ФГБОУ ВПО МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

ЗАВАЛЬНЮК ЕВГЕНИЙ АНАТОЛЬЕВИЧ

УДК 514.177.2+515.122.23

ГЕОМЕТРИЯ МИНИМАЛЬНЫХ СЕТЕЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВИЗНЫ В СМЫСЛЕ А.Д.АЛЕКСАНДРОВА

01.01.04 геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор А. О. Иванов

Москва 2015

Оглавление

Введение

Диссертация посвящена минимальным деревьям Штейнера и отношению Штейнера в пространствах А. Д. Александрова. Исследуется устройство минимальных сетей в случае пространств ограниченной сверху кривизны (глава 2), и вычисляется отношение Штейнера для полных односвязных неограниченных поверхностей Александрова кривизны не больше $k < 0$ (глава 3).

Простейший вариант *проблемы Штейнера*, известный как задача Ферма, был решен в XVII веке Б. Кавальери и Э. Торичелли. В 1836 г. К. Гаусс (см. [1]) затрагивает данную проблему, решая практическую задачу проектирования железной дороги, соединяющей четыре немецких города. В XX веке благодаря работе Р. Куранта и Г. Робинса (см. [2]) проблема Штейнера получила широкую известность.

Проблема Штейнера формулируется следующим образом. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. *Графом в метрическом пространстве* (X, ρ) называется взвешенный граф $G = (V, E, \omega)$, у которого множество вершин V содержится в X и весовая функция ω совпадает с метрикой ρ, т.е. $\omega(e) = \rho(u, v)$ для $e = uv \in E$. В таком случае величину $\omega(e)$ принято называть *длиной ребра* e. Длину ребра также удобно обозначать, пользуясь метрикой самого пространства: $\rho(e)$. *Длиной графа* G называется сумма длин входящих в него ребер: $\rho(G) = \sum_{e\in E} \rho(e)$.

Пусть теперь $M \subset X$ — конечное множество. Рассмотрим всевозможные связные графы в X, множество вершин которых содержит M, и обозначим через $\mathrm{smt}(M)$ точную нижнюю грань их длин. Если среди этих графов найдется граф длины $\mathrm{smt}(M)$, то он является деревом и называется *мини-*

мальным деревом Штейнера для M. В нем точки соединяемого множества называются *граничными*, кроме них дерево также может содержать дополнительные вершины, называемыми *точками Штейнера*. Множество минимальных деревьев Штейнера для M обозначается через $\mathrm{SMT}(M)$. Отметим, что величина $\mathrm{smt}(M)$ определена независимо от того, является ли множество $\mathrm{SMT}(M)$ непустым. Также величину $\mathrm{smt}(M)$ обозначают через $\rho(\mathrm{SMT}(M))$.

Большинство результатов, полученных по проблеме Штейнера, относится к прошлому столетию. Задача поиска минимальных деревьев Штейнера для большинства известных пространств является NP-трудной, см. [3]. NP-трудность обусловлена большим количеством структур деревьев, соединяющих конечный набор точек. Наличие точек Штейнера также является одной из причин комбинаторного взрыва. Изучение локальных свойств минимальных сетей позволяет говорить о глобальных свойствах, способных существенно сократить перебор структур. Для некоторых классов пространств с внутренней метрикой, в которых корректно говорить об углах между кратчайшими, одним из таких свойств является *принцип 120 градусов* — утверждение, что угол между смежными ребрами-отрезками минимальной сети в их общей вершине больше или равен 120°.

Если G — граф в метрическом пространстве X, то его *геометрической реализацией*, или просто *реализацией*, называется конечный набор непрерывных кривых в X, взаимно однозначно соответствующий множеству ребер графа G и такой, что каждая кривая соединяет концы соответствующего ей ребра. *Сетью* в X называется реализация связного графа в X, а ее *длиной* — сумма длин принадлежащих ей кривых. Говорят, что сеть Γ соединяет конечный набор M точек в X, если каждая точка из M принадлежит некоторой кривой из Γ. Сеть Γ, соединяющая M, называется *минимальной*, если ее длина не превосходит длины любой сети, соединяющей M.

Если X — геодезическое пространство, то любое минимальное дерево Штейнера G для множества $M \subset X$ реализуется в виде минимальной сети Γ, соединяющей M и имеющей ту же длину. Таким образом, проблема Штейнера в геодезическом пространстве представляет собой поиск минимальной сети, соединяющей данный набор.

Первый систематический анализ минимальных сетей был осуществлен Э. Джилбертом и Г. Поллаком в [4]. Также изучались сети на сфере (см. [6]), на гиперболических плоскостях (см. [7]), на римановых многообразиях (см. [13]) и в нормированных пространствах ([8] и [9]).

Теорема 1.

На римановых многообразиях минимальные сети устроены следующим образом.

(1) ребра сети суть отрезки геодезических;

(2) вершины степени 1 принадлежат границе сети;

(3) если некоторая вершина степени 2 не является граничной, то она принадлежит геодезической, соединяющей смежные с ней вершины;

(4) угол между смежными ребрами сети больше или равен 120°.

Как следствие, степень каждой вершины не превосходит 3, и в вершинах степени 3 все три угла равны 120°.

Наряду с минимальными сетями изучают также *локально минимальные сети*, являющиеся минимальными в некоторой окрестности каждой своей точки. Очевидно, что любая минимальная сеть является локально минимальной, поэтому оказывается полезным выявление необходимых и достаточных условий локальной минимальности сети. Например, для римановых многообразий условия (1) – (4) являются критерием локальной минимальности (см. [5]).

По мере изучения нормированных пространств стало понятно, что локально минимальные сети не обязательно являются минимумами функционала длины, поэтому нужно также изучать *экстремальные*, или *критические* сети. Сеть называется *экстремальной* для некоторого класса деформаций, если она является кратчайшей в классе этих деформаций (см. [10] и [11]). В [10] получены необходимые и достаточные условия экстремальности для сетей в пространстве $\mathbb{R}^2$ с манхеттенской нормой относительно параметрических деформаций.

Отдельное внимание было уделено исследованию экстремальных сетей на нормированных плоскостях, в которых единичная окружность представляет собой правильный 2λ-угольник. Такие нормированные плоскости получили название *λ-нормированных плоскостей*. В [9] и [12] получено полное описание локально минимальных сетей для любого λ. В случае $\lambda = 2, 3, 4, 6$, как оказалось, могут возникать точки Штейнера степени 4. В частности, в [9] показано, что только при таких λ возникают точки Штейнера степени 4. В [11] получен критерий экстремальности сети на λ-нормированной плоскости при $\lambda = 5$ и $\lambda > 6$.

Общие *пространства ограниченной кривизны* в смысле А. Д. Александрова являются естественным обобщением поверхностей ограниченной гауссовой кривизны, и в них корректно определены углы между кратчайшими. С точки зрения минимальных сетей пространства Александрова стали изучать недавно, хотя случай поверхностей многогранников рассматривался в [5] и [13]. Недавно было показано, что принцип 120 градусов имеет место для пространств с кривизной, ограниченной снизу (см. [14]). Автору удалось распространить этот результат и на случай пространств с кривизной, ограниченной сверху (см. [43]).

Теорема А. *Ребра локально минимальной сети в пространстве Александрова образуют в общих вершинах углы, большие или равные* $2\pi/3$.

Таким образом, автором получено необходимое условие локальной минимальности сетей в пространствах Александрова. Вопрос о достаточности этого условия остается открытым.

В [15] - [17] исследовались замкнутые минимальные сети на поверхностях выпуклых многогранников. Были найдены необходимые условия существования таких сетей, а также описаны некоторые классы многогранников, на которых такие сети существуют.

Говоря об экстремальных сетях, важно упомянуть такую характеристику, как *устойчивость* сети. Пусть X — пространство с внутренней метрикой. Обозначим через $B_\varepsilon(M)$ замкнутую ε-окрестность множества $M \subset X$, т.е. множество точек из X, расстояние от которых до множества M не превосходит ε. Сеть Γ называется *ε-устойчивой*, если любая сеть, полученная из Γ деформацией внутри $B_\varepsilon(\Gamma)$, имеет длину, не меньшую, чем Γ.

В [18] была доказана устойчивость локально минимальных сетей в пространствах Александрова в случае неположительной кривизны.

В связи с вычислительной сложностью проблемы Штейнера возникает необходимость рассматривать приближенные решения. Одной из важных численных характеристик метрического пространства является *отношение Штейнера*. Пусть M — конечное множество в метрическом пространстве (X, ρ). Связный граф в X, множество вершин которого совпадает с M, имеющий минимально возможную длину, является деревом и называется *минимальным остовным деревом* для M. Множество всех минимальных остовных деревьев для M обозначается через $\mathrm{MST}(M)$, а их длина — через $\mathrm{mst}(M)$. Величина $sr(M) := \frac{\mathrm{smt}(M)}{\mathrm{mst}(M)}$ называется отношением Штейнера множества M. Точная нижняя грань отношений Штейнера, взятая по всем конечным множествам метрического пространства X, состоящим из двух и более точек, называется отношением Штейнера пространства X и обозначается через $sr(X)$. Таким образом,

$$sr(X) := \inf_{M \subset X, 1 < |M| < \infty} \frac{\mathrm{smt}(M)}{\mathrm{mst}(M)}.$$

Иными словами, отношение Штейнера — это наихудшая возможная величина относительной ошибки приближения кратчайшего дерева минимальным остовным. То есть оно показывает, во сколько раз может уменьшиться длина графа, связывающего конечное множество $M \subset X$, если позволить графу иметь вершины, отличные от точек из M.

Изучение отношения Штейнера метрических пространств также естественно началось с евклидовой плоскости, для которой хорошо известна верхняя оценка $sr(\mathbb{R}^2) \le \sqrt{3}/2$, равная отношению Штейнера вершин равностороннего треугольника. В 1968 г. Э. Джилберт и Г. Поллак сформулировали гипотезу о том, что отношение Штейнера евклидовой плоскости в точности равно $\sqrt{3}/2$. С тех пор гипотеза была доказана для n-точечных множеств при $n = 4$ (см. [20], [21]), $n = 5$ (см. [22]), $n = 6$ (см. [23]), $n = 7$ (см. [24]), а также были получены некоторые нижние оценки, близкие к $\sqrt{3}/2$. В 1992 г. Д. Ду и Ф. Хванг опубликовали доказательство гипотезы Джилберта-Поллака. Доказательство содержало пробелы, на которые указывали разные специалисты (см. [19]), таким образом, вопрос о точном значении отношения Штейнера евклидовой плоскости до сих пор остается открытым.

Для произвольного метрического пространства X справедлива оценка на его отношение Штейнера:

$$1/2 \le sr(X) \le 1,$$

причем все промежуточные значения достигаются. Верхняя оценка очевидна из определения отношения Штейнера, нижняя оценка была доказана Э. Муром.

Существует лишь немного классов пространств, для которых удалось точно вычислить отношение Штейнера, хотя часто удается найти некоторые оценки. В [25] показано, что если X — произвольное n-мерное риманово многообразие, то $sr(X) \le sr(\mathbb{R}^n)$. В частности, при $n \ge 2$ получается $sr(X) \le \sqrt{3}/2$. В [26] получена нижняя оценка на отношение Штейнера n-мерного евклидова пространства: $sr(\mathbb{R}^n) \ge 1/\sqrt{3}$. Верхние оценки на $sr(\mathbb{R}^n)$ для разных n можно найти в [27].

В [28] получены оценки, а в некоторых случаях и точные значения, для отношения Штейнера плоскостей Банаха-Минковского $\mathcal{L}^2$. А именно, $sr(\mathcal{L}^2) \ge 2/3$, причем если единичный шар B на $\mathcal{L}^2$ представляет собой параллелограмм, то в формуле имеет место равенство. Д. Цислик в [29] получил ряд оценок для отношения Штейнера пространств Банаха-Минковского большей размерности.

Известны немного классов пространств, для которых отношение Штейнера равно 1/2. Таковыми являются, в частности, филогенетические пространства (см. [27]), а также пространство компактов в евклидовом пространстве с метрикой Хаусдорфа (см. [30]). Еще один пример — поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны; этот результат был получен в 2006г. в [31]. Автору удалось обобщить этот результат на случай определенного класса поверхностей Адамара (см. [42]).

Теорема B. *Пусть* (S, d) *— неограниченная поверхность Адамара кривизны* $\le k < 0$. *Тогда отношение Штейнера* $sr(S)$ *поверхности* S *равно* $1/2$.

Поверхности Адамара являются частным случаем пространств Александрова, поэтому для деревьев Штейнера на них справедлив принцип 120 градусов. Примечательно, что структура деревьев Штейнера для предъявляемых границ оказывается несущественной для вычисления отношения Штейнера, и, в частности, вопрос о степени внутренних точек не поднимается. Мы покажем на примере, что на поверхностях Адамара без предварительных ограничений могут возникать точки Штейнера сколь угодно большой степени.

Наряду с проблемой Штейнера имеются и другие вариационные задачи о поиске сетей, соединяющих множество точек некоторого метрического пространства. Задача о *минимальном заполнении* была сформулирована М. Громовым в 1983 году (см. [32]). В общей постановке задачи требуется для данного замкнутого многообразия с метрикой найти затягивающее его многообразие-пленку наименьшего объема, так что расстояния между точками исходного многообразия не уменьшатся после добавления пленки. Такая пленка называется минимальным заполнением в смысле Громова. Одномерный вариант задачи о минимальном заполнении был сформулирован А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным (см. [33]). Они предложили в случае конечных метрических пространств рассматривать в качестве затягивающих многообразий-пленок взвешенные графы с внутренней метрикой, порожденной неотрицательной весовой функцией. Формальное определение следующее.

Пусть G — взвешенный граф с весовой функцией ω. Определим псевдометрику d_ω на множестве вершин $V(G)$ графа G следующим образом: расстоянием $d_\omega(u,v)$ между u и v назовем минимальную длину всевозможных путей в G с началом u и концом v. Длина пути в G определяется как сумма весов его ребер. Пусть теперь (M,d) — конечное метрическое пространство, и (G,ω) — взвешенный граф, соединяющий множество M. Если для любых точек $x,y \in M$ выполнено $d(x,y) \le d_\omega(x,y)$, то граф G называется *заполнением* пространства M. Рассмотрим величину $mf(M) = \inf \omega(G)$, где точная нижняя грань берется по всем заполнениям пространства M. Число $mf(M)$ называется *весом минимального заполнения* для M. Если (G,ω) — заполнение пространства M такое, что $\omega(G) = mf(M)$, то G называется *минимальным заполнением* конечного метрического пространства M. В [33] показано, что для любого конечного метрического пространства существует минимальное заполнение.

