имеем $\mathcal{O}'_X = \mathcal{O}_X \oplus (\mathcal{O}_X \otimes_k I)$. Отсюда $\mathcal{O}'^*_X = \mathcal{O}^*_X \times (1 + \mathcal{O}_X \otimes_k I)$. Экспоненциальное отображение задает изоморфизм пучков абелевых групп:

$$exp \quad : \quad \mathcal{O}_X \otimes_k I \longrightarrow 1 + \mathcal{O}_X \otimes_k I.$$

Следовательно, $\mathcal{O}'^*_X = \mathcal{O}^*_X \times (\mathcal{O}_X \otimes_k I)$. Отсюда

$$H^2(X, \mathcal{O}'^*_X) = H^2(X, \mathcal{O}^*_X) \times H^2(X, \mathcal{O}_X \otimes_k I) = H^2(X, \mathcal{O}^*_X) \times (H^2(X, \mathcal{O}_X) \otimes_k I).$$

Следовательно, имеем

$$\widehat{Br}_X(S) = H^2(X, \mathcal{O}_X) \otimes_k I.$$

Более того, имеется универсальный объект

$$\tau \in \operatorname{Ker}\,(H^2(X \times_k \widehat{\mathbf{Br}}_X, \mathcal{O}^*_{X \times_k \widehat{\mathbf{Br}}_X}) \to H^2(X, \mathcal{O}^*_X)),$$

который строится следующим образом. Имеем

$$\operatorname{Ker}\,(H^2(X \times_k \widehat{\mathbf{Br}}_X, \mathcal{O}^*_{X \times_k \widehat{\mathbf{Br}}_X}) \to H^2(X, \mathcal{O}^*_X)) = H^2(X, 1 + J \hat{\otimes}_k \mathcal{O}_X) = H^2(X, \mathcal{O}_X) \otimes_k J,$$

где идеал $J = \prod\limits_{i=1}^{\infty} S^i(H^2(X, \mathcal{O}^*_X))$. Кроме того, пучок абелевых групп $J \hat{\otimes}_k \mathcal{O}_X$ изоморфен пучку $1 + J \hat{\otimes}_k \mathcal{O}_X$ посредством экспоненциального отображения.

Теперь $\tau = Id$, где Id — тождественное отображение из

$$\operatorname{End}_k(H^2(X, \mathcal{O}_X)) = H^2(X, \mathcal{O}_X) \otimes_k H^2(X, \mathcal{O}_X)^*.$$

И имеется каноническое вложение k-векторных пространств:

$$H^2(X, \mathcal{O}_X) \otimes_k H^2(X, \mathcal{O}_X)^* \subset H^2(X, \mathcal{O}_X) \otimes_k J.$$

Формальная группа Брауэра риббона

В этом разделе мы используем те же обозначения, что и в разделе 4.2.3.

Определение 70. Пусть $\mathring{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ — риббон над полем k. Определим функтор $\widehat{Br}_{\mathring{X}_\infty}$ из категории $\mathcal{C}$ аффинных артиновых локальных k-схем с полем вычетов k в категорию абелевых групп:

$$\widehat{Br}_{\mathring{X}_\infty}(S) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname{Ker}\,(H^1(C_S, \mathcal{A}^*_S/\mathcal{A}^*_{S,0}) \longrightarrow H^1(C, \mathcal{A}^*/\mathcal{A}^*_0)),$$

где $S \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$.

Ниже, в замечании 60, мы объясним почему мы используем название "формальная группа Брауэра"для рибона.

Предложение 22. *Пусть C — проективная кривая. Тогда функтор $\widehat{Br}_{\mathring{X}_\infty}$ про-представим формальной групповой схемой $\widehat{\mathbf{Br}}_{\mathring{X}_\infty}$.*

Доказательство Обозначим k-векторное пространство $V = H^1(C, \mathcal{A}/\mathcal{A}_0)$. (Заметим, что по теореме 28, $V = \mathcal{H}^2(\mathbb{A})$, если $\mathbb{A}$ — обобщенное фредгольмово подпространство в $k((u))((t))$, соответствующее риббону $\mathring{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ с некоторой гладкой точкой риббона $P \in C$, формальными локальными параметрами u, t, см. теорему 27). Заметим, что имеется каноническое равенство:

$$V = \varinjlim_{i \geq 0} V_i,$$

где $V_i = H^1(C, \mathcal{A}_{-i}/\mathcal{A}_0)$, $i \geq 0$. И $\dim_k V_i < \infty$, так как C — проективная кривая, и $\mathcal{A}_{-i}/\mathcal{A}_0$ — когерентные пучки на схеме X_{i-1} в силу предложения 7. Следовательно, имеем

$$V^* = \varprojlim_{i \geq 0} V_i^*.$$

k-векторное пространство V^* обладает естественной линейно компактной топологией, которая задается топологией этого проективного предела, где каждое V_i^* имеет дискретную топологию, см. [2, ch.III, §2, ex. 15].

Для любого $l \geq 0$ определим

$$S^l_{cont}(V^*) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varprojlim_{i \geq 0} S^l(V_i^*).$$

Эти пространства также имеют линейно компактную топологию, которая задается проективным пределом. Определим

$$T = \widehat{Sym}_{k,cont}(V^*) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \prod_{l=0}^{\infty} S^l_{cont}(V^*).$$

По построению, $S^0_{cont}(V^*) = k$. На k-векторном пространстве T задана топология произведения. Следовательно, T — линейно компактное пространство как произведение линейно компактных пространств. Следовательно, T хаусдорфово и полно, см. [2, ch.III, §2, ex. 16].

Для любых $l_1 \geq 0$, $l_2 \geq 0$ имеется каноническое непрерывное билинейное отображение над k:

$$S^{l_1}_{cont}(V^*) \times S^{l_2}_{cont}(V^*) \longrightarrow S^{l_1+l_2}_{cont}(V^*).$$

Следовательно, T — топологическая локальная k-алгебра (над дискретным полем k). Максимальный идеал J в T задается как

$$J \stackrel{\mathrm{def}}{=} \prod_{l=1}^{\infty} S^l_{cont}(V^*).$$

По построению, для любого открытого k-подпространства $U \subset T$ существует $m > 0$, такое что $U \supset J^m$. Используя эти свойства топологической k-алгебры T, получаем, что корректно определена следующая формальная схема (см. [62, ch. I, §10]):

$$\widehat{\mathbf{Br}}_{\mathring{X}_\infty} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Spf}(T).$$

Более того, $\widehat{\mathbf{Br}}_{\mathring{X}_\infty}$ — формальная группа с групповым законом $v \mapsto v \otimes 1 + 1 \otimes v$, $v \in V^* = S^1_{cont}(V^*)$. ($V^*$ топологически порождает k-алгебру T.)

Теперь нам нужно проверить, что формальная групповая схема $\widehat{\mathbf{Br}}_{\mathring{X}_\infty}$ представляет функтор $\widehat{Br}_{\mathring{X}_\infty}$.

Для всякой $S = \operatorname{Spec} B \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ имеем $B = k \oplus I$, где I — максимальный идеал в кольце B, $\dim_k I < \infty$ и $I^n = 0$ для некоторого $n \geq 0$. Рассмотрим дискретную топологию на кольце B. Тогда имеем

$$\mathrm{Hom}_{form.sch.}(S, \widehat{\mathbf{Br}}_{\mathring{X}_\infty}) = \mathrm{Hom}_{k-alg,cont}(T, B) = \mathrm{Hom}_{k,cont}(V^*, I),$$

где $\mathrm{Hom}_{k,cont}$ берется в категории топологических k-векторных пространств. Так как $\dim_k(V_i) < \infty$, $i \geq 0$, имеем

$$\mathrm{Hom}_{k,cont}(V^*, k) = V. \tag{4.25}$$

(Заметим также, что $V^* = \mathrm{Hom}_{k,cont}(V, k)$, где V имеет дискретную топологию.) Так как $\dim_k I < \infty$ и I имеет дискретную топологию, получаем следующую формулу из формулы (4.25):

$$\mathrm{Hom}_{k,cont}(V^*, I) = V \otimes_k I.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Hom}_{form.sch.}(S, \widehat{\mathbf{Br}}_{\mathring{X}_\infty}) = V \otimes_k I. \tag{4.26}$$

С другой стороны, имеется следующая расщепляющаяся точная последовательность:

$$1 \to 1 + I \otimes_k \mathcal{A}/\mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}^*_S/\mathcal{A}^*_{S,0} \to \mathcal{A}^*/\mathcal{A}^*_0 \to 0,$$

которая является фактором точной последовательности

$$1 \to 1 + I \otimes_k \mathcal{A} \to \mathcal{A}_S^* \to \mathcal{A}^* \to 0 \tag{4.27}$$

по следующей точной последовательности

$$1 \to 1 + I \otimes_k \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_{S,0}^* \to \mathcal{A}_0^* \to 0. \tag{4.28}$$

Пучок абелевых групп $I \otimes_k \mathcal{A}/\mathcal{A}_0$ изоморфен пучку $1 + I \otimes_k \mathcal{A}/\mathcal{A}_0$ посредством экспоненциального отображения. Следовательно, имеем

$$\widehat{Br}_{\mathring{X}_\infty}(S) = H^1(C, 1 + I \otimes_k \mathcal{A}/\mathcal{A}_0) \simeq H^1(C, I \otimes_k \mathcal{A}/\mathcal{A}_0) = I \otimes_k H^1(C \otimes_k \mathcal{A}/\mathcal{A}_0).$$

Таким образом, $\widehat{Br}_{\mathring{X}_\infty}(S) = \mathrm{Hom}_{form.sch.}(S, \widehat{\mathbf{Br}}_{\mathring{X}_\infty})$.

Замечание 59. Пусть A — произвольная коммутативная k-алгебра. Тогда имеется аналог формулы (4.26):

$$\mathrm{Hom}_{form.sch.}(\mathrm{Spec}\, A, \widehat{\mathbf{Br}}_{\mathring{X}_\infty}) = V \otimes_k N_A,$$

где N_A — нильрадикал кольца A. Действительно, следуя доказательству формулы (4.26), видно, что достаточно доказать следующую формулу

$$\mathrm{Hom}_{k,cont}(V^*, N_A) = V \otimes_k N_A, \tag{4.29}$$

где N_A имеет дискретную топологию. Но V^* является линейно компактным k-векторным пространством. Следовательно, для всякого $\phi \in \mathrm{Hom}_{k,cont}(V^*, N_A)$ мы имеем, что $\phi(V^*)$ — линейно компактное k-векторное подпространство в дискретном k-векторном пространстве N_A. Отсюда $\dim_k \phi(V^*) < \infty$. Теперь, используя формулу (4.25), получаем формулу (4.29).

Замечание 60. По замечанию 49 и теореме 28 получаем, что если риббон $\mathring{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ происходит из алгебраической проективной Коэно-Маколеевой поверхности X и обильного дивизора Картье C на X, то $H^2(X, \mathcal{O}_X) = H^1(C, \mathcal{A}/\mathcal{A}_0)$. Следовательно, мы имеем

$$\widehat{\mathbf{Br}}_X = \mathrm{Spf}\, \widehat{Sym}_k(H^2(X, \mathcal{O}_X)^*) = \widehat{\mathbf{Br}}_{\mathring{X}_\infty}.$$

Формальная группа Пикара риббона

Определение 71. Пусть $\mathring{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ — риббон над полем k. *Формальная группа Пикара риббона* $\widehat{\mathrm{Pic}}_{\mathring{X}_\infty}$ — контравариантный функтор из категории $\mathcal{C}$ в категорию абелевых групп:

$$\widehat{Pic}_{\mathring{X}_\infty}(S) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Ker}\,(H^1(C_S, \mathcal{A}_S^*) \longrightarrow H^1(C, \mathcal{A}^*)),$$

где $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Аналогично,

$$\widehat{Pic}_{X_\infty}(S) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Ker}\,(H^1(C_S, \mathcal{A}_{S,0}^*) \longrightarrow H^1(C, \mathcal{A}_0^*)).$$

Пусть $S = \mathrm{Spec}\, B \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$, где $B = k \oplus I$, I — максимальный идеал кольца B, $\dim_k I < \infty$, и $I^n = 0$ для некоторого $n \geq 0$.

Из расщепления точных последовательностей (4.27), (4.28), используя экспоненциальное и логарифмическое отображения, получаем

$$\widehat{Pic}_{\mathring{X}_\infty}(S) = I \otimes_k H^1(C, \mathcal{A}), \qquad \widehat{Pic}_{X_\infty}(S) = I \otimes_k H^1(C, \mathcal{A}_0).$$

Таким образом, если мы определим контравариантный функтор P из $\mathbb{C}$ в категорию абелевых групп по правилу

$$P(S) \stackrel{\mathrm{def}}{=} I \otimes_k H, \quad \text{где} \quad H \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{H^0(C, \mathcal{A}/\mathcal{A}_0)}{\frac{H^0(C,\mathcal{A})}{H^0(C,\mathcal{A}_0)}},$$

мы получим следующую точную последовательность групп, которая функториальна на $\mathbb{C}$ (ср. с последовательностью (4.24)):

$$0 \longrightarrow P(S) \longrightarrow \widehat{Pic}_{X_\infty}(S) \longrightarrow \widehat{Pic}_{\mathring{X}_\infty}(S) \longrightarrow \widehat{Br}_{\mathring{X}_\infty}(S) \longrightarrow 0 \tag{4.30}$$

Определим другой функтор $\overline{Pic}$ из $\mathbb{C}$ в категорию абелевых групп по правилу

$$\overline{Pic}(S) \stackrel{\mathrm{def}}{=} I \otimes_k \frac{H^1(C, \mathcal{A}_0)}{H}.$$

(Если $H = 0$, то $\overline{Pic} = \widehat{Pic}_{X_\infty}$.) Тогда из последовательности (4.30) мы получим другую точную последовательность:

$$0 \longrightarrow \overline{Pic}(S) \longrightarrow \widehat{Pic}_{\mathring{X}_\infty}(S) \longrightarrow \widehat{Br}_{\mathring{X}_\infty}(S) \longrightarrow 0 \tag{4.31}$$

Предложение 23. *Пусть C — проективная кривая. Тогда*

1. *Существует неканоническое функториальное (по S) расщепление последовательности (4.31).*

2. *Если $\dim_k H < \infty$, то функтор $\overline{Pic}$ про-представим формальной групповой схемой $\overline{\mathbf{Pic}}$.*

Замечание 61. Условие $\dim_k H < \infty$ этого предложения выполняется, например, если риббон происходит из алгебраической проективной поверхности X как в замечании 58, так как в этом случае $H = H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Другой пример — риббон, происходящий из пары Шура $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ как в теореме 27, где $\mathbb{A}$ выбрано таким образом, что $\dim_k \mathcal{H}^1(A) < \infty$. Благодаря лемме 36 можно легко построить множество примеров таких пространств.

Доказательство Первое утверждение очевидно, поскольку мы можем фиксировать любое k-линейное сечение отображения $H^1(C, \mathcal{A}) \to H^1(C, \mathcal{A}/\mathcal{A}_0)$, и затем продолжить его для любой S в (4.31) с помощью тензорного произведения с тождественным отображением на I над k.

Доказательство второго утверждения похоже на доказательство предложения 22. А именно, пусть $\dim_k H < \infty$. Имеем $H^1(C, \mathcal{A}_0) = \varprojlim_{j>0} H^1(C, \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_j)$ по следствию 12, и $\dim_k H^1(C, \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_j) < \infty$. Гомоморфизм $i : H \to H^1(C, \mathcal{A}_0)$ дает систему согласованных гомоморфизмов $i_j : H \to H^1(C, \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_j)$. Обозначим через K_j ядро i_j, и через C_j — коядро i_j. Тогда мы получим точную последовательность проективных систем k-векторных пространств:

$$0 \longrightarrow (K_j) \longrightarrow (H_j) \longrightarrow H^1(C, \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_j) \longrightarrow (C_j) \longrightarrow 0,$$

где $H_j = H$ для всех j. Так как $\dim_k K_j < \infty$ для всех j, системы (K_j), (H_j) удовлетворяют МЛ-условию. Тогда по лемме 31 получаем, что

$$H^1(C, \mathcal{A}_0)/H \simeq \varprojlim_{j \in \mathbb{N}} C_j,$$

где $\dim_k C_j < \infty$ для всех j. Обозначим через V k-векторное пространство $H^1(C, \mathcal{A}_0)/H$.

Имеем $V^*_{cont} := \mathrm{Hom}_{k,cont}(V,k) = \varinjlim_j C^*_j$ — k-векторное пространство с дискретной топологией. Теперь определим

$$T := \widehat{Sym}_k(V^*_{cont}) = \prod_{l=0}^{\infty} S^l(V^*_{cont}).$$

T — топологическая локальная k-алгебра с максимальным идеалом $J = \prod_{l=1}^{\infty} S^l(V^*_{cont})$. Топология на T — линейная топология произведения. Ясно, что J — максимальный идеал определения, и что T — допустимое кольцо (и более того, J-адическое) в смысле [62, 0.7.1]. Следовательно, мы можем определить

$$\overline{\mathbf{Pic}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Spf}(T).$$

Снова, как в предложении 22, $\overline{\mathbf{Pic}}$ — формальная группа с групповым законом $v \longmapsto v \otimes 1 + 1 \otimes v$, $v \in V^*_{cont}$.

Для любой $S = \mathrm{Spec}\, B \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ теперь имеем

$$\mathrm{Hom}_{form.sch.}(S, \overline{\mathbf{Pic}}) = \mathrm{Hom}_{k-alg,cont}(T,B) = \mathrm{Hom}_{k,cont}(V^*_{cont}, I) = V \otimes_k I = \overline{Pic}(S).$$

Предложение доказано.

Следствие 19. *Пусть C — проективная кривая, $\dim_k H < \infty$. Тогда функтор $\widehat{Pic}_{\mathring{X}_\infty}$ про-представим (неканонически) формальной групповой схемой $\overline{\mathbf{Pic}} \times_k \widehat{\mathbf{Br}}_{\mathring{X}_\infty}$. Такие разложения находятся во взаимно-однозначном соответствии с функториальным (по S) расщеплением последовательности (4.31).*

4.2.4 Теорема об обращении в ноль

В этом разделе доказывается теорема об обращении в ноль, необходимая для теорем представимости в следующих разделах.

Теорема 29. *Пусть $\pi : X \to S$ — собственный морфизм схем, слои которого неприводимы. Тогда $R^1\pi_*\mathbb{Z} = 0$.*

Доказательство Предположим, что пучок $R^1\pi_*\mathbb{Z} \neq 0$. Тогда существует точка $s \in S$, такая что росток $(R^1\pi_*\mathbb{Z})_s \neq 0$. По определению,

$$(R^1\pi_*\mathbb{Z})_s = \varinjlim_U H^1(\pi^{-1}U, \mathbb{Z}) = \varinjlim_U \varinjlim_{\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}} \check{H}^1(\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}, \mathbb{Z}),$$

где U пробегает все открытые окрестности точки s, т.е, $S \supset U \supset s$, и $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ пробегает все открытые покрытия $\pi^{-1}(U)$, т.е., $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = \pi^{-1}(U)$. Следовательно, существует фиксированное открытое U, фиксированное покрытие $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ и фиксированный элемент $c \in \check{Z}^1(\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}, \mathbb{Z})$, такой что образ этого элемента c в группе $(R^1\pi_*\mathbb{Z})_s$ не равен нулю.

Определим множество

$$I_0 = \{\alpha \in I \mid U_\alpha \cap \pi^{-1}(s) \neq \emptyset\}.$$

Тогда $\bigcup_{\alpha\in I_0} U_\alpha \supset \pi^{-1}(s)$. Определим замкнутое подмножество $F = X \setminus \bigcup_{\alpha\in I_0} U_\alpha$. Тогда имеем $F \cap \pi^{-1}(s) = \emptyset$. Так как π — собственный морфизм, $\pi(F)$ — замкнутое подмножество в S, и $s \notin \pi(F)$.

Получаем, что множество $V = U \cap (S \setminus \pi(F))$ — открытая окрестность точки s. Имеем $s \in V \subset U$. Далее, множество $\{V_\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} U_\alpha \cap \pi^{-1}(V)\}_{\alpha \in I_0}$ является открытым покрытием множества $\pi^{-1}(V)$. Действительно, пусть точка $x \in \pi^{-1}(V)$, и предположим, что $x \notin U_\alpha$ для любого $\alpha \in I_0$. Тогда $x \in X \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in I_0} U_\alpha = F$. Следовательно, $\pi(x) \in \pi(F) \cap V = \pi(F) \cap (U \cap (S \setminus \pi(F))) = \emptyset$, противоречие.

Но для любого подмножества $J \in I_0$ мы имеем теперь $\bigcap\limits_{\alpha \in J} V_\alpha \neq \emptyset$, поскольку $\bigcap\limits_{\alpha \in J} V_\alpha \cap \pi^{-1}(s) \neq \emptyset$, так как $\pi^{-1}(s)$ неприводима. Следовательно, $\check{H}^1(\{V_\alpha\}_{\alpha \in I_0}, \mathbb{Z}) = 0$. Покрытие $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I_0}$ — утончение покрытия $\{U_\alpha \cap \pi^{-1}(V)\}_{\alpha \in I}$. Следовательно, образ элемента $c \in \check{Z}^1(\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}, \mathbb{Z})$ в группе $\check{H}^1(\{V_\alpha\}_{\alpha \in I_0}, \mathbb{Z})$, и следовательно в группе $(R^1\pi_*\mathbb{Z})_s$, равен нулю. Противоречие.

4.2.5 Представимость функтора Pic_{X_∞}

Пусть $\overset{\circ}{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ — риббон над полем k. Тогда определено локально окольцованное пространство $X_\infty = (C, \mathcal{A}_0)$.

Определение 72. Обозначим через $\mathbf{Pic}_{X_\infty}$ пучок на большом сайте Зарисского схемы $\mathrm{Spec}\, k$, ассоциированный с предпучком $S \mapsto Pic_{X_\infty}(S)$ (Другими словами, для любой нетеровой схемы S над k мы рассматриваем все схемно-теоретические открытые аффинные покрытия S, и берем пучок, ассоциированный с предпучком $S' \mapsto Pic_{X_\infty}(S')$ относительно этих покрытий.).

Замечание 62. Из определений 72 и 68 нетрудно видеть, что для любой нетеровой схемы S

$$\mathbf{Pic}_{X_\infty}(S) = H^0(S, R^1\pi_*\mathcal{A}^*_{S,0}),$$

где $\pi : C \times_k S \to S$ — морфизм проекции.

Замечание 63. Если кривая C собственна над k, то локально окольцованное пространство $X_\infty = (C, \mathcal{A}_0)$ является слабо нетеровой формальной схемой в смысле работы [89]. В этом случае для поля k произвольной характеристики Липман доказал в [89, section 2.5], что fpqc-пучок, ассоциированный с модифицированным функтором Пикара локально окольцованного пространства X_∞, является k-групповой схемой.

При предположениях, что $\mathrm{char}\, k = 0$, поле k алгебраически замкнуто, и C — проективная неприводимая кривая, мы дадим простое доказательство того, что пучок $\mathbf{Pic}_{X_\infty}$ является k-групповой схемой. Мы изучим также структуру этой k-групповой схемы. Заметим, что из существования этой k-групповой схемы будет автоматически следовать, что предпучок $\mathbf{Pic}_{X_\infty}$ — пучок на большом fpqc-сайте схемы $\mathrm{Spec}\, k$.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма и следствия из нее.

Лемма 40. *Пусть $\overset{\circ}{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ — риббон над полем k. Пусть S — аффинная схема над полем k, и $\mathcal{M}$ — когерентный пучок на S. Имеем*

$$H^h(C \times_k S, \mathcal{A}_i \widehat{\boxtimes}_k \mathcal{M}) \simeq \varprojlim_{j>i} H^h(C \times_k S, (\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_j) \boxtimes_k \mathcal{M}) \simeq \varprojlim_{j>i} (H^h(C, \mathcal{A}_i/\mathcal{A}_j) \otimes_k H^0(S, \mathcal{M})),$$

$$H^q(C \times_k S, \mathcal{A}_i \widehat{\boxtimes}_k \mathcal{M}) = 0$$

для любых $i \in \mathbb{Z}$, $h \leq 1$, $q > 1$.

Доказательство Имеется следующий аналог формулы Кюннета:

$$p_*((\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+h})\boxtimes_k\mathcal{M}) \simeq (\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+h}) \otimes_k H^0(S,\mathcal{M}), \tag{4.32}$$

где $p : C\times_k S \to C$ — проекция. Действительно, если U — аффинное открытое множество в C, и $\tau_S : C\times_k S \to S$ — проекция, то имеются естественные изоморфизмы

$$p_*((\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+h})\boxtimes_k\mathcal{M})(U) \simeq p^*(\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+h})(U\times_k S)\otimes_{\mathcal{O}_{U\times_k S}} \tau_S^*\mathcal{M}(U\times_k S) \simeq$$

$$\simeq (\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+h})(U)\otimes_k H^0(S,\mathcal{M}),$$

поскольку $(\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+h})$, $\mathcal{M}$ — когерентные пучки модулей на X_{h-1}, S соответственно (см. предложение 7). Эти изоморфизмы, очевидно, согласованы с гомоморфизмами ограничения, соответствующими вложениям аффинных множеств $U'\subset U$ для обоих пучков $p_*((\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+h})\boxtimes_k\mathcal{M})$ и $(\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+h})\otimes_k H^0(S,\mathcal{M})$. Следовательно, пучки из формулы (4.32) изоморфны.

Так как p — аффинный морфизм, имеем

$$H^q(C\times_k S,(\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+h})\boxtimes_k\mathcal{M}) \simeq H^q(C,\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+h})\otimes_k H^0(S,\mathcal{M})$$

для всех q (см. [27, ch.III, ex.8.1]).

Для всех i,h,k с $h\le k$ имеется сюръективный морфизм пучков

$$(\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+k})\boxtimes_k\mathcal{M} \to (\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+h})\boxtimes_k\mathcal{M},$$

поскольку $(\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+k}) \to (\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+h})$ — сюръективный морфизм пучков на C.

Для любого аффинного U в $C\times_k S$ отображения

$$\Gamma(U,(\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+k})\boxtimes_k\mathcal{M}) \to \Gamma(U,(\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+h})\boxtimes_k\mathcal{M})$$

сюръективны, поскольку $(\mathcal{A}_l/\mathcal{A}_m)\boxtimes_k\mathcal{M}$ — когерентные пучки модулей для всех $l<m$ на $X_{m-l-1}\times_k S$. По той же причине имеем $H^q(U,(\mathcal{A}_l/\mathcal{A}_m)\boxtimes_k\mathcal{M})=0$ для всех $q>0$.

Наконец, так как C — проективная кривая, проективные системы

$$\{H^q(C,\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+h})\otimes_k H^0(S,\mathcal{M})\}_{h\in\mathbb{N}}, \quad q\ge 0$$

удовлетворяют МЛ-условию. Таким образом, в силу [64, ch. 0, prop.13.3.1] имеем

$$H^q(C\times_k S,\mathcal{A}_i\widehat{\boxtimes}_k\mathcal{M}) \simeq \varprojlim_{j>i} H^q(C\times_k S,(\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_j)\boxtimes_k\mathcal{M}) \simeq \varprojlim_{j>i}(H^q(C,\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_j)\otimes_k H^0(S,\mathcal{M}))$$

для $q\ge 1$.

Для $q=0$ это следует из определения пучка $\mathcal{A}_i\widehat{\boxtimes}_k\mathcal{M}$.

Следствие 20. *Для риббона $\mathring{X}_\infty=(C,\mathcal{A})$ над полем k, для аффинной нетеровой схемы S над полем k, и для когерентного на S пучка $\mathcal{M}$ имеем*

$$H^1(C\times_k S,(\mathcal{A}/\mathcal{A}_0)\widehat{\boxtimes}_k\mathcal{M}) \simeq H^1(C,\mathcal{A}/\mathcal{A}_0)\otimes_k H^0(S,\mathcal{M})$$

$$H^q(C\times_k S,\mathcal{A}\widehat{\boxtimes}_k\mathcal{M}) = H^q(C\times_k S,(\mathcal{A}/\mathcal{A}_0)\boxtimes_k\mathcal{M})=0$$

для $q\ge 2$.

Доказательство Доказательство очевидно, поскольку когомологии коммутируют с $\varinjlim$ на нетеровых схемах.

Следствие 21. *Для риббона $\mathring{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ над алгебраически замкнутым полем k с проективной неприводимой кривой C, для аффинной схемы S над полем k существует вложение k-алгебр*

$$H^0(C \times_k S, \mathcal{O}_{C \times_k S}) \longrightarrow H^0(C \times_k S, \mathcal{A}_{S,0}),$$

расщепляющее естественное отображение k-алгебр

$$H^0(C \times_k S, \mathcal{A}_{S,0}) \longrightarrow H^0(C \times_k S, \mathcal{O}_{C \times_k S}).$$

Доказательство По формуле (4.32), и так как $H^0(C, \mathcal{O}_C) \simeq k$, имеем

$$H^0(C \times_k S, \mathcal{O}_{C \times_k S}) \simeq H^0(C, \mathcal{O}_C) \otimes_k H^0(S, \mathcal{O}_S) \simeq H^0(S, \mathcal{O}_S).$$

Теперь, поскольку имеются вложения

$$H^0(S, \mathcal{O}_S) \hookrightarrow H^0(C, \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_j) \otimes_k H^0(S, \mathcal{O}_S) = H^0(C \times_k S, \mathcal{A}_{S,j}/\mathcal{A}_{S,0})$$

для всех $j > 0$, получаем вложение

$$H^0(S, \mathcal{O}_S) \hookrightarrow H^0(C \times_k S, \mathcal{A}_{S,0})$$

для любой схемы S по лемме 40.

Предложение 24. *Пусть $\mathring{X}_\infty = (C, \mathcal{A})$ — риббон над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0, и C — неприводимая проективная кривая. Тогда*

1. *Пучок $\mathbf{Pic}_{X_\infty}$ — групповая схема.*

2. *Имеется следующая точная последовательность групповых схем:*

$$0 \longrightarrow \mathbb{V} \longrightarrow \mathbf{Pic}_{X_\infty} \xrightarrow{\phi} \mathbf{Pic}_C \longrightarrow 0, \tag{4.33}$$

где $\mathbb{V}$ — аффинная групповая схема, и $\mathbf{Pic}_C$ — многообразие Пикара кривой C, чья связная компонента единицы — обобщенный якобиан кривой C. Существует сечение отображения ϕ из последовательности (4.33) над любой аффинной подсхемой U схемы $\mathbf{Pic}_C$.

Доказательство Поскольку $\operatorname{char} k = 0$, мы можем использовать ряды для $exp(z)$ и $log(1 + z)$.

Для любой аффинной нетеровой схемы S имеются точные последовательности пучков на $C \times_k S$:

$$0 \to \mathcal{A}_{S,1} \stackrel{exp}{\to} \mathcal{A}^*_{S,0} \to \mathcal{O}^*_{C \times_k S} \to 1.$$

Следовательно, используя лемму 40 и следствие 21 этой леммы, мы получаем следующую точную последовательность

$$0 \to H^1(C, \mathcal{A}_1) \widehat{\otimes}_k H^0(S, \mathcal{O}_S) \to Pic_{X_\infty}(S) \to Pic_C(S) \to 0, \tag{4.34}$$

где $H^1(C, \mathcal{A}_1) \widehat{\otimes}_k H^0(S, \mathcal{O}_S) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{j>1} (H^1(C, \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_j) \otimes_k H^0(S, \mathcal{O}_S))$, и

$$S \mapsto Pic_C(S) = H^1(C \times_k S, \mathcal{O}^*_{C \times_k S})$$

— функтор Пикара кривой C.

Определим

$$H \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{k,cont}(H^1(C,\mathcal{A}_1),k) = \varinjlim_{j>1}(H^1(C,\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_j))^*,$$

и $\mathbb{V} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Spec}(Sym_k(H))$ — аффинная k-групповая схема, где $Sym_k(H) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i(H)$, и групповой закон задан с помощью отображения $v \mapsto v\otimes 1 + 1\otimes v$, $v\in H$.

