

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

**Загрядский Олег Александрович**

ГЕОМЕТРИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ ДЛЯ  
МНОГООБРАЗИЙ И ПОТЕНЦИАЛОВ БЕРТРАНА

01.01.04 - геометрия и топология

Научные руководители:  
академик РАН А. Т. Фоменко  
доцент Е. А. Кудрявцева

Москва - 2015

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>1 Поверхности и метрики Бертрана</b>	<b>10</b>
1.1 Основные определения и примеры . . . . .	10
1.1.1 Базовые определения . . . . .	10
1.1.2 Цилиндр, конус, сфера . . . . .	17
1.2 Обобщенное семейство уравнений . . . . .	20
<b>2 Поверхности Бертрана</b>	<b>29</b>
2.1 Обобщение теоремы Бертрана на поверхности вращения . . . . .	29
2.2 Свойства орбит и эффективного потенциала . . . . .	37
2.3 Геометрия поверхностей Бертрана . . . . .	48
<b>3 Абстрактные многообразия Бертрана и поверхности Бертрана в <math>\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2^3</math></b>	<b>57</b>
3.1 Бертрановские поверхности и натуральные координаты . . . . .	57
3.2 Свойства поверхностей и орбит в $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2^3$ . . . . .	65
<b>4 Гамильтонов подход</b>	<b>72</b>
4.1 Система Бертрана как гамильтонова система . . . . .	72
4.2 Бифуркационные диаграммы. . . . .	84
4.3 Слои Лиувилля и их перестройки. . . . .	94

# Введение

## Актуальность

Диссертация посвящена исследованию геометрических и механических свойств обобщения задачи Бертрана. Задачи небесной механики, связанные с движением светил по небу и в пространстве, занимали центральное место в науке на протяжении многих веков. Самые простые модели возникли ещё в античности во времена Аристотеля и с течением времени всё более и более усложнялись. Развитие новых методов математики влекло за собой качественные скачки в исследовании задач небесной механики, позволяя лучше понимать суть происходящих процессов, приводящих к наблюдаемым явлениям. Но это понимание всегда приносило ещё больше вопросов, ставило сложные проблемы перед исследователями, для решения которых требовалось привлекать всё более новые математические инструменты. Немало сложностей сюда привносят так называемые обратные задачи механики, которые всегда были труднее прямых. Можно сказать, что в исследовании движения по небу частая их встречаемость естественна.

Одной из таких задач было восстановление закона притяжения между небесными телами по форме траекторий, которые описывают планеты при своём движении. Открытие закона всемирного тяготения в XVIII веке позволило понять почему планеты, астероиды и кометы движутся по коническим сечениям. Но могли быть и другие законы притяжения, приводящие к коническим сечениям. Вопрос нахождения всех таких законов остался открытым, на это указал сам сэр И. Ньютон в своих началах натуральной философии [22]. Таким образом зная, что все планеты движутся по эллипсам, мы не можем с уверенностью утверждать, что сила притяжения между телами обратно пропорциональна квадрату расстояния  $F \sim \frac{1}{r^2}$ . Конечно, выйдя за рамки математики, можно экспериментальным путём проверить правильность четвёртого закона Ньютона, но несмотря на это задача о восстановлении закона тяготения по форме траекторий носила принципиальный фундаментальный характер и ждала своего решения.

Первые успехи были сделаны только в 1870х годах. Ж. Бертран сформулировал и решил в 1873 г. следующую задачу (известную также как теорема Бертрана): *Найти силу притяжения, которая действует между Солнцем и планетами, зависит только от расстояния до Солнца и заставляет двигаться планеты по замкнутым траекториям, если только скорость не очень велика.*

В формулировке ничего не оговаривалось о вырожденных случаях (например, когда планета падает на Солнце по прямой), более того решалась плоская задача, а не пространственная. Но если заметить, что сохраняется вектор момента импульса, то легко показать, что движение в центральном поле сил всегда будет плоским.

Другой вариант задачи выглядел так: *найти закон сил, действующий на точку и заставляющий её описывать конические сечения каковы бы не были начальные условия.* Естественно, предполагается, что закон не зависит от времени, а зависит только от положения точки в пространстве.

В таком варианте формулировки (Бертран) требование к орбитам более сильные, а именно они должны быть не просто замкнутыми, а являться коническими сечениями; но зато условие, наложенное на закон силы, слабее, т.к. ищется сила, зависящая от положения тел в пространстве, а не строго от расстояния. Сразу решить в такой формулировке не удалось: для решения второй задачи Дарбу и Альфен [7] усилили требование к закону притяжения – он должен быть как раз центральным. Со временем удалось решить задачу и без дополнительного требования центральности (Депейру) [9].

Математики продолжали искать различные условия, по которым можно восстановить закон взаимодействия. Одно из них, а именно алгебраичность траекторий, нашёл Кёнигс и его формулировка выглядела так [37]: *Зная, что сила, вызывающая движение планеты вокруг Солнца, зависит только от расстояния и такова, что она заставляет свою точку приложения описывать алгебраическую кривую, каковы бы ни были начальные условия (причем существуют ограниченные неособые некруговые орбиты) найти закон этой силы.*

Последний вариант сводится к первому, если заметить, что ограниченная кривая должна быть либо замкнутой, либо иметь точки сгущения. Второе условие невозможно в виду алгебраичности кривой, следовательно кривая будет замкнута, а это уже условие Бертрانا.

Ответ ко всем трём вариантам задачи оказался на удивление одинаков: таким условиям удовлетворяют только два закона притяжения – закон тяготения Ньютона  $F_1 \sim \frac{1}{r^2}$  и закон Гука  $F_2(r) \sim r$ . Важно отметить, что силы искались потенциальные и аналитические. Соответствующие потенциалы выглядят так  $V_1 \sim \frac{1}{r}$ ,  $V_2 \sim r^2$ .

**Замечание 0.0.1.** Как утверждает первый закон Кеплера, в случае закона Ньютона планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. В случае закона Гука аналог первого закона Кеплера выглядит так: планета движется по эллипсу, в центре которого находится Солнце. Ещё одним отличием закона Гука от закона Ньютона состоит в том, что у него нет неограниченных орбит, таких как парабола или гипербола.

Дальнейшие исследования пошли по пути усложнения структуры пространства. Сперва были рассмотрены пространства постоянной гауссовой кривизны. Пространство положительной постоянной кривизны – сфера, отрицательной – плоскость Лобачевского.

Рассмотрим сферу с координатами  $(r, \varphi)$ , где  $r$  – широта,  $\varphi$  – долгота, и римановой метрикой  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 r \end{pmatrix}$ . На сфере рассматривается только центральный (естественно, аналитический) потенциал  $V$ , т.е. зависящий только от  $r$  (и не зависящий от  $\varphi$ ). Под действием такого потенциала по поверхности движется частица. Её движение описывают уравнения Эйлера-Лагранжа для лагранжиана  $L = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\sin^2 r \dot{\varphi}^2 - V(r)$ . Задача Бертрана обобщается так: какие могут быть потенциалы  $V(r)$  на сфере, под действием которых частица описывала бы замкнутую траекторию. Задача сформулирована не строго, т.к. дополнительно предполагается ещё несколько условий, в т.ч. рассматривается не вся сфера, а только её половина без экватора.

Ответ очень похож на плоский случай. Введём вместо  $r$  более удобную координату  $\theta = \operatorname{ctg} r$ . Тогда на сфере существуют только два потенциала, приводящих к замкнутым траекториям: аналог закона всемирного тяготения  $V_1 = A\theta + B$  и аналог пружинного взаимодействия Гука  $V_2 = A\theta^{-2} + B$ , где  $A, B$  – некоторые константы с определенными знаками. Как и на плоскости траектории движения будут коническими сечениями (пересечение сферы с конусом второго порядка, у которых совпадают центры), более того в первом случае центром притяжения будет фокус, а во втором центр (подробнее см. [37]).

На сферу также обобщается второй закон Кеплера с некоторой модификацией, а также третий закон Кеплера [15], [37] (см. также утверждения 11–13 в §3.2.).

**Замечание 0.0.2.** Все эти результаты (задача Бертрана и законы Кеплера) переносятся со сферы  $S^2$  на плоскость Лобачевского  $L^2$ , при этом все тригонометрические функции нужно заменить на соответствующие гиперболические.

Первое решение было дано Дарбу [8] в 1877 году, оно было небогато подробностями. Далее задача неоднократно переоткрывалась. В 1902, 1903 Либман получил результат для  $S^2$  и  $L^2$  и исследовал форму траекторий [17, 18]. В 1979 г. задача была решена в  $S^n$  П. Хиггсом [13], а в 1980 в  $S^3$  Славяновским [28]. В 1982 г. получено обобщение на  $S^n$  и  $L^n$  Икедой и Катаямой [14], а в 1992-1994 гг Козловым и Хариним получены обобщения на  $S^2$  и  $L^2$  с исследованием всех законов Кеплера [37, 38].

Следующим усложнением является переход от поверхностей постоянной гауссовой кривизны к поверхностям вращения. Рассмотрим поверхность вращения  $S \approx (a, b) \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  с координатами  $(u, \varphi \bmod 2\pi)$ , где  $u \in (a, b)$  и метрикой вращения

$$G = \begin{pmatrix} a_{11}^2(u) & 0 \\ 0 & a_{22}^2(u) \end{pmatrix} \quad (0.0.1)$$

Пусть на этой поверхности задан потенциал  $V(u)$ , который зависит только от  $u$ . Под действием такого потенциала по поверхности происходит движение частицы согласно уравнениям Эйлера-Лагранжа для лагранжиана  $L = \frac{1}{2}a_{11}^2(u)\dot{u}^2 + \frac{1}{2}a_{22}^2(u)\dot{\varphi}^2 - V(u)$ . Задача Бертрана обобщается следующим образом: каким может быть потенциал  $V(u)$ , чтобы

любая ограниченная орбита была замкнута (и существовала хотя бы одна такая некруговая). Потенциалы с таким свойством назовём бертрановскими.

**Замечание 0.0.3.** В задаче неявным образом предполагается ещё ряд технических условий, в т.ч. положительность функций  $a_{11}(u)$ ,  $a_{22}(u)$ , аналитичность (в работах некоторых авторов) всех фигурирующих в условии функций, отсутствие экваторов, т.е.  $a'_{22}(u) \neq 0 \forall u \in (a, b)$  (см. подробнее [56]). Отсутствие экваторов является важным условием; в случае же их наличия все данные различными математиками доказательства не работают в окрестностях экваторов. Более того существуют потенциалы, тождественно равные константе, которые задают геодезические на поверхности [5], причём таких поверхностей вращения, называемых поверхностями Таннери (все геодезические которых замкнуты) существенно больше чем бертрановских. Успешное решение проблемы возможного наличия экваторов, при условии замкнутости всех неособых орбит, с помощью принципа Мопертюи и классификации [5] поверхностей Таннери предложено в статье [39].

Первое решение для поверхностей вращения удалось получить Дарбу в 1877г. [8], правда он не представил полного описания с явным видом метрик всех таких поверхностей. Из его утверждений следует следующее: *потенциал  $V$  является искомым тогда и только тогда, когда в координатах  $(V, \varphi)$  метрика поверхности  $S$  имеет вид*

$$ds^2 = \frac{A dV^2}{\mu^2(AV^2 - BV + C)^2} + \frac{d\varphi^2}{AV^2 - BV + C}$$

или

$$ds^2 = \frac{A dV^2}{\mu^2(-V - K)^3(A/(-V - K) - BV + C)^2} + \frac{d\varphi^2}{A/(-V - K) - BV + C},$$

где  $A, B, C, K$  – действительные константы,  $\mu$  – рациональная положительная. Константы не могут быть произвольными, они должны удовлетворять двум условиям (см. [56]).

В 1992 Перлик обобщил теорему Бертрана для ОТО на поверхность с метрикой пространства-времени [23]. Исследование с учётом ОТО продолжили испанцы в 2008-2010 гг. [1, 2, 3].

В 2007 Сантопрете [24] получил формулировку теоремы Бертрана для аналитической поверхности вращения  $S$  в  $\mathbb{R}^3$  в “натуральных” координатах  $(v, \varphi)$ , т.е. в таких, в которых метрика на  $S$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2(v) \end{pmatrix}. \quad (0.0.2)$$

Первая часть его теоремы обобщает результат Бертрана на поверхности постоянной кривизны (без экваторов, вложенные в  $\mathbb{R}^3$ ), вторая часть утверждает, что на всех остальных поверхностях вращения бертрановского потенциала может быть не более одного, указано необходимое условие для этого.

**Теорема 1.** (Сантопрете М.) Пусть дана аналитическая поверхность вращения  $S$  с координатами  $(v, \varphi)$  и метрикой (0.0.2). Тогда

- На  $S$  существует ровно 2 бертрановских потенциала тогда и только тогда, когда  $f(v)$  удовлетворяет  $f''f - f'^2 \equiv -\beta^2$ , где  $\beta > 0$  – рациональная константа.
- На остальных  $S$  существует не более одного бертрановского потенциала, притом для его существования необходимо, чтобы  $f$  для некоторой рациональной  $\beta > 0$  удовлетворяла  $\beta^4 - 5(-f''f + f'^2)\beta^2 - 5ff''f'^2 + 4f'''f^2 - 3f'''f'f^2 + 4f'^4 = 0$ .

**Замечание 0.0.4.** В оригинальной статье неявно предполагалось отсутствие у поверхности экваторов, также под бертрановским понимался не замыкающий, а сильно замыкающий потенциал (см. далее), кроме того был установлен явный вид потенциалов в некоторых (бертрановских, см. зам. 1.1.2) координатах. Условие на метрику  $\beta^4 - 5(-f''f + f'^2)\beta^2 - 5ff''f'^2 + 4f'''f^2 - 3f'''f'f^2 + 4f'^4 = 0$  может быть представлено в другом виде (см. подробнее теорему 9).

Эта теорема показывает, что на поверхностях вращения существуют серьёзные отличия от евклидовой плоскости, сферы и плоскости Лобачевского, т.к. здесь найдутся поверхности только с одним бертрановским потенциалом (аналог потенциала Гука).

К данной динамической системе движения по двумерной поверхности вращения под действием центрального потенциала применим также гамильтонов подход. Система имеет две степени свободы и два первых независимых коммутирующих интеграла энергии и кинетического момента. Похожие системы активно изучаются в последнее время топологическими методами, развитыми в работах [32], [47]-[41], [20]. Среди подобных динамических систем бертрановская представляет особый интерес, т.к. она не является вполне интегрируемой по Лиувиллю, однако каждый её регулярный слой Лиувилля представляет собой либо тор, либо цилиндр, либо пару цилиндров, ее изоэнергетические поверхности не являются компактными, все её торы Лиувилля резонансны. Полученное в работе [30] обобщение теоремы Лиувилля для систем с одним неполным фазовым потоком позволяет уверенно применять разработанные методы описания вполне интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем к системе Бертрانا.

### Цель диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Обобщение теоремы Бертрана на абстрактные многообразия вращения с псевдоримановой метрикой. Проведение классификации поверхностей Бертрана.
2. Анализ реализуемости псевдоримановых поверхностей Бертрана, обобщение критерия Сантопрете и первого закона Кеплера на них.
3. Описание слоения Лиувилля бертрановских систем с псевдоримановой метрикой, построение бифуркационных диаграмм.

## Методы исследования

В диссертации используются методы дифференциальной геометрии, топологии и теоретической механики. При исследовании топологии слоения Лиувилля бертрановской системы используются методы теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.

## Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и заключаются в следующем:

1. Найдены все  $\rho$ -замыкающие функции обобщенного семейства дифференциальных уравнений Бертрана.
2. Обобщена теорема Бертрана на абстрактные поверхности вращения без экваторов, с псевдоримановой метрикой. Проведена классификация всех поверхностей Бертрана.
3. Установлен факт реализуемости поверхностей Бертрана с псевдоримановой метрикой в  $\mathbb{R}_2^3$ , обобщен критерий Сантопрете и первый закон Кеплера.
4. Для систем Бертрана с псевдоримановой метрикой построены бифуркационные диаграммы отображения момента, описаны перестройки слоев Лиувилля, связанные как с особыми точками отображения момента, так и с регулярными.

## Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях:

- международная конференция “Воронежская зимняя математическая школа им. С.Г. Крейна.” (Воронеж, 25-30 января 2012 г.);
- XX международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов” (Москва, 8–13 апреля 2013 г.);
- XXI международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов” (Москва, 7–11 апреля 2014 г.).

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на заседаниях следующих научных семинаров:

- на семинаре “Современные геометрические методы” под руководством акад. А.Т. Фоменко, проф. А.В.Болсинова, проф. А.С.Мищенко, проф. А.А.Ошемкова, доц. Е.А.Кудрявцевой, доц. И.М.Никонова. (неоднократно: 2008-2014 гг.);
- на семинаре “Геометрия в целом” под руководством проф. И.Х. Сабитова в 2012 г;



- на семинаре «Oberseminar Differentialgeometrie» под руководством проф. Г. Книпера (совместный семинар Рурского университета в Бохуме и Технического университета в Дортмунде, Германия, 2010 г.).

## Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 8 работах [56-63], список которых приведен в конце диссертации.

## Структура и объём

Диссертация состоит из введения и четырех глав. Текст диссертации изложен на 107 страницах и содержит 1 таблицу и 27 рисунков. Список литературы содержит 63 наименования.

Во **введении** подробно излагается история рассматриваемых вопросов; обосновывается актуальность результатов и их научная новизна; описывается структура диссертации и основные результаты.

В **первой главе** приводятся базовые определения и рассматриваются классические примеры систем Бертрана на плоскости и полусфере; наряду с классическими примерами разбирается пример с произвольным центральным гладким полем на круговом цилиндре, для которого показывается незамыкаемость. Также здесь формулируется опорный для дальнейших глав результат, касающийся свойств периодичности решений обобщенного семейства дифференциальных уравнений Бертрана.

Во **второй главе** формулируется обобщение классической теоремы Бертрана на поверхности вращения с псевдоримановой метрикой, в которой указываются все индефинитные метрики без экваторов, допускающие существование на поверхности центрального замыкающего потенциала, а также приводятся сами потенциалы. Для доказательства обобщения устанавливается ряд взаимосвязей между орбитами на поверхности вращения и аналитическими свойствами эффективного потенциала. Приводится полная классификация поверхностей Бертрана с точностью до изометрии и преобразования подобия. В конце главы устанавливается явный вид зависимости периода  $T$  замкнутых траекторий от первого интеграла энергии для некоторых многообразий Бертрана. Для поверхностей Бертрана постоянной гауссовой кривизны аналогичный результат был получен В.В. Козловым [37].

**Третья глава** посвящена во многом свойствам поверхностей Бертрана, которые можно определенным образом реализовать как поверхности вращения в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}_2^3$ . Доказано, что все поверхности Бертрана с псевдоримановой метрикой без экваторов реализуются в  $\mathbb{R}_2^3$ . Для всех таких поверхностей обобщен известный критерий Сантопрете. Также для некоторых из них сформулирован аналог первого закона Кеплера.

В **четвертой главе** системы Бертрана рассматриваются как гамильтоновы системы и изучается их слоение Лиувилля первых интегралов энергии и кинетического момента. Для каждой поверхности вращения с псевдоримановой метрикой и замыкающим потенциалом на ней построены бифуркационные диаграммы. На образе фазового простран-

ства при отображении момента выделены зоны, отвечающие различным видам слоев Лиувилля, которые соответствуют различным типам движений, для каждого слоя установлено, полны ли фазовые потоки  $\text{sgrad } E$ ,  $\text{sgrad } K$ ; описаны возникающие перестройки слоев Лиувилля при переходе из одной зоны в другую.

### **Благодарности**

Автор выражает глубокую благодарность А.Т. Фоменко и Е.А. Кудрявцевой за постановку задач и постоянную помощь на всех этапах работы. Автор благодарен И.Х. Сабитову, А.Д. Малых и А.В. Щепетиллову за полезные обсуждения. Автор благодарен А.С. Мищенко, А.А. Ошемкову, Д.А. Федосееву за участие в дискуссиях и полезные советы.

# Глава 1

## Поверхности и метрики Бертрана

### 1.1 Основные определения и примеры

#### 1.1.1 Базовые определения

Диссертация посвящена исследованию двух механических систем: движение по поверхности вращения с римановой и псевдоримановой метриками соответственно. Опишем подробнее вышеупомянутые системы с точки зрения лагранжева формализма.

Будем рассматривать абстрактные двумерные многообразия вращения  $S \approx (a, b) \times S^1$  с координатами  $(u, \varphi \bmod 2\pi)$  и римановой метрикой:

$$ds^2 = a_{11}^2(u)du^2 + a_{22}^2(u)d\varphi^2. \quad (1.1.1)$$

Функции  $a_{11}(u), a_{22}(u)$  гладкие  $C^5(a, b)$  и строго положительные, где  $a$  и  $b$  пробегает любые значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ , т.е. удовлетворяют  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ . В случае, если поверхность  $S$  можно вложить в  $\mathbb{R}^3$  как поверхность вращения с осью вращения, совпадающей с  $OZ$ ,  $a_{22}$  будет иметь смысл расстояния от точки на поверхности до оси вращения.

Наряду с  $S$  будем также рассматривать многообразия  $S' \approx (a, b) \times S^1$  с координатами  $(u, \varphi \bmod 2\pi)$  и псевдоримановой метрикой:

$$ds^2 = a_{11}^2(u)du^2 - a_{22}^2(u)d\varphi^2, \quad (1.1.2)$$

где функции  $a_{11}(u), a_{22}(u)$  также гладкие  $C^5(a, b)$  и строго положительные,  $a$  и  $b$  также удовлетворяют  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ .

В дальнейшем некоторые утверждения будут сразу формулироваться как для риманова случая так и для псевдориманова, поэтому для единообразия формул будем использовать показатель  $\hat{\varepsilon}$ .

**Определение 1.1.1.** Константа  $\hat{\varepsilon}$  равна 1 для поверхности  $S$  с метрикой (1.1.1), и равна  $-1$  для поверхности  $S'$  с индефинитной метрикой (1.1.2).

У поверхностей  $S$  и  $S'$  координатные линии  $\{u = \text{const}\}$  являются параллелями, а линии  $\{\varphi = \text{const}\}$  меридианами. Границами  $S$  (соответственно  $S'$ ) являются две граничные параллели  $\{u = a\}$  и  $\{u = b\}$ .

**Определение 1.1.2.** Назовём параллель  $\{u_0\} \times S^1$  *экватором*, если  $a'_{22}(u_0) = 0$ .

Назовём граничную параллель  $\{u = u_0\}$  *экватором*, если  $a'_{22}(u)/a_{11}(u) \rightarrow 0$ ,  $a_{22}(u) \rightarrow \text{const} \neq 0$  при  $u \rightarrow u_0$ ; *абсолютом*, если  $a_{22}(u) \rightarrow \infty$  при  $u \rightarrow u_0$ ; *полюсом*, если  $a_{22}(u) \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow u_0$ .

Полюс назовём *коническим*, если  $a'^2_{22}(u)/a^2_{11}(u) \rightarrow 1/c$  при  $u \rightarrow u_0$ , где  $c > 1$  для риманова случая ( $0 < c < 1$  для псевдориманова случая) – вещественная константа; соответственно *устранимым*, если  $0 \leq \hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}a'_{22}(u)^2/a^2_{11}(u) \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow u_0$ .

Требование к полюсу быть коническим или устранимым автоматически означает, что поверхность в окрестности полюса реализуется как поверхность вращения в  $\mathbb{R}^3$  (соответственно в  $\mathbb{R}^3_2$ ). Рассмотрим, например, круговой конус  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  (метрика индуцируется с объемлющего пространства). Тогда граница, соответствующая  $\{z = \infty\}$  является абсолютом, а граница  $\{z = 0\}$  является коническим полюсом. Другой пример доставляет проколота полусфера  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, -1 < z < 0\}$  в  $\mathbb{R}^3$ . Для полусферы граница  $\{z = -1\}$  является устранимым полюсом, а граница  $z = 0$  является экватором.

Пусть на поверхности  $S$  (соответственно  $S'$ ) задан также центральный гладкий потенциал, т.е. функция  $V(u) \in C^5(a, b)$ . Под действием  $V$  по поверхности движется частица. Закон движения определяется уравнениями Эйлера-Лагранжа  $\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  для лагранжиана  $L = \frac{1}{2}a^2_{11}(u)\dot{u}^2 + \hat{\varepsilon}\frac{1}{2}a^2_{22}(u)\dot{\varphi}^2 - V(u)$ . Выпишем эти уравнения движения:

$$a^2_{11}\ddot{u} + a_{11}a'_{11}\dot{u}^2 - \hat{\varepsilon}a_{22}a'_{22}\dot{\varphi}^2 + V' = 0, \quad (1.1.3)$$

$$\frac{d}{dt}(\hat{\varepsilon}a^2_{22}\dot{\varphi}) = 0. \quad (1.1.4)$$

Данные уравнения имеют два первых интеграла энергии и кинетического момента.

$$E = \frac{1}{2}a^2_{11}(u)\dot{u}^2 + \hat{\varepsilon}\frac{1}{2}a^2_{22}(u)\dot{\varphi}^2 + V(u), \quad (1.1.5)$$

$$K = \hat{\varepsilon}a^2_{22}(u)\dot{\varphi}. \quad (1.1.6)$$

Последнее легко проверить прямым дифференцированием по времени.

**Определение 1.1.3.** Назовём *траекторией* решение  $\vec{r}(t) = (u(t), \varphi(t))$  уравнений движения (1.1.3), (1.1.4), другими словами, зависимость координат точки от времени. Образ отображения  $\vec{r}(t)$  будем называть *орбитой*. Аналогично, отображение  $(u(t), \varphi(t), a^2_{11}(u(t))\dot{u}(t), \hat{\varepsilon}a^2_{22}(u(t))\dot{\varphi}(t))$  – *фазовая траектория*, а его образ в кокасательном расслоении  $T^*S$  – *фазовая орбита*.

Величины  $p_u := \partial L / \partial \dot{u} = a_{11}^2(u) \dot{u}$ ,  $p_\varphi := \partial L / \partial \dot{\varphi} = \hat{\varepsilon} a_{22}^2(u) \dot{\varphi}$  являются импульсами. Неособую орбиту естественно задавать с помощью зависимости координаты  $u$  от  $\varphi$ , т.е. можно считать орбиту функцией  $u(\varphi)$ .

Из уравнений траектории можно легко получить уравнение орбиты.

**Утверждение 1.** *Неособые орбиты  $\{u = u(\varphi)\}$  при движении по  $S$  под действием  $V$  задаются однопараметрическим (параметр  $K$ ) семейством уравнений*

$$u''_{\varphi\varphi} + u_\varphi'^2 \left( \frac{a'_{11}(u)}{a_{11}(u)} - \frac{2a'_{22}(u)}{a_{22}(u)} \right) - \hat{\varepsilon} \frac{a'_{22}(u) a_{22}(u)}{a_{11}^2(u)} = - \frac{V'(u)}{K^2} \frac{a_{22}^4(u)}{a_{11}^2(u)}. \quad (1.1.7)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Исключим время из уравнения (1.1.3) с помощью (1.1.4) и придем к уравнениям на функцию  $u = u(\varphi)$ , задающую орбиты.

Согласно (1.1.6)  $\dot{\varphi} = \hat{\varepsilon} \frac{K}{a_{22}^2(u)}$ . Далее  $\dot{u} = u'_\varphi \dot{\varphi} = \hat{\varepsilon} \frac{u'_\varphi K}{a_{22}^2(u)}$ . Вторая производная

$$\ddot{u} = \frac{d}{dt}(\dot{u}) = \frac{d}{d\varphi}(\dot{u}) \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{d\varphi} \left( \hat{\varepsilon} \frac{u'_\varphi K}{a_{22}^2(u)} \right) \dot{\varphi} = \left( \frac{u''_{\varphi\varphi} K}{a_{22}^2(u)} - \frac{2u_\varphi'^2 K a'_{22}(u)}{a_{22}^3(u)} \right) \frac{K}{a_{22}^2(u)}.$$

Осталось подставить полученные выражения для  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{u}$ ,  $\ddot{u}$  в уравнение (1.1.3).  $\square$

**Замечание 1.1.1.** Семейство уравнений (1.1.7) хорошо тем, что каждое уравнение имеет своим интегралом энергию движения:

$$E = \frac{a_{11}^2(u)}{2a_{22}^4(u)} u_\varphi'^2 K^2 + \hat{\varepsilon} \frac{K^2}{2a_{22}^2(u)} + V(u). \quad (1.1.8)$$

Проверяется непосредственно дифференцированием по углу  $\varphi$  (выражение (1.1.8) также получается из (1.1.5) заменой  $t$  на  $\varphi$ ). При работе с орбитами бывает удобнее пользоваться интегралом  $E_\varphi := E/K^2$ . В дальнейшем будет показано, что для замыкающего потенциала на поверхности без экваторов по форме ограниченной орбиты (по функции  $u(\varphi)$ ) однозначно восстанавливаются энергия  $E$  и кинетический момент  $K$  точки, двигающейся по этой орбите; в противоположность этому, по форме ограниченной геодезической значения  $E$  и  $K$  однозначно восстановить нельзя, восстанавливается лишь соотношение  $\frac{E}{K^2}$ , т.е.  $E_\varphi$ .

Этот эффект можно хорошо проиллюстрировать на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . В случае отсутствия потенциала движение происходит по геодезическим, т.е. по прямым, при том по прямой можно двигаться с любой скоростью, форма орбиты так и останется прямой. Если же есть центральный замыкающий потенциал, например Земля притягивает ИСЗ по закону всемирного тяготения, тогда появляется разница: при движении с первой космической скоростью форма орбиты будет окружностью, а при движении со второй – параболой.

**Замечание 1.1.2.** Есть координаты, в которых формулы (1.1.7), (1.1.8) заметно упрощаются. Они определяются из условия: коэффициент при  $u'^2$  в уравнении (1.1.7) равен 0, т.е.  $\frac{a'_{11}(u)}{a_{11}(u)} - \frac{2a'_{22}(u)}{a_{22}(u)} = 0$ . Интегрируя находим, что в этих координатах  $(\theta, \varphi)$  выполняется

$a_{11}^2(\theta) = Ca_{22}^4(\theta)$ , где  $C$  – константа. Существуют они потому, что их можно предъявить явной формулой. При переходе от  $(u, \varphi)$  к  $(\theta, \varphi)$  компоненты метрики (соответственно псевдоримановой метрики) преобразуются так:  $a_{11}^2(u)u_\theta'^2 = \bar{a}_{11}^2(\theta)$ ,  $a_{22}^2(u) = \bar{a}_{22}^2(\theta)$ . Написав соотношение  $\bar{a}_{11}^2(\theta) = C\bar{a}_{22}^4(\theta)$  получим  $a_{11}^2(u)u_\theta'^2 = Ca_{22}^4(u)$ . Так  $\theta'_u = \frac{a_{11}(u)}{\pm\sqrt{Ca_{22}^2(u)}}$ , интегрируем  $\theta = \int \frac{a_{11}(u)du}{\pm\sqrt{Ca_{22}^2(u)}}$ . Замена  $u \rightarrow \theta(u)$  монотонная, т.к.  $\theta'_u \neq 0$ .

В координатах  $(\theta, \varphi)$  (назовем их бертрановскими) при  $C = 1$  уравнения (1.1.7) и (1.1.8) выглядят так:

$$\theta''_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{K^2} \left( V(\theta) + \hat{\varepsilon} \frac{K^2}{2a_{22}^2(\theta)} \right)'_{\theta} \quad (1.1.9)$$

$$E = \frac{\theta_\varphi'^2 K^2}{2} + \left( V(\theta) + \hat{\varepsilon} \frac{K^2}{2a_{22}^2(\theta)} \right). \quad (1.1.10)$$

В скобках стоит эффективный потенциал  $W = V + \hat{\varepsilon} \frac{K^2}{2a_{22}^2}$ .

Бертрановские координаты определены неоднозначно, можно изменять константу  $C$ , более того можно менять константу интегрирования.

Стоит отметить, что несмотря на внешнюю схожесть формул, отвечающих уравнениям движения, уравнениям орбит, первым интегралам, эффективному потенциалу в римановом и псевдоримановом случаях имеется много фундаментальных отличий. Поверхности, допускающие существование замыкающих потенциалов, имеют много отличий, причем в псевдоримановом случае поверхностей будет меньше (см. рис. 2.1, 2.2), также в псевдоримановом случае поверхности Бертрана всегда реализуются в  $\mathbb{R}_2^3$  (см. теорему 8), в отличие от риманова. Серьёзные отличия заключены и в топологии фазового пространства.