Минимальные заполнения конечных метрических пространств оказались тесно связанными с минимальными деревьями Штейнера. Так, для произвольного конечного множества M в метрическом пространстве X вес его минимального заполнения $mf(M)$ не превосходит длины минимального дерева Штейнера $\mathrm{smt}(M)$, а значит и длины минимального остовного дерева $\mathrm{mst}(M)$. Оказалось также, что $mf(M)$ не может быть "сильно" меньше, чем $\mathrm{smt}(M)$. *Отношением Штейнера-Громова* метрического пространства (X,ρ) называется величина

$$sgr(X,\rho) = \inf_{M\subset X:\ 1<|M|<\infty} \frac{mf(M)}{\mathrm{mst}(M)}.$$

Суботношением Штейнера метрического пространства (X,ρ) называется величина

$$ssr(X,\rho) = \inf_{M\subset X:\ 1<|M|<\infty} \frac{mf(M)}{\mathrm{smt}(M)}.$$

В [34] были найдены точные верхние и нижние оценки для отношения Штейнера-Громова и суботношения Штейнера:

$$\frac{1}{2} \le ssr(X) \le 1, \qquad \frac{1}{2} \le sgr(x) \le 1,$$

и, кроме того, было показано, что любое число $s \in [\frac{1}{2}, 1]$ является отношением Штейнера-Громова и субботношением Штейнера некоторого метрического пространства. В [35] был установлен критерий непрерывности отношения Штейнера, отношения Штейнера-Громова и суботношения Штейнера в пространстве всех компактных метрических пространств с метрикой Громова-Хаусдорфа и доказана полунепрерывность сверху для этих отношений.

Структура работы.

Работа состоит из введения, трех глав и списка литературы.

В первой главе собраны необходимые определения и результаты из метрической геометрии, теории графов, теории минимальных сетей.

Вторая глава посвящена минимальным сетям в пространствах Александрова. В разделе 2.2 сформулирована и доказана теорема для пространств с кривизной, ограниченной сверху. В разделе 2.2.3 приводятся следствия доказанной теоремы для общих пространств Александрова и локально минимальных сетей в них.

Третья глава посвящена отношению Штейнера для поверхностей Адамара. В разделе 3.2.1 автором предлагается простое вычисление отношение Штейнера для поверхностей постоянной отрицательной кривизны. В разделе 3.2.2 тем же способом вычисляется отношение Штейнера для поверхностей Адамара.

Текст диссертации изложен на 53 страницах и содержит 4 рисунка. Список литературы включает 47 наименований.

Список основных результатов.

Результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Доказан принцип 120 градусов для минимальных сетей в пространствах ограниченной сверху кривизны в смысле А.Д. Александрова (теорема 5).

2. Предложен новый способ вычисления отношения Штейнера поверхностей постоянной отрицательной гауссовой кривизны, допускающий непосредственные обобщения на более широкие классы поверхностей.

3. Вычислено отношение Штейнера для неограниченных поверхностей Адамара кривизны не больше $k < 0$ (теорема B).

Методы исследования.

В диссертации применяются методы метрической, дискретной и дифференциальной геометрии, также методы теории графов, вариационного исчисления, методы теории минимальных сетей. Используются классические модели поверхностей постоянной гауссовой кривизны и методы сравнения их геометрии с внутренней геометрией пространств Александрова.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- семинаре кафедры «Алгебра и геометрия» Рурского Университета (г. Бохум, Германия, 7 февраля 2013 года)

- научной конференции «Ломоносовские чтения» (МГУ, 22 апреля 2013 года)

- семинаре летней школы международной лаборатории «Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б. Н. Делоне (Ярославль-Демино, 31 июля 2013 года)

- международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна» (г. Воронеж, 28 января 2014 года)

- семинаре «Дифференциальная геометрия и приложения» под руководством академика А. Т. Фоменко (МГУ, 17 февраля 2014 года)

- семинаре «Узлы и теория представлений» (МГУ, 25 марта 2014 года)
- семинаре «Экстремальные сети» под руководством профессоров А. О. Иванова и А. А. Тужилина (МГУ, 2008 - 2013 гг.)

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в шести работах автора, три из них в журналах из перечня ВАК.

Благодарности.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Александру Олеговичу Иванову за постановку задач и неоценимую помощь и советы на всех этапах написания работы. Автор благодарен д.ф.-м.н., профессору Алексею Августиновичу Тужилину за постоянный интерес, советы и многочисленные обсуждения.

Автор признателен участникам семинара “Экстремальные сети“ за полезные замечания, комментарии и дискуссии. Автор глубоко признателен всему коллективу кафедры дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета МГУ за творческую атмосферу, постоянную поддержку и внимание.

Глава 1

Определения и предварительные результаты

1.1 Пространства ограниченной кривизны

1.1.1 Определения и свойства

Кривой в метрическом пространстве X называется непрерывное отображение некоторого отрезка $[\alpha, \beta]$ в X. *Длина* кривой определяется как точная верхняя грань длин всех вписанных в кривую ломаных. Если у кривой длина конечна, то она называется *спрямляемой*.

Метрика d метрического пространства (X, d) называется *внутренней*, если расстояние $d(a, b)$ между произвольными точками $a, b \in X$ равно точной нижней грани длин спрямляемых кривых в X, соединяющих a и b. Если при этом для каждой пары $a, b \in X$ существует кривая в X, длина которой равна $d(a, b)$, то метрика d называется *строго внутренней*. Пространство со строго внутренней метрикой называется *геодезическим пространством*.

Пусть a, b — точки геодезического пространства (X, d), и $l = d(a, b)$. *Кратчайшей* в пространстве X с началом в a и концом в b называется изометричное отображение $\gamma\colon [0, l] \to X$, для которого $\gamma(0) = a$, $\gamma(l) = b$. Такое отображение существует в силу определения строго внутренней метрики. *Отрезком* $[ab]$ мы будем называть образ отрезка $[0, l]$ при отображении γ, а *треугольником* — объединение трех отрезков, попарно соединяющих три различные точки. Когда будет ясно, о какой метрике идет речь, расстояние между точками a и b мы будем обозначать через $|ab|$.

Открытой (соотв., *замкнутой*) *ε-окрестностью* точки x геодезического пространства (X, d) мы будем называть множество $U_\varepsilon(x) = \{y \in X \,|\, d(x, y) < \varepsilon\}$ (соотв., $V_\varepsilon(x) = \{y \in X \,|\, d(x, y) \leq \varepsilon\}$). Под просто *окрестностью* будет подразумеваться некоторая открытая ε-окрестность. Таким образом, все окрестности, с которыми мы будем работать, — шаровые.

Определение 1. *Величиной угла* в геодезическом пространстве (X, d) в точке a между отрезками $[ab]$ и $[ac]$ называется предел

$$\lim_{p,q\to a} \arccos \frac{|ap|^2 + |aq|^2 - |pq|^2}{2 \cdot |ap| \cdot |aq|},$$

где $p \in [ab], q \in [ac]$, $p, q \neq a$, если этот предел существует. Мы будем обозначать эту величину через $\angle bac$ там, где будет понятно, о каких отрезках идет речь.

Замечание 1. В силу определения угол между отрезками лежит в промежутке $[0, \pi]$.

Определение 2. Полная односвязная поверхность постоянной гауссовой кривизны k называется *k-плоскостью.* Иными словами, при $k = 0$ это есть евклидова плоскость, при $k > 0$ — сфера радиуса $1/\sqrt{k}$ с ее внутренней метрикой, при $k < 0$ — полуплоскость $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$ с римановой метрикой, коэффициенты которой имеют вид:

$$E = G = -\frac{1}{ky^2}, \quad F = 0.$$

Мы будем обозначать k-плоскость через P_k, а расстояние между точками a, b на ней — через $|ab|_k$.

Определение 3. Пусть $\triangle abc$ — треугольник в геодезическом пространстве (X, d). *Треугольником сравнения* на k-плоскости для $\triangle abc$ называется треугольник $\triangle \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} \subset P_k$ такой, что $|\tilde{a}\tilde{b}|_k = |ab|$, $|\tilde{b}\tilde{c}|_k = |bc|$, $|\tilde{a}\tilde{c}|_k = |ac|$. Мы также будем обозначать его через $\triangle_k abc$.

Заметим, что треугольник сравнения однозначно определен с точностью до движения k-плоскости.

Определение 4. В условиях определения 3, *углом сравнения* на k-плоскости для $\angle abc$ называется угол $\angle\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$ треугольника сравнения $\triangle\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$. Его мы будем обозначать также через $\angle_k abc$.

Замечание 2. Угол между отрезками $[ab]$ и $[ac]$, согласно определению 1, есть предел углов сравнения на *евклидовой плоскости*, поэтому, если он определен и равен θ, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для $p \in [ab]$, $q \in [ac]$ угол сравнения $\angle_0 paq$ в треугольнике $\triangle_0 apq \subset \mathbb{R}^2$ окажется меньше или равен $\theta + \varepsilon$, если $|ap| < \delta$, $|aq| < \delta$.

Определение 5. Пусть $\alpha\colon [0,\varepsilon) \to X$ и $\beta\colon [0,\varepsilon) \to X$ — кривые в пространстве X с внутренней метрикой, исходящие из точки $p = \alpha(0) = \beta(0)$. *Величиной угла между* α и β называется следующий предел

$$\angle(\alpha,\beta) = \lim_{s,t\to 0} \angle_0(\alpha(s), p, \beta(t)),$$

если он существует.

Определение 6. Геодезическое пространство (X,d) называется *пространством кривизны* $\leq k$ (соотв., $\geq k$), если в некоторой окрестности каждой точки выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

(a) *условие сравнения треугольников:* для каждого треугольника $\triangle abc$, лежащего в этой окрестности, и каждой точки $h \in [ac]$ справедливо неравенство $|bh| \leq |\tilde{b}\tilde{h}|_k$ (соотв., $|bh| \geq |\tilde{b}\tilde{h}|_k$), где $\tilde{h}$ — такая точка на стороне $[\tilde{a}\tilde{c}]$ треугольника сравнения $\triangle\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} \subset P_k$, что $|\tilde{a}\tilde{h}|_k = |ah|$;

(b) *условие сравнения углов:* углы $\angle abc$, $\angle bca$, $\angle cab$ каждого треугольника $\triangle abc$, лежащего в этой окрестности, существуют и удовлетворяют неравенствам

$$\angle abc \leq \angle_k abc, \qquad \angle bca \leq \angle_k bca, \qquad \angle cab \leq \angle_k cab$$

$$(\text{соотв. } \angle abc \geq \angle_k abc, \qquad \angle bca \geq \angle_k bca, \qquad \angle cab \geq \angle_k cab),$$

и, кроме того, в случае кривизны $\geq k$ для любых двух кратчайших $[pq]$ и $[rs]$, где r — внутренняя точка кратчайшей $[pq]$, справедливо равенство $\angle prs + \angle srq = \pi$;

(c) *условие монотонности углов:* если $\alpha(x)$ и $\beta(y)$ — кратчайшие, исходящие из точки p и содержащиеся в этой окрестности, а $\angle_k \alpha(x)p\beta(y)$ — угол при вершине $\tilde{p}$ треугольника сравнения $\triangle_k \alpha(x)p\beta(y) \subset P_k$, то функция $\theta(x,y) = \angle_k \alpha(x)p\beta(y)$ является неубывающей (соотв., невозрастающей) по каждой из переменных x, y.

Если не уточняется константа k, то говорят от пространстве *ограниченной сверху* (соотв., *снизу*) *кривизны.*

Замечание 3. Образно говоря, пространство X кривизны $\leq k$ (соотв., $\geq k$) оказывается не более (соотв., не менее) искривленным, чем P_k.

Определение 7. Окрестность, о которой идет речь в определении 6, называется *нормальной.*

Пространством Александрова называется пространство ограниченной сверху или снизу кривизны. Доказательство эквивалентности условий сравнения треугольников, углов и условия монотонности углов можно посмотреть в [36, глава 4], также как и доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Если $k_1 > k_2$, то пространство кривизны $\leq k_2$ является пространством кривизны $\leq k_1$.*

В дальнейшем нам понадобится следующая «*лемма о шарнирах*». В случае евклидовой плоскости она является очевидным следствием теоремы косинусов. В общем случае она доказана в [36].

Лемма 1. *Пусть $\triangle a_1b_1c_1$ и $\triangle a_2b_2c_2$ — треугольники на поверхности постоянной кривизны такие, что $|a_1b_1| = |a_2b_2|$, $|a_1c_1| = |a_2c_2|$. Тогда $|b_1c_1| \leq |b_2c_2|$ в том и только в том случае, когда $\angle b_1a_1c_1 \leq b_2a_2c_2$.*

Следствие 1. *Пусть $a_1b_1c_1d_1$ — четырехугольник и $\triangle a_2b_2c_2$ — треугольник на плоскости, такие что $|a_1b_1| = |a_2b_2|$, $|b_1c_1| = |b_2c_2|$, $|a_1d_1| + |c_1d_1| = |a_2c_2|$. Тогда $\angle b_2a_2c_2 \geq \angle b_1a_1c_1$.*

Доказательство. По неравенству треугольника $|a_1c_1| \leq |a_1d_1| + |c_1d_1| = |a_2c_2|$, далее применяем лемму 1. $\square$

1.1.2 Примеры пространств ограниченной кривизны

Тривиальным примером пространства ограниченной кривизны является k-плоскость: поскольку в условиях сравнения треугольников/углов выполнены равенства, k-плоскость является пространством кривизны $\leq k$ и $\geq k$ одновременно.

В случае ограниченности кривизны нулем мы естественно будем называть *пространством неотрицательной кривизны* пространство кривизны ≥ 0, а *пространством неположительной кривизны* — пространство кривизны ≤ 0.

Примерами пространств неотрицательной/неположительной кривизны являются конусы. В точках, отличных от вершины конуса, метрика локально евклидова, поэтому ограничение на кривизну будет зависеть только от устройства метрики в окрестности вершины. Следующий пример является классическим, однако для полноты изложения будет также приведено и доказательство.