Для любой аффинной нетеровой схемы S над k

$$\mathrm{Hom}_{sch}(S,\mathbb{V}) = \mathrm{Hom}_{k-alg}(Sym_k(H), H^0(S,\mathcal{O}_S)) = \mathrm{Hom}_k(H, H^0(S,\mathcal{O}_S)) = \\ \varprojlim_{j>1}(H^1(C,\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_j)\otimes_k H^0(S,\mathcal{O}_S)) = H^1(C,\mathcal{A}_1)\widehat{\otimes}_k H^0(S,\mathcal{O}_S). \quad (4.35)$$

Тогда из точной последовательности (4.34) вытекает следующая точная последовательность групп, функториальная по S:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{sch}(S,\mathbb{V}) \longrightarrow Pic_{X_{\infty}}(S) \xrightarrow{\phi} Pic_C(S) \to 0, \quad (4.36)$$

Пучки (в сайте Зарисского), ассоциированные с первым и последним предпучками (или функторами) в последовательности (4.36) являются k-групповыми схемами, поскольку для первого пучка это верно по построению, а последний пучок — схема Пикара $\mathbf{Pic}_C$ кривой C (см. [61]).

Представимость функтора $\mathbf{Pic}_C$ означает, что существует универсальный объект λ (расслоение Пуанкаре на $C\times_k \mathbf{Pic}_C$), соответствующий тождественному отображению схемы $\mathbf{Pic}_C$ в $\mathrm{Hom}(\mathbf{Pic}_C, \mathbf{Pic}_C) \simeq \mathbf{Pic}_C(\mathbf{Pic}_C)$ (мы отождествляем здесь обозначения для представимого функтора и представляющей схемы). По построению ассоциированного пучка, λ задается по открытому аффинному покрытию $\{U_{\alpha}\}$ схемы $\mathbf{Pic}_C$, и линейным расслоениям $\mathcal{L}_{\alpha}$ на $C\times_k U_{\alpha}$ ($\mathcal{L}_{\alpha}$, $\mathcal{L}_{\beta}$ изоморфны на $C\times_k (U_{\alpha}\cap U_{\beta})$ с точностью до подкрутки на линейное расслоение на $U_{\alpha}\cap U_{\beta}$). Функториальное отображение $\mathrm{Hom}(\cdot, U_{\alpha}) \to \mathbf{Pic}_C(\cdot)$ задается вложением $U_{\alpha}\subset \mathbf{Pic}_C$.

Так как в силу (4.36) расслоения $\mathcal{L}_{\alpha}$ на $C\times_k U_{\alpha}$ можно поднять до линейных расслоений $\widetilde{\mathcal{L}_{\alpha}}$ на $X_{\infty,U_{\alpha}}$, расслоения $\widetilde{\mathcal{L}_{\alpha}}$ порождают морфизмы функторов $s_{\alpha} : \mathrm{Hom}(\cdot, U_{\alpha}) \to \mathbf{Pic}_{X_{\infty}}(\cdot)$, которые, в композиции с $\phi : \mathbf{Pic}_{X_{\infty}} \to \mathbf{Pic}_C$, задают вложение $U_{\alpha}\subset \mathbf{Pic}_C$.

Таким образом, как функтор мы можем разложить $P_{\alpha} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{Pic}_{X_{\infty}} \times_{\mathbf{Pic}_C} U_{\alpha} \subset \mathbf{Pic}_{X_{\infty}}$ как $\mathbb{V}\times U_{\alpha}$, с помощью действия $\mathbb{V}$ на P_{α}, наследуемого из групповой структуры ($P_{\alpha} \to \mathbb{V}\times U_{\alpha}$ через $x\mapsto (x - s_{\alpha}\phi(x), \phi(x))$, $\mathbb{V}\times U_{\alpha} \to P_{\alpha}$ через $(x', x_0) \mapsto x' + s_{\alpha}(x_0)$).

Итак, функтор $\mathbf{Pic}_{X_{\infty}}$ имеет покрытие $\{P_{\alpha}\}$ открытыми представимыми функторами, поэтому он представим.

Рассмотрим любую аффинную подсхему U схемы $\mathbf{Pic}_C$. Тогда, ограничивая расслоение Пуанкаре из $C\times_k \mathbf{Pic}_C$ на $U\times_k \mathbf{Pic}_C$, и используя те же рассуждения что выше, легко видеть, что существует расщепление отображения ϕ из последовательности (4.33) над подсхемой U схемы $\mathbf{Pic}_C$. Предложение доказано.

Замечание 64. Предположим, что выполняется следующее свойство: $\tau_{S*}(\mathcal{A}_{S,0}) = \mathcal{O}_S$, где $\tau_S : X_{\infty,S}\to S$ — структурный морфизм (между локально окольцованными пространствами). Это условие выполняется, например, если риббон $\mathring{X}_{\infty}$ происходит из поверхности и обильного дивизора Картье, поскольку в этом случае $H^0(C, \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_i) = 0$ для всех $i\geq 1$ (см. замечание 49 и теорему 28), откуда, используя точную последовательность

$$0\to \mathcal{A}_{S,1}\to \mathcal{A}_{S,0}\to \mathcal{O}_{C\times_k S}\to 0,$$

лемму 40 и следствие 21, получаем $\tau_{S*}(\mathcal{A}_{S,0}) = \mathcal{O}_S$.

Теперь, поскольку кривая C имеет k-рациональную точку, существует сечение $\sigma_S : S \to X_{\infty,S}$ морфизма τ_S. Тогда, используя стандартные аргументы (см., например, [61]), мы получаем в этом случае следующее описание функтора $\mathbf{Pic}_{X_\infty}$:

$$\mathbf{Pic}_{X_\infty}(S) \simeq Pic_{X_\infty}(S)/Pic(S) \simeq \{\mathcal{L} \in Pic_{X_\infty}(S)| \quad \sigma_S^*(\mathcal{L}) \simeq \mathcal{O}_S\}.$$

4.2.6 Представимость функтора Пикара риббона $\mathrm{Pic}_{\mathring{X}_\infty}$

В этом разделе доказываются основные результаты о представимости функтора Пикара риббона $\mathrm{Pic}_{\mathring{X}_\infty}$. Эти результаты доказываются при дополнительных условиях на риббоны. А именно, предполагается, что рассматриваются риббоны над полем k с неприводимой проективной кривой C и либо с гладкой точкой, либо удовлетворяющие условию (**). В этом же разделе определяются важные дополнительные функторы- аналоги функтора Пикара, и доказывается их представимость.

Пусть C — неприводимая проективная кривая над алгебраически замкнутым полем k характеристики нуль, и $\mathring{X}_\infty$ — риббон над k с подлежащим топологическим пространством C и либо с гладкой точкой, либо удовлетворяющий условию $(**)$ из определения 67. Рассмотрим риббон $\mathring{X}_{\infty,S}$ для некоторой замены базы $S \to \mathrm{Spec}\, k$.

Пусть $\mathcal{F} \in Pic(\mathring{X}_{\infty,S})$. Определим пучок порождающих сечений $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ (пучок множеств) по правилу

$$\mathcal{B}(\mathcal{F})(U) = \{ \text{ сечения } \lambda \in \mathcal{F}(U) \text{ с } \mathcal{F}|_U = \mathcal{A}|_U \cdot \lambda\},$$

где U открыто в $C \times_k S$. Имеем $\mathcal{B}(\mathcal{F})(U) = \varnothing$ или (после выбора одной порождающей) $\mathcal{B}(\mathcal{F})|_U \simeq \mathcal{A}^*|_U$. Таким образом, $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ — торсор над пучком групп $\mathcal{A}^*$.

Напомним, что для любого топологического пространства Y мы обозначили через $\mathbb{Z}_Y$ пучок локально постоянных функций на Y со значениями в $\mathbb{Z}$.

Определение 73. Пусть $\mathcal{B}$ — категория аффинных нетеровых k-схем. Определим контравариантный функтор $\widetilde{Pic}'_{\mathring{X}_\infty}$ из $\mathcal{B}$ в категорию абелевых групп:

$$\widetilde{Pic}'_{\mathring{X}_\infty}(S) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\text{группа классов изоморфных пар } (\mathcal{F}, d)\},$$

где $\mathcal{F} \in Pic(\mathring{X}_{\infty,S})$, и $d : \mathcal{B}(\mathcal{F}) \to \mathbb{Z}_{C\times_k S}$ — морфизм пучков множеств, такой что

$$d(a\lambda)(x) = \mathbf{ord}_{\mathcal{A}}(a)(x) + d(\lambda)(x)$$

для всех $a \in \mathcal{A}_S^*(U)$, $\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{F})(U)$, открытых $U \subset C \times_k S$ и $x \in U$. Две пары $(\mathcal{F}, d)$ и $(\mathcal{F}', d')$ изоморфны, если существует изоморфизм пучков $\mathcal{A}_S$-модулей $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$, согласованный с d, d'. Кроме того,

$$(\mathcal{F}_1, d_1) \otimes (\mathcal{F}_2, d_2) = (\mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{A}_S} \mathcal{F}_2, d),$$

где $d(\lambda_1 \otimes \lambda_2) = d_1(\lambda_1) + d_2(\lambda_2)$.

Пример 22. Любой локально свободный пучок ранга 1 на $\mathring{X}_\infty$ обладает фильтрацией (см. пример 21), т.е. этот пучок — пучок без кручения на $\mathring{X}_\infty$ в смысле определения 51. Замена базы дает некоторый пучок $\mathcal{F} \in Pic(\mathring{X}_{\infty,S})$, который также обладает фильтрацией. Определим морфизм порядка $d : \mathcal{B}(\mathcal{F}) \to W_{C\times_k S}(\mathbb{Z})$ (где $W_{C\times_k S}$ — пучок всех функций на $C \times_k S$ со значениями в $\mathbb{Z}$) по правилу

$$d(\lambda)(x) = \max\{j| \quad \lambda|_{U_s} \in (\mathcal{F}_s)_{x,j}\},$$

где $\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{F})(U)$ для открытого $U \subset C \times_k S$, $x \in U$, $s = \tau(x)$, U_s — открытое множество в C_s, которое получается из U заменой базы $s \to S$, $\mathcal{F}_s$ — пучок после замены базы.

Легко проверить, что d — морфизм пучков множеств. Более того, согласно разделу 4.2.1 он пропускается через подпучок $\mathbb{Z}_{C\times_k S} \subset W_{C\times_k S}$. Кроме того, имеем

$$d(a\lambda)(x) = \mathrm{ord}(a)(x) + d(\lambda)(x)$$

для всех $a \in \mathcal{A}_S^*(U)$, поскольку ord — морфизм пучков групп по предложению 19. Таким образом, $(\mathcal{F}, d) \in \widetilde{Pic}'(\overset{\circ}{X}_{\infty,S})$.

Определим еще пучок групп на $C \times_k S$ по правилу:

$$\Im_S \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Ker}\,(\mathbf{ord}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}_S^* \to \mathbb{Z}_{C\times_k S}) = \mathcal{A}_{S,0}^* \coprod_{\mathcal{N}_S \boxtimes_k \mathcal{A}_0} \mathcal{N}_S \boxtimes_k \mathcal{A}, \tag{4.37}$$

где последнее равенство следует из предложения 19.

Определение 74. Определим контравариантный функтор $\widetilde{Pic}_{\overset{\circ}{X}_\infty}$ из $\mathcal{B}$ в категорию абелевых групп:

$$\widetilde{Pic}_{\overset{\circ}{X}_\infty}(S) \overset{\mathrm{def}}{=} H^1(C \times_k S, \Im_S),$$

где отображения ограничения — композиции естественных отображений

$$H^1(C \times_k S, \Im_S) \to H^1(C \times_k S, (id \times f)_*(\Im_{S'})) \to H^1(C \times_k S', \Im_{S'}),$$

где второе отображение — вложение из спектральной последовательности Картана-Лере для морфизма $f : S' \to S$.

Имеется очевидный морфизм функторов

$$\widetilde{Pic}_{\overset{\circ}{X}_\infty} \longrightarrow \widetilde{Pic}'_{\overset{\circ}{X}_\infty},$$

такой что для любой $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ имеется вложение абелевых групп:

$$\widetilde{Pic}_{\overset{\circ}{X}_\infty}(S) \hookrightarrow \widetilde{Pic}'_{\overset{\circ}{X}_\infty}(S).$$

Предложение 25. *Предположим, что риббон $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_\infty$ удовлетворяет условию (**). Тогда имеется естественный изоморфизм функторов*

$$\widetilde{Pic}_{\overset{\circ}{\mathrm{X}}_\infty} \simeq \widetilde{Pic}'_{\overset{\circ}{\mathrm{X}}_\infty}.$$

Доказательство Пусть $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$. Пучок автоморфизмов пары $(\mathcal{F}, d) \in \widetilde{Pic}'_{\overset{\circ}{X}_\infty}(S)$ (т.е., пучок автоморфизмов $\mathcal{A}$-модуля $\mathcal{F}$, которые сохраняют функцию d) равен пучку $\Im_S$. Кроме того, по замечанию 52, пара $(\mathcal{F}, d)$ изоморфна паре $(\mathcal{A}_S, \mathrm{ord})$ локально на $C \times_k S$. Следовательно, используя стандартные рассуждения со скрученными формами (см., например, [92], ch.III, §4), мы получим утверждение предложения.

Определение 75. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{Pic}}_{\overset{\circ}{X}_\infty}$ пучок на большом сайте Зарисского схемы $\mathrm{Spec}\, k$, ассоциированный с предпучком $S \mapsto \widetilde{Pic}_{\overset{\circ}{X}_\infty}(S)$.

Аналогично, обозначим через $\mathbf{Pic}_{\overset{\circ}{X}_\infty}$ пучок на большом сайте Зарисского схемы $\mathrm{Spec}\, k$, ассоциированный с предпучком $S \mapsto Pic_{\overset{\circ}{X}_\infty}(S)$.

Замечание 65. Из определений 75, 74 и 68 следует, что для любой нетеровой схемы S

$$\widetilde{\mathbf{Pic}}_{\overset{\circ}{X}_\infty}(S) = H^0(S, R^1\pi_*\Im_S) \qquad , \qquad \mathbf{Pic}_{\overset{\circ}{X}_\infty}(S) = H^0(S, R^1\pi_*\mathcal{A}_{S,}^*),$$

где $\pi : C \times_k S \to S$ — морфизм проекции.

В виду теоремы 27, предложений 18 и 25, важно доказать, что пучок $\widetilde{\mathbf{Pic}}_{\mathring{X}_\infty}$ является k-групповой схемой. Наша первая цель — доказать это при некоторых учловиях, а затем мы сравним пучок $\widetilde{\mathbf{Pic}}_{\mathring{X}_\infty}$ с пучком $\mathbf{Pic}_{\mathring{X}_\infty}$.

Теорема 30. *Пусть* $\mathring{\mathrm{X}}_\infty$ *— риббон, удовлетворяющий условиям, сформулированным в начале раздела. Предположим, что*

$$\mathrm{Coker}(H^0(C,\mathcal{A}) \longrightarrow H^0(C,\mathcal{A}/\mathcal{A}_0)) = \mathcal{H}^1(\mathbb{A}) = 0. \tag{4.38}$$

Тогда пучок $\widetilde{\mathbf{Pic}}_{\mathring{\mathrm{X}}_\infty}$ *— формальная групповая схема, которая изоморфна (неканонически) произведению* $\mathbf{Pic}_{X_\infty} \times_k \widehat{\mathbf{Br}}_{\mathring{\mathrm{X}}_\infty}$.

Замечание 66. Условие 4.38 из теоремы не является слишком ограниченным: оно выполняется, например, для риббонов, происходящих из нормализаций спектральных поверхностей колец коммутирующих ДО.

Доказательство Достаточно доказать, что для любой аффинной нетеровой схемы S над k следующая последовательность точна и расщепима (см. следствие 20 для объяснения последнего члена):

$$0 \longrightarrow H^1(C\times_k S, \mathcal{A}^*_{S,0}) \longrightarrow H^1(C\times_k S, \Im_S) \longrightarrow H^1(C,\mathcal{A}/\mathcal{A}_0)\otimes_k H^0(S,\mathcal{N}_S) \longrightarrow 0, \tag{4.39}$$

и расщепление функториально по S. (Напомним, что когерентный пучок $\mathcal{N}_S$ — нильрадикал схемы S). Действительно, по предложению 24 пучок Зарисского, ассоциированный с предпучком $S\mapsto H^1(C\times_k S, \mathcal{A}^*_0)$, является схемой $\mathbf{Pic}_{X_\infty}$. По замечанию 59 имеем

$$\mathrm{Hom}_{form.sch.}(S, \widehat{\mathbf{Br}}_{\mathring{X}_\infty}) = H^1(C,\mathcal{A}/\mathcal{A}_0)\otimes_k H^0(S,\mathcal{N}_S).$$

С другой стороны, предпучок $S\mapsto \mathrm{Hom}_{form.sch.}(S,\widehat{\mathbf{Br}}_{\mathring{X}_\infty})$ является пучком в топологии Зарисского, поскольку это следует из [62, 1.10.4.6] и пучковых свойств $\mathcal{O}_U$.

Теперь докажем, что (4.39) точна. Эта последовательность — часть длинной точной когомологической последовательности, происходящей из короткой точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^*_{S,0} \longrightarrow \Im_S \longrightarrow (\mathcal{A}/\mathcal{A}_0)\boxtimes_k \mathcal{N}_S \longrightarrow 0.$$

Покажем, что последовательность (4.39) точна слева благодаря нашему предположению (4.38). Достаточно показать, что отображение

$$H^0(C\times_k S, \mathcal{A}\widehat{\boxtimes}_k\mathcal{N}_S) \longrightarrow H^0(C\times_k S, (\mathcal{A}/\mathcal{A}_0)\boxtimes_k\mathcal{N}_S)$$

сюръективно (см. формулу (4.37)), или что отображения

$$H^0(C\times_k S, \mathcal{A}_i\widehat{\boxtimes}_k\mathcal{N}_S) \longrightarrow H^0(C\times_k S, (\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_0)\boxtimes_k\mathcal{N}_S)$$

сюръективны для всех $i<0$.

Для всех $i<0$, $h\geq 0$ определим

$$K_{i,h} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Coker}(H^0(C,\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_h) \longrightarrow H^0(C,\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_0)).$$

Имеются следующие точные последовательности:

$$0\to H^0(C,\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_h) \to H^0(C,\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_h) \xrightarrow{\phi_h} H^0(C,\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_0) \to K_{i,h} \to 0, \tag{4.40}$$

$$0 \to H^0(C, \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_h) \otimes_k H^0(S, \mathcal{N}_S) \to H^0(C, \mathcal{A}_i/\mathcal{A}_h) \otimes_k H^0(S, \mathcal{N}_S) \to \\ H^0(C, \mathcal{A}_i/\mathcal{A}_0) \otimes_k H^0(S, \mathcal{N}_S) \to K_{i,h} \otimes_k H^0(S, \mathcal{N}_S) \to 0. \quad (4.41)$$

Так как C — проективная кривая, проективные системы

$$\{H^0(C, \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_h)\}_{h\in\mathbb{N}}, \qquad \{H^0(C, \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_h) \otimes_k H^0(S, \mathcal{N}_S)\}_{h\in\mathbb{N}},$$
$$\{H^0(C, \mathcal{A}_i/\mathcal{A}_h)\}_{h\in\mathbb{N}}, \qquad \{H^0(C, \mathcal{A}_i/\mathcal{A}_h) \otimes_k H^0(S, \mathcal{N}_S)\}_{h\in\mathbb{N}}$$

удовлетворяют МЛ-условию. Следовательно, по лемме 31 последовательности проективных пределов также точны, т.е., используя лемму 40, получаем точные последовательности

$$0 \to H^0(C, \mathcal{A}_0) \to H^0(C, \mathcal{A}_i) \to H^0(C, \mathcal{A}_i/\mathcal{A}_0) \to \varprojlim_{h\in\mathbb{N}} K_{i,h} \to 0, \qquad (4.42)$$

$$0 \to H^0(C \times_k S, \mathcal{A}_0 \widehat{\boxtimes}_k \mathcal{N}_S) \to H^0(C \times_k S, \mathcal{A}_i \widehat{\boxtimes}_k \mathcal{N}_S) \to \\ H^0(C \times_k S, (\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_0) \boxtimes_k \mathcal{N}_S) \to \varprojlim_h (K_{i,h} \otimes_k H^0(S, \mathcal{N}_S)) \to 0. \quad (4.43)$$

Таким образом, наше утверждение будет следовать из того, что $K_{i,h} = 0$.

Во-первых, заметим, что $K_i \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{h\in\mathbb{N}} K_{i,h} = 0$. Действительно, по предположению (4.38) и из последовательности (4.42) имеем

$$0 = \mathrm{Coker}(H^0(C, \mathcal{A}) \to H^0(C, \mathcal{A}/\mathcal{A}_0)) = \varinjlim_i K_i.$$

Рассмотрим следующую точную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 \to & H^0(C, \mathcal{A}_0) & \to & & H^0(C, \mathcal{A}_i) & \to & H^0(C, \mathcal{A}_i/\mathcal{A}_0) & \to & K_i & \to 0 \\
 & \| & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & H^0(C, \mathcal{A}_0) & \to & & H^0(C, \mathcal{A}_{i-1}) & \to & H^0(C, \mathcal{A}_{i-1}/\mathcal{A}_0) & \to & K_{i-1} & \to 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & & & & H^0(C, \mathcal{A}_{i-1}/\mathcal{A}_i) & = & H^0(C, \mathcal{A}_{i-1}/\mathcal{A}_i) & & &
\end{array}$$

Диаграммный поиск показывает, что отображение $K_i \to K_{i-1}$ инъективно. Следовательно, должно быть $K_i = 0$ для всех $i < 0$.

Теперь, если $K_{i,h} \neq 0$ для некоторых $h > 0$, то это означало бы, что $K_i \neq 0$. Действительно, имеем $\phi_{h+1}(H^0(C, \mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{h+1})) \subset \phi_h(H^0(C, \mathcal{A}_i/\mathcal{A}_h))$ для всех h (см. последовательность (4.40)). Таким образом, если $K_{i,h} \neq 0$, то $\phi_h(H^0(C, \mathcal{A}_i/\mathcal{A}_h)) \neq H^0(C, \mathcal{A}_i/\mathcal{A}_0)$, и прообраз в $H^0(C, \mathcal{A}_i/\mathcal{A}_0)$ произвольного ненулевого элемента из $K_{i,h}$ дает ненулевой элемент в K_i. Следовательно, $K_{i,h} = 0$.

Покажем, что (4.39) точна справа. Это следует из того, что отображение

$$H^2(C \times_k S, \mathcal{A}^*_{S,0}) \to H^2(C \times_k S, \Im_S)$$

является изоморфизмом. Действительно, это отображение — часть следующей диаграммы, которая точна по лемме 40, следствию 20 этой леммы и определениям:

$$\begin{array}{ccccc}
0 \to & H^2(C \times_k S, \mathcal{A}^*_{S,0}) & \to & H^2(C \times_k S, \mathcal{A}^*_{S_{red},0}) & \to 0 \\
 & \downarrow & & \| & \\
0 \to & H^2(C \times_k S, \Im_S) & \to & H^2(C \times_k S, \Im_{S_{red}}) & \to 0
\end{array}$$

(Мы использоали здесь точные последовательности:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_0\widehat{\boxtimes}_k\mathcal{N}_S \longrightarrow \mathcal{A}^*_{S,0} \longrightarrow \mathcal{A}^*_{S_{red},0} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}\widehat{\boxtimes}_k\mathcal{N}_S \longrightarrow \Im_S \longrightarrow \Im_{S_{red}} \longrightarrow 0,$$

и $\mathcal{A}^*_{S_{red},0} = \Im_{S_{red}}$.)

Теперь покажем, что (4.39) расщепляется, и что существует расщепление, которое функториально по S. Рассмотрим следующую диаграмму, которая точна по лемме 40, следствию 20, определениям и предположениям:

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & 0 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
H^1(C\times_k S, \mathcal{A}_0\widehat{\boxtimes}_k\mathcal{N}_S) & \to & H^1(C\times_k S, \mathcal{A}^*_{S,0}) & \twoheadrightarrow & H^1(C\times_k S, \mathcal{A}^*_{S_{red},0}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \| \\
H^1(C\times_k S, \mathcal{A}\widehat{\boxtimes}_k\mathcal{N}_S) & \to & H^1(C\times_k S, \Im_S) & \twoheadrightarrow & H^1(C\times_k S, \Im_{S_{red}}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
H^1(C\times_k S, (\mathcal{A}/\mathcal{A}_0)\boxtimes_k\mathcal{N}_S) & = & H^1(C, \mathcal{A}/\mathcal{A}_0)\otimes_k H^0(S,\mathcal{N}_S) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & &
\end{array}$$

Расщепление левой вертикальной точной последовательности задается системой совместимых k-линейных сечений сюръективных отображений $H^1(C, \mathcal{A}_i/\mathcal{A}_h) \to H^1(C, \mathcal{A}_i/\mathcal{A}_0)$, $h > 0$, $i < 0$ и тензорного произведения (над k) этих сечений с тождественным отображением на $H^0(S, \mathcal{N}_S)$. Это дает функториальное по S расщепление последовательности (4.39). (Ср. с доказательством предложения 23.) Теорема доказана.

Замечание 67. Первые отображения в строках последней диаграммы являются вложениями. Чтобы показать это, достаточно доказать, что отображение

$$H^0(C\times_k S, \mathcal{A}^*_{S,0}) \to H^0(C\times_k S, \mathcal{A}^*_{S_{red},0})$$

сюръективно.

Если $a \in H^0(C\times_k S, \mathcal{A}_{S,0})$ — обратимый элемент, то его образ в $H^0(C\times_k S, \mathcal{O}_{C\times_k S})$ должен быть также обратим. Теперь, используя следствие 21 леммы 40 и ряды для $exp(z)$ и $log(1+z)$, поскольку мы предположили, что $\operatorname{char} k = 0$, мы можем свести доказательство к следующему факту: отображение

$$H^0(C\times_k S, \mathcal{A}_{S,1}) \longrightarrow H^0(C\times_k S, \mathcal{A}_{S_{red},1})$$

сюръективно. Последний факт следует из таких наблюдений:

1) используя те же рассуждения, что и в доказательстве леммы 40, имеем

$$H^0(C\times_k S, \mathcal{A}_{S,1}) \simeq \varprojlim_{j>1}(H^0(C, \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_j)\otimes_k H^0(S,\mathcal{O}_S)),$$

$$H^0(C\times_k S, \mathcal{A}_{S_{red},1}) \simeq \varprojlim_{j>1}(H^0(C, \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_j)\otimes_k H^0(S_{red},\mathcal{O}_{S_{red}}));$$

2) имеются короткие точные последовательности

$$0 \to H^0(C, \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_j)\otimes_k H^0(S,\mathcal{N}_S) \to H^0(C, \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_j)\otimes_k H^0(S,\mathcal{O}_S) \to \\ H^0(C, \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_j)\otimes_k H^0(S_{red},\mathcal{O}_{S_{red}}) \to 0 \quad (4.44)$$

для всех $j > 1$, и проективная система $\{H^0(C, \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_j)\otimes_k H^0(S,\mathcal{N}_S)\}_{j>1}$ удовлетворяет МЛ-условию. Следовательно, переходя к проективному пределу относительно j в последовательности (4.44), мы опять получаем короткую точную последовательность.

Теперь сравним пучки $\widetilde{\mathbf{Pic}}_{\mathring{X}_\infty}$ и $\mathbf{Pic}_{\mathring{X}_\infty}$. Пусть $\mathbf{Pic}^0_{X_\infty}$ — связная компонента нуля в групповой схеме $\mathbf{Pic}_{X_\infty}$, которая, как известно, является замкнутой неприводимой подгруппой с

$$\mathbf{Pic}^0_{X_\infty}(k) = \varprojlim_{i\ge 0} Pic^0(X_i)$$

(здесь $X_i = (C, \mathcal{A}_0/\mathcal{A}_{i+1})$ — схема), см. предложение 20. Кроме того, имеется следующая точная последовательность пучков, вытекающая из явного описания групповой схемы $\mathbf{Pic}_{X_\infty}$ в предложении 24:

$$0 \longrightarrow \mathbf{Pic}^0_{X_\infty} \longrightarrow \mathbf{Pic}_{X_\infty} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Теорема 31. *Пусть $\mathring{\mathrm{X}}_\infty$ — риббон из предыдущей теоремы 30. Предположим дополнительно, что он происходит из проективной поверхности и дивизора Картье C с $(C\cdot C)\ne 0$. Тогда следующая последовательность пучков точна:*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{Pic}}_{\mathring{\mathrm{X}}_\infty} \longrightarrow \mathbf{Pic}_{\mathring{\mathrm{X}}_\infty} \longrightarrow 0,$$

и $Pic_{\mathring{\mathrm{X}}_\infty}$ — формальная групповая схема, (неканонически) изоморфная

$$(\coprod_{i=1}^{|(C\cdot C)|} \mathbf{Pic}^0_{X_\infty}) \times_k \widehat{\mathbf{Br}}_{\mathring{\mathrm{X}}_\infty}.$$

Доказательство По нашим предположениям, риббон удовлетворяет условию (∗∗). Значит, по определению пучка $\Im_S$ (4.37) (см. также предложение 19), имеются точные последовательности пучков Зарисского для каждой S:

$$0 \longrightarrow \Im_S \longrightarrow \mathcal{A}^*_S \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Тогда имеются следующие точные последовательности предпучков Зарисского:

$$H^1(C\times_k S, \Im_S) \longrightarrow H^1(C\times_k S, \mathcal{A}^*_S) \longrightarrow H^1(C\times_k S, \mathbb{Z}). \tag{4.45}$$

По теореме 29, пучок Зарисского, ассоциированный с предпучком $S \mapsto H^1(C\times_k S, \mathbb{Z})$, равен нулю. (В силу [150, vol.I, ch.III, §15, th.40, cor.1], слои морфизма $C\times_k S \to S$ неприводимы. Следовательно, мы могли применить теорему 29.) Покажем, что ядро первого отображения равно $H^0(C\times_k S, \mathbb{Z})$. Достаточно доказать, что $H^0(C\times_k S, \mathcal{A}^*_{S,0}) \simeq H^0(C\times_k S, \mathcal{A}^*_S)$ для приведенной и связной схемы S. Действительно, если это верно, то этот изоморфизм имеет место для любой схемы S, поскольку для любой аффинной нетеровой схемы S имеется тогда следующая диаграмма, которая точна по определениям и замечанию 67:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
0\to & H^0(C\times_k S, \mathcal{A}\widehat{\boxtimes}_k\mathcal{N}_S) & \to & H^0(C\times_k S, \Im_S) & \to & H^0(C\times_k S, \mathcal{A}^*_{S_{red},0}) & \to 1 \\
 & \| & & \downarrow & & \| & \\
0\to & H^0(C\times_k S, \mathcal{A}\widehat{\boxtimes}_k\mathcal{N}_S) & \to & H^0(C\times_k S, \mathcal{A}^*_S) & \to & H^0(C\times_k S, \mathcal{A}^*_{S_{red}}) &
\end{array}$$

Теперь, изоморфизм $H^0(C\times_k S, \mathcal{A}^*_{S,0}) \simeq H^0(C\times_k S, \mathcal{A}^*_S)$ для приведенной S следует из примера 20. Напомним, что в этом случае имеется точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} Pic(X_\infty) \longrightarrow Pic(\mathring{X}_\infty),$$

где $\alpha(1) = \mathcal{A}_1$, и $\mathcal{A}_1$ — не элемент кручения в группе $Pic(X_\infty)$, поскольку его образ в $Pic(C)$ имеет степень $-(C\cdot C)\ne 0$. Таким образом, элемент $\mathcal{A}_1\widehat{\boxtimes}_k\mathcal{O}_S$ — не элемент кручения в

$Pic(X_{\infty,S})$, и следовательно отображение $\mathbb{Z} \to Pic(X_{\infty,S})$ инъективно и $H^0(C \times_k S, \mathcal{A}_0^*) \simeq H^0(C \times_k S, \mathcal{A}^*)$ как показывает длинная точная последовательность

$$0 \to H^0(C \times_k S, \mathcal{A}_{S,0}^*) \to H^0(C \times_k S, \mathcal{A}_S^*) \to \mathbb{Z} \to Pic(X_{\infty,S}).$$

Следовательно, последовательность (4.45) приводит к точной последовательности пучков Зарисского

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{Pic}}_{\mathring{X}_\infty} \longrightarrow \mathbf{Pic}_{\mathring{X}_\infty} \longrightarrow 0.$$

Непосредственно из конструкции последовательностей выше следует, что пучок $\mathbf{Pic}_{X_\infty}/\mathbb{Z}$ представим схемой $\coprod\limits_{i=1}^{|(C\cdot C)|} \mathbf{Pic}^0_{X_\infty}$. Следовательно, используя теорему 30, получаем

$$\mathbf{Pic}_{\mathring{X}_\infty} \simeq (\coprod_{i=1}^{|(C\cdot C)|} \mathbf{Pic}^0_{X_\infty}) \times_k \widehat{\mathbf{Br}}_{\mathring{X}_\infty}.$$

Замечание 68. Было бы интересно получить аналоги теорем 30 и 31, если условие (4.38) не выполняется. Кажется, в этом случае нужно рассматривать fpqc-пучки (вместо пучков Зарисского), ассоциированные с предпучками $S \mapsto \widetilde{Pic}_{\mathring{X}_\infty}(S)$ и $S \mapsto Pic_{\mathring{X}_\infty}(S)$ соответственно, чтобы получить представимость этих пучков.