**Замечание 1.1.3.** В утверждении 1, замечаниях 1.1.1 и 1.1.2 и всюду далее в настоящей работе под орбитой  $\{\theta = \theta(\varphi)\}$  понимается “локально заданная” орбита, т.е. заданная в виде “локального графика”  $\{\theta = \theta(\varphi) \mid \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\} \subset S = (a, b) \times S^1$ , где  $-\infty \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq +\infty$  и  $\theta(\varphi)$  – (однозначная) функция на интервале  $(\varphi_1, \varphi_2) \subset \mathbb{R}$ . Отметим, что если либо  $\varphi_1 = -\infty$ ,  $\varphi_2 = +\infty$  и функция  $\theta(\varphi)$  не является  $2\pi$ -периодичной, либо  $\varphi_2 - \varphi_1 > 2\pi$ , то орбита пересекает некоторый меридиан более чем в одной точке, поэтому она не является графиком никакой однозначной функции  $\theta(\varphi)$ . В противном случае, т.е. если либо  $\varphi_1 = -\infty$ ,  $\varphi_2 = +\infty$  и функция  $\theta(\varphi)$  является  $2\pi$ -периодичной, либо  $\varphi_2 - \varphi_1 \leq 2\pi$ , то орбита является графиком однозначной функции  $\theta(\varphi)$ , заданной на всей окружности  $S^1$  или на некотором ее интервале.

Далее определим виды траекторий и орбит, с которыми будем работать.

**Определение 1.1.4.** *Круговая орбита* – орбита, которая совпадает с какой-нибудь параллелью  $\{u_0\} \times S^1$ . Соответствующую ей траекторию тоже назовём *круговой*.

Орбита (соответствующая ей траектория) *замкнута*, если функция  $\vec{r}(t)$  периодична.

Орбита (траектория) *ограниченная*, если она лежит в некотором компакте  $[u_1, u_2] \times S^1 \subset (a, b) \times S^1$ .

Орбита (траектория) *особая*, если она лежит на меридиане, т.е.  $\varphi(t) = \text{const}$ . Для таких орбит и только для них интеграл кинетического момента  $K$  равен нулю.

**Комментарий 1.1.** Заметим, что неограниченность траектории (орбиты) означает, что она выходит на край поверхности. Особенность орбиты означает падение движущегося тела на притягивающий центр, в случае плоскости  $\mathbb{R}^2$  падение происходит по радиальной прямой.

**Замечание 1.1.4.** Параллель  $\{u_0\} \times S^1$  является круговой орбитой с энергией  $E_0$  и кинетическим моментом  $K_0$  тогда и только тогда, когда производная эффективного потенциала  $W(u) = V(u) + \hat{\varepsilon} \frac{K_0^2}{2a_{22}(u)}$  равна нулю в точке  $u_0$  и  $W(u_0) = E_0$  (см. предложение 2.1).

**Определение 1.1.5.** Круговая орбита  $u = u_0$  с кинетическим моментом  $K_0$  *сильно устойчива*, если эффективный потенциал  $W(u) = V(u) + \hat{\varepsilon} \frac{K_0^2}{2a_{22}(u)}$  имеет в точке  $u_0$  невырожденный локальный минимум.

Замкнутая орбита с кинетическим моментом  $K_0$  *орбитально устойчива*, если отвечающая ей фазовая траектория орбитально устойчива для ограничения системы на множество уровня кинетического момента, содержащего эту траекторию  $\{K = K_0\}$ .

Очень важным моментом в задаче Бертрана является требование к потенциалу – какой именно тип потенциала нам нужен, т.е. в каком классе функций ищется  $V(u)$ .

**Определение 1.1.6.** Центральный (т.е. зависящий только от координаты  $u$ ) потенциал  $V$  назовём *замыкающим*, если

( $\exists$ ) существует неособая ограниченная некруговая орбита  $\gamma$  в  $S$ ;

( $\forall$ ) всякая неособая ограниченная орбита в  $S$  замкнута.

**Замечание 1.1.5.** Заметим, что вместо условия замкнутости орбит при условии, что начальная скорость меньше некоторого предела, сформулировано условие замкнутости ограниченных орбит. Также к условию замкнутости орбит добавилось ещё существование одной замкнутой некруговой. Это условие существенно. Приведём пример потенциала, для которого выполнено (правда только формально) второе условие, однако у него вообще нет ограниченных орбит. Для этого рассмотрим обыкновенный цилиндр  $x^2 + y^2 = 1$  в  $\mathbb{R}^3$  с потенциалом  $V(x, y, z) = z$ . Легко видеть, что в этом случае не будет ограниченных, а значит и замкнутых орбит.

Обобщая теорему Бертрана на поверхности вращения разные авторы по-разному формулировали задачу, в частности искали потенциал в разных функциональных классах. Теоремы 4, 5 и 6 сформулированы и доказаны в работах [56], [59] для замыкающего потенциала. Однако во многих работах использовались другие типы потенциалов. Например в работах Бертрана, Дарбу и Сантопрете неявно предполагался сильно замыкающий потенциал (см. определение 1.1.10), а у Перлика слабо замыкающий. Можно строить обобщение теоремы Бертрана для других типов потенциалов, но как можно убедиться для поверхностей без экваторов все эти потенциалы суть одно и то же.

Следующие 4 типа потенциалов носят локальный характер, это связано с тем, что в работах, в которых обобщалась теорема Бертрана, некоторое выражение (период движения по орбите) раскладывалось в ряд Тейлора в некоторой окрестности.

**Определение 1.1.7.** Потенциал  $V(u)$  *локально замыкающий*, если

( $\exists$ )<sup>loc</sup> существует сильно устойчивая круговая орбита  $\{u_0\} \times S^1$  в  $S$ ;

( $\forall$ )<sup>loc</sup> для всякой сильно устойчивой круговой орбиты  $\{u_0\} \times S^1$  в  $S$  существует  $\varepsilon > 0$ , такое что всякая неособая ограниченная орбита, целиком лежащая в кольце  $[u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon] \times S^1$  и имеющая уровень кинетического момента в интервале  $(K_0 - \varepsilon, K_0 + \varepsilon)$ , является замкнутой, где  $K_0$  — значение кинетического момента на соответствующей круговой траектории.

Требование существования хотя бы одной сильно устойчивой круговой орбиты выполняет ту же роль, что и требования существования хотя бы одной ограниченной орбиты для замыкающего потенциала (зам. 1.1.5), без него может не существовать сильно устойчивых круговых орбит (да и вообще ограниченных орбит) и формально условие ( $\forall$ )<sup>loc</sup> будет выполнено.

**Определение 1.1.8.** Назовём потенциал  $V(r)$  *полулокально замыкающим*, если выполнены условия ( $\exists$ ), ( $\forall$ )<sup>loc</sup> и следующее условие:

( $\forall$ )<sup>s-loc</sup> любая неособая ограниченная орбита в кольце  $U = [a', b'] \times S^1$  с уровнем кинетического момента  $\hat{K}$  является замкнутой, где  $a' := \inf r|_\gamma$ ,  $b' := \sup r|_\gamma$ ,  $\gamma$  — ограниченная орбита из ( $\exists$ ),  $\hat{K}$  — значение кинетического момента на ней.

При доказательстве теорем 5, 6 в работе [56] рассматривался предельный переход при стремлении некруговых орбит к круговой  $\theta = x$ , поэтому естественно предположить, что можно глобальное требование замкнутости ограниченных орбит заменить на какие-нибудь локальные, что и сделано в определениях 1.1.7, 1.1.8.

**Определение 1.1.9.** Замкнутая орбита  $u(\varphi)$  *орбитально устойчива*, если отвечающая ей фазовая траектория  $(u(t), \varphi(t), p_u(t), p_\varphi(t))$  будет орбитально устойчива, если рассмотреть ограничение системы на множество уровня кинетического момента  $\{(u, \varphi, p_u, p_\varphi) : p_\varphi = \text{const}\}$ , содержащее эту фазовую траекторию.



**Определение 1.1.10.** Потенциал  $V(r)$  будем называть *сильно* (соответственно *слабо*) *замыкающим*, если выполнено  $(\forall)^{\text{loc}}$  (соответственно его аналог для всякой орбитально устойчивой круговой орбиты) и следующее условие: любая окружность  $\{u\} \times S^1$  является сильно устойчивой (соответственно орбитально устойчивой) круговой орбитой.

**Замечание 1.1.6.** Несложно убедиться, что любой замыкающий центральный потенциал  $V(r)$  является полулокально замыкающим, а любой сильно замыкающий — локально и слабо замыкающим.

Поскольку на поверхностях вращения без экваторов все 5 типов потенциалов совпадают [56], то можно ввести следующее определение.

**Определение 1.1.11.** Назовем поверхность вращения  $S$  (или  $S'$ ) без экваторов бертрановской, если на ней существует замыкающий потенциал  $V$ , который назовем бертрановским. А упорядоченную пару  $(S, V)$  назовем бертрановской.

Рассмотрим в качестве примера обычную евклидову плоскость  $S_0$  с выколотым центром, полярными координатами  $(r, \varphi \bmod 2\pi)$  и евклидовой метрикой  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$ . Поверхность  $S_0$  является поверхностью вращения  $(0, \infty) \times S^1$ . Край плоскости, отвечающий выколотому центру является устранимым полюсом, а противоположный край, отвечающий уровню  $r = \infty$  является абсолютном. Пусть на  $S_0$  действует закон всемирного тяготения, т.е. задан потенциал  $V(r) = -\frac{A}{r}$  ( $A > 0$ ). В этом случае уравнение орбит (1.1.7) примет вид (как дифференциальное уравнение на функцию  $r(\varphi)$ )

$$r''_{\varphi\varphi} - \frac{2}{r} r'^2_{\varphi} - r = -\frac{A}{K^2} r^2.$$

Решения этого уравнения выглядят так  $r = \frac{p}{1+e \cos(\varphi+\varphi_0)}$ , где  $p$  — фокальный параметр,  $e$  — эксцентриситет орбиты,  $\varphi_0$  — константа интегрирования (угол поворота орбиты вокруг притягивающего центра). При  $e < 1$  получаются ограниченные орбиты, которые будут эллипсами, при  $e \geq 1$  получаются неограниченные орбиты — параболы и гиперболы. Потенциал  $-\frac{A}{r}$  является замыкающим, т.к. существует хотя бы одна замкнутая некруговая орбита, а также все ограниченные орбиты (а это эллипсы) будут замкнуты. Каждая круговая орбита будет сильно устойчивой.

Бертрановские координаты  $(\theta, \varphi)$  связаны с полярными  $(r, \varphi)$  соотношением  $\theta = \frac{1}{r}$ . В бертрановских координатах упрощается не только вид уравнения (1.1.7), которое в них принимает вид  $\theta'' + \theta = \frac{A}{K^2}$ , но и явный вид орбит (функции  $\theta(\varphi)$ ):  $\theta = p^{-1}(1+e \cos(\varphi+\varphi_0))$ .

Другим примером замыкающего потенциала служит закон Гука  $V(r) = Ar^2$  ( $A > 0$ ). В этом случае все неособые орбиты будут эллипсами, а неограниченных неособых орбит не существует.

Исследование поверхностей Бертрана начнём с описания нескольких простых примеров. Среди поверхностей вращения с замыкающими потенциалами наиболее простым

примером, на котором видны все общие свойства бертрановской системы, является обычный круговой конус. Его метрика является плоской евклидовой и он полностью отражает случай плоского движения в центральном поле, про которое известно немало. Также огромное значение для исследования замкнутых траекторий на поверхностях вращения имеет наличие экваторов (параллелей  $u = u_0 : a'_{22}(u_0) = 0$ ). Цилиндр в этом смысле целиком состоит из параллелей-экваторов и является наиболее плохим кандидатом в поверхности Бертрана. Остановимся на этих примерах поподробнее.

### 1.1.2 Цилиндр, конус, сфера

Рассмотрим в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  с декартовыми координатами  $(x, y, z)$  круговой цилиндр  $C_0$ , заданный соотношениями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $a < z < b$ , где  $a, b$  константы из  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ . Положение точки на цилиндре задаётся координатами  $(z, \varphi \bmod 2\pi)$ . Индуцированная с объемлющего пространства метрика на нём примет вид  $ds^2 = dz^2 + d\varphi^2$ . В наших обозначениях (1.1.1)  $a_{11} = a_{22} \equiv 1$ , откуда хорошо видно, что каждая параллель цилиндра является экватором (в смысле определения 1.1.4).

**Утверждение 2.** *На цилиндре  $C_0$  не существует замыкающего потенциала.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть на цилиндре существует замыкающий потенциал  $V(z)$ , под действием которого по цилиндру движется частица. Тогда уравнения движения согласно (1.1.3), (1.1.4) выглядят так:

$$\begin{aligned}\ddot{z} &= -V'(z), \\ \ddot{\varphi} &= 0.\end{aligned}$$

Покажем, что если существует хотя бы одно замкнутое некруговое решение, то также существует ограниченное невырожденное незамкнутое решение, и тем самым приведём утверждение к противоречию.

Вид уравнений показывает, что движение вдоль координат  $z$  и  $\varphi$  происходят независимо друг от друга, поэтому замкнутость орбиты означает некоторую согласованность этих движений; идея состоит в том, что можно движение вдоль параллели чуть-чуть ускорить или замедлить, чтобы те орбиты, которые были замкнуты, разомкнулись бы.

В силу замыкаемости потенциала существует хотя бы одна некруговая замкнутая траектория  $\vec{r}_1(t) = (z_1(t), \varphi_1(t))$ , тогда согласно определению найдётся общий период  $T$  у функций  $z_1(t), \varphi_1(t)$ . Интегрирование второго уравнения даёт  $\varphi = c_1 t + c_2$  (значения, отличающиеся на  $2\pi$ , задают одну и ту же координату). Рассмотрим траекторию  $\vec{r}_2(t) := (z_1(t), \varphi_2(t))$  (см. рис 1.1), где  $\varphi_2(t) = \sqrt{2}c_1 t + c_2$  (ускорим движение вдоль  $\varphi$ ). Периоды у  $z_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  теперь несоизмеримы, поэтому у этих функций нет общего периода, а значит траектория  $\vec{r}_2(t)$  незамкнута (хотя лежит в тех же границах, что и  $\vec{r}_1(t)$ ). Получается у потенциала  $V(z)$  есть ограниченные незамкнутые траектории.  $\square$

Конус является поверхностью без экваторов и на нём в отличие от цилиндра существует два замыкающих потенциала. Рассмотрим абстрактный конус, т.е. поверхность

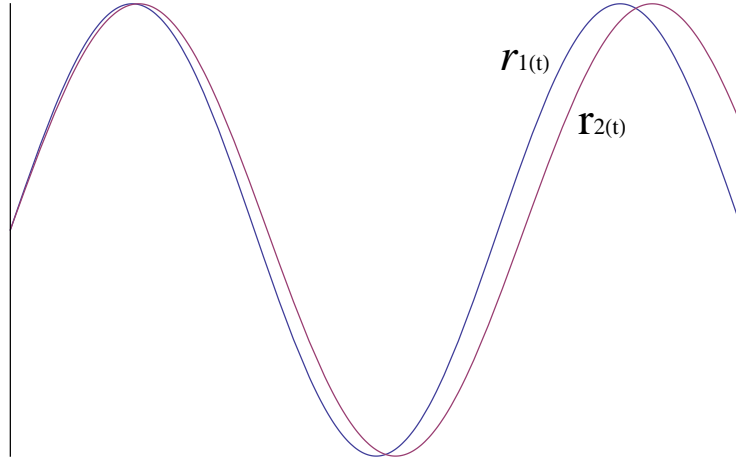


Рис. 1.1: Исходная  $r_1(t)$  и растянутая  $r_2(t)$  орбиты.

$C \approx (0, \infty) \times S^1$  с координатами  $(u, \varphi \bmod 2\pi)$  и метрикой

$$ds^2 = du^2 + \mu^2 u^2 d\varphi^2,$$

где константа  $\mu > 0$  и угол при вершине получается  $2\pi\mu$ .

**Утверждение 3.** *На тех конусах, где константа  $\mu$  – иррациональная, не существует центральных замыкающих потенциалов  $V(u)$ . На тех конусах, где  $\mu \in \mathbb{Q}$ , существует ровно два замыкающих потенциала: аналог ньютоновского  $V_1(u) = Au^{-1} + B$ , где  $A < 0$ , и аналог гуковского  $V_2(u) = Au^2 + B$ , где  $A > 0$ . Орбиты заданные как функция  $u(\varphi)$  имеют один и тот же период  $\Phi_2 = \pi/\mu$  для гуковского и  $\Phi_1 = 2\pi/\mu$  для ньютоновского.*

Утверждение является частным случаем теоремы 4.

**Комментарий 1.2.** Опишем геометрический смысл рациональной константы  $\mu = \frac{p}{q}$ . У орбиты  $u(\varphi)$  константа  $\mu$  определяет количество витков вокруг поверхности, которое должна сделать частица, прежде чем траектория замкнётся. График орбиты  $u(\varphi)$  на плоскости  $(u, \varphi)$  будет представлять из себя синусоиду с периодом  $\Phi_1$  ( $\Phi_2$  для случая гуковского потенциала). График с ростом  $\varphi$  колеблется между максимумом ( $\max u(\varphi)$ ) и минимумом ( $\min u(\varphi)$ ). Это означает, что за  $p$  (для гуковского за  $2p$ ) колебаний значение координаты  $\varphi$  увеличится на  $2q\pi$  и частица в своём движении по конусу  $C$  совершит  $q$  оборотов вокруг поверхности.

Геометрический смысл константы  $\mu$  для поверхности состоит в следующем. Рассмотрим конструкцию: разрежем конус  $C$  по образующей и развернем. Получим некоторый сектор на евклидовой плоскости. Заметим, что угол при вершине (равный  $2\pi\mu$ ) может быть и больше  $2\pi$ , в этом случае конус не вложится в  $\mathbb{R}^3$  как поверхность вращения. Далее рассмотрим поверхность  $\tilde{C}$ , являющуюся одновременно разветвленным накрытием конуса  $C$  и разветвленным накрытием евклидовой плоскости, где количество листов любого из накрытий минимально возможное. Поверхность  $\tilde{C}$  можно построить следующим

образом. Будем накладывать на плоскость сектора, полученные разворотом разрезанного по образующей конуса, каждый следующий поворачивая так, чтобы берег каждого следующего сектора совпал с противоположным берегом предыдущего. Таким образом получим разветвленное накрытие  $\tilde{C} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  над проколотой плоскостью. При этом, если конус был “рационален”, т.е. угол при вершине был соизмерим с  $2\pi$  (иными словами,  $\mu \in \mathbb{Q}$ , обозначим  $\mu = \frac{p}{q}$ ), то через  $q$  шагов построения  $\tilde{C}$  берег очередного сектора совпадет с берегом первого сектора; в этом случае прекратим процесс построения  $\tilde{C}$  и накрытие  $\tilde{C} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  будет  $p$ -листным. В противном случае берега разных секторов никогда не совпадут и накрытие будет бесконечнолистным.

Таким образом, поверхность  $\tilde{C}$  накрывает исходный конус  $q$ -листно, если  $\mu$  рационально и равно  $\frac{p}{q}$ , бесконечнолистно в противном случае. Накрытие строится естественным образом: его листами будут сектора, из которых составлена поверхность  $\tilde{C}$ ; каждый такой сектор — развертка конуса, поэтому можно определить отображение  $\tilde{C} \rightarrow C$ , переводящее в точку с координатами  $(r, \varphi)$  на конусе все точки поверхности  $\tilde{C}$ , имеющие те же координаты на том секторе, которому принадлежат. Наглядно это может быть представлено следующим образом. Возьмем сектора, полученные разворачиванием разрезанного по образующей конуса, и расположим их над разверткой конуса “друг над другом” —  $q$  экземпляров, если  $\mu$  рационально, счетное множество в противном случае; противоположные края лежащих друг над другом секторов считаются склеенными. Точки этих секторов — это точки поверхности  $\tilde{C}$ , отображение  $\tilde{C} \rightarrow C$  задается естественной проекцией.

Случай  $\mu = 1$  соответствует проколотой плоскости.

Сфера имеет всего один экватор и в этом смысле является пограничным случаем между конусом и цилиндром. Рассмотрим сферу  $S^2$  с координатами  $(\nu, \varphi)$ , где  $\nu$  — широта,  $\varphi$  — долгота, и с метрикой  $ds^2 = d\nu^2 + \sin^2 \nu d\varphi^2$ . Пусть на сфере действует потенциал  $V \equiv 0$ . Тогда траектории при движении под действием такого потенциала будут геодезическими — большими кругами. Рассмотрим только те геодезические, которые отличаются от меридианов, они задаются соотношением:  $\operatorname{ctg} \nu = A \cdot \sin \varphi$ . Поверхности вращения с замкнутыми геодезическими подробно описаны в [5]. Справедлива следующая теорема

**Теорема 2** (А. Бессе). *Рассмотрим сферу  $S^2 \setminus \{N, S\} \approx (a, b) \times S^1$  единичного радиуса с выколотыми полюсами, с координатами  $(\nu, \varphi \bmod 2\pi)$  и метрикой вращения  $ds^2 = a_{11}^2(\nu)d\nu^2 + a_{22}^2(\nu)d\varphi^2$ .*

*Все геодезические на  $S^2$ , отличные от меридианов, замкнуты тогда и только тогда, когда метрика приводится некоторым диффеоморфизмом  $(a, b) \rightarrow (0, \pi), \nu \mapsto \tilde{\nu} = \tilde{\nu}(\nu)$ , к виду*

$$ds^2 = \left[ \frac{p}{q} + h(\cos \tilde{\nu}) \right]^2 d\tilde{\nu}^2 + \sin^2 \tilde{\nu} d\varphi^2, \quad (1.1.11)$$

*где  $\frac{p}{q}$  — рационально, а  $h : (-1, 1) \rightarrow (-\frac{p}{q}, \frac{p}{q})$  — нечётная функция.*

Такие поверхности называются поверхностями *Таннери*. Длины всех геодезических общего положения (не экватор и не меридиан) одинаковы и равны  $2r\pi$ , длина экватора  $2\pi$ , длина меридиана  $2\frac{p}{q}\pi$ .

## 1.2 Обобщенное семейство уравнений

Для обобщения теоремы Бертрана на поверхности вращения необходимо установить периодичность решений уравнения орбит (1.1.7), что и делается в теореме 3. Для того, чтобы сформулировать теорему 3 необходимо предварительно переформулировать соответствующие свойства орбит и потенциалов.

Назовём *обобщенным семейством уравнений Бертрана* однопараметрическое (ненулевой параметр  $K$ ) семейство дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2z}{d\varphi^2} + \rho(z) = \frac{1}{K^2}\Psi(z) \quad (1.2.1)$$

на интервале  $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$ , где  $\Psi(z)$  и  $\rho(z)$  – функции класса  $C^\infty$ , определенные на интервале  $(a, b)$ .

**Определение 1.2.1.** Функцию  $\Psi = \Psi(z)$  на интервале  $(a, b)$  назовём *закрывающей* для функции  $\rho = \rho(z)$  (или  *$\rho$ -закрывающей*), если

- ( $\exists$ ) существует значение параметра  $K = K_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , при котором соответствующее уравнение имеет ограниченное непостоянное решение  $\tilde{z} = \tilde{z}(\varphi)$ ;
- ( $\forall$ ) все ограниченные непостоянные решения  $z = z(\varphi)$  уравнения со всевозможными значениями параметра  $K$  являются периодическими функциями с попарно соизмеримыми периодами.

Назовём функцию  $\Psi = \Psi(z)$  на интервале  $(a, b)$  *локально закрывающей* для функции  $\rho = \rho(z)$  (или *локально  $\rho$ -закрывающей*), если

- ( $\exists$ )<sup>loc</sup> существует значение параметра  $K = K_0$  такое, что соответствующее уравнение имеет невырожденное устойчивое положение равновесия  $z_0 \in (a, b)$ ;
- ( $\forall$ )<sup>loc</sup> для всякой пары  $(K_0, z_0) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (a, b)$ , удовлетворяющей ( $\exists$ )<sup>loc</sup>, найдутся  $\varepsilon, \delta > 0$ , такие что все ограниченные непостоянные решения  $z(\varphi)$  уравнений, отвечающих  $K \in (K_0 - \delta, K_0 + \delta)$ , с областью значений из  $\varepsilon$ -окрестности  $z_0$ , т.е.  $z(\mathbb{R}^1) \subset [z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon]$ , являются периодическими функциями с попарно соизмеримыми периодами.

Назовём функцию  $\Psi = \Psi(z)$  на интервале  $(a, b)$  *полулокально закрывающей* для функции  $\rho = \rho(z)$  (или *полулокально  $\rho$ -закрывающей*), если выполнены условия ( $\exists$ ), ( $\forall$ )<sup>loc</sup> и следующее условие:

$(\forall)^{s\text{-loc}}$  все ограниченные решения  $z(\varphi)$  уравнения при  $K = K_0$ , такие что  $z(\mathbb{R}^1) \subset \tilde{z}(\mathbb{R}^1)$ , являются периодическими функциями с попарно соизмеримыми периодами, где  $K_0$  и  $\tilde{z} = \tilde{z}(\varphi)$  – соответствующие значения параметра  $K$  и решение из условия  $(\exists)$ .

Назовём функцию  $\Psi(z)$  *сильно* (соответственно *слабо*)  $\rho$ -замыкающей, если любая точка  $z_0 \in (a, b)$  является невырожденным устойчивым (соответственно устойчивым) положением равновесия уравнения при некотором  $K = K_0$ , зависящем от  $z_0$ , а также выполнено условие  $(\forall)^{\text{loc}}$  (соответственно его аналог для всякой пары  $(K_0, z_0) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (a, b)$ , такой что  $z_0$  – устойчивое положение равновесия уравнения при  $K = K_0$ ).

**Теорема 3.** Пусть задано семейство уравнений Бертрана (1.2.1) на  $(a, b)$ .

Если  $\Psi$  является полулокально  $\rho$ -замыкающей (или  $\rho$ -замыкающей, или сильно или слабо  $\rho$ -замыкающей), то она является локально  $\rho$ -замыкающей.

Если на интервале  $(a, b)$  функция  $\rho$  не имеет нулей, то все классы замыкающих, полулокально замыкающих, локально замыкающих, сильно замыкающих и слабо замыкающих для  $\rho$  функций  $\Psi$  совпадают.

Если на интервале  $(a, b)$  функция  $\rho$  не имеет нулей, то существует не более двух замыкающих функций с точностью до положительной мультипликативной константы и эти функции определяются условиями:

(a) если  $\rho'|_{(a,b)} = \text{const} > 0$ , то существуют ровно две (с точностью до положительной мультипликативной константы)  $\rho$ -замыкающие функции  $\Psi$  на  $(a, b)$ , а именно  $\Psi_i(z) = A_i/\rho^{i^2-1}(z)$ ,  $i = 1, 2$ , где  $A_i \neq 0$  – произвольная мультипликативная константа, такая что  $A_i \rho^i(z) > 0$ ; более того минимальный положительный период любого ограниченного непостоянного решения равен  $\Phi_i = 2\pi/(i\sqrt{\rho})$ ;

(b) если  $\rho|_{(a,b)}$  является рациональной функцией вида  $\rho(z) = \frac{(z-\zeta)^4+D}{\mu^2(z-\zeta)^3}$ , где  $D = \text{const} \neq 0$ ,  $\mu = \text{const} > 0$ ,  $\zeta = \text{const} \notin (a, b)$ , то существует единственная (с точностью до положительной мультипликативной константы)  $\rho$ -замыкающая функция на  $(a, b)$ :  $\Psi(z) = \Psi_2(z) = \frac{A}{(z-\zeta)^3}$ , где  $A \neq 0$  – мультипликативная константа, такая что  $A((z-\zeta)^4+D) > 0$ ; более того минимальный положительный период любого ограниченного непостоянного решения равен  $\Phi_i = \pi\mu$ ;

(c) если  $\rho(z)$  не имеет ни одного из указанных выше видов, то не существует  $\rho$ -замыкающих функций на  $(a, b)$ .

В случаях (a) и (b) каждая точка  $z \in (a, b)$  является невырожденным положением равновесия уравнения при  $K = K_i := \pm\sqrt{A_i/\rho^{i^2}(z)}$ ,  $i = 1, 2$  в случае (a) и  $K = \pm\mu\sqrt{\frac{A}{(z-\zeta)^4+D}}$  (в случае (b)), а при других значениях параметра  $K$  не является положением равновесия.

Прежде чем доказать теорему сформулируем ряд лемм. Для начала заметим, что любое уравнение из семейства Бертрана (1.2.1) имеет вид  $z''_{\varphi\varphi} = -U'(z)$ , где  $U(z) :=$

$\int(\rho(z) - \frac{\Psi(z)}{K^2})dz$ , что позволяет разглядеть первый интеграл

$$E := (z'^2)/2 + U(z), \quad (1.2.2)$$

который является аналогом интеграла энергии. Первый интеграл позволяет понизить порядок каждого уравнения системы Бертрана:

$$z'^2 = R(z) + CW(z) + 2E = 2E - 2U_C(z),$$

где  $R(z) := -2 \int \rho(z)dz$ ,  $C := K^2/2$ ,  $W(z) := \int \Psi(z)dz$ ,  $U_C(z) := -(R(z) + CW(z))/2$ .

Леммы 1.2.1-1.2.3 описывают общие свойства решений дифференциального уравнения вида  $z''_{\varphi\varphi} = -U'(z)$ , где  $U(z)$  – гладкая функция на интервале  $(a, b)$ , к которому, очевидно, относятся и уравнения системы Бертрана (1.2.1).

**Лемма 1.2.1.** Пусть функция  $z(\varphi)$  является решением уравнения  $z''_{\varphi\varphi} = -U'(z)$  и пусть  $z'(\varphi_0) = 0$ . Тогда график функции  $z = z(\varphi)$  симметричен относительно прямой  $\{\varphi = \varphi_0\}$ , т.е.  $z(\varphi) = \tilde{z}(\varphi) := z(\varphi_0 - (\varphi - \varphi_0))$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Прямой подстановкой в уравнение  $z''_{\varphi\varphi} = -U'(z)$  проверяется, что  $\tilde{z}(\varphi)$  является его решением. А т.к. начальные условия совпадают,  $z(\varphi_0) = \tilde{z}(\varphi_0)$  и  $z'(\varphi_0) = \tilde{z}'(\varphi_0)$ , то совпадают и решения.

**Лемма 1.2.2.** Пусть заданы константы  $a', b', E'$  такие, что  $a < a' < b' < b$  и  $E' \in \mathbb{R}$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (a) существует ограниченное решение  $z(\varphi)$  уравнения  $z''_{\varphi\varphi} = -U'(z)$  с уровнем энергии  $E$  (1.2.2), такое что  $a' = \inf z(\mathbb{R}^1)$ ,  $b' = \sup z(\mathbb{R}^1)$ ;
- (b)  $U(a') = U(b') = E'$  и  $U|_{(a', b')} < E'$ .

Если  $\tilde{z} \in \{a', b'\}$  и выполнено условие (a), то соотношения  $U'(\tilde{z}) \neq 0$  и  $\tilde{z} \in z(\mathbb{R}^1)$  равносильны.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть выполнено какое-нибудь одно из условий (a) и (b). Тогда существует положение (точка)  $z_0 \in (a', b')$ , такая что  $U(z_0) < E'$ . Фиксируем любой уровень  $E \in (U(z_0), E']$ . Пусть  $z(\varphi)$  – локальное решение дифференциального уравнения  $z''_{\varphi\varphi} = -U'(z)$ , такое что  $z(0) = z_0, z'(0) = \sqrt{2E - 2U(z_0)}$ . Тогда уровень энергии на решении  $z(\varphi)$  равен  $E$ . Пусть  $(z_1, z_2) \subseteq (a, b)$  – максимальный интервал по включению, содержащий точку  $z_0$ , на котором  $U(z) < E$ . Тогда решение  $z(\varphi)$  может быть продолжено на интервал  $(\varphi_1, \varphi_2)$  (с помощью интеграла энергии(1.2.2)), где  $\varphi_i = \int_{z_0}^{z_i} \frac{dz}{\sqrt{2E - 2U(z)}}$ ,  $i = 1, 2$ . Отсюда следует, что при выполнении какого-либо из условий (a) и (b) интервал  $(a', b')$  содержит максимальный по включению интервал, содержащий точку  $z_0$ , на котором  $U(z) < E'$ . Значит,  $(z_1, z_2) \subseteq (a', b')$  (в силу  $E \leq E'$ ).