Утверждение 1. *Пусть C_α — конус с полным углом α при вершине O, и d — его внутренняя метрика. Тогда (C_α, d) является пространством неотрицательной кривизны при $\alpha \leq 2\pi$ и пространством неположительной кривизны при $\alpha \geq 2\pi$.*

Доказательство. Рассмотрим треугольник $\triangle abc$ на конусе C_α. Он ограничивает открытую область $D(\triangle abc)$. Если $D(\triangle abc)$ не содержит O, то рассмотрим плоский треугольник сравнения $\triangle \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$ и ограниченную им область $D(\triangle \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c})$. Области $D(\triangle abc)$ и $D(\triangle \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c})$ окажутся изометричными, и условие сравнения треугольников выполняется в виде равенства.

Если $O \in D(\triangle abc)$, то рассмотрим отдельно случаи $\alpha \leq 2\pi$ и $\alpha \geq 2\pi$.

1. В случае $\alpha \leq 2\pi$ рассмотрим плоские треугольники сравнения $\triangle \tilde{O}\tilde{a}\tilde{b}$, $\triangle \tilde{O}\tilde{b}\tilde{c}$ и $\triangle \tilde{O}\tilde{a}\tilde{c}$ для $\triangle Oab$, $\triangle Obc$ и $\triangle Oac$ соответственно. Состыкуем их в

пространстве $\mathbb{R}^3$ по одноименным сторонам: получим поверхность тетраэдра $\tilde{O}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$ без грани $\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$. Обозначим полученную поверхность через $\tilde{C}$, а ее внутреннюю метрику — через $\tilde{d}$. Метрика $\tilde{d}$ изометрична метрике d конуса C_α, поскольку поверхность $\tilde{C}$ можно получить из C_α посредством последовательного применения сгибания по лучам Oa, Ob, Oc, выпрямления областей, ограниченных этими лучами и обрезания по отрезкам ab, bc, ac. Обозначим построенное изометричное отображение из C_α в $\tilde{C}$ через p. При этом $p(O) = \tilde{O}$, $p(a) = \tilde{a}$, $p(b) = \tilde{b}$, $p(c) = \tilde{c}$. Проведем через точки $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ плоскость. Плоский треугольник $\triangle\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$ является для $\triangle abc$ треугольником сравнения, а его метрика d' является ограничением объемлющей метрики пространства $\mathbb{R}^3$. Поскольку во внутренней метрике трехгранного угла все расстояния между точками не меньше, чем в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^3$, мы получаем, что для любых двух точек $\tilde{x}, \tilde{y} \in [\tilde{a}, \tilde{b}] \cup [\tilde{b}, \tilde{c}] \cup [\tilde{a}, \tilde{c}]$ справедливо неравенство $d'(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Рассмотрим теперь произвольную точку $q \in [b, c]$, и пусть $\tilde{q} = p(q)$. В силу предыдущего неравенства $\tilde{d}(\tilde{a}, \tilde{q}) \geq d'(\tilde{a}, \tilde{q})$, а поскольку p — изометрия, то получаем $d(a, q) \geq d'(\tilde{a}, \tilde{q})$. Таким образом, выполнено условие сравнения треугольников для $\triangle abc \subset C_\alpha$ и $\triangle\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} \subset \mathbb{R}^2$.

2. Если $\alpha \geq 2\pi$, рассмотрим треугольники $\triangle Oab$, $\triangle Obc$ и $\triangle Oac$ на конусе и углы $\angle aOb$, $\angle bOc$ и $\angle aOc$ в них. Если какой-то из углов равен π, то соответствующий ему треугольник вырожден. В таком случае точка O принадлежит границе треугольника $\triangle abc$, что противоречит предположению $O \in D(\triangle abc)$.

Следовательно, каждый из углов $\angle aOb$, $\angle bOc$, $\angle aOc$ меньше, чем π, при этом их сумма равна $\alpha > 2\pi$, откуда без ограничения общности

$$\begin{gathered} \angle aOb + \angle bOc > \pi, \\ \angle aOc > 2\pi - (\angle aOb + \angle bOc). \end{gathered} \tag{1.1.1}$$

Рассмотрим плоские треугольники сравнения $\triangle\tilde{O}\tilde{a}\tilde{b}$, $\triangle\tilde{O}\tilde{b}\tilde{c}$, изометричные треугольникам $\triangle Oab$, $\triangle Obc$ соответственно и состыкованные по стороне $\tilde{O}\tilde{b}$.

В силу изометричности

$$\angle aOb = \angle \tilde{a}\tilde{O}\tilde{b}, \angle Oba = \angle \tilde{O}\tilde{b}\tilde{a} \qquad (1.1.2)$$
$$\angle bOc = \angle \tilde{b}\tilde{O}\tilde{c}, \angle Obc = \angle \tilde{O}\tilde{b}\tilde{c}.$$

В плоском четырехугольнике $\tilde{O}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$ сумма всех углов равна 2π, при этом в силу (1.1.1) $\angle \tilde{a}\tilde{O}\tilde{b} + \angle \tilde{b}\tilde{O}\tilde{c} = \angle aOb + \angle bOc > \pi$. Следовательно,

$$\angle \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} < \pi. \qquad (1.1.3)$$

Угол $\angle \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$ не превосходит развернутого, а значит равен сумме углов, из которых составлен:

$$\angle \tilde{O}\tilde{b}\tilde{a} + \angle \tilde{O}\tilde{b}\tilde{c} = \angle \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}. \qquad (1.1.4)$$

Метрика конуса в окрестности точки B евклидова, поэтому для углов справедливо неравенство $\angle abc \leq \angle Oba + \angle Obc$ (в случае, если сумма в правой части не превосходит π, выполняется равенство). Учитывая (1.1.2) и (1.1.4), получаем

$$\angle abc \leq \angle \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}, \qquad (1.1.5)$$

и в силу (1.1.3)

$$\angle abc < \pi.$$

Для угла $\angle \tilde{a}\tilde{O}\tilde{c}$ (дополнительного к углу четырехугольника $\tilde{O}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$) справедливо $\angle \tilde{a}\tilde{O}\tilde{c} = 2\pi - (\angle \tilde{a}\tilde{O}\tilde{b} + \angle \tilde{b}\tilde{O}\tilde{c}) = 2\pi - (\angle aOb + \angle bOc)$, и в силу (1.1.1)

$$\angle \tilde{a}\tilde{O}\tilde{c} < \angle aOc. \qquad (1.1.6)$$

Пусть $\triangle \tilde{O}'\tilde{a}'\tilde{c}'$ — плоский треугольник сравнения для $\triangle Oac$. Он изометричен треугольнику $\triangle Oac$, поэтому

$$|ac| = |\tilde{a}'\tilde{c}'|, \qquad (1.1.7)$$
$$\angle aOc = \angle \tilde{a}'\tilde{O}'\tilde{c}'.$$

Следовательно, из (1.1.6)

$$\angle \tilde{a}\tilde{O}\tilde{c} < \angle \tilde{a}'\tilde{O}'\tilde{c}'. \tag{1.1.8}$$

По лемме 1 для плоских треугольников $\triangle \tilde{O}\tilde{a}\tilde{c}$ и $\tilde{O}'\tilde{a}'\tilde{c}'$ получаем $|\tilde{a}\tilde{c}| < |\tilde{a}'\tilde{c}'|$, откуда в силу (1.1.7)

$$|\tilde{a}\tilde{c}| < |ac|.$$

Пусть $\triangle \tilde{a}''\tilde{b}''\tilde{c}''$ — плоский треугольник сравнения для $\triangle abc$. По определению треугольника сравнения и в силу предыдущего неравенства имеем

$$|\tilde{a}''\tilde{c}''| = |ac| > |\tilde{a}\tilde{c}|,$$
$$|\tilde{a}''\tilde{b}''| = |ab| = |\tilde{a}\tilde{b}|,$$
$$|\tilde{b}''\tilde{c}''| = |bc| = |\tilde{b}\tilde{c}|$$

По лемме 1 получаем $\angle \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} < \tilde{a}''\tilde{b}''\tilde{c}''$. Из (1.1.5) тогда следует

$$\angle abc \leq \angle \tilde{a}''\tilde{b}''\tilde{c}''.$$

Аналогичным образом доказываются неравенства $\angle bac \leq \angle \tilde{b}''\tilde{a}''\tilde{c}''$ и $\angle acb \leq \angle \tilde{a}''\tilde{c}''\tilde{b}''$. Таким образом, выполнены условия сравнения углов для $\triangle abc$ и $\triangle \tilde{a}''\tilde{b}''\tilde{c}''$, что доказывает неположительность кривизны конуса C_α. □

Полученный критерий позволяет, в частности, установить, что *поверхность любого выпуклого многогранника является пространством неотрицательной кривизны.* Действительно, метрика такого многогранника локально изометрична либо плоской метрике, либо метрике конуса с полным углом, меньшим 2π.

Естественно задаться вопросом, возможно ли для пространства (X, d) кривизны $\geq k$ (соотв., $\leq k$) подобрать такое число $l \geq k$ (соотв., $l \leq k$) такое, что X является пространством кривизны $\leq l$ (соотв., $\geq l$). Ответ на этот вопрос в общем случае отрицательный: пример невозможности подобрать такое l можно найти в классе конусов.

Предложение 1. *Пусть (C_α, d) — конус с полным углом α при вершине O, и d — его внутренняя метрика. Тогда при $\alpha < 2\pi$ (соотв., $\alpha > 2\pi$) нельзя* *подобрать такое $l \geq 0$ (соотв., $l \leq 0$), что кривизна C_α ограничена сверху (соотв., снизу) числом l в смысле Александрова.*

Доказательство. Докажем предложение сначала для случая $\alpha < 2\pi$. Предположим, удалось подобрать такое $l \geq 0$. Рассмотрим для произвольного $t > 0$ равносторонний треугольник $\triangle a_t b_t c_t$ на конусе C_α: выпустим из вершины O три луча, разбивающие конус на три равных угла величины $\alpha/3$, и на каждом луче возьмем точку на расстоянии t от O. Тогда значение угла $\angle a_t b_t c_t$ не зависит от t и $\angle a_t b_t c_t = \angle a_t c_t b_t = \angle b_t a_t c_t = \pi - \frac{\alpha}{3} > \frac{\pi}{3}$. Рассмотрим для каждого $t > 0$ треугольник сравнения $\triangle \tilde{a}_t \tilde{b}_t \tilde{c}_t$ для $\triangle a_t b_t c_t$ на l-плоскости. Если $l = 0$, то треугольник $\triangle \tilde{a}_t \tilde{b}_t \tilde{c}_t$ плоский для каждого t, и $\angle \tilde{a}_t \tilde{b}_t \tilde{c}_t = \frac{\pi}{3}$. Если $l > 0$, то треугольник $\triangle \tilde{a}_t \tilde{b}_t \tilde{c}_t$ сферический. Запишем для него сферическую теорему косинусов, обозначив его сторону через x и углы через β: $\cos x = \cos^2 x - \sin^2 x \cos\beta$. Тогда $\cos\beta = \frac{\cos x(1-\cos x)}{\sin^2 x}$. При $x \to 0$ получаем $\cos\beta \to \frac{1}{2}$, значит $\beta \to \frac{\pi}{3}$. Итак, при $t \to 0$ треугольник $\triangle \tilde{a}_t \tilde{b}_t \tilde{c}_t$ становится все «более» евклидовым: $\lim_{t\to 0} \angle \tilde{a}_t \tilde{b}_t \tilde{c}_t = \frac{\pi}{3}$. Так как $\angle a_t b_t c_t > \frac{\pi}{3}$, то для достаточно малых t будет выполнено $\angle a_t b_t c_t > \angle \tilde{a}_t \tilde{b}_t \tilde{c}_t$, что противоречит условию сравнения углов для пространства кривизны $\leq l$.

Доказательство для случая $\alpha > 2\pi$ аналогично с точностью до замены неравенств на противоположные. Здесь также остается справедливым результат $\lim_{t\to 0} \angle \tilde{a}_t \tilde{b}_t \tilde{c}_t = \frac{\pi}{3}$: действительно, если β — угол в равностороннем треугольнике на l-плоскости, то сумма углов в треугольнике равна 3β и разность $\delta = \pi - 3\beta$, будучи пропорциональной площади треугольника, стремится к нулю при стремлении к нулю длины стороны треугольника. $\square$

Понятие «кривизна» для пространств Александрова используется лишь в контексте ее ограниченности, сама же (риманова) кривизна может вообще не иметь смысла, как, например, в случае нерегулярных многообразий или немногообразий. Например, у конуса с полным углом при вершине, отличным от 2π, значение кривизны в вершине не определено. Естественный вопрос, будет ли риманово многообразие с ограничениями на секционную кривизну иметь ограниченную кривизну в смысле Александрова. Следующая теорема Картана-Александрова-Топоногова дает положительный ответ на этот вопрос.

Теорема 3 (см. [36, гл. 5])**.** *Пусть (M, ρ) — риманово многообразие, секционные кривизны которого ограничены снизу (соотв., сверху) числом k. Тогда M является пространством кривизны $\geq k$ (соотв., $\leq k$) в смысле А. Д. Александрова.*

Связь между пространствами Александрова и римановыми многообразиями исследовалась в дальнейшем в работах В. Н. Берестовского и И. Г. Николаева. Они изучали свойства пространств с двусторонними ограничениями на кривизну (см. [39], [40], [41]). Локально компактное пространство X с внутренней метрикой называется *пространством с ограниченной кривизной*, если у каждой точки $x \in X$ найдется окрестность $U(x)$, кривизна которой в смысле Александрова ограничена с обеих сторон и в которой каждая кратчайшая продолжима, т.е. является ограничением кратчайшей с тем же началом и "более дальним" концом . Отметим, что ограничения на кривизну $U(x)$, вообще говоря, различны для разных $x \in X$. В [39] было доказано, что X является римановым многообразием конечной размерности класса $C^{1,1}$. В [40] было показано, что в X можно ввести гармоническую систему координат, которая задает на X атлас класса $C^{3,\alpha}$ при любом $0 < \alpha < 1$ и в которой компоненты метрического тензора принадлежат классу W^2_p для любого $p \geq 1$.

1.2 Проблема Штейнера

1.2.1 Деревья Штейнера и отношение Штейнера

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф с вершинами в пространстве X, т.е. $V \subset X$. *Длиной ребра* такого графа будем называть расстояние в X между его концами, а *длиной графа* G — сумму длин всех его ребер.