Глава 5

Геометрические свойства коммутативных подалгебр ДО от двух переменных

В этой главе изложены результаты об общих геометрических свойствах данных $(X, j, \mathcal{F})$ из главы 3, а также о необходимых условиях, выделяющих среди них спектральные данные алгебр коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных. В конце главы доказываются теоремы о преобразованиях Дарбу алгебр ДО с рациональной спектральной поверхностью и о пополнении аффинной плоскости. Результаты этой главы содержатся в работах [11], [86] и [12].

5.1 Вводные замечания

Коэно-Маколеевы когерентные пучки без кручения ранга один, появляющиеся как пучки из геометрических данных, классифицирующих коммутативные подалгебры (пополненных) операторов с *фиксированной* спектральной поверхностью, параметризуются пространством модулей, которое является открытой подсхемой проективной схемы, параметризующей полустабильные пучки с фиксированным полиномом Гильберта (см. замечание 79). Мы определяем в этой главе отображение ограничения ζ из этого пространства модулей в пространство модулей когерентных пучков без кручения ранга один на кривой C (см. параграф 5.3.2, замечание 79). Изучение этого пространства модулей важно для нахождения новых примеров алгебраически интегрируемых систем или для классификации коммутативных алгебр ДО.

Отметим, что это пространство модулей может служить неким аналогом якобиана кривой в контексте классической теории КП (см. раздел 1.2). С другой стороны, схема Пикара риббона тоже может служить неким аналогом якобиана кривой в контексте классической теории КП. Так, например, на этой схеме определены обобщенные потоки КП (потоки, определяемые многомерной иерархией, см. главу 6). Неудобство схемы Пикара проколотой ленты заключается в ее бесконечномерности. В отличие от этой схемы пространство модулей, упомянутое выше, является конечномерным. Обобщенные потоки КП также определены на нем, при определенных ограничениях на начальные условия. Несложно показать, что оно вкладывается в схему Пикара проколотой ленты.

Исследуя уже существующие примеры вышеупомянутых коммутативных алгебр мы доказываем теорему (38) об алгебраически интегрируемых коммутативных кольцах ДО, чьи аффинные спектральные поверхности рациональны. Такие кольца фигурировали, например, в статьях [69], [70], [67], [36]. В примерах из этих статей нормализации аффинных спектральных поверхностей изоморфны аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$. В работе [36] авторы указали метод построения новых нетривиальных примеров коммутативных колец ДО с помощью преобразования Дарбу. Мы доказываем в теореме 38, что все кольца с таким свойством аффинной спектральной поверхности получаются с помощью преобразования Дарбу из колец ДО с постоянными коэффициентами. Заодно мы получаем геометрическое описание некоторого замыкания $\mathbb{A}^2$ (см. теорему 37): замыкание $\mathbb{A}^2$, чей "бесконечно удаленный"дивизор — обильный неприводимый $\mathbb{Q}$-Картье дивизор с индексом самопересечения один, изоморфно $\mathbb{P}^2$. Возможо, этот результат можно доказать с помощью классических методов алгебраической геометрии, используя старые известные результаты Морроу ([104]) или относительно свежие результаты Кожимы и Такахаши ([82]) (мы благодарны М. Гизатуллину и Т. Бандман за указание на эти работы), однако мы используем вместо этого некоторые наши идеи из теории пунктированных лент (риббонов) и (или как альтернативу) конструкцию обобщенного отображения Кричевера-Паршина.

5.2 Геометрические свойства спектральных поверхностей

5.2.1 Конструкция маколеефикации

В этом разделе мы приводим конструкцию Коэно-Маколеевизации (или маколеефикации) поверхности и пучка, которая нам будет необходима в дальнейшем. Эта конструкция является в некотором смысле "математическим фольклором хотя в литературе она встречается в разных конекстах, см. например некоторые факты о двумерном функторе Маколеефикации в [43, sec. 3], или Коэно-Маколеево разрешение особенностей в [68]. Походящую ссылку к этой конструкции мы не смогли найти, поэтому приводим ее здесь. Отметим, что, по-видимому, наиболее богатыми свойствами эта конструкция обладает именно в размерности 2.

Для нетеровой области A определим

$$A' = \bigcap_{\mathrm{ht}\,\wp=1} A_{\wp}$$

как пересечение всех локализаций относительно простых идеалов высоты 1. Скажем, что $\mathrm{depth}(A) > 1$, если выполнено условие (S_2) из [91, ch. 7, § 17, (17.I)], т.е. $\mathrm{depth}(A_{\wp}) \geq \inf(2, \mathrm{ht}(\wp))$ для всех $\wp \in \mathrm{Spec}(A)$.

Лемма 41. *Пусть* $\dim(A) > 1$. *Тогда* $A' = A$ *если и только если* $\mathrm{depth}(A) > 1$.

Доказательство Если $A' = A$, то для любого ненулевого необратимого $f \in A$ имеется равенство (так как A — область)

$$fA = \bigcap_{\mathrm{ht}\,\wp=1} fA_{\wp} = \bigcap_{\mathrm{ht}\,\wp=1} (fA_{\wp} \bigcap A),$$

и идеалы $fA_{\wp}$ либо совпадают с $A_{\wp}$, или $\wp$-примарны в кольцах $A_{\wp}$, так как кольца $A_{\wp}$ — нетеровы локальные кольца размерности один. Таким образом, идеалы $fA_{\wp} \bigcap A$ в A либо совпадают с A, либо $\wp$-примарны в A. Значит, существует примарное разложение для fA без вложенных компонент (ср. [1, th. 4.10]), и, следовательно, существуют необратимые не делители нуля в $A_{\wp}/fA_{\wp}$ для любых $\wp \supset f$ высоты один, потому что $\dim A > 1$ (ср. [1, prop. 4.7]). Отсюда $\mathrm{depth}(A) > 1$.

Теперь предположим, что $\mathrm{depth}(A) > 1$. Если $x \in A'$, то множество всех элементов $s \in A$, таких что $sx \in A$ — идеал, не содержится в любом простом идеале высоты 1. Так как $\mathrm{depth}(A) > 1$, то существует регулярная последовательность (a, b) в этом идеале. Так как $a(xb) - b(xa) = 0$, получаем $xa \in aA$, так что $x \in A$.

Предположим, что A обладает следующим свойством:

(∗) Каждый простой идеал высоты 1 в нормализации A пересекает A по простому идеалу высоты 1.

Это свойство выполнено, например, для областей конечного типа над полем или над кольцом целых чисел в силу [1, prop. 5.6, corol. 5.8, th. 5.10, th. 5.11] и [150, vol. I, ch. V, th. 9].

Тогда для каждой нетеровой области B между A и ее нормализацией с $\operatorname{depth}(B) > 1$ получаем, что A' содержится в B (так как $B_\wp \supset A_\wp \cap A$ для любого простого идеала $\wp$ в B высоты один в силу (*) и $B = B'$ по лемме 41).

Лемма 42. *Предположим, что* $\dim A > 1$*,* A *удовлетворяет* (∗)*, и обладает свойством, что его нормализация — конечный* A*-модуль. Тогда имеем:*

(i) A' *— конечный* A*-модуль;*

(ii) $\operatorname{depth}(A') > 1$ *и* A' *содержится в любой подобласти нормализации, которая содержит* A *и имеет глубину больше единицы;*

(iii) для ненулевого $f \in A$ *имеем* $A[1/f]' = A'[1/f]$*.*

Доказательство Как мы видели выше, A' содержится во всякой подобласти нормализации, которая содержит A и имеет глубину больше 1. Так как нормализация A — конечный A-модуль, то A' — также конечный A-модуль. Чтобы доказать, что $\operatorname{depth}(A') > 1$, мы можем действовать как в доказательстве леммы 41. Для любого ненулевого необратимого $f \in A'$ имеем

$$fA' = \bigcap_{\operatorname{ht}\wp=1} fA_\wp = \bigcap_{\operatorname{ht}\wp=1} (fA_\wp \bigcap A'),$$

и идеалы $fA_\wp$ либо совпадают с $A_\wp$, либо $\wp$-примарны в кольцах $A_\wp$, так как кольца $A_\wp$ — нетеровы локальные кольца размерности один. Таким образом, идеалы $fA_\wp \bigcap A'$ в A' либо совпадают с A', либо $\wp'$-примарны в A', где $\wp'$ — простой идеал $\wp A_\wp \cap A'$. Заметим, что $\operatorname{ht}(\wp') = 1$. Действительно, $\wp' \cap A = \wp$ и $\operatorname{ht}(\wp) = 1$. Если $\operatorname{ht}\wp' > 1$, то существует простой идеал $\wp_1 \subset \wp'$ высоты один, такой что $\wp_1 \cap A = \wp$ (так как A' цело над A, $\wp_1 \cap A \neq 0$). Но тогда $\wp_1 = \wp'$ в силу [1, corol. 5.9]. Значит, существует примарное разложение для fA' без вложенных компонент, и следовательно, существуют необратимые не делители нуля в $A'_\wp/fA'_\wp$ для всех $\wp \supset f$ высоты один, поскольку $\dim A > 1$ (ср. [1, prop. 4.7]). Следовательно, $\operatorname{depth}(A') > 1$.

Чтобы доказать (iii), сначала заметим, что A' — пересечение

1) всех локализаций относительно всех простых идеалов высоты 1, не содержащих f;

2) конечного числа локализаций относительно простых идеалов высоты 1, содержащих f.

Конечные пересечения и локализации коммутируют, и локализация колец в пункте 2) относительно f — поле частных $\operatorname{Quot} A$. Поэтому мы можем опустить все эти компоненты пересечения. Кольца в пункте 1) совпадают с локализациями $A[1/f]$ относительно тех же идеалов. Отсюда следует равенство $A'[1/f] = A[1/f]'$.

Замечание 69. *Для 2-мерных областей свойство* $\operatorname{depth}(A) > 1$ *эквивалентно свойству, что* A *— кольцо Коэно-Маколея, см. [91, ch. 7, § 17, (17.I)].*

Имеется следующая геометрическая интерпретация вышеизложенных фактов. Пусть X — двумерная целая схема конечного типа над полем или над кольцом целых чисел. Пусть $P(X)$ — подсхема всех точек высоты 1 со структурным пучком, полученным ограничением структурного пучка на X. Тогда прямой образ структурного пучка $P(X)$ при вложении $P(X)$ в X — когерентный пучок алгебр на X (так как $P(X)(U) = A'$ для любого аффинного $U = \operatorname{Spec} A$). Пусть $CM(X)$ — относительный спектр над X этой алгебры. Тогда, используя лемму 42, получаем:

(i) $CM(X)$ — целая схема, с конечным и бирациональным морфизмом на X, и $CM(X)$ — Коэно-Маколеева схема.

(ii) Любая целая Коэно-Маколеева X-схема Y с конечным и бирациональным морфизмом на X обладает единственной факторизацией над $CM(X)$.

Будем также называть схему $CM(X)$ *Коэно-Маколеевизацией* схемы X.

Замечание 70. *Таким же способом можно определить Коэно-Маколеевизацию пучка.*

В дальнейшем пусть X — целая поверхность, и $\mathcal{F}$ — когерентный пучок без кручения. Пусть $i : P(X) \to X$ — морфизм как выше. По пучку $\mathcal{F}$ определим пучок $CM(\mathcal{F}) := i_*(\mathcal{F}|_{P(X)})$ на X. Тогда, используя те же аргументы, что и выше, можно доказать:

(i) $\mathcal{F}$ — Коэно-Маколеев пучок если и только если $\mathcal{F} = CM(\mathcal{F})$.

(ii) Если $\mathcal{F}$ Коэно-Маколеев, и $\pi : X' \to X$ — Коэно-Маколеевизация X, то $\mathcal{F}$ обладает единственной структурой $\pi_*\mathcal{O}_{X'}$-модуля, так что он происходит из Коэно-Маколеевого пучка $\mathcal{F}'$ на X' как $\mathcal{F} = \pi_*\mathcal{F}'$.

(iii) Если X Коэно-Маколеева, то $\mathcal{F}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ (см., например, [43, Lemma 3.1]) Коэно-Маколеев для любого когерентного пучка без кручения $\mathcal{F}$ на X. Следовательно, получаем, что

$$\mathcal{F} \subset CM(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}^{\vee\vee}$$

(потому что для любого открытого $U \subset X$ и естественного вложения $i : P(U) \hookrightarrow U$ имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_U}(i_*(\mathcal{F}|_{P(U)}), \mathcal{O}_U) &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_U}(i_*(\mathcal{F}|_{P(U)}, i_*(\mathcal{O}_U|_{P(U)})) = \\ &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{P(U)}}(i^*i_*(\mathcal{F}|_{P(U)}), \mathcal{O}_{P(U)}) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{P(U)}}(\mathcal{F}|_{P(U)}, \mathcal{O}_{P(U)}) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{O}_U),\end{aligned}$$

и пучки $\mathcal{F}$, $i_*(\mathcal{F}|_{P(X)})$ без кручения) и в силу (i) пучок $CM(\mathcal{F})$ минимален среди Коэно-Маколеевых пучков $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$, таких что $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ — пучок кручения.

(iv) Если $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ — когерентный подпучок когерентного Коэно-Маколеева пучка без кручения $\mathcal{F}$, то $\mathcal{G}$ — Коэно-Маколеев если и только если никакие примарные компоненты $\mathcal{G}$ не ассоциированы с замкнутой точкой.

5.2.2 Коэно-Маколеевость спектральных поверхностей

В этом разделе изучаются свойства поверхности X.

Теорема 32. *Пусть X, C — поверхность и дивизор из геометрических данных $(X, j, \mathcal{F})$ (см. опред. 45). Тогда X Коэно-Маколеева всюду кроме конечного числа точек, не лежащих на C.*

Доказательство Напомним, что если имеются геометрические данные из определения 45, то определено кольцо $A \subset k[[u']]((t'))$ (см. раздел 3.5.3 выше), фильтрация A_i, определенная дискретным нормированием $\nu_{t'}$ над полем $k((u'))((t'))$:

$$A_i = \{a \in A \mid \nu_{t'}(a) \geq -i\}, \quad i \geq 0$$

, которая удовлетворяет следующему свойству: $A_{di} \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(idC))$ для всех $i \geq 0$, где d — минимальное натуральное число, такое что dC — очень обильный дивизор Картье. Таким образом, $X \simeq \operatorname{Proj} \tilde{A}^{(d)} \simeq \operatorname{Proj} \tilde{A}$, где $\tilde{A} = \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} A_i s^i$, и C определен однородным идеалом $I = \tilde{A}(-1) = (s)$ в кольце $\tilde{A}$. Кривая C покрыта аффинными подмножествами $\operatorname{Spec} \tilde{A}_{(x_i)}$, где $x_i \in A_d$, $\nu_{t'}(x_i) = -d$.

Покажем сначала, что каждая точка кривой C является Коэно-Маколеевой на X. Достаточно показать, что идеал (s^d/x_i) в кольце $\tilde{A}_{(x_i)}$ $I_{(x_i)}$-примарен для всех x_i как выше. (Элемент s^d/x_i — не делитель нуля в кольце $\tilde{A}_{(x_i)}$. Следовательно, чтобы доказать свойство Коэно-Маколеевости, достаточно найти необратимый не делитель нуля в кольце $\tilde{A}_{(x_i)}/(s^d/x_i)$. Но все делители нуля в этом кольце совпадают с $I_{x_i}/(s^d/x_i)$, если (s^d/x_i) — $I_{(x_i)}$-примарный идеал, и все эти делители нуля нильпотентны. Тогда в силу [1, prop. 4.7] и по теореме Крулля $\operatorname{ht} I_{(x_i)} = 1$. Таким образом, $\dim \tilde{A}_{(x_i)}/I_{(x_i)} = 1$ и необратимые не делители нуля существуют). Предположим, что элементы as^{dk}/x_i^k и bs^{dl}/x_i^l принадлежат $\tilde{A}_{(x_i)}$, но не принадлежат идеалу (s^d/x_i), и

$$\frac{as^{dk}}{x_i^k} \cdot \frac{bs^{dl}}{x_i^l} = \frac{cs^{(k+l-1)d}}{x_i^{k+l-1}} \cdot \frac{s^d}{x_i} \in \left(\frac{s^d}{x_i}\right) \subset I_{(x_i)}.$$

Мы должны показать, что $as^{dk}/x_i^k, bs^{dl}/x_i^l \in I_{(x_i)}$. Так как $I_{(x_i)}$ — простой идеал, мы можем предположить без ограничения общности, что элемент $g = as^{dk}/x_i^k \in I_{(x_i)}$. Заметим, что любой элемент $y \in I_{(x_i)}$ обладает свойством $\nu_{t'}(y) > 0$. Далее, $\nu_{t'}(a) = -kd + j$, где $0 < j < d$, поскольку $g \in I_{(x_i)}$ и $g \notin (s^d/x_i)$ (если $j \geq d$, то $\nu_{t'}(a) \leq (k-1)d$ и следовательно $a \in A_{(k-1)d} \subset A_{kd}$, так что $as^{dk} = (as^{d(k-1)})s^d$ и $as^{dk}/x_i^k \in (s^d/x_i)$, противоречие). Тогда

$$g^d = \frac{a^d s^{kd^2 - jd}}{x_i^{kd-j}} \cdot \frac{s^{dj}}{x_i^j} \in \left(\frac{s^d}{x_i}\right),$$

и $a^d s^{kd^2-jd}/x_i^{kd-j} \notin I_{(x_i)}$, поскольку $\nu_{t'}(a^d/x_i^{kd-j}) = 0$.

Если $g_1 = bs^{dl}/x_i^l \notin I_{(x_i)}$, то мы получаем

$$g_1^d \frac{a^d s^{kd^2-jd}}{x_i^{kd-j}} \notin I_{(x_i)}.$$

Но с другой стороны,

$$\frac{a^d s^{kd^2-jd}}{x_i^{kd-j}} g_1^d = g^d \frac{x_i^l}{s^{dj}} g_1^d = \frac{c^d s^{(k+l-1)d^2}}{x_i^{(k+l-1)d}} \cdot \frac{s^{d^2-dj}}{x_i^{d-j}} \in I_{(x_i)},$$

противоречие. Таким образом, $g_1 \in I_{(x_i)}$, и следовательно (s^d/x_i) — $I_{(x_i)}$-примарный идеал.

Пусть теперь V обозначает открытую подсхему в X, такую что $P \in V$ (P — гладкая точка из определения 45) и V нормальна (следовательно, Коэно-Маколеева). Тогда $X \backslash V$ — замкнутая подсхема, каждая неприводимая компонента которой имеет размерность не выше чем один. Пусть E — неприводимая компонента размерности один. Пусть e обозначает простой идеал, соответствующий E в кольце A (общая точка E принадлежит аффинному множеству $X \backslash C = \operatorname{Spec} A$). Рассмотрим элемент $a \in e$. Делая подходящую локализацию по мультипликативно замкнутому подмножеству $S \subset A$, используя [1, prop. 4.9.], получаем кольцо A_S, в котором примарное разложение идеала $(a)_S$ не содержит ассоциированных вложенных идеалов. Таким образом, все точки на $\operatorname{Spec} A_S \cap E$ Коэно-Маколевы. Следовательно, может существовать лишь конечное число не Коэно-Маколеевых точек на X. Так как все точки на C Коэно-Маколеевы, мы можем найти открытое множество $U \supset C$, такое что U — Коэно-Маколеева схема.

Оказывается, однако, что кольцо коммутирующих операторов в $\hat{D}$ всегда можно увеличить, так что X будет Коэно-Маколеевой всюду. Это следует из теоремы классификации геометрических данных в терминах пар Шура и следующей теоремы.

Теорема 33. *Пусть (A, W) — пара Шура ранга r, причем W — конечно порожденный A-модуль. Тогда $(CM(A), W)$ — тоже пара Шура ранга r.*

В частности, если (A, W) соответствует кольцу дифференциальных операторов в частных производных (ср. теорему 18), то по теореме 21 и предложению 2 пара $(CM(A), W)$ также соответствует кольцу дифференциальных операторов в частных производных, которое будет Коэно-Маколеевым. Соответствующая паре $(CM(A), W)$ проективная поверхность X также Коэно-Маколеева в силу теоремы 32.

Доказательство Пусть X — проективная поверхность, соответствующая паре (A, W) по теореме 23. Тогда по теореме 32 существует естественный изоморфизм окрестности дивизора C на X и на $CM(X)$, что влечет изоморфизм $\mathcal{O}_{CM(X),P} \simeq \mathcal{O}_{X,P}$. Таким образом, мы можем продолжить вложение из определения раздела 3.5.3: $CM(A) \simeq H^0(CM(X)\backslash C, \mathcal{O}_{CM(X)}) \hookrightarrow k[[u]]((t))$ (заметим, что образ этого вложения содержит A). Обозначим образ этого вложения также через $CM(A)$. Те же аргументы, что и в доказательстве леммы 26 показывают, что $H^0(CM(X), \mathcal{O}_{CM(X)}(nC')) \simeq CM(A)_{nd}$.

Рассмотрим подпространство W' в $k[[u]]((t))$, порожденное W над $CM(A)$. Так как W — конечно порожденный A-модуль, пространство W' порождено конечным числом элементов $w_1, \dots w_n$ над $CM(A)$ (эти элементы также порождают W над A). В силу теоремы 32 градуированные кольца $\mathrm{gr}(CM(A))$ и $\mathrm{gr}(A)$ эквивалентны, поэтому W' порождено как k-подпространство пространством W и конечным числом элементов $w_i a_j$, где $i = 1, \dots n$, a_j — базис конечно порожденного подпространства $CM(A)_{kd}$ для некоторого фиксированного k.

Пусть S — оператор (см. теорему 20), такой что $W_0 S = \psi_1^{-1}(W)$ (см. следствие 21). Тогда $B = S\psi_1^{-1}(A)S^{-1} \subset D$ согласно нашим предположениям, откуда $S \in E$ (см. доказательство теоремы 21 и леммы 17). Обозначим через W_0' пространство $\psi_1^{-1}(W')S^{-1}$. Как показывают рассуждения выше, W_0' порождено W_0 и конечным числом элементов $w_i a_j S^{-1}$ как k-пространство. Заметим, что $W_0' B \subset W_0'$ и $W_0' B' \subset W_0'$, где $B' = S\psi_1^{-1}(CM(A))S^{-1}$.

Теперь можно рассуждать как в доказательстве предложения 3 чтобы показать, что $B' \subset D$. Так как $S \in E$, имеем $B' \in E$. Пусть $b \in B'$, $b \notin D$. Тогда $b_- = b - b_+ \neq 0$. В этом случае имеем

$$0 \neq z^{-\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)} b_- = \partial^{\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)}(b_-)(0) \notin W_0$$

и $z^{-\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)} b_+ \in W_0$. Так как W_0' порождено W_0 и конечным числом элементов не принадлежащих W_0, и так как $b \in E$, то для некоторого $n \gg 0$ имеем $z^{-\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)-(n,0)} b_- \notin W_0'$. Действительно, пусть b_{ij} — коэффициент ряда b_-, такой что $\partial^{\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)}(b_{ij})(0) \neq 0$. Пусть $b_{i+1,j}, \dots b_{i+q,j} \neq 0$ — ненулевые коэффициенты ряда b_- с фиксированным j, т.е. $b_{i+l,j} = 0$ для всех $l > q$. Тогда для каждого $n \gg 0$ условие $z^{-\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)-(n,0)} b_- \in W_0'$ влечет уравнение

$$\partial^{\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)}(b_{i,j})(0) + n\partial^{\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)+(1,0)}(b_{i+1,j})(0) + C_n^2 \partial^{\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)+(2,0)}(b_{i+2,j})(0) + \dots \\ + C_n^q \partial^{\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)+(q,0)}(b_{i+q,j})(0) = 0. \quad (5.1)$$

Таким образом, для $n = m, \dots, m + q + 1$ (при $m \gg 0$) должна выполняться система линейных уравнений $Cx = 0$, $x = (x_0, \dots, x_q)$, где $x_l = \partial^{\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)+(l,0)}(b_{i+l,j})(0)$, $l = 0, \dots q$, и

$$C = \begin{pmatrix} 1 & C_m^1 & \dots & C_m^q \\ 1 & C_{m+1}^1 & \dots & C_{m+1}^q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_{m+q}^1 & \dots & C_{m+q}^q \end{pmatrix}$$

Так как C обратима, имеем $x = 0$, а значит, противоречие с условием $\partial^{\operatorname{ord}_{M_1,M_2}(b_-)}(b_{ij})(0) \neq 0$. Таким образом, если b сохраняет W_0', то b должен быть в D. Следовательно, $B' \subset$

D и B' сохраняет W_0. Тогда $CM(A)$ сохраняет W, следовательно, $(CM(A), W)$ — пара Шура ранга r (все свойства из определения 42, пункт 2 для кольца $CM(A)$ выполняются, поскольку $CM(A) \supset A$ — конечный A-модуль).

5.2.3 Конструкция склейки

В этом разделе мы напоминаем конструкцию склейки замкнутых подсхем. Оказывается, что всякая Коэно-Маколеева спектральная поверхность получается при помощи этой конструкции из своей нормализации.

Как в рамках одномерной теории КП можно получать интересные решения уравнения КП из алгебраических кривых со склееными точками (например, чтобы получить каспидальные или нодальные кривые с нетривиальными якобианом и компактифицированным якобианом, см. [110, 136]), мы надеемся, что похожая конструкция для поверхностей, примененная к $\mathbb{P}^2$, или к рациональным или иным поверхностям позволит строить примеры геометрических спектральных данных. Эта надежда подтверждается тем фактом, что практически все известные примеры коммутирующих колец ДО (от двух переменных) имеют такие склеенные поверхности в качестве спектральных многообразий, см. примеры ниже.

Рассмотрим следующую проблему: по данной проективной поверхности $\tilde{X}$, одномерной замкнутой подсхеме Y и конечному сюръективному морфизму $p: Y \to C$ на кривую C, построить поверхность X с кривой $C \subset X$ и морфизмом $n: \tilde{X} \to X$, таким что $n(Y) = C$ (и $n|_Y$ равен данному морфизму p) и $n: \tilde{X} \backslash Y \simeq X \backslash C$ — изоморфизм.

В работе [71] дается общая конструкция склейки замкнутых подсхем. Она пригодна для многих схем с небольшими ограничениями, и эта конструкция является естественным обобщением конструкции для кривых из книги [138]:

Теорема 34. *([71, th.5.4]) Пусть X' — схема, Y' — замкнутая подсхема в X', и $g: Y' \to Y$ — конечный морфизм. Рассмотрим окольцованное пространство $X = X' \sqcup_{Y'} Y$ (амальгаму) и кодекартов квадрат*

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow & & \downarrow u \\ X' & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Предположим, что схемы X' и Y обладают следующим свойством:
(AF) *Любые конечные множества точек содержатся в открытом аффинном множестве.*

Тогда:

a) X — схема, обладающая свойством (AF);
b) квадрат выше декартов;
c) морфизм f конечный, и u — замкнутое вложение;
d) f индуцирует изоморфизм $X' - Y'$ на $X - Y$.

Часто схемы после процедуры склейки подсхем являются собственными, но не проективными (см. [71, § 6] и также [71, prop. 5.6]). Ниже мы перепишем конструкцию из [71] для поверхностей с некоторыми дополнительными условиями другим, хотя и эквивалентным способом.

Нам понадобятся некоторые дополнительные предположения. Идея состоит в том, чтобы построить X сначала как топологическое пространство, взяв фактор-пространство относительно отношения эквивалентности $\triangle_X \cup (id \times p)^{-1}(\Gamma_p)$ в $X \times X$ (здесь $\Gamma_p \subset Y \times C$ — график p). Тогда имеется топологическое отображение факторизации $\tilde{X} \to X$, но не очевидно как сделать X схемой.

Для этого мы сделаем предположение, что p продолжается до морфизма $\tilde{p} : \tilde{X}_0 \to C$, где $\tilde{X}_0 \subset \tilde{X}$ — открытая (по Зарисскому) окрестность Y.

Без ограничения общности мы можем предположить, что $\tilde{X}_0 = \tilde{X}$: заменяя $\tilde{X}$ на замыкание графа $\tilde{p}$ в $\tilde{X} \times C$, мы можем модифицировать $\tilde{X}$ до $\tilde{\tilde{X}} \to \tilde{X}$, так что $\tilde{p}\sigma$ продолжается до морфизма $\tilde{\tilde{X}}$ в C, эта модификация не затрагивает $\tilde{X}_0$ и после процедуры склейки ее можно обратить.

Далее, проделав топологическую конструкцию как выше, мы получаем факторизацию подлежащего непрерывного отображения $\tilde{p}$

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "n"'] & C \\ X \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

и нужно определить $\mathcal{O}_X = p^{-1}\mathcal{O}_C + n_* I_Y$ ($I_Y \subset \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ — пучок идеалов подсхемы Y).

Описание аффинного покрытия: для каждой $c \in C$ существует аффинная окрестность $V \subset C$ и аффинная окрестность $\tilde{U}$ множества $p^{-1}(c)$ в $\tilde{X}$, такие что $\tilde{U} \cap Y = \tilde{p}^{-1}(V) \cap Y$ (сначала возьмем произвольную аффинную окрестность U множества $p^{-1}(c)$, тогда $Y \backslash U$ замкнуто и $F = p(Y \backslash U)$ замкнуто в C и не содержит c. Тогда возьмем $V \subset C \backslash F$ — аффинная окрестность c, и $U = \tilde{U} \cap \tilde{p}^{-1}(V)$). Тогда диаграмма отображений

$$\begin{tikzcd} \tilde{U} \arrow[r] & V \\ \tilde{U} \cap Y \arrow[u, hook] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

соответствует гомоморфизмам координатных колец

$$\begin{tikzcd} \tilde{A} \arrow[d] & R \arrow[l] \arrow[dl] \\ \tilde{A}/I & \end{tikzcd}$$

и мы определим $A = R + I \subset \tilde{A}$. Нам нужно теперь показать, что A — конечно порожденная R-алгебра (и $\mathrm{Spec}(A) \subset X$ как топологическое пространство).

Лемма 43. *Пусть $R \subset \tilde{A}$ — конечно порожденные области над полем k размерности Крулля 1 и 2, I — идеал в $\tilde{A}$, такой что расширение $R \subset \tilde{A}/I$ конечно. Тогда $A = R + I \subset \tilde{A}$ конечно порождено, и $\tilde{A}$ конечно над A.*

Доказательство Мы можем найти $f_1, f_2 \in \tilde{A}$ такие что
1) $\tilde{A}$ конечно над $E = k[f_1, f_2]$;
2) $f_1 \in I$ (см. [2, ch.V, §3, th.1]).

Так как $\tilde{A}/I$ конечно над R, то существуют $a_1, \ldots, a_k \in A$, такие что $f_2^k + a_1 f_2^{k-1} + \ldots + a_k = b \in I$; следовательно, если $A_0 = k[f_1, a_1, \ldots, a_k, b]$, то $A_0 \subset R + I$ и $\tilde{A}$ конечно над A_0 ($A_0 \subset A_0[f_2] \subset \tilde{A}$), следовательно, $A = R + I$ конечно порождено над k.

Таким образом, $\tilde{A}$ — (частичная) нормализация, и I — кондуктор из A в $\tilde{A}$. Легко проверить, что
1) $\tilde{X} \xrightarrow{n} X$ универсально замкнут;
2) X отделима:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}\times\tilde{X} \arrow[r, "(1)"] & \tilde{X}\times X \arrow[r, "(2)"] & X\times X \\
\tilde{\triangle} \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r] & \Gamma_n \arrow[u, "\beta"] \arrow[r] & \triangle \arrow[u, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

Так как (1) и (2) — замкнутые отображения, и Γ_n, $\triangle$ локально замкнуты, то отображения β, γ — замкнутые вложения.

Таким образом, отображение n собственно, и X — отделимая схема конечного типа над k. Так как n также конечно, сюръективно и $\tilde{X}$ собственно над k, отсюда следует, что структурное отображение $X \to \operatorname{Spec} k$ универсально замкнуто, а потому X — собственная над k схема.

Имея теперь такую конструкцию и общую теорему Ферранда 34, мы можем привести некоторые примеры:

Пример 23. Рассмотрим $\tilde{X} = \mathbb{P}^2$ с морфизмом $p : \tilde{X} - (0:0:1) \to C = \mathbb{P}^1$, $p(x:y:z) = (x:y)$, и две прямые $Y = 2\mathbb{P}^1$, где $\mathbb{P}^1 = (x:y:0)$ в $\mathbb{P}^2$. Ясно, что Y — обильный дивизор Картье на $\tilde{X}$.