Покажем, что построенное решение  $z(\varphi)$  ограничено и  $z(\mathbb{R}^1) \subseteq [z_1, z_2]$ , т.е.  $z_1 = \inf z(\mathbb{R}^1)$  и  $z_2 = \sup z(\mathbb{R}^1)$  (отсюда следует равносильность условий (а) и (б)). Если  $\varphi_1 = -\infty$  и  $\varphi_2 = \infty$ , то требуемое утверждение очевидно, так как построенное решение определено на всем  $\mathbb{R}^1$  и  $z(\mathbb{R}^1) = (z_1, z_2)$  (решение неперiodично). Остался случай, когда для некоторого  $i \in \{1, 2\}$  выполнено  $|\varphi_i| < \infty$ . Здесь в силу  $(z_1, z_2) \subseteq [a', b'] \subset (a, b)$  решение может быть продолжено в точку  $\varphi_i$ , тогда  $z(\varphi_i) = z_i$ ,  $U(z_i) = E$  и  $z'(\varphi_i) = 0$ . Если  $\varphi_1 = -\infty$  и  $\varphi_2 < \infty$ , то в силу леммы 1.2.1 решение ограничено и  $z(\mathbb{R}^1) = z((-\infty, \varphi_2]) = (z_1, z_2]$  (значит решение неперiodично). Аналогично для случая  $\varphi_1 > -\infty$  и  $\varphi_2 = +\infty$ . В случае же  $\varphi_1 > -\infty$  и  $\varphi_2 < +\infty$  решение перiodично и  $z(\mathbb{R}^1) = z([\varphi_1, \varphi_2]) = [z_1, z_2]$ , причем минимальный положительный период будет равен  $\Phi = 2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{2E - 2U(z)}}$ . Таким образом, решение всегда ограничено и выполняется  $z(\mathbb{R}^1) \subseteq [z_1, z_2]$ .

Докажем, что для любого  $i \in \{1, 2\}$  равносильны условия  $U'(z_i) \neq 0$  и  $z_i \in z(\mathbb{R}^1)$ . Без ограничения общности  $i = 2$ . Пусть  $U'(z_2) = 0$ , т.е. точка  $z_2$  – положение равновесия. Тогда если  $z_2 \in z(\mathbb{R}^1)$  (т.е.  $\varphi_2 < \infty$ ), то оба решения  $z(\varphi)$  и  $z_2(\varphi) \equiv z_2$  удовлетворяют одним и тем же начальным условиям  $z(\varphi_2) = z_2$ ,  $z'(\varphi - 2) = 0$ , а потому совпадают, что противоречит  $z_1 < z_2$ . Пусть теперь  $U'(z_2) \neq 0$ . Тогда  $U|_{[z_0, z_2]}(z) \leq E - c(z_2 - z)$  для некоторого  $c > 0$ , откуда  $\varphi_2 \leq (z_2 - z_0)\sqrt{2/c} < \infty$ , а потому  $z_2 \in z(\mathbb{R}^1)$ .  $\square$

**Лемма 1.2.3.** Пусть  $a < a' < b' < b$  и  $U(a') = U(b') = E'$ ,  $U|_{(a', b')} < E'$ ,  $E_0 := \min U|_{[a', b']}$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (а) для любого  $E \in (E_0, E']$  любое ограниченное решение  $z_E(\varphi)$  уравнения  $z''_{\varphi\varphi} = -U'(z)$  с уровнем энергии  $E$  (1.2.2), такое что  $z_E(0) \in (a', b')$  перiodично;
- (б) существует отрезок  $[c_1, c_2] \subset (a', b')$ , такой что  $U'|_{[a', c_1]} < 0$ ,  $U'|_{[c_1, c_2]} = 0$ ,  $U'|_{(c_2, b']} > 0$ .

При выполнении этих условий минимальный положительный период решения  $z_E(\varphi)$  равен

$$\Phi(E) = 2 \int_{z_1(E)}^{z_2(E)} \frac{dz}{\sqrt{2E - 2U(z)}}, \quad (1.2.3)$$

где значения  $z_1 = z_1(E) \in [a', c_1]$  и  $z_2 = z_2(E) \in (c_2, b']$  определены условиями  $U(z_1) = U(z_2) = E$ . Функция  $\Phi = \Phi(E)$  непрерывна на полуинтервале  $(E_0, E']$ . Если  $U''(c_1) = 0$ , то

$$\lim_{E \rightarrow E_0} \Phi(E) = \infty. \quad (1.2.4)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть выполнено условие (б). Тогда  $U'(z_1) \neq 0$  и  $U'(z_2) \neq 0$ , а значит, по лемме 1.2.2 образ  $z(\mathbb{R}^1)$  решения  $z(\varphi)$  является отрезком, откуда решение перiodично. Отсюда и из леммы 1.2.2 следует пункт (а).

Пусть выполнено условие (а). Тогда множество  $A := \{z \in (a', b') \mid U'(z) = 0\}$  непусто, т.к.  $a' < b'$  и  $U(a') = U(b')$ . Пусть  $E^* := \sup U|_A$ , введем множество  $B := \{z \in$



$[a', b'] \mid U(z) \leq E^*$ ,  $c_1 := \inf B$ ,  $c_2 := \sup B$ . Тогда

$$U'|_{[a', c_1]} < 0, \quad U'|_{(c_2, b']} > 0, \quad E_0 \leq U|_{[c_1, c_2]} \leq U(c_1) = U(c_2) = E^* < E'. \quad (1.2.5)$$

Пусть  $U([c_1, c_2]) \neq E^*$ . Верно, что  $c_1 < c_2$  и найдется интервал  $(z_1^*, z_2^*) \subseteq (c_1, c_2)$ , такой что  $U|_{(z_1^*, z_2^*)} < E^*$ ,  $U(z_1^*) = U(z_2^*) = E^*$  и один из концов  $z_i^*$  этого интервала принадлежит  $A$  (т.е. выполнено  $U'(z_i^*) = 0$ ). Пусть теперь  $z^*(\varphi)$  – ограниченное решение с уровнем энергии  $E^*$ , отвечающее интервалу  $(z_1^*, z_2^*)$  согласно лемме 1.2.2. Т.к. это решение ограничено, то оно является периодическим в силу условия (а), откуда  $z^*(\mathbb{R}^1) = [z_1^*, z_2^*]$ . Отсюда  $U'(z_i^*) \neq 0$  согласно лемме 1.2.2. Полученное противоречие показывает, что  $U|_{[c_1, c_2]} = E^* = E_0$ , т.е. выполнено условие (b).

Утверждение (1.2.3) было доказано в лемме 1.2.2, докажем (1.2.4). Пусть  $U''(c_1) = 0$ . Тогда  $\forall z \in [c_1 - \varepsilon, c_1]$  выполняется  $E_0 \leq U(z) \leq E_0 + c(c_1 - z)^3$  для некоторой константы  $c > 0$ . Отсюда получаем  $\Phi(E) \geq \int_{c_1 - ((E - E_0)/c)^{1/3}}^{c_1} \frac{dz}{\sqrt{2E - 2E_0}} \rightarrow +\infty$  при  $E \rightarrow E_0$ ,  $E_0 < E \leq E'$ .  $\square$

**Лемма 1.2.4.** Пусть  $\Psi(z)$ ,  $\rho(z)$  – гладкие функции на  $(a, b)$ .

(а) Пусть  $\rho(z_0) \neq 0$  для некоторого  $z_0 \in (a, b)$ . Пусть  $z_0$  – невырожденное устойчивое положение равновесия обобщенного уравнения Бертрана (1.2.1) при  $K = K_0 > 0$ , т.е.  $K_0^2 = \frac{\Psi(z_0)}{\rho(z_0)}$  и  $\rho'(z_0) - \frac{\rho(z_0)}{\Psi(z_0)}\Psi'(z_0) > 0$ . Пусть пара  $(z_0, K_0)$  удовлетворяет условию  $(\forall)^{\text{loc}}$  из определения 1.2.1.

Тогда существуют  $\varepsilon_0, \beta > 0$ , такие что функции  $\Psi$  и  $\rho$  на  $[z_0 - \varepsilon_0, z_0 + \varepsilon_0]$  удовлетворяют соотношениям

$$3\Psi''\Psi = 4(\Psi')^2, \quad \Psi\rho' - \Psi'\rho = \beta^2\Psi. \quad (1.2.6)$$

(b) Пусть соотношения (1.2.6) выполнены на промежутке  $I \subset (a, b)$  положительной длины. Пусть некоторая точка  $z_0 \in I$  является положением равновесия обобщенного уравнения Бертрана на  $(a, b)$  при  $K = K_0 \neq 0$ , и  $z_0 \in I$ . Тогда в промежутке  $I$  выполнены тождества  $\Psi(z) = A_i(z - \zeta)^{1-i^2}$  и  $\rho(z) = \beta^2 \frac{(z - \zeta)^4 + D}{i^2(z - \zeta)^3}$ , где  $i \in \{1, 2\}$ ,  $A_i$ ,  $D$ ,  $\zeta$  – некоторые константы, такие что  $D = 0$  при  $i = 1$ ,  $z - \zeta \neq 0$ ,  $(z - \zeta)A_1 > 0$ ,  $((z - \zeta)^4 + D)A_2 > 0$  при любом  $z \in I$ . При этом любая точка  $z \in I$  является невырожденным устойчивым положением равновесия обобщенного уравнения Бертрана при  $K = \pm \sqrt{\frac{\Psi(z)}{\rho(z)}}$ ; все ограниченные непостоянные решения  $z = z(\varphi)$  обобщенного уравнения Бертрана на  $I$  при произвольных ненулевых значениях параметра  $K$  являются периодическими с минимальным положительным периодом  $\Phi = 2\pi/\beta$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Шаг 1. Введем обозначения  $C := \frac{2}{K^2}$ ,  $C_0 := \frac{2}{K_0^2}$ ,  $E_0 := U_{C_0}(z_0)$  ( $U_C(z) = \int \rho(z)dz - 0.5C \int \Psi(z)dz$ ).

Точка  $z_0 \in (a, b)$  является невырожденным устойчивым положением равновесия уравнения  $z''_{\varphi\varphi} = -U'_C(z)$  при  $C = C_0$  тогда и только тогда, когда  $U'_{C_0}(z_0) = 0$  и  $U''_{C_0}(z_0) > 0$ .

Поэтому  $-2U'_{C_0}(z_0) = R'(z_0) + C_0W'(z_0) = -2\rho(z_0) + \frac{2}{K_0^2}\Psi(z_0) = 0$  (ввиду условия  $\rho(z_0) \neq 0$  выполнено  $\Psi(z_0) \neq 0$ ); дифференцируем ещё раз  $-2U''_{C_0}(z_0) = R''(z_0) + C_0W''(z_0) = -2\rho'(z_0) + 2\frac{\rho(z_0)}{\Psi(z_0)}\Psi'(z_0) < 0$ .

Выберем малые  $\varepsilon, \delta > 0$ , удовлетворяющие условию  $(\forall)^{\text{loc}}$  из определения 1.2.1 для пары  $(z_0, K_0)$ , что  $U''_C|_{[z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon]}$  и  $E_{0,\varepsilon,C} < E'_{\varepsilon,C}$  при  $K = \sqrt{2/C} \in [K_0 - \delta, K_0 + \delta]$ , где введены обозначения  $E'_{\varepsilon,C} := \min\{U_C(z_0 - \varepsilon), U_C(z_0 + \varepsilon)\}$ ,  $E_{0,\varepsilon,C} := \min U_C|_{[z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon]}$ . Для любой пары  $(E, C)$ , такой что

$$K = \sqrt{2/C} \in [K_0 - \delta, K_0 + \delta], \quad E \in (E_{0,\varepsilon,C}, E'_{\varepsilon,C}), \quad (1.2.7)$$

рассмотрим ограниченное решение  $z_{E,C}(\varphi)$  уравнения  $z''_{\varphi\varphi} = -U'_C(z)$  с уровнем энергии  $E$  (1.2.2), такое что  $z_{E,C}(\mathbb{R}^1) \subset [z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon]$ . Оно существует в силу леммы 1.2.2 и является периодическим в силу условия  $(\forall)^{\text{loc}}$  из определения 1.2.1.

Выпишем минимальный период  $\Phi(E, C)$  решения  $z_{E,C}$  (заметим, что константы  $E, C$  однозначно определяют решение с точностью до сдвига) согласно лемме 1.2.3:

$$\Phi(E, C) = 2 \int_{z_1(E,C)}^{z_2(E,C)} \frac{dz}{\sqrt{R(z) + CW(z) + 2E}}, \quad (1.2.8)$$

где интегрирование проводится по отрезку между двумя нулями  $z_1$  и  $z_2$  знаменателя (поэтому, согласно лемме 1.2.2,  $z_1$  и  $z_2$  являются минимумом и максимумом периодического решения  $z_{E,C} = z_{E,C}(\varphi)$  уравнения  $z''_{\varphi\varphi} = -U'_C(z)$ ).

Используя то, что  $z_1 = z_1(E, C)$  и  $z_2 = z_2(E, C)$  зануляют знаменатель подынтегральной дроби 1.2.8, выразим константы  $C, E$  через  $z_1, z_2$ :

$$C(z_1, z_2) := \frac{R(z_2) - R(z_1)}{W(z_1) - W(z_2)}, \quad 2E(z_1, z_2) := \frac{R(z_1)W(z_2) - R(z_2)W(z_1)}{W(z_1) - W(z_2)}, \quad (1.2.9)$$

где соотношения выполняются на множестве  $\{(z_1, z_2) : z_0 - \varepsilon \leq z_1 < z_2 \leq z_0 + \varepsilon\}$ .

Доопределим эти выражения на множестве пар  $(z_1, z_2)$  совпадающих чисел следующими соотношениями  $C(z_1, z_1) := -\frac{R'(z_1)}{W'(z_1)} = 2\frac{\rho(z_1)}{\Psi(z_1)}$ ,  $2E(z_1, z_1) := -R(z_1) + \frac{R'(z_1)}{W'(z_1)}W(z_1)$ . В итоге функции  $C(z_1, z_2), E(z_1, z_2)$  определены и непрерывны на  $\{(z_1, z_2) : z_0 - \varepsilon \leq z_1 \leq z_2 \leq z_0 + \varepsilon\}$ , т.к.  $W'(z_0) = \Psi(z_0) \neq 0$ . Получаем, что при достаточно малом  $\varepsilon_0 > 0$  соответствующие значения параметра  $K = \sqrt{\frac{2}{C(z_1, z_2)}}$  обобщенного уравнения Бертрана (для всевозможных пар точек  $z_1, z_2 \in [z_0 - \varepsilon_0, z_0 + \varepsilon_0]$ ) будут принадлежать  $\delta$ -окрестности числа  $\sqrt{\frac{2}{C(z_0, z_0)}} = \sqrt{\frac{2}{C_0}} = K_0$ . Отсюда следует, что для любых  $z_1, z_2 \in [z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon_0]$ , таких что  $z_1 < z_2$ , пара  $(E, C) := (E(z_1, z_2), C(z_1, z_2))$  удовлетворяет (1.2.7) (т.е. принадлежит области определения функции  $\Phi(E, C)$ ), и для любой такой пары формула (1.2.8) примет вид:

$$\Phi(E(z_1, z_2), C(z_1, z_2)) = 2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{R(z) + C(z_1, z_2)W(z) + 2E(z_1, z_2)}}. \quad (1.2.10)$$

*Шаг 2.* Положим теперь  $z_1 = c - h$ ,  $z_2 = c + h$ ,  $z = c + ht$ , где  $c \in (z_0 - \varepsilon_0, z_0 + \varepsilon_0)$ ,  $0 < h \ll 1$ . Раскладываем далее функции  $W$  и  $R$  в этих точках в ряды Тейлора по

степеням переменной  $h$  и подставляя их в (1.2.10) с учетом (1.2.9), получаем в пределе при  $h \rightarrow 0$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(E(c-h, c+h), C(c-h, c+h))}{2\pi} = \sqrt{\frac{2W'(c)}{R'(c)W''(c) - W'(c)R''(c)}} =: \frac{1}{\beta(c)}.$$

Отсюда получаем следующее соотношение в интервале  $(z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$ :

$$R''(c)W'(c) - R'(c)W''(c) = 2\beta^2(c)W'(c). \quad (1.2.11)$$

Подставляя далее в последнее соотношение  $W' = \Psi$  и  $R' = -2\rho$ , получаем соотношение  $\Psi\rho' - \Psi'\rho = \beta^2\Psi$  в интервале  $(z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$ , т.е. второе соотношение из (1.2.6).

Так как функция (1.2.6) непрерывна в своей области определения  $\{(z_1, z_2) : z_0 - \varepsilon_0 \leq z_1 < z_2 \leq z_0 + \varepsilon_0\}$  и все её значения попарно соизмеримы ввиду условия  $(\forall)^{\text{loc}}$  из определения 1.2.1, то она постоянна и равна своему предельному значению  $2\pi/\beta(z_0)$ . В частности, функция  $\beta(c)$  постоянна на интервале  $(z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$ .

*Шаг 3.* Чтобы получить первое соотношение из (1.2.6), разложим интеграл (1.2.10) по степеням  $h$  и рассмотрим коэффициент при  $h^2$ :

$$\frac{\pi}{4! \beta^3 W'} \left( \frac{3}{4} (R^{iv} W' - R' W^{iv}) + \frac{R' W''' - R''' W'}{W'} \left( \frac{R' W''' - R''' W'}{8\beta^2} + W'' \right) \right). \quad (1.2.12)$$

Из равенств (1.2.11) и  $\beta = \text{const}$  получаем:

$$R' W''' - R''' W' = 2\beta^2 W''; \quad R^{iv} W' - R' W^{iv} = \frac{2\beta^2}{W'} ((W'')^2 - 2W' W'''). \quad (1.2.13)$$

Используя соотношения (1.2.13) преобразуем коэффициент (1.2.12) при  $h^2$  в разложении интеграла (1.2.10) и получим, что он зависит только от значений функции  $W$  и ее производных в точке  $c$  и равен  $\frac{\pi}{4! \beta (W')^2} [4(W'')^2 - 3W' W''']$ . Приравнивая его к нулю и используя  $W' = \Psi$ , получаем справедливость следующего соотношения в интервале  $(z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$ :

$$3\Psi''\Psi = 4(\Psi')^2. \quad (1.2.14)$$

Т.е. доказано первое соотношение из (1.2.6) и тем самым первая часть леммы.

*Шаг 4.* Доказательство второй части леммы представляет собой аккуратное интегрирование уравнений (1.2.6), полученных в первой части. Т.к. точка  $z_0 \in I$  является положением равновесия, то  $\Psi(z_0) \neq 0$ . Выпишем все гладкие решения (1.2.14) в промежутке  $I$ , такие что  $\Psi(z_0) \neq 0$ : это решения  $\Psi_i(z) = A_i(z - \zeta)^{1-i^2}$ ,  $i = 1, 2$ , где  $A_i \neq 0$  и  $\zeta \notin I$  – константы. Других гладких решений нет, поскольку начальные условия  $(\Psi(z_0), \Psi'(z_0))$  указанных выше решений образуют все множество  $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ , причем приведенные решения не имеют нулей (притом не только на рассматриваемой области  $I$ , но и на всей прямой  $\mathbb{R}$ ), а потому являются решениями дифференциального уравнения  $\Psi'' = \frac{4}{3}(\Psi')^2/\Psi$  второго порядка, разрешенного относительно старшей производной. Наконец, находим

$\rho(z)$  из второго уравнения (1.2.6) с учетом  $\beta = \text{const} > 0$  и явного вида найденной  $\Psi(z)$ :  $\rho_i(z) = \beta^2(z - \zeta + D(z - \zeta)^{-3})/i^2$ ,  $i = 1, 2$ , константа  $D$  такая, что  $D = 0$  при  $i = 1$ ,  $D \neq -(z - \zeta)^4$  для произвольного  $z \in I$ . Из равенства  $U'_{C_0}(z_0) = 0$  и  $C_0 = 2/K_0^2 > 0$  имеем  $\frac{2}{C_0} = \frac{\Psi(z_0)}{\rho(z_0)} > 0$ , откуда знак константы  $A_i$  однозначно определяется по знаку функции  $\rho$  на  $I$ . Проверка того, что для любой указанной пары функций  $(\Psi_i, \rho_i)$ ,  $i = 1, 2$  функция  $\Psi_i$  является  $\rho_i$ -замыкающей и сильно  $\rho_i$ -замыкающей на  $I$ , причем  $\Phi = 2\pi/\beta$ , проводится непосредственно.  $\square$

Теперь с помощью лемм 1.2.1-1.2.4 докажем теорему 3.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3** Пусть функция  $\Psi$  является полулокально  $\rho$ -замыкающей на  $(a, b)$ . Покажем, что тогда она будет локально  $\rho$ -замыкающей на  $(a, b)$ . Пусть  $z(\varphi)$  – ограниченное решение обобщенного уравнения Бертрана со значением параметра  $K = K_0$  и уровнем энергии  $E'$  (1.2.2); оно существует ввиду условия  $(\exists)$  из определения 1.2.1. Обозначим  $C_0 := 2/K_0^2$ ,  $a' := \inf z(\mathbb{R}^1)$ ,  $b' := \sup z(\mathbb{R}^1)$ ,  $E_0 := \min U_{C_0}|_{[a', b']}$ . Тогда  $[a', b'] \subset (a, b)$ . Если  $z_{E, C_0}(\varphi)$  – ограниченное решение уравнения при  $K = K_0$  с уровнем энергии  $E \in (E_0, E']$ , такое что  $z_{E, C_0}(0) \in (a', b')$ , то в силу леммы 1.2.2 имеем  $z_{E, C_0}(\mathbb{R}^1) \subset [a', b']$ , а в силу условия  $(\forall)^{s-\text{loc}}$  из определения 1.2.1 решение  $z_{E, C_0}(\varphi)$  периодически. Значит, выполнено условие (а) из леммы 1.2.3 при  $U = U_{C_0}$ , а потому, согласно лемме 1.2.3, выполнено условие (b) этого утверждения при  $U = U_{C_0}$ . Оказывается, соответствующий отрезок  $[c_1, c_2] \subset (a', b')$  является точкой, притом невырожденным локальным минимумом функции  $U_{C_0}$ . В самом деле, из (1.2.4), условия  $(\forall)^{s-\text{loc}}$  определения 1.2.1 следует, что  $U''_{C_0}(c_1) > 0$  (т.к. в случае  $U''_{C_0}(c_1) = 0$  множество значений функции периода  $\Phi$  содержит интервал ввиду (1.2.4), а значит не состоит из попарно соизмеримых чисел, что противоречит условию  $(\forall)^{s-\text{loc}}$  определения 1.2.1). Т.к. отрезок  $[c_1, c_2]$  на самом деле является точкой невырожденного локального минимума функции  $U_{C_0}$ , то выполнено условие  $(\exists)^{\text{loc}}$  определения 1.2.1. Поэтому функция  $\Psi$  является локально  $\rho$ -замыкающей на  $(a, b)$ .

Непосредственно из определения 1.2.1 следует, что если  $\Psi$  является  $\rho$ -замыкающей или сильно или слабо  $\rho$ -замыкающей, то она автоматически является локально  $\rho$ -замыкающей.

Пусть теперь функция  $\Psi$  является локально  $\rho$ -замыкающей на  $(a, b)$ , и функция  $\rho$  не имеет нулей на  $(a, b)$ . Пусть  $z_0 \in (a, b)$  – невырожденное устойчивое положение равновесия уравнения при некотором  $K = K_0 > 0$  (которое существует в силу условия  $(\exists)^{\text{loc}}$  определения 1.2.1). Так как выполнено условие  $(\forall)^{\text{loc}}$ , то при  $C = 2/K^2$  и  $C_0 = 2/K_0^2$  функции  $\Psi$ ,  $\rho$  удовлетворяют системе уравнений (1.2.6) в некоторой окрестности  $(z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$  точки  $z_0$  (согласно лемме 1.2.4). Будем понемногу увеличивать множество, на котором выполняются соотношения (1.2.6). Пусть  $(a_0, b_0) \subseteq (a, b)$  – максимальный по включению интервал, содержащий точку  $z_0$ , на котором выполнены дифференциальные соотношения (1.2.6). В силу гладкости функций  $\Psi, \rho$ , соотношения (1.2.6) выполняются на промежутке

$I := [a_0, b_0] \cap (a, b)$ . Отсюда и из леммы 1.2.4 следует, что в некоторой окрестности промежутка  $I$  в  $(a, b)$  верна одна из формул для пары  $(\Psi, \rho)$ , указанных в лемме 1.2.4. Отсюда  $I = (a_0, b_0) = (a, b)$ , так как в противном случае интервал  $(a_0, b_0)$  не максимален. Таким образом, на всем интервале  $(a, b)$  верна одна из формул для пары  $(\Psi, \rho)$ , указанных в лемме 1.2.4; согласно этой же лемме  $\Psi$  является  $\rho$ -замыкающей и сильно  $\rho$ -замыкающей. Отсюда  $\Psi$  является полулокально  $\rho$ -замыкающей и слабо  $\rho$ -замыкающей.

В завершении доказательства отметим, что если  $\rho(z)$  является линейной возрастающей на  $(a, b)$  функцией, то имеют место обе возможные  $\rho$ -замыкающие силовые функции  $\Psi_i(z) = A_i(z - \zeta)^{1-i^2}$ ,  $i = 1, 2$ , причем соответствующие угловые периоды равны  $\Phi_i = 2\pi/\beta_i = 2\pi/(i\sqrt{\rho'})$ . Если  $\rho(z)$  имеет вид  $\rho_2(z)$  при  $D \neq 0$ , то возможная  $\rho$ -замыкающая функция ровно одна: это  $\Psi_2(z) = A(z - \zeta)^{-3}$ , причем  $\Phi = 2\pi/\beta$ . Если  $\rho(z)$  не принадлежит ни одному из двух указанных видов, то не будет существовать ни одной  $\rho$ -замыкающей силовой функции  $\Psi$ .  $\square$

## Глава 2

# Поверхности Бертрана

В этой главе мы опишем все двумерные многообразия с римановой метрикой вращения, а также с псевдоримановой метрикой вращения, без экваторов, на которых существует замыкающий потенциал, приводящий к замкнутым орбитам. Таким образом, будет обобщена классическая задача Бертрана на поверхности вращения. Основным вспомогательным средством станут геометрические характеристики орбит. Установленная связь (предложения 2.1 - 2.5) между свойствами эффективного потенциала и геометрией орбит позволят доказать необходимость в центральной теореме 6. Установленный явный вид орбит (2.2.18)-(2.2.20) как зависимости неугловой координаты  $\theta$  от угловой  $\varphi$ , т.е. функции  $\theta(\varphi)$ , позволит доказать достаточность в теореме 6, установить величину минимального положительного углового периода  $\Phi$  каждой периодической орбиты, а также независимость минимального временного периода  $T$  соответствующих траекторий  $\vec{r}(t)$  от интеграла кинетического момента  $K$  и явный вид зависимости от интеграла полной энергии  $E$ . В следующих главах выражения (2.2.18)-(2.2.20) будут использованы для доказательства того, что орбиты в некоторых случаях являются коническими сечениями (утверждение 15), а также при построении расширенных бифуркационных диаграмм (предложения 4.1-4.4).

### 2.1 Обобщение теоремы Бертрана на поверхности вращения

Полученная в предыдущей главе теорема 3 о свойствах решений обобщенного семейства дифференциальных уравнений Бертрана позволяет вывести из себя напрямую теоремы 4, 5, 6. Обобщение задачи Бертрана на поверхности вращения с римановой метрикой дают теоремы 4, 5. Они описывают все двумерные поверхности  $S$  с римановой метрикой, на которых существуют замыкающие потенциалы  $V$  (см. определение 1.1.6), при этом они указывают также количество этих потенциалов с точностью до аддитивной и положительной мультипликативной констант.

**Теорема 4** (Федосеев Д.А.). Пусть дана гладкая двумерная поверхность  $S$ , диффеоморфная  $(a, b) \times S^1$ , снабженная римановой метрикой  $ds^2 = dv^2 + f^2(v)d\varphi^2$  (т.е. абстрактная поверхность вращения). Пусть функция  $f(v)$  удовлетворяет тождеству  $f''f - f'^2 = -\zeta^2$ , где  $\zeta > 0$  рационально, т.е.  $f(v)$  имеет один из следующих видов:

$$f(v) = \zeta f_c(v - \alpha) := \begin{cases} \pm \zeta(v - v_0), & c = 0, \\ \frac{\zeta}{\sqrt{c}} \sin(\sqrt{c}(v - v_0)), & c > 0, \\ \pm \frac{\zeta}{\sqrt{-c}} \operatorname{sh}(\sqrt{-c}(v - v_0)), & c < 0, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

где  $c$  – половина скалярной кривизны Римана этой поверхности; в данном случае кривизна постоянна;  $2\pi\zeta$  – полный угол в конической точке поверхности, постоянная  $v_0$  – вещественная постоянная. Пусть, далее, функция  $f'(v)$  не имеет нулей на интервале  $(a, b)$ . Тогда в классе центральных потенциалов на  $S$  существуют ровно два (с точностью до аддитивной и положительной мультипликативной констант) замыкающих потенциала  $V_1(v), V_2(v)$  с константами Бертрана  $\beta_1 = \zeta, \beta_2 = 2\zeta$  (см. комментарий 2.1 ниже).

**Комментарий 2.1.** Константа  $\beta > 0$  называется константой Бертрана, если любая неособая некруговая ограниченная орбита является графиком периодической функции  $v = v(\varphi)$ , минимальный положительный период которой равен  $2\pi/\beta$ . В этом случае орбита “зажата” между двумя параллелями (апо- и перицентрами), частица “осциллирует” между ними и проходит путь между соседними апоцентром и перицентром за время  $\pi/\beta$ , т.е. за полупериод.

**Теорема 5** (Федосеев Д.А.). Пусть дана гладкая двумерная поверхность  $S$ , диффеоморфная  $(a, b) \times S^1$ , снабженная римановой метрикой  $ds^2 = dv^2 + f^2(v)d\varphi^2$ . Пусть функция  $f(v)$  не удовлетворяет тождеству  $f''f - f'^2 = -\zeta^2$  ни для какого рационального  $\zeta > 0$ , и пусть функция  $f(v)$  не имеет критических точек на  $(a, b)$ . Тогда существует не более одного замыкающего центрального потенциала (с точностью до аддитивной и положительной мультипликативной констант). При этом потенциал ровно один тогда и только тогда, когда существует гладкая функция  $\theta = \theta(v)$  без нулей на  $(a, b)$ , такая что  $\theta'(v) > 0$  и риманова метрика в координатах  $(\theta, \varphi)$  имеет вид

$$ds^2 = \frac{d\theta^2}{(\theta^2 + c - t\theta^{-2})^2} + \frac{d\varphi^2}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})}, \quad (2.1.2)$$

где  $\mu$  – положительная рациональная постоянная,  $t$  – ненулевая постоянная, а  $c$  – произвольная. Любой замыкающий потенциал имеет вид  $V(v) = A\theta^{-2}(v) + B$  для некоторых постоянных  $A, B$ , где  $A(\theta^4(v) + t) > 0$ . Этому замыкающему потенциалу соответствует константа Бертрана  $\beta = 2/\mu$  (см. комментарий 2.1 выше).

**Определение 2.1.1.** (см. определение 1.1.11) Риманово 2-мерное многообразие вращения без экваторов, на котором существует центральный замыкающий потенциал, назовем поверхностью Бертрана. Согласно теоремам 4 и 5, это – римановы 2-мерные многообразия, описанные в теоремах 4 и 5.

**Замечание 2.1.1.** Дадим ответ на следующий вопрос А.С. Мищенко “В теоремах 5 и 6 утверждается, что если риманова (псевдориманова) метрика на некоей двумерной поверхности вращения приводится к виду  $ds^2 = \frac{d\theta^2}{(\theta^2+c-t\theta^{-2})^2} + \frac{d\varphi^2}{\mu^2(\theta^2+c-t\theta^{-2})}$ , то на соответствующей поверхности существуют замыкающие потенциалы, а каким образом можно проверить, что метрика (индефинитная метрика) приводится к указанному виду?”. Без ограничения общности можно говорить о римановой метрике вращения. Пусть задана произвольная метрика вращения  $f_1(u)^2 du^2 + f_2(u)^2 d\varphi^2$ , где  $\varphi = \varphi \pmod{2\pi}$ ,  $f_1(u) > 0$ ,  $f_2(u) > 0$ . Перейдем к натуральным координатам  $(v, \varphi)$  с (см. 3.1.1) помощью замены  $v = v(u)$  такой, что  $dv/du = f_1(u)$ . В координатах  $(v, \varphi)$  метрика вращения имеет вид

$$ds^2 = dv^2 + f(v)^2 d\varphi^2, \quad (2.1.3)$$

где  $f(v(u)) = f_2(u)$ . Перейдем к параметру  $\Theta = \Theta(v)$  такому, что  $d\Theta/dv = 1/f^2(v)$ . В координатах  $(\Theta, \varphi)$  метрика вращения имеет вид  $f^4(v(\Theta))d\Theta^2 + f^2(v(\Theta))d\varphi^2$ . Заметим также, что для любой метрики вращения  $f_1(u)^2 du^2 + f_2(u)^2 d\varphi^2$ , параметр  $v(u)$  определен с точностью до сдвига  $v(u) \rightarrow v(u) + v_0$ , где  $v_0$  - произвольная постоянная, а параметр  $\Theta(v)$  – с точностью до сдвига

$$\Theta(v) \rightarrow \Theta(v) - \Theta_0, \quad (2.1.4)$$

где  $\Theta_0$  - любая константа.