Пусть $M \subset X$ — конечное множество. Рассмотрим всевозможные связные графы $G = (M, E)$, имеющие M в качестве множества своих вершин.

Среди них найдется (возможно, не единственный) граф, имеющий наименьшую длину. Такой граф всегда является деревом и называется *минимальным остовным деревом* для M. Множество всех минимальных остовных деревьев для M обозначается через $\mathrm{MST}(M)$, а их длина — через $\mathrm{mst}(M)$.

Рассмотрим теперь всевозможные связные графы $G = (V, E)$, где $M \subset V \subset X$. Будем говорить в таком случае, что они *соединяют* множество M. Пусть ω_0 — точная нижняя грань длин таких графов. Если существует связный граф $G_0 = (V_0, E_0)$, соединяющий M и имеющий длину ω_0, то он является деревом, называемым обычно *минимальным деревом Штейнера* (Steiner Minimal Tree) для множества M.

Вершины графа G_0, принадлежащие множеству M, называются *граничными*. Дополнительные вершины называются *точками Штейнера.* Множество всех деревьев Штейнера для M мы будем обозначать через $\mathrm{SMT}(M)$, а их длину — через $\mathrm{smt}(M)$. Отметим, что множество $\mathrm{SMT}(M)$ может быть и пустым, но число $\mathrm{smt}(M)$ определено всегда.

Имеет место очевидное свойство $\mathrm{smt}(M) \le \mathrm{mst}(M)$. Действительно, если разрешить дополнительные вершины, то длина затягивающего множество M графа может лишь уменьшиться. Величина, характеризующая, во сколько раз короче окажется длина соединяющего M графа, если разрешить дополнительные вершины, называется *отношением Штейнера* для M и определяется следующим образом:

$$sr(M) = \frac{\mathrm{smt}(M)}{\mathrm{mst}(M)}.$$

Рассмотрим теперь всевозможные конечные множества в X, состоящие из не менее двух точек, и пусть $sr(X)$ — точная нижняя грань их отношений Штейнера. Величина $sr(X)$ называется *отношением Штейнера* метрического пространства X. Таким образом,

$$sr(X) = \inf_{M \subset X, 1 < |M| < \infty} sr(M) = \inf_{M \subset X, 1 < |M| < \infty} \frac{\mathrm{smt}(M)}{\mathrm{mst}(M)}.$$

Для произвольного метрического пространства (X, ρ) справедлива оценка на его отношение Штейнера:

$$\frac{1}{2} \leq sr(X) \leq 1. \tag{1.2.1}$$

Верхняя оценка вытекает из свойства $\mathrm{smt}(M) \leq \mathrm{mst}(M)$. Нижняя оценка была доказана Э. Муром. Оказалось, что любое число из этого отрезка является отношением Штейнера некоторого пространства.

Предложение 2 (см. [13, предложение 7.3])**.** *Любое число, лежащее между* $1/2$ *и* 1*, является отношением Штейнера некоторого метрического пространства.*

Задача о нахождении отношения Штейнера является в практическом смысле сложной. Известно лишь немного пространств, для которых удалось точно вычислить отношение Штейнера. Таковыми являются, например, гиперболические плоскости (см. [31]), филогенетические пространства (см. [27]), пространство компактов в евклидовом пространстве с метрикой Хаусдорфа (см. [30]). Для каждого из них отношение Штейнера равно $1/2$.

Для многих известных классов пространств получены некоторые оценки на отношение Штейнера. Для евклидовой плоскости справедлива верхняя оценка $sr(\mathbb{R}^2) \leq \sqrt{3}/2$, равная отношению Штейнера равностороннего треугольника. Э. Джилберт и Г. Поллак сформулировали в 1968 г. гипотезу $sr(\mathbb{R}^2) = \sqrt{3}/2$. В 1992 г. Д. Ду и Ф. Хвангом было опубликовано доказательство гипотезы. Доказательство содержало пробелы, на которые указывали разные специалисты (см. [19]), таким образом, вопрос о точном значении отношения Штейнера евклидовой плоскости остается открытым. Однако, для n-точечных множеств на плоскости удалось доказать справедливость гипотезы Джилберта-Поллака для $n = 4, 5, 6, 7$, см. [20] - [**?**]. Для n-мерного риманова многообразия X справедлива оценка $sr(X) \leq sr(\mathbb{R}^n)$ (см. [25]). Также была получена нижняя оценка для n-мерного евклидова пространства: $sr(\mathbb{R}^n) \geq 1/\sqrt{3}$ (см. [26]).

1.2.2 Минимальные сети

Деревья Штейнера хоть и имеют в качестве своих вершин точки метрического пространства, но являются, вообще говоря, абстрактными графами. Однако, если метрика пространства строго внутренняя, то дерево Штейнера (если оно существует) можно реализовать в самом пространстве. *Геометрической реализацией* (или просто *реализацией*) графа G в геодезическом пространстве (X, d) будем называть объединение конечного набора непрерывных кривых в X таких, что каждая кривая взаимно однозначно соответствует некоторому ребру графа G и соединяет его концы, при этом две различные кривые пересекаются только в общих концах.

Реализацию связного графа в геодезическом пространстве мы будем называть *сетью*. Реализацию дерева Штейнера для множества M, у которой каждая кривая является кратчайшей, мы будем называть *кратчайшей* или *минимальной сетью*, соединяющей M. Таким образом, минимальная сеть — это объединение конечного набора кратчайших, соответствующих ребрам некоторого минимального дерева Штейнера.

Пусть теперь $T \in \mathrm{SMT}(M)$ — минимальное дерево Штейнера для множества M в пространстве (X, d) с внутренней метрикой. Может оказаться, что в T некоторые вершины совпадают, а значит, соответствующая минимальная сеть Γ содержит отрезки нулевой длины. В таком случае мы факторизуем дерево T по совпадающим вершинам и нулевым ребрам; полученное дерево обозначим через $\tilde{T}$. Очевидно, что $\tilde{T} \in \mathrm{SMT}(M)$. Соответствующая дереву $\tilde{T}$ минимальная сеть $\tilde{\Gamma}$ не содержит вырожденных кратчайших. В дальнейшем мы будем считать, что минимальная сеть не содержит вырожденных кратчайших.

Вершиной сети мы будем далее называть точку пространства, являющуюся вершиной реализованного сетью графа, *ребром сети* — любую ее кривую. В случае, когда минимальная сеть Γ реализует дерево $T \in \mathrm{SMT}(M)$, под *степенью вершины* сети Γ мы будем подразумевать ее степень в дереве $T \in \mathrm{SMT}(M)$, а под *точками Штейнера* сети Γ — вершины, являющиеся таковыми в T.

1.2.3 Локально минимальные сети

Сеть N в геодезическом пространстве (X, d) мы будем называть *локально минимальной*, если у произвольной точки пространства X существует окрестность U такая, что множество N_U, состоящее из ограничений кривых из N на окрестность U, является минимальной сетью с границей $\partial N_U := (\partial N \cap U) \cup (N \cap \partial U)$, где ∂U обозначает границу окрестности U.

Локально минимальные сети наследуют от минимальных сетей все свойства, связанные с углами между ребрами и со степенями вершин. Когда говорят о локальной структуре сетей, подразумевают, как правило, именно эти свойства.

Глава 2

Локальная структура минимальных сетей в пространствах ограниченной кривизны

2.1 Достаточное условие существования минимальных сетей

Определение минимальной сети предполагает ее существование. В частности, на евклидовой плоскости, на сфере и на гиперболической плоскости кратчайшая сеть существует для любого граничного множества. Для произвольного геодезического пространства мы приведем некоторые достаточные условия, обеспечивающие существование кратчайшей сети для произвольного граничного множества.

Теорема 4 (см. [37, теорема 4.5.9])**.** *Пусть* (X, ρ) *— метрическое пространство, в котором любой замкнутый шар* B *может быть наделен компактной метризуемой топологией* τ *таким образом, что метрика* ρ *является* τ*-полунепрерывной снизу в* $B \times B$*. Тогда для любого конечного множества* $S \subset X$ *существует минимальное дерево Штейнера.*

Для выполнения условий теоремы 4 оказывается достаточным локальной компактности метрического пространства. Пространство Александрова по определению обладает строго внутренней метрикой, поэтому если оно локально компактно, то для него справедлива теорема 4.

Следствие 2. *Пусть (X, d) — локально компактное пространство Александрова. Тогда для любого конечного множества $M \subset X$ существует минимальная сеть в X, соединяющая M.*

2.2 Теорема о локальной структуре минимальных сетей в пространствах с кривизной, ограниченной сверху

Теорема 5 (Завальнюк Е. А.)**.** *Пусть X — пространство Александрова кривизны $\leq k$, M — конечный набор точек в X и Γ — минимальная сеть, соединяющая M. Тогда для любых двух ребер в Γ, имеющих общую вершину, угол между ними в этой вершине больше или равен $2\pi/3$.*

2.2.1 Вспомогательные леммы о треугольниках на сфере

Рассмотрим сферу радиуса R с ее внутренней метрикой, и пусть x, y — две различные точки на сфере. Существует по меньшей мере две геодезические, соединяющие x, y. Они лежат в диаметральных сечениях, проходящих через x, y. Для расстояния между x, y справедлива следующая оценка:

$$\rho(x, y) \leq \pi R.$$

Если $\rho(x, y) = \pi R$, то точки x и y диаметрально противоположны, и найдется бесконечное число геодезических (меридианов), соединяющих x, y. Они также являются кратчайшими. Если $\rho(x, y) < \pi R$, то существует лишь две геодезические, лежащие в диаметральном сечении, проходящем через x, y, при этом одна из них оказывается короче другой. Более короткая геодезическая является кратчайшей, соединяющей x, y.

Рассмотрим теперь на сфере три различные точки a, b, c. Поскольку для каждой пары вершин существует по крайней мере две соединяющие их геодезические, то существует по меньшей мере восемь различных геодезических треугольников, имеющих a, b, c своими вершинами. В данном разделе мы будем рассматривать такие сферические треугольники, стороны которого являются кратчайшими. Если все расстояния между вершинами меньше, чем πR, то такой треугольник единственен, его мы будем обозначать через $\triangle abc$.

Если зафиксировать три числа d_1, d_2, d_3, удовлетворяющие условиям

$$d_1 + d_2 < d_3, \quad d_1 + d_3 < d_2, \quad d_2 + d_3 < d_1,$$
$$d_1 < \pi R, \quad d_2 < \pi R, \quad d_3 < \pi R,$$

то сферических треугольник со сторонами d_1, d_2, d_3 существует и единственен с точностью до движения сферы.

Лемма 2. *Пусть R, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{3})$ — фиксированные числа. При каждом $x \in (0, R]$ рассмотрим треугольник $\triangle a^x b^x c^x$ на сфере радиуса R со сторонами $|a^x b^x| = |a^x c^x| = x$, $|b^x c^x| = 2x \sin \alpha$. Тогда найдется такое $z \leq R$, что для любого $x \in (0, z]$*

$$\angle b^x a^x c^x \leq \frac{2\pi}{3} - \varepsilon,$$

где $\varepsilon = \frac{\pi}{3} - \alpha > 0$.

Доказательство. Пусть h^x — середина $[b^x c^x]$. В силу равнобедренности треугольника $\triangle a^x b^x c^x$ имеем $\angle a^x h^x b^x = \frac{\pi}{2}$, и по теореме синусов сферической геометрии для треугольника $\triangle a^x b^x h^x$ получаем

$$\sin \angle b^x a^x h^x = \frac{\sin(t \sin \alpha)}{\sin t}, \qquad t = \frac{x}{R}.$$

Заметим, что $\angle b^x a^x c^x = 2\angle b^x a^x h^x$ в силу равнобедренности треугольника $\triangle a^x b^x c^x$. Угол $\angle b^x a^x c^x \in (0, \pi)$, значит $\angle b^x a^x h^x \in (0, \frac{\pi}{2})$, поэтому угол $\angle b^x a^x h^x$ можно корректно вычислить через значение его синуса:

$$\angle b^x a^x c^x = 2 \arcsin \frac{\sin(t \sin \alpha)}{\sin t}.$$

Легко видеть, что при $x \to 0$ предел этого выражения равен 2α, значит существует такое $\delta > 0$, что при $|x| \leq \delta$ справедливо неравенство

$$|\angle b^x a^x c^x - 2\alpha| < \varepsilon.$$

Раскрывая модули и подставляя $\alpha = \frac{\pi}{3} - \varepsilon$, получаем для $z = \min\{\delta, R\}$ требуемое утверждение. Лемма доказана. $\square$

Следствие 3. *Утверждение леммы 2 справедливо и при более слабом условии* $|b^x c^x| \leq 2x \sin\alpha$.

Доказательство. Пусть при каждом $x \in (0, R]$ для треугольника $\triangle a^x b^x c^x$ справедливо $|a^x b^x| = |a^x c^x| = x, |b^x c^x| \leq 2x \sin\alpha$. Рассмотрим для каждого x треугольник $\triangle \tilde{a}^x \tilde{b}^x \tilde{c}^x$ такой, что $|\tilde{a}^x \tilde{b}^x| = |\tilde{a}^x \tilde{c}^x| = x, |\tilde{b}^x \tilde{c}^x| = 2x \sin\alpha$. По уже доказанному найдется такое $z \leq R$, что для любого $x \in (0, z)$ выполнено неравенство

$$\angle b^x a^x c^x \leq \frac{2\pi}{3} - \varepsilon. \tag{2.2.1}$$

По лемме 1 для треугольников $\triangle a^x b^x c^x$ и $\triangle \tilde{a}^x \tilde{b}^x \tilde{c}^x$

$$\angle a^x b^x c^x \leq \angle \tilde{a}^x \tilde{b}^x \tilde{c}^x,$$

что в силу (2.2.1) влечет требуемое утверждение. $\square$

Следующая лемма обобщает соотношение катета и гипотенузы прямоугольного треугольника на сферическую метрику.