В этом случае определен дивизор Картье $\tilde{C}$ на склеенной поверхности X, заданный теми же уравнениями в индуцированном локальном покрытии (так что $Y = n^*\tilde{C}$). Так как Y — обильный дивизор, и n — конечный сюръективный морфизм собственных схем, дивизор $\tilde{C}$ также обилен (см. [27, ex. 5.7., ch. 3]). Следовательно, X проективна, и отображение циклов дает $Z(\tilde{C}) = 2C$. Таким образом, C — обильный "-Картье дивизор на X.

Пример 24. Пусть X' — проективная поверхность над k. Пусть $Y' = \coprod_{i=1}^{k} \operatorname{Spec} I_i$, где каждое I_i — локальная артинова k-алгебра, — нульмерная подсхема в X'. (Например, Y' может быть конечным числом замкнутых точек на X', или Y' может быть нульмерной подсхемой с носителем в замкнутой точке на X'.) Пусть $Y = \operatorname{Spec} k$ — точка, и $g : Y' \to Y$ — конечный морфизм. Тогда схема X, построенная как в теореме 34, является собственной над k (см. [71, § 6.1]) и также проективной в силу тех же соображений, что и в предыдущем примере (т.е. по [27, ex. 5.7., ch. 3]).

Пример 25. Рассмотрим общую ситуацию. Пусть $\pi : X' \to X$ — нормализация алгебраического многообразия X. Тогда кондуктор $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$, $\mathcal{I} \subset \pi_*\mathcal{O}_{X'}$ определяет замкнутые подсхемы $Y \subset X$ и $Y' \subset X'$ с конечным морфизмом $Y' \to Y$. Тогда (в виду теоремы 34) имеем $X \simeq X' \sqcup_{Y'} Y$, поскольку для любой схемы Z имеются очевидные изоморфизмы

$$\operatorname{Hom}(X, Z) \simeq \operatorname{Hom}(X', Z) \times_{\operatorname{Hom}(Y', Z)} \operatorname{Hom}(Y, Z) \quad \text{через } (\psi : X \to Z) \mapsto (\psi\pi, \psi|_Y).$$

Это замечание можно применить к серии известных примеров коммутирующих ДО, содержащих оператор Шредингера с потенциалом специального вида. В этих примерах коммутативные кольца изоморфны кольцам квазиинвариантов (см. подробности, например, в [69] или [47]), а нормализации последних колец равны $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ (более того, они Коэно-Маколеевы, как показано в [69, th.8]). Таким образом, во всех этих примерах (аффинные) спектральные многообразия представляют собой результат склейки замкнутых подсхем в $\mathbb{A}^n$. Отметим, что при $n > 1$ необходимо склеивать подсхемы коразмерности один в нормальном многообразии, чтобы получить не нормальное Коэно-Маколеево многообразие. Действительно, если мы склеим подсхемы коразмерности больше чем один и получим Коэно-Маколеево многообразие, оно должно быть нормально по критерию Серра, противоречие.

5.3 Геометрические свойства спектральных пучков

В этом разделе изучаются свойства спектрального пучка $\mathcal{F}$.

5.3.1 Когерентность спектрального пучка

Предложение 26. *Пусть $B \subset D$ — кольцо коммутирующих ДО, удовлетворяющее условиям теорем 18 и 24. Тогда тройка $(X, C, \mathcal{L})$ из теоремы 18 изоморфна тройке $(X, C, \mathcal{F})$ (части геометрических данных) из теоремы 24. В частности, пучок $\mathcal{F}$ когерентен. В этом случае также имеет место равенство*

$$\mathrm{rk}(\mathcal{F})(C^2) = \delta^2 = r^2,$$

где r — ранг данных $(X, j, \mathcal{F})$, соответствующих кольцу B.

Доказательство Напомним, что поверхность и дивизор из теоремы 24 строятся по градуированному кольцу $\tilde{A}$, которое определяется по кольцу $A \subset k[[u]]((t))$ (ср. раздел 3.5.3). Таким образом, имеется естественный изоморфизм $\alpha : B \to A$, $b \mapsto \psi_1(SbS^{-1})$, который индуцирует изоморфизм $\tilde{B} \simeq \tilde{A}$, откуда мы получаем изоморфизм поверхностей и дивизоров.

Более того, заметим, что отображение $\varphi : L \to W$, $l \mapsto \psi_1(lS^{-1} \mod x_1D + x_2D)$ дает изоморфизм B-модуля L и A-модуля W, поскольку SBS^{-1} — подкольцо псевдодифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, см. доказательство теоремы 21, и

$$\begin{aligned}\varphi(lb) = \psi_1(lbS^{-1} \mod x_1D + x_2D) = \psi_1(lS^{-1}(SbS^{-1}) \mod x_1D + x_2D) = \\ = \psi_1(lS^{-1} \mod x_1D + x_2D)\psi_1(SbS^{-1}) = \varphi(l)\alpha(b).\end{aligned}$$

Таким образом, φ индуцирует изоморфизм пучков $\mathcal{L}$ и $\mathcal{F}$, и этот изоморфизм согласован с изоморфизмом поверхностей.

Последее утверждение следует из доказательства теоремы 24 и замечания 30.

Непосредственным следствием теоремы 32 является

Предложение 27. *Если пучок $\mathcal{F}$ геометрических данных $(X, j, \mathcal{F})$ (см. также определение 45) когерентен, то он Коэно-Маколеев вдоль кривой C. В частности, $\mathcal{F}_P$ является свободным $\mathcal{O}_P$-модулем.*

Доказательство Так как пучок $\mathcal{F}$ без кручения, имеем $\dim \mathcal{F}_Q = \dim(\mathcal{O}_Q/\mathrm{Ann}\,(\mathcal{F}_Q)) = 2$ для любой точки $Q \in C$. Таким образом, нужно показать, что $\mathrm{depth}\,\mathcal{F}_Q = 2$.

В доказательстве теоремы 32 мы показали, что для любой $Q \in C$ существует регулярная последовательность в $\mathcal{O}_{X,Q}$, происходящая из последовательности $s^d/x_i, bs^{dl}/x_i^l$ в $\tilde{A}_{(x_i)}$ для некоторого i, где $bs^{dl}/x_i^l \notin I_{(x_i)}$ или, эквивалентно, $\nu_{t'}(b) = -dl$. Покажем, что эта последовательность регулярна также для $\mathcal{F}_Q$.

Как мы уже напоминали, $\mathcal{F} \simeq \mathrm{Proj}(\tilde{W})$. Таким образом, достаточно доказать, что элемент bs^{dl}/x_i^l не является делителем нуля в модуле $\tilde{W}_{(x_i)}/(s^d/x_i)\tilde{W}_{(x_i)}$. Пусть $g = as^{dk}/x_i^k \in \tilde{W}_{(x_i)}$ — такой элемент, что $g \notin (s^d/x_i)\tilde{W}_{(x_i)}$. Заметим, что последнее условие эквивалентно условию $\nu_t(a) = -dkr + j$, где $0 \le j < dr$ (см. аналогичные аргументы в доказательстве теоремы). Но тогда $\nu_t(ab) = -d(k+l)r + j$, откуда по той же причине

$$\frac{as^{dk}}{x_i^k} \cdot \frac{bs^{dl}}{x_i^l} \notin \left(\frac{s^d}{x_i}\right) \tilde{W}_{(x_i)}.$$

Значит, bs^{dl}/x_i^l — не делитель нуля и $\operatorname{depth} \mathcal{F}_Q = 2$ для любой $Q \in C$.

Последнее утверждение следует из [91, ch. 6, § 16, exer. 4], поскольку P — регулярная точка.

Оказывается, что ранг пучка $\mathcal{F}$ (в случае когда он когерентен) всегда больше либо равен рангу данных $(X, j, \mathcal{F})$. Равенство рангов — особо хороший случай, который описывается следующим критерием.

Предложение 28. *Пусть $(X, C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi)$ — геометрические данные ранга r из определения 45. Пучок $\mathcal{F}$ — когерентный пучок ранга r тогда и только тогда, когда индекс самопересечения дивизора $(C^2) = r$.*

Доказательство Как мы уже напоминали в доказательствах выше, $\mathcal{F} \simeq \operatorname{Proj}(\tilde{W})$. Поэтому, если пучок $\mathcal{F}$ когерентен ранга r, то в силу [27, ch.II, ex. 5.9] $H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \simeq W_{nd} \simeq k[u,t]/(u,t)^{ndr+1}$ для $n \gg 0$. Тогда, также как в доказательстве теоремы 18, пункт 4, получаем

$$\chi(X, \mathcal{F}(nC')) = \frac{(ndr+1)\cdot(ndr+2)}{2} \quad \text{for} \quad n \gg 0,$$

и из формулы (2.2) следует, что $C^2 = r$.

Обратно, пусть индекс самопересечения $(C^2) = r$. Пусть $C' = dC$ — очень обильный дивизор Картье. Тогда для любого когерентного пучка $\mathcal{F}'$ коэффициент при степени n^2 многочлена $\chi(X, \mathcal{F}'(nC'))$ равен $d^2(\operatorname{rk} \mathcal{F}')r/2$ (см. формулу (2.2)). Рассмотрим пучок $\mathcal{F}' = \operatorname{Proj}(\tilde{W}')$, где $\tilde{W}'$ — градуированный $\tilde{A}$-подмодуль в $\tilde{W}$, порожденный элементами из W_n для достаточно больших n. Заметим, что $\operatorname{rk} \mathcal{F}' \ge r$. Действительно, существуют элементы $w_1, \dots, w_r$ в W_n с $\nu_t(w_1) = -1, \dots, \nu_t(w_r) = -r$ (поскольку для $n = md$, $m \gg 0$, по определению 45 и разделу 3.5.3 имеем $W_{md} \simeq H^0(X, \mathcal{F}(mC')) \simeq k[[u,t]]/(u,t)^{mdr+1}$ и $W_{md} = f^{-md} H^0(X, \mathcal{F}(mC'))$, где пространство рассматривается как подпространство в $k[[u,t]]$ посредством вложения из определения 45, пункт 6), и следовательно, они линейно независимы над $\tilde{A}$. Таким образом, существует вложение $\tilde{A}^{\oplus r} \hookrightarrow \tilde{W}'$, и так как Proj — точный функтор (см. [63, prop. 2.5.4]), мы получаем вложение $\mathcal{O}_X^{\oplus r} \hookrightarrow \operatorname{Proj}(\tilde{W}')$, откуда $\operatorname{rk} \mathcal{F}' \ge r$. Те же рассуждения показывают, что пучок $\mathcal{F}'|_C = \operatorname{Proj}(\operatorname{gr} \tilde{W}')$ на C имеет ранг не меньше r.

С другой стороны, для больших n мы имеем

$$\chi(X, \mathcal{F}'(nC')) = \dim_k W'_{nd} \le \dim_k k[u,t]/(u,t)^{ndr+1},$$

так как $W'_{nd} \subset W_{nd} \simeq k[u,t]/(u,t)^{ndr+1}$, см. раздел 3.5.3. Таким образом, коэффициент при степени n^2 многочлена $\chi(X, \mathcal{F}'(nC'))$ не больше чем $d^2r^2/2$. Следовательно, $\operatorname{rk} \mathcal{F}' = r$ и $\operatorname{rk} \mathcal{F}'|_C = r$. Далее, $\chi(C, \mathcal{F}'|_C(nC')) = r^2d^2n + c(\mathcal{F}')$, где $c(\mathcal{F}') \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим теперь два таких когерентных пучка $\mathcal{F}'_1 \subset \mathcal{F}'_2 \subset \mathcal{F}$. Тогда на C имеются точные последовательности

$$0 \to A(nC') \to \mathcal{F}'_1|_C(nC') \to \mathcal{F}'_2|_C(nC') \to B(nC') \to 0$$

для всех n, где A и B — когерентные пучки с конечным носителем. Следовательно,

$$H^1(C, \mathcal{F}'_1|_C(nC')) = H^1(C, (\mathcal{F}'_1/A)|_C(nC')),$$

и для всех $n \gg 0$ таких что $H^1(C, (\mathcal{F}_1'/A)|_C(nC')) = 0$ имеем $H^1(C, \mathcal{F}_2'|_C(nC')) = 0$. Фиксируем одно такое n_0. Заметим, что это число зависит лишь от $\mathcal{F}_1'$, и не зависит от $\mathcal{F}_2'$.

Таким образом, для всех $n \geq n_0$ и для всех когерентных пучков $\mathcal{F}_2' \supset \mathcal{F}_1'$ имеем $H^1(C, \mathcal{F}_2'|_C(nC')) = 0$. Возьмем $q > n_0$ и рассмотрим пучок $\mathcal{F}_2' = \mathrm{Proj}(\tilde{W}')$, где $\tilde{W}'$ — градуированный $\tilde{A}$-подмодуль в $\tilde{W}$, порожденный элементами из W_{qd}. Тогда получаем

$$\chi(C, \mathcal{F}_2'|_C(qC')) = \dim H^0(C, \mathcal{F}_2'|_C(qC')) = qd^2r^2 + c(\mathcal{F}_2')$$

для некоторого числа $c(\mathcal{F}_2') \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что для всех n мы имеем $\mathrm{Proj}(\tilde{W}'(nd)) \simeq \mathrm{Proj}(\tilde{W}'^{(d)}(n))$ в силу [63, prop. 2.4.7] (напомним, что $\tilde{W}'(nd)$ эквивалентен $\oplus_{i=0}^{\infty} W'_{i+nd}s^i$), и $\mathrm{Proj}(\tilde{W}'^{(d)}(n)) \simeq \mathrm{Proj}(\tilde{W}'^{(d)})(n) \simeq \mathcal{F}_2'(nC')$ по [27, ch. II, prop. 5.12]. Таким образом,

$$H^0(X, \mathcal{F}_2'(nC')) = H^0(X, \mathrm{Proj}(\tilde{W}'(nd))).$$

Лемма 44. *(ср. лемму 25) Имеются естественные изоморфизмы*

$$H^0(X, \mathrm{Proj}(\tilde{W}'(nd))) = W'_{nd}.$$

Доказательство По определению, имеем $W'_{nd} = \tilde{W}'(nd)_0 \subset H^0(X, \mathrm{Proj}(\tilde{W}'(nd)))$.

Пусть $a \in H^0(X, \mathrm{Proj}(\tilde{W}'(nd)))$, $a \notin W'_{nd}$. Тогда $a = (a_1, \dots, a_k)$, где $a_i \in (\tilde{W}'(nd))_{(x_i)}$, и $x_i \in \tilde{A}_d$ — порождающие пространства $\tilde{A}_d$, такие что $x_1 = s^d$, $x_i = x_i's^d$ (где $x_i' \in A_d$) и $a_i = a_j$ в $\tilde{A}_{x_ix_j}$.

Имеем $a_i = \tilde{a}_i/x_i^{k_i}$ (где $\tilde{a}_i = a_i's^{k_id}$, $a_i' \in W'_{k_id+nd}$), $a_1 = \tilde{a}_1/s^{k_1}$ и $k_1 > 0$, так как $a \notin W'_{nd}$. Действительно, если $\tilde{a}_1 \in \tilde{W}'(nd)_0 = W'_{nd}$, то $a = \tilde{a}_1$, так как $\tilde{W}'$ — $\tilde{A}$-модуль без кручения, противоречие. Таким образом,

$$a_1' \in W'_{k_1+nd} \backslash W'_{k_1+nd-1}.$$

Тогда для $x_i' \in A_d \backslash A_{d-1}$ (такая порождающая x_i существует, поскольку все элементы из $A_{d-1} \subset A_d$ лежат в идеале, определяющем дивизор C) имеем ${x_i'}^{k_i} \in A_{dk_i} \backslash A_{dk_i-1}$, и следовательно $a_1'{x_i'}^{k_i} \in {W'}_{k_1+dk_i+nd} \backslash {W'}_{k_1+dk_i+nd-1}$. С другой стороны, имеется равенство $\tilde{a}_1 x_i^{k_i} = \tilde{a}_i s^{k_1}$, следовательно $a_1'{x_i'}^{k_i} = a_i'$, но

$$a_i' \in {W'}_{dk_i+nd} \subset W'_{k_1+dk_i+nd-1},$$

противоречие. Таким образом, $a \in W'_{nd}$.

Теперь имеем

$$H^0(C, \mathcal{F}_2'|_C(qC')) \supset H^0(X, \mathcal{F}_2'(qC'))/H^0(X, \mathcal{F}_2'((q-1)C')).$$

По лемме и по определению пучка $\mathcal{F}_2'$ имеем

$$H^0(X, \mathcal{F}_2'(qC'))/H^0(X, \mathcal{F}_2'((q-1)C')) = W'_{qd}/W'_{(q-1)d} = W_{qd}/W_{(q-1)d}.$$

Таким образом, получаем $c(\mathcal{F}_2') \geq \dim(W_{qd}/W_{(q-1)d}) - qr^2d^2$.

С другой стороны, для больших n

$$H^0(C, \mathcal{F}_2'|_C(nC')) = H^0(X, \mathcal{F}_2'(nC'))/H^0(X, \mathcal{F}_2'((n-1)C')) = W'_{nd}/W'_{(n-1)d} \subset W_{nd}/W_{(n-1)d}$$

и $\dim_k(W_{nd}/W_{(n-1)d}) - nr^2d^2 = \mathrm{const} = l$ для всех $n \geq 0$. Следовательно,

$$c(\mathcal{F}_2') = \dim H^0(C, \mathcal{F}_2'|_C(nC')) - nr^2d^2 \leq l.$$

Отсюда $c(\mathcal{F}_2') = l$, $W'_{nd}/W'_{(n-1)d} = W_{nd}/W_{(n-1)d}$ для всех $n \geq 0$, и следовательно $\tilde{W}' = \tilde{W}$, т.е. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2'$ — когерентный пучок ранга r на X.

Замечание 71. Пучок $\mathcal{F}$ из геометрических данных ранга r может не быть когерентным, как показывает следующий пример. Пусть $W = \langle u^i t^{-j} \quad |i,j \geq 0, i-j \leq 0\rangle$ и $A = k[ut^{-2}, t^{-2}]$ — два подпространства в $k[[u]]((t))$. Тогда легко видеть, что W — не конечно порожденный A-модуль. Таким образом, геометрические данные, построенные по этим подпространствам (см. теорему 23) будут иметь квазикогерентный, но не когерентный пучок $\mathcal{F}$.

Когерентность пучка $\mathcal{L}$, построенного по кольцу ДО в теореме 18, следовала из специальных условий на кольцо (см. пункт 1 этой теоремы). Эти условия могут не выполняться для общего 1-квази-эллиптического вполне допустимого кольца (см. теорему 24), даже если это кольцо является кольцом ДО, как показывает пример выше: действительно, кольцо A выше соответствует кольцу $B = k[\partial_2^2, \partial_1\partial_2]$, см. теорему 21. Тем не менее, предложение выше гарантирует, что для поверхности и дивизора, удовлетворяющих некоторым геометрическим условиям, пучок $\mathcal{F}$ должен быть когерентным.

Замечание 72. Ранг пучка $\mathcal{F}$ из геометрических данных в определении 45 может быть больше чем ранг данных, даже если пучок $\mathcal{F}$ когерентен (как это легко следует из рассуждений в предложении 28, ранг $\mathcal{F}$ не может быть меньше, чем ранг данных).

Например, рассмотрим кольцо ДО $B = k[\partial_2, \partial_1\partial_2 + \partial_1^2]$. Оно удовлетворяет условиям теоремы 18. Это также вполне допустимое кольцо, $N_B = 1$, так что ранг соответствующих геометрических данных равен 1 (см. теорему 23). С другой стороны, для больших m мы имеем $\dim_k B_m \sim m^2/4$ и $\dim_k L_m \sim m^2/2$ (в обозначении теоремы 18). Следовательно, $\mathrm{rk}\,\mathcal{F} = 2$ (см. доказательство теоремы 18).

Таким образом, в общем случае имеем $\mathrm{rk}\,\mathcal{F} \geq r$, где r — ранг данных.

5.3.2 Отображение ограничения ζ и Коэно-Маколеевость спектрального пучка

Для дальнейшего изучения свойств спектральных пучков, а также для построения явных примеров спектральных данных и соответствующих им колец коммутирующих операторов определяется расширение функтора, строящего по геометрическим данным соответствующую им пару Шура, на более широкий класс пучков.

Пусть X, C, C', P и $\mathcal{O}_{X,P} \subset R$ (для вложения π или для морфизма $j : T \to X$) обозначают то же, что и в разделе 3.5.2. Пусть также $A \subset k[[u]]((t)) = R[t^{-1}]$ строится так же как и в разделе 3.5.3. Начнем со следующего замечания.

Замечание 73. Заметим, что мы можем построить похожие пространства $W_n, \tilde{W}$ для любых пучков без кручения $\mathcal{F}$ (а не только для пучков из геометрических данных), для которых дополнительно определено вложение $\mathcal{O}_P$-модулей $\mathcal{F}_P \hookrightarrow k[[u,t]]$. Наиболее важный для нас пример таких пучков с вложением — когерентные Коэно-Маколеевы пучки без кручения ранга один (или даже более общие когерентные пучки $\mathcal{F}$ локально свободные ранга один в точке P), где мы дополнительно предполагаем, что ранг данных $r = 1$ (т.е. вложение π задает изоморфизм $\mathcal{O}_{X,P} \simeq R$).

В этом случае слой $\mathcal{F}_P$ — свободный $\mathcal{O}_P$-модуль. Пусть $\phi' : \mathcal{F}_P \simeq \mathcal{O}_P$ — некоторая тривиализация; мы можем определить вложение ϕ как композицию тривиализации ϕ' с изоморфизмом π. Заметим, что при выборе другой тривиализации пучка $\mathcal{F}$ новое пространство W будет отличаться от старого умножением на элемент $a \in k[[u,t]]^*$, а кольцо A не изменится. Отметим также, что свойство $W_{nd} \simeq H^0(X, \mathcal{F}(nC'))$ может не выполняться для произвольных пучков.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения. Если $W \subset R[t^{-1}]$ — A-модуль, то определена фильтрация $W_n = t^{-nr}R \cap W$ (совместимая с фильтрацией на A), и как следствие определены $\tilde{A}$-модули

$$\tilde{A}(i) \quad (\tilde{A}(i)_k = \tilde{A}_{k+i}), \quad \tilde{W}(i) \quad (\tilde{W}(i)_k = \tilde{W}_{k+i})$$

и квазикогерентные пучки на X:

$$\mathcal{B}_i = \mathrm{Proj}(\tilde{A}(i)), \quad \mathcal{F}_i = \mathrm{Proj}(\tilde{W}(i)),$$

причем $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}_{i+1}$, $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{i+1}$. Заметим, что

1. $\mathcal{B}_{id} \simeq \mathcal{O}_X(iC')$, и если W происходит из геометрических данных, то $\mathcal{F}_{id} \simeq \mathcal{F}(iC')$. В общем случае $\mathcal{F}_{nd} \simeq \mathcal{F}_0(dC')$, поскольку по [63, prop.2.4.7] имеем $\mathcal{F}_{nd} = \mathrm{Proj}(\tilde{W}(nd)) \simeq \mathrm{Proj}(\tilde{W}^{(d)}(n))$ и $\mathrm{Proj}(\tilde{W}^{(d)}(n)) \simeq \mathrm{Proj}(\tilde{W}^{(d)})(n) \simeq \mathcal{F}_0(nC')$ для любого n.

2. Если $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок с вложением $\mathcal{F} \subset j_*\mathcal{O}_T$ (эквивалентно, $\mathcal{F}_P \subset R$), индуцирующим вложение $W = H^0(X\backslash C, \mathcal{F}) \subset R[t^{-1}]$, то $\mathcal{F}(iC') \subseteq \mathcal{F}_{id}$.

3. Если $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок без кручения, и если $\mathcal{F}_P$ — свободный модуль ранга один, то существует вложение $\mathcal{F}_P \subset R$ (определенное выбором образующего при изоморфизме $\mathcal{F}_P \simeq \mathcal{O}_{X,P} \subset R$). Получающиеся пучки $\mathcal{F}_i$ не зависят от выбора образующего с точностью до изоморфизма, согласованного с вложениями $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{i+1}$.

4. Из свойств (3.21), (3.22) легко следует, что пучки

$$\mathcal{B}_i/\mathcal{B}_{i-1} \simeq \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{i+n}/A_{i+n-1}), \quad \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} \simeq \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} W_{i+n}/W_{i+n-1})$$

являются когерентными пучками без кручения на $C \simeq \mathrm{Proj}(\mathcal{B}_0/\mathcal{B}_{-1})$[1].

Определение 76. Для любого пучка без кручения $\mathcal{F}$, для которого дополнительно определено вложение $\mathcal{O}_P$-модулей $\mathcal{F}_P \hookrightarrow k[[u,t]]$, определим отображение (отображение "ограничения"):

$$\zeta : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_0/\mathcal{F}_{-1} \tag{5.2}$$

из множества пучков без кручения на поверхности X в множество пучков без кручения на кривой C.

Замечание 74. Для пучков $\mathcal{F}$, удовлетворяющих свойству $W_{nd} \simeq H^0(X, \mathcal{F}(nC'))$ для всех $n \gg 0$, имеется изоморфизм $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}_0$ в силу [118, Lemma 9] и [27, Ch.2, ex. 5.9]. Если $\mathcal{F}$ — пучок без кручения ранга один локально свободный в точке P, то по замечанию 73 для другого выбора тривиализации в P имеются изоморфизмы $\mathcal{F}'_k \simeq \mathcal{F}_k$ для всех k. Таким образом, в этом случае определение ζ не зависит от тривиализации. На самом деле, в этом случае ζ зависит лишь от пучка $\mathcal{F}$ (см. замечание 76 ниже).

С другой стороны, для любого пучка без кручения $\mathcal{F}$ и любого $m > 0$ имеются точные последовательности

$$0 \to \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-mC') \to \mathcal{F} \to \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-mC')) \to 0.$$

---

[1] Мы подразумеваем здесь и далее в похожих ситуациях обратные образы фактор-пучков на C. Заметим, что эти обратные образы канонически изоморфны пучкам $\mathrm{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{i+n}/A_{i+n-1})$, $\mathrm{Proj}(\bigoplus_{n=0}^{\infty} W_{i+n}/W_{i+n-1})$, где градуированные модули рассматриваются как $\mathcal{B}_0/\mathcal{B}_{-1}$-модули. Действительно, для любого $f \in A_d$ и для любого градуированного $\tilde{A}$-модуля M имеется изоморфизм модулей $(M \otimes_{\tilde{A}} (\mathcal{B}_0/\mathcal{B}_{-1}))_{(f)} \simeq M_{(f)} \otimes_{\tilde{A}_{(f)}} (\mathcal{B}_0/\mathcal{B}_{-1})_{(f)}$, откуда следует, что обратные образы пучков $\mathcal{B}_i/\mathcal{B}_{i-1}$, $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$ изоморфны пучкам $\mathrm{Proj}(M)$, $\mathrm{Proj}(N)$ на C, где $M = (\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{i+n}/A_{i+n-1}) \otimes_{\tilde{A}} (\mathcal{B}_0/\mathcal{B}_{-1})$, $N = (\bigoplus_{n=0}^{\infty} W_{i+n}/W_{i+n-1}) \otimes_{\tilde{A}} (\mathcal{B}_0/\mathcal{B}_{-1})$. Но модули M, N изоморфны $\mathcal{B}_0/\mathcal{B}_{-1}$-модулям $(\bigoplus_{n=0}^{\infty} A_{i+n}/A_{i+n-1})$, $(\bigoplus_{n=0}^{\infty} W_{i+n}/W_{i+n-1})$.

Поэтому обратный образ пучка $\mathcal{F}_0$ на схеме $(C, i^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-mC')))$ (где $i : C \hookrightarrow X$ обозначает вложение) изоморфен обратному образу пучка $\mathcal{F}_0/\mathcal{F}_{-md}$.

Всюду далее мы будем обозначать обратный образ пучка $\mathcal{F}$ на схеме $(C, i^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-mC')))$ через $\mathcal{F}|_{mC'}$.

Отметим, что схема $(C, i^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-mC')))$ неприводима, так как кривая C неприводима. Поэтому нильрадикал кольца $\tilde{A}/\tilde{A}(-md)$ прост. Снова из формул (3.21), (3.22) следует, что $Ass(\tilde{W}/\tilde{W}(-md))$ совпадает с этим нильрадикалом. Следовательно, пучок $\mathcal{F}_0|_{mC'}$ имеет чистую размерность один (ср. [75, p.3]), поскольку любое ограничение ненулевого сечения $a \in \mathcal{F}_0|_{mC'}(U)$ (где U — произвольное открытое подмножество в C) на меньшее открытое подмножество не обращается в ноль. А значит, для любого пучка без кручения ранга один локально свободного в точке P пучок $\mathcal{F}|_{mC'} \subset \mathcal{F}_0|_{mC'}$ имеет чистую размерность один.

Отметим еще, что для любого пучка без кручения $\mathcal{F}$ такого, что его ограничения $\mathcal{F}|_{mC'}$ на схеме $(C, i^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-mC')))$ имеют чистую размерность один, имеет место следующее свойство:

Лемма 45. *Пусть $\mathcal{F}$ — пучок без кручения на X, для которого дополнительно определено вложение $\mathcal{O}_P$-модулей $\mathcal{F}_P \hookrightarrow k[[u,t]]$, удовлетворяющее следующему условию: если $w \in W_{nd}$, то $w \in f^{-nd}(\mathcal{F}_P)$. Допустим, что его ограничения $\mathcal{F}|_{mC'}$ имеют чистую размерность один для всех $m > 0$.*

Тогда $H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \simeq W_{nd}$ для всех $n \geq 0$.

Замечание 75. Условие на вложение $\mathcal{O}_P$-модулей из леммы выполняется, например, для всех пучков без кручения ранга один локально свободных в точке P (см. замечание 73) и для когерентных пучков ранга r из геометрических данных (где r совпадает с рангом данных), поскольку $\mathcal{O}_P$ — регулярное факториальное кольцо. Другие примеры см. в теореме 35.

Доказательство По определению пространства W

$$W_{nd} = \{w \in W | f^{nd}w \in k[[u]][[t]]\} = \{w \in W | \nu_t(f^{nd}w) \geq 0\}.$$

Также по определению $\chi_1(H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \subset W_{nd}$. Пусть $w \in W_{nd}$, $w \neq 0$. Покажем, что $w \in \chi_1(H^0(X, \mathcal{F}(nC'))$. Имеем:

$$w \in \chi_1(H^0(X, \mathcal{F}(mC'))$$

для некоторого m. Так как $\mathcal{F}$ — пучок без кручения, и C' — дивизор Картье, имеют место вложения

$$\chi_1(H^0(X, \mathcal{F}(kC')) \subset \chi_1(H^0(X, \mathcal{F}(nC'))$$

для всех $k \leq n$. Предположим, что $m > n$. Допустим обратное: $w \notin \chi_1(H^0(X, \mathcal{F}(nC'))$. Пусть $b \in H^0(X, \mathcal{F}(mC'))$ обозначает прообраз w: $w = \chi_1(b)$.

Существует окрестность $U(P)$ точки P, где обильный дивизор Картье C' определен элементом f^d. Так как $w \in W_{nd}$, мы получаем $w \in f^{-nd}(\mathcal{F}_P)$, так что $b|_{U(P)} \in \Gamma(U(P), \mathcal{F}(nC'))$ и $b|_{U(P)} \neq 0$ (так как $\mathcal{F}$ без кручения). Теперь мы можем написать коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} & & b & \hookrightarrow & H^0(C, \mathcal{F}(mC')|_{(m-n)C'}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to \Gamma(U(P), \mathcal{F}(nC')) & \to & \Gamma(U(P), \mathcal{F}(mC')) & \stackrel{\alpha}{\to} & H^0(U(P) \cap C, \mathcal{F}(mC')|_{(m-n)C'}) \end{array},$$

где вертикальные стрелки — вложения. Действительно, правая стрелка является вложением, поскольку $\mathcal{F}(mC')|_{(m-n)C'}$ имеет чистую размерность один по предположению.

Но $\alpha(b) = 0$, противоречие. Таким образом, $b \in H^0(X, \mathcal{F}(nC'))$.

В силу предложения 27 все пучки $\mathcal{F}$ ранга один, происходящие из геометрических данных из определения 45, являются Коэно-Маколеевыми вдоль C. Из определения 45 (пункт 6) легко следует, что все такие пучки обладают свойством: $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{F}$, $P \notin \mathrm{Supp}(\mathcal{F}/\mathcal{O}_X)$.