Аналогичный параметр  $\Theta$  можно ввести и для метрики вращения (2.1.2) из теоремы 5 (т.е. для  $ds^2 = d\theta^2/(\theta^2 + c - t\theta^{-2})^2 + d\varphi^2/(\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2}))$ , где  $\mu > 0$  – рациональная постоянная,  $c, t$  – вещественные постоянные). Для таких метрик имеем  $1/f(v(\Theta)) = \mu\sqrt{\theta^2 + c - t\theta^{-2}}$ , поэтому

$$\Theta - \Theta_0 = \mu^2\theta \quad (2.1.5)$$

для некоторой вещественной постоянной  $\Theta_0$ .

Из (2.1.4) и (2.1.5) нетрудно выводится равносильность следующих двух условий:

- (а) метрика (2.1.3) некоторой заменой  $\theta = \theta(v)$  приводится к виду (2.1.8) для некоторых констант  $0 < \mu \in \mathbb{Q}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  (т.е. к виду, указанному в теореме 5),
- (б) функция  $F(\Theta) := 1/f(v(\Theta))$  является аналитической функцией (более того, квадратным корнем из рациональной функции) вида

$$F(\Theta) = \mu\sqrt{(\Theta - \Theta_0)^2/\mu^4 + c - t\mu^4(\Theta - \Theta_0)^{-2}} \quad (2.1.6)$$

для некоторых вещественных констант  $\mu > 0, c, t, \Theta_0$ . Отметим, что из формулы (2.1.6) следует, что функция  $F^2(\Theta)$  является либо многочленом степени 2 (при  $t = 0$ ), либо



рациональной функцией вида  $P(Q(\Theta))/Q(\Theta)$ , где  $P$  и  $Q$  – многочлены степени 2,  $Q$  есть квадрат линейной функции и  $P(0) \neq 0$  (при  $t \neq 0$ ).

Условие (b) равносильно следующему условию:

(c) функция  $F(\Theta) := 1/f(v(\Theta))$  аналитична и имеет вид (2.1.6), где константы  $\mu > 0, c, t, \Theta_0$  однозначно выражаются через аналитическое продолжение функции  $F(\Theta)$  следующим образом:

$$1/\mu = \lim_{\Theta \rightarrow \infty} |F(\Theta)/\Theta|,$$

$\Theta_0$  — это либо полюс функции  $F(\Theta)$  в случае, когда  $F^2(\Theta)$  не является многочленом, либо точка минимума функции  $F(\Theta)$  в противном случае,

$$c = \lim_{\Theta \rightarrow \infty} (F^2(\Theta)/\mu^2 - (\Theta - \Theta_0)^2/\mu^4),$$

$$t = - \lim_{\Theta \rightarrow \Theta_0} (\Theta - \Theta_0)^2 F^2(\Theta)/\mu^6.$$

В силу равносильности условий (a) и (c), условие (c) служит ответом на упомянутый выше вопрос А.С.Мищенко.

**Замечание 2.1.2.** Если  $(a, b) \times S^1$  является поверхностью Бертрана, то её  $S^1$ -подповерхность, т.е. поверхность  $(c, d) \times S^1$ , где  $a \leq c < t \leq b$ , также является поверхностью Бертрана. Соответственно назовём поверхность Бертрана *максимальной*, если она не является  $S^1$ -подповерхностью никакой связной поверхности Бертрана.

**Замечание 2.1.3.** Поверхности Бертрана определяются 5 параметрами:  $c, t$  – действительные постоянные ( $t$  здесь это не время вдоль траекторий, а параметр, характеризующий поверхность),  $\mu$  – рациональная положительная постоянная,  $\hat{a}, \hat{b}$  – действительные постоянные, отвечающие границам поверхности  $S$ ,  $\hat{a} := \lim_{v \rightarrow a} \theta(v), \hat{b} := \lim_{v \rightarrow b} \theta(v)$ . Значению параметра  $t = 0$  соответствуют поверхности из теоремы 4, метрика  $ds^2 = dv^2 + f^2(v)d\varphi^2$  которых в бертрановских координатах  $(\theta, \varphi)$  (см. зам. 1.1.2) примет вид  $ds^2 = \frac{d\theta^2}{(\theta^2+c)^2} + \frac{d\varphi^2}{\mu^2(\theta^2+c)}$ . Значения параметров  $\hat{a}, \hat{b}, c, t, \mu$  не могут быть произвольными, они связаны друг с другом некоторыми ограничениями. Например, если рассмотреть значения  $\mu = 1, t = 0, c = -1$ , то интервал  $(\hat{a}, \hat{b})$  не может быть таким  $(0, \infty)$ , т.к. при  $\theta = 0.5$ , выражение  $\frac{1}{\theta^2-1}$  из метрики (2.1.2) будет отрицательным, а значит нарушается положительная определенность. Интервал  $(\hat{a}, \hat{b})$  состоит из значений, принимаемых переменной  $\theta$ ; в свою очередь, значения, которые может принимать  $\theta$ , определяются следующими условиями:  $a_{22}^2(\theta) > 0, a'_{22}(\theta) \neq 0$ , и для определённости (не ограничивая общности)  $\theta > 0$ . Следующий список перечисляет множества значений, которые может принимать  $\theta$ , при всех значениях параметров  $\mu, c, t$ .

1. В случае  $t = 0, c \geq 0$  ( $\forall \mu \in \mathbb{Q}_{>0}$ ) координата  $\theta$  может принимать значения из интервала  $(0, \infty)$ .
2. В случае  $t = 0, c < 0$  ( $\forall \mu \in \mathbb{Q}_{>0}$ ) координата  $\theta$  может принадлежать  $(\sqrt{-c}, \infty)$ .

3. Случай  $t > 0$  ( $\forall \mu \in \mathbb{Q}_{>0}$ ). Интервал изменения  $\theta$  следующий  $(\theta_2, \infty)$ , где  $\theta_2 = \sqrt{\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4t}}{2}}$ .
4. Случай  $t < 0, c < 0, c^2 + 4t > 0$  ( $\forall \mu \in \mathbb{Q}_{>0}$ ). Множество изменения  $\theta$  состоит из двух интервалов  $(0, \theta_1)$  и  $(\theta_2, \infty)$ , где  $\theta_1 = \sqrt{\frac{-c - \sqrt{c^2 + 4t}}{2}}$ ,  $\theta_2 = \sqrt{\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4t}}{2}}$ .
5. При оставшихся значениях параметров  $c, t, \mu$  возможная область изменения  $\theta$  состоит из следующих интервалов  $(0, \sqrt[4]{-t})$  и  $(\sqrt[4]{-t}, \infty)$ .

Таким образом ограничение на  $\hat{a}, \hat{b}, c, t, \mu$  формулируется так: при каждом фиксированном значении тройки  $(c, t, \mu)$  интервал  $(\hat{a}, \hat{b})$  должен быть подмножеством соответствующего допустимого множества (см. список выше или таблицу 2.1).

Если интервал  $(\hat{a}, \hat{b})$  совпадает со всем допустимым множеством (в случае, когда допустимое множество состоит из двух интервалов, выбирается какой-нибудь один из них), то соответствующая поверхность Бертрана является максимальной. Как показывает вышеприведённый список, допустимые интервалы  $(\hat{a}, \hat{b})$  зависят от  $c, t$  и не зависят от  $\mu$ .

В статье [56], в которой сформулированы и доказаны теоремы 3, 4, 5 была поставлена задача – обобщить теорему Бертрана на поверхности вращения с индефинитной метрикой, т.е. описать все соответствующие двумерные поверхности вращения с индефинитной метрикой, допускающие наличие центральных гладких потенциалов, приводящих к замкнутым траекториям. Нужное обобщение даёт теорема 6.

**Теорема 6.** *Рассмотрим двумерную поверхность  $S' \approx (a, b) \times S^1$  с координатами  $(u, \varphi \bmod 2\pi)$  и с псевдоримановой метрикой вращения (1.1.2) такой, что  $a'_{22}(u) \neq 0$  для любого  $u \in (a, b)$ . Тогда*

1. *На тех поверхностях  $S'$ , псевдориманова метрика которых некоторой заменой  $u = u(\theta)$ ,  $\varphi = \varphi$  приводится к виду:*

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\theta^2 + c)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu^2(\theta^2 + c)} \end{pmatrix} \quad (2.1.7)$$

*для некоторых вещественных постоянных  $c$  и  $\mu$ , таких что  $\mu \in \mathbb{Q}_{>0}$  (см. зам. 2.1.4), существует ровно два с точностью до аддитивной и положительной мультипликативной констант гладких замыкающих потенциала  $V_1(\theta) = A|\theta| + B$  ( $A < 0$ ),  $V_2(\theta) = \frac{A}{\theta^2} + B$  ( $A > 0$ ), где  $A, B \in \mathbb{R}$ .*

2. *На тех поверхностях  $S'$ , псевдориманова метрика которых некоторой заменой  $u = u(\theta)$ ,  $\varphi = \varphi$  приводится к виду:*

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\theta^2 + c - t\theta^{-2})^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})} \end{pmatrix} \quad (2.1.8)$$

для некоторых вещественных постоянных  $c, t, \mu$ , таких что  $t \neq 0$ ,  $\mu \in \mathbb{Q}_{>0}$  (см. зам. 2.1.4), существует ровно один с точностью до аддитивной и положительной мультипликативной констант гладкий замыкающий потенциал  $V_2(\theta) = \frac{A}{\theta^2} + B$ , где  $A, B \in \mathbb{R}$ ,  $A(\theta^4 + t) > 0$ .

3. На остальных поверхностях  $S'$  гладкого замыкающего потенциала не существует.

**Определение 2.1.2.** (см. определение 1.1.11) Псевдориманово 2-мерное многообразие вращения без экваторов, на котором существует центральный замыкающий потенциал, назовем поверхностью Бертрана. Согласно теореме 6, это – псевдоримановы 2-мерные многообразия, описанные в теореме 6.

**Замечание 2.1.4.** Поверхности Бертрана  $S'$  с псевдоримановой метрикой вращения также определяются 5 параметрами  $c, t, \mu, \hat{a}, \hat{b}$ . Эти параметры как и в римановом случае не могут принимать произвольные значения, на них наложены ограничение вида  $\forall \theta \in (\hat{a}, \hat{b})$   $a_{22}^2(\theta) > 0$ ,  $a'_{22}(\theta) \neq 0$ ,  $\theta > 0$ . Таким образом интервал  $(\hat{a}, \hat{b})$  должен быть подмножеством допустимого множества (см. таблицу 2.1), при этом если он совпадает с допустимым множеством (его связной компонентой, если их две), то соответствующая поверхность Бертрана называется максимальной.

Таблица 2.1: Возможные положительные значения  $\theta$ .

Значение $(c, t)$	Допустимые значения $\theta$ в римановом случае	Допустимые значения $\theta$ в псевдоримановом случае
$c \geq 0, t = 0$	$(0, \infty)$	$\emptyset$
$c < 0, t = 0$	$(\sqrt{-c}, \infty)$	$(0, \sqrt{-c})$
$t > 0$	$(\theta_2, \infty)$	$(0, \theta_2)$
$t < 0, c < 0, c^2 + 4t > 0$	$(0, \theta_1)$ или $(\theta_2, \infty)$	$(\theta_1, \sqrt[4]{-t})$ или $(\sqrt[4]{-t}, \theta_2)$
$t < 0, c > 0, c^2 + 4t > 0$ или $c^2 + 4t \leq 0$	$(0, \sqrt[4]{-t})$ или $(\sqrt[4]{-t}, \infty)$	$\emptyset$

**Замечание 2.1.5.** Потенциал  $V = A|\theta| + B$  является аналогом потенциала гравитационного взаимодействия Ньютона, а  $V = \frac{A}{\theta^2} + B$  аналогом пружинного взаимодействия Гука.

**Комментарий 2.2.** Как в римановом так и в псевдоримановом случаях поверхность Бертрана задается пятеркой параметров  $(c, t, \mu, \hat{a}, \hat{b}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Q}_{>0} \times \mathbb{R}^2$  с некоторыми ограничениями, указанными в замечаниях 2.1.3, 2.1.4. Параметры  $c, t$  сильнее всего влияют

на форму поверхности, параметр  $\mu$ , как можно видеть из замечания 2.1.3, уже слабее (о том как  $\mu$  влияет на форму поверхности см. подробнее комментарий 1.2), а параметры  $\hat{a}, \hat{b}$  показывают лишь какой кусок поверхности мы берем. Далее за исключением специально оговоренных случаев речь идет о максимальных поверхностях Бертрана.

Например, в римановом случае при  $\mu = 1, t = 0, c = 1$  имеем проколотую полусферу, при  $\mu = 1, t = 0, c = 0$  имеем проколотую плоскость, при  $\mu = 1, t = 0, c < 0$  имеем проколотую плоскость Лобачевского [56].

Для семейства поверхностей Бертрана  $S'$  с псевдоримановой метрикой нарисуем плоскость изменения параметров  $c, t$  и опишем максимальные поверхности, соответствующие различным значениям этих параметров (параметры же  $\mu, \hat{a}, \hat{b}$  менее существенно влияют на форму поверхности). Для удобства на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с координатами  $(c, t)$  выделим несколько множеств:  $l_1 := \{(c, t) : t = 0, c < 0\}$ ,  $\Omega_1 := \{(c, t) : t > 0\}$ ,  $\Omega_2 := \{(c, t) : c < 0, t < 0, c^2 + 4t > 0\}$  (см. рис. 2.1).

При значении параметров  $(c, t)$  из области  $l_1$  на соответствующей максимальной поверхности  $S'$  существует согласно теореме 6 два замыкающих потенциала  $V_1 = A\theta + B$ , где  $A$  отрицательная,  $B$  – произвольная;  $V_2 = A\theta^{-2} + B$ , где  $A$  положительная,  $B$  – произвольная константы. Граничная параллель  $\theta = 0$  согласно определению 1.1.2 является экватором, параллель  $\theta = \sqrt{-c}$  абсолютном.

При значении параметров  $(c, t)$  из области  $\Omega_1$  на соответствующей максимальной поверхности существует только один тип замыкающего потенциала  $V = A\theta^{-2} + B$ , где  $A > 0$ . Граничная параллель  $\theta = 0$  согласно определению 1.1.2 является полюсом, а параллель  $\theta = \theta_2$  – абсолютном.

В случае  $(c, t) \in \Omega_2$  имеем две области, в которых может варьироваться  $\theta$ :  $(\theta_1, \sqrt[4]{-t})$  и  $(\sqrt[4]{-t}, \theta_2)$ , где  $\theta_1 = \sqrt{\frac{-c - \sqrt{c^2 + 4t}}{2}}$ ,  $\theta_2 = \sqrt{\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4t}}{2}}$ , что соответствует двум максимальным поверхностям. Здесь существует только один замыкающий потенциал  $\frac{A}{\theta^2} + B$ , где  $A(\theta^4 + t) > 0$ . Граничные параллели  $\theta = \sqrt[4]{-t}$  является экватором, параллели  $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_2$  являются абсолютными.

Две максимальные поверхности  $S_1 \approx (\theta_1, \sqrt[4]{-t}) \times S^1$  и  $S_2 \approx (\sqrt[4]{-t}, \theta_2) \times S^1$  можно гладко склеить по экватору, т.е. добавить одну параллель  $\theta = \sqrt[4]{-t}$  и получить объединение  $S_{12} \approx S_1 \cup (\{\sqrt[4]{-t}\} \times S^1) \cup S_2 \approx (\theta_1, \theta_2) \times S^1$ , которое можно рассматривать как гладкое многообразие вращения. Поверхность  $S_{12}$  является поверхностью с одним экватором, а потому не является поверхностью Бертрана (см. определение 2.1.2), хотя любая ее связная  $S^1$ -подповерхность (т.е. являющаяся объединением параллелей исходной), не содержащая экватор, уже является поверхностью Бертрана.

При других значениях параметров  $(c, t)$  поверхности Бертрана с метрикой (2.1.8) не существует, что существенно отличает риманов и псевдориманов случаи. В римановом случае при любых значениях параметров  $(c, t)$  существовали соответствующие поверхности Бертрана (см. рисунок 2.2).

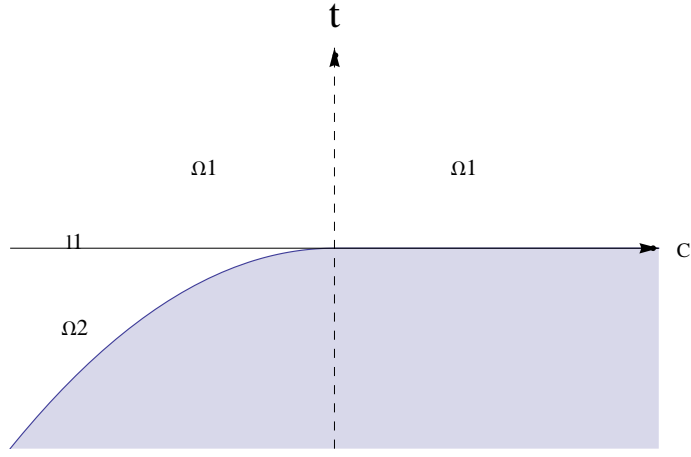


Рис. 2.1: Плоскость параметров  $c, t$  и её разбиение на зоны  $l_1, \Omega_1, \Omega_2$ , отвечающие различным типам поверхностей Бертрана с псевдоримановой метрикой.

На рисунке 2.2 выделены следующие зоны: точка  $(0, 0)$ , луч  $l_1 = \{(c, t) : c > 0, t = 0\}$ , луч  $l_2 = \{(c, t) : c < 0, t = 0\}$ , кривая  $l_3 = \{(c, t) : c < 0, c^2 + 4t = 0\}$ , область  $\Omega_1 = \{(c, t) : t > 0\}$ , область  $\Omega_2 = \{(c, t) : c^2 + 4t > 0, c < 0, t < 0\}$ , область  $\Omega_3 = \{(c, t) : c^2 + 4t < 0\} \cup \{(c, t) : c^2 + 4t \geq 0, t < 0, c > 0\}$ .

В римановом случае есть “нулевой” пример – это плоскость, которая определяется значениями параметров  $c = t = 0, \mu = 1, \hat{a} = 0, \hat{b} = \infty$ , на ней существует потенциал Ньютона и потенциал Гука, приводящие к замкнутым траекториям, движение под действием которых изучено лучше всего (см. подробнее после определения 1.1.11).

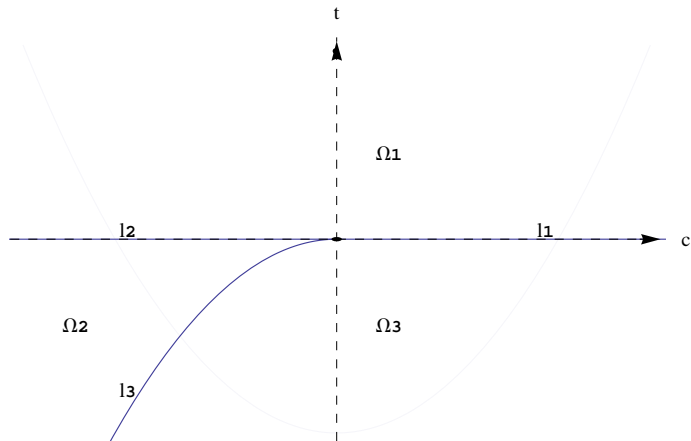


Рис. 2.2: Плоскость параметров  $c, t$  и её разбиение на зоны  $l_1, l_2, l_3, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ , отвечающие различным типам поверхностей Бертрана с римановой метрикой.

**Замечание 2.1.6.** Как уже отмечалось в начале раздела теорему 6 можно вывести из теоремы 3. В самом деле нужно вернуться к уравнениям орбит (1.1.9) в бертрановских ко-

ординатах (они параметризованы кинетическим моментом  $K$ ):  $\theta''_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{K^2} \left( V(\theta) - \frac{K^2}{2a_{22}^2(\theta)} \right)'_{\theta}$ . Эти уравнения являются обобщенным семейством уравнений Бертрана (1.2.1), где за  $z(\varphi)$  берется  $\theta(\varphi)$ , за  $\rho(z)$  берется  $-\left(\frac{1}{2a_{22}^2(\theta)}\right)'_{\theta} = \frac{a'_{22}(\theta)}{a_{22}^3(\theta)}$ , соответственно за  $R(z) = \frac{1}{a_{22}^2(\theta)}$ , за  $\Psi(z)$  берется  $-V'(\theta)$ , соответственно за  $W(z)$  берется  $-V(\theta)$ :  $z''_{\varphi\varphi} + \rho(z) = \frac{1}{K^2} \Psi(z)$ . Заметим также, что в виду того, что  $a'_{22}(\theta) \neq 0$  и  $\rho = \frac{a'_{22}}{a_{22}^3}$ , получаем, что  $\rho(z)$  не имеет нулей. Значит, выполняются условия теоремы 3 и, применяя ее, получаем для системы (1.2.1) все пары функций  $(\rho(z), \Psi(z))$ , таких что функция  $\Psi(z)$  является  $\rho$ -замыкающей. Возвращаясь теперь к  $\theta$ ,  $a_{22}(\theta)$ ,  $V(\theta)$  получаем описание всех замыкающих потенциалов  $V(\theta)$  для каждой поверхности  $S'$  с псевдоримановой метрикой  $ds^2 = \mu^4 a_{22}^4(\theta) d\theta^2 - a_{22}^2(\theta) d\varphi^2$ . Однако далее будет дано более геометрическое доказательство теоремы 6, которое повторяет многие этапы доказательства теоремы 3, но также имеет и отличия.

Стоит отметить, что замкнутость орбит  $\theta(\varphi)$  означает соизмеримость их минимальных периодов с  $\pi$ , что является частным случаем попарной соизмеримости периодов некруговых орбит. На самом деле из теоремы 3 можно вывести более сильное утверждение, описывающее все поверхности вращения без экваторов, допускающие наличие потенциалов, приводящих к орбитам, являющимся графиками постоянных или периодических функций  $\theta(\varphi)$  с попарно соизмеримыми (и в действительности равными) минимальными положительными периодами.

## 2.2 Свойства орбит и эффективного потенциала

Пусть происходит движение по поверхности  $S' \approx (a, b) \times S^1$  с индефинитной метрикой (1.1.2) под действием центрального гладкого потенциала  $V(u)$  и  $u(\varphi)$  – орбита с кинетическим моментом  $K$ . Эффективный потенциал определяет внешний вид орбит и помогает в доказательстве многих их свойств.

**Определение 2.2.1.** Для движения с кинетическим моментом  $K$  определим границы орбиты  $u_1 := \inf u(\mathbb{R}^1)$  – *перигентр*,  $u_2 := \sup u(\mathbb{R}^1)$  – *апоцентр*, а также *эффективный потенциал*  $W(u) = V(u) - \frac{K^2}{2a_{22}^2(u)}$ . (в римановом случае  $V(u) + \frac{K^2}{2a_{22}^2(u)}$ )

Особое значение при изучении орбит в центральном поле имеют круговые орбиты. Следующее утверждение даёт критерий того, что орбита  $u = u_0$  (параллель) будет круговой для данного потенциала  $V(u)$ . А именно справедливо

**Предложение 2.1.** *Параллель  $\{u_0\} \times S^1$  является круговой орбитой при некотором  $K$  (т.е.  $u = u_0$  – решение уравнения (1.1.7)) тогда и только тогда, когда  $\operatorname{sgn} V'(u_0) = -\operatorname{sgn} a'_{22}(u_0)$ .*

**Доказательство.** Для круговой орбиты  $u' = 0, u'' = 0$ , согласно (1.1.7) это влечёт  $-K^2 a'_{22}(u_0) = V'(u_0) a_{22}^3(u_0)$ . Учитывая, что всюду  $a_{22} > 0$  и  $K^2 > 0$ , получаем требуемое совпадение знаков. Обратно при  $\operatorname{sgn} a'_{22}(u_0) = -\operatorname{sgn} V'(u_0)$  рассмотрим  $K =$

$\sqrt{-\frac{V'(u_0)a_{22}^3(u_0)}{a'_{22}(u_0)}}$ . Тогда  $u = u_0 = const$  – будет решением уравнения (1.1.7) при выбранном  $K$ .  $\square$

**Замечание 2.2.1.** Условие со знаками можно переписать в терминах эффективного потенциала. Параллель  $u = u_0$  является круговой орбитой с кинетическим моментом  $K$  тогда и только тогда когда  $u_0$  – критическая точка эффективного потенциала  $W(u) = V(u) - \frac{K^2}{2a_{22}^2(u)}$ . Это верно, т.к. точка  $u_0$  критическая для  $W(u) \Leftrightarrow W'(u_0) = 0$ , т.е.  $-K^2 a'_{22}(u_0) = V'(u_0)a_{22}^3(u_0)$ , далее повторяются рассуждения доказательства предложения 2.1.

Используя предложение 2.1 легко показать, что при отсутствии круговой орбиты не будет ни одной замкнутой, даже ограниченной орбиты. Более точно, если существует ограниченная орбита с кинетическим моментом  $K$ , тогда существует и круговая орбита с тем же кинетическим моментом.

Орбиты при движении в центральном поле в пространстве  $\mathbb{R}^3$  обладают осью симметрии (если они ограничены). Похожим свойством обладают орбиты и на поверхностях вращения.

**Предложение 2.2.** Пусть  $u = u(\varphi)$  – орбита (решение уравнения 1.1.7) с критической точкой  $(\varphi_0, u(\varphi_0))$ , т.е.  $u'(\varphi_0) = 0$ . Тогда график функции  $u(\varphi)$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с декартовыми координатами  $(u, \varphi)$  симметричен относительно прямой  $\varphi = \varphi_0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство проведём в бертрановских координатах  $(\theta, \varphi)$  (см. зам. 1.1.2). Симметрия означает  $\theta(\varphi) = \tilde{\theta}(\varphi) := \theta(\varphi_0 - (\varphi - \varphi_0))$ . Прямая подстановка показывает, что функция  $\tilde{\theta}(\varphi)$  удовлетворяет уравнению (1.1.9) орбиты  $\theta''_{\varphi\varphi} = -W'(\theta)$ , где  $W$  – эффективный потенциал. А поскольку начальные условия совпадают  $\theta(\varphi_0) = \tilde{\theta}(\varphi_0)$  и  $\theta'(\varphi_0) = \tilde{\theta}'(\varphi_0)$ , то решения  $\theta(\varphi)$  и  $\tilde{\theta}(\varphi)$  совпадают.  $\square$

Отсюда следует, что критические точки являются локальными экстремумами, более того они являются также глобальными экстремумами, т.е. у функции  $u = u(\varphi)$  вообще нет локальных максимумов и минимумов и седловых точек.

Интегралы движения  $E, K$  тесно связаны с максимально и минимально удалёнными от притягивающего центра точками (пери- и апоцентры) орбиты  $u(\varphi)$ .

**Предложение 2.3.** Пусть  $a < a' < b' < b$ . Тогда

(a) Если существует ограниченное решение  $u(\varphi)$  уравнения (1.1.7) с энергией  $E$ , кинетическим моментом  $K$ , перицентром  $a'$ , апоцентром  $b'$ . То  $\forall u_0 \in (a', b')$   $W(u_0) < E$  и

$$W(a') = W(b') = E. \quad (2.2.1)$$

(b) Верно обратное. Пусть для некоторого  $K$  выполнено  $V(a') - \frac{K^2}{2a_{22}^2(a')} = V(b') - \frac{K^2}{2a_{22}^2(b')} = E$ , а также  $\forall u_0 \in (a', b')$   $W(u_0) < E$ . Тогда существует ограниченное решение  $u(\varphi)$  уравнения (1.1.7) с энергией  $E$ , кинетическим моментом  $K$ , перицентром  $a'$  и апоцентром  $b'$ .

(с) Если задано решение  $u(\varphi)$  уравнения (1.1.7) с перицентром  $a'$ , апоцентром  $b'$ , энергией  $E$  и  $u_0 \in \{a', b'\}$ . Тогда  $u_0 \in u(\mathbb{R}^1) \Leftrightarrow W'(u_0) \neq 0$ .

Эффективный потенциал на протяжении всей орбиты не превосходит энергии, и сравнивается с ней только в крайних точках (пери- и апоцентрах). Перицентр (апоцентр)  $a'$  достигается тогда и только тогда, когда производная эффективного потенциала в нём не ноль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Согласно (1.1.8)  $E = W(u) + \frac{a_{11}^2(u)}{2a_{22}^4(u)}K^2u_\varphi'^2$ , отсюда (в силу положительности второго слагаемого) следует  $W(u)|_{[a', b']} \leq E$ . Пусть достигается апоцентр  $b'$  при  $\varphi = \varphi_2$ . Тогда в силу его максимальности  $u'_\varphi(\varphi_2) = 0$ , отсюда в силу (1.1.8)  $E = W(b') + 0$ . Пусть теперь апоцентр  $b'$  не достигается, т.е.  $u(\varphi)$  стремится к  $b'$  с ростом  $\varphi$ , причем это стремление монотонное в силу предложения 2.2. Тогда  $u' \rightarrow 0 \Rightarrow W \rightarrow E$  (1.1.8), а в силу гладкости  $W(u) \rightarrow W(b')$ , имеем в пределе  $W(b') = E$ .

(б) Рассмотрим произвольное  $u_1 \in (a', b')$ , тогда по теореме о существовании и единственности решения ОДУ существует решение  $u(\varphi)$  уравнения (1.1.8) с н.у.  $u(0) = u_1$ , это решение будет с энергией  $E$ . Далее это решение можно продолжить на весь интервал  $(a', b')$ .

(с) Если перицентр  $b'$  достигается в некотором  $\varphi_0$ , то для такой орбиты  $u(\varphi_0) = b'$  и  $u'(\varphi_0) = 0$ , заметим, что если  $W'(b') = 0$ , то  $u = b'$  – постоянное решение уравнения (1.1.7), а это противоречит теореме о единственности решения, т.к. через  $(\varphi_0, b')$  проходят исходное и постоянное решения.

Если же перицентр  $b'$  не достигается, то при стремлении  $u$  к  $b'$  верно, что  $u', u''$  стремятся к нулю, следовательно из уравнения (1.1.7) производная  $W'(u) \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow b'$ , а значит и равна 0.  $\square$

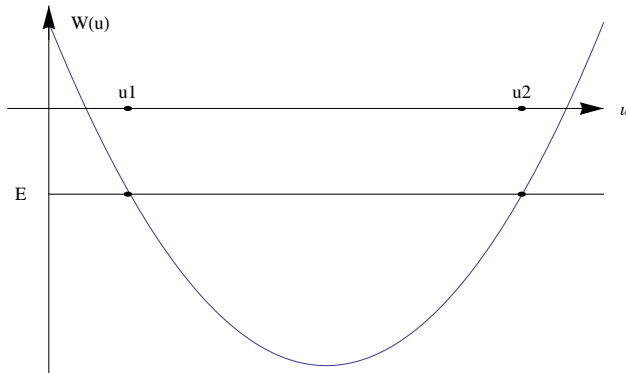


Рис. 2.3: Эффективный потенциал орбиты, являющейся графиком периодической функции  $u(\varphi)$ .

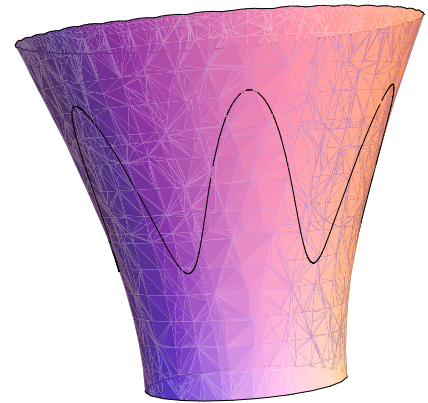


Рис. 2.4: Орбита, являющаяся графиком периодической функции  $u(\varphi)$ .