Лемма 3. *Пусть $\triangle abc$ — треугольник на сфере радиуса R такой, что $\angle abc = \frac{\pi}{2}$, $|ac| < \pi R$, $|bc| < \pi R$, $|ab| \leq R$. Тогда $|ac| \geq |ab|$.*

Доказательство. Учитывая, что $\angle abc$ прямой, получаем, применяя теорему синусов сферической геометрии,

$$\sin \frac{|ac|}{R} = \frac{\sin \frac{|ab|}{R}}{\sin \angle acb} \geq \sin \frac{|ab|}{R}.$$

Угол величины $\frac{|ab|}{R}$ лежит в первой четверти тригонометрического круга. Если угол величины $\frac{|ac|}{R}$ лежит во второй четверти, то требуемое неравенство заведомо выполнено, а если в первой, то оно выполнено в силу монотонности синуса. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. *Пусть $\triangle abc$ — такой треугольник на сфере радиуса R, что все его стороны не превосходят R и $\angle acb > \frac{2\pi}{3}$. Тогда справедливо неравенство*

$$|ab| > |bc| + \frac{1}{2}|ac|.$$

Доказательство. Теорема косинусов сферической геометрии дает нам следующее тождество:

$$\cos\frac{|ab|}{R} = \cos\frac{|ac|}{R}\cos\frac{|bc|}{R} + \sin\frac{|ac|}{R}\sin\frac{|bc|}{R}\cos\angle acb.$$

Сделаем для удобства следующие обозначения:

$$x = \frac{|ab|}{R}, \quad z = \frac{|bc|}{R},$$
$$y = \frac{|ac|}{2R}.$$

Тогда, с учетом $\angle acb > 2\pi/3$, получаем

$$\cos x < \cos 2y \cos z - \frac{1}{2}\sin 2y \sin z =$$
$$= \cos y \cos(z+y) - \sin^2 y \cos z < \cos(z+y),$$

где последнее неравенство справедливо в силу положительности всех входящих в выражение косинусов. Так как x, $z+y$ лежат в первой четверти, то мы окончательно получаем $x > z+y$. Лемма доказана. $\square$

Замечание 4. Такое же неравенство имеет место для евклидовой плоскости также в силу теоремы косинусов. Действительно, пусть $\triangle abc$ — евклидов треугольник с углом $\angle acb > 2\pi/3$. Тогда $|ab|^2 > |ac|^2 + |bc|^2 + |ac|\cdot|bc|$, следовательно,

$$|ab|^2 - \left(|bc| + \frac{1}{2}|ac|\right)^2 > \frac{3}{4}|ac|^2 > 0,$$

откуда и получается требуемое утверждение.

2.2.2 Доказательство теоремы

Прежде чем доказывать теорему, сделаем небольшой комментарий. Как мы видели в теореме 2, пространство Александрова кривизны $\leq k$ при $k < 0$ является также пространством кривизны ≤ 0. В последующем доказательстве будет удобнее в качестве поверхности сравнения рассматривать поверхность постоянной гауссовой кривизны $k' = \max\{0, k\}$, т.е. евклидову плоскость при $k \leq 0$ или сферу радиуса $R = \frac{1}{\sqrt{k}}$ при $k > 0$.

Лемма 5. *Пусть X — пространство Александрова кривизны $\leq k$, $[pq]$, $[pr]$ — отрезки кратчайших в X, стыкующиеся в точке p под углом $\theta < 2\pi/3$. Тогда найдется такое x, что для точек $q_1 \in [pq]$, $r_1 \in [pr]$, $|pq_1| = |pr_1| = x$, треугольник сравнения $\triangle \tilde{q}_1\tilde{p}\tilde{r}_1 \subset P_{k'}$ имеет угол $\angle \tilde{q}_1\tilde{p}\tilde{r}_1$, меньший, чем $2\pi/3$. В случае $k > 0$ можно дополнительно добиться выполнения неравенства $|q_1r_1| \leq 2R$.*

Доказательство. Рассмотрим $\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) > 0$. Тогда

1) если $k \leq 0$, то по замечанию 2 найдется такое x, что для точек $q_1 \in [pq]$, $r_1 \in [pr]$, $|pq_1| = |pr_1| = x$, соответствующий треугольник сравнения $\triangle \tilde{q}_1\tilde{p}\tilde{r}_1 \subset P_{k'}$ ($P_{k'} = \mathbb{R}^2$) имеет угол $\angle \tilde{q}_1\tilde{p}\tilde{r}_1 \leq \theta + \delta < \frac{2\pi}{3}$;

2) если $k > 0$, то по определению 1 угла найдется такое y (возьмем его меньшим или равным R), что для любого $x \leq y$ и точек $q_1(x) \in [pq]$, $r_1(x) \in [pr]$, $|pq_1(x)| = |pr_1(x)| = x$, справедливо неравенство

$$\arccos \frac{2x^2 - |q_1(x)r_1(x)|^2}{2x^2} \leq \theta + \delta,$$

откуда

$$|q_1(x)r_1(x)|^2 \leq 2x^2(1 - \cos(\theta + \delta)) = 4x^2 \sin^2 \frac{\theta + \delta}{2}.$$

Значит $|q_1(x)r_1(x)| \leq 2x \sin \alpha$, где $\alpha = \frac{\theta+\delta}{2} = \pi/3 - \delta/2$. В частности, отсюда следует второе утверждение леммы. По лемме 2 для $\alpha = \pi/3 - 0.5\delta$ найдется такое $x \leq y$, что в треугольнике $\triangle q_1'p'r_1' \subset P_k$ с длинами сторон $|p'q_1'|_k = |p'r_1'|_k = x$, $|q_1'r_1'|_k = 2x\sin\alpha$ справедлива оценка на угол $\angle q_1'p'r_1' \leq$

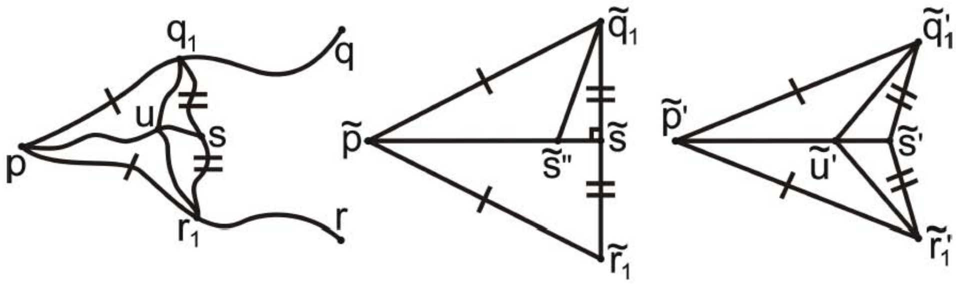

Рис. 2.1: Треугольники сравнения на $P_{k'}$.

$2\pi/3 - 0.5\delta$. Пусть $\triangle\tilde{q}_1(x)\tilde{p}\tilde{r}_1(x) \subset P_k$ — треугольник сравнения для треугольника $\triangle q_1(x)pr_1(x)$. Так как $|\tilde{q}_1(x)\tilde{r}_1(x)|_k = |q_1(x)r_1(x)| \leq 2x\sin\alpha = |q_1'r_1'|_k$, то, применяя лемму 1 к треугольникам $\triangle\tilde{q}_1(x)\tilde{p}\tilde{r}_1(x)$ и $\triangle q_1'p'r_1'$, получаем $\angle\tilde{q}_1(x)\tilde{p}\tilde{r}_1(x) \leq \angle q_1'p'r_1' \leq 2\pi/3 - 0.5\delta < 2\pi/3$. Для найденного x обозначим через $\tilde{q}_1$, $\tilde{r}_1$ точки $\tilde{q}_1(x)$ и $\tilde{r}_1(x)$ соответственно.

Таким образом, в обоих случаях мы нашли такие точки $q_1 \in [pq]$, $r_1 \in [pr]$, $|pq_1| = |pr_1| = x$, что соответствующий треугольник сравнения $\triangle\tilde{q}_1\tilde{p}\tilde{r}_1 \subset P_{k'}$ имеет угол $\angle\tilde{q}_1\tilde{p}\tilde{r}_1 < 2\pi/3$. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 5. Обозначим через T дерево Штейнера, соответствующее минимальной сети Γ. Пусть $[pq]$ и $[pr]$ — ребра сети Γ, стыкующиеся в точке p под углом θ. Докажем, что $\theta \geq 2\pi/3$. Предположим противное, т.е. что $\theta < 2\pi/3$. По лемме 5 найдутся точки $q_1 \in [pq]$, $r_1 \in [pr]$, $|pq_1| = |pr_1|$, что соответствующий треугольник сравнения $\triangle\tilde{q}_1\tilde{p}\tilde{r}_1 \subset P_{k'}$ имеет угол $\angle\tilde{q}_1\tilde{p}\tilde{r}_1 < 2\pi/3$. Пусть s и $\tilde{s}$ — середины $[q_1r_1]$ и $[\tilde{q}_1\tilde{r}_1]$ соответственно. Условие сравнения треугольников $\triangle pq_1r_1$ и $\triangle\tilde{p}\tilde{q}_1\tilde{r}_1$ дает $|ps| \leq |\tilde{p}\tilde{s}|_{k'}$. Пусть $\tilde{p}'\tilde{q}_1'\tilde{s}'\tilde{r}_1' \subset P_{k'}$ — четырехугольник, составленный из треугольников сравнения $\triangle\tilde{p}'\tilde{q}_1'\tilde{s}'$ и $\triangle\tilde{p}'\tilde{r}_1'\tilde{s}'$ для треугольников $\triangle pq_1s$ и $\triangle pr_1s$ соответственно. Тогда, в частности, $|\tilde{p}'\tilde{q}_1'|_{k'} = |\tilde{p}'\tilde{r}_1'|_{k'} = x$, $|\tilde{q}_1'\tilde{s}'|_{k'} = |\tilde{r}_1'\tilde{s}'|_{k'}$.

Рассмотрим такую точку $\tilde{s}''$ на отрезке $[\tilde{p}\tilde{s}]$, что $|\tilde{p}\tilde{s}''|_{k'} = |ps| = |\tilde{p}'\tilde{s}'|_{k'}$. Поскольку треугольник $\triangle\tilde{q}_1\tilde{p}\tilde{r}_1$ равнобедренный, то $\angle\tilde{q}_1\tilde{s}\tilde{p} = \angle\tilde{r}_1\tilde{s}\tilde{p} = \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим треугольник $\triangle\tilde{q}_1\tilde{s}''\tilde{s}$ и докажем, что $|\tilde{q}_1\tilde{s}''|_{k'} \geq |\tilde{q}_1\tilde{s}|_{k'}$. В случае $k \leq 0$ неравенство верно, поскольку треугольник плоский; в случае $k > 0$ в силу леммы 5 справедливо неравенство $|\tilde{q}_1\tilde{r}_1|_{k'} \le 2R$, откуда $|\tilde{q}_1\tilde{s}|_{k'} \le R$, и тогда требуемое неравенство следует из леммы 3. Далее, поскольку $|\tilde{q}_1\tilde{s}|_{k'} = |\tilde{q}'_1\tilde{s}'|_{k'}$, то $|\tilde{q}_1\tilde{s}''|_{k'} \ge |\tilde{q}'_1\tilde{s}'|_{k'}$. По лемме 1 для $\triangle\tilde{q}_1\tilde{p}\tilde{s}''$ и $\triangle\tilde{q}'_1\tilde{p}'\tilde{s}'$ получаем $\angle\tilde{q}'_1\tilde{p}'\tilde{s}' \le \angle\tilde{q}_1\tilde{p}\tilde{s}''$. Аналогично $\angle\tilde{r}'_1\tilde{p}'\tilde{s}' \le \angle\tilde{r}_1\tilde{p}\tilde{s}''$. Следовательно,

$$\angle\tilde{q}'_1\tilde{p}'\tilde{r}'_1 = \angle\tilde{q}'_1\tilde{p}'\tilde{s}' + \angle\tilde{r}'_1\tilde{p}'\tilde{s}' \le \angle\tilde{q}_1\tilde{p}\tilde{s}'' + \angle\tilde{r}_1\tilde{p}\tilde{s}'' = \angle\tilde{q}_1\tilde{p}\tilde{r}_1 < \frac{2\pi}{3}.$$

Точка Штейнера в кратчайшем дереве, соединяющем три различные точки евклидовой плоскости либо три достаточно близкие различные точки сферы, обладает следующими свойствами: во-первых, она единственна; во-вторых, она лежит внутри самого треугольника; в-третьих, любой угол при ней между ребрами-отрезками дерева Штейнера больше или равен $2\pi/3$. Тогда, если $\tilde{u}'$ — точка Штейнера для треугольника $\triangle\tilde{q}'_1\tilde{p}'\tilde{r}'_1$, то в силу только что доказанного неравенства точка $\tilde{u}'$ отлична от $\tilde{p}'$, и, кроме того, выполнено строгое неравенство $|\tilde{p}'\tilde{u}'|_{k'} + |\tilde{q}'_1\tilde{u}'|_{k'} + |\tilde{r}'_1\tilde{u}'|_{k'} < |\tilde{p}'\tilde{q}'_1|_{k'} + |\tilde{p}'\tilde{r}'_1|_{k'}$. Так как треугольник $\triangle\tilde{q}'_1\tilde{p}'\tilde{r}'_1$ равнобедренный, то $\tilde{u}'$ лежит на луче $\tilde{p}'\tilde{s}'$.

Предположим сначала, что $\tilde{u}'$ лежит вне отрезка $[\tilde{p}'\tilde{s}']$. Докажем при этом предположении, что $\angle\tilde{q}'_1\tilde{s}'\tilde{p}' > 2\pi/3$. Пусть $\angle\tilde{q}'_1\tilde{s}'\tilde{p}' \le 2\pi/3$. Рассмотрим угол $\angle\tilde{q}'_1\tilde{t}'\tilde{p}'$ как функцию точки $\tilde{t}' \in [\tilde{p}'\tilde{s}']$. Так как отрезок $[\tilde{p}'\tilde{s}']$ — непрерывная кривая (на плоскости или сфере), то при движении $\tilde{t}'$ от т. $\tilde{p}'$ до т. $\tilde{s}'$ угол $\angle\tilde{q}'_1\tilde{t}'\tilde{p}'$ изменяется непрерывно. В некоторой окрестности т. $\tilde{p}'$ величина этого угла больше $2\pi/3$ (поскольку $\angle\tilde{q}'_1\tilde{p}'\tilde{s}' < \pi/3$), а в т. $\tilde{s}'$ — меньше или равна $2\pi/3$. В силу непрерывности найдется точка $\tilde{t}'$ на отрезке $[\tilde{p}'\tilde{s}']$, углы $\angle\tilde{q}'_1\tilde{t}'\tilde{p}'$ и $\angle\tilde{r}'_1\tilde{t}'\tilde{p}'$ при которой равны $2\pi/3$. Таким образом, точка $\tilde{t}'$ является точкой Штейнера для треугольника $\triangle\tilde{q}'_1\tilde{p}'\tilde{r}'_1$, а значит должна совпасть с $\tilde{u}'$, лежащей вне отрезка $[\tilde{p}'\tilde{s}']$, противоречие. Итак, $\angle\tilde{q}'_1\tilde{s}'\tilde{p}' > 2\pi/3$. В силу леммы 4 и замечания 4 к ней $|\tilde{q}'_1\tilde{s}'|_{k'}+\frac{1}{2}|\tilde{p}'\tilde{s}'|_{k'} < |\tilde{p}'\tilde{q}'_1|_{k'}$. Так как $|\tilde{q}'_1\tilde{s}'|_{k'} = |\tilde{r}'_1\tilde{s}'|_{k'}$, $|\tilde{p}'\tilde{q}'_1|_{k'} = |\tilde{p}'\tilde{r}'_1|_{k'}$, то тогда $|\tilde{q}'_1\tilde{s}'|_{k'} + |\tilde{r}'_1\tilde{s}'|_{k'} + |\tilde{p}'\tilde{s}'|_{k'} < |\tilde{p}'\tilde{q}'_1|_{k'} + |\tilde{p}'\tilde{r}'_1|_{k'}$. Переобозначим в случае $\tilde{u}' \notin [\tilde{p}'\tilde{s}']$ через $\tilde{u}'$ точку $\tilde{s}'$.