Лемма 46. *Пусть $\mathcal{F}$ — пучок без кручения ранга один на X. Предположим, что $\mathcal{F}$ Коэно-Маколеев вдоль C.*

Тогда для некоторой тривиализации $\hat{\phi}: \hat{\mathcal{F}}_P \simeq k[[u,t]]$ (см. замечание 73)

$$W_{nd} \simeq H^0(X, \mathcal{F}(nC'))$$

для всех $n \geq 0$, или, эквивалентно, $\mathcal{F}_0 \simeq \mathcal{F}$.

Доказательство Доказательство сразу следует из замечаний 74, 75 и леммы 45, так как $\mathcal{F}$ локально свободен в P.

Замечание 76. Если $\mathcal{F}$ — пучок без кручения ранга один и локально свободен в P, то $\zeta(\mathcal{F}) \simeq i^*(\mathcal{F})$, где i обозначает то же отображение, что и в замечании 74. Действительно, $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}_0$ по лемме 45, замечаниям 74, 75. Используя рассуждения из сноски 3 получаем $i^*(\mathcal{F}_0) \simeq \mathrm{Proj}(\tilde{W} \otimes_{\tilde{A}} (\tilde{A}/\tilde{A}(-1)))$. Легко видеть, что $(\tilde{A}/\tilde{A}(-1))$-модули $(\tilde{W} \otimes_{\tilde{A}} (\tilde{A}/\tilde{A}(-1)))$ и $(\tilde{W}/\tilde{W}(-1) \otimes_{\tilde{A}} (\tilde{A}/\tilde{A}(-1)))$ изоморфны. Но опять же из рассуждений сноски 3 имеем $i^*(\mathcal{F}_0/\mathcal{F}_{-1}) \simeq \mathrm{Proj}(\tilde{W}/\tilde{W}(-1) \otimes_{\tilde{A}} (\tilde{A}/\tilde{A}(-1)))$.

Следствие 22. *Для любого $k \geq 0$ имеются изоморфизмы $H^0(X, \mathcal{F}_k(nC')) \simeq W_{nd+k}$ при всех $n \geq 0$.*

Доказательство очевидно.

Теперь мы можем доказать следующие необходимые условия на геометрические спектральные данные.

Теорема 35. *Пусть $(X, C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi)$ — геометрические данные, соответствующие 1-квазиэллиптическому вполне допустимому кольцу ДО $B \subset D$, удовлетворяющему условиям теорем 18 и 24.*

Тогда $\mathcal{F}$ — Коэно-Маколеев пучок на X.

Замечание 77. Если кольцо B максимально, то по теореме 33 поверхность X также Коэно-Маколеева.

Доказательство Рассмотрим маколеевизацию $CM(\mathcal{F})$ пучка $\mathcal{F}$ (см. раздел 5.2.1). В силу предложения 27 пучок $\mathcal{F}$ коэно-маколеев вдоль C; в частности, $\mathcal{F}_P \simeq CM(\mathcal{F})_P$. Рассмотрим образ $W' = \chi_1(H^0(X \backslash C, CM(\mathcal{F})))$ в $k[[u]]((t))$, где для определения χ_1 мы используем вложение ϕ пучка $\mathcal{F}$ (ср. параграф 3.5.2). Тогда мы утверждаем, что этот образ как линейное пространство порождается конечным числом элементов над пространством $W = \chi_1(H^0(X \backslash C, \mathcal{F}))$:

$$W' = \langle W, w_1, \dots, w_k \rangle,$$

где $w_1, \dots, w_k \notin W$, $w_1, \dots, w_k \in k[[u]]((t))$.

Чтобы доказать утверждение прежде всего заметим, что пучок $CM(\mathcal{F})|_{mC'} = \mathcal{F}|_{mC'}$ имеет чистую размерность один для любого $m > 0$ (обозначения см. в замечании 74), так как $\mathcal{F}$ коэно-маколеев вдоль C.

Покажем, что условие на пространство W' из леммы 45 выполнено. Это условие верно для элементов w из пространства W, соответствующего пучку $\mathcal{F}$, потому что $W_{nd} \simeq H^0(X, \mathcal{F}(nC'))$. Ясно, что для любого элемента w из W' мы имеем $w \in f^{-md}\mathcal{F}_P$

для некоторого m. Возьмем любой элемент $w \in W'_{nd}$. Тогда для всех достаточно больших $m > 0$

$$f^{-md}w - c_1w_1 - \ldots - c_kw_k = a \in W_{(n+m)d}$$

для некоторых $c_1, \ldots, c_k \in k$. Итак, $f^{nd}w = f^{(n+m)d}a + f^{(n+m)d}(c_1w_1 + \ldots + c_kw_k) \in \mathcal{F}_P$.

Теперь по лемме 45 имеем $H^0(X, CM(\mathcal{F})(nC')) \simeq W'_{nd}$ для всех $n \geq 0$.

Как следствие мы получаем, что для достаточно большого $n > 0$

$$W'_{nd}/W'_{(n-1)d} \simeq H^0(C, CM(\mathcal{F})(nC')|_{C'}) = H^0(C, \mathcal{F}(nC')|_{C'}) \simeq W_{nd}/W_{(n-1)d}.$$

Очевидно, $W'_{nd} \supset W_{nd}$ для всех n. Таким образом, наше утверждение доказано.

По теоремам 23, 20 существует единственный оператор S, удовлетворяющий условию A_1, такой что $\psi_1^{-1}(W) = W_0S$ (отображение ψ_1 определено в 10), где $W_0 = k[z_1^{-1}, z_2^{-1}]$. Более того, $B = S\psi_1^{-1}(A)S^{-1}$, где
$A = \chi_1(H^0(X \backslash C, \mathcal{O}_X))$. Так как $W' \cdot A \subset W'$, имеем:

$$(\psi_1^{-1}(W')S^{-1}) \cdot B \subset (\psi_1^{-1}(W')S^{-1}), \quad \psi_1^{-1}(W')S^{-1} = \langle W_0, \tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_k \rangle,$$

где $\tilde{w}_i = \psi_1^{-1}(w_i)S^{-1}$. Каждый ряд $\tilde{w}_i$ может быть записан в виде:

$$\tilde{w}_i = w'_i + w''_i, \quad w'_i = \sum_{k \geq 0, l > 0, k+l = q_i} c_{kl} z_1^{-k} z_2^l, \quad w''_i = \sum_{k \geq 0, l > 0, k+l < q_i} b_{kl} z_1^{-k} z_2^l.$$

До конца доказательства будем называть числа q_i порядками элементов w'_i: $\mathrm{ord}(w'_i) = q_i$. Так как кольцо B удовлетворяет свойству (3.18), то для любого $n > 0$ символы операторов P^n, Q^n удовлетворяют тому же свойству (3.18) с числами k, l замененными на kn, ln. Для всех $n \gg 0$ и для любого $\tilde{w}_i$ должно выполняться

$$\tilde{w}_i P^n \in (\psi_1^{-1}(W')S^{-1}), \quad \tilde{w}_i Q^n \in (\psi_1^{-1}(W')S^{-1}).$$

Прямые вычисления показывают, что эти элементы можно записать в виде

$$\tilde{w}_i P^n = w'_i \sigma(P)^n + \text{чл. меньшего порядка},$$
$$\tilde{w}_i Q^n = w'_i \sigma(Q)^n + \text{чл. меньшего порядка}$$

Следовательно, поскольку $n \gg 0$, должно быть $w'_i\sigma(P)^n, w'_i\sigma(Q)^n \in W_0$. Значит, $w'_i\sigma(P)^n, w'_i\sigma(Q)^n$ должны быть однородными многочленами степеней $q_i + nk$, $q_i + n(l+1)$. Так как характеристические схемы операторов P и Q не пересекаются, это означает, что w'_i должен быть однородным многочленом степени q_i. Но тогда, так как $w'_i \notin W_0$ и в силу свойства (3.18), многочлены $w'_i\sigma(P)^n, w'_i\sigma(Q)^n$ будут содержать ненулевой моном типа $cz_1^{-a}z_2^b \notin W_0$ с $b > 0$, противоречие. Значит, все $\tilde{w}_i$ должны быть нулевыми, и $W' = W$, откуда $CM(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Чтобы получить дальнейшие необходимые условия на геометрические спектральные данные, нам необходимо будет воспользоваться результатами из главы 4. Прежде всего, нам надо сравнить пары Шура из глав 3 и 4.

5.3.3 Сравнение пар (A, W) и $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$

Общей иллюстрацией этого раздела служит следующая диаграмма и теорема.

$$\begin{gathered}\{\text{Комм. подалгебры в } D\} \\ \bigcap \\ \{\text{Комм. подалгебры в } \hat{D}\}\end{gathered}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \swarrow\nearrow\nwarrow\searrow & \\
\{\text{Пары } (A,W) \text{ в } k[[u]]((t))\} & \longleftrightarrow & \{\text{Геом. данные } (X,j,\mathcal{F})\} \\
\bigcap & & \bigcap \\
\{\text{Пары } (\mathbb{A},\mathbb{W}) \text{ в } k((u))((t))\} & \longleftrightarrow & \{\text{Геом. данные с риббонами}\}
\end{array}$$

Теорема 36. *Пусть* (A, W) *— пара Шура, соответствующая геометрическим данным* $(X, j, \mathcal{F})$*, где* X *— Коэно-Маколеева поверхность, а* $\mathcal{F}$ *— когерентный пучок ранга 1. Пусть* $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ *— пара, соответствующая данным на риббоне, построенным по данным* $(X, j, \mathcal{F})$*. Тогда*

- $$A = \mathbb{A} \cap k[[u]]((t)), \quad W = \mathbb{W} \cap k[[u]]((t)).$$
- $\mathcal{H}^i(\mathbb{W}) \simeq H^i(X, \mathcal{F})$, $i = 0, 1, 2$; $H^1(X, \mathcal{F}) = H^2(X, \mathcal{F}) = 0$,
$$\chi(X, \mathcal{F}(nC')) = \frac{(nd+1)(nd+2)}{2}.$$

В частности, геометрические данные $(X, j, \mathcal{F})$ *однозначно восстанавливаются по соответствующим им данным на риббоне.*

Для доказательства теоремы докажем сначала несколько необходимых утверждений о парах $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$.

Три свойства пары $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$

Первое свойство заключается в следующем. Пусть пара $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ является образом геометрических данных с риббоном, соответствующих некоторым геометрическим данным ранга один из определения 45 с когерентным пучком $\mathcal{F}$ ранга один. Напомним (см. определение 5.2, замечание 74), что для таких пучков без кручения ранга 1 мы определили отображение ζ (5.2). Тогда (см. доказательство теоремы 27)

$$\mathbb{A}(nd) \simeq \text{образу квинтета } (C, P, \mathcal{O}_C(nC'), u, id) \text{ в } k((u)) \text{ при отображении Кричевера,} \quad (5.3)$$

где $C' = dC$ — обильный дивизор Картье как и выше (заметим, что $\mathcal{O}_C(nC') \simeq \zeta(\mathcal{O}_X(nC'))$), и

$$\mathbb{W}(nd+k) \simeq \text{образу } (C, P, \zeta(\mathcal{F}_k(nC')), u, \phi) \text{ при отображении Кричевера,} \quad (5.4)$$

где $0 \le k < d$ и ϕ — некоторая тривиализация пучка $\zeta(\mathcal{F}_k(nC'))$ в точке P на C (заметим, что $\zeta(\mathcal{F}_k(nC')) \simeq (\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k-1})(nC')$). Из одномерной теории КП (см. (1.36)) имеем

$$H^0(C, (\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k-1})(nC')) \simeq \mathbb{W}(nd+k) \cap k[[u]],$$

$$H^1(C, (\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k-1})(nC')) \simeq k((u))/(\mathbb{W}(nd+k) + k[[u]]) \quad (5.5)$$

Второе свойство заключается в следующем. Предположим, что пара $\mathbb{A}, \mathbb{W} \in k((u))((t))$ происходит из геометрических данных ранга один. Тогда

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(nC')) \simeq \mathbb{A} \cdot t^{nd} \cap k[[u]]((t)) \cap k((u))[[t]], \quad (5.6)$$

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(nC')) \simeq \frac{\mathbb{A} \cdot t^{nd} \cap (k[[u]]((t)) + k((u))[[t]])}{\mathbb{A} \cdot t^{nd} \cap k[[u]]((t)) + \mathbb{A} \cdot t^{nd} \cap k((u))[[t]]}, \quad (5.7)$$

$$H^2(X, \mathcal{O}_X(nC')) \simeq \frac{k((u))((t))}{\mathbb{A} \cdot t^{nd} + k[[u]]((t)) + k((u))[[t]]}. \tag{5.8}$$

Для доказательства см. замечание 49 и лемму 36 (замечание 49 отсылает к доказательствам в статьях [23, 25], где C была дивизором Картье; в общем случае нетрудно усовершенствовать доказательство из этих статей; однако, нам будет нужно это свойство лишь тогда, когда известно, что C — дивизор Картье). В частности, если C — дивизор Картье, то

$$\mathcal{O}_X(nC) \simeq \mathcal{O}_{X,n}, \quad \zeta(\mathcal{O}_X(nC)) \simeq \mathcal{O}_C(nC) \tag{5.9}$$

для любого n (ср. замечание 74).

Третье свойство заключается в следующем.

$$\text{Если } A \text{ — кольцо Коэно-Маколея, то } A = \mathbb{A} \cap k[[u]]((t)), \tag{5.10}$$

где A, W — подпространства в $k[[u]]((t))$, строящиеся по геометрическим данным как в главе 3. Аналогичное свойство для пространства W:

$$W = \mathbb{W} \cap k[[u]]((t))$$

является одним из утверждений теоремы 36.

Свойство 5.10 следует из такого предложения:

Предложение 29. *Если $q, q' \in \mathcal{Q}_r$, и поверхности X, X' Коэно-Маколеевы, и данные $(C, \mathcal{A}, P, u, t)$, $(C', \mathcal{A}', P', u', t')$, построенные с помощью отображения Φ (см. раздел 4.1.4 для обозначений) из q и q', изоморфны, то X изоморфна X'.*

Доказательство Идея доказательства состоит в том, чтобы применить рассуждения из [23, th.5,6] к данным $(X, dC, \tilde{P}, \mathcal{O}_X)$, $(X', d'C', \tilde{P}', \mathcal{O}_{X'})$, где dC, $d'C'$ — обильные дивизоры Картье, и $\tilde{P}$, $\tilde{P}'$ — обильные дивизоры Картье на dC, $d'C'$, индуцированные дивизорами Картье P, P' на C, C' и локальными параметрами u, u' (ср. лемму 34). Так как данные с риббонами изоморфны, их образы при обобщенном отображении Кричевера совпадают (см. теорему 27). В этой ситуации алгебры $A_{(0)}(\mathcal{O}_X)$, $A_{(0)}(\mathcal{O}_{X'})$ совпадают (см. доказательство теоремы [23, th.6]), следовательно, поверхности X, X', определенные по этим алгебрам, будут изоморфны.

Замечание 78. Как следует из [23, th.5,6], $A_{(0)}(\mathcal{O}_X) = \mathbb{A} \cap k[[u]]((t))$. Отсюда получается равенство (5.10).

Доказательство теоремы. Первая часть первого пункта была доказана в замечании. Докажем вторую часть. По определению пучка $\mathcal{F}$, по замечанию 74 и по лемме 45 имеем

$$H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \simeq W_{nd}, \quad W_{nd+k}/W_{nd+k-1} \simeq H^0(C, \zeta(\mathcal{F}_k) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_X(nC')|_C) \tag{5.11}$$

для всех $n \ge 0$. В силу (1.36) и (5.4) имеем

$$H^0(C, \zeta(\mathcal{F}_k) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_X(nC')|_C) \simeq \mathbb{W}(nd+k) \cap k[[u]].$$

Отсюда и из (5.11) следует, что $W = \mathbb{W} \cap k[[u]]((t))$.

Утверждение про эйлерову характеристику пучка следует опять из определения. Изоморфизм нулевых когомологий следует из определений пучка (ср. лемму 45) и картинных когомологий. Докажем, что остальные когомологии (как картинные, так и обычные) равны нулю.

Из утверждения об эйлеровой характеристике пучка $\mathcal{F}$ и из (5.11) следует $h^1(X, \mathcal{F}) - h^2(X, \mathcal{F}) = 0$.

Для каждого $m \geq 0$ по свойству (1.37) существует открытое подмножество U_m в C, такое что

$$H^0(C, \zeta(\mathcal{F}_k) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_X(mC')|_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C(-(md+k+1)P)) = \\ H^1(C, \zeta(\mathcal{F}_k) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_X(mC')|_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C(-(md+k+1)P)) = 0 \quad (5.12)$$

для любой точки $P \in U_m$. В частности, отсюда следует, что $h^1(C, \zeta(\mathcal{F}_k) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_X(nC')|_C) = 0$ для любого $0 \leq k < d$ и $n \geq 0$.

Напомним, что имеются точные последовательности

$$0 \to \mathcal{F}_k \to \mathcal{F}_{k+1} \to \zeta(\mathcal{F}_{k+1}) \to 0$$

для любого $0 \leq k$. Тогда из длинной точной последовательности когомологий и из (5.11) получаем $H^1(X, \mathcal{F}_k) \simeq H^1(X, \mathcal{F}_{k+1})$ для любого $k \geq 0$. Значит, все эти группы равны нулю, так как $H^1(X, \mathcal{F}_{k+nd}) = H^1(X, \mathcal{F}_k(nC')) = 0$ для всех $n \gg 0$. Следовательно, $H^2(X, \mathcal{F}) = 0$ (а потому и $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$). Из пункта ii) получаем (так как $\operatorname{Supp} W = \langle u^i t^j, i+j \leq 0, i \geq 0, j \leq 0 \rangle$)

$$\mathbb{W} \cap (k[[u]]((t)) + k((u))[[t]]) \subset \mathbb{W} \cap k[[u]]((t)) + \mathbb{W} \cap k((u))[[t]],$$

откуда

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{W}) = \frac{\mathbb{W} \cap (k[[u]]((t)) + k((u))[[t]])}{\mathbb{W} \cap k[[u]]((t)) + \mathbb{W} \cap k((u))[[t]]} = 0.$$

В силу (1.36) и (5.4) имеем

$$0 = H^1(C, \zeta(\mathcal{F}_k) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_X(nC')|_C) \simeq \frac{k((u))}{\mathbb{W} + k[[u]]}$$

для всех $k \geq 0$. Следовательно,

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{W}) = \frac{k((u))((t))}{\mathbb{W} + k[[u]]((t)) + k((u))[[t]]} = 0.$$

5.3.4 Необходимые условия на геометрические спектральные данные

Теперь мы можем сформулировать дальнейшие необходимые условия.

Следствие 23. *Пусть $(X, j, \mathcal{F})$ — геометрические данные, соответствующие максимальному коммутативному кольцу дифференциальных операторов $B \subset D$ ранга 1.*

Тогда

- *X — Коэно-Маколеева поверхность,*
- *C — обильная рациональная кривая ($\mathbb{Q}$-Картье дивизор) с $(C^2) = 1$,*
- *$\mathcal{F}$ — Коэно-Маколеев пучок с*

$$\chi(X, \mathcal{F}(nC')) = \frac{(nd+1)(nd+2)}{2}, \\ H^0(C, \zeta(\mathcal{F}_k)(-(k+1)P)) = H^1(C, \zeta(\mathcal{F}_k)(-(k+1)P)) = 0,$$

где $0 \leq k < d$, и $\mathcal{F}|_C \simeq n_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$, где $n : \mathbb{P}^1 \to C$ — морфизм нормализации. Кроме того, такой пучок не является прямым образом пучка с аналогичными свойствами на конечном накрытии X.

Доказательство Первые два свойства следуют из теорем 33 и 18. Утверждение про Коэно-Маколеевость пучка $\mathcal{F}$ и его полином Гильберта были доказаны в теореме 36. Утверждение про когомологии следует из (1.36) и (5.4). Далее, $\mathcal{F}|_C \simeq \mathrm{Proj}(gr(\tilde{W}))$ (см. лемму 45 и свойства пучков в разделе 5.3.2). Но $gr_n(\tilde{W}) \simeq L_n/L_{n-1}$ для всех больших n (см. предложение 26 и доказательство теоремы 18), а

$$gr(B) \subset L_n/L_{n-1} \simeq k[\xi_1, \dots \xi_n]$$

(см. (2.4)). Поэтому $\mathrm{Proj}(gr(\tilde{W})) \simeq n_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$.

Наконец, если спектральный пучок является прямым образом пучка с аналогичными свойствами, то это означает, в переводе на язык пар Шура, что исходная пара Шура, соответствующая кольцу B, не максимальна, т.е. для пространства W существует больший стабилизатор, что означает, по теореме 21 и предложению 2, что кольцо B не максимально, противоречие.

Ответ на вопрос о том как строить геометрические данные, дается следующей теоремой.

Предложение 30. *Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок без кручения ранга один на проективной поверхности X, определенной над несчетным алгебраически замкнутым полем k. Предположим, что существует обильный неприводимый $\mathbb{Q}$-Картье дивизор $C \subset X$, не содержащийся в сингулярном локусе и такой что $C^2 = 1$. Пусть $C' = dC$ — очень обильный дивизор Картье. Предположим, что выполняются следующие условия (см. замечание 73, определение 5.2):*

$$\chi(X, \mathcal{F}(nC')) = \frac{(nd+1)(nd+2)}{2},$$
$$H^0(C, \zeta(\mathcal{F}_k)(-(k+1)Q)) = H^1(C, \zeta(\mathcal{F}_k)(-(k+1)Q)) = 0$$

для гладкой точки $Q \in C$, $n \geq 0$, где $0 \leq k < d$. Тогда

i) существует точка $P \in C$ регулярная в C и в X, такая что условия из пункта 6 определения 45 выполняются для некоторой тривиализации $\hat{\phi} : \hat{\mathcal{F}}_P \simeq k[[u,t]]$, т.е. гомоморфизмы

$$H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \to k[[u,t]]/(u,t)^{nd+1}$$

являются изоморфизмами для всех $n \geq 0$;[2]

ii) пучок $\mathcal{F}$ коэно-маколеев на X.

Доказательство i) Для любого пучка $\mathcal{F}_k$ и $m > 0$ имеются короткие точные последовательности

$$0 \to \zeta(\mathcal{F}_k) \to \zeta(\mathcal{F}_k) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_X(mC')|_C \to \zeta(\mathcal{F}_k) \otimes_{\mathcal{O}_C} (\mathcal{O}_X(mC')|_C/\mathcal{O}_C) \to 0,$$

так как $\mathcal{O}_X(mC')|_C$ — обратимый пучок. Отсюда $H^1(C, \zeta(\mathcal{F}_k) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_X(mC')|_C) = 0$ для всех $m \geq 0$. Так как $C^2 = 1$ (т.е. $\deg(\mathcal{O}_X(C')|_C) = d$), то по асимптотической теореме Римана-Роха имеем

$$\chi(\zeta(\mathcal{F}_k) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_X(mC')|_C) = h^0(C, \zeta(\mathcal{F}_k) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_X(mC')|_C) = md + k + 1. \quad (5.13)$$

[2] Для читателя, предпочитающего альтернативное определение геометрических данных, этот пункт можно переформулировать так: существует морфизм $j : T \to X$ с $j(O) = P \in C \backslash (C^{sing} \cup X^{sing})$ и $j^{-1}(C) = T_1$ (т.е. $R = k[[u,t]] \simeq \hat{\mathcal{O}}_{X,P}$, $R/tR \simeq \hat{\mathcal{O}}_{C,P}$), такой что для некоторого выбора порождающей $\mathcal{O}_{X,P}$-модуля $\mathcal{F}_P$ вложение $\mathcal{F} \hookrightarrow j_*\mathcal{O}_T$ (соответствующее изоморфизму $(j^*\mathcal{F})_O = R \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathcal{F} \simeq \hat{\mathcal{F}}_P$) удовлетворяет условию 3 определения, т.е. отображения $H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \to R \cdot t^{-nd}/\mathcal{M}^{nd+1} \cdot t^{-nd}$ — изоморфизмы.

Для каждого $m \geq 0$ по свойству (1.37) существует открытое подмножество U_m в C, такое что

$$H^0(C, \zeta(\mathcal{F}_k) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_X(mC')|_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C(-(md+k+1)P)) = \\ H^1(C, \zeta(\mathcal{F}_k) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_X(mC')|_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C(-(md+k+1)P)) = 0 \quad (5.14)$$

для любой точки $P \in U_m$. Следовательно, так как основное поле несчетно, существует точка $P \in \cap_{m=0}^{\infty} U_m$, регулярная в C и в X, такая что эти свойства выполняются для всех $m \geq 0$ и $0 \leq k < d$.

Так как для любого $n \geq 0$ по лемме 45 имеются вложения

$$W_{nd+k}/W_{nd+k-1} \simeq H^0(X, \mathcal{F}_k(nC'))/H^0(X, \mathcal{F}_{k-1}(nC')) \\ \hookrightarrow H^0(C, \zeta(\mathcal{F}_k) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_X(nC')|_C),$$

и $\chi_1(H^0(X, \mathcal{F}(nC'))) \subset W_{nd}$ по определению, мы получаем, что для всех $n \gg 0$

$$h^0(X, \mathcal{F}(nC')) = \chi(\mathcal{F}(nC')) = \frac{(nd+1)(nd+2)}{2} \leq \dim_k(W_{nd}) \leq \\ \sum_{k=0}^{d-1} \sum_{m=0}^{n-1} h^0(C, \zeta(\mathcal{F}_k) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_X(mC')|_C) + h^0(C, \zeta(\mathcal{F}_k) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_X(nC')|_C). \quad (5.15)$$

В силу (5.13) эти неравенства являются равенствами. Следовательно, $H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \simeq W_{nd}$ для любого $n \gg 0$. Отсюда $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}_0$ и

$$H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \simeq W_{nd}, \quad W_{nd+k}/W_{nd+k-1} \simeq H^0(C, \zeta(\mathcal{F}_k) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_X(nC')|_C) \quad (5.16)$$

для всех $n \geq 0$ по замечанию 74 и по лемме 45. Вместе с (5.14) это влечет, что условия из пункта 6 определения 45 выполняются для некоторой тривиализации в точке P.

iv) В силу предложения 27 пучок $\mathcal{F}$ Коэно-Маколеев вдоль C. Те же рассуждения доказывают, что пучки $\mathcal{F}_k$ Коэно-Маколеевы вдоль C. Рассмотрим маколеевизацию $CM(\mathcal{F})$ пучка $\mathcal{F}$ (см. раздел 5.2.1). Рассмотрим образ $W' = \chi_1(H^0(X \backslash C, CM(\mathcal{F})))$ в $k[[u]]((t))$, где для определения χ_1 мы используем то же вложение ϕ пучка $\mathcal{F}$ (ср. параграф 3.5.2). Заметим, что пучок $CM(\mathcal{F})|_{mC'} = \mathcal{F}|_{mC'}$ имеет чистую размерность один для любого $m > 0$ (обозначения см. в замечании 74), так как $\mathcal{F}$ коэно-маколеев вдоль C. Тогда по лемме 45 имеем $H^0(X, CM(\mathcal{F})(nC')) \simeq W'_{nd}$ для всех $n \geq 0$.

Непосредственно из определения пучка Коэно-Маколея следует, что пучки $CM(\mathcal{F})_k$ Коэно-Маколеевы для всех k. Заметим, что $CM(\mathcal{F}_k) \simeq CM(\mathcal{F})_k$. Действительно, по определению маколеевизации имеем $CM(\mathcal{F}_k) \subset CM(\mathcal{F})_k$. Если бы $CM(\mathcal{F}_k) \not\simeq CM(\mathcal{F})_k$, то это значило бы, что $CM(\mathcal{F}_k)_{-k} \not\simeq (CM(\mathcal{F})_k)_{-k} \simeq CM(\mathcal{F})$. Но $CM(\mathcal{F}_k)_{-k} \simeq CM(\mathcal{F})$, так как $CM(\mathcal{F}_k)_{-k} \subset (CM(\mathcal{F})_k)_{-k} \simeq CM(\mathcal{F})$, и $CM(\mathcal{F}_k)_{-k}$ — Коэно-маколеев пучок, содержащий $\mathcal{F}$ (ср. раздел 5.2.1).

В частности, мы можем применить конструкцию из 4.1.4 и построить пучок без кручения $\mathcal{N}$ на риббоне $(C, \mathcal{A})$ (который построен по нашим геометрическим данным). Далее, мы можем построить пространство $\mathbb{W}' \subset k((u))((t))$ по пучку $\mathcal{N}$. Так как конструкция зависит только от сечений пучков $CM(\mathcal{F}_k)$ вдоль кривой C, мы получаем $\mathbb{W}' = \mathbb{W}$. Отсюда из пункта ii) мы получаем $\mathcal{F} \simeq CM(\mathcal{F})$.

Замечание 79. Пучки без кручения ранга один на проективной поверхности X с фиксированным полиномом Гильберта χ из предложения 30 стабильны в смысле стандартного определения из [75, Ch.2]. Стабильные пучки параметризуются проективной схемой $\mathcal{M}_X(\chi)$ (см. Chapter 4 в той же книге).

С другой стороны, все пучки, которые нас интересуют, удовлетворяют условиям из леммы 46 (и, ввиду теорем 35 и 39 ниже, даже более строгим условиям: они Коэно-Маколеевы на X). В силу [40, Prop.1.2.16] Коэно-Маколеевость — открытое условие. Таким образом, имеет смысл рассматривать открытую подсхему $\mathcal{M}_X^1$ пространства модулей $\mathcal{M}_X(\chi)$, параметризующую такие пучки. Тогда отображение ζ из параграфа 5.3.2 индуцирует морфизм

$$\zeta : \mathcal{M}_X^1 \to \mathcal{M}_C(g),$$

где $\mathcal{M}_C(g)$ — пространство модулей пучков без кручения ранга один степени $g = p_a(C)$ на C (ср. [127]). Мы предполагаем, что этот морфизм сюръективен (ср. примеры в конце этой статьи).

5.4 Геометрические свойства рациональных коммутативных алгебр ДО

В этом разделе изложены некоторые следствия теории: результаты о преобразованиях Дарбу колец дифференциальных операторов с рациональной спектральной поверхностью, и о пополнении аффинной плоскости.

5.4.1 Теорема о пополнении

Теорема о пополнении получается с помощью конструкции обобщенного отображения Кричевера-Паршина. Необходимость в ней возникает естественным образом при рассмотрении примеров алгебраически интегрируемых коммутативных колец ДО, чьи аффинные спектральные поверхности удовлетворяют следующему свойству: их нормализация — $\mathbb{A}^2$. Эта теорема дает ответ на вопрос о том, какова нормализация проективной спектральной поверхности X.

Теорема 37. *Пусть X — проективная поверхность, $C \subset X$ — целый дивизор Вейля, не содержащийся в сингулярном локусе X, являющийся также обильным $\mathbb{Q}$-Картье дивизором, и $C^2 = 1$. Предположим, что $X \backslash C \simeq \mathbb{A}^2$.*

Тогда $X \simeq \mathbb{P}^2$, $C \simeq \mathbb{P}^1$.

Доказательство Так как C не содержится в сингулярном локусе X, мы можем выбрать точку P регулярную на C и на X. Выберем локальные параметры u, t в P, такие что t — локальное уравнение C в точке P, и $u \in \mathcal{O}_P$, ограниченное на C, — локальное уравнение точки P в C.

Тогда имеется естественный изоморфизм

$$\pi : \hat{\mathcal{O}}_P \to k[[u, t]].$$

Используя этот изоморфизм мы можем повторить конструкцию подпространства A из параграфа 3.5.2 и определить $A \overset{\text{def}}{=} \chi_1(H^0(X \backslash C, \mathcal{O}))$.

Повторяя рассуждения из доказательства леммы 26, мы получаем, что для всех $n \geq 0$

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(nC')) \simeq A_{nd},$$

где $A_l = A \cap t^{-l} k[[u, t]]$. Так как $C^2 = 1$, для всех $n \gg 0$ должно выполняться

$$\dim(A_{nd}/A_{(n-1)d}) = d^2 n + const. \tag{5.17}$$

Рассмотрим произвольный элемент $a \in A_{nd}$, такой что $\nu(a) = (*, nd)$. Мы утверждаем, что $* \leq nd$.