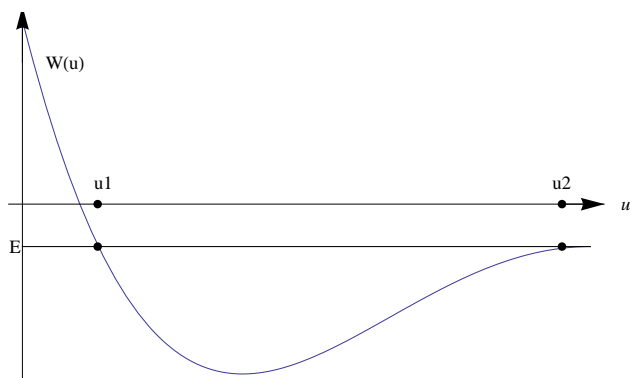


Рис. 2.5: Эффективный потенциал орбиты, являющейся графиком непериодической функции  $u(\varphi)$ .

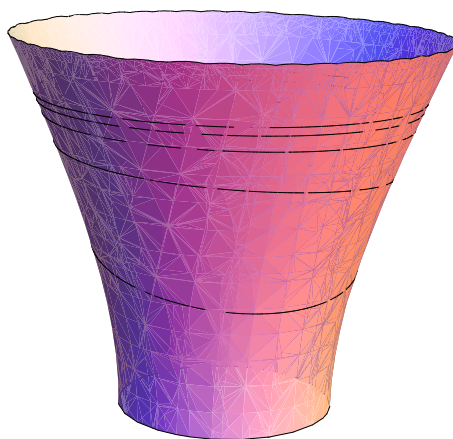


Рис. 2.6: Орбита, являющаяся графиком непериодической функции  $u(\varphi)$ .

Для произвольной орбиты с перигелием  $u_1$  и апогелием  $u_2$  (энергией  $E$ ) эффективный потенциал  $W(u)$  на отрезке  $(u_1, u_2)$  имеет вид ямы  $W(u) < E$ . Предложение 2.3 утверждает, что в случае, когда график  $W(u)$  пересекает уровень  $E$  в точках  $u_1, u_2$  трансверсально ( $W'(u_1) \neq 0, W'(u_2) \neq 0$ ), то орбита достигает параллели  $u = u_1, u = u_2$  и является графиком периодической функции  $u(\varphi)$ , колеблется между двумя указанными параллелями. На рис. 2.3 график эффективного потенциала для орбиты, являющейся графиком периодической функции  $u(\varphi)$ , а на рис. 2.4 общий вид орбиты, являющейся графиком периодической функции  $u(\varphi)$ . На рис. 2.5 представлен график  $W(u)$ , который пересекает уровень  $E$  в точке  $u_1$  трансверсально, а в точке  $u_2$  касается уровня  $E$ . Соответствующая орбита изображена на рис. 2.6, она достигает своего минимума  $u_1$ , но не достигает  $u_2$  бесконечно приближаясь к нему.

Потенциальная яма (график  $W(u)$ ), даже в случае замкнутой орбиты, может иметь множество особенностей, в т.ч. несколько локальных минимумов, плоские участки и др. Оказывается, что в случае замыкающего потенциала  $V(u)$  яма имеет только очень специальный вид – у неё множество глобальных минимумов образовано точкой. В следующем утверждении свойство замыкаемости ослаблено до периодичности (без требования попарной соизмеримости периодов), поэтому вместо одноточечного множества локальных минимумов в формулировке фигурирует отрезок  $[c_1, c_2]$ .

**Предложение 2.4.** Пусть при некоторых  $K$  и  $E$  на  $(a', b') \subset (a, b)$  функция  $W(u) = V(u) - \frac{K^2}{2a_{22}^2(u)}$  строго меньше  $E$  и  $W(a') = W(b') = E$ . Пусть  $E_0 = \min_{[a', b']} W$ . Тогда следующие условия эквивалентны

1. Любая орбита, с уровнем энергии  $E' \in (E_0, E]$ , кинетическим моментом  $K$  и начальным условием  $u(0) \in (a', b')$  будет являться графиком периодической функции  $u(\varphi)$ .
2. Существует  $[c_1, c_2] : W'|_{[a', c_1]} < 0, W'|_{[c_1, c_2]} = 0, W'|_{(c_2, b']} > 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.  $2 \Rightarrow 1$ . Уровень  $E'$  пересекает график  $W(u)$  в двух точках  $(u_1, E')$ ,  $(u_2, E')$ . По предложению 2.3 существует ограниченное решение с перицентром  $u_1$  и апоцентром  $u_2$ , причем оба они достигаются (т.к.  $W'(u_1) < 0, W'(u_2) > 0$ ) – это решение и будет нашей орбитой с энергией  $E'$ . Периодичность следует из предложения 2.2.

$1 \Rightarrow 2$ . Если функция  $W'(u)$  не имеет вид, указанный в условии, то существуют  $u_1, u_2 \in [a', b']$  такие, что  $E' := W(u_1) = W(u_2) < E, W'|_{(u_1, u_2)} < E'$ , и без ограничения общности  $W'(u_1) = 0$ . Тогда по предложению 2.3 существует орбита с энергией  $E'$ , перицентром  $u_2$  и недостижимым апоцентром  $u_1$ , более того она не будет являться графиком периодической функции  $u(\varphi)$ . Противоречие.  $\square$

**Замечание 2.2.2.** Если усилить первый пункт, потребовав не периодичность функций, графиками которых являются орбиты, а замкнутость орбит (или хотя бы попарную соизмеримость периодов указанных непостоянных функций), то у эффективного потенциала не будет дна, а будет невырожденный глобальный минимум, т.е.  $\exists u_0 : W'|_{[a', u_0]} < 0, W'(u_0) = 0, W''(u_0) \neq 0, W'|_{(u_0, b']} > 0$ . Обратное, вообще говоря, неверно.

Для того, чтобы убедиться в этом перейдем к бертрановским координатам (замечание 1.1.2). В самом деле, пусть  $W$  имеет дно, т.е. отрезок  $[c_1, c_2]$  как в пункте 2 предложения 2.4. Рассмотрим уровень энергии  $E' \in (E_0, E)$  и орбиту  $\{\theta = \theta(\varphi)\}$  с такой энергией и таким эффективным потенциалом. Тогда она замкнута и полупериод функции  $\theta(\varphi)$  соизмерим с  $\pi$ , т.е.

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{K d\theta}{\sqrt{2(E' - W(\theta))}} = \mu\pi, \quad (2.2.2)$$

где  $\mu$  – рациональная положительная константа. В силу (1.1.8), а также  $a'_{22} \neq 0$  левая часть непрерывно зависит от  $\theta_1, \theta_2$  когда  $\theta_1 \in (a', \theta_0), \theta_2 \in (\theta_0, b')$ . А правая часть пробегает дискретное множество значений из множества  $\pi\mathbb{Q}$ , такое возможно только, если левая и правая части постоянны. С другой стороны написанный интеграл распадается в сумму трех

$$\int_{\theta_1}^{c_1} \frac{K d\theta}{\sqrt{2(E' - W)}} + \int_{c_1}^{c_2} \frac{K d\theta}{\sqrt{2(E' - W)}} + \int_{c_2}^{\theta_2} \frac{K d\theta}{\sqrt{2(E' - W)}}.$$

Крайние два положительны. А центральный равен  $\frac{(c_2 - c_1)K}{\sqrt{2(E' - E_0)}}$ , т.к.  $W|_{[c_1, c_2]} = E_0$ . При стремлении  $E'$  к  $E_0$  центральный интеграл (а значит и вся сумма) стремится к  $\infty$ , что противоречит постоянству полупериода.

Невырожденность минимума  $\theta_0$  доказывается аналогично, а именно справедлива оценка

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{K d\theta}{\sqrt{2(E - W(\theta))}} \geq \int_{\theta_1}^{\theta_0} \frac{K d\theta}{\sqrt{2(E - W(\theta))}},$$

где  $\theta_0 \in [\theta_1, \theta_2]$ . Далее в силу предложения 2.3  $E = W(\theta_1) = W(\theta_2)$ , а значит интеграл оценивается

$$\int_{\theta_1}^{\theta_0} \frac{K d\theta}{\sqrt{2(E - W(\theta))}} \geq \frac{K}{\sqrt{2}} \frac{\theta_0 - \theta_1}{\max \sqrt{W(\theta_1) - W(\theta)}} = \frac{K}{\sqrt{2}} \frac{\theta_0 - \theta_1}{\sqrt{W(\theta_1) - W(\theta_0)}}.$$

Последнее равенство выполнено в силу того, что  $\theta_0$  – минимум  $W(\theta)$ . А в силу того, что  $W(\theta_1) - W(\theta_0) = W'(\theta_0)(\theta_1 - \theta_0) + W''(\theta_0)\frac{(\theta_1 - \theta_0)^2}{2!} + o((\theta_1 - \theta_0)^2)$  и  $W'(\theta_0) = W''(\theta_0) = 0$  получается, что последняя дробь есть отношение функции  $\frac{K}{\sqrt{2}}(\theta_0 - \theta_1)$  к функции  $o(\theta_0 - \theta_1)$ , и оно стремится к  $\infty$ , когда  $\theta_1 \rightarrow \theta_0$ , что противоречит (2.2.2). Свойство доказано.

Сформулируем теперь самое сильное свойство замыкающего потенциала, которое будет использоваться при обобщении теоремы Бертрана на поверхности вращения.

**Предложение 2.5.** Пусть  $V(\theta)$  – замыкающий потенциал на  $S' \approx (a, b) \times S^1$  без экваторов (всюду  $a'_{22} \neq 0$ ) с замкнутой некруговой орбитой  $\tilde{\theta}(\varphi)$ . Пусть  $a', b'$  соответственно пери- и апоцентры орбиты  $\tilde{\theta}(\varphi)$ . Тогда  $\forall \theta_1 < \theta_2 \in [a', b']$  существует замкнутая орбита с перицентром  $\theta_1$  и апоцентром  $\theta_2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если бы такое решение существовало, то в силу (1.1.10)

$$V(\theta_1) - \frac{K^2}{2a_{22}^2(\theta_1)} = V(\theta_2) - \frac{K^2}{2a_{22}^2(\theta_2)} = E. \quad (2.2.3)$$

Отсюда находим (решая как систему уравнений относительно  $E$  и  $K$ ), что кинетический момент и энергия у (не обязательно замкнутой!) орбиты  $\{\theta = \theta(\varphi)\}$ , где  $\theta(\varphi)$  – периодическая функция, высчитываются через пери и апоцентры так:

$$K^2 = 2 \frac{V(\theta_2) - V(\theta_1)}{\frac{1}{a_{22}^2(\theta_2)} - \frac{1}{a_{22}^2(\theta_1)}} = 2 \frac{V(\theta_2) - V(\theta_1)}{R(\theta_1) - R(\theta_2)}, \quad (2.2.4)$$

$$E = \frac{V(\theta_1)a_{22}^2(\theta_1) - V(\theta_2)a_{22}^2(\theta_2)}{a_{22}^2(\theta_1) - a_{22}^2(\theta_2)} = \frac{V(\theta_1)R(\theta_2) - V(\theta_2)R(\theta_1)}{R(\theta_2) - R(\theta_1)}, \quad (2.2.5)$$

где функция  $R(\theta) := -\frac{1}{a_{22}^2(\theta)}$  введена для удобства вычислений.

Значит, наша орбита (если она существует) должна быть именно с такими  $E, K$ . Рассмотрим уравнение (1.1.7) с указанными  $E$  и  $K$  и начальным условием  $\theta(0) = \theta_1$ . Проверим корректность построенного решения, т.е. что оно действительно существует и флуктуирует между  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Если бы эффективный потенциал искомого решения  $W(\theta) = V(\theta) + \frac{K^2}{2}R(\theta)$  имел бы вид ямы, т.е.  $W(\theta_1) = W(\theta_2) = E, W(\theta) < E \forall \theta \in (\theta_1, \theta_2)$ , то

согласно предложению 2.3 существовала бы требуемая орбита. В краях  $\theta_1, \theta_2$  сложностей никаких нет, т.к. по построению (в силу (2.2.4), (2.2.5)) выполнено  $W(\theta_1) = E = W(\theta_2)$ .

**Первая сложность.** Может оказаться, что эффективный потенциал  $W = V + \frac{K^2}{2}R$  будет всюду превосходить  $E$ , т.е.  $W|_{(\theta_1, \theta_2)} > E$ . Тогда согласно предложению 2.3 решение вообще не существует в  $(\theta_1, \theta_2)$ . Покажем от противного, что такого быть не может.

Обозначим за  $\tilde{E}$  и  $\tilde{K}$  – энергию и кинетический момент орбиты  $\tilde{\theta}(\varphi)$ . График эффективного потенциала  $\tilde{W}(\theta)$  для исходной орбиты  $\tilde{\theta}(\varphi)$  состоит из убывающей  $[a', c]$  и возрастающей  $[c, b']$  частей, разделённых глобальным невырожденным минимумом  $\theta = c$ . Это вынуждает нас рассматривать случаи.

Случай первый:  $\theta_1$  в убывающей части, а  $\theta_2$  в возрастающей. Тогда для эффективного потенциала исходной орбиты  $\tilde{\theta}$  выполнено  $\tilde{W}'(\theta_1) \leq 0, \tilde{W}'(\theta_2) > 0$  (одно из неравенств обязательно строгое, т.к.  $W'$  обращается в ноль только в точке  $c$ ), т.е.  $V'(\theta_1) + \frac{\tilde{K}^2}{2}R'(\theta_1) \leq 0, V'(\theta_2) + \frac{\tilde{K}^2}{2}R'(\theta_2) > 0$ . А т.к. эффективный потенциал новой орбиты  $W|_{(\theta_1, \theta_2)} > E$ , то  $W'(\theta_1) \geq 0, W'(\theta_2) \leq 0$ , что означает  $V'(\theta_1) + \frac{K^2}{2}R'(\theta_1) \geq 0, V'(\theta_2) + \frac{K^2}{2}R'(\theta_2) \leq 0$ . Отсюда получается противоречие  $K^2 \geq \tilde{K}^2 > K^2$ .

Случай второй: без ограничения общности  $\theta_1, \theta_2$  в зоне убывания. Функция  $R$  монотонная, т.к.  $a'_{22} \neq 0 \Rightarrow R' \neq 0$ . Значит функция  $(K^2 - \tilde{K}^2)R(\theta)$  тоже монотонная. Установим характер монотонности. В силу (2.2.3)

$$V(\theta_1) + \frac{K^2}{2}R(\theta_1) = V(\theta_2) + \frac{K^2}{2}R(\theta_2). \quad (2.2.6)$$

В то же время  $\theta_1, \theta_2$  в зоне убывания эффективного потенциала  $\tilde{W}$  исходной орбиты, значит  $\tilde{W}(\theta_1) > \tilde{W}(\theta_2)$ . Что даёт

$$V(\theta_1) + \frac{\tilde{K}^2}{2}R(\theta_1) > V(\theta_2) + \frac{\tilde{K}^2}{2}R(\theta_2). \quad (2.2.7)$$

Совмещая (2.2.6), (2.2.7) получим

$$\frac{R(\theta_1)}{2}(\tilde{K}^2 - K^2) > \frac{R(\theta_2)}{2}(\tilde{K}^2 - K^2).$$

Что с учётом монотонности  $(K^2 - \tilde{K}^2)R(\theta)$  даёт нам, что  $(K^2 - \tilde{K}^2)R(\theta)$  строго возрастает.

Далее в силу того, что  $W(\theta_1) = W(\theta_2) = E$ ,  $W|_{(\theta_1, \theta_2)} > E$  можно заключить, что у графика эффективного потенциала  $W$  существует глобальный максимум, т.е.  $\exists \theta_0 \in (\theta_1, \theta_2) : W'(\theta_0) = 0$  и правее  $W$  убывает. Из того, что  $\tilde{W}(\theta_0) < \tilde{W}(a') = \tilde{W}(b')$  заключаем

$$V(\theta_0) + \frac{\tilde{K}^2}{2}R(\theta_0) < V(b') + \frac{\tilde{K}^2}{2}R(b'). \quad (2.2.8)$$

Что с учётом монотонности  $R$ :  $R(b')(K^2 - \tilde{K}^2) > R(\theta_0)(K^2 - \tilde{K}^2)$  даёт

$$V(\theta_0) + \frac{K^2}{2}R(\theta_0) > V(b') + \frac{K^2}{2}R(b'). \quad (2.2.9)$$

Таким образом в точке  $b'$  эффективный потенциал  $W$  больше, чем в точке  $\theta_0$ . Значит существует точка  $\theta_3$ :  $\theta_3 > \theta_0$ ,  $W(\theta_0) = W(\theta_3) = E_0$ ,  $\forall \theta \in (\theta_0, \theta_3) W(\theta) < E_0$ . Согласно предложению 2.3 существует орбита с перицентром  $\theta_0$ , апоцентром  $\theta_3$ , энергией  $E_0$  и кинетическим моментом  $K$ . Но  $W'(\theta_0) = 0$ , значит она не достигает своего апоцентра, что противоречит замкнутости всех ограниченных орбит.

**Вторая сложность.** Может оказаться, что  $W|_{(\theta_1, \theta_2)} \leq E$ , причём в некоторых точках  $W$  достигает  $E$ , но не во всех. Тогда между двумя соседними такими точками, или между такой точкой  $\theta_0$  и одним из краёв (без ограничения общности  $\theta_2$ ) потенциал имеет вид ямы, т.е.  $W(\theta_0) = W(\theta_2) = E$ ,  $\forall \theta \in (\theta_0, \theta_2) W(\theta) < E$ . По предложению 2.3 существует орбита между  $\theta_0$  и  $\theta_2$ . Но т.к.  $W'(\theta_0) = 0$ , то орбита не достигает значения  $\theta_0$ , значит незамкнута, что противоречит замкнутости всех ограниченных орбит.

**Третья сложность.** Случай, когда  $W \not\equiv E$  на  $[\theta_1, \theta_2]$  и есть точка  $\theta_0$  такая, что  $W(\theta_0) > E$  разбирается аналогично первой сложности.

**Последняя сложность.** Может оказаться, что эффективный потенциал всюду на  $[\theta_1, \theta_2]$  постоянен, т.е.  $W|_{[\theta_1, \theta_2]} \equiv \text{const}$ . Докажем, что такого быть не может. Случай, когда потенциал  $W \geq E$  на  $(\theta_1, \theta_2)$ , при этом не постоянен и не всюду больше  $E$ , разбирается аналогично первой сложности.

В силу того, что  $\tilde{W}$  имеет зоны убывания  $[a', c]$  и возрастания  $[c, b']$  нужно рассмотреть два случая.

Случай первый:  $\theta_1$  лежит в зоне убывания, а  $\theta_2$  лежит в зоне возрастания. Тогда  $c \in [\theta_1, \theta_2]$  и  $W'(c) = 0$  как и  $\tilde{W}'(c) = 0$ ; что означает  $V'(c) + \frac{K^2}{2}R'(c) = 0 = V'(c) + \frac{\tilde{K}^2}{2}R'(c)$ . Отсюда следует, что  $K = \tilde{K}$  и  $W = \tilde{W}$ . Но у  $\tilde{W}$  нет отрезков постоянства.

Случай второй: без ограничения общности  $\theta_1, \theta_2$  лежат в зоне убывания. Если  $W = \text{const}$  на  $[\theta_1, \theta_2]$ , то  $W' \equiv 0$  на  $[\theta_1, \theta_2]$ , что означает  $V' + \frac{K^2}{2}R' = 0$ . Отсюда следует

$$\tilde{W}'|_{[\theta_1, \theta_2]} = V' + \frac{\tilde{K}^2}{2}R' = -\frac{K^2}{2}R' + \frac{\tilde{K}^2}{2}R' = \frac{R'}{2}(\tilde{K}^2 - K^2). \quad (2.2.10)$$

Построим последовательность орбит, у которых полупериод неограниченно возрастает. Пусть  $[\theta_1, \theta_{22}]$  – максимальный из отрезков вида  $[\theta_1, x]$ , на которых  $W \equiv \text{const}$ . Очевидно  $x < c$ , т.к. иначе  $W'(c) = 0 = \tilde{W}'(c) \Rightarrow \tilde{K} = K \Rightarrow W = \tilde{W}$ , а  $\tilde{W}(c) < \tilde{W}(\theta_1)$ . Рассмотрим последовательность  $\{x_i\} \in (\theta_{22}, c)$ , монотонно стремящихся к  $\theta_2$ . Для каждого  $x_i$  рассмотрим эффективный потенциал  $W_i$ , соответствующий орбитам  $\gamma_i$  с перицентром  $\theta_1$ , апоцентром  $x_i$  и кинетическим моментом  $K_i$  (это можно сделать в виду (2.2.5), (2.2.4)).

Верно, что  $W_i|_{[\theta_1, x_i]} \not\equiv \text{const}$ , т.к. иначе  $W'_i(\theta_1) = W'(\theta_1) \Rightarrow K_i = K \Rightarrow W_i = W$  на  $(a', b') \Rightarrow W$  постоянен на  $[\theta_1, x_i]$ , что противоречит условию  $x_i > \theta_{22}$ . Со всеми остальными сложностями мы умеем бороться, поэтому  $W_i$  имеет вид потенциальной ямы и, в силу замыкаемости  $V$ ,  $W_i$  убывает на  $[\theta_1, c_i]$ , возрастает на  $[c_i, x_i]$ , где  $c_i$  – единственный невырожденный минимум  $W_i$  на  $[\theta_1, x_i]$ .

Ни один минимум  $c_i$  не может попасть в отрезок  $[\theta_1, \theta_{22}]$ , т.к. иначе  $W'_i(c_i) = 0 = W'(c_i)$ , откуда следует равенство  $W_i$  и  $W$ , что как мы уже видели, невозможно. Полупериод

орбиты  $\gamma_i$  можно оценить так

$$\begin{aligned} 0.5\Phi_i &= \int_{\theta_1}^{c_i} \frac{K_i d\theta}{\sqrt{2}\sqrt{W_i(\theta_1) - W_i(\theta)}} \geq \int_{\theta_1}^{\theta_{22}} \frac{K_i d\theta}{\sqrt{2}\sqrt{W_i(\theta_1) - W_i(\theta)}} \geq \\ &\geq \int_{\theta_1}^{\theta_{22}} \frac{K_i d\theta}{\sqrt{2}\sqrt{W_i(\theta_1) - W_i(\theta_{22})}} = \frac{K_i(\theta_{22} - \theta_1)}{\sqrt{2}\sqrt{W_i(\theta_1) - W_i(\theta_{22})}}. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Оценка следует из того, что  $[\theta_1, \theta_{22}]$  промежуток убывания каждой из функций  $W_i$ . Теперь видно, что когда  $x_i \rightarrow \theta_{22}$  числитель стремится к  $K(\theta_{22} - \theta_1)$ , а знаменатель к  $\sqrt{2}\sqrt{W(\theta_1) - W(\theta_{22})} = 0$ . Т.е. полупериод неограниченно возрастает, а должен быть равен  $\mu\pi$  согласно рассуждениям, аналогичным замечанию 2.2.2.  $\square$

Установив необходимые связи между свойствами эффективного потенциала  $W(\theta)$  и свойствами орбит  $\theta(\varphi)$ , а также одно свойство замыкающего потенциала  $V(\theta)$  (предложение 2.5), докажем теорему 6.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.** Нужно доказать необходимость, т.е. поверхности с бертрановскими потенциалами могут иметь только указанную в теореме метрику, а сами потенциалы могут быть только такими, как указано в теореме. А также нужно выполнить проверку, что если поверхность имеет указанную метрику и на ней действует указанный потенциал, то все ограниченные орбиты будут замкнуты и будет существовать некруговая ограниченная орбита.

**Необходимость.** Проведём доказательство в бертрановских координатах (см. замечание 1.1.2). Пусть на поверхности задан замыкающий потенциал  $V(\theta)$ . Тогда существует замкнутая орбита с перигеием  $a'$  и апоцентром  $b'$ . Мы знаем (предложение 2.5), что между любыми двумя параллелями  $\theta_1, \theta_2$  из  $(a', b')$  можно выбрать замкнутую орбиту, которая будет флуктуировать между ними. Поскольку любая орбита должна быть замкнутой, то её период  $T$  должен быть соизмерим с  $2\pi$ . Запишем это условие:

$$T = 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{K^2}(E - V(\theta)) + \frac{1}{a_{22}^2(\theta)}}} = 2\pi\mu, \quad \mu \in \mathbb{Q}. \quad (2.2.12)$$

В силу того, что левая часть изменяется непрерывно при изменении  $\theta_1, \theta_2$ , а правая дискретно по множеству  $\pi\mathbb{Q}$  следует, что  $\mu = \text{const}$ . Выберем точку  $x = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$  и будем устремлять  $\theta_1, \theta_2$  к  $x$ . Введём обозначения  $R(\theta) = -\frac{1}{a_{22}^2(\theta)}$ ,  $\theta_1 = x - h$ ,  $\theta_2 = x + h$ ,  $\theta = x + ht$ , где  $t$  бегаёт по отрезку  $[-1, 1]$ , а  $h \rightarrow 0$ .

Имеем

$$\begin{aligned} V(\theta_1) &= V(x - h) = V(x) - V'(x)h + \frac{V''(x)}{2}h^2 - \frac{V'''(x)}{6}h^3 + \frac{V^{iv}(x)}{24}h^4 - \frac{V^v(x)}{5!}h^5 + o(h^5), \\ V(\theta_2) &= V(x + h) = V(x) + V'(x)h + \frac{V''(x)}{2}h^2 + \frac{V'''(x)}{6}h^3 + \frac{V^{iv}(x)}{24}h^4 + \frac{V^v(x)}{5!}h^5 + o(h^5), \end{aligned}$$

$$R(\theta_1) = R(x-h) = R(x) - R'(x)h + \frac{R''(x)}{2}h^2 - \frac{R'''(x)}{6}h^3 + \frac{R^{iv}(x)}{24}h^4 - \frac{R^v(x)}{5!}h^5 + o(h^5),$$

$$R(\theta_2) = R(x+h) = R(x) + R'(x)h + \frac{R''(x)}{2}h^2 + \frac{R'''(x)}{6}h^3 + \frac{R^{iv}(x)}{24}h^4 + \frac{R^v(x)}{5!}h^5 + o(h^5).$$

Разложим подынтегральное выражение в ряд (точнее в сумму конечного числа слагаемых) Тейлора и проинтегрируем. Заметим  $d\theta = d(x+ht) = hdt$ . Итак полупериод равен:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{V(\theta_2) - V(\theta_1)} d\theta}{\sqrt{V(\theta_2)R(\theta_1) - V(\theta_1)R(\theta_2) + V(\theta)R(\theta_2) - V(\theta)R(\theta_1) + R(\theta)V(\theta_2) - R(\theta)V(\theta_1)}} =$$

$$= \int_{x-h}^{x+h} \sqrt{\frac{2V'(x)}{V''(x)R'(x) - R''(x)V'(x)}} \frac{h\sqrt{h} \left(1 + \frac{V'''(x)}{12V'(x)}h^2 + o(h^3)\right) d(x+ht)}{h\sqrt{h}\sqrt{1-t^2}\sqrt{F_1(x)}} \quad (2.2.13)$$

Где

$$F_1(x) = 1 + ht \frac{R'V''' - V'R'''}{3(V''R' - R''V')} + h^2 \left( \frac{R'''V'' - R''V'''}{6(V''R' - R''V')} + \frac{V^{iv}R' - V'R^{iv}}{12(V''R' - R''V')} (1+t^2) \right) + o(h^2)$$

Дальнейшие преобразования приводят нас к:

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{2V'}{V''R' - R''V'}} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - h \sqrt{\frac{2V'}{V''R' - R''V'}} \frac{R'V''' - V'R'''}{6(V''R' - R''V')} \int_{-1}^1 \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} +$$

$$+ \frac{h^2}{12} \sqrt{\frac{2V'}{V''R' - R''V'}} \left[ \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \left( \frac{V'''}{V'} - \frac{\rho'''V'' - \rho''V'''}{V''R' - R''V'} - \frac{V^{iv}R' - V'R^{iv}}{2(V''R' - R''V')} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}} \left( \frac{(R'V''' - V'R''')^2}{(V''R' - R''V')^2} - \frac{V^{iv}R' - V'R^{iv}}{V''R' - R''V'} \right) \right] + o(h^2) \quad (2.2.14)$$

С учетом  $\frac{T}{2} = \mu\pi$ , а также  $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi$  заключаем, что

$$\mu = \sqrt{\frac{2V'}{V''R' - R''V'}}. \quad (2.2.15)$$

Далее второе слагаемое равно 0, т.к.  $\int_{-1}^1 \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} = 0$ .

Приравниваем третье слагаемое к нулю с учетом  $\int_{-1}^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}$ :

$$\frac{V'''}{V'} - \frac{R'''V'' - R''V'''}{V''R' - R''V'} - \frac{V^{iv}R' - V'R^{iv}}{2(V''R' - R''V')} + \frac{(R'V''' - V'R''')^2}{4(V''R' - R''V')^2} - \frac{V^{iv}R' - V'R^{iv}}{4(V''R' - R''V')} = 0. \quad (2.2.16)$$

Из последнего уравнения можно получить необходимое условие на замыкающий потенциал, если избавиться от  $R', R'', R''', R^{iv}$ . Для этого перепишем (2.2.15) в виде  $\frac{2V'}{\mu^2} = V''R' - R''V'$ . Продифференцируем два раза  $\frac{2V''}{\mu^2} = V''''R' - R''''V'$ ,  $\frac{2V'''}{\mu^2} = V^{iv}R' - R^{iv}V' + V''''R'' - R''''V''$ . Подставим из трех полученных соотношений  $R^{iv}, R''', R''$  в (2.2.16), придем к

$$3V''''V' = 4V'^2. \quad (2.2.17)$$

Отсюда находится  $V(\theta) = \frac{c_1}{(\theta+c_2)^2} + c_3$  или  $V(\theta) = c_1\theta + c_2$ . Где  $c_1, c_2, c_3$  – константы интегрирования. А зная  $V$  с помощью уравнения (2.2.15) находится  $R(\theta) = \frac{(\theta+c_2)^2}{\mu^2} + c_4 + c_5(\theta + c_2)^{-2}$ , где  $c_2, c_4, c_5$  – действительные константы.

**Проверка.** Проверим, что найденные потенциалы замыкающие. Для этого решим уравнение (1.1.8), посчитав функцию  $\theta(\varphi)$ .

Для поверхности  $G = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\theta^2+c)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu^2(\theta^2+c)} \end{pmatrix}$  и потенциала  $V = A\theta + B$  имеем:

$$\theta = \frac{A}{\mu^2 K^2} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2(E-B)\mu^2 K^2}{A^2} - c \frac{\mu^4 K^4}{A^2} \sin \frac{\varphi + \varphi_0}{\mu}} \right). \quad (2.2.18)$$

Для поверхности  $G = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\theta^2+c)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu^2(\theta^2+c)} \end{pmatrix}$  и потенциала  $V = \frac{A}{\theta^2} + B$  имеем:

$$\theta^2 = \frac{E-B}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{E-B}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{2A}{\mu^2 K^2} \sin \frac{2(\varphi + \varphi_0)}{\mu}}. \quad (2.2.19)$$

Для поверхности  $G = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\theta^2+c-t\theta^{-2})^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu^2(\theta^2+c-t\theta^{-2})} \end{pmatrix}$  и потенциала  $V = \frac{A}{\theta^2} + B$  имеем:

$$\theta^2 = \frac{E-B}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{E-B}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2}\right)^2 + t - \frac{2A}{\mu^2 K^2} \sin \frac{2(\varphi + \varphi_0)}{\mu}}. \quad (2.2.20)$$

Видно, что во всех трёх случаях ограниченные орбиты  $\{\theta = \theta(\varphi)\}$  будут замкнуты. На примере последнего случая поясним подробнее как был получен явный вид орбиты (2.2.20).