Таким образом, мы нашли точку $\tilde{u}'$ на отрезке $[\tilde{p}'\tilde{s}']$, для которой справедливо неравенство

$$|\tilde{p}'\tilde{u}'|_{k'} + |\tilde{q}_1'\tilde{u}'|_{k'} + |\tilde{r}_1'\tilde{u}'|_{k'} < |\tilde{p}'\tilde{q}_1'|_{k'} + |\tilde{p}'\tilde{r}_1'|_{k'} = x + x = 2x.$$

Найдем точку $u \in [ps]$ такую, что $|pu| = |\tilde{p}'\tilde{u}'|_{k'}$, $|us| = |\tilde{u}'\tilde{s}'|_{k'}$. Из условия сравнения треугольников для $\triangle pq_1s$ и $\triangle \tilde{p}'\tilde{q}_1'\tilde{s}'$ имеем $|q_1u| \le |\tilde{q}_1'\tilde{u}'|_{k'}$, аналогично $|r_1u| \le |\tilde{r}_1'\tilde{u}'|_{k'}$. Тогда

$$|pu| + |q_1u| + |r_1u| \le |\tilde{p}'\tilde{u}'|_{k'} + |\tilde{q}_1'\tilde{u}'|_{k'} + |\tilde{r}_1'\tilde{u}'|_{k'} < 2x = |pq_1| + |pr_1|,$$

то есть дерево T', полученное из дерева T добавлением вершины u, удалением ребер $\{pq_1\}$, $\{pr_1\}$ и добавлением ребер $\{pu\}$, $\{q_1u\}$, $\{r_1u\}$, оказалось короче дерева T, что противоречит минимальности дерева T. Теорема доказана.

2.2.3 Следствия

Н. Иннами и С. Найя был доказан следующий результат.

Теорема 6 (см. [14, предложение 7])**.** *Пусть S — полная поверхность Александрова с кривизной, ограниченной снизу, и M — набор из n точек на S. Тогда минимальное дерево Штейнера $T \in \mathrm{SMT}(M)$ на S удовлетворяет следующим свойствам.*

(1) Вершины степени 1 принадлежат M.

(2) Угол между смежными ребрами в их общей вершине не меньше, чем $2\pi/3$.

(3) Каждая точка Штейнера имеет степень в точности равную 3, и, как следствие, не является сингулярной на S. Ребра, исходящие из нее, являются единственными кратчайшими, соединяющими ее со смежными в дереве вершинами.

(4) Число точек Штейнера не превосходит $n - 2$.

В своей статье авторы работали с поверхностями Александрова, однако доказательство свойства (2) дословно переносится на общий случай — на пространства Александрова с кривизной, ограниченной снизу. Отметим также, что свойство (3) явилось следствием свойства (2) и того факта, что полный угол на полной поверхности с ограниченной *снизу* кривизной не превосходит 2π (см. также [14]). Определение полного угла и более подробное его исследование будет приведено в разделе 3.1. Там же будет показано, что свойство (3), вообще говоря, не имеет места для поверхностей с кривизной, ограниченной *сверху*. Поэтому обобщить результаты теорем 5 и 6 мы можем лишь в следующем виде.

Теорема 7. *Пусть (X, d) — пространство Александрова, M — набор из n точек в X. Тогда минимальное дерево Штейнера $T \in \mathrm{SMT}(M)$ в X удовлетворяет следующим свойствам.*

(1) Ребра дерева Штейнера являются кратчайшими в X.

(2) Вершины степени 1 принадлежат M.

(3) Угол между смежными ребрами в их общей вершине не меньше, чем $2\pi/3$.

(4) Число точек Штейнера не превосходит $n-2$.

Сформулированная во введении теорема A является, таким образом, следствием теоремы 7 для локально минимальных сетей.

Глава 3

Отношение Штейнера поверхностей Адамара

3.1 Поверхности Александрова и поверхности Адамара

Определение пространства Александрова предполагает выполнение некоторых локальных условий на метрику. Предположим, что пространство Александрова (S, d) является двумерным топологическим многообразием. В этом случае будем называть S *поверхностью Александрова* с кривизной, определенной для нее как для пространства Александрова. По определению, для произвольной точки $x \in S$ найдется достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что окрестность $U_\varepsilon(x)$ гомеоморфна либо кругу, либо полукругу. В первом случае назовем точку x *внутренней*, во втором — *граничной*. Объединение всех граничных точек поверхности S назовем *границей* поверхности и обозначим через ∂S. Если x — внутренняя точка, то граница $\partial U_\varepsilon(x)$ окрестности $U_\varepsilon(x)$ (где ε такое, как выше) есть множество всех точек поверхности, удаленных от точки x на расстоянии ε; она является образом некоторой простой замкнутой кривой на S. Замкнутая окрестность $V_\varepsilon(x)$ гомеоморфна в этом случае двумерному диску.

Пусть x — внутренняя точка, и γ_1, γ_2 — две кратчайшие, исходящие из x и не имеющие в некоторой окрестности $U_\varepsilon(x)$ общих точек, за исключением x. Рассмотрим два замкнутых *сектора* V_1, V_2, на которые кратчайшие

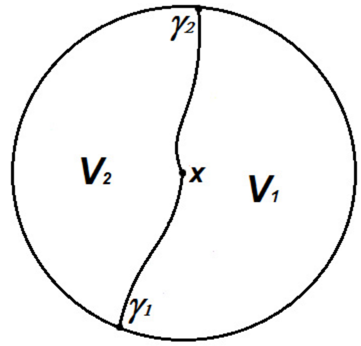

Рис. 3.1: Секторы замкнутой окрестности

γ_1, γ_2 разбивают замкнутую окрестность $V_\varepsilon(x)$, см. рис. 3.1. Кратчайшие γ_1 и γ_2 назовем в данном случае *сторонами секторов*.

Назовем два сектора *неналегающими*, если они не имеют общих внутренних точек. Пусть теперь $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — кратчайшие, исходящие из x и упорядоченные в порядке следования вокруг x: то есть, секторы $V_1, \ldots, V_n$, где V_i ограничены кратчайшими γ_i и γ_{i+1} ($\gamma_{n+1} = \gamma_1$), попарно не налегают. Множество кратчайших $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ назовем *разбиением* окрестности $V_\varepsilon(x)$. *Углом вокруг точки x, подчиненным разбиению* Γ, назовем сумму углов между последовательными кратчайшими разбиения:

$$\theta_\Gamma(x) = \sum_{i=1}^{n} \angle(\gamma_i, \gamma_{i+1}),$$

а *полным углом вокруг точки x* назовем точную верхнюю грань углов вокруг x, подчиненных всевозможным разбиениям окрестности $V_\varepsilon(x)$, и обозначим его через $\theta(x)$:

$$\theta(x) = \sup_\Gamma \theta_\Gamma(x).$$

Более подробное исследование полного угла можно посмотреть в [38]. Говоря о пространствах Александрова, надо отметить, что некоторые их классы достаточно хорошо изучены. В частности, полные односвязные пространства Александрова неположительной кривизны получили название *пространств Адамара* (см. обзор в [36], § 9.2). Целью настоящей работы является изучение пространств Адамара, являющихся двумерными топологическими многообразиями.

Определение 8. Полная (как метрическое пространство) односвязная поверхность Александрова кривизны ≤ 0 называется *поверхностью Адамара.*

Отметим, что если полная односвязная поверхность Александрова имеет кривизну $\leq k < 0$, то в силу теоремы 2 она является поверхностью Адамара. Поэтому корректно говорить о поверхностях Адамара кривизны $\leq k$ для отрицательных k.

Поверхности Адамара наследуют все свойства пространств Адамара. Далее мы отметим их некоторые важные для нас свойства, сформулировав их уже для поверхностей.

Напомним, *геодезической* в пространстве с внутренней метрикой называется локально кратчайшая кривая, т.е. кривая $\gamma\colon [0,l] \to X$ — геодезическая, если и только если для любого $t \in [0,l]$ найдется содержащий t отрезок $J \subset [0,l]$ такой, что кривая $\gamma|_J$ является кратчайшей.

Теорема 8 (см. [36, теорема 9.2.2])**.** *Любые две точки поверхности Адамара соединяются единственной геодезической. Кроме того, каждый геодезический отрезок на поверхности Адамара является кратчайшей.*

Следствие 4. *Две кратчайшие на поверхности Адамара пересекаются не более чем в одной точке.*

Теорема 9 (см. [36, теорема 9.2.9])**.** *Если (S,d) — поверхность Адамара кривизны $\leq k$, то условия сравнения треугольников (углов) и монотонности углов выполняются для всех треугольников на S, т.е. S является поверхностью кривизны $\leq k$ «в целом».*

3.1.1 Продолжимость кратчайших на поверхностях Адамара

Определение 9. Пусть (X,d) — пространство с внутренней метрикой, и $\gamma\colon [0,l] \to X$ — геодезическая (соотв., кратчайшая) в X. Геодезическую (соотв., кратчайшую) $\gamma' \colon [0, l'] \to X$, где $l' > l$, мы будем называть *продолжением* γ, если ограничение γ' на отрезок $[0, l]$ совпадает с γ.

Утверждение 2 (см. [36, предложение 9.1.25])**.** *Пусть (X, d) — полное пространство Александрова кривизны ≤ 0, $\gamma \colon [0, l] \to X$ — геодезическая в X, $\gamma(0) = a$, $\gamma(l) = b$, и существует $\varepsilon > 0$ такое, что проколотая окрестность $U_\varepsilon(b) \setminus \{b\}$ не стягиваема. Тогда γ продолжима за точку b.*

На поверхности Адамара (S, d) существование нестягиваемой проколотой окрестности $U_\varepsilon(b) \setminus \{b\}$ для точки $b \in S$ эквивалентно тому, что точка b — внутренняя. Как мы видели в теореме 8, геодезическая на поверхности Адамара является кратчайшей. Поэтому справедлива следующая теорема о локальной продолжимости кратчайших.

Теорема 10. *Пусть (S, d) — поверхность Адамара, $\gamma \colon [0, l] \to S$ — кратчайшая на S, $\gamma(0) = a$, $\gamma(l) = b$, причем b — внутренняя точка поверхности. Тогда существует кратчайшая $\gamma' \colon [0, l + \varepsilon] \to S$, продолжающая γ.*

Поверхность Адамара будем называть *неограниченной*, если она не имеет края. Таким образом, каждая точка поверхности — внутренняя, и тогда по теореме 10 любая кратчайшая на поверхности продолжима. Следующая теорема является следствием известной теоремы Хопфа-Ринова. В силу того, что любой отрезок геодезической на поверхности Адамара является кратчайшей, теорема окажется справедливой и для поверхностей Адамара.

Теорема 11 (см. [36, предложение 9.1.28])**.** *Пусть X — полное метрическое пространство, в котором каждая геодезическая продолжима за любую свою точку. Тогда каждая геодезическая γ является ограничением полной геодезической $\bar{\gamma} \colon \mathbb{R} \to X$.*

Следствие 5. *Любая кратчайшая на неограниченной поверхности Адамара бесконечно продолжима.*

В силу следствий 4 и 5 получаем следующее свойство кратчайших на поверхностях Адамара.

Следствие 6. *Попарно различные кратчайшие, исходящие из точки x, могут быть продолжены сколь угодно далеко, и их продолжения не имеют общих точек, отличных от x.*

3.1.2 Полный угол на поверхностях Адамара

Теорема 12. *Полный угол вокруг внутренней точки поверхности Адамара больше или равен 2π.*

Доказательство. Пусть x — внутренняя точка поверхности Адамара (S, d), и пусть $V_\varepsilon(x)$ — ее окрестность, гомеоморфная замкнутому диску. Рассмотрим кратчайшую $\gamma\colon [0, \varepsilon] \to V_\varepsilon(x)$ с началом в произвольной точке a границы $\partial V_\varepsilon(x)$ окрестности и концом в точке x. Она продолжима по теореме 10, и пусть $\gamma'\colon [0, \varepsilon + \delta] \to S$ — ее продолжение. Рассмотрим две кратчайшие в окрестности $V_\delta(x)$ с началом в точке x: $\gamma_1 = \gamma'|_{[\varepsilon, \varepsilon+\delta]}$ и $\gamma_2 = \gamma'|^{-1}_{[\varepsilon-\delta, \varepsilon]}$, где последняя идет в направлении, обратном направлению кратчайшей γ'. Множество $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ является разбиением окрестности $V_\delta(x)$, угол между γ_1 и γ_2 в точке x равен π. Следовательно, $\theta_\Gamma(x) = \angle(\gamma_1, \gamma_2) + \angle(\gamma_2, \gamma_1) = 2\pi$. Полный угол $\theta(x)$ вокруг точки x как супремум углов по всевозможным разбиениям окажется не меньше, чем $\theta_\Gamma(x)$. Теорема доказана. $\square$

3.1.3 Пример точек Штейнера сколь угодно большой степени

На поверхностях постоянной гауссовой кривизны степень точек Штейнера в точности равна 3. В [9] были приведены примеры нормированных плоскостей, на которых возникают точки Штейнера степени 4. В теореме 6 мы видели, что на поверхностях Александрова с кривизной, ограниченной снизу, степень точек Штейнера равна 3. Причиной этому явился тот факт, что полный угол на таких поверхностях не превосходит 2π, и, в частности, для выпуклых многогранников это было показано в [5, п. 1.6.3] в терминах углов при вершине, по сути являющихся полными углами в вершинах.