Действительно, в силу 4.1.4 существует канонически определенный риббон $(C, \mathcal{A})$ над полем k. Тогда мы можем построить, как в доказательстве теоремы 27, пространство $\mathbb{A}$ в $k((u))((t))$, являющееся обобщенным фредгольмовым подпространством. Как следует из (5.3), пространство $\mathbb{A}(nd)$ естественно изоморфно фредгольмову подпространству в поле $k((u))$, равному образу пучка $\mathcal{O}_X(nC')|_C$ при отображении Кричевера. Для $n \gg 0$ имеем также изоморфизмы $H^0(C, \mathcal{O}_X(nC')|_C) \simeq A_{nd}/A_{nd-1}$, и в силу (1.36)

$$\dim(\mathbb{A}(nd) \cap k[[u]]) = h^0(C, \mathcal{O}_X(nC')|_C) = nd + const. \tag{5.18}$$

Замечание 80. В качестве альтернативы (чтобы избежать ссылок на теорию риббонов) можно просто повторить конструкцию обобщенного отображения Кричевера из работы [118] или из работы [23] в нашей ситуации (заменяя дивизор Картье в тех работах на $\mathbb{Q}$-Картье).

Так как $C^2 = 1$, мы получаем уравнение на эйлерову характеристику

$$\chi(\mathbb{A}(nd)) = nd + const.$$

Теперь можно применить рассуждения из доказательства теоремы 22, чтобы показать, что $* \le nd$. Предположим обратное. Имеем $a \cdot \mathbb{A}(0) \subset \mathbb{A}(nd)$. Легко видеть, что $\chi(a \cdot \mathbb{A}(0)) = \chi(\mathbb{A}(0)) + *$. Тогда получаем

$$\chi(\mathbb{A}(nd)) = nd + const < * + const = \chi(\mathbb{A}(0)) + * = \chi(a \cdot \mathbb{A}(0)) \le \chi(\mathbb{A}(nd)),$$

противоречие.

Заметим теперь, что так как $X \backslash C \simeq \mathbb{A}^2$, то $A \simeq k[p, q]$. Таким образом, пространство A порождено мономами $p^k q^l$. В силу утверждения и формул (5.17) и (5.18) мы получаем (без ограничения общности), что $\nu(p) = (0, 1)$, $\nu(q) = (1, 1)$ (так как при любых других значениях эти формулы не выполняются). Но тогда $A \simeq k[t^{-1}, ut^{-1}]$ и $X \simeq \mathrm{Proj}(\oplus A_n) = \mathbb{P}^2$, $C \simeq \mathrm{Proj}(\oplus A_n/A_{n-1}) = \mathbb{P}^1$.

5.4.2 Теорема о преобразовании Дарбу

Теорема о преобразовании Дарбу является естественным обобщением подобной теоремы в размерности один. Преобразование Дарбу как метод использовался в работе [36] для построения новых нетривиальных примеров коммутативных колец ДО.

Теорема 38. *Пусть $B \subset D$ — коммутативное кольцо ранга $\mathbf{rk}(B) = 1$, удовлетворяющее свойствам теоремы 18. Предположим, что нормализация $\mathrm{Spec}(B)$ изоморфна $\mathbb{A}^2$.*

Тогда существует дифференциальный оператор F, такой что $F^{-1}BF \subset k[\partial_1, \partial_2]$.

А именно, $F = S\partial_2^n$, где S — оператор как в аналоге теоремы Сато 20.

Доказательство Без ограничения общности мы можем предполагать, что B — конечно порожденное 1-квазиэллиптическое вполне допустимое кольцо, удовлетворяющее свойству (3.18) (см. рассуждения перед замечанием 19), так как наше утверждение не зависит от линейных замен координат.

Так как ранг кольца B равен 1, ранг соответствующих геометрических данных $(X, C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi)$ также равен 1 по классификационной теореме 24. Тогда пучок $\mathcal{F}$ когерентен и ранга один в силу 26 и C — рациональная кривая с $C^2 = 1$ по 28.

Предположение о нормализации эквивалентно предположению, что нормализация $\mathrm{Spec}(B) \simeq X \backslash C$ изоморфна $\mathbb{A}^2$. Заметим, что это предположение эквивалентно предположению о том, что нормализация X изоморфна $\mathbb{P}^2$. Действительно, если $p : \mathbb{P}^2 \simeq \tilde{X} \to X$ — морфизм нормализации, то $p^*(C)$ — рациональная неприводимая кривая. Таким образом,

$p^*(C)$ — обильный рациональный дивизор Картье-Вейля на $\mathbb{P}^2$ с $p^*(C)^2 = 1$, т.е. $p^*(C) = \mathbb{P}^1$. Следовательно, нормализация схемы $\mathrm{Spec}(B)$ изоморфна дополнению к $\mathbb{P}^1$ в $\mathbb{P}^2$, т.е. $\mathbb{A}^2$. Обратное утверждение следует из тех же рассуждений вместе с теоремой 37.

Пусть $(\tilde{X} \simeq \mathbb{P}^2, p^*(C) \simeq \mathbb{P}^1, p^*(P) = \tilde{P})$ — нормализация (X, C, P). Так как P регулярна, локальные кольца $\mathcal{O}_{X,P}$ и $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,\tilde{P}}$ канонически изоморфны.

Повторяя рассуждения из начала доказательства теоремы 37, мы можем построить вложение $H^0(\mathbb{P}^2 \backslash \mathbb{P}^1, \mathcal{O})$ в то же пространство $k[[u]]((t))$ (здесь u, t — локальные параметры в точке $P \in X$). Обозначим это пространство через A'. Как мы видели выше, A' должно быть нормализацией A. Рассуждения из доказательства теоремы 37 показывают, что $A' \simeq k[p, q]$, где старшие члены рядов p, q равны t^{-1}, ut^{-1} соответственно (таким образом, $\mathrm{Supp}(A') = k[ut^{-1}, t^{-1}]$).

Положим $A'' = \psi_1^{-1}(A')$ (см. (10)). Тогда $\mathrm{Supp}(A'') = k[z_1^{-1}, z_2^{-1}]$ и A'' — 1-пространство. По лемме 17, 2),3) существует оператор S, такой что $S^{-1}\partial_1 S = \psi_1^{-1}(q)$, $S^{-1}\partial_2 S = \psi_1^{-1}(p)$, и S удовлетворяет условию A_1. Значит, $S \in \mathrm{Adm}_1$.

Теперь рассмотрим пару Шура $(\psi_1^{-1}(A), W)$ *из теоремы* 21, соответствующую кольцу B. Рассмотрим эквивалентную пару $(\mathcal{A} = SAS^{-1}, \mathcal{W} = WS^{-1})$. Тогда кольцо $SA''S^{-1} = k[z_1^{-1}, z_2^{-1}]$ является нормализацией кольца $S\psi_1^{-1}(A)S^{-1}$ (в поле $k(z_1, z_2) \subset k((z_1))((z_2))$). Таким образом, все элементы пространства $S\psi_1^{-1}(A)S^{-1}$ — многочлены от переменных z_1^{-1}, z_2^{-1}.

Пространство WS^{-1} является конечно порожденным модулем над $S\psi_1^{-1}(A)S^{-1}$. Без ограничения общности мы можем предполагать, что $1 \in WS^{-1}$, рассмотрев в случае необходимости эквивалентную пару Шура $(\mathcal{A}, \mathcal{W}T)$ (для подходящего оператора T с постоянными коэффициентами; T просто меняет тривиализацию ϕ в определении 45, пункт 6). Из конструкции пары Шура, приведенной в параграфе 3.5.2, следует $\mathcal{W} \subset k(z_1, z_2)$ (так как эта пара Шура соответствует паре, приходящей из геометрических данных с подходящей тривиализацией ϕ, и ранг когерентного пучка $\mathcal{F}$ равен 1).

Таким образом, $\mathcal{W}$ порождено конечным числом элементов из $k(z_1, z_2)$ над $\mathcal{A}$. Так как $\mathcal{W}$ — 1-пространство, то мы можем выбрать порождающие, удовлетворяющие условию A_1. Обозначим через Q их общий знаменатель. Из леммы 47 (см. ниже) следует, что $\mathrm{ord}_\Gamma(Q) = (0, n)$, где $n = \mathbf{ord}(Q)$ (здесь и ниже мы отождествляем z_1 с ∂_1^{-1}, z_2 с ∂_2^{-1}; в этом случае $\mathbf{ord}(Q) = \deg(Q)$, где $\deg$ обозначает обычную степень многочлена Q от двух переменных). Рассмотрим эквивалентную пару Шура $(\mathcal{A}, \mathcal{W}Q/\partial_2^{\deg(Q)})$ (это пара Шура, поскольку $Q/\partial_2^{\deg(Q)}$ — оператор нулевого порядка с постоянными коэффициентами и с $\mathrm{ord}_\Gamma(Q/\partial_2^{\deg(Q)}) = (0,0)$, удовлетворяющий условию (A_1)!). Заметим, что все элементы из пространства $\mathcal{W}Q/\partial_2^{\deg(Q)}$ являются просто многочленами от ∂_1, ∂_2, ∂_2^{-1} с постоянными коэффициентами, и порядок этих многочленов относительно ∂_2^{-1} меньше или равен $\deg(Q)$.

Тогда из доказательства теоремы 20 немедленно следует, что оператор S — (некоммутативный) многочлен от ∂_2^{-1} степени (относительно ∂_2^{-1}) не выше, чем $\deg(Q)$. В силу замечания 20 кольцо $S\mathcal{A}S^{-1}$ — кольцо ДО. Тогда $S \in k[[x_1, x_2]][\partial_1]((\partial_2^{-1}))$ (это немедленно следует из лемм 15, 17 пункты 2,3). Значит, можно положить $F = S\partial_2^{\deg(Q)}$.

Лемма 47. *Предположим, что разложение в ряд Лорана элемента*

$$P/Q \in k(\partial_1, \partial_2) \subset k((\partial_1^{-1}))((\partial_2^{-1})),$$

где $P, Q \in k[\partial_1, \partial_2]$ *взаимно просты, лежит в* $k[\partial_1]((\partial_2^{-1}))$. *Предположим, что этот ряд удовлетворяет условию* A_1.

Тогда $\mathrm{ord}_\Gamma(Q) = (0, \mathbf{ord}(Q))$.

Доказательство Доказательство этой леммы основано на нескольких технических рутинных элементарных вычислениях, и мы будем интенсивно использовать в процессе доказательства некоторые технические леммы из главы 3.

Предположим обратное. Тогда Q может быть записан как многочлен от ∂_2 степени относительно ∂_2 меньше, чем $\mathbf{ord}(Q)$, скажем

$$Q = q_n\partial_2^n - \sum_{l=0}^{n-1} q_l\partial_2^l, \quad n < \mathbf{ord}(Q),$$

где $q_l \in k[\partial_1]$. Пусть

$$P = \sum_{l=0}^{m} p_l\partial_2^l.$$

Теперь разобьем доказательство нашей леммы на несколько шагов.

Шаг 1. Во-первых, мы утверждаем, что $\deg(q_n) + n = \mathbf{ord}(Q)$.

Очевидно, всегда выполняется неравенство $\deg(q_n)+n \le \mathbf{ord}(Q)$. Предположим, что $\deg(q_n)+n < \mathbf{ord}(Q)$. Покажем, что это противоречит условию A_1 для элемента P/Q. Так как мы работаем с рядами в поле $k((\partial_1^{-1}))((\partial_2^{-1}))$ псевдо-дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, мы можем дословно повторить доказательства леммы 14 и следствия 6 чтобы показать, что утверждения оттуда остаются справедливыми также для операторов из $k((\partial_1^{-1}))((\partial_2^{-1}))$.

В частности, Q^{-1} не удовлетворяет условию A_1. Действительно, предположим, что Q^{-1} удовлетворяет условию A_1. Тогда $Q^{-1} = q_n^{-1}\partial_2^{-1}Q'$, где Q' — оператор такого же вида как в следствии 6, удовлетворющий условию A_1 (по лемме 14). Тогда $Q = (Q^{-1})^{-1} = q_n\partial_2(Q')^{-1}$ должен удовлетворять условию A_1 в силу леммы 14, следствия 6. Но Q не удовлетворяет условию A_1 по нашему предположению (а именно, член с первым коэффициентом q_i оператора Q, таким что $\deg(q_i)+i = \mathbf{ord}(Q)$ будет противоречить условию A_1), противоречие.

Пусть $P = P_1 + P_2$ — произвольное разложение P в сумму двух ДО с постоянными коэффициентами, такое что P_1 удовлетворяет условию A_1 и степень P_2 относительно ∂_2 меньше, чем m (P_2 может быть нулевым). Пусть $Q^{-1} = Q_1 + Q_2$ — произвольное разложение Q^{-1} в сумму двух псевдо-дифференциальных операторов из $k((\partial_1^{-1}))((\partial_2^{-1}))$, такое что Q_1 удовлетворяет условию A_1 и степень Q_2 относительно ∂_2 меньше, чем $-n$ (так как Q^{-1} не удовлетворяет условию A_1, Q_2 не равен нулю). Обозначим через α первый коэффициент оператора Q_2, и через β первый коэффициент оператора P_2 если $P_2 \neq 0$. Есть два случая: если $P_2 = 0$, то произведение PQ^{-1} не будет удовлетворять условию A_1, потому что коэффициент оператора PQ^{-1}, содержащий $p_m\alpha$ не будет удовлетворять ему; если $P_2 \neq 0$, то произведение PQ^{-1} не будет удовлетворять условию A_1, потому что коэффициент оператора PQ^{-1}, содержащий $\beta\alpha$, не будет удовлетворять ему. Значит, PQ^{-1} не удовлетворяет условию A_1, противоречие.

Шаг 2. Теперь идея доказательства состоит в том, чтобы прийти к противоречию с предположением, что $q_n \neq const$.

Очевидно, мы можем умножить элемент P/Q на подходящую степень ∂_2^{-1} так, чтобы сделать степень лорановского разложения произведения равной нулю. Таким образом, без ограничения общности можно предполагать, что P, Q — многочлены от ∂_2^{-1} с ненулевыми свободными членами p_m, q_n соответственно.

Теперь можно записать

$$P/Q = (\sum_{l=0}^{m} p_l\partial_2^{l-m})(\sum_{l=0}^{n} q_l\partial_2^{l-n})^{-1} = (\sum_{l=0}^{m} \frac{p_l}{q_n}\partial_2^{l-m})(\sum_{i=0}^{\infty}(\sum_{l=0}^{n-1} \frac{q_l}{q_n}\partial_2^{l-n})^i). \tag{5.19}$$

Заметим, что не все q_i делятся на q_n. Действительно, в противном случае $(q_n^{-1}Q) \in k[\partial_1, \partial_2]$ и следовательно

$$q_n^{-1}P = (PQ^{-1})(q_n^{-1}Q) \in k[\partial_1]((\partial_2^{-1})) \cap k((\partial_1^{-1}))[\partial_2] = k[\partial_1, \partial_2]$$

т.е. P и Q делятся на $q_n \neq const$, противоречие.

Заметим, что мы можем свести доказательство к случаю $\deg(P) \leq n-1$ (степень теперь означает степень относительно ∂_2^{-1}). Действительно, легко видеть, что p_m должен делиться на q_n. Так как $P/Q \in k[\partial_1]((\partial_2^{-1}))$, все выражения вида $(P/Q-a)\partial_2^k$ будут опять принадлежать $k[\partial_1]((\partial_2^{-1}))$ для любого многочлена $a \in k[\partial_1]$. Значит, если взять $a = p_m/q_n$, то $(P/Q-a)\partial_2 = P'/Q$, где $\deg(P') < \deg(P)$ если $m \geq n$. Заметим, что $P' \neq 0$, так как P, Q взаимно просты.

Аналогичным образом мы можем свести доказательство к случаю $\deg(P) = 0$. Действительно, используя алгоритм Евклида, мы всегда можем найти многочлены $a \in k[\partial_1]$ и $F \in k[\partial_1, \partial_2^{-1}]$, такие что $\deg(aQ - FP) < \deg(P)$ если $\deg(P) \neq 0$. Опять $(aQ - FP) \neq 0$, так как P, Q взаимно просты и $\deg(P) \neq 0$. Значит, $F(P/Q) - a = P'/Q$ с $\deg(P') < \deg(P)$, $P' \neq 0$.

Наконец, в случае $\deg(P) = 0$ доказательство следует немедленно из (5.19): P должен делиться на бесконечную степень некоторого простого делителя многочлена q_n, т.е. $P = 0$, противоречие.

Глава 6

Примеры

Эта глава посвящена разбору уже известных примеров коммутирующих ДО и коммутирующих разностных операторов с точки зрения новой теории, построению новых примеров коммутирующих операторов в пополненном кольце, а также исследованию их деформаций, описываемых модификациями двумерных аналогов иерархии КП. Результаты этой главы содержатся в работах [11], [12], [17].

6.1 «Тривиальные» алгебры коммутирующих операторов

В этом разделе обсуждается достаточно очевидный, но естественный и широкий класс примеров. Эти примеры получаются, например, из примеров коммутативных колец обыкновенных дифференциальных операторов (скажем, от переменной x_2) добавлением дифференцирования по другой переменной (скажем, ∂_1), которая, очевидно, коммутирует со всеми операторами в исходном кольце. Обобщая это наблюдение, мы называем коммутативные алгебры в $\hat{D}$, содержащие ∂_1, *тривиальными*. Тем не менее, геометрия соответствующих поверхностей и даже наивное пространство модулей пучков из соответствующих геометрических данных нетривиальны.

Заметим, что если имеется коммутативное 1-квазиэллиптическое вполне допустимое кольцо $B \subset D$, удовлетворяющее свойствам из теоремы 18, (3.18) и содержащее оператор ∂_2, то после линейной замены $\partial_1 \leftrightarrow \partial_2$ кольцо B останется 1-квазиэллиптическим вполне допустимым и будет содержать оператор ∂_1.

Геометрические данные «тривиальных» алгебр описываются следующим критерием.

Теорема 39. *Пусть $B \subset \hat{D}$ — конечно порожденное 1-квазиэллиптическое вполне допустимое кольцо Коэно-Маколея коммутирующих операторов (заметим, что в силу теоремы 33 всякое конечно порожденное 1-квазиэллиптическое вполне допустимое кольцо B лежит в конечно порожденном 1-квазиэллиптическом вполне допустимом кольце Коэно-Маколея).*

Тогда B содержит ∂_1 если и только если дивизор C соответствующих геометрических данных — дивизор Картье, пучок $\mathcal{F}$ когерентен ранга один, $\mathcal{O}_C(C) \simeq \mathcal{O}_C(P)$, и отображение

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X(C))$$

инъективно.

Более того, если основное поле k несчетно и алгебраически замкнуто, то пучок $\mathcal{F}$ Коэно-Маколеев на X.

Доказательство Напомним, что поверхность X, соответствующая B, Коэно-Маколеева в силу теоремы 32.

Допустим сначала, что B содержит ∂_1. Так как B 1-квазиэллиптично и вполне допустимо, это означает, что $\mathrm{rk}(B)=1$. Также это означает, что для любого $n\gg 0$ существуют операторы $P_n\in B$ порядков $\mathrm{ord}_\Gamma(P_n)=(0,n)$. Следовательно, мы можем оценить размерность пространства $A_n\subset A$ (где, как обычно, A означает пространство пар Шура, соответствующее кольцу B): $\dim_k(A_n)\sim n^2/2$ для всех $n\gg 0$. Тогда из асимптотической формулы Римана-Роха (2.2) следует, что $C^2=1$ (так как $A_{nd}\simeq H^0(X,\mathcal{O}_X(ndC))$ для всех $n\gg 0$, см. параграф 3.5.2). Так как $\mathrm{rk}(B)=1$, ранг соответствующих геометрических данных также равен 1 по теореме 24. Значит, в силу предложения 28 соответствующий пучок $\mathcal{F}$ когерентен и ранга один.

Теперь докажем, что C — дивизор Картье. Наши рассуждения будут очень похожи на рассуждения из доказательств леммы 23 или теоремы 18. Напомним, что $X\simeq \mathrm{Proj}\,\tilde{A}$, и дивизор C определен однородным идеалом $I=(s)$. Он не содержится в сингулярном локусе, так как он содержит регулярную точку P. Так как $\tilde{A}$ — конечно порожденная k-алгебра с $\tilde{A}_0=k$, в силу [2, Ch.III, § 1.3, prop. 3] существует целое $d\ge 1$, такое что k-алгебра $\tilde{A}^{(d)}=\bigoplus\limits_{k=0}^{\infty}\tilde{A}_{kd}$ конечно порождена элементами из $\tilde{A}_1^{(d)}$ как k-алгебра (здесь $\tilde{A}_1^{(d)}=\tilde{A}_d$).

Покажем, что дивизор dC — эффективный дивизор Картье. Рассмотрим подсхему C' в X, определенную однородным идеалом $I^d=(s^d)$ кольца $\tilde{A}$. Топологическое пространство подсхемы C' совпадает с топологическим пространством подсхемы C (как можно увидеть, рассматривая аффинное покрытие X). Локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,C}$ совпадает с кольцом нормирования дискретного нормирования на $\mathrm{Quot}(A)$, индуцированного дискретным нормированием ν_t в поле $k((u))((t))$:

$$\mathcal{O}_{X,C}=\tilde{A}_{(I)}=\{as^n/bs^n \mid n\ge 0, a\in A_n, b\in A_n\setminus A_{n-1}\}.$$

Идеал I задает максимальный идеал в кольце $\mathcal{O}_{X,C}$, и идеал I^d задает d-ю степень максимального идеала. Следовательно, если мы докажем, что идеал I^d определяет эффективный дивизор Картье на X, то отображение циклов на этом дивизоре дает dC (см. раздел 2.1.2). В силу [63, prop. 2.4.7] имеем $X=\mathrm{Proj}\,\tilde{A}\simeq\mathrm{Proj}\,\tilde{A}^{(d)}$. При этом изоморфизме подсхема C' определяется однородным идеалом $I^d\cap\tilde{A}^{(d)}$ в кольце $\tilde{A}^{(d)}$. Этот идеал порожден элементом $s^d\in\tilde{A}_1^{(d)}$. Открытые аффинные подмножества $D_+(x_i)=\mathrm{Spec}\,\tilde{A}^{(d)}_{(x_i)}$ с элементами $x_i\in\tilde{A}_1^{(d)}$ определяют покрытие $\mathrm{Proj}\,\tilde{A}^{(d)}$. В каждом кольце $\tilde{A}^{(d)}_{(x_i)}$ идеал $(I^d\cap\tilde{A}^{(d)})_{(x_i)}$ порожден элементом s^d/x_i. Следовательно, однородный идеал $I^d\cap\tilde{A}^{(d)}$ определяет эффективный дивизор Картье.

Теперь покажем, что k-алгебра $\tilde{A}^{(m)}$ конечно порождается элементами из $\tilde{A}_1^{(m)}$ для всех $m\gg 0$. По теореме 21 это эквивалентно тому, что k-алгебра $\tilde{B}^{(m)}$ конечно порождается элементами из $\tilde{B}_1^{(m)}$ для всех $m\gg 0$.

Пусть d — такое число, что все порождающие кольца B лежат в B_d и для всех $n\ge d$ существуют элементы $P_n\in B$ порядков $\mathrm{ord}_\Gamma(P_n)=(0,n)$ (то же будет справедливо для кольца A). Пусть Σ обозначает множество всех чисел $a\in\mathbb{Z}_+$ таких, что существуют операторы Q в B_d порядков $\mathrm{ord}_\Gamma(Q)=(*,a)$. Так как $\partial_1\in B$, то для любого $m>d$ и любого $a\in\Sigma$ существуют операторы Q в B порядков $\mathrm{ord}_\Gamma(Q)=(m,a)$.

Пусть теперь $m>2d$ — любое число, такое что $\tilde{B}^{(m)}$ конечно порождено элементами из $\tilde{B}_1^{(m)}$. Достаточно показать, что $\tilde{B}^{(m+1)}$ также конечно порождено элементами из $\tilde{B}_1^{(m+1)}$. Чтобы показать это, достаточно доказать, что всякий элемент из $\tilde{B}_k^{(m+1)}$ можно представить как сумму произведений элементов из $\tilde{B}_{k-1}^{(m+1)}$ и из $\tilde{B}_1^{(m+1)}$. В пространстве $\tilde{B}_1^{(m+1)}$ есть два специальных оператора: $Q_1=\partial_1^{m+1}$ и Q_2 порядка $\mathrm{ord}_\Gamma(Q_2)=(0,m+1)$. Из сказанного выше следует, что для любого $l\ge 2d$ и любых $i,j\in\mathbb{Z}_+$, таких что $i+j=l$ и $j\in\Sigma$, существует элемент $Q\in B$ порядка $\mathrm{ord}_\Gamma(Q)=(i,j)$. Значит, всякий элемент $Q\in\tilde{B}_k^{(m+1)}$ можно записать как сумму элемента порядка меньше, чем $\mathrm{ord}_\Gamma(Q)$, и произведения элемента из $\tilde{B}_{k-1}^{(m+1)}$ и Q_1 или Q_2. По индукции мы получаем наше утверждение.

Теперь все вышеприведенные рассуждения для mC и $(m+1)C$ (вместо dC) показывают, что mC, $(m+1)C$ — дивизоры Картье. Но тогда C также должен быть дивизором Картье.

Теперь пусть $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ — пара из пространства $k((u))((t))$, соответствующая нашим геометрическим данным (см. параграф 3.5.2). Из параграфа 3.5.2 (а именно, из (5.3), (5.5) и (5.10)) следует

$$\mathbb{A}(n) \cap k[[u]] \simeq A_n/A_{n-1} \simeq H^0(C, \mathcal{O}_C(nC)),$$

для всех $n \gg 0$, где $\mathbb{A}(n)$ — образ квинтета $(C, P, \mathcal{O}_C(nC), u, id)$ при отображении Кричевера (ср. также (5.9)). Из одномерной теории КП (см. (1.35), (1.37)) получаем тогда, что $\mathbb{A}(n) \cdot u^{-n}$ — образ квинтета $(C, P, \mathcal{O}_C(nC)(-nP), u, id)$ при отображении Кричевера. Так как $\partial_1^n \in B_n \backslash B_{n-1}$, мы получаем, что $t^{-n}u^n \in A_n/A_{n-1}$. Следовательно,

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(nC)(-nP)) \simeq \mathbb{A}(n) \cdot u^{-n} \cap k[[u]] \simeq k,$$

и по теореме Римана-Роха $h^1(C, \mathcal{O}_C(nC)(-nP)) = g_a(C)$. Но тогда $\mathcal{O}_C(nC)(-nP) \simeq \mathcal{O}_C$ для всех $n \gg 0$, т.е. $\mathcal{O}_C(C) \simeq \mathcal{O}_C(P)$.

Теперь есть два возможных значения для числа $h^0(C, \mathcal{O}_C(C))$: это либо 1, либо 2. Если это 1, то это значит, что

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(C)) \simeq \mathbb{A}(1) \cap k[[u]] \simeq A_1/A_0, \tag{6.1}$$

поскольку $\partial_1 \in B_1 \backslash B_0$ и всегда имеется вложение $A_1/A_0 \subset \mathbb{A}(1)$. Заметим также, что всегда имеются вложения

$$\mathbb{A} \cap (k[[u]]((t)) + k((u))[[t]]) \overset{\cdot t}{\hookrightarrow} \mathbb{A} \cdot t \cap (k[[u]]((t)) + k((u))[[t]]),$$

$$\mathbb{A} \cap k((u))[[t]] \overset{\cdot t}{\hookrightarrow} \mathbb{A} \cdot t \cap k((u))[[t]],$$
$$\mathbb{A} \cap k[[u]]((t)) \simeq \mathbb{A} \cdot t \cap k[[u]]((t)).$$

Значит, имеется естественное линейное отображение

$$\frac{\mathbb{A} \cap (k[[u]]((t)) + k((u))[[t]])}{(\mathbb{A} \cap k((u))[[t]]) + (\mathbb{A} \cap k[[u]]((t)))} \longrightarrow \frac{\mathbb{A} \cdot t \cap (k[[u]]((t)) + k((u))[[t]])}{(\mathbb{A} \cdot t \cap k((u))[[t]]) + (\mathbb{A} \cdot t \cap k[[u]]((t)))}. \tag{6.2}$$

В силу (5.7) это отображение совпадает с отображением
$H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X(C))$. Покажем, что ядро этого отображения может содержать только элементы из

$$(\mathbb{A}_1 \cap (k[[u]]((t)) + k((u))[[t]])) + [(\mathbb{A} \cap k((u))[[t]]) + (\mathbb{A} \cap k[[u]]((t)))], \tag{6.3}$$

где $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A} \cap t^{-1} \cdot k((u))[[t]]$. Отсюда и из (6.1) следует, что отображение $H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X(C))$ инъективно. Пусть $a \in \mathbb{A} \cap (k[[u]]((t)) + k((u))[[t]])$ — какой-то подъем элемента из ядра. Тогда $a \cdot t = a_1 + a_2$, где $a_1 \in (\mathbb{A} \cdot t \cap k((u))[[t]])$ и $a_2 \in (\mathbb{A} \cdot t \cap k[[u]]((t)))$. Так как $a_1 t^{-1} \in (\mathbb{A} \cap k((u))[[t]])$, имеем

$$a_2 t^{-1} = a - a_1 t^{-1} \in \mathbb{A} \cap (k[[u]]((t)) + k((u))[[t]]).$$

Но $a_2 t^{-1} \in \mathbb{A}_1$ и также задает элемент из ядра.

Теперь предположим, что $h^0(C, \mathcal{O}_C(C)) = 2$. Это означет, что образ пучка $\mathcal{O}_C$ в $k((u))$ при отображении Кричевера содержит элемент порядка -1. Следовательно, этот образ изоморфен кольцу $k[u^{-1}]$, т.е. $C \simeq \mathbb{P}^1$. Но тогда поверхность X должна быть гладкой вдоль

C, поэтому X должна быть нормальной, поскольку X Коэно-Маколеева и C — обильный дивизор. Тогда в силу [30, Th.2.5.19] и [30, Corol.2.5.20] существует открытая окрестность кривой C изоморфная открытой окрестности прямой в $\mathbb{P}^2$. Так как $\zeta(\mathcal{F})$ — пучок без кручения и $h^0(C, \zeta(\mathcal{F}(nC))) = \dim W_n/W_{n-1} = n+1$ для всех $n \gg 0$, имеем $\zeta(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{O}_C$. Так как $\mathcal{F}$ Коэно-Маколеев, он локально свободен на гладкой открытой окрестности кривой C. Так как $Cl(\mathbb{P}^2) = Cl(\mathbb{P}^2 \backslash Z) \simeq \mathbb{Z}$ для любой замкнутой подсхемы коразмерности больше единицы, имеем $\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_X$ на этом открытом множестве (так как иначе его ограничение на $C = \mathbb{P}^1$ не было бы тривиально). Но тогда (например в силу [30, Prop.1.1.6]) $W_n \simeq H^0(X, \mathcal{F}(nC)) \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(nC)) \simeq A_n$, так как X и $\mathcal{F}$ Коэно-Маколеевы. Следовательно, $A \simeq k[a, b]$ и $X = \mathbb{P}^2$. Поэтому $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, ч.т.д.

Наконец, по формулам 1.35 и 1.36 пучок $\mathcal{F}$ удовлетворяет предположениям предложения 30. Следовательно, он Коэно-Маколеев на X.

Обратно, предположим, что C — дивизор Картье, $\mathcal{F}$ — когерентный пучок ранга один, отображение $H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X(C))$ инъективно, $\mathcal{O}_C(C) \simeq \mathcal{O}_C(P)$. Тогда из замечания 72 следует, что ранг данных равен 1. Как мы видели выше, условие на когомологии означает, что ядро отображения (6.2) равно нулю. Это означает (см. (6.3)), что все элементы из $\mathbb{A}_1 \cap (k[[u]]((t)) + k((u))[[t]])$ могут быть представлены в виде суммы элемента из $\mathbb{A}_1 \cap k[[u]]((t))$ и элемента из $\mathbb{A}_1 \cap k((u))[[t]]$. В частности, для любого элемента из $\mathbb{A}(1) \cap k[[u]]$ существует элемент из $\mathbb{A}_1 \cap k[[u]]((t))$ с тем же носителем (умноженным на t^{-1}). Это означает, что

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(C)) \simeq H^0(C, \mathcal{O}_C(P)) \simeq \mathbb{A}(1) \cap k[[u]] \simeq A_1/A_0$$

(так как ранг данных равен 1). Заметим, что $\mathbb{A}(1)$ содержит элемент порядка один (так как $\mathbb{A}(1)$ — образ $\mathcal{O}_C(P)$ при отображении Кричевера). Значит, существует элемент в A_1 с младшим членом ut^{-1}. Но этот элемент даст нам оператор ∂_1 после применения отображения ψ_1^{-1} и сопряжения на оператор Сато из теоремы 20.