Согласно (1.1.8) для  $a_{22}^2(\theta) = \frac{1}{\mu^2(\theta^2+c-t\theta^{-2})}$  и  $V(\theta) = \frac{A}{\theta^2}$ :

$$E = \frac{a_{11}^2(\theta)}{2a_{22}^4(\theta)} K^2 \theta'^2 + \frac{K^2}{2a_{22}^2(\theta)} + V(\theta) = \frac{\mu^4 K^2}{2} \theta'^2 + \frac{K^2 \mu^2}{2} (\theta^2 + c - t\theta^{-2}) + \frac{A}{\theta^2} + B. \quad (2.2.21)$$

Выражение тривиально преобразуется:

$$\mu^2 \theta'^2 = \left( t - \frac{2A}{\mu^2 K^2} \right) \theta^{-2} + \left( \frac{2E - 2B}{\mu^2 K^2} - c \right) - \theta^2.$$



Интегрируем по полупериоду

$$\int \frac{\mu d\theta}{\sqrt{\left(t - \frac{2A}{\mu^2 K^2}\right) \theta^{-2} + \left(\frac{2E-2B}{\mu^2 K^2} - c\right) - \theta^2}} = \int d\varphi.$$

После умножения числителя и знаменателя подынтегральной дроби на  $2\theta$  получим

$$\int \frac{d\theta^2}{2\sqrt{\left(t - \frac{2A}{\mu^2 K^2}\right) + \left(\frac{2E-2B}{\mu^2 K^2} - c\right) \theta^2 - \theta^4}} = \frac{\varphi + \varphi_0}{\mu}.$$

Дальнейшие преобразование приводят к:

$$\int \frac{d\left(\theta^2 - \left(\frac{E-B}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2}\right)\right)}{\sqrt{\left(t - \frac{2A}{\mu^2 K^2}\right) + \left(\frac{E-B}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2}\right)^2 - \left(\theta^2 - \left(\frac{E-B}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2}\right)\right)^2}} = 2 \frac{\varphi + \varphi_0}{\mu}.$$

Интегрируем и получаем требуемое:

$$\arcsin \frac{\theta^2 - \left(\frac{E-B}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2}\right)}{\sqrt{\left(t - \frac{2A}{\mu^2 K^2}\right) + \left(\frac{E-B}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2}\right)^2}} = 2 \frac{\varphi + \varphi_0}{\mu}.$$

□

**Замечание 2.2.3.** Доказательство привело нас не к псевдоримановой метрике как в формулировке теоремы (2.1.8), а к псевдоримановой метрике

$$ds^2 = \frac{d\theta^2}{\left(\frac{(\theta+c_2)^2}{\mu^2} + c_5(\theta + c_2)^{-2} + c_4\right)^2} + \frac{d\varphi^2}{\frac{(\theta+c_2)^2}{\mu^2} + c_5(\theta + c_2)^{-2} + c_4}.$$

Нужная метрика получается после замены  $\theta + c_2 = \mu\tilde{\theta}$ ,  $t = -\frac{c_5}{\mu^2}$ ,  $c = c_4$ .

## 2.3 Геометрия поверхностей Бертрана

Геометрия поверхностей Бертрана с римановой метрикой  $S$  и псевдоримановой метрикой  $S'$  существенно зависит от трех параметров  $(c, t, \mu) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Q}_{>0}$ . Когда параметр  $t$  равен нулю, мы имеем (согласно теоремам 4, 6) поверхности с двумя типами замыкающих потенциалов – аналог гравитационного  $V_1(\theta) = A|\theta| + B$  ( $A < 0$ ) и аналог осциляторного  $V_2(\theta) = \frac{A}{\theta^2} + B$  ( $A(\theta^4 + t) > 0$ ). При  $t = 0$  соответствующие поверхности  $S$  имеют постоянную гауссову кривизну и допускают обобщение законов Кеплера [37] (в случае реализуемости в  $\mathbb{R}^3$ ), вектора Лапласа-Рунге-Ленца [1], [25]. При  $t \neq 0$  существует только один тип замыкающего потенциала – аналог осциляторного  $V_2(\theta) = \frac{A}{\theta^2} + B$  ( $A(\theta^4 + t) < 0$ )

и система также допускает обобщение вектора Лапласа-Рунге-Ленца [1]. Остановимся на геометрии поверхностей Бертрана подробнее.

Рациональный параметр  $\mu = \frac{p}{q}$  влияет как на форму поверхности (в меньшей степени, чем  $c$  и  $t$ ), так и на форму орбит ( $c, t$  на форму орбит совсем не влияют). Поверхность  $S_{\mu_0}$  при некотором  $\mu = \mu_0$  получается из поверхности  $S_1$  при  $\mu = 1$  так же как “рациональный” конус в комментарии 1.2. Например, если взять сферу единичного радиуса, то можно разрезать её по меридианам на  $p$  одинаковых долек, затем взяв  $q$  таких долек можно изогнуть их и склеить по меридианам так, что вторая долька склеивается с первой, третья склеивается со второй, ..., последняя с первой, вся замкнутая цепочка даёт поверхность  $S_\mu$ , которая будет иметь вид веретена [43]. Поверхность  $S_\mu$   $q$ -листно накрывает дольку, а исходная  $S_1$  –  $p$ -листно.

Явный вид зависимости  $\theta(\varphi)$ , представленный формулами (2.2.18), (2.2.19), (2.2.20), позволяет описать геометрию орбит (указанные формулы справедливы как для риманова так и для псевдориманова случая). Зависимость формы орбиты от  $\mu = \frac{p}{q}$  на поверхностях с аналогом ньютоновского потенциала и с аналогом гуковского отличается. В случае гравитационного потенциала согласно формуле (2.2.18) орбита будет периодически флуктуировать между своими пери- и апоцентром, повторяя поведение синусоиды. При этом за  $p$  витков вокруг поверхности орбита совершит ровно  $q$  колебаний от перицентра до апоцентра и обратно, а в случае осцилляторного потенциала согласно формулам (2.2.19), (2.2.20) планета совершит  $2q$  колебаний за  $p$  витков. Соответственно минимальный положительный период орбиты (как функции  $\theta(\varphi)$ ) в первом случае равен  $\Phi_1 = 2\pi\mu$ , а во втором  $\Phi_2 = \pi\mu$ .

Например, для евклидовой плоскости ( $\mu = 1, c = t = 0$ ) при движении вокруг Солнца за один оборот планета совершает ровно одно колебание между своими перигелием и апогелием. В случае же гуковского потенциала планета движется по эллипсу, в центре (а не в фокусе) которого находится Солнце, поэтому планета совершит 2 колебания за один оборот.

Итак множество пар  $(S, V)$  Бертрана (как в римановом так и в псевдоримановом случаях) параметризуется семеркой величин  $(c, t, \mu, \hat{a}, \hat{b}, A, B)$ , где тройка  $(c, t, \mu) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Q}_{>0}$  определяет форму поверхности  $S$ , пара  $(\hat{a}, \hat{b}) \in \mathbb{R}^2$  определяет ширину поверхности, т.е. её граничные параллели, пара  $(A, B)$  определяет замыкающий потенциал, действующий на  $S$ . Если поверхность  $S$  не имеет экваторов, то как уже отмечалось [56] все 5 типов потенциалов (см. определения 1.1.6-1.1.10) эквивалентны. Что касается поверхностей, отвечающих различным значениям пятёрки параметров  $(c, t, \mu, \hat{a}, \hat{b})$ , то классификацию их с точностью до изометрии, преобразования подобия даёт теорема 7. Сперва дадим следующее определение.

**Определение 2.3.1.** Две поверхности вращения  $S_1$  и  $S_2$  (соответственно  $S'_1$  и  $S'_2$ )  $S^1$ -

изометричны или горизонтально изометричны, если существует диффеоморфизм  $h : S_1 \rightarrow S_2$ , сохраняющий метрику (псевдориманову метрику) и переводящий параллели в параллели.

Две поверхности вращения  $S_1$  и  $S_2$  (соответственно  $S'_1$  и  $S'_2$ )  $\varphi$ -изометричны или вертикально изометричны, если существует диффеоморфизм  $h : S_1 \rightarrow S_2$ , сохраняющий метрику (псевдориманову метрику) и переводящий меридианы в меридианы.

Две поверхности вращения  $S_1$  и  $S_2$  с метриками  $g_1, g_2$  (соответственно  $S'_1$  и  $S'_2$  с псевдоримановыми метриками  $g_1, g_2$ )  $S^1$ -подобны или горизонтально подобны, если существует диффеоморфизм  $h : S_1 \rightarrow S_2$ , переводящий параллели в параллели так, что метрики связаны соотношением  $h^*g_2 = k^2g_1$  для некоторой константы  $k$ .

Пусть  $S_{c,t,\mu,a,b}$  – поверхность Бертрана, параметризованная константами  $c, t, \mu, a, b$ , т.е. поверхность с координатами  $(\theta, \varphi)$ , где  $\theta \in (a, b)$ , и метрикой (2.1.2) (псевдоримановой метрикой (2.1.8)).

**Теорема 7.** Для поверхностей Бертрана с римановой (псевдоримановой) метрикой справедливы следующие утверждения:

1. Две поверхности  $S_1 = S_{c_1,t_1,\mu_1,a_1,b_1}$  и  $S_2 = S_{c_2,t_2,\mu_2,a_2,b_2}$   $S^1$ -изометричны тогда и только тогда, когда совпадают все параметры  $(c_1, t_1, \mu_1, a_1, b_1) = (c_2, t_2, \mu_2, a_2, b_2)$ . Две поверхности  $S_1 = S_{c_1,t_1,\mu_1,a_1,b_1}$  и  $S_2 = S_{c_2,t_2,\mu_2,a_2,b_2}$   $\varphi$ -изометричны в окрестности своих меридианов тогда и только тогда, когда  $(c_1, t_1, a_1, b_1) = (c_2, t_2, a_2, b_2)$ , т.е. часть  $\{(\theta, \varphi) : 0 < \varphi < \varphi_1\} \subset S_{c_1,t_1,\mu_1,a_1,b_1}$  вертикально изометрична части  $\{(\theta, \varphi) : 0 < \varphi < \frac{\mu_2}{\mu_1}\varphi_1\} \subset S_{c_2,t_2,\mu_2,a_2,b_2}$ .
2. Две поверхности  $S_{c_1,t_1,\mu_1,a_1,b_1}$  и  $S_{c_2,t_2,\mu_2,a_2,b_2}$   $S^1$ -подобны тогда и только тогда, когда существует  $k > 0$ :  $t_1 = k^4t_2$ ,  $c_1 = k^2c_2$ ,  $a_1 = ka_2$ ,  $b_1 = kb_2$ ,  $\mu_1 = \mu_2$ .

При значении параметров  $(c, t)$  из области  $\Omega_3 = \{(c, t) : c^2 + 4t < 0\} \cap \{(c, t) : t < 0, c > 0, c^2 + 4t > 0\}$  для риманова случая и  $\Omega_2 = \{(c, t) : c^2 + 4t > 0, t < 0, c < 0\}$  для псевдориманова (см. рис. 2.2, 2.1) имеются две максимальные поверхности Бертрана, и, как показывает теорема 7, они не изометричны друг другу и не подобны.

Две подповерхности Бертрана одной максимальной поверхности также не могут быть ни изометричными, ни подобными.

Как уже упоминалось выше, геометрический смысл  $\mu = \frac{p}{q}$  раскрывался в частности в том, что окрестность меридиана поверхности  $S_{c,t,\mu}$  накрывала некоторую поверхность-дольку  $q$ -листно, а окрестность меридиана поверхности  $S_{c,t,1}$  накрывала ту же самую поверхность-дольку  $p$ -листно; поэтому локально (в окрестности меридианов)  $S_{c,t,\mu}$  и  $S_{c,t,1}$  изометричны, что и подтверждает теорема 7.

Две поверхности Бертрана подобны, если у них совпадает рациональный параметр  $\mu$ , а точки  $(c_1, t_1)$  и  $(c_2, t_2)$  в плоскости  $Oct$  лежат на одной параболе; как следует из теоремы 7 все поверхности Бертрана (с одним и тем же  $\mu$  и подходящими границами), отвечающие

точкам кривой, разделяющей зоны  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$  (в римановом случае, см. рис. 2.2) подобны, т.к. эта кривая – ветвь параболы  $c^2 + 4t = 0$ . Стоит отметить, что лучи  $\{(c, t) : t = 0, c > 0\}$  и  $\{(c, t) : t = 0, c < 0\}$  удобно в этой теореме считать вырожденным случаем параболы, т.к. они формально удовлетворяют требованиям теоремы, при этом поверхности, соответствующие первому лучу не подобны поверхностям, соответствующим второму лучу. Например, в римановом случае при  $c = 1, \mu = 1$  (первый луч) имеем проколотую полусферу, а при  $c = -1, \mu = 1$  (второй луч) имеем проколотую плоскость Лобачевского, которые не изометричны и не подобны. Случай  $c = t = 0$  (возможен только в римановом случае) является обособленным и соответствующие поверхности Бертрана не подобны никаким другим.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если у указанных поверхностей совпадают все значения параметров, то в качестве  $S^1$ -изометрии достаточно рассмотреть тождественное сопоставление  $h$ , переводящее точку  $x$  первой поверхности с координатами  $(\theta, \varphi)$  в точку  $h(x)$  второй поверхности с теми же координатами.

Обратно, если существует требуемая  $S^1$ -изометрия  $h: (\theta_1, \varphi_1) \in S_1 \rightarrow (\theta_2, \varphi_2) \in S_2$ ; то в силу того, что параллели переходят в параллели, выполняется равенство компонент  $a_{22}^2$  метрики, т.е. верно  $\frac{1}{\mu_1^2(\theta_1^2 + c_1 - t_1\theta_1^{-2})} = \frac{1}{\mu_2^2(\theta_2^2 + c_2 - t_2\theta_2^{-2})}$ . Последнее равенство выполняется не в одной точке, а на интервале, когда  $\theta_1$  пробегает интервал  $(a_1, b_1)$ ,  $\theta_2 = h(\theta_1)$  пробегает интервал  $(a_2, b_2)$ ; можно считать правую часть сложной функцией  $\frac{1}{\mu_2^2(\theta_2^2 + c_2 - t_2\theta_2^{-2})} \circ \theta_2(\theta_1)$ , определённой на интервале  $(a_1, b_1)$ . Так как меридиан изометрично переходит в меридиан, то  $(\mu_1/\mu_2)^4(d\theta_1)^2 = (d\theta_2)^2$ , т.е.  $\theta_2 = \pm(\mu_1/\mu_2)^2\theta_1 + \text{const}$ . Отсюда следует равенство параметров  $c, t, \mu$  и тождественность функции  $\theta_2(\theta_1)$ , а значит и равенство параметров  $a$  и  $b$ .

В случае  $\varphi$ -изометрии окрестностей меридианов, если выполнено  $(c_1, t_1, a_1, b_1) = (c_2, t_2, a_2, b_2)$ , то в качестве требуемого отображения можно взять следующее  $h: (\theta_1, \varphi_1) \in S_1 \rightarrow (\theta_1, \frac{\mu_2}{\mu_1}\varphi_1) \in S_2$ . Докажем обратное. Пусть существует диффеоморфизм  $h: \{-\varepsilon_1 < \varphi_1 < \varepsilon_1\} \subset S_1 \rightarrow \{-\varepsilon_2 < \varphi_2 < \varepsilon_2\} \subset S_2$ , переводящий меридианы в меридианы и такой, что  $h^*g_2 = g_1$ . Но в этом случае на нулевом меридиане должно быть выполнено  $\frac{d\varphi_1^2(\varphi_2)}{\mu_1^2(\theta_1^2 + c_1 - t_1\theta_1^{-2})} = \frac{d\varphi_2^2}{\mu_2^2(\theta_2^2 + c_2 - t_2\theta_2^{-2})}$  и  $(\varphi_1)'_{\varphi_2} = \pm\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ , откуда следует  $\frac{\varepsilon_1^2}{\mu_1^2(\theta_1^2 + c_1 - t_1\theta_1^{-2})} = \frac{\varepsilon_2^2}{\mu_2^2(\theta_2^2 + c_2 - t_2\theta_2^{-2})}$ . Как и в случае  $S^1$ -изометрии (см. выше), отсюда получаем, что  $\theta_2 = \pm(\mu_1\varepsilon_2)^2\theta_1/(\mu_2\varepsilon_1)^2 + \text{const}$ . Отсюда следуют равенства  $c_1 = c_2, t_1 = t_2, \mu_1/\varepsilon_1 = \mu_2/\varepsilon_2$  и тождественность функции  $\theta_2(\theta_1)$ , а значит и  $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ .

Во втором утверждении теоремы проверим, что если наборы чисел  $(c_1, t_1, \mu_1, a_1, b_1)$  и  $(c_2, t_2, \mu_2, a_2, b_2)$  удовлетворяют условию теоремы, то соответствующие им поверхности  $S^1$ -подобны. Верно, что  $\mu_1 = \mu_2$  и существует  $k > 0$ :  $c_1 = k^2c_2, t_1 = k^4t_2, a_1 = ka_2, b_1 = kb_2$ . Рассмотрим отображение  $h: S_1 \rightarrow S_2$ , которое точку  $x \in S_1$  с координатами  $(\theta_1, \varphi)$  переводит в точку  $h(x) \in S_2$  с координатами  $(\theta_2 = \theta_1/k, \varphi)$ . Метрика второй поверхности

в точке  $h(x)$  равна

$$\begin{aligned} h^*g_2 &= \frac{d\theta_2^2(\theta_1)}{(\theta_2^2(\theta_1)+c_2-t_2\theta_2^{-2}(\theta_1))^2} + \frac{d\varphi^2}{\mu^2(\theta_2^2(\theta_1)+c_2-t_2\theta_2^{-2}(\theta_1))} = \\ &= \frac{d\theta_2^2(\theta_1)}{(\theta_2^2(\theta_1)+\frac{c_1}{k^2}-t_1\theta_2^{-2}(\theta_1)k^{-4})^2} + \frac{d\varphi^2}{\mu^2(\theta_2^2(\theta_1)+\frac{c_1}{k^2}-t_1\theta_2^{-2}(\theta_1)k^{-4})} = \\ &= \frac{k^2 d\theta_1^2}{(\theta_1^2+c_1-t_1\theta_1^{-2})^2} + \frac{k^2 d\varphi^2}{\mu^2(\theta_1^2+c_1-t_1\theta_1^{-2})} = k^2 \left( \frac{d\theta_1^2}{(\theta_1^2+c_1-t_1\theta_1^{-2})^2} + \frac{d\varphi^2}{\mu^2(\theta_1^2+c_1-t_1\theta_1^{-2})} \right) = k^2 g_1. \end{aligned}$$

Таким образом  $h$  является преобразованием  $S^1$ -подобия. Докажем обратное. Пусть существуют константа  $k > 0$  и диффеоморфизм  $h : S_1 \rightarrow S_2$ , переводящий параллели в параллели и такой, что  $h^*g_2 = k^2g_1$ . Но по доказанному существует диффеоморфизм  $\tilde{h} : S_1 \rightarrow \tilde{S}_1 := S_{c_1/k^2, t_1/k^4, \mu_1, a_1/k, b_1/k}$ , переводящий параллели в параллели и такой, что  $\tilde{h}^*\tilde{g}_1 = k^2g_1$ . Значит,  $S_2$  и  $\tilde{S}_1$  являются  $S^1$ -изометричными. В силу п.1 имеем  $S_2 = \tilde{S}_1$ , что и требовалось.

□

На сегодняшний день установлено немало свойств движения по поверхностям Бертрана с римановой метрикой и постоянной гауссовой кривизной (т.е. евклидовой плоскости, сфере и плоскости Лобачевского, которым соответствуют значения параметров  $t = 0, \mu = 1$ ) под действием потенциалов Ньютона и Гука (и их аналогов), в том числе посчитаны периоды движений по замкнутым орбитам, для этих периодов установлены законы Кеплера и их аналоги. Например, в случае плоскости Лобачевского верен следующий факт (см. [37]).

**Утверждение 4** (Козлов В.В.). Пусть задана поверхность  $C_L$  с координатами  $(\theta, \varphi)$  и метрикой (2.1.2), где  $c = -1, \mu = 1$ . Пусть на  $C_L$  действует аналог ньютоновского потенциала  $V_1$  или аналог гукковского  $V_2$  (см. зам. 2.1.5). Тогда период движения  $T$  частицы по орбите (т.е. период траектории) зависит только от интеграла энергии  $E$ , и не зависит от интеграла кинетического момента, причём зависимость имеет вид

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{A-2E}} \quad (\text{в случае } V_2), \quad T = \frac{\pi}{\sqrt{A}} \sqrt{-\frac{E}{A} - \sqrt{\frac{E^2}{A^2} - 1}} / \sqrt{\frac{E^2}{A^2} - 1} \quad (\text{в случае } V_1). \quad (2.3.1)$$

Оказывается (как следует из работы Гордона [11]), в случае, если в некоторой области фазового пространства произвольной автономной гамильтоновой системы все фазовые орбиты замкнуты, то период движения по замкнутой траектории зависит только от интеграла  $E$ . В случае с плоскостью Лобачевского явный вид такой зависимости даёт утверждение 4. Для поверхностей Бертрана, соответствующих значениям параметров из области  $\{c^2 + 4t > 0\}$ , явный вид даёт следующее утверждение.

**Утверждение 5.** Пусть задана система Бертрана  $(S, V)$ , где  $S$  – поверхность Бертрана с римановой метрикой (псевдоримановой метрикой), соответствующая точке

области значения параметров  $\{(c, t, \mu = \frac{q}{c}) : c^2 + 4t > 0, t \neq 0\}$ ,  $V = \frac{A}{\theta^2}$  – аналог гукковского потенциала. Тогда период  $T$  движения по замкнутой траектории  $\vec{r}(t)$  не зависит от интеграла кинетического момента  $K$  и вычисляется по формуле

$$T = \frac{\pi q}{2\sqrt{\Delta}} \left( \frac{\sqrt{\Delta} + c}{\sqrt{E(\sqrt{\Delta} + c) + 2A}} + \frac{\sqrt{\Delta} - c}{\sqrt{E(c - \sqrt{\Delta}) + 2A}} \right), \quad (2.3.2)$$

где  $\Delta = c^2 + 4t$ .

**Замечание 2.3.1.** Плоскость Лобачевского является поверхностью Бертрана и ей соответствуют значения параметров  $\mu = 1, t = 0, c = -1$ . Устремим в формуле (2.3.2)  $t$  к нулю, а  $c$  к минус единице получим значение периода на  $C_L$  как в утверждении 4 ( $\sqrt{\Delta} = |c| = -c = 1$ ):

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{2A - 2E}}.$$

Аналогичное выражение при стремлении  $t$  к нулю получается и для псевдориманова случая. Значение периода посчитано для точек  $(c, t)$ , которые лежат выше параболы  $c^2 + 4t = 0$ , устремим  $c^2 + 4t$  к нулю, чтобы понять, что происходит на параболе, т.е. чему равен период  $T$  на поверхности Бертрана, параметризованной  $(c, t, \mu) : c^2 + 4t = 0$ :

$$T = \pi \cdot q \left( \frac{Ec + 4A}{2\sqrt{Ec + 2A^3}} \right).$$

Вопрос подсчёта явного вида зависимости периода от энергии у ограниченной орбиты на поверхности Бертрана, параметризованной параметрами  $(c, t, \mu)$  такими, что  $c^2 + 4t < 0$  (только для риманова случая, т.к. для псевдориманова поверхностей с такими значениями параметров не существует, что видно из таблицы 2.1 или рисунка 2.1), остаётся открытым.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Согласно уравнениям Эйлера-Лагранжа всюду вдоль  $\vec{r}(t)$  выполнено  $a_{22}^2(\theta)\dot{\varphi} = K$ . Представим в форме удобной для интегрирования  $a_{22}^2(\theta)d\varphi = Kdt$ . Проинтегрируем между двумя соседними экстремумами одной орбиты, т.е. между апоцентром и перицентром, получится половина времени  $\tilde{T}$ , необходимого для того, чтобы орбита совершила одно колебание. При этом, прежде чем замкнуться орбита совершит  $q$  колебаний, поэтому период  $T = q \cdot \tilde{T}$ .

$$\int_0^{\Phi/2} a_{22}^2(\theta \circ \varphi) d\varphi = K \frac{\tilde{T}}{2}. \quad (2.3.3)$$

Уравнение (2.2.20) даёт явный вид орбиты как графика функции  $\theta(\varphi)$  сразу и для риманова и для псевдориманова случаев:  $\theta^2 = \alpha + \beta \sin(\frac{2\varphi}{\mu} + \frac{2\varphi_0}{\mu})$ , где

$$\alpha = \frac{E}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2}, \quad \beta = \sqrt{\left(\frac{E}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2}\right)^2 + t - \frac{2A}{\mu^2 K^2}}. \quad (2.3.4)$$

А угол  $\varphi_0$  без ограничения общности равен  $-\frac{\pi}{4}$  (чтобы при изменении  $\varphi$  от 0 до  $\Phi/2 = (\mu\pi)/2$  величина  $\theta^2$  менялась от своего минимума  $\alpha - \beta$  до своего максимума  $\alpha + \beta$ , если  $\varphi_0 \neq -\frac{\pi}{4}$ , то границы в первом интеграле надо изменить с 0 и  $\Phi/2$  на другие, хотя значение интеграла не изменится).

Интеграл с учётом  $\Phi = \mu\pi$ ,  $\tilde{\varphi} = \frac{2\varphi}{\mu} - \frac{\pi}{2}$  преобразуется

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= \frac{2}{K} \int_0^{\Phi/2} \frac{d\varphi}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2}) \circ \theta(\varphi)} = \frac{2}{K\mu^2} \int_0^{\Phi/2} \frac{d\varphi}{\alpha + \beta \sin(\frac{2\varphi}{\mu} - \frac{\pi}{2}) + c - \frac{t}{\alpha + \beta \sin(\frac{2\varphi}{\mu} - \frac{\pi}{2})}} = \\ &= \frac{1}{\mu K} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\frac{2\varphi}{\mu} - \frac{\pi}{2})}{\alpha + \beta \sin \tilde{\varphi} + c - \frac{t}{\alpha + \beta \sin \tilde{\varphi}}} = \frac{1}{\mu K} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\alpha + \beta \sin \tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi}}{(\alpha + \beta \sin \tilde{\varphi})^2 + c(\alpha + \beta \sin \tilde{\varphi}) - t}.\end{aligned}\quad (2.3.5)$$

Знак выражения  $\theta^2 + c - t\theta^{-2}$  равен  $\hat{\varepsilon}$ , т.е. зависит от римановости случая, знак кинетического момента  $K$  может быть как положительным так и отрицательным – в любом случае отрицательное значение периода  $T$  ничему не противоречит, а означает движение в обратную сторону. Стандартная замена  $\tau = tg\frac{\tilde{\varphi}}{2}$ ,  $d\tilde{\varphi} = \frac{2d\tau}{1+\tau^2}$  приводит нас от интегрирования тригонометрических функций к дробно-рациональным

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= \frac{1}{\mu K} \int_{-1}^1 \frac{(\alpha + \frac{2\beta\tau}{1+\tau^2}) \frac{2d\tau}{1+\tau^2}}{(\alpha + \frac{2\beta\tau}{1+\tau^2})^2 + c(\alpha + \frac{2\beta\tau}{1+\tau^2}) - t} = \\ &= \frac{1}{\mu K} \int_{-1}^1 \frac{2(\alpha + \alpha\tau^2 + 2\beta\tau)d\tau}{(\alpha + \alpha\tau^2 + 2\beta\tau)^2 + (c\alpha - t)(1 + \tau^2)^2 + 2\beta c\tau(1 + \tau^2)} = \\ &= \frac{1}{\mu K} \int_{-1}^1 \frac{2(\alpha + \alpha\tau^2 + 2\beta\tau)d\tau}{\tau^4(\alpha^2 + c\alpha - t) + \tau^3(4\beta\alpha + 2\beta c) + \tau^2(4\beta^2 + 2\alpha^2 + 2c\alpha - 2t) + \\ &\quad + \tau(4\alpha\beta + 2\beta c) + \alpha^2 + c\alpha - t}.\end{aligned}\quad (2.3.6)$$

В знаменателе стоит возвратный многочлен четвёртой степени, что позволяет просто разложить знаменатель на множители. Промежуточное выражение для интеграла примет вид:

$$\tilde{T} = \frac{1}{\mu K} \int_{-1}^1 \frac{2\alpha(\tau^2 + \frac{2\beta}{\alpha}\tau + 1)d\tau}{(\alpha^2 + \alpha c - t)(\tau^2 + \beta \frac{2\alpha + c - \sqrt{\Delta}}{\alpha^2 + c\alpha - t}\tau + 1)(\tau^2 + \beta \frac{2\alpha + c + \sqrt{\Delta}}{\alpha^2 + c\alpha - t}\tau + 1)}.\quad (2.3.7)$$

Для упрощения выражений будем использовать сокращения

$$\beta_+ = \beta \frac{2\alpha + c + \sqrt{\Delta}}{\alpha^2 + c\alpha - t}, \quad \beta_- = \beta \frac{2\alpha + c - \sqrt{\Delta}}{\alpha^2 + c\alpha - t}.\quad (2.3.8)$$

С учётом введённых сокращений интеграл представляется в виде

$$\tilde{T} = \frac{1}{\mu K \sqrt{\Delta} (\alpha^2 + c\alpha - t)} \left( \int_{-1}^1 \frac{(\alpha\sqrt{\Delta} - \alpha c + 2t)d\tau}{\tau^2 + \beta_+\tau + 1} + \int_{-1}^1 \frac{(\alpha\sqrt{\Delta} + \alpha c - 2t)d\tau}{\tau^2 + \beta_-\tau + 1} \right) = \quad (2.3.9)$$

$$= \frac{1}{\mu K \sqrt{\Delta} (\alpha^2 + c\alpha - t)} \left( (\alpha\sqrt{\Delta} - \alpha c + 2t)I_1 + (\alpha\sqrt{\Delta} + \alpha c - 2t)I_2 \right). \quad (2.3.10)$$

С помощью формулы (в случае  $4ac - b^2 > 0$ )  $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$  находим

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{\tau^2 + \beta_+\tau + 1} = \frac{2}{\sqrt{4 - \beta_+^2}} \operatorname{arctg} \frac{2\tau + \beta_+}{\sqrt{4 - \beta_+^2}} \Big|_{-1}^1 = \\ &= \frac{2}{\sqrt{4 - \beta_+^2}} \left( \operatorname{arctg} \frac{2 + \beta_+}{\sqrt{4 - \beta_+^2}} - \operatorname{arctg} \frac{-2 + \beta_+}{\sqrt{4 - \beta_+^2}} \right). \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Последнее упрощается с помощью  $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$ :

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{4 - \beta_+^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\frac{4}{\sqrt{4 - \beta_+^2}}}{1 + \frac{\beta_+ - 4}{4 - \beta_+^2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{4 - \beta_+^2}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{4 - \beta_+^2}}. \quad (2.3.12)$$

Аналогичное выражение получается для  $I_2$ :

$$I_2 = \frac{\pi}{\sqrt{4 - \beta_-^2}}. \quad (2.3.13)$$

Таким образом период равен:

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{\pi}{\mu K \sqrt{\Delta} (\alpha^2 + c\alpha - t)} \left( \frac{\alpha\sqrt{\Delta} + \alpha c - 2t}{\sqrt{4 - \beta_+^2}} + \frac{\alpha\sqrt{\Delta} - \alpha c + 2t}{\sqrt{4 - \beta_-^2}} \right) = \\ &= \frac{\pi}{\mu K \sqrt{\Delta}} \left( \frac{\alpha\sqrt{\Delta} + \alpha c - 2t}{(\alpha^2 + c\alpha - t) \sqrt{4 - \beta_+^2} \frac{(2\alpha+c+\sqrt{\Delta})^2}{(\alpha^2+c\alpha-t)^2}} + \frac{\alpha\sqrt{\Delta} - \alpha c + 2t}{(\alpha^2 + c\alpha - t) \sqrt{4 - \beta_-^2} \frac{(2\alpha+c-\sqrt{\Delta})^2}{(\alpha^2+c\alpha-t)^2}} \right) = \\ &= \frac{\pi}{\mu K \sqrt{\Delta}} \left( \frac{\sqrt{\Delta} + c}{\sqrt{(\alpha + \frac{\sqrt{\Delta}+c}{2})^2 - \beta_+^2}} + \frac{\sqrt{\Delta} - c}{\sqrt{(\alpha - \frac{\sqrt{\Delta}-c}{2})^2 - \beta_-^2}} \right). \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

В последнем переходе первая дробь сократилась на  $\alpha - \frac{2t}{\sqrt{\Delta}+c}$ , а вторая на  $\alpha + \frac{2t}{\sqrt{\Delta}-c}$ . Вспоминая теперь формулы (2.3.4) и связь  $T = q \cdot \tilde{T}$  получаем окончательно утверждение теоремы.

□



Утверждение 5, позволяет связать период движения по замкнутой траектории с одним из первых интегралов (полной энергией  $E$ ) соотношением, содержащим лишь радикалы второй степени. Используя такую несложную связь можно построить координату действия  $I(E)$  в части фазового пространства системы (см. замечание 4.2.3). Для неограниченных траекторий (выходящих на край поверхности) большое значение играет конечность времени, требуемого для выхода на границу, т.к. это напрямую связано с полнотой соответствующих фазовых потоков (см. утверждения 18, 19).