Вышеописанное свойство степеней точек Штейнера не имеет места, вообще говоря, для пространств с кривизной, ограниченной сверху.

Предложение 3. *Для произвольного $n \geq 3$ существует поверхность Адамара, ее конечное подмножество M и кратчайшая сеть, соединяющая M, степень одной из точек Штейнера которой равна n.*

Доказательство. Рассмотрим конус K с полным углом при вершине O, равным $\frac{2\pi n}{3}$, и с естественной внутренней метрикой d (которая, к тому же, является строго внутренней). Очевидно, K является двумерным многообразием, полным и односвязным как метрическое пространство; кроме того, K является пространством неположительной кривизны (утверждение 1). Следовательно, конус K является поверхностью Адамара.

Рассмотрим множество $M = \{A_1, \ldots, A_n\}$ точек на K, отстоящих на расстоянии 1 от вершины O, таких что $\angle A_i O A_{i+1} = \frac{2\pi}{3}$, $i = 1, \ldots, n$, $A_{n+1} = A_1$. Для любого $i = 1, \ldots, n$ ближайшими к точке A_i будут две точки A_{i-1} и A_{i+1}, и $d(A_i, A_{i-1}) = d(A_i, A_{i+1}) = \sqrt{3}$, поэтому минимальное остовное дерево представляет собой многоугольник $A_1 A_2 \ldots A_n$ без одной стороны, и его длина равна $d(\mathrm{mst}(M)) = (n-1) * \sqrt{3}$. Множество $\mathrm{SMT}(M)$ деревьев Штейнера для M непусто в силу следствия 2. Заметим также, что сумма отрезков $\sum_{i=1}^{n} d(O, A_i)$ равна n, что строго меньше, чем $d(\mathrm{mst}(M))$, поэтому любое дерево $T \in \mathrm{SMT}(M)$ отлично от минимального остовного, а значит, содержит точки Штейнера.

Пусть Γ — минимальная сеть для M, и пусть P — точка Штейнера в ней. Предположим, что P отлична от O. Тогда любая достаточно малая окрестность точки P локально изометрична плоскости. Значит, степень P в Γ равна 3 и все три угла в P при ребрах Γ равны 120° (теорема 1) . Для некоторого i точка P принадлежит замкнутому сектору S_i, ограниченному лучами OA_i, OA_{i+1}. В силу того, что $\angle A_i O A_{i+1} = 120^\circ$, какой-то из отрезков сети Γ, исходящий из точки P, содержится, за исключением, быть может, самой точки P, во внутренности сектора S_i. Следовательно, другой конец P_1 этого отрезка также является точкой Штейнера в Γ. Применяя то же рассуждение к точке P_1, мы получим точку Штейнера P_2, также лежащую во внутренности сектора S_i, и так далее. Так как число точек Штейнера не превосходит $n-2$, мы приходим к противоречию.

Таким образом, единственная точка Штейнера в Γ — это вершина O конуса. Поскольку длины $d(O, A_i)$ меньше длин $d(A_j, A_k)$ для произвольных i, j, k, то точка O соединена в Γ со всеми A_i, $i = 1, \ldots, n$. То есть, минимальная сеть для M представляет собой «звезду» с центром в O, и степень O равна n. $\square$

3.2 Теорема об отношении Штейнера неограниченных поверхностей Адамара кривизны $\le k < 0$

3.2.1 Частный случай: гиперболические плоскости

Н. Иннами и Б. Ким показали в [31], что отношение Штейнера гиперболической плоскости равно 1/2. В качестве граничных множеств, приближающих отношение Штейнера к 1/2, рассматривались вершины правильных многоугольников. В частности, было показано, что все точки Штейнера правильного n-угольника находятся в некоторой окрестности центра многоугольника, независимо от удаленности граничных вершин от центра; размер окрестности зависит лишь от n.

Ниже предлагается иное доказательство теоремы Иннами-Ким. Точное устройство деревьев Штейнера для множества вершин правильного многоугольника окажется, как мы увидим, несущественным для вычисления отношения Штейнера. Оказывается достаточным получить лишь верхнюю оценку отношения Штейнера, рассмотрев вместо деревьев Штейнера «немного» более длинные деревья, но существенно проще устроенные. Значимость предлагаемого доказательства заключается в том, что его можно обобщить для неограниченных поверхностей Адамара кривизны $\le k < 0$.

Пусть (P_k, d_k) — поверхность постоянной гауссовой кривизны $k < 0$. Рассмотрим ее модель Пуанкаре в круге. Пусть $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$

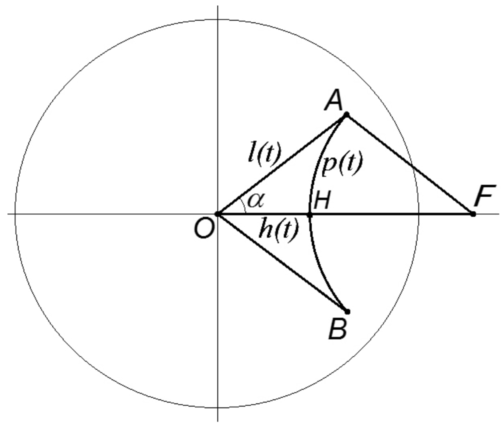

Рис. 3.2: Модель Пуанкаре гиперболической плоскости

— открытый диск с метрикой $dl^2 = \frac{4(dx^2+dy^2)}{|k|(1-x^2-y^2)^2}$. Начало координат обозначим через O. Пусть $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ — величина некоторого угла, $t \in (0,1)$ — некоторое число, $\triangle OAB$ — равнобедренный треугольник с вершинами в точках O, $A = (t\cos\alpha, t\sin\alpha)$, $B = (t\cos\alpha, -t\sin\alpha)$ и углом 2α при вершине O, см. рис. 3.2.

Кратчайшая на P_k, соединяющая точки A и B, представляет собой в модели Пуанкаре дугу окружности, перпендикулярной к абсолюту $x^2+y^2=1$. Обозначим эту окружность через $C(F,r)$, где F и r — ее центр и радиус соответственно. Пусть H — точка пересечения кратчайшей $[AB]$ с осью абсцисс системы координат. Очевидно, что OH — высота, медиана и биссектриса в треугольнике $\triangle OAB$. Нетрудно вычислить абсциссу центра F и радиус r окружности:

$$x_F = \frac{t^2+1}{2t\cos\alpha}, \qquad r = \frac{\sqrt{t^4 - 2t^2\cos 2\alpha + 1}}{2t\cos\alpha}.$$

Тогда абсцисса точки H равна

$$x_H = \frac{t^2 + 1 - \sqrt{t^4 - 2t^2\cos 2\alpha + 1}}{2t\cos\alpha}.$$

Лемма 6. *В сделанных обозначениях, при $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ справедливо следующее неравенство*

$$x_H \leq \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} < 1,$$

при этом, хотя x_H и зависит от t, оценка имеет место для любого t.

Доказательство. Докажем сначала левое неравенство. Достаточно показать, что

$$t^2 - 2t(1 - \sin\alpha) + 1 \leq \sqrt{t^4 - 2t^2\cos 2\alpha + 1},$$

что в силу неотрицательности левой части эквивалентно

$$t^4 + 4t^2(1 - \sin\alpha)^2 + 1 - 4t^3(1 - \sin\alpha) - 4t(1 - \sin\alpha) + 2t^2 \leq t^4 - 2t^2\cos 2\alpha + 1.$$

Сократим одинаковые слагаемые в левой и правой частях и затем поделим обе части неравенства на $2t > 0$:

$$2t(1 - \sin\alpha)^2 - 2t^2(1 - \sin\alpha) - 2(1 - \sin\alpha) + t \leq -t\cos 2\alpha.$$

Раскроем квадрат в левой части, выразим $\cos 2\alpha$ через $2\cos^2\alpha - 1$, и перенесем все слагаемые в левую часть, сгруппировав их по степеням t. Получим

$$-2(1 - \sin\alpha)t^2 + 4(1 - \sin\alpha)t - 2(1 - \sin\alpha) \leq 0.$$

Разделим неравенство на $2(\sin\alpha - 1) < 0$. Знак неравенства при этом поменяется.

$$t^2 - 2t + 1 \geq 0.$$

Последнее неравенство справедливо при любых t. Итак, мы доказали левое неравенство утверждения леммы.

Для доказательства правого неравенства заметим, что $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$, что в силу выбора угла $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ строго больше, чем 1. Лемма доказана. $\square$

Расстояние на P_k от центра O до точки, отстоящей в модели диска от O на евклидово расстояние s, равно $\frac{1}{\sqrt{|k|}}\ln\frac{1+s}{1-s}$, поэтому для длины $h(t)$ отрезка $[OH]$ на P_k справедлива в силу леммы 6 следующая оценка

$$h(t) \leq M(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{|k|}}\ln\frac{\cos\alpha - \sin\alpha + 1}{\cos\alpha + \sin\alpha - 1}. \tag{3.2.1}$$

Обозначим через $l(t)$ длину отрезка $[OA]$ на P_k, равную $\frac{1}{\sqrt{|k|}} \ln \frac{1+t}{1-t}$. Очевидно, что

$$\lim_{t \to 1-} l(t) = +\infty.$$

Длина $p(t)$ отрезка $[AH]$ на P_k оценивается по неравенству треугольника в $\triangle AHO$, что вместе с (3.2.1) дает нам следующую оценку:

$$l(t) - M(\alpha) \leq p(t) \leq l(t) + M(\alpha), \tag{3.2.2}$$

Из этого неравенства видно, что при фиксированном α длина $[AH]$ также стремится к бесконечности при $t \to 1-$. Разделив неравенство (3.2.2) на $l(t)$, получаем

$$1 - \frac{M(\alpha)}{l(t)} \leq \frac{p(t)}{l(t)} \leq 1 + \frac{M(\alpha)}{l(t)}.$$

В силу ограниченности величины $M(\alpha)$ получаем

$$\lim_{t \to 1-} \frac{p(t)}{l(t)} = 1.$$

Длина основания $[AB]$ на P_k равна $2p(t)$, таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \colon [0, +\infty) \to P_k$ — натурально параметризованные геодезические на гиперболической плоскости (P_k, d_k), исходящие из одной точки под углом, лежащих в пределах интервала $(0, \frac{\pi}{2})$. Тогда*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{d_k(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{t} = 2.$$

Иными словами, равнобедренный треугольник с фиксированным острым углом α между боковыми сторонами все более вырождается по мере увеличения боковых сторон.

Рассмотрим произвольную точку O на P_k и выпустим из нее n натурально параметризованных геодезических $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, разделяющих полный угол в точке O на n равных углов (равных $2\pi/n$). Пусть $M_{n,t} = \{\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)\}$ — множество точек на геодезических $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, равноотстоящих от точки O на

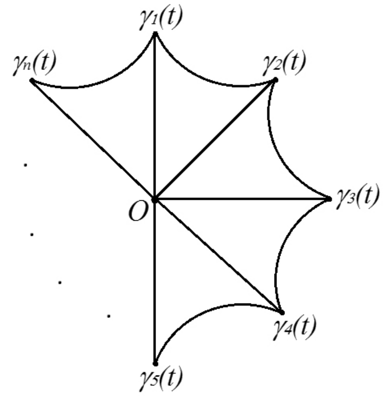

Рис. 3.3: $\mathrm{mst}(M_{n,t})$ и $T_{n,t}$

расстоянии t. Заметим, что при $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, угол $\angle(\gamma_i(t), \gamma_j(t))$ в точке O не меньше, чем $\frac{2\pi}{n}$. Поэтому по лемме 1 для треугольников $\triangle\gamma_1(t)O\gamma_2(t)$ и $\triangle\gamma_i(t)O\gamma_j(t)$ получаем $d_k(\gamma_i(t), \gamma_j(t)) \geq d_k(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Следовательно, минимальное остовное дерево для $M_{n,t}$ представляет собой все стороны многоугольника $\gamma_1(t)\gamma_2(t)\ldots\gamma_n(t)$ без одной (см. рис. 3.3), и его длина равна

$$d_k(\mathrm{mst}(M_{n,t})) = (n-1) \cdot d_k(\gamma_1(t), \gamma_2(t)). \tag{3.2.3}$$

Рассмотрим дерево $T_{n,t}$ на P_k с множеством вершин $V(T_{n,t}) = \{O, \gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)\}$ и множеством ребер $E(T_{n,t}) = \{[O\gamma_1(t)], \ldots, [O\gamma_n(t)]\}$, см. рис. 3.3. Длина дерева $T_{n,t}$ равна

$$d_k(T_{n,t}) = n \cdot t. \tag{3.2.4}$$

Так как $T_{n,t}$ соединяет точки граничного множества $M_{n,t}$, то длина дерева Штейнера для $M_{n,t}$ не превосходит длины дерева $T_{n,t}$:

$$d_k(\mathrm{smt}(M_{n,t})) \leq d_k(T_{n,t}). \tag{3.2.5}$$

Рассмотрим функцию

$$r_n(t) = \frac{d_k(T_{n,t})}{d_k(\mathrm{mst}(M_{n,t}))}. \tag{3.2.6}$$

В силу неравенства (3.2.5) получаем $sr(M_{n,t}) \leq r_n(t)$. Подставляя (3.2.3),(3.2.4) в (3.2.6), получаем

$$r_n(t) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{t}{d_k(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}, \tag{3.2.7}$$

и, в силу леммы 7, $\lim_{t\to\infty} r_n(t) = \frac{n}{2(n-1)}$. Устремив n к бесконечности, получаем

$$\lim_{n\to\infty,\, t\to\infty} r_n(t) = \frac{1}{2}. \tag{3.2.8}$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное n и вещественное $t > 0$ такие, что $r_n(t) \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$. В частности, отсюда следует в силу неравенства $sr(M_{n,t}) \leq r_n(t)$, что отношение Штейнера гиперболической плоскости $sr(P_k) \leq 1/2$, а в силу нижней оценке в формуле (1.2.1) имеем окончательно

$$sr(P_k) = 1/2.$$

Таким образом, дерево $T_{n,t}$, топологически представляющее собой «звезду» из n ребер, оказывается мало отличающимся по длине от дерева Штейнера для множества $M_{n,t}$ при $n \to \infty$, $t \to \infty$.