6.2 Разные примеры геометрических данных, пар Шура и коммутирующих операторов

В этом разделе разбираются примеры поверхностей с дивизором и точкой, для которых можно явно вычислить все возможные геометрические данные ранга один с данной поврехностью и дивизором, соответствующие пары Шура и соответствующие алгебры коммутирующих операторов в $\hat{D}$. Заодно получаются примеры поверхностей, которые не могут быть спектральными поверхностями максимальных колец *дифференциальных* операторов.

Пример 26. В этом примере мы покажем как уже известные примеры коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных, соответствующие квантовым системам Калоджеро-Мозера и кольцам квази-инвариантов (см. [47]), укладываются в нашу классификацию.

Напомним, что кольца в этих примерах состоят из операторов, коммутирующих с оператором Шредингера $L = \partial_1^2 + \partial_2^2 - u(x_1, x_2)$, где u — функция специального типа, заданная точной формулой в одном из трех случаев: рациональном, тригонометрическом и эллиптическом. Во всех случаях описаны кольца старших символов (они называются кольцами квази-инвариантов, см. [47]). Таким образом, кольца квази-инвариантов — это k-подалгебры в кольце многочленов (от двух переменных в нашем случае). Как следует из определения и описания этих колец в [47], соответствующие кольца коммутирующих дифференциальных операторов удовлетворяют условиям предложения 1 и леммы 12. Таким образом, после линейной замены переменных они становятся 1-квази-эллиптическими строго допустимыми кольцами (по предложению 1), и следовательно соответствуют 1-квази-эллиптическим парам Шура. Если кольцо квази-инвариантов конечно порождено как k-алгебра (ср. предложение 18), то кольцо коммутирующих дифференциальных операторов соответствует паре Шура из определения 42 (после применения отображения ψ_1 из следствия 10 к соответствующей 1-квази-эллиптической паре Шура из теоремы 21), и следовательно оно также соответствует геометрическим данным из определения 45 по теореме 23.

Например, хорошо известный пример квантовой системы Калоджеро-Мозера (см. [115], [39, sec. 5.3]) задается операторами

$$L_1 = \partial_1 + \partial_2, \quad L_2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 - m(m+1)\wp(x_1 - x_2),$$

(здесь $\wp(z)$ — функция Вейерштрасса гладкой эллиптической кривой); после применения k-линейной замены переменных $\partial'_2 = \partial_1 + \partial_2$, $\partial'_1 = \partial_1$, $x'_2 = x_2$, $x'_1 = x_1 - x_2 - c$, $c \in \mathbb{C}$ они становятся равными

$$L_1 = \partial'_2, \quad L_2 = 2\partial'^2_1 - 2\partial'_1\partial'_2 + \partial'^2_2 - m(m+1)\wp(c + x'_1)$$

(таким образом, этот пример принадлежит классу "тривиальных"алгебр). Мы выбираем здесь константу c таким образом, чтобы ряд Тейлора функции $\wp(z) - z^{-2}$ в окрестности нуля и все его производные сходились в $z = c$. В этом случае мы можем представить $\wp(c + x'_1)$ как формальный ряд Тейлора, принадлежащий $\mathbb{C}[[x'_1]]$. Заметим, что любое кольцо коммутирующих операторов, содержащее эти операторы, содержит также оператор $L'_2 = L_2 - L_1^2$ и $\mathrm{ord}_\Gamma(L'_2) = (1,1)$, $\mathrm{ord}_\Gamma(L_1) = (0,1)$. Заметим, что оба оператора L_1, L'_2 удовлетворяют условию A_1. Следовательно, любое кольцо B коммутирующих операторов, содержащее эти операторы, является 1-квази-эллиптическим строго допустимым с числом $N_B = 1$. Отметим, что в работе [39, sec. 5.3] была посчитана аффинная спектральная поверхность этой системы: это $\mathbb{A}^1 \times H$, где H — некоторая гиперэллиптическая кривая. Таким образом, по теореме 18 проективная спектральная поверхность X из соответствующих геометрических данных нормальна, и особенности появляются лишь на кривой C (которая рациональна). Было бы интересно посчитать соответствующий спектральный пучок.

Пример 27. Это пример поверхности, дивизора и точки, для которых мы можем вычислить все возможные геометрические данные ранга один, соответствующие пары Шура и соответствующие алгебры коммутирующих операторов. Точнее, мы стартуем с кольца A, и описываем все возможные пары Шура с кольцом A в качестве стабилизатора. Это описание возможно благодаря использованию явных формул из классической теории КП в размерности 1; эти формулы также дают явное описание коммутирующих операторов. Примечательно, что при этом мы увидим, что отображение ζ, ограниченное на множество всех пучков из этих геометрических данных, отображает это множество сюръективно на открытое плотное подмножество компактифицированного обобщенного якобиана кривой C, состоящее из пучков с тривиальными когомологиями. Мы увидим также, что для этой поверхности нет других колец коммутирующих ДО, кроме одного кольца операторов с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим кольцо

$$A = k\langle \partial_2^2, \partial_2(\partial_2^2 + 3\partial_1^2), \partial_1 \rangle \subset k[\partial_1, \partial_2].$$

Легко видеть, что $A \simeq k[h][z,x]/(z^2 - x(x+3h^2)^2)$ (где $\partial_2(\partial_2^2 + 3\partial_1^2) \mapsto z$, $\partial_2^2 \mapsto x$, $\partial_1 \mapsto h$) и что $F = k[\partial_1, \partial_2]$, где F обозначает нормализацию A. Ясно также, что A — 1-квазиэллиптическое вполне допустимое кольцо.

Напомним, что имея такое кольцо A, можно построить часть геометрических данных, а именно поверхность X, дивизор C и точку P (см. параграф 3.5.2). Эту часть можно описать и более явным образом: имеем вложение

$$\tilde{A} \simeq k\langle \partial_2^2, \partial_2(\partial_2^2 + 3\partial_1^2), \partial_1, T\rangle \subset \tilde{F} \simeq k[\partial_2, \partial_1, T],$$

которое индуцирует морфизм нормализации $\pi : \mathrm{Proj}(\tilde{F}) \to \mathrm{Proj}(\tilde{A})$, и $X = \mathrm{Proj}(\tilde{A})$ можно рассматривать как подсхему во взвешенном проективном пространстве $\mathrm{Proj}(k[x, z, h, T])$, где веса (x, z, h, T) равны $(2, 3, 1, 1)$. Тогда $\partial_2 = z/(x + 3h^2) = x(x + 3h^2)/z$, откуда

$$\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} = \mathcal{O}_X + \mathcal{O}_X(-1)\partial_2$$

и

$$\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_X(-1)\partial_2/\mathcal{O}_X(-1)\partial_2 \cap \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_X(-1)/\mathcal{O}_X(-1) \cap \mathcal{O}_X \frac{1}{\partial_2}$$

и

$$\mathcal{O}_E = \mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X \cap \mathcal{O}_X(1)\frac{1}{\partial_2} \simeq \mathcal{O}_X/\mathcal{O}_X(-3)z + \mathcal{O}_X(-2)(x + 3h^2),$$

где E — сингулярный локус в X (ср. пример 25). Таким образом, $E = \mathrm{Proj}(k[h, T]) = \mathbb{P}^1$ и $\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_E(-1)$, откуда $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Заметим, что для заданных геометрических данных $(X, C, P, \mathcal{F}, ...)$, где X, C, P определены по кольцу A и пучок $\mathcal{F}$ когерентен и ранга один, соответствующая пара Шура (A, W) индуцирует 1-мерную пару Шура (A', W'), где

$$A' = \overline{k((\partial_1))}\langle \partial_2^2, \partial_2(\partial_2^2 + 3\partial_1^2)\rangle,$$

и W' — пространство над $K = \overline{k((\partial_1))}$, порожденное элементами из W (таким образом, $A', W' \subset K((\partial_2^{-1})))$. Пара Шура (A', W') соответствует одномерному геометрическому квинтету $(C', P', \mathcal{F}', \dots)$ (см. [107, Th.4.6] или [108], см. также параграф 1.2.1), где C' — рациональная кривая рода 1 с обыкновенной двойной точкой (т.е. нодальная кривая) над K, и $\mathcal{F}'$ — пучок без кручения ранга один на C' с $H^0(C', \mathcal{F}') = H^1(C', \mathcal{F}') = 0$. Нетрудно видеть, что дивизор C на поверхности X также естественно изоморфен нодальной кривой, чье аффинное уравнение (уравнение кривой $C \backslash P$) равно $\tilde{y}^2 = y(y + 3)^2$.

С другой стороны, все пучки без кручения ранга один на этой нодальной кривой (ср. [127]), равно как соответствующие пары Шура одномерных геометрических данных, могут быть описаны явно следующим образом (ср. [136, Sec 3]). Нодальную кривую C' можно представить как проективную прямую с двумя склеенными точками с локальными координатами a и $-a$ (локальная координата z на $\mathbb{P}^1 \backslash P'$). Нетрудно видеть, что в нашем случае

$$a = i\sqrt{3}\partial_1,$$

а для кривой C координата равна $i\sqrt{3}$. Теперь мы можем использовать хорошо известную формулу для функции Бейкера-Ахиезера, ассоциированной с линейным расслоением на кривой, чтобы описать соответствующие пространства пар Шура. Напомним, что функцию Бейкера-Ахиезера можно записать в виде $\psi(x, z) \exp(xz^{-1}) = S(x, \partial^{-1})(\exp(xz^{-1}))$ (где z — локальный параметр в точке на кривой).

Для единственного не локально свободного пучка $n_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ степени ноль (где $n : \mathbb{P}^1 \to C'$ — отображение нормализации) соответствующее пространство W' равно $K[\partial_2]$. Это пространство задается пространством $W = k[\partial_1, \partial_2]$, и пара (A, W) очевидным образом соответствует кольцу A дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Единственный локально свободный пучок степени ноль, у которого ненулевые когомологии, — это $\mathcal{O}_{C'}$. Для локально свободного пучка $\mathcal{L}$, чей параметр (в пространстве модулей) равен $\lambda \in K^* \simeq \mathrm{Pic}(C')$, $\lambda \neq -1$ ($\lambda = -1$ соответствует пучку $\mathcal{O}_{C'}$) соответствующее пространство W' равно

$$K[\partial_2] \cdot S, \quad \text{где } S = (1 + w\partial_2^{-1}) \text{ и}$$

$$w = -a\frac{\lambda \exp(x_2 a) - \exp(-x_2 a)}{\lambda \exp(x_2 a) + \exp(-x_2 a)}.$$

Теперь мы можем описать те одномерные пары Шура (A', W') (над полем K), которые индуцированы двумерными парами Шура (A, W) (над полем k). Легко видеть, что необходимые и достаточные условия для описания таких пар следующие: все элементы из допустимого базиса в W' должны принадлежать $k[\partial_1]((\partial_2^{-1}))$ и удовлетворять условию (A_1). Так как $A \subset A'$ и все элементы из A удовлетворяют условию (A_1), достаточно проверить это свойство только для первых двух элементов из допустимого базиса в W'. Эти элементы равны

$$w_0 = S|_{x=0}, \quad w_1 = \partial_2 + \partial_2(w)|_{x=0}\partial_2^{-1} - (w|_{x=0})^2\partial_2^{-1}.$$

Значит, должны выполняться равенства

$$-a\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = P(\partial_1), \quad -a^2\frac{4\lambda}{(\lambda+1)^2} = Q(\partial_1),$$

где P, Q — многочлены от ∂_1 с коэффициентами в k степени не выше чем 1 и 2 соответственно. Следовательно, из первого уравнения получаем

$$\lambda = \frac{a - P}{a + P} \in k(\partial_1),$$

а второе уравнение выполняется для любого такого λ и для любого такого P. Те же формулы показывают (в силу теоремы 39), что для всех $-1 \neq \lambda \in k^*$ пучок $\zeta(\mathcal{F})$ (который определется по пространству $\oplus W_{i+1}/W_i$) является линейным расслоением на C, соответствующим λ. Очевидно, $\zeta(\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2})) \simeq n_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$. Итак, отображение ζ, упоминавшееся в начале этого примера, действительно сюръективно.

С другой стороны, для любого такого λ можно вычислить операторы из соответствующего кольца операторов. В частности, в нем будет содержаться оператор вида

$$S^{-1}\partial_2^2 S = \partial_2^2 + 2\partial_2(w) = \partial_2^2 - \frac{8a^2\lambda}{(\lambda \exp(x_2 a) + \exp(-x_2 a))^2}.$$

Последнее слагаемое этого оператора не может быть многочленом от ∂_1, потому что экспоненциальная функция не может принадлежать алгебраическому расширению поля рациональных функций. Таким образом, по замечанию 20 не существует колец ДО с проективной спектральной поверхностью X, кроме кольца A операторов с постоянными коэффициентами.

Пример 28. Это другой пример поверхности, дивизора и точки, для которых мы можем посчитать все возможные геометрические данные ранга один, соответствующие пары Шура и соответствующие алгебры коммутирующих операторов. Отображение ζ будет опять сюръективно. Но, в отличие от предыдущего примера, для этой поверхности есть много коммутативных колец ДО.

Рассмотрим кольцо

$$A = k\langle \partial_2^2, \partial_2^3, \partial_1 \rangle \subset k[\partial_1, \partial_2]$$

Легко видеть, что $A \simeq k[h][z,x]/(z^2-x^3)$ (где $\partial_2^3 \mapsto z$, $\partial_2^2 \mapsto x$, $\partial_1 \mapsto h$) и что $F = k[\partial_1, \partial_2]$, где F обозначает нормализацию A. Также ясно, что A — 1-квазиэллиптическое вполне допустимое кольцо.

Используя похожие рассуждения из предыдущего примера можно показать, что X получается из $\mathbb{P}^2$ склейкой двух совпадающих прямых (или прямой кратности 2, ср. раздел 5.2.3). Значит, опять $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Снова, как и в предыдущем примере, X — конус над C, которая на этот раз является каспидальной рациональной кривой рода 1. Тем самым, мы можем использовать в этом случае те же идеи и обозначения.

Всякая пара Шура (A, W) индуцирует 1-мерную пару Шура (A', W') над K, где

$$A' = \overline{k((\partial_1))}\langle \partial_2^2, \partial_2^3 \rangle.$$

Для единственного не локально свободного пучка $n_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ степени ноль соответствующее пространство W' равно $K[\partial_2]$. Это пространство происходит из пространства $W = k[\partial_1, \partial_2]$, и пара (A, W) очевидным образом соответствует кольцу A дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Единственный локально свободный пучок степени ноль с ненулевыми когомологиями — это $\mathcal{O}_{C'}$. Для локально свободного пучка $\mathcal{L}$, чей параметр равен $\lambda \in K \simeq \mathrm{Pic}(C')$, $\lambda \neq 0$ ($\lambda = 0$ соответствует $\mathcal{O}_{C'}$) соответствующее пространство W' равно

$$K[\partial_2] \cdot S, \quad \text{где } S = (1 + w\partial_2^{-1}) \text{ и}$$

$$w = \frac{1}{\lambda - x_2}.$$

Теперь $w_0 = S|_{x=0} = 1 + (1/\lambda)\partial_2^{-1}$. Чтобы найти те пары (A', W'), которые индуцируются парами (A, W), мы опять приходим к условию $1/\lambda = P(\partial_1)$ для некоторого линейного многочлена P. Нетрудно видеть, что для всех таких λ пространства W' индуцированы W и что отображение ζ сюръективно.

Кольца коммутирующих операторов будут содержать два оператора: ∂_1 и

$$S^{-1}\partial_2^2 S = \partial_2^2 + \frac{2P(\partial_1)^2}{(1 - x_2 P(\partial_1))^2}.$$

По замечанию 20 и по предложению 2 такое кольцо является кольцом ДО если и только если $P(\partial_1)$ равно константе. Очевидно, что пучки, соответствующие таким кольцам, являются прообразами пучка $n_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$.

Пример 29. Используя идею из доказательства теоремы 37 можно построить пример аффинной поверхности, которая не может быть спектральной поверхностью какого-либо кольца ДО B ранга один со свойством из теоремы 18. Например, рассмотрим кольцо

$$A = k[X_1, X_2, X_3]/(F), \tag{6.4}$$

где $F = X_1X_2 + X_3 + \sum_{q=1}^r g_q X_1^q$, и $g_i \in k[X_3]$ — произвольные многочлены, и k алгебраически замкнуто.

Тогда (см. [2, Ch.VII,§3, Ex.5]) A — факториальное кольцо, и $\mathrm{Spec}(A)$ — рациональная аффинная поверхность. Легко видеть, что A не изоморфно кольцу многочленов $k[u,v]$ для общих g_i и что $\mathrm{Spec}(A)$ гладка. Предположим, что существует кольцо $B \subset D$ ранга один, удовлетворяющее свойству из теоремы 18 и такое, что $B \simeq A$. Без ограничения общности можно предполагать, что B — 1-квазиэллиптическое вполне допустимое кольцо. Так как ранг кольца равен 1, ранг данных тоже равен 1 по классификационной теореме 24. Тогда пучок $\mathcal{F}$ когерентен и ранга один в силу предложения 26. По теореме 35 пучок $\mathcal{F}$ Коэно-Маколеев. Так как $\mathrm{Spec}(A)$ гладка, $\mathcal{F}$ должен быть локально свободным на $\mathrm{Spec}(A)$. Но так как A факториально, имеем $Cl(A) \simeq \mathrm{Pic}(A) = 0$, поэтому $\mathcal{F}|_{\mathrm{Spec}(A)} \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$. Но тогда пространство W соответствующей пары Шура должно быть равно пространству A. Следовательно, $A \simeq k[ut^{-1}, t^{-1}]$ (где u, t — параметры из (10)), противоречие.

6.3 Деформации коммутирующих операторов

В этом разделе определяются модифицированные системы Паршина, а в конце раздела приводится пример геометрических данных, построенных по паре Шура, соответствующие им коммутирующие операторы в $\hat{D}$, пример модифицированной системы, определяющей деформации операторов, некоторые ее уравнения — аналоги уравнения КдФ из классической теории КП, а также точные решения — аналог рациональных решений уравнения КдФ (эта система определяет также деформации ряда других «тривиальных» алгебр, а также определяет потоки на пространстве модулей Коэно-Маколеевых пучков ранга один с фиксированным полиномом Гильберта на спектральной поверхности таких алгебр).

Систему Паршина можно понимать как универсальную систему всех изоспектральных деформаций пар дифференциальных (или пополненных дифференциальных) операторов от двух переменных. А именно: понятие изоспектральных деформаций может быть определено аналогично тому, как оно определено в классическом случае (см. например раздел 1.2.2 или обзор [108]). Рассмотрим семейство операторов

$$\{P(t), t \in M\},$$

где пространство параметров M является областью в $\mathbb{C}^N$ и $P(t) = (P_1(t), P_2(t))$, $P_i \in \tilde{D} := k[[x_1, x_2]][t]((\partial_1^{-1}))[\partial_2]$, — пара коммутирующих «дифференциальных» операторов со старшим коэффициентом 1, зависящих от $t = (t_1, \dots, t_N) \in M \subset \mathbb{C}^N$ аналитически.

Определение 77. Будем говорить, что $\{P(t), t \in M\}$ — семейство изоспектральных деформаций, если существуют операторы $Q_1(t), \dots, Q_N(t) \in \tilde{D}$, зависящие от параметра $t \in M$ аналитически, такие что система

$$\begin{cases} P(t)\psi(A, t; \lambda) = \lambda\psi(A, t; \lambda) \\ \frac{\partial}{\partial t_1}\psi(A, t; \lambda) = Q_1(t)\psi(A, t; \lambda) \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial t_N}\psi(A, t; \lambda) = Q_N(t)\psi(A, t; \lambda) \end{cases} \tag{6.5}$$

имеет нетривиальное решение $\psi(A, t; \lambda)$ для каждого собственного значения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ семейства $P(t)$.

Повторяя рассуждения из работы [108], §4, получаем условия совместности для системы (77):

$$0 = \frac{\partial}{\partial t_i}(P(t)\psi(x, t; \lambda) - \lambda\psi(x, t; \lambda)) = (\frac{\partial}{\partial t_i}P(t) - [Q_i(t), P(t)])\psi(x, t; \lambda),$$

где $x = (x_1, x_2)$. Для каждого фиксированного $t \in M$, собственные функции $\psi(x, t; \lambda)$ линейно независимы (в том числе топологически) для разных собственных значений $\lambda \in \mathbb{C}$. Так как $\frac{\partial}{\partial t_i}P_j(t) - [Q_i(t), P_j(t)]$, $j = 1, 2$ — псевдо-дифференциальные операторы конечного порядка по ∂_2, они имеют не более чем счетный (топологический) базис независимых решений. Следовательно, из соображений мощности,

$$\frac{\partial}{\partial t_i}P(t) = [Q_i(t), P(t)]. \tag{6.6}$$

Аналогично, условие $\frac{\partial}{\partial t_i}\frac{\partial}{\partial t_j}\psi = \frac{\partial}{\partial t_j}\frac{\partial}{\partial t_i}\psi$ даёт уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t_i}Q_j(t) - \frac{\partial}{\partial t_j}Q_i = [Q_i(t), Q_j(t)]. \tag{6.7}$$

Система уравнений (6.6) и (6.7) эквивалентна условию, что уравнение (77) имеет нетривиальное решение для каждого $\lambda \in \mathbb{C}^2$. Следовательно, нахождение семейства $P(t)$ изоспектральных деформаций данной пары $P(0)$ эквивалентно нахождению решения уравнения Лакса (6.6) для дифференциальных операторов $Q_i(t)$, удовлетворяющих (6.7), с начальным условием $P(t)|_{t=0} = P(0)$.

Предположим без ограничения общности, что $\mathrm{ord}_{\partial_2}(P_1) \geq \mathrm{ord}_{\partial_2}(P_2)$. Пусть

$$(\mathrm{ord}_{\partial_1}(P_1\partial_2^{-\mathrm{ord}_{\partial_2}(P_1)})_+, \mathrm{ord}_{\partial_2}(P_1)) = (p_1, q_1)$$

и

$$(\mathrm{ord}_{\partial_1}(P_2\partial_2^{-\mathrm{ord}_{\partial_2}(P_2)})_+, \mathrm{ord}_{\partial_2}(P_2)) = (p_2, q_2).$$

Для каждого псевдодифференциального оператора будем называть такую пару целых чисел *полным порядком.*

Лемма 48 ([17], лемма 2)**.** *Предположим, что $(p_1, q_1) \neq d(p_2/l, q_2/l)$, $d \in \mathbb{Z}$, где $l = gcd(p_2, q_2)$. Тогда уравнение (6.6) эквивалентно уравнению*

$$\frac{\partial}{\partial t_i} L(t) = [Q_i(t), L(t)], \tag{6.8}$$

где $L = (L_1, L_2)$,

$$L_1 = u_0 + u_1\partial_2^{-1} + \ldots,$$

$u_i \in k[[x_1, x_2]][t]((\partial_1^{-1}))$, $\mathrm{ord}_{\partial_1}(u_0) = 1$, u_0 имеет старший коэффициент 1,

$$L_2 = v_{-1}\partial_2 + v_0 + v_1\partial_2^{-1} + \ldots,$$

$u_i \in k[[x_1, x_2]][t]((\partial_1^{-1}))$, $\mathrm{ord}_{\partial_1}(v_{-1}) = 0$, v_{-1} имеет старший коэффициент 1.

Доказательство Для удобства читателя приведем здесь доказательство. Рассмотрим оператор $P_1' := P_1^{q_2/(l\cdot gcd(q_1,q_2/l))} P_2^{-(1/l)q_1/gcd(q_1,q_2/l)}$. Пусть полный порядок оператора P_1' равен $(k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Если $k = 0$, это означает, что $p_1q_2/(l \cdot gcd(q_1, q_2/l)) = p_2q_1/(l \cdot gcd(q_1, q_2/l))$, откуда следует, что p_2/l делится на $q_2/(l \cdot gcd(q_1, q_2/l))$, и p_1 делится на $q_1/gcd(q_1, q_2/l)$. Так как $(p_2/l, q_2/l) = 1$, то, следовательно, $gcd(q_1, q_2/l) = q_2/l$ и $(p_1, q_1) = q_1 l/q_2(p_2/l, q_2/l)$, противоречие.

Таким образом, $k \neq 0$, и мы положим $L_1 := P_1'^{1/k}$. Так как P_1, P_2 — операторы со старшим коэффициентом 1, такой корень существует. Тогда $L_2 := (P_2 L_1^{-p_2})^{1/q_2}$. Очевидно, уравнение (6.8) влечет уравнение (6.6). Докажем обратное.

Так как $\frac{\partial}{\partial t_i}$ и $[Q_i(t), .]$ — дифференцирования, имеем

$$0 = (\frac{\partial}{\partial t_i} - [Q_i(t), .])P_2(t) = \sum_{k=0}^{l-1} P_2(t)^{k/l}(\frac{\partial}{\partial t_i}P_2(t)^{1/l} - [Q_i(t), P_2(t)^{1/l}])P_2(t)^{(l-1-k)/l}$$

Так как $P_2(t)^{1/l}$ — оператор со старшим коэффициентом 1, последнее уравнение влечет, что $\frac{\partial}{\partial t_i}P_2(t)^{1/l} - [Q_i(t), P_2(t)^{1/l}] = 0$. Следовательно, уравнение (6.6) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t_i}P_2(t)^{1/l} = [Q_i(t), P_2(t)^{1/l}], \quad \frac{\partial}{\partial t_i}P_1(t) = [Q_i(t), P_1(t)]$$

Продолжая в том же духе, получаем эквивалентность уравнения выше и уравнения (6.8).

В том случае, когда операторы P_1, P_2 образуют пару нормализованных квазиэллиптических операторов (т.е. их Г-порядки равны (0,k) и (1,l)), и $N \to \infty$, система из определения оказывается эквивалентной системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t_{ij}} L(t) = [(L_1(t)^i L_2(t)^j)_+, L(t)], \quad i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}_+,$$

где $L(t) = (L_1(t), L_2(t))$,

$$L_1 = \partial_1 + u_1\partial_2^{-1} + \dots, \quad L_2 = \partial_2 + v_1\partial_2^{-1} + \dots.$$

В этом случае из уравнения (6.8) мы также получаем

$$\mathrm{ord}_{\partial_2}([Q_i(t), L_1(t)]) < 0, \quad \mathrm{ord}_{\partial_2}([Q_i(t), L_2(t)]) < 0. \tag{6.9}$$

Лемма 49 ([17], лемма 3)**.** *Пусть* $L = (L_1, L_2)$, $L_1, L_2 \in k[[x_1, x_2]]((\partial_1^{-1}))((\partial_2^{-1}))$ *— произвольные операторы со старшим коэффициентом 1 и такие, что* $\mathrm{ord}_{\partial_2}(L_1) = 0$, $\mathrm{ord}_{\partial_2}(L_2) = 1$, $\mathrm{ord}_{\partial_1}(L_{1+}) = 1$, $\mathrm{ord}_{\partial_1}((L_2\partial_2^{-1})_+) = 0$. *Тогда*

$$F_L = \{Q \in \tilde{D} | \, \mathrm{ord}_{\partial_2}([Q_i(t), L_1(t)]) < 0, \quad \mathrm{ord}_{\partial_2}([Q_i(t), L_2(t)]) < 0\}$$

совпадает с $\mathbb{C}$*-линейным пространством (топологически) порожденным операторами* $(L_1^i L_2^j)_+$, $i \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}_+$.

Отсюда мы получаем, что уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t_{ij}} L(t) = [(L_1(t)^i L_2(t)^j)_+, L(t)], \quad i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}_+$$

влечет уравнение (6.7). Таким образом, это — универсальное уравнение для всех возможных изоспектральных деформаций пары "дифференциальных"операторов, удовлетворяющих условию леммы 48 и предположениям перед леммой 49. Более подробно, см. [151], §6.

Замечание 81. Кольцо $\tilde{D}$ появилось в работе [24], и является "максимально"возможным. В той же работе А.Н.Паршин заметил, что возможны другие разложения кольца E в прямую сумму E_+ и E_- (ср. раздел 3.1.3). Необходимо отметить, что другие разложения действительно имеют смысл, и, например, кольцо $\tilde{D}$ можно заменить на кольцо $D \subset \hat{E}_+$ (обозначение из главы 3) или какое-лиюо другое (в зависимости от разложения). В зависимости от выбора мы будем получать в итоге динамические системы на пространстве модулей Коэно-Маколеевых пучков с фиксированным полиномом Гильберта на спектральной поверхности (как в замечании 79) или пространстве модулей пучков без кручения (скажем, на схеме Пикара) на риббоне (см. дискуссию ниже).

Отметим, что были попытки исследования систем Паршина другими авторами, см. например [120]. В работах [123], [124], [125] были даже приведены формулы для тау-функции, подобные формуле 1.41. К сожалению, эти работы содержат ошибки, неочевидные для исправления.

Система уравнений для изоспектральных деформаций может быть модифицирована многообразными способами, причем для операторов не только со скалярными коэффициентами, но с коэффициентами из достаточно общего ассоциативного кольца. Объясним это более подробно.

Рассмотрим ассоциативную алгебру K с единицей над полем k характеристики 0 и с двумя дифференцированиями (∂_1, ∂_2), такими что $\partial_1\partial_2 = \partial_2\partial_1$ и $ker(\partial_1) \cap ker(\partial_2) = k$. Определим кольцо E:

$$E = K((\partial_1^{-1}))((\partial_2^{-1})).$$

Будем предполагать, что следующие последовательности точны:

$$K \xrightarrow{\partial_1} K \longrightarrow 0, \quad K \xrightarrow{\partial_2} K \longrightarrow 0, \quad \ker\partial_2 \xrightarrow{\partial_1} \ker\partial_2 \longrightarrow 0.$$

Легко видеть, что тогда также точна последовательность $\ker\partial_1 \xrightarrow{\partial_2} \ker\partial_1 \longrightarrow 0$.

Рассмотрим кольцо $K_t := K[\dots, t_{ij}, \dots]$ многочленов от бесконечного числа переменных t_{ij}, $i \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}_+$ с коэффициентами из кольца K. Мы определяем, что переменные коммутируют друг с другом и с элементами кольца K. Определим псевдонормирование v этого кольца

$$v : K_t \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_+$$

по правилу $v(t_{i,j}) = (-i, j)$, $v(a) = 0$ для $a \in K$. Определим также псевдонормирование $v_2 : K_t \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ как $v_2(t_{ij}) = j$, $v(a) = 0$ для $a \in K$. Мы считаем, что $(i_1, j_1) > (i, j)$ если $j_1 > j$ или $j_1 = j$ и $i_1 > i$.

Введем групповую топологию на K_t, где мы рассматриваем K_t как абелеву группу. А именно, определим базу окрестностей нуля, состоящую из множеств следующего типа

$$U_{lm} := \{\sum_{k \geq 0} u_k \in K_t \text{ с } v_2(u_k) = k \text{ и } v(u_k) \geq (l, k), \text{ если } k < m \},$$

где $l \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}_+$ и u_k — сумма мономов с одинаковыми значениями нормирования v_2.

Пополнение $\bar{R} := \hat{K_t}$ топологической группы K_t, состоящее из фундаментальных последовательностей относительно этой топологии, имеет структуру ассоциативной k-алгебры с покомпонентным сложением и умножением фундаментальных последовательностей. Каждый элемент этой алгебры можно представлять в виде ряда, чьи слагаемые являются мономами, принадлежащими K_t, причем любая окрестность нуля в K_t содержит почти все слагаемые этого ряда. Нормирование v (и v_2) может быть однозначно продолжено на кольцо $\bar{R}$ по правилу

$$v(\sum a_i) = \min\{v(a_i)\},$$

где $\{a_i\} \in K_t$ — мономы. Продолжим дифференцирования ∂_1, ∂_2 на кольцо $\bar{R}$ обычным способом, полагая $t_{ij} \in \ker\partial_1 \cap \ker\partial_2$. Определим теперь кольца

$$E_{\bar{R}} := \bar{R}((\partial_1^{-1})), \quad E_R := E_{\bar{R}}((\partial_2^{-1})).$$

Для кольца E_R определено разложение на плюс и минус части: $E_R = E_{R,+} \oplus E_{R,-}$, где $E_{R,+} = E_{\bar{R}}[\partial_2]$, $E_{R,-} = E_{\bar{R}}[[\partial_2^{-1}]]\partial_2$. Для кольца $E_{\bar{R}}$ разложение определяется аналогично относительно ∂_1.

Продолжим нормирование v_2 с $\bar{R}$ на $E_{\bar{R}}$ по правилу $v_2(\sum a_k \partial_1^k) = \min\{v_2(a_k)\}$. Непосредственно проверяется, что это определение корректно.