## Глава 3

# Абстрактные многообразия Бертрана и поверхности Бертрана в $\mathbb{R}^3$ , $\mathbb{R}_2^3$

Многие исследователи задачи Бертрана начинали свои работы с построения поверхностей в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ , индуцирования объемлющей метрики на них. Однако, многие поверхности Бертрана нельзя вложить в  $\mathbb{R}^3$  так, чтобы их метрика получалась индуцированием объемлющей евклидовой, например, в теореме 5 речь идет об абстрактных многообразиях вращения  $S \approx (a, b) \times S^1$ . Некоторые из них можно целиком вложить в  $\mathbb{R}^3$ , некоторые только локально, часть не вкладывается даже локально, т.е.  $\forall a_1, b_1 \in (a, b) : a \leq a_1 < b_1 \leq b$  не существует вложения пояса  $(a_1, b_1) \times S^1$  в  $\mathbb{R}^3$  (с учетом метрики). Тем не менее для реализуемых как поверхности вращения многообразий Бертрана получены красивые результаты.

### 3.1 Бертрановские поверхности и натуральные координаты

Пусть задано пространство  $\mathbb{R}^3$  с координатами  $(x, y, z)$  и евклидовой метрикой  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ . Поверхность вращения удобно представлять как множество, заметаемое вращением профильной кривой (она же меридиан) вокруг оси вращения. Рассмотрим гладкую регулярную кривую  $\gamma(v) = (f(v), g(v))$  в плоскости  $XOZ$ , где  $v$  – натуральный параметр, пробегающий значения от  $a$  до  $b$ . Тогда при вращении вокруг оси  $OZ$  кривая замечает поверхность  $S \approx (a, b) \times S^1$ , радиус вектор любой точки которой имеет вид  $\mathbf{r}(v, \varphi) = (f(v) \cos \varphi, f(v) \sin \varphi, g(v))$ ; таким образом на поверхности заданы координаты  $(v, \varphi \bmod 2\pi)$ . В этих координатах индуцированная метрика примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2(v) \end{pmatrix}, \quad (3.1.1)$$

т.к.  $\mathbf{r}'_v(v, \varphi) \cdot \mathbf{r}'_v(v, \varphi) = f'^2(v) + g'^2(v) = 1$  в силу натуральности параметра  $v$ , и остальные компоненты метрического тензора вычисляются тривиально  $\mathbf{r}'_\varphi(v, \varphi) \cdot \mathbf{r}'_v(v, \varphi) = 0$ ,  $\mathbf{r}'_\varphi(v, \varphi) \cdot \mathbf{r}'_\varphi(v, \varphi) = f^2(v)$ . Функция  $f(v)$  имеет простой геометрический смысл:  $f(v)$  равно расстоянию от точки  $(v, \varphi)$  на поверхности  $S$  до оси вращения.

Возьмём такой вид метрики для определения натуральных координат.

**Определение 3.1.1.** Для многообразия  $S \approx (a, b) \times S^1$  с метрикой вращения  $ds^2 = a_{11}^2(v)dv^2 + a_{22}^2(v)d\varphi^2$  будем называть координаты  $(v, \varphi \bmod 2\pi)$  *натуральными*, если в них  $a_{11}(v) \equiv 1$ , т.е. метрика на самом деле выглядит так (3.1.1).

Название мотивировано как раз тем, что координата  $v$  является натуральным параметром для координатной кривой  $\varphi = \text{const}$  (она же профильная кривая, она же меридиан). Нетрудно убедиться, что абстрактных многообразий с метрикой (3.1.1) больше, чем построенных выше поверхностей в  $\mathbb{R}^3$  с той же метрикой. Все построенные поверхности можно рассматривать как многообразия с метрикой (3.1.1), но не все такие многообразия реализуются в  $\mathbb{R}^3$  как поверхности вращения. Это связано с тем, что не всегда по заданной функции  $f(v)$  можно подобрать функцию  $g(v)$  такую, что  $f'^2(v) + g'^2(v) = 1$ , точнее можно сформулировать это в виде следующего утверждения.

**Утверждение 6.** *Поверхность  $S \approx (a, b) \times S^1$  с координатами  $(v, \varphi)$  и метрикой (3.1.1) реализуется как поверхность вращения в  $\mathbb{R}^3$  тогда и только тогда, когда  $\forall v \in (a, b) |f'(v)| \leq 1$ .*

Для иллюстрации рассмотрим сферу, метрика на ней в натуральных координатах выглядит  $ds^2 = dv^2 + \sin^2 v d\varphi^2$ . Согласно критерию  $|\sin' v| \leq 1$  и, действительно, сфера реализуется в  $\mathbb{R}^3$ . Детальное описание реализуемости см. [57].

Бертрановские координаты считаются по натуральным согласно замечанию 1.1.2:  $\theta = \int C \frac{dv}{f^2(v)}$ , где  $C$  – некоторая ненулевая константа (выше бралась равной 1 или -1). Используя известный факт  $v'_\theta = \frac{1}{\theta'_v}$  несложно убедиться, что натуральные высчитываются по бертрановским согласно формуле  $v = \int C^{-1} \frac{d\theta}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})}$ . Интеграл от дробно-рациональной функции считается в квадратурах и зависимость между  $v$  и  $\theta$  выглядит так (с точностью до констант): в случае евклидовой плоскости  $\theta = \frac{1}{v}$ , где  $(v, \varphi)$  – полярные координаты на плоскости; в случае сферы  $\theta = \text{ctg } v$ , где  $v$  – широта на сфере; в случае плоскости Лобачевского  $\theta = \text{cth } v$ . Более подробно для всех поверхностей Бертрана зависимость см. [56].

Вернемся теперь к реализуемости поверхностей Бертрана с индефинитной метрикой. Рассмотрим пространство  $\mathbb{R}_2^3$  с координатами  $(x, y, z)$  и псевдоримановой метрикой  $ds^2 = -dx^2 - dy^2 + dz^2$ . Рассмотрим гладкую регулярную кривую  $\gamma(\theta) = (f(\theta), g(\theta))$  в плоскости  $XOZ$ . При вращении вокруг оси  $OZ$  кривая заматывает поверхность вращения  $S'$ , радиус

вектор точки  $(\theta, \varphi)$  задаётся следующим образом:

$$r(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} x(\theta, \varphi) \\ y(\theta, \varphi) \\ z(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\theta)\cos\varphi \\ f(\theta)\sin\varphi \\ g(\theta) \end{pmatrix}. \quad (3.1.2)$$

Псевдориманова метрика на  $S'$  примет вид:

$$\begin{pmatrix} -f'^2(\theta) + g'^2(\theta) & 0 \\ 0 & -f^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (3.1.3)$$

**Определение 3.1.2.** Координаты  $(v, \varphi)$ , в которых  $g'^2(v) - f'^2(v) \equiv 1$ , т.е. псевдориманова метрика (3.1.3) примет вид  $ds^2 = dv^2 - f^2(v)d\varphi^2$ , назовем *натуральными*.

В псевдоримановом случае, в отличие от риманова, полностью реализуются все поверхности Бертрана. Чтобы установить это воспользуемся следующим критерием.

**Лемма 3.1.1.** Поверхность  $S' \approx (a, b) \times S^1$  с псевдоримановой метрикой (2.1.8) реализуется в  $\mathbb{R}_2^3$  как поверхность вращения тогда и только тогда, когда на  $(a, b)$  выполнено:

$$\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2}) \leq (\theta + t\theta^{-3})^2. \quad (3.1.4)$$

Доказательство. В самом деле в случае реализуемости

$$-f^2 = \frac{1}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})}, \quad g'^2 - f'^2 = \frac{1}{(\theta^2 + c - t\theta^{-2})^2}.$$

Необходимость следует из цепочки равенств:

$$\begin{aligned} -2ff' &= -\frac{2(\theta + t\theta^{-3})}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})^2}, \quad f^2f'^2 = \frac{(\theta + t\theta^{-3})^2}{\mu^4(\theta^2 + c - t\theta^{-2})^4}, \quad f'^2 = -\frac{(\theta + t\theta^{-3})^2}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})^3} \\ g'^2 &= (g'^2 - f'^2) + f'^2 = \frac{1}{(\theta^2 + c - t\theta^{-2})^2} - \frac{(\theta + t\theta^{-3})^2}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})^3}. \end{aligned}$$

Выражение  $g'^2$  всегда неотрицательно, отсюда следует условие (3.1.4). Если читать эту цепочку равенств с конца получается достаточность, а именно пусть выполнено (3.1.4). Тогда рассмотрим  $f(\theta), g(\theta)$  такие, что:

$$f^2 = -\frac{1}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})}, \quad g(\theta) = \int \sqrt{\frac{1}{(\theta^2 + c - t\theta^{-2})^2} - \frac{(\theta + t\theta^{-3})^2}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})^3}} d\theta.$$

Построим поверхность  $S'$  как описано перед леммой, у неё будет требуемая метрика (2.1.8).  $\square$

**Теорема 8.** При любом допустимом значении параметров  $c, t, \mu$  поверхность Бертрана  $S'$  целиком реализуется в  $\mathbb{R}_2^3$  как поверхность вращения  $S'$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является прямым следствием леммы 3.1.1, т.к. левая часть неравенства (3.1.4) всегда отрицательна, а правая положительна.  $\square$

Самое известное описание поверхностей Бертрана в римановом случае в натуральных координатах дал Сантопрете [24], хотя он работал в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , его результат как и его доказательство справедливы и для абстрактных (не обязательно вложенных в  $\mathbb{R}^3$ ) многообразий Бертрана. Его теорема 1 даёт необходимое условие существования сильно замыкающего потенциала на поверхности с метрикой (3.1.1) в виде дифференциальных уравнений на метрику (функцию  $f(v)$ ) при дополнительном предположении отсутствия экваторов ( $f'(v) \neq 0$ ). Теоремы 9, 10 обобщают этот результат с сильно замыкающих потенциалов на замыкающие, локально-замыкающие, полулокально-замыкающие, слабо замыкающие потенциалы, а также на псевдориманов случай.

**Теорема 9.** Пусть  $S \approx (a, b) \times S^1$  – многообразие с координатами  $(v, \varphi \bmod 2\pi)$  и римановой метрикой  $ds^2 = dv^2 + f^2(v)d\varphi^2$ , где  $f(v)$  – гладкая функция на  $(a, b)$  и  $f'(v) \neq 0$  на  $(a, b)$ . Тогда, если функция  $f(v)$  удовлетворяет уравнению

$$\beta^4 - 5(-f''f + f'^2)\beta^2 - 5f''ff'^2 + 4f''^2f^2 - 3f'''f'f^2 + 4f'^4 = 0, \quad (3.1.5)$$

для неотрицательной действительной  $\beta$ , то на этом многообразии существуют координаты  $(\theta, \varphi \bmod 2\pi)$ , такие, что  $\theta = \theta(v)$ , в которых метрика имеет вид (2.1.2):

$$ds^2 = \frac{d\theta^2}{(\theta^2 + c - t\theta^{-2})^2} + \frac{d\varphi^2}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})}, \quad (3.1.6)$$

где  $\mu, c, t$  – некоторые вещественные константы,  $\mu > 0$ . При этом  $\mu \in \{\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}\}$ . Более того, если  $ff'' - f'^2 \equiv \text{const}$ , то  $f''f - f'^2 \equiv -\frac{\beta^2}{i^2}$ , для  $i \in \{1, 2\}$ ,  $t = 0, \mu = \frac{i}{\beta}$ ; если  $ff'' - f'^2 \neq \text{const}$ , то  $t \neq 0, \mu \neq \frac{2}{\beta}$ .

Обратно, для всякого многообразия Бертрана без экваторов, т.е. риманова многообразия с метрикой (3.1.6), функция  $f(v)$ , полученная при записи метрики (3.1.6) в натуральных координатах, т.е.  $f(v)$ , определённая условиями  $f^2(v(\theta)) = \frac{1}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})}$ ,  $v'(\theta) = (\theta^2 + c - t\theta^{-2})^{-1}$ , удовлетворяет уравнению (3.1.5) для константы  $\beta := \frac{2}{\mu}$  при  $t \neq 0$ , для любой константы  $\beta \in \{\frac{1}{\mu}, \frac{2}{\mu}\}$  при  $t = 0$ .

**Замечание 3.1.1.** Поверхность  $S$  будет бертрановской тогда и только тогда, когда  $\beta$  или  $\mu$  будут рациональными, однако эквивалентность условий (3.1.5), (3.1.6) справедлива и при иррациональных значениях  $\beta, \mu$ .

Напомним, что поверхности Бертрана бывают двух видов: на первых существуют два типа замыкающих потенциалов, чему соответствует значение параметра  $t = 0$ , на вторых только один тип замыкающего потенциала, чему соответствует значение параметра  $t \neq 0$ . В натуральных координатах условие  $t = 0$  записывается в виде дифференциального уравнения на функцию  $f(v)$ :  $f$  должна удовлетворять одному из следующих уравнений

$ff'' - f'^2 \equiv -\beta^2$ ,  $ff'' - f'^2 \equiv -\frac{\beta^2}{4}$ . Заметим также, что если  $f$  удовлетворяет одному из перечисленных уравнений, то она удовлетворяет и уравнению (3.1.5), а соответствующая поверхность является поверхностью постоянной гауссовой кривизны  $K = -\frac{f''}{f}$ .

Отметим также, что в бертрановских координатах дифференциальное уравнение (3.1.5) принимает вид  $1 + 5\eta'_\Theta - 3\eta''_{\Theta\Theta}\eta + 4\eta'^2_\Theta = 0$ , где функция  $\eta(\Theta) = \frac{f'_v(v(\Theta))}{\beta^2 f(v(\Theta))}$  соответствует логарифмической производной функции  $f(v)$ , а  $v'(\Theta) = f^2(v(\Theta))$ . Более того, выписанное уравнение обладает двумя симметриями, в т.ч. такой: если функция  $\eta(\Theta)$  является его решением, то и функция  $\tilde{\eta}(\Theta) = \eta(\mu^2\Theta)/\mu^2$  также является его решением.

**Теорема 10.** Пусть  $S' \approx (a, b) \times S^1$  – многообразие с координатами  $(v, \varphi \bmod 2\pi)$  и псевдоримановой метрикой  $ds^2 = dv^2 - f^2(v)d\varphi^2$ , где  $f(v)$  – гладкая функция на  $(a, b)$  и  $f'(v) \neq 0$  на  $(a, b)$ . Тогда, если функция  $f(v)$  удовлетворяет уравнению

$$\beta^4 + 5(-f''f + f'^2)\beta^2 - 5f''ff'^2 + 4f''^2f^2 - 3f''''f'f^2 + 4f'^4 = 0, \quad (3.1.7)$$

для неотрицательной действительной  $\beta$ , то на этом многообразии существуют координаты  $(\theta, \varphi \bmod 2\pi)$ , такие, что  $\theta = \theta(v)$ , в которых псевдориманова метрика имеет вид (2.1.8):

$$ds^2 = \frac{d\theta^2}{(\theta^2 + c - t\theta^{-2})^2} + \frac{d\varphi^2}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})}, \quad (3.1.8)$$

где  $\mu, c, t$  – некоторые вещественные константы,  $\mu > 0$ . При этом  $\mu \in \{\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}\}$ . Более того, если  $ff'' - f'^2 \equiv \text{const}$ , то  $f''f - f'^2 \equiv \frac{\beta^2}{i^2}$ , для  $i \in \{1, 2\}$ ,  $t = 0, \mu = \frac{i}{\beta}$ ; если  $ff'' - f'^2 \neq \text{const}$ , то  $t \neq 0, \mu \neq \frac{2}{\beta}$ .

Обратно, для всякого многообразия Бертрана без экваторов, т.е. псевдориманова многообразия с индефинитной метрикой (3.1.8), функция  $f(v)$ , полученная при записи индефинитной метрики (3.1.8) в натуральных координатах, т.е.  $f(v)$ , определённая условиями  $-f^2(v(\theta)) = \frac{1}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})}$ ,  $v'(\theta) = -(\theta^2 + c - t\theta^{-2})^{-1}$ , удовлетворяет уравнению (3.1.7) для константы  $\beta := \frac{2}{\mu}$  при  $t \neq 0$ , для любой константы  $\beta \in \{\frac{1}{\mu}, \frac{2}{\mu}\}$  при  $t = 0$ .

**Замечание 3.1.2.** Заметим, что уравнение (3.1.7) получается из уравнения (3.1.5) подстановкой вместо  $f(v)$  выражения  $if(v)$ , где  $i$  – мнимая единица. То же справедливо и для метрик: метрика (3.1.1) переходит в индефинитную метрику (3.1.3) при описанной подстановке.

**Замечание 3.1.3.** Формулы (3.1.5), (3.1.7) дают возможность конструктивно проверить, является ли поверхность бертрановской или нет (см. определения 2.1.1, 2.1.2 и замечание 2.1.1). Для этого преобразуем уравнение  $\beta^4 + \varepsilon 5(f''f - f'^2)\beta^2 - 5f''ff'^2 + 4f''^2f^2 - 3f''''f'f^2 +$

$4f'^4 = 0$  (единая форма записи для (3.1.5), (3.1.7)), разрешив его относительно  $\beta$ :

$$\beta = \sqrt{\left[-5\hat{\varepsilon}(ff'' - f'^2) + \sqrt{9(ff'' - f'^2)^2 + 12ff'(f'''f - f'f'')}\right]} / 2 = \beta_+(f, f', f'', f'''), \quad (3.1.9)$$

$$\beta = \sqrt{\left[-5\hat{\varepsilon}(ff'' - f'^2) - \sqrt{9(ff'' - f'^2)^2 + 12ff'(f'''f - f'f'')}\right]} / 2 = \beta_-(f, f', f'', f'''). \quad (3.1.10)$$

Таким образом имея риманову (псевдориманову) метрику в натуральных координатах  $ds^2 = dv^2 + \hat{\varepsilon}f^2(v)d\varphi^2$ , нужно вычислить функции  $\beta_+(f, f', f'', f''')$ ,  $\beta_-(f, f', f'', f''')$  и если хотя бы одна из них тождественно равна положительной рациональной постоянной, то поверхность является бертрановской (стоит отметить, что указанный алгоритм не учитывает экваторы).

В качестве иллюстрации теоремы 9 рассмотрим проколотую евклидову плоскость, проколотую полусферу  $S^2$ , проколотую плоскость Лобачевского  $L^2$ . Метрика на плоскости в натуральных координатах (для плоскости – это полярные) имеет вид  $ds^2 = dv^2 + v^2d\varphi^2$ , функция  $f(v) = v$ , кривизна плоскости равна нулю ( $f'' = 0$ ), соответственно  $f''f - f'^2 = -1$  (соответствует значению параметров  $t = 0, c = 0, \mu = 1$ ). Метрика на полусфере в натуральных координатах (для полусферы – это долгота и широта) имеет вид  $ds^2 = dv^2 + \sin^2 vd\varphi^2$ , функция  $f(v) = \sin v$ , кривизна полусферы равна единице ( $-\frac{\sin v}{\sin v}$ ), соответственно  $f''f - f'^2 = -1$  (соответствует значению параметров  $t = 0, c = 1, \mu = 1$ ). Метрика на  $L^2$  в натуральных координатах имеет вид  $ds^2 = dv^2 + \text{sh}^2 vd\varphi^2$ , функция  $f(v) = \text{sh} v$ , кривизна  $L^2$  равна минус единице ( $-\frac{\text{sh} v}{\text{sh} v}$ ), соответственно  $f''f - f'^2 = -1$  (соответствует значению параметров  $t = 0, c = -1, \mu = 1$ ). Указанные функции (а также получающиеся из них  $v + c_2, \frac{1}{c_1} \sin(c_1v + c_2), \frac{1}{c_1} \text{sh}(c_1v + c_2)$ ) являются всеми решениями уравнения  $f''f - f'^2 = -1$ .

Доказательство теорем 9 и 10 единообразны и дословно повторяют друг друга, поэтому приведём подробно доказательство теоремы 9, которое основано на следующей лемме.

**Лемма 3.1.2.** Пусть в условиях прямой теоремы функция  $f = f(v)$  удовлетворяет уравнению (3.1.5). Тогда существуют единственные константа  $\mu > 0$  и функция  $\theta(v)$  такие, что

$$\theta'(v) = \frac{1}{\mu^2} \frac{1}{f^2(v)}, \quad f^2(v(\theta)) = \frac{1}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})},$$

где константы  $c, t$  вещественные. При этом  $\mu \in \{\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}\}$ . Более того, если  $f''f - f'^2 = \text{const}$  (что соответствует поверхности с двумя потенциалами), то  $ff'' - f'^2 \equiv -\frac{\beta^2}{i^2}$  для  $i \in \{1, 2\}$ ,  $t = 0, \mu = \frac{i}{\beta}$ ; если  $ff'' - f'^2 \neq \text{const}$  (многообразие второго типа), то  $t \neq 0, \mu = \frac{2}{\beta}$ .

Для доказательства леммы 3.1.2 докажем лемму 3.1.3 об эквивалентности условий (3.1.5) и (3.1.6) на метрику, в которой оно (условие на метрику) переформулировано в эквивалентность уравнений (3.1.5) и (3.1.11). Эквивалентность уравнений нужно понимать так: если  $f(v)$  – решение уравнения (3.1.5), то функция  $f(v(\theta))$ , где  $\theta'(v) = \frac{\beta^2}{f^2(v)}$ , является решением уравнения (3.1.11); обратно, если  $g(\theta) := f(v(\theta))$ , где  $\theta(v)$  определена чуть выше, является решением уравнения (3.1.11), то  $f(v)$  – решение уравнения (3.1.5).

**Лемма 3.1.3.** *Рассмотрим константу  $\beta > 0$  и функцию  $f(v) > 0$  не соответствующую поверхности первого типа (см. зам. 3.1.1), т.е.  $f''f - f'^2 \neq -\frac{\beta^2}{4}$ ,  $f''f - f'^2 \neq -\beta^2$ ,  $f''f - f'^2 \neq 0$  ни в какой точке  $v \in (a, b)$ . Пусть есть замена  $\theta(v)$ , определённая условием  $\theta'(v) = \frac{1}{\mu^2 f^2(v)}$ , и  $v(\theta)$  – обратная замена, где  $\mu = \frac{i}{\beta} > 0$ ,  $i = 1, 2$ .*

*Тогда дифференциальное уравнение третьего порядка (3.1.5) на  $f(v)$  эквивалентно существованию действительных констант  $c_1 \neq 0, c_2$ , для которых функция  $f(v(\theta))$  удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка*

$$\frac{\beta^2 \frac{d}{d\theta} f(v(\theta))}{i^4 f^3(v(\theta))} = c_1(\theta + c_2)^{-3} - \frac{1}{4}(\theta + c_2). \quad (3.1.11)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Каждый шаг в доказательстве леммы 3.1.3 представляет из себя эквивалентный переход между уравнениями.

**Шаг 1.** Для упрощения уравнения (3.1.5) вслед за Сантопрете введём функцию  $h(v) := f(v)f''(v) - f'^2(v)$ . Тогда уравнение (3.1.5) переписется в виде

$$\beta^4 + 5h(v)\beta^2 - 3f(v)f'(v)h'(v) + 4h^2(v) = 0. \quad (3.1.12)$$

**Шаг 2.** Для работы с координатой  $\theta$  введём функцию  $\eta(\theta)$ , которая является в некотором смысле аналогом  $h(v)$ . Пусть  $\eta(\theta) := \frac{1}{(\mu\beta)^2} \frac{f'_v(v(\theta))}{f(v(\theta))} = \frac{\beta^2 \frac{d}{d\theta} f(v(\theta))}{i^4 f^3(v(\theta))}$ . Легко убедиться, что выполнено:

$$h(v) = \beta^2 \eta'_\theta(\theta(v)), \quad h'_v(v) = \frac{\beta^2 \eta''_{\theta\theta}(\theta(v))}{i^4 f^2(v)}.$$

Подстановка полученных соотношений вместе с определением  $\eta$  в уравнение (3.1.12) позволяет переписать его, заменив  $v$  на  $\theta$ :

$$1 + 5\eta'_\theta(\theta) - 3\eta''_{\theta\theta}(\theta)\eta(\theta) + 4\eta_\theta^2(\theta) = 0. \quad (3.1.13)$$

**Шаг 3.** Домножим уравнение (3.1.13) на  $\frac{\eta'}{4|\eta' + \frac{1}{4}|^{\frac{5}{4}}\eta^2}$ . Такое преобразование является эквивалентным переходом в случае  $\eta' \neq -\frac{1}{4}, 0$ . А последнее выполнено, т.к.  $f(v) > 0, f'(v) \neq 0$ , а значит  $\eta(\theta(v)) \neq 0$ , также по условию леммы  $h \neq -\frac{\beta^2}{4}, 0$ , что означает  $\eta' \neq 0, -\frac{1}{4}$ .

Функция  $\eta'(\theta) + \frac{1}{4}$  гладкая и сохраняет знак на области определения. Введём обозначение  $\varepsilon := \text{sgn}(\eta'(\theta) + \frac{1}{4})$ . С учётом сделанных замечаний и введённого обозначения получим

$$\frac{(\eta' + \frac{1}{4})^{\frac{1}{4}} \eta \eta'' - (\eta' + 1) \left( \varepsilon \frac{1}{4} (\eta' + \frac{1}{4})^{-\frac{3}{4}} \eta \eta'' + (\eta' + \frac{1}{4})^{\frac{1}{4}} \eta' \right)}{\eta^2 (\eta' + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}} = 0. \quad (3.1.14)$$



**Шаг 4.** Интегрирование по  $\theta$  даёт

$$\frac{\eta' + 1}{\eta|\eta' + \frac{1}{4}|^{\frac{1}{2}}} = c_0, \quad (3.1.15)$$

где  $c_0$  – действительная константа, и выполнено  $\eta' \neq 0$  и  $c_0 \neq 0$  (согласно условиям леммы  $\eta' \neq -1$ ).

**Шаг 5.** Последний шаг доказывает, что в случае  $\eta' \neq -1$  уравнение (3.1.15) эквивалентно уравнению

$$\eta(\theta) = c_1(\theta + c_2)^{-3} - \frac{1}{4}(\theta + c_2), \quad (3.1.16)$$

где  $c_1, c_2$  – некоторые константы, удовлетворяющие  $c_1 \neq 0, \theta + c_2 \neq 0$  в интервале изменения  $\theta, \eta \neq 0, \eta' \neq 0, \eta' \neq -1, \eta' \neq -\frac{1}{4}, |c_1| = \frac{27}{c_0^3}, c_0(\theta + c_2) < 0$ .

Прямой подстановкой проверяется (3.1.16)  $\Rightarrow$  (3.1.15). Для того, чтобы показать обратную импликацию умножим обе части (3.1.15) на  $\eta$  и продифференцируем по  $\theta$ :

$$\frac{3}{4} \frac{\varepsilon \eta''}{|\eta' + \frac{1}{4}|^{\frac{5}{2}}} = c_0. \quad (3.1.17)$$

Проинтегрируем последнее уравнение с учётом  $c_0 \neq 0$

$$-\frac{3}{c_0} |\eta' + \frac{1}{4}|^{-\frac{1}{4}} = \theta + c_2, \quad (3.1.18)$$

$c_2$  – константа интегрирования. Последнее уравнение интегрируется и даёт

$$\eta(\theta) = c_1(\theta + c_2)^{-3} - \frac{1}{4}(\theta + c_2) + c_3. \quad (3.1.19)$$

Соотношения на константы очевидны.  $\square$

В доказательстве леммы 3.1.2 единственность легко проверяется, а для того, чтобы проверить существование разберём три случая.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1.2**

**Случай 1.** Пусть выполнено  $ff'' - f'^2 \neq -\frac{\beta^2}{4}, ff'' - f'^2 \neq -\beta^2$ . Тогда по лемме 3.1.3 функция  $f(v(\theta))$  удовлетворяет уравнению (3.1.11), где  $c_1 \neq 0$ . Проинтегрируем уравнение (3.1.11) по  $\theta$ . Тогда левая часть

$$\int \frac{1}{\mu^4 \beta^2} \frac{\frac{d}{d\theta} f(v(\theta))}{f^3(v(\theta))} d\theta = -\frac{1}{2} \frac{1}{\mu^4 \beta^2} f^{-2}(v) + c_4.$$

Правая часть равна

$$\int \left( c_1(\theta + c_2)^{-3} - \frac{1}{4}(\theta + c_2) \right) d\theta = -\frac{1}{2} c_1(\theta + c_2)^{-2} - \frac{1}{8}(\theta + c_2)^2 + c_5.$$

Т.к.  $\theta$  определена с точностью до константы выполнено

$$f^2(v(\theta)) = \frac{1}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})},$$

где  $t = -4c_1$ ,  $c = -8(c_5 - c_4)$ ,  $\mu = \frac{2}{\beta}$ .

**Случай 2.** Рассмотрим случай поверхности первого типа, т.е.  $h' \equiv 0$ , поэтому  $\eta' \equiv 0$ , уравнение (3.1.5) в форме (3.1.13) находим  $\eta' \equiv -1$ ,  $\eta' \equiv -\frac{1}{4}$ . Если  $\eta' \equiv -\alpha$ , где  $\alpha = 1$  или  $\frac{1}{4}$ , то при  $\mu := \frac{1}{\beta\sqrt{\alpha}}$  имеем  $\eta = (\alpha\beta)^2 \frac{\frac{d}{d\theta} f(v(\theta))}{f^3(v(\theta))} = \alpha \frac{f'_v(v(\theta))}{f(v(\theta))} = -\alpha\theta + \text{const}$ . Аналогично первому случаю интегрируем по  $\theta$  получим

$$f^2(v(\theta)) = \frac{\alpha\beta^2}{(\theta^2 + c)} = \frac{1}{\mu^2(\theta^2 + c)},$$

что и требовалось.

Остальные случаи разбираются аналогично.  $\square$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9** Чтобы проверить утверждение прямой теоремы подставим полученный в лемме 3.1.2 вид для функции  $f^2(v)$  в метрику  $ds^2 = dv^2 + f^2(v)d\varphi^2$ . Получим

$$ds^2 = \frac{d\theta^2}{(\theta^2 + c - t\theta^{-2})^2} + \frac{d\varphi^2}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})}.$$

Обратное утверждение следует из того, что для римановой метрики (3.1.6) при  $t \neq 0$ ,  $\beta = \frac{2}{\mu}$  функция  $f(v(\theta))$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.1.11), а потому функция  $f(v)$  удовлетворяет (3.1.5). При  $t = 0$  функция  $f(v(\theta))$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.1.11) при  $c_1 = c_2 = 0$ . Откуда  $ff'' - f'^2 \equiv -\frac{\beta^2}{4}$  или  $-\beta^2$ , поэтому  $f(v)$  удовлетворяет (3.1.5).  $\square$

## 3.2 Свойства поверхностей и орбит в $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2^3$

Про римановы поверхности Бертрана  $S_{c,t,\mu}$ , отвечающие значению  $t = 0$ , известно многое, т.к. эти поверхности имеют максимально простой вид – круговой конус (или плоскость), полусфера, плоскость Лобачевского. Про поверхности, отвечающие  $t \neq 0$ , почти ничего не известно, в т.ч. являются ли они алгебраическими, или являются ли поверхности Бертрана также другими известными поверхностями вращения как пары Бонне или “груши” Таннери.

Используя факт реализуемости всех поверхностей Бертрана с псевдоримановой метрикой (теорема 8) можно корректно сформулировать факт алгебраичности поверхности Бертрана. В римановом случае все поверхности, отвечающие значениям параметров  $t = 0$  и  $\mu = 1$  (или  $c = t = 0$  и любому  $\mu$ ), являются алгебраическими, то же справедливо и для псевдориманова случая.

**Утверждение 7.** *Поверхность Бертрана с псевдоримановой метрикой (2.1.7) при  $\mu = 1$ , реализованная как поверхность вращения в  $\mathbb{R}_2^3$ , является подповерхностью алгебраической поверхности.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Используя теорему 10 запишем псевдориманову метрику (2.1.7) в натуральных координатах  $(v, \varphi)$ . Тогда она примет вид  $ds^2 = dv^2 - f^2(v)d\varphi^2$ , где функция  $f(v)$ , которая стоит в метрике, удовлетворяет уравнению:  $f''(v)f(v) - f'^2(v) = \beta^2$ , где  $\beta = 1/\mu$ . Уравнение легко интегрируется и приводит к явному виду функции  $f(v)$ :  $f(v) = \frac{1}{c_1}ch(c_1\beta(v + v_0))$ , где  $c_1, v_0$  – константы интегрирования. Таким образом поверхность Бертрана при  $t = 0$  и  $\mu = 1$  представляет из себя часть однополостного гиперboloида  $\{x^2 + y^2 - z^2 = c_1^2\}$ , который является алгебраической поверхностью.  $\square$

Поверхности Бонне определяются как двумерные поверхности в  $\mathbb{R}^3$  с помощью средней кривизны  $H$ , поэтому сравнивать с ними будем только римановы многообразия Бертрана, реализуемые в  $\mathbb{R}^3$ .