3.2.2 Доказательство теоремы

Для доказательства теоремы B мы «перенесем» описанную в предыдущем разделе «звезду» с гиперболической плоскости на поверхность Адамара. Для корректного ее переноса нам понадобится следующая лемма.

Лемма 8. *Пусть X — пространство Александрова кривизны $\leq k$, $\triangle a'b'c'$ — треугольник, лежащий в некоторой нормальной окрестности в X, а $\triangle abc$ — такой треугольник на k-плоскости, что $|a'b'| = |ab|_k$, $|a'c'| = |ac|_k$, $\angle b'a'c' \geq \angle bac$. Тогда $|b'c'| \geq |bc|_k$.*

Доказательство. Пусть $\triangle \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$ — треугольник сравнения на k-плоскости для $\triangle a'b'c'$, т.е. $|a'b'| = |\tilde{a}\tilde{b}|_k$, $|a'c'| = |\tilde{a}\tilde{c}|_k$, $|b'c'| = |\tilde{b}\tilde{c}|_k$. Условие сравнения углов дает $\angle b'a'c' \leq \angle \tilde{b}\tilde{a}\tilde{c}$. Следовательно, $\angle bac \leq \angle b'a'c' \leq \tilde{b}\tilde{a}\tilde{c}$. По лемме 1 для треугольников $\triangle abc$ и $\triangle \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$ на k-плоскости $|bc|_k \leq |\tilde{b}\tilde{c}|_k = |b'c'|$. $\square$

Отметим также, что на неограниченной поверхности Адамара в силу определения поверхности каждая точка обладает замкнутой окрестностью, гомеоморфной двумерному диску, из чего следует локальная компактность такой поверхности. Тогда в силу следствия 2 для произвольного конечного множества на поверхности существует соединяющая его минимальная сеть, и корректно говорить об отношении Штейнера рассматриваемых в доказательстве множеств.

Доказательство теоремы B. Пусть (S, d) — неограниченная поверхность Адамара кривизны $\le k < 0$. По теореме 12 полный угол $\theta(x)$ вокруг точки x больше или равен 2π. Возьмем натуральное $n \ge 4$. Выпустим из точки x в окрестности $V_\varepsilon(x)$, фигурирующей в определении полного угла вокруг x, натурально параметризованные кратчайшие $\gamma'_1, \dots, \gamma'_n$ такие, что $\angle(\gamma'_i, \gamma'_{i+1}) = 2\pi/n$, $i = 1, \dots, n-1$. Заметим, что $\angle(\gamma'_1, \gamma'_n) \ge 2\pi/n$. В силу следствия 6 эти кратчайшие бесконечно продолжимы и нигде в дальнейшем не пересекаются.

Лемма 9. *Для любых натуральных* $1 \le i, j \le n$, $i \ne j$, *и произвольного* $t \in (0, +\infty)$ *справедливо неравенство*

$$d(\gamma'_i(t), \gamma'_j(t)) \ge d_k(\gamma_1(t), \gamma_2(t)),$$

где $d_k(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ *обозначает длину стороны правильного* n*-угольника* $M_{n,t}$ *на* k*-плоскости* P_k.

Доказательство. Для угла $\angle(\gamma'_i, \gamma'_j) = \min\left\{\frac{2\pi}{n}|j-i|, \theta(x) - \frac{2\pi}{n}|j-i|, \pi\right\}$ справедливо неравенство $\angle(\gamma'_i, \gamma'_j) \ge \frac{2\pi}{n}$. Рассмотрим треугольник $\triangle\gamma'_i(t)x\gamma'_j(t)$ на поверхности S и треугольник $\triangle\gamma_1(t)O\gamma_2(t)$ на k-плоскости P_k. Вся поверхность S является нормальной окрестностью по теореме 9, поэтому к треугольникам применима лемма 8, устанавливающая требуемое неравенство.

$\square$

Рассмотрим для каждого $t > 0$ множество $M'_{n,t} = \{\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)\}$. Из леммы 9 следует, что все попарные расстояния между точками множества

$M'_{n,t}$ не меньше, чем $d_k(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Поэтому очевидна следующая оценка длины минимального остовного дерева для множества $M'_{n,t}$:

$$d(\mathrm{mst}(M'_{n,t})) \geq (n-1) d_k(\gamma_1(t), \gamma_2(t)).$$

В правой части неравенства стоит длина минимального остовного дерева для множества $M_{n,t}$ на k-плоскости P_k (формула (3.2.3)). Фактически мы доказали следующую лемму.

Лемма 10. $d(\mathrm{mst}(M'_{n,t})) \geq d_k(\mathrm{mst}(M_{n,t}))$.

Пусть $T'_{n,t}$ — дерево на S с множеством вершин $V(T'_{n,t}) = \{x, \gamma'_1(t), \ldots, \gamma'_n(t)\}$ и множеством ребер $E(T'_{n,t}) = \{[x\gamma'_1(t)], \ldots, [x\gamma'_n(t)]\}$. Длина $d(T'_{n,t})$ дерева $T'_{n,t}$ равна nt. Пользуясь (3.2.4), получаем следующее тождество.

Лемма 11. $d(T'_{n,t}) = d_k(T_{n,t})$.

Рассмотрим, подобно (3.2.6), функцию

$$r'_n(t) = \frac{d(T'_{n,t})}{d(\mathrm{mst}(M'_{n,t}))}.$$

Тогда в силу лемм 10 и 11

$$r'_n(t) \leq r_n(t). \tag{3.2.9}$$

Рассмотрим функцию

$$sr'_n(t) = \frac{d(\mathrm{smt}(M'_{n,t}))}{d(\mathrm{mst}(M'_{n,t}))},$$

равную отношению Штейнера для множества $M'_{n,t}$. Так как дерево $T'_{n,t}$ соединяет множество $M'_{n,t}$, то $d(\mathrm{smt}(M'_{n,t})) \leq d(T'_{n,t})$. Следовательно, $sr'_n(t) \leq r'_n(t)$, и, учитывая неравенство (3.2.9), мы получаем $sr'_n(t) \leq r_n(t)$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ и $t \to \infty$ и пользуясь (3.2.8), получаем

$$\lim_{n\to\infty,\, t\to\infty} sr'_n(t) \leq \frac{1}{2},$$

откуда $sr(S) \leq \frac{1}{2}$. Учитывая нижнюю оценку в формуле (1.2.1), мы окончательно имеем $sr(S) = 1/2$. Теорема доказана.

Литература

[1] Gauss C.F. *Briefwechsel Gauss Schumacher*, в книге: Werke Bd. X, 1, pp. 459 - 468, Göttingen, 1917.

[2] Курант. Р., Робинс. Г. *Что такое математика? : Элементарный очерк идей и методов*, 3-е изд., испр. и доп., М., МЦНМО, 2001.

[3] Prömel H.J., Steger A. *The Steiner tree problem: A tour through graphs, algorithms, and complexity*, first edition. Vieweg, Braunschweig. 2002.

[4] Gilbert E. N., Pollak H. O. *Steiner minimal trees.* SIAM J. Appl. Math. 1968. **16**, № 1, pp. 1-29.

[5] Иванов А. О., Тужилин А. А. *Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато.* Успехи матем. наук. 1992. **47**, № 2, сс. 53-115.

[6] Heppes. A. *Isogonal spherischen Netze.* Ann. Univ. Sci., Budapest, Sect. Math. 1964. **7**, pp. 41-48.

[7] Edmonds A. L., Ewing. J. H., Kulkarni R. S. *Regular tessellations of surfaces and (p,q,2)-triangle groups.* Ann. Math. 1982. **166**, pp. 113-132.

[8] Иванов А. О., Тужилин А. А. *Разветвленные геодезические в нормированных пространствах.* Изв. РАН. Серия матем. 2002. **66**, № 5, сс. 33-82.

[9] Swanepoel K. J. *The Local Steiner Problem in Normed Planes.* Networks. 2000. **36**, pp. 104–113.

[10] Иванов А. О., Хонг В. Л., Тужилин А. А. *Плоские сети, локально минимальные и критические для манхэттенского функционала длины.* Зап. научн. сем. ПОМИ. 2001. **279**, сс. 111-140.

[11] Ильютко Д. П. *Разветвленные экстремали функционала λ-нормированной длины.* Матем. сб. 2006. **197**, № 5, сс. 75-98.

[12] Ильютко Д. П. *Локально минимальные сети в N-нормированных пространствах.* Матем. заметки. 2003. **74**, № 5, сс. 657-669.

[13] Иванов А. О., Тужилин А. А. *Теория экстремальных сетей.* Москва, Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003.

[14] Innami N., Naya S. *A comparison theorem for Steiner minimum trees in surfaces with curvature bounded below.* Tohoku Mathematical Journal. 2013. **65**, № 1, pp. 131-157.

[15] Стрелкова Н. П. *Реализация плоских графов как замкнутых локально минимальных сетей на выпуклых многогранниках.* Доклады РАН. 2010. **435**, № 4, сс.1-3

[16] Стрелкова Н. П. *Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях тетраэдров.* Матем. сб. 2011. **202**, № 1, сс. 141-160.

[17] Стрелкова Н. П. *Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях выпуклых многогранников.* Моделирование и анализ информационных систем. 2013. **20**, № 5, сс. 116-145.

[18] Стрелкова Н. П. *Устойчивость локально минимальных сетей.* Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. 2013, **29**, сс. 148-170.

[19] Ivanov A., Tuzhilin A. *The Steiner ratio Gilbert-Pollak conjecture is still open.* Algorithmica. 2012. **62**, №1-2, pp. 630-632.

[20] Pollak. H.O. *Some remarks on the Steiner Problem.* J. Combin. Theory, Ser. A. 1978. **24**, pp. 278 - 295.

[21] Du D.Z., Yao E.Y. and Hwang F.K. *A Short Proof of a Result of Pollak on Steiner Minimal Trees.* J. Combin. Theory, Ser. A. 1982. **32**, pp. 396 - 400.

[22] Du D.Z., Hwang F.K. and Yao E.N. *The Steiner ratio conjecture is true for five points.* J. Combin. Theory. Ser. A. 1985. **38**, pp. 230 - 240.

[23] Rubinstein J.H. and Thomas. D.A. *The Steiner Ratio conjecture for six points.* J. Combin. Theory, Ser. A. 1991. **58**, pp. 54 - 77.

[24] De Wet P.O. *Geometric Steiner Minimal Trees.* Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy, University of South Africa. 2008.

[25] Иванов А. О., Тужилин А. А., Цислик Д. *Отношение Штейнера для римановых многообразий.* Успехи матем. наук. 2000. **55**, №6, сс. 139-140.

[26] Graham R. L., Hwang F. K. *A remark on Steiner minimal trees.* Bull. of the Inst. of Math. Ac. Sinica. 1976. **4**, pp. 177-182.

[27] Cieslik D. *The Steiner Ratio.* Kluwer Academic Publishers. Boston, London Dordrecht. 2001.

[28] Gao B., Du D. Z., Graham R. L. *A tight lower bound for the Steiner ratio in Minkowski planes.* Discrete Mathematics. 1995. **142**, pp. 49-63.

[29] Cieslik D. *The Steiner ratio of* $\mathcal{L}_{2k}^d$. Discrete Applied Mathematics. 1999. **95**, pp. 217-221.

[30] Овсянников З. Н. *Отношения Штейнера, Штейнера-Громова и суботношения Штейнера для пространства компактов в евклидовой плоскости с расстоянием Хаусдорфа.* Фундамент. и прикл. мат. 2013. **18**, № 2, сс. 157-165.

[31] Innami N., Kim B. H. *Steiner ratio for hyperbolic surfaces.* Proc. Japan Acad. 2006. **82**, Ser. A.

[32] Gromov M., *Filling Riemannian manifolds.* J. Diff. Geom. 1983. **18**, № 1, pp. 1-147.

[33] Иванов А. О., Тужилин А. А., *Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении.* Матем. сб. 2012. **203**, № 5, сс. 65-118.

[34] Пахомова А. С., *Оценки для суботношения Штейнера и отношения Штейнера-Громова.* Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2014, № 1, сс. 17-25.

[35] Пахомова А. С., *Критерий непрерывности отношений типа Штейнера в пространстве Громова-Хаусдорфа.* Матем. заметки. 2014. **96**, № 1, сс. 126-137.

[36] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. *Курс метрической геометрии.* Москва, Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[37] Ambrosio L., Tilli P. *Topics on analysis in metric spaces.* Oxford, 2004.

[38] Александров А. Д., Залгаллер В. А. *Двумерные многообразия ограниченной кривизны.* Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1962. **63**, 262 с.

[39] Берестовский В. Н. *Введение римановой структуры в некоторых метрических пространствах.* Сиб. мат. ж. 1975. **16**, № 4, сс. 651-662.

[40] Николаев И. Г. *О гладкости метрики пространств с двусторонне ограниченной по А. Д. Александрову кривизной.* Сиб. мат. ж. 1983. **24**, № 2, с. 114-132.

[41] Берестовский В. Н., Николаев И. Г. *Многомерные обобщенные римановы пространства.* Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. 1989. **70**, сс. 190-272.

[42] Завальнюк Е. А. *Отношение Штейнера поверхностей Адамара кривизны не больше* $k < 0$. Фундамент. и прикл. мат. 2013. **18**, № 2, сс. 35-51.

[43] Завальнюк Е. А. *Локальная структура минимальных сетей в пространствах Александрова.* Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2014. **69**, № 5, сс. 54-58.

[44] Завальнюк Е. А., Иванов А. О. *Локальная структура минимальных сетей в пространствах Александрова.* Доклады конференции «Ломоносовские чтения», 22 апреля 2013 г.

[45] Завальнюк Е. А. *Поверхности Адамара и их отношение Штейнера.* Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна — 2014», с. 132-133.

[46] Zavalnyuk E. *Steiner Ratio for Hadamard Surfaces of Curvature at Most* $k < 0$. J. of Math. Sci. 2014. **203**, № 6, pp. 777-788.

[47] Zavalnyuk E. A. *Local structure of minimal networks in A. D. Alexandrov spaces.* Moscow University Mathematics Bulletin. 2014. **69**, № 5, pp. 220-224