Определим

$$\widehat{E}_{\bar{R}} := \{L = \sum_{q \in \mathbb{Z}} b_q \partial_1^q | b_q \in \bar{R} \text{ и } \forall\ M \in \mathbb{Z} \text{ и } N \in \mathbb{Z}_+$$
$$\text{существует лишь конечное число } b_q \text{ с } q < M \text{ таких, что } v_2(b_q) = N\}$$

Продолжим нормирование v_2 с $E_{\bar{R}}$ на $\widehat{E}_{\bar{R}}$ аналогично тому, как это было сделано для кольца $E_{\bar{R}}$.

Определим

$$\widehat{E}_R := \{L = \sum_{q \in \mathbb{Z}} a_q \partial_2^q | a_q \in \widehat{E}_{\bar{R}} \text{ и существует } C_L \in \mathbb{R}_+$$
$$\text{и } M_L \in \mathbb{Z}_+, \text{ такие что } v_2(a_q) > C_L q \text{ для всех } q > M_L\},$$

Определим группу $\widehat{\mathcal{V}}_R := \{1 + \widehat{E}_{R,-}\}$.

Рассмотрим теперь следующие *модифицированные системы КП*:

$$\frac{\partial N}{\partial t_{ij}} = V_N^{ij}, \qquad (KP)_\alpha$$

где

$$V_N^{ij} = ([(L^i M^j)_+, L], [(L^i M^j)_+, M])$$

если $N = (L, M)$ и $j \geq 0$, $i \leq \alpha(j)$, $i \in \mathbb{Z}$, и α — любая функция $\alpha : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$, такая что $\alpha(0) \leq 0$. Операторы L и M здесь имеют вид

$$L = u_0 + u_1 \partial_2^{-1} + \dots$$

$$M = v_{-1}\partial_2 + v_0 + v_1 \partial_2^{-1} + \dots,$$

где $u_i, v_i \in \widehat{E}_{\bar{R}}$, а начальные условия $u_0^0, v_{-1}^0 \in K((\partial_1^{-1}))$ — операторы со старшим коэффициентом 1 и $\mathrm{ord}_{\partial_1}(u_0^0) = 1$, $\mathrm{ord}_{\partial_1}(v_{-1}^0) = 0$.

Отметим, что как было показано в работе [151], нетривиальное решение системы (KP_α) может существовать, лишь если $[L_0, M_0] = 0$. Поэтому, *мы будем предполагать, что L_0, M_0 коммутируют.* Модифицированные системы удовлетворяют всем основным свойствам, полученным в работе [118] для оригинальных систем Паршина. Далее в этой же работе была доказана теорема о существовании и единственности решений модифицированных систем.

Предложение 31 ([17], предл. 1)**.** *Система $(KP)_\alpha$ с начальным условием $N_0 = (L_0, M_0)$ эквивалентна следующей модифицированной системе Сато-Вилсона:*

$$\frac{\partial S}{\partial t_{ij}} = -(S\partial_1^i \partial_2^j S^{-1})_- S \qquad (SW)_\alpha,$$

где $S \in \widehat{\mathcal{V}}_R$, с начальным условием $S(0) \in (1 + E_-)$.

Предложение 32. *Существует биекция между элементами следующих двух множеств:*

$$Sol((KP)_\alpha) = \{N = (L, M), \quad L, M \in \widehat{E}_R(E_R) \quad | \quad N \quad \text{удовлетворяет } (KP)_\alpha \text{ и } L, M \text{ не зависят от } t_{ij},\ i > \alpha j\}$$

и

$$Sol((SW)_\alpha) = \{S \in \widehat{\mathcal{V}}_R \cdot \widehat{\mathcal{V}}_k (\mathcal{V}_R \cdot \widehat{\mathcal{V}}_k) \quad | \quad S \quad \text{удовлетворяет } (SW)_\alpha \text{ и не зависит от } t_{i,j},\ i > \alpha j\}/(\mathcal{V}_{k, L_{00}, M_{00}})$$

Теорема 40. *Для любого начального условия $S(0) \in 1 + E_-$ существует единственное решение $S = S(t) \in \widehat{\mathcal{V}}_R$ системы $(SW)_\alpha$, такое что $S|_{t=0} = S(0)$.*

Все эти утверждения являются естественными обобщениями соответствующих утверждений классического случая, ср. [106]. Таким образом, для любого кольца коммутирующих операторов могут быть определены подходящие деформации, которые через классификационную теорему задают потоки на пространствах модулей.

Пример 30. Рассмотрим подпространство $W = \langle 1+t, t^{-i}u^j, i \geq 1, 0 \leq j \leq i \rangle \subset k[[u]]((t))$. Легко проверить, что его кольцо стабилизаторов содержит элементы t^{-2}, t^{-3}, ut^{-2}. Таким образом, оно строго допустимо. Максимальное кольцо стабилизаторов будет бесконечно порождено над k. Пара Шура (W, A) с конечно порожденным кольцом A, содержащим элементы выше, соответствует геометрическим данным с особой торической поверхностью. Используя замечание из примера 25, можно показать, что поверхность $\mathrm{Spec}\, A$ получается склейкой двух прямых $2\mathbb{A}^1$ на $\mathbb{A}^2$. Кондуктор кольца A в нормализации $\tilde{A} \simeq k[x,h]$ равен (x^2) (в $\tilde{A}$). Таким образом, в обозначениях примера 25 $Y' = 2\mathbb{A}^1$ и $Y = \mathbb{A}^1$. Заметим, что пространство W бесконечно порождено над A; следовательно, оно определяет квазикогерентный пучок на проективной поверхности. Наконец, легко видеть, что A Коэно-Маколеево (как кольцо многочленов над $k[x^2, x^3]$, которое также Коэно-Маколеево, см. [91, th.33]).

Операторы, соответствующие элементам t^{-2}, ut^{-2} в кольце коммутирующих операторов, соответстующем A (операторы, удовлетворяющие определению квази-эллиптичности, ср. также следствие 9), — это

$$P = \partial_2^2 - 2\frac{1}{(1-x_2)^2}(:\exp(-x_1\partial_1):),$$

$$Q = \partial_1\partial_2 + \frac{1}{1-x_2}(:\exp(-x_1\partial_1):)\partial_1,$$

где $(:\exp(-x_1\partial_1):) = 1 - x_1\partial_1 + x_1^2\partial_1^2/2! - x_1^3\partial_1^3/3! + \ldots$. Оператор, соответствующий элементу t^{-3}, — это

$$P' = \partial_2^3 - 3\frac{1}{(1-x_2)^2}(:\exp(-x_1\partial_1):)\partial_2 - 3\frac{1}{(1-x_2)^3}(:\exp(-x_1\partial_1):).$$

Таким образом, эти операторы очень похожи на операторы из примера 2. Эта схожесть распространяется и дальше: система изоспектральных деформаций для этих операторов — модифицированная система Паршина $(KP)_\alpha$ с $i, j \geq 0$ с начальными условиями, происходящими из операторов P, Q (см. лемму 48), а потому все операторы этой системы, включая решение, будут принадлежать кольцу $\hat{E}_+(t)$.

Первые уравнения соответствующей модифицированной системы Сато-Вилсона преобразуются к системе трех уравнений:

$$\frac{\partial s_1}{\partial t_1} = \frac{1}{4}(s_1)_{x_2x_2x_2} - \frac{3}{2}(s_1)_{x_2}^2, \quad \frac{\partial s_1}{\partial t_2} = -(s_1)_{x_2}(s_1)_{x_1} - \frac{1}{2}(s_1)_{x_2x_2}\partial_1, \tag{6.10}$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial t_3} = -(s_1)_{x_1}^2 - (s_1)_{x_1x_2}\partial_1 - (s_1)_{x_2}\partial_1^2,$$

где $s_1(t_1, t_2, t_3) = s_1(t)$ — первый коэффициент оператора $S(t) = 1 + s_1(t)\partial_2^{-1} + \ldots$, и $S(0) = S$ — сопрягающий оператор: $W = W_0 S$, $P = S\partial_2^2 S^{-1}$.

Примечательно, что $s_1(0) = \frac{1}{1-x_2}(:\exp(-x_1\partial_1):)$ — решение уравнений выше. Это соответствует следующему факту из одномерной теории КП: функция $u(x) = (x^{-1})_x$ — рациональное решение уравнения КдВ (и эта функция является уполовиненным коэффициентом оператора P в примере 2).

Замечание 82. Простой анализ уравнений (6.10) показывает, что даже если деформировать коммутативное кольцо дифференциальных операторов в частных производных (что означает, что $s_1(0) \in k[[x_1, x_2]][\partial_1] = D_1$), изоспектральные деформации не будут дифференциальными операторами в частных производных, но будут операторами из $\hat{D}$, так как $s_1(t) \notin D_1$ для общих значений t. Таким образом, кольцо $\hat{D}$ появляется совершенно естественным образом. Эта ситуация с деформациями похожа на аналогичную ситуацию, возникающую при попытке описания коммутативных колец обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами. В одномерной теории КП, если мы стартуем с коммутативного кольца обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами, его изоспектральные деформации (которые связаны с решениями уравнения КП) будут состоять из операторов с неполиномиальными коэффициентами, хотя они и будут оставаться обыкновенными дифференциальными операторами.

Литература

1. Атья М., Макдональд И., *Введение в коммутативную алгебру*, М.: Мир, 1972.

2. Бурбаки Н., *Коммутативная алгебра*, М.: Мир, 1971.

3. В. М. Бухштабер, С. Ю. Шорина, *Коммутирующие дифференциальные многомерные операторы третьего порядка, задающие КдФ-иерархию*, Успехи матем. наук, vol 58, 3, 2003, 187–188

4. Гельфанд И.М., Дикий Л.А., *Асимптотика резольвенты штурм–лиувиллевских уравнений и алгебра уравнений Кортевега–де Фриза* , УМН, 1975, 30:5(185), 67–100; *Дробные степени операторов и гамильтоновы системы*, Функц. анализ и его прил., 1976, 10:4, 13–29

5. П.Г. Гриневич, *Рациональные решения уравнений коммутации дифференциальных операторов*, Функц. анализ и его прил., **16**:1 (1982), 19–24.

6. Демидов Е. Е. *Иерархия Кадомцева–Петвиашвили и проблема Шоттки*, Фундамент. и прикл. матем., 1998, 4:1, 367–460.

7. Дринфельд В., *О коммутативных подкольцах некоторых некоммутативных колец*, Функц. анализ и его прил. 11:1 (1977), 11-14.

8. Дринфельд В. Г., Соколов В. В., *Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега-де Фриза*, Итоги науки и техники, Совр. пробл. математики ВИНИТИ, 1984, т.24, с. 81-180.

9. Жеглов А.Б. *О структуре двумерных локальных тел*, Известия РАН: Сер. Мат., 1, 2001, стр. 25-60.

10. А. Б. Жеглов, “О диких алгебрах с делением над полями степенных рядов”, *Матем. сб.*, **195**:6 (2004), 21–56.

11. А. Б. Жеглов, “О кольцах коммутирующих дифференциальных операторов”, *Алгебра и Анализ*, **25**:5 (2013), 86–145.

12. А. Б. Жеглов, Х. Курке, “Геометрические свойства коммутативных подалгебр дифференциальных операторов в частных производных”, *Матем. Сб.*, **206**:5 (2015), 676–717.

13. А. Б. Жеглов, А. Е. Миронов, “Модули Бейкера–Ахиезера, пучки Кричевера и коммутативные кольца дифференциальных операторов в частных производных”, *Дальневосточный математический журнал*, **12**:1 (2012), 20–34.

14. А. Б. Жеглов, А. Е. Миронов, “О коммутирующих дифференциальных операторах с полиномиальными коэффициентами, отвечающих спектральным кривым рода один”, *Доклады Академии наук*, **91**:3 (2015), 281–282.

15. А. Б. Жеглов, А. Е. Миронов, Б. Т. Сапарбаева, *Коммутирующие несамосопряженные дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами*, принят к печати в Сиб. Мат. Ж., 6 р.;

16. А. Б. Жеглов, Д. В. Осипов, “ О некоторых вопросах, связанных с соответствием Кричевера”, *Матем. заметки*, **81**:2 (2007), 528–539.

17. А. Б. Жеглов, Д. В. Осипов, “ Высшие иерархии КП и проколотые ленты ”, *Современные проблемы математики и механики*, **3** - Математика, Издательство Моск. Ун-та МГУ, 2009, 15–35.

18. М. Касивара, П. Шапира, *Пучки на многообразиях*, Мир, Москва, 1997.

19. И.М. Кричевер, *Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений*, УМН **32**, 6 (1977), 183-208

20. И.М. Кричевер, *Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов*, Функц. анализ и его прил., 12:3, 1978, 20–31

21. И.М. Кричевер, С.П. Новиков, *Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения*, УМН, **35**:6 (1980), 47–68.

22. А. Е. Миронов, *Коммутативные кольца дифференциальных операторов, отвечающие многомерным алгебраическим многообразиям*, Сиб. матем. журнал, 43, 5, 2002, 1102–1114.

23. Осипов Д.В., *Соответствие Кричевера для алгебраических многообразий*, Изв. РАН. Сер. матем., 2001, 65:5, 91–128.

24. Паршин А.Н., *О кольце формальных псевдодифференциальных операторов*, Алгебра. Топология. Дифференциальные уравнения и их приложения, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, 224, Наука, М., 1999, 291–305

25. Паршин А. Н., *Соответствие Кричевера для алгебраических поверхностей*, Функ. Анал. и Прил., том 35 (2001), 1, стр. 88-90.

26. Прессли Э., Сигал Г., *Группы петель*, М., Мир, 1990, 456 с.

27. Хартсхорн Р., *Алгебраическая геометрия*, М.: Мир, 1981.

28. Arbarello E., De Concini C., Kac V. G., Procesi C., *Moduli Spaces of Curves and Representation Theory*, Comm. Math. Phys., **117** (1988), 1-36

29. Artin, M., Mazur, B. *Formal groups arising from algebraic varieties*, Ann. Sci. Ec. Norm. Super. (4) 10, 87-132 (1977).

30. L. Badescu, *Projective geometry and formal geometry*, Monografie Matematyczne. Instytut Matematyczny PAN (New Series), 65, Birkhauser, Basel, 2002.

31. H. Baker, *Note on the Foregoing Paper “Commutative ordinary differential operators, by J. L. Burchnall and T. W. Chaundy”*, Proceedings Royal Soc. London (A) **118**, 584–593 (1928).

32. Bass H., *Algebraic K-theory*, Benjamin, New York, 1968

33. A. Beilinson, V. Drinfeld, *Quantization of Hitchin's system and Hecke eigensheaves*, Preprint, available at http://www.math.uchicago.edu/ mitya/langlands/hitchin/BD-hitchin.pdf

34. Beilinson A. A., Schechtman V. V., *Determinant bundles and Virasoro algebra*, Comm. Math. Physics, **118** (1988), 651-701

35. Ben-Zvi D., Frenkel E., *Spectral curves, opers and integrable systems*, Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. 94, 87-159 (2001).

36. Yu. Berest, A. Kasman *D-modules and Darboux transformations*, Lett. Math. Phys., vol. 43, 3, 1998, 279–294

37. Berest Yu., Etingof P., Ginzburg V., *Cherednik algebras and differential operators on quasi-invariants*, Duke Math. J. 118 (2), 279-337 (2003)

38. A. Borel et al., *Algebraic D-modules*, Perspectives in Mathematics, 2. Academic Press, (1987).

39. Braverman A., Etingof P., Gaitsgory D., *Quantum integrable systems and differential Galois theory*, Transfor. Groups 2, 31-57 (1997)

40. W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings.* Rev. ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 39, Cambridge University Press, Cambridge, 1998

41. I. Burban, A. Zheglov, *Fourier-Mukai transform on Weierstrass cubics and commuting differential operators*, Oberwolfach preprints, v.3, 2016, 1-32;

42. Burban I., Drozd Y., *Maximal Cohen-Macaulay modules over non-isolated surface singularities and matrix problems*, to appear in the Memoirs of the AMS; arXiv:1002.3042

43. Burban I., Drozd Y., *Maximal Cohen-Macaulay modules over surface singularities*, Trends in representation theory of algebras and related topics, 101-166, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2008.

44. Burchnall J.L., Chaundy T.W., *Commutative ordinary differential operators*, Proc. London Math. Soc. Ser. 2, **21** (1923) 420-440; Proc. Royal Soc. London Ser. A, **118** (1928) 557-583.

45. J. Burchnall, T. Chaundy, *Commutative ordinary differential operators*, Proc. Royal Soc. London (A) **118**, 557–583 (1928).

46. J. Burchnall, T. Chaundy, *Commutative ordinary differential operators. II: The identity* $P^n = Q^m$, Proc. Royal Soc. London (A) **134**, 471–485 (1931).

47. Chalykh O., *Algebro-geometric Schrödinger operators in many dimensions*, Philos. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci. 366, No. 1867, 947-971 (2008).

48. Chalykh O., Veselov A., *Commutative rings of partial differential operators and Lie algebras*, Comm. Math. Phys. 125 (1990) 597-611.

49. Chalykh O., Veselov A., *Integrability in the theory of the Schrödinger operators and harmonic analysis*, Comm. Math. Phys. 152 (1993) 29-40.

50. Chalykh O., Styrkas K., Veselov A., *Algebraic integrability for the Schrödinger operators and reflections groups*, Theor. Math. Phys. 94 (1993) 253-275.

51. E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, *Transformation groups for soliton equations*, in M. Jimbo and T. Miwa, Non-linear integrable systems – Classical theory and quantum theory, Word Scientific, 289 pps, 1983

52. V.N. Davletshina, *On self-adjoint commuting differential operators of rank two*, Siberian Electronic Math. Reports **10** (2013), 109–112.

53. V.N. Davletshina, *Commuting differential operators of rank two with trighonometric coefficients*, Siberian Math. J., 56:3 (2015), 405-410.

54. V.N. Davletshina, E.I. Shamaev, *On commuting differential operators of rank 2*, Siberian Math. J., **55**:4 (2014), 606–610.

55. J. Dixmier, *Sur les algèbres de Weyl*, Bull. Soc. Math. France **96** (1968) 209–242.

56. P. Dehornoy, *Opérateurs différentiels et courbes elliptiques*, Comp. Math. **43** (1981), 71–99.

57. Drinfeld V., *Infinite Infinite-dimensional vector bundles in algebraic geometry: an introduction.* The unity of mathematics. In honor of the ninetieth birthday of I. M. Gelfand. Papers from the conference held in Cambridge, MA, USA, August 31–September 4, 2003. Boston, MA: Birkhauser. Progress in Mathematics 244, 263-304 (2006).

58. Dubrovin B., *Theta functions and non-linear equations*, Russ. Math. Surv. 36, No.2, 11-92 (1981).

59. Dubrovin B. A., Krichever I. M., Novikov S. P., *Integrable systems I, in: Dynamical systems IV*, eds. V.I.Arnold, S.P.Novikov (Springer, Berlin, 1990) pp. 173-280.

60. Grothendieck A., *Sur quelques points d'algebre homologique*, Tohoku Math. J., 9 (1957), 119-221.

61. Grothendieck A., *Technique de descente et théorèms d'existence en géométrie algébrique. V. Les schémas de Picard: théorèmes d'existence*, Seminaire Bourbaki, Vol. 7, Exp. No. 232, 142-161, Soc. Math. France, Paris, 1995.

62. Grothendieck A., Dieudonné J.A., *Eléments de géométrie algébrique I*, Springer, 1971.

63. Grothendieck A., Dieudonné J.A., *Éléments de géométrie algébrique II*, Publ. Math. I.H.E.S., 8 (1961).

64. Grothendieck A., Dieudonné J.A., *Éléments de géométrie algébrique III*, Publ. Math. I.H.E.S., 11 (1961).

65. Grothendieck A., Dieudonné J.A., *Éléments de géométrie algébrique IV*, Publ. Math. I.H.E.S., 20 (1964).

66. P. Etingof, *Lectures on Calogero-Moser systems*, arXiv:math/0606233

67. Etingof P., Ginzburg V., *On m-quasi-invariants of a Coxeter group*, Mosc. Math. J. 2(3), 555-566 (2002)

68. Faltings G., *Über Macaulayfizierung*, Math.Ann. 238, 175-192 (1978).

69. Feigin M., Veselov A.P., *Quasi-invariants of Coxeter groups and m-harmonic polynomials*, IMRN 2002 (10), 2487-2511 (2002)

70. Feigin M., Veselov A.P., *Quasi-invariants and quantum integrals of deformed Calogero-Moser systems*, IMRN 2003 (46), 2487-2511 (2003)

71. Ferrand D., *Conducteur, descente et pincement*, Bull. Soc. math. France, 131 (4), 2003, p.553-585.

72. Fulton W. *Intersection theory*, Springer, Berlin-Heilderberg-New York 1998.

73. F. Grünbaum, *Commuting pairs of linear ordinary differential operators of orders four and six*, Phys. D **31** (1988), 424–433.

74. R. Hirota, *Direct methods of finding exact solutions of nonlinear evolution equations*, in Lect. Notes in Math. 515, Springer-Verlag, 1976

75. D. Huybrechts, M. Lehn, *The geometry of moduli spaces of sheaves.* 2nd ed., Cambridge, Cambridge University Press, 2010

76. A. Ya. Kanel-Belov, M. L. Kontsevich, *The Jacobian conjecture is stably equivalent to the Dixmier conjecture*, Mosc. Math. J., **7**:2 (2007), 209—218.

77. Kapranov M., *The elliptic curve in the S-duality theory and Eisenstein series for Kac-Moody groups.* e-print arXiv:math/0001005.

78. Kapranov M., Vasserot E., *Vertex algebras and the formal loop space*, Publ. Math. IHES, 100 (2004), 209-269.

79. Kashiwara M., *The flag manifold of Kac-Moody Lie algebra*, in *Algebraic analysis, geometry and number theory*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989, 161-190

80. A. Kasman, E. Previato, *Commutative partial differential operators*, Physica D., 152–153, 2001, 66–77

81. S. Kleiman, *Towards a numerical theory of ampleness*, Annals of Math. 84, 1966, 293-344.

82. H. Kojima, T. Takahashi, *Notes on the minimal compactifications of the affine plane*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 188, 1, 2010, 153–169.

83. M. Kontsevich, *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function*, Comm. Math. Phys. 147, 1992, 1-23

84. Kurke H., Osipov D., Zheglov A., *Formal punctured ribbons and two-dimensional local fields*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), Volume 2009, Issue 629, Pages 133 - 170;

85. Kurke H., Osipov D., Zheglov A., *Formal groups arising from formal punctured ribbons*, Int. J. of Math., 06 (2010), 755-797.

86. H. Kurke, D. Osipov, A. Zheglov, *Commuting differential operators and higher–dimensional algebraic varieties*, Selecta Math. **20** (2014), 1159–1195.

87. Lax P.D.:*Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Commun. Pure Appl. Math. **21**, (1968), 467-490

88. Lazarsfeld R., *Positivity in algebraic geometry I*, Ergebnisse der Mathematik, vol. 48, Springer-Verlag, Heidelberg, 2004.

89. Lipman J., *Picard schemes of formal schemes; Application to rings with discrete divisor class group,* in Classification of algebraic varieties and compact complex manifolds (LNM 412, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974), pp. 94-132.

90. Manin Y., *Algebraic aspects of nonlinear differential equations*, Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat. 11, 5-152 (1978).

91. Matsumura H., *Commutative algebra*, W.A. Benjamin Co., New York, 1970.

92. Milne, J., *Étale cohomology*, Princeton University Press, Prinston, 1980

93. A.E. Mironov, *A ring of commuting differential operators of rank 2 corresponding to a curve of genus 2*, Sbornik: Math. **195**:5 (2004), 711–722.

94. A.E. Mironov, *On commuting differential operators of rank 2*, Siberian Electronic Math. Reports **6** (2009), 533–536.

95. A.E. Mironov, *Commuting rank 2 differential operators corresponding to a curve of genus 2*, Functional Anal. Appl. **39**:3 (2005), 240—243.

96. A. Mironov, *Self–adjoint commuting ordinary differential operators*, Invent. Math. **197** (2014), no. 2, 417–431.

97. A.E. Mironov, *Periodic and rapid decay rank two self-adjoint commuting differential operators.*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, V. 234, 2014, 309–322.

98. Mironov A.E., *Self-adjoint commuting differential operators and commutative subalgebras of the Weyl algebra*, e-print arXiv: math-ph/1107.3356

99. A.E. Mironov, B.T. Saparbaeva, *On eigenfunctions of one-dimensional Schrödinger operators with polynomial potentials*, Doklady Math. 2015 (arxiv: . arXiv:1412.2614).

100. A. Mironov, A. Zheglov, *Commuting ordinary differential operators with polynomial coefficients and automorphisms of the first Weyl algebra*, Int. Math. Res. Notices, doi:10.1093/imrn/rnv218.

101. O.I. Mokhov, *Commuting differential operators of rank 3 and nonlinear differential equations*, Mathematics of the USSR-Izvestiya **35**:3 (1990), 629–655.

102. O.I. Mokhov, *On commutative subalgebras of the Weyl algebra related to commuting operators of arbitrary rank and genus*, Mathematical Notes, **94**:2 (2013), 298–300.

103. O. Mokhov, *Commuting ordinary differential operators of arbitrary genus and arbitrary rank with polynomial coefficients*, Topology, geometry, integrable systems, and mathematical physics, 323–336, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **234**, Amer. Math. Soc. (2014).

104. J. A. Morrow, *Minimal normal compactifications of* $\mathbb{C}^2$, Complex analysis, Rice Univ. Studies, 59, 1, 1972, 97–112.

105. Mulase M. *Cohomological structure in soliton equations and Jacobian varieties*, J. Diff. Geom., 1984, V. 19, P. 403-430.

106. Mulase M., *Solvability of the super KP equation and a generalization of the Birkhoff decomposition*, Inv. Math., Vol. 92, Fasc.1, 1988, 1-46

107. Mulase M., *Category of vector bundles on algebraic curves and infinite dimensional Grassmanians*, Int. J. Math., 1 (1990), 293-342.

108. Mulase M., *Algebraic theory of the KP equations*, Perspectives in Mathematical Physics, R.Penner and S.Yau, Editors, (1994), 151-218.

109. Mumford D., *An algebro-geometric constructions of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equations, Korteweg-de Vries equations and related non-linear equations*, In Proc. Internat. Symp. on Alg. Geom., Kyoto 1977, Kinokuniya Publ. (1978) 115-153.

110. Mumford D., *Tata lectures on Theta II*, Birkhäuser, Boston, 1984

111. Mumford D., *The red book of varieties and schemes*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999

112. A. Nakayashiki, *Structure of Baker – Akhiezer Modules of Principally Polarized Abelian varieties, Commuting Partial Differential Operators and Associated Integrable Systems*, Duke Math. J., 62, 2, 1991, 315–358

113. Nakayashiki A., *Commuting partial differential operators and vector bundles over Abelian varieties*, Amer. J. Math. **116**, (1994), 65-100.

114. Narasimhan R., *A note on Stein spaces and their normalisations*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 16, n. 4 (1962), p. 327-333.

115. M. Olshanetsky, A. Perelomov, *Quantum integrable systems related to Lie algebras*, Phys. Rep., 94, 1983, 313–404.

116. V. Oganesyan, *Commuting differential operators of rank 2 with polynomial coefficients*, Func. Anal. Appl., 50:1 (2016), 54-61.

117. Parshin A.N., *Vector Bundles and Arithmetical Groups I.*, Proc. Steklov Math. Institute, **208** (1995), 212-233; e-print alg-geom/9605001

118. Parshin A. N., *Integrable systems and local fields*, Commun. Algebra, 29 (2001), no. 9, 4157-4181.

119. Plaza Martin, F. J., *Arithmetic infinite Grassmannians and the induced central extensions*, Collect. Math. 61, No. 1, 107-129 (2010).

120. Previato E., *Multivariable Burchnall-Chaundy theory*, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, in "30 years of finite-gap integration"compiled by V. B. Kuznetsov and E. K. Sklyanin, (2008) 366, 1155-1177.

121. E. Previato, *Seventy years of spectral curves: 1923–1993*, Integrable systems and quantum groups 419–481, Lecture Notes in Math. **1620**, Springer (1996).

122. E. Previato, G. Wilson, *Differential operators and rank 2 bundles over elliptic curves*, Compositio Math. **81** (1992), 107–119.

123. Min Ho Lee, *Tau functions associated to pseudodifferential operators of several variables*, J. Nonlinear Math. Phys. 9 (2002), no. 4, 517-529.

124. Min Ho Lee, *Tau functions and residues*, J. Math. Phys. 44 (2003), no. 11, 5401-5409

125. Min Ho Lee and Emma Previato, *Grassmanians of higher local fields and multivariable tau functions*, Contemp. Math., vol. 398, 2006

126. I. Quandt, *On a relative version of the Krichever correspondence*, Bayreuther Mathematische Schriften **52**, 1–74 (1997).

127. C. J. Rego, *The compactified Jacobian*, Ann.Scient. Ec. Norm. Sup., 13, 1980, 211–223.

128. Rothstein M., *Connections on the Total Picard Sheaf and the KP Hierarchy*, Acta Applicandae Mathematicae, 42: 297-308, 1996

129. Rothstein M., *Sheaves with connection on abelian varieties*, Duke Math. Journal, 84 (1996), 565-598

130. Polishchuk A., Rothstein M., *Fourier Transform for D-algebras*, I. Duke Math. J., 109, 1 (2001), 123-146

131. Rothstein M., *Dynamics of the Krichever construction in several variables*, J. Reine Angew. Math. **572** (2004) 111-138

132. Sato M., *Soliton equations and universal Grassmann manifold*, Kokyuroku, Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. **439** (1981) 30-46.

133. Sato M., Sato Ya. *Soliton equations as dynamical systems on infnite dimensional Grassmann manifold*, Lect. Notes in Num. Appl.Anal., 1982, V. 5., P. 259-271.

134. Sato M., Noumi M., *Soliton equations and universla Grassmann manifold* (in Japanese), Sophia Univ. Lec. Notes Ser. in Math. **18** (1984).

135. Schur I., *Über vertauschbare lineare Differentialausdrčke*, Sitzungsber. der Berliner Math. Gesel. **4** (1905) 2-8.

136. Segal G., Wilson G., *Loop Groups and Equations of KdV Type*, Publ. Math. IHES, n. 61, 1985, pp. 5-65.

137. Serre J.-P., *Faisceaux algebriques coherents*, The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 61, No.2, (1955), 197-278.

138. Serre J.-P., *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, Paris, 1959.

139. Shiota T., *Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations*, Invent. Math., 1986, V.83, 333-382

140. Sokolov, V. V.; *Algebraic quantum Hamiltonians on the plane.* Teoret. Mat. Fiz. 184 (2015), no. 1, 57–70;

141. I. Taimanov, *Singular spectral curves in finite–gap integration*, Uspekhi Mat. Nauk **66** (2011), no. 1 (397), 111–150.

142. Takasaki K., *Geometry of universal Grassman manifold from algebraic point of view*, Reviews in Math. Phys., 1989, v. 1, no. 1, 1-46.

143. Alvarez Vazquez, A.; Munoz Porras, J.M.; Plaza Martin, F.J., *The algebraic formalism of soliton equations over arbitrary base fields*, Rodriguez, Rubi (ed.) et al., Workshop on abelian varieties and theta functions. Morelia, Mexico, July 8-27, 1996. Proceedings. Mexico: Sociedad Matematica Mexicana. Aportaciones Mat., Investig. 13, 3-40 (1998).

144. Verdier J.-L., *Equations differentielles algébriques*, Séminaire de lÉcole Normale Supérieure 1979-82, Birkhäuser (1983) 215-236.

145. Wallenberg G., *Über die Vertauschbarkeit homogener linearer Differentialausdrücke*, Archiv der Math. u. Phys., Drittle Reihe **4** (1903) 252-268.

146. G. Wilson, *Algebraic curves and soliton equations*, Geometry today, 303–329, Progr. Math. **60**, Birkhäuser (1985).

147. Wilson G. *Bispectral commutative ordinary differential operators*, J. Reine Angew. Math. 442 (1993), 177–204.

148. E. Witten, *Two-dimensional Gravity and intersection theory on moduli spaces*, Surveys in Differential Geometry 1, 1991, 243-310

149. Zariski O., *The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface*, Annals of Math. 76 (1962), 560-615

150. Zariski O., Samuel P., *Commutative algebra*, Springer, 1975.

151. Zheglov A.B., *Two dimensional KP systems and their solvability*, Preprints of Humboldt University. — Vol. 5. — Humboldt University of Berlin, Berlin, 2005. — P. 1–42; e-print arXiv:math-ph/0503067v2.

152. D. Zuo, *Commuting differential operators of rank 3 associated to a curve of genus 2*, SIGMA, **8** (2012), 044.