**Определение 3.2.1.** Пара римановых поверхностей  $S_1, S_2$  называется парой Бонне, если существует изометрия  $h : S_1 \rightarrow S_2$ , сохраняющая среднюю кривизну. Поверхность, входящая в какую-нибудь пару Бонне, называется поверхностью Бонне.

**Замечание 3.2.1.** Поверхности Бонне, естественно, вложены в  $\mathbb{R}^3$ , в отличие от поверхностей Бертрана и Таннери, которые могут полностью вкладываться в  $\mathbb{R}^3$ , частично или вообще не вкладываться. Поверхность Бертрана реализуется в  $\mathbb{R}^3$  как поверхность вращения при тех значениях  $c, t, \mu$  и  $\theta \in (a, b)$ , при которых

$$\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2}) \geq (\theta + t\theta^{-3})^2. \quad (3.2.1)$$

Про поверхности Бонне известно следующее.

**Утверждение 8.** Пусть  $S$  – двумерная поверхность в  $\mathbb{R}^3$ .

1. Если  $S$  поверхность семейства Бонне, то индуцированная с  $\mathbb{R}^3$  на  $S$  метрика является метрикой вращения.
2. Среди компактных поверхностей класса гладкости  $C^2$  и рода  $p = 0$  нет пар Бонне.
3. (Г.Р. Жуков) Если поверхность вращения  $S$  с метрикой (1.1.1) и координатами  $(u, \varphi \bmod 2\pi)$  не имеет омбилических точек и ее средняя кривизна непостоянна ( $H'(u) \neq 0 \forall u$ ), то поверхность  $S$  является поверхностью Бонне тогда и только тогда, когда

$$a_{22}(v) (H^2(v) - K(v)) = c_0 H'_s(v). \quad (3.2.2)$$

Здесь  $H, K$  – средняя и гауссова кривизны соответственно,  $c_0$  – константа,  $v$  – натуральный параметр профильной кривой (меридиана).

Сфера  $S^2$  с метрикой вращения – поверхность Таннери, если все геодезические на ней замкнуты (см. теорему 2). Допускается наличие особенностей в полюсах сферы (подробнее см. в [5]), поэтому их можно выколоть и рассматривать поверхность Таннери как

поверхность  $S \approx (a, b) \times S^1$  с метрикой (1.1.1). Перечень всех метрик вращения поверхностей Таннери даёт теорема 2.

Поверхности Бертрана не имеют экваторов (точек  $u_0 : a'_{22}(u_0) = 0$ ), а поверхности Таннери всегда имеют ровно один экватор. Поэтому глобально эти два класса не пересекаются. Исходные поверхности Таннери (гомеоморфные сфере, без выкалывания полюсов) компактные, а среди таких поверхностей не может быть поверхности Бонне по утверждению 8. В противоположность парам Бонне, поверхности Бертрана и Таннери могут вообще не вкладываться в  $\mathbb{R}^3$ . Однако паре параметров  $(c, t) \in \Omega_3$  (см. рис. 2.2) соответствуют сразу две максимальные поверхности Бертрана  $S_1 \approx (0, \sqrt[4]{-t}) \times S^1$  и  $S_2 \approx (\sqrt[4]{-t}, \infty) \times S^1$  (см. табл. 2.1), которые можно гладко склеить по недостающему экватору  $\{\sqrt[4]{-t}\} \times S^1$ , т.е. существует гладкая поверхность  $S_{12} \approx (0, \infty) \times S^1$  с метрикой (2.1.2) такая, что её подповерхности  $(0, \sqrt[4]{-t}) \times S^1$  и  $(\sqrt[4]{-t}, \infty) \times S^1$  суть максимальные поверхности Бертрана с одним и тем же значением параметров  $(c, t, \mu)$ , при этом выполнено соотношение  $a'_{22}(\sqrt[4]{-t}) = 0$ , т.е.  $S_{12}$  будет иметь два полюса и один экватор. Например, при  $c > 0, t = 0, \mu = 1$  (это соответствует лучу  $l_1$ , который является границей области  $\Omega_3$  на рис. 2.2) максимальные поверхности Бертрана являются проклотыми в полюсах полусферами, которые можно склеить по экватору в сферу без полюсов.

Устранив препятствие в виде экватора, можно сравнить поверхности Бертрана с поверхностями Таннери.

**Утверждение 9.** *На гладкой поверхности  $S_{12}$ , получаемой при описанном выше склеивании двух максимальных поверхностей Бертрана  $S_1, S_2$ , заданных парой параметров  $(c, t)$  из области  $\Omega_3$  (рис. 2.2), все геодезические замкнуты, за исключением меридианов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнения геодезических в координатах  $(\theta, \varphi)$  имеют вид

$$\ddot{\theta} - \frac{2(\theta + t\theta^{-3})}{(\theta^2 + c - t\theta^{-2})} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{\mu^2} (\theta + t\theta^{-3}) \dot{\varphi}^2 = 0, \quad (3.2.3)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\varphi}}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\dot{\varphi}}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})} = K. \quad (3.2.4)$$

Из уравнения (3.2.4) можно выразить  $t$  и подставить в уравнение (3.2.3), получится уравнение, задающее кривую (соответствующую геодезической) в виде функции  $\theta = \theta(\varphi)$ :

$$\mu^2 \theta'' + \theta + t\theta^{-3} = 0. \quad (3.2.5)$$

Проинтегрируем уравнение (3.2.5) два раза:

$$\mu^2 \theta'^2 + \theta^2 + c - t\theta^{-2} = \frac{E}{\mu^2 K^2}. \quad (3.2.6)$$

$$\theta^2 = \left( \frac{1}{\mu^2} \frac{E}{K^2} - \frac{c}{2} \right) \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{t}{\left( \frac{1}{\mu^2} \frac{E}{K^2} - \frac{c}{2} \right)^2} \sin^2 2 \frac{\varphi + \varphi_0}{\mu}} \right). \quad (3.2.7)$$

Из рациональности  $\mu$  следует замкнутость геодезической.  $\square$

Таким образом указанные в утверждении поверхности Бертрана с экваторами являются поверхностями Таннери.

Менее тривиальным является вопрос о локальном пересечении классов, т.е. могут ли существовать общие куски у поверхностей из разных классов.

**Определение 3.2.2.** Два класса поверхностей вращения (из трех перечисленных) локально пересекаются, если существуют поверхность  $S_1 \approx (a_1, b_1) \times S^1$  с метрикой  $\text{diag}(a_{11}^2(u), a_{22}^2(u))$  из первого класса и поверхность  $S_2 \approx (a_2, b_2) \times S^1$  с метрикой  $\text{diag}(\bar{a}_{11}^2(u), \bar{a}_{22}^2(u))$  из второго, а также числа  $a'_1, b'_1, a'_2, b'_2$ , такие, что  $a_1 \leq a'_1 < b'_1 \leq b_1, a_2 \leq a'_2 < b'_2 \leq b_2$ , и гладкая изометрия  $h$ , переводящая полосу первой поверхности  $S^1 \times (a'_1, b'_1)$  в полосу второй  $S^1 \times (a'_2, b'_2)$ .

Другими словами, два класса локально пересекаются, если кусочек (в виде пояса) какой-то поверхности из первого класса совпадает с кусочком поверхности из второго класса. В следующем утверждении поверхности предполагаются вложенными в  $\mathbb{R}^3$ .

**Утверждение 10.** Класс поверхностей Бертрана и класс поверхностей Бонне с непостоянной ( $\forall v H'(v) \neq 0$ ) средней кривизной локально не пересекаются.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для доказательства утверждения достаточно убедиться, что ни на какой области поверхности Бертрана не выполняется соотношение (3.2.2), определяющее поверхность Бонне, с этой целью для поверхности Бертрана посчитаем  $a_{22}, H, K$ , подставим их в формулу (3.2.2) и убедимся, что равенство (3.2.2) нарушится.

По метрике (2.1.2) вложенной в  $\mathbb{R}^3$  поверхности Бертрана посчитаем её среднюю и гауссову кривизны. Итак, компоненты метрического тензора  $\bar{E} = a_{11}^2 = \frac{1}{(\theta^2 + c - t\theta^{-2})^2}, \bar{F} = 0, \bar{G} = \frac{1}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})}$ . Гауссова кривизна вычисляется по формуле

$$K = -\frac{1}{\sqrt{\bar{E}\bar{G}}} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\bar{G}_\theta}{\sqrt{\bar{E}\bar{G}}} \right),$$

что в итоге дает

$$K = c - 6t\theta^{-2} - 3tc\theta^{-4} + 2t^2\theta^{-6}. \quad (3.2.8)$$

Для подсчета средней кривизны вычислим сначала главную кривизну  $\lambda_1$  как кривизну профильной кривой (меридиана), затем поделим на нее  $K$  и найдем  $\lambda_2$ . Средняя кривизна будет их средним арифметическим. Имеем

$$\lambda_1 = \sqrt{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2}) - (\theta + t\theta^{-3})^2},$$

$$2H = \frac{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2}) - (\theta + t\theta^{-3})^2 + c - 6t\theta^{-2} - 3tc\theta^{-4} + 2t^2\theta^{-6}}{\sqrt{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2}) - (\theta + t\theta^{-3})^2}}.$$

Осталось вычислить  $H'_v$ . Для этого заметим, что натуральный параметр  $v$  связан с  $\theta$  соотношением  $v = \int \frac{d\theta}{\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})}$ . Имеем

$$H'_v = H'_\theta \cdot \theta'_v = H'_\theta \cdot \frac{1}{v'_\theta} = H'_\theta \cdot \mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2}).$$

Вычисления показывают, что после подстановки  $K, H, H', a_{22}$  в формулу (3.2.2), равенство не выполняется даже локально.  $\square$

Соотношение (3.2.2) задает поверхности Бонне и еще некоторые поверхности вращения с омбилическими точками; как мы показали только что, ни те, ни другие не будут поверхностями Бертрана.

Как показывает соотношение (3.2.8) для римановых поверхностей Бертрана при  $t = 0$  гауссова кривизна поверхности равна параметру  $c$ . Например, при положительных  $c$  и  $\mu = 1$  имеем полусферу, причем ее радиус равен  $\frac{1}{\sqrt{c}}$ . Согласно теореме 7 все полусферы, заданные различными значениями параметра  $c$ , подобны друг другу, что соответствует ожиданиям, при этом константа  $k$ , связывающая  $c_1$  и  $c_2$ , является коэффициентом подобия.

Для поверхностей Бертрана в  $\mathbb{R}^3$ , соответствующих значениям параметров  $t = 0, \mu = 1$ , подробно описаны многие детали движения, в т.ч. сформулированы аналоги законов Кеплера. Сформулируем эти аналоги для полусферы, для плоскости Лобачевского они формулируются аналогично с соответствующей заменой всех синусов на гиперболические синусы. Для первого закона Кеплера понадобится определение 3.2.3.

**Определение 3.2.3.** Рассмотрим в  $\mathbb{R}^3$  с декартовыми координатами  $(x, y, z)$  полусферу  $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = r^2, z < 0\}$  и замкнутое сечение  $\gamma$  на ней конусом второго порядка с вершиной в начале координат. Тогда кривая  $\gamma$  обладает оптическим свойством, т.е. на полусфере существуют две точки  $F_1, F_2$  такие, что любой луч, выпущенный из  $F_1$  после отражения от  $\gamma$  пройдет через  $F_2$  (луч распространяется по геодезическим). Назовем точки  $F_1$  и  $F_2$  *фокусами*  $\gamma$ .

**Утверждение 11** (Первый закон Кеплера для сферы [18]). *Пусть задана полусфера  $S_S$  с координатами  $(\theta, \varphi)$  и метрикой (2.1.2). Пусть на сфере действует аналог ньютоновского потенциала  $V_1$  или аналог гукковского  $V_2$ . Тогда частица будет двигаться по коническому сечению, где конус является квадрикой и его центр совпадает с центром сферы. Как и в плоскости на полусфере аналог гравитационного потенциала даёт эллипс с притягивающим центром в фокусе, а в случае осцилляторного притягивающий центр будет в центре квадрики.*

Чтобы обобщить второй закон Кеплера на полусферу необходимо ввести понятие *тени* частицы. Соединим точку, в которой находится частица, с полюсом полусферы с помощью меридиана, тогда при движении частицы по поверхности дуга большого круга, соединяющая точку с полюсом, замечает некоторую площадь  $s(t)$ . Для указанной площади второй закон Кеплера не выполняется, т.е.  $\dot{s}(t) \neq 0$ . Сопоставим каждой частице  $(\nu, \varphi)$  её тень, т.е. точку  $(2\nu, \varphi)$ , где  $(\nu, \varphi)$  – сферические координаты, которые связаны с бертановскими следующим образом:  $\theta = \text{ctg}\nu, \varphi = \varphi$ .

**Утверждение 12** (Второй закон Кеплера для сферы [37]). Пусть задана полусфера  $C_S$  с координатами  $(\theta, \varphi)$  и метрикой (2.1.2). Пусть на  $C_S$  действует аналог ньютоновского потенциала  $V_1$  или аналог гюковского  $V_2$ . Тогда площади, заметаемые за равные интервалы времени меридианом, соединяющим тень движущейся частицы с полюсом полусферы, равны.

Стоит заметить, что не для каждой точки полусферы определена её тень (для точек лежащих вблизи экватора удвоенная широта выходит за пределы экватора, т.е. поверхности), хотя если считать тень абстрактной точкой, принадлежащей целой сфере (т.е. частица движется по полусфере, а её тень по полной сфере), то тогда закон обобщается без ограничений.

**Утверждение 13** (Третий закон Кеплера для сферы [37]). Пусть задана полусфера  $C_S$  с координатами  $(\theta, \varphi)$  и метрикой (2.1.2). Пусть на  $C_S$  действует аналог ньютоновского потенциала  $V_1$ . Тогда период движения  $T$  частицы по орбите (т.е. период траектории) зависит только от суммы  $\nu_1 + \nu_2$ , где  $\nu_1, \nu_2$  – пери и апоцентры в сферических координатах, т.е. просто широты пери- и апоцентров.

К сожалению, обобщить эти законы на поверхности Бертрана, отвечающие ненулевому значению параметра  $t$ , не удастся. Однако можно обобщить их на случай псевдоримановых поверхностей, отвечающих значениям параметров  $t = 0, \mu = 1$ , но сначала сформулируем одно простое утверждение.

**Утверждение 14.** Пусть  $S$  ( $S'$ ) – риманова (псевдориманова) поверхность Бертрана, реализованная в  $\mathbb{R}^3$  ( $\mathbb{R}_2^3$ ), а  $V$  – замыкающий потенциал на ней. Тогда орбиты будут симметричны относительно плоскостей, проходящих через ось вращения поверхности и точек экстремумов.

Это утверждение является прямым следствием предложения 2.2. Следующее утверждение обобщает первый закон Кеплера на поверхности с индефинитной метрикой.

**Утверждение 15.** Пусть  $S'$  – поверхность Бертрана с псевдоримановой метрикой  $ds^2 = \frac{d\theta^2}{(\theta^2+c)^2} + \frac{d\varphi^2}{(\theta^2+c)}$ , реализованная в  $\mathbb{R}_2^3$ . Пусть на ней действует аналог ньютоновского потенциала  $V_1$  или аналог гюковского  $V_2$ . Тогда движение по  $S'$  под действием  $V_1$  (соответственно  $V_2$ ) будет происходить по коническим сечениям, где конус является квадратикой и его центр расположен на оси вращения.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Точка с координатами  $(\theta, \varphi)$  лежит на поверхности  $(x, y, z) = (f(\theta) \cos \varphi, f(\theta) \sin \varphi, g(\theta))$ . При этом для потенциала  $V_1$  согласно (2.2.18)  $\theta$  и  $\varphi$  связаны соотношением  $\theta = a + b \cos \varphi$ . Выразим в этом соотношении  $\theta$  и  $\cos \varphi$  через  $(X, Y, Z)$ . Косинус выражается так  $\cos \varphi = X/\sqrt{X^2 + Y^2}$ ,  $\theta$  выражается так  $\theta = \sqrt{-c} \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$  (из  $g'^2 -$

$f'^2 = \frac{1}{(\theta^2+c)^2}$  и  $f^2 = -\frac{1}{\theta^2+c}$  находим  $g'^2 = \frac{c}{(\theta^2+c)^3}$ , интегрируем  $g = \frac{\theta}{c(\theta^2+c)}$  и устанавливаем  $\theta = \sqrt{-c\frac{g}{f}} = \sqrt{-c\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}}$ . После подстановки получится

$$\sqrt{-c}\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}} = a + b\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}},$$

а это уже уравнение квадратичного конуса с вершиной на оси  $OZ$ .

Аналогично для потенциала  $V_2$  ( $\cos 2\varphi = \frac{X^2-Y^2}{X^2+Y^2}$ ,  $\theta^2 = -c\frac{Z^2}{X^2+Y^2}$ ).  $\square$

Последнее утверждение сформулировано для орбит, которые замыкаются за один виток ( $\mu = 1$ ).

При  $t \neq 0$  неясно являются ли орбиты коническими сечениями, но они сохраняют некоторые свойства эллипса. Во-первых, общий вид уравнения (2.2.19)  $\theta^2 = \frac{1}{p}(1+e \cos 2\varphi)$  напоминает уравнение эллипса в полярных координатах (в случае  $\mathbb{R}^2$  с полярными координатами  $(r, \varphi)$  бертрановские координаты определяются так  $\theta = 1/r$ ). Во-вторых, орбита имеет 2 оси симметрии.

В-третьих, для орбит можно ввести понятие эксцентриситета. На плоскости квадррики задаются эксцентриситетом с точностью до преобразования подобия, т.е. любые две квадррики с одинаковым  $e$  подобны. В случае поверхности Бертрана (как с римановой так и с псевдоримановой метрикой) назовём эксцентриситетом орбиты величину  $e = \sqrt{1 + \frac{t - \frac{2A}{K^2}}{(\frac{E-B}{K^2} - \frac{c}{2})^2}}$ . Тогда если взять орбиту с тем же эксцентриситетом, но другим  $\frac{E-B}{K^2} - \frac{c}{2}$ , то одна переводится в другую с помощью умножения:  $\gamma_1(\theta, \varphi) \rightarrow \gamma_2(\theta, \varphi) = \gamma_1(x * \theta, \varphi)$ .

В-четвертых справедливо обобщение следующего простого свойства квадррик на плоскости: если повернуть на плоскости эллипс (параболу) на 90 градусов (и даже сдвинуть), то точки пересечения его с исходным эллипсом (если сдвига не было, их будет 4) будут лежать на одной окружности (достаточно сложить их уравнения в декартовых координатах). Здесь же роль поворота сыграет подстановка  $\varphi \rightarrow \varphi + \frac{\pi}{2}$ , которая даст повернутую орбиту. Оказывается её пересечение с исходной орбитой будет состоять из 4 точек, лежащих на одной параллели.



# Глава 4

## ГАМИЛЬТОНОВ ПОДХОД

В предыдущих главах к системам Бертрана применялся лагранжев подход. Однако система Бертрана является в то же время и гамильтоновой системой с четырехмерным фазовым пространством  $M^4$ . Бертрановская система интегрируема, полная энергия  $E$  и кинетический момент  $K$  – её первые интегралы. Для некоторых бертрановских систем (риманов случай,  $t = 0$ ) построен также третий первый интеграл, который является обобщением вектора Лапласа-Рунге-Ленца [25] (заметим, что вектор Лапласа-Рунге-Ленца удалось обобщить также и на остальные поверхности Бертрана [1]), таким образом, для таких систем найден максимальный набор первых интегралов. Система Бертрана очень похожа на интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы [33], но таковой не является в силу неполноты фазовых потоков. Однако она сохраняет многие свойства интегрируемых по Лиувиллю систем, в т.ч. её фазовое пространство  $M^4$  слоится на совместные поверхности уровней интегралов  $E$  и  $K$ , связные компоненты которых либо окружности, либо торы, либо цилиндры. Система Бертрана богата различными особенностями: у неё не всегда полны фазовые потоки, у неё есть некомпактные слои и некомпактные перестройки, у неё все торы Лиувилля резонансны. Несмотря на все это здесь работают большинство методов, разработанных и применяемых для интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем с компактными изоэнергетическими поверхностями [32]-[34], [41]-[42], [45]-[53], [54].

В данной главе будет подробно описана топология слоения Лиувилля системы Бертрана, исследована полнота фазовых потоков первых интегралов  $E$  и  $K$ , а также возникающие перестройки слоев при изменении  $E$  и  $K$ , построены расширенные бифуркационные диаграммы.

### 4.1 Система Бертрана как гамильтонова система

Представление системы Бертрана как гамильтоновой системы позволит нам применить к ее изучению новые методы и получить новые результаты. Пусть у нас задано произ-

вольное гладкое многообразие вращения  $S \approx (a, b) \times S^1$  (соответственно  $S'$ ) с координатами  $(u, \varphi \bmod 2\pi)$  и римановой метрикой (1.1.1) (псевдоримановой метрикой (1.1.2)). Пусть на  $S$  (на  $S'$ ) действует центральный гладкий потенциал  $V(u)$ . Тогда такая система является гамильтоновой. Соответствующие импульсы имеют вид  $p_u := \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = a_{11}^2(u)\dot{u}$ ,  $p_\varphi := \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \hat{\varepsilon} a_{22}^2(u)\dot{\varphi}$ , где  $L$  – лагранжиан, а гамильтониан  $H = \frac{p_u^2}{2a_{11}^2(u)} + \hat{\varepsilon} \frac{p_\varphi^2}{2a_{22}^2(u)} + V(u)$ . Движение задается уравнениями Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{\partial H}{\partial p_u}, \\ \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \\ \dot{p}_u = -\frac{\partial H}{\partial u}, \\ \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}. \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Напомним, что величина  $\hat{\varepsilon}$  введена для единообразия записи формул в римановом и псевдоримановом случаях (см. определение 1.1.1), и соответственно равна единице в первом и минус единице во втором. Когда поверхность  $S$  (или  $S'$ ) и потенциал  $V$  бертрановские, то уравнения (4.1.1) можно решить в бертрановских координатах  $(\theta, \varphi)$  (см. замечание 1.1.2) и записать решение в виде функции  $\vec{r}(t) = (\theta(t), \varphi(t))$ , т.е. найти траектории (см. определение 1.1.3) на  $S$  (или  $S'$ ). По траектории  $\vec{r}(t)$  восстанавливается орбита, а также фазовая траектория  $\vec{r}_M(t) = (\theta(t), \varphi(t), p_\theta(t), p_\varphi(t))$ .

Большую помощь в интегрировании уравнений (4.1.1) оказывают первые интегралы полной энергии  $E$  и кинетического момента  $K$ , которые являются таковыми не только для бертрановской пары  $(S, V)$ , но и для произвольной поверхности вращения  $S$  и центрального (не зависящего от угловой координаты  $\varphi$ ) потенциала  $V$ :

$$E = H = \frac{p_u^2}{2a_{11}^2(u)} + \hat{\varepsilon} \frac{p_\varphi^2}{2a_{22}^2(u)} + V(u), \quad (4.1.2)$$

$$K = p_\varphi. \quad (4.1.3)$$

*Гамильтоновой системой Бертрана* назовем ограничение системы (4.1.1) на инвариантное подмножество  $M^4 := (T^*S) \setminus \{p_\varphi = 0\}$ . Фазовое пространство  $M^4$  системы представляет из себя четырехмерное многообразие вращения  $(a, b) \times S^1 \times \mathbb{R}^1 \times (\mathbb{R}^1 \setminus \{0\})$  (кокасательное расслоение к  $S$ , из которого удалены фазовые орбиты, отвечающие особым орбитам). На  $M^4$  определены координаты  $(u, \varphi, p_u, p_\varphi)$ .

**Определение 4.1.1.** *Симплектическое* многообразие  $M$  – это многообразие с заданной на нем невырожденной замкнутой 2-формой  $\omega$ . Форма  $\omega$  называется симплектической.

Любое симплектическое многообразие является ориентируемым и четномерным. Фазовое пространство  $M^4$  описанной выше динамической системы – симплектическое многообразие с канонической симплектической структурой

$$\omega = du \wedge dp_u + d\varphi \wedge dp_\varphi. \quad (4.1.4)$$

Наличие симплектической структуры позволяет канонически определить вектор косоградиента от скалярной гладкой функции  $F$  на  $M^4$  и скобку Пуассона [33].

**Определение 4.1.2.** Для гладкой функции  $F$  на симплектическом многообразии  $(M^{2n}, \omega)$  определён вектор *косоградиента*  $\text{sgrad } F(u)$ : координаты вектора  $\text{sgrad } F(u)$  определяются из соотношения  $\omega(v, \text{sgrad } F) = v(F)$ , которое должно быть выполнено для произвольного векторного поля  $v$  на  $M^{2n}$ . В локальных координатах

$$(\text{sgrad } F)^i = \omega^{ij} \frac{\partial F}{\partial x^j}, \quad (4.1.5)$$

где  $\omega^{ij}$  – матрица, обратная к  $\omega_{ij}$  – матрице симплектической формы (4.1.4).

Вектор косоградиента  $\text{sgrad } F$  является двойственным к ковектору градиента  $dF$  относительно невырожденной формы  $\omega$ .

**Определение 4.1.3.** Скобкой Пуассона на многообразии  $M$  называется билинейное отображение  $\{\cdot, \cdot\}: C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , ставящее в соответствие паре гладких функций гладкую функцию, и удовлетворяющее правилам косо́й симметрии, Якоби и Лейбница:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \quad (4.1.6)$$

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0, \quad (4.1.7)$$

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}. \quad (4.1.8)$$

Многообразие, на котором введена скобка Пуассона, называется *пуассоновым*.

Любое симплектическое многообразие является пуассоновым (обратное, вообще говоря, не верно), т.к. для двух гладких функций  $F, G$  *скобку Пуассона* можно ввести следующим образом

$$\{F, G\} = \omega(\text{sgrad } F, \text{sgrad } G) \Leftrightarrow \{F, G\} = \omega^{ij} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial G}{\partial x^j}.$$

Скажем, что две гладкие функции  $F, G$  на  $M^4$  находятся в *инволюции* или *коммутируют*, если  $\{F, G\} = 0$ . Функция, равная тождественно константе, коммутирует с любой другой.

В терминах скобки Пуассона уравнения Гамильтона (4.1.1) переписываются в виде:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \{H, u\}, \\ \dot{\varphi} &= \{H, \varphi\}, \\ \dot{p}_u &= \{H, p_u\}, \\ \dot{p}_\varphi &= \{H, p_\varphi\}. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Интегральные кривые системы (4.1.9) представляют из себя кривые векторного поля  $\text{sgrad } H$ . Функция  $F$  на  $M$  – первый интеграл системы (4.1.9), если она постоянна на интегральных кривых поля  $\text{sgrad } H$ , что соответствует  $\dot{F} = \{H, F\} = 0$ .

**Определение 4.1.4.** Гамильтонову систему  $(M^{2n}, \omega, H)$ , определенную на симплектическом многообразии  $(M^{2n}, \omega)$ , где  $H$  – гладкий гамильтониан, назовем *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, если существует  $n$  первых интегралов  $f_1, f_2, \dots, f_n$  поля  $\text{sgrad } H$ , которые удовлетворяют условиям:

- $f_1, f_2, \dots, f_n$  функционально независимы, т.е. почти всюду на  $M^{2n}$  их градиенты линейно независимы,
- $f_1, f_2, \dots, f_n$  попарно коммутируют, т.е.  $\{f_i, f_j\} = 0$ ,
- фазовые потоки полей  $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$  полны, т.е. естественный параметр на интегральных кривых продолжается до бесконечности в обе стороны.

Совместной регулярной поверхностью  $T_{a_1, \dots, a_n}$  уровня функций  $f_1, \dots, f_n$  назовём поверхность  $T_{a_1, \dots, a_n} := \{x \in M^{2n} : f_1(x) = a_1, \dots, f_n(x) = a_n\}$  такую, что в каждой точке  $x \in T_{a_1, \dots, a_n}$  градиенты  $\text{grad } f_1, \dots, \text{grad } f_n$  линейно независимы. Разбиение фазового пространства  $M^{2n}$  на связные компоненты совместных поверхностей уровня первых интегралов назовем слоением Лиувилля. Для совместной поверхности первых интегралов  $f_1, \dots, f_n$  вполне интегрируемых по Лиувиллю систем выполняется теорема Лиувилля [33].

**Теорема 11** (Теорема Лиувилля). *Пусть  $(M^{2n}, \omega, H = f_1, f_2, \dots, f_n)$  – вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *совместная регулярная связная поверхность  $T_{a_1, \dots, a_n}$  уровня интегралов  $f_1, \dots, f_n$  инвариантна относительно потоков  $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$  и если она компактна, то диффеоморфна  $n$ -мерному тору  $T^n$ , который называется тором Лиувилля;*
2. *слоение Лиувилля в некоторой окрестности  $U$  тора Лиувилля  $T_{a_1, \dots, a_n}$  диффеоморфно прямому произведению тора  $T^n$  на диск  $D^n$ ;*
3. *в окрестности  $U = T^n \times D^n$  можно ввести координаты  $s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ , называемые переменными действие-угол, обладающие свойствами:*
  - (a)  $s_1, \dots, s_n$  – координаты на  $D^n$ ,  $\varphi_1 \bmod 2\pi, \dots, \varphi_n \bmod 2\pi$  – угловые координаты на торе  $T^n$ ,
  - (b)  $\omega = \sum ds_i \wedge d\varphi_i$ ,
  - (c) переменные действия  $s_i$  являются функциями от первых интегралов  $f_1, \dots, f_n$ ,
  - (d) гамильтонов поток  $\text{sgrad } H$  в переменных действие-угол спрямляется на каждом торе Лиувилля, что означает, что уравнения Гамильтона принимают вид  $\dot{s}_i = 0, \dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \dots, s_n)$ .

Важно заметить, что в случае некомпактности слоя  $T_{a_1, \dots, a_n}$ , он диффеоморфен факторпространству пространства  $\mathbb{R}^n$  по  $\mathbb{Z}^k$  ( $k < n$ ),  $T_{a_1, \dots, a_n} \approx (S^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ .

Бертрановская гамильтонова система на проколотовой евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2 \setminus \{*\}$  с полярными координатами  $(r, \varphi)$ , потенциалом Гука пружинного взаимодействия  $V(r) = r^2$ , четырехмерным фазовым пространством  $M^4 \approx (0, \infty) \times S^1 \times \mathbb{R}^2$ , гамильтонианом  $H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2r^2} + r^2$  является вполне интегрируемой по Лиувиллю с компактными слоями Лиувилля (несмотря на некомпактность  $M^4$ ), каждый регулярный слой будет двумерным тором. Однако не все бертрановские системы интегрируемы по Лиувиллю.

Рассмотрим тор Лиувилля  $T$  некой интегрируемой системы  $\text{sgrad } H$ . Тогда по теореме Лиувилля поле  $\text{sgrad } H$  на торе  $T$  принимает вид  $\dot{\varphi}_1 = c_1, \dots, \dot{\varphi}_n = c_n$ . Тор Лиувилля называют *резонансным*, если существует нетривиальная целочисленная линейная комбинация величин  $c_1, \dots, c_n$ , равная нулю. Соответственно система называется *резонансной*, если все ее торы Лиувилля резонансны. В случае системы с двумя степенями свободы число  $\rho = \frac{c_2}{c_1}$  называют *числом вращения* интегрируемой системы  $\text{sgrad } H$  на торе Лиувилля  $T$ . У бертрановской системы все ограниченные орбиты будут замкнуты, а, следовательно, и все траектории лежащие на торах Лиувилля (для интегралов  $H$  и  $p_\varphi$ ) будут замкнуты, таким образом, система Бертрана является резонансной. Для нее число вращения на каждом торе одинаково и равно одному из семи параметров, определяющих пару Бертрана  $(S, V)$ , рациональному  $\mu$  для аналога потенциала Ньютона и  $\frac{\mu}{2}$  для аналога потенциала Гука.

Для более общей динамической гамильтоновой системы  $(S, V)$ , где  $S \approx (a, b) \times S^1$  – двумерная поверхность вращения с метрикой (1.1.1) (или псевдоримановой метрикой (1.1.2)),  $V$  – центральный гладкий потенциал на  $S$ , с фазовым симплектическим пространством  $(M^4, \omega)$  (где  $\omega$  определена соотношением (4.1.4)), гамильтонианом  $H = \frac{p_u^2}{2a_{11}^2(u)} + \hat{\varepsilon} \frac{p_\varphi^2}{2a_{22}^2(u)} + V(u)$  рассмотрим первые интегралы энергии  $H$  и кинетического момента  $p_\varphi$ . Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 16.** *Интегралы энергии (4.1.2) и кинетического момента (4.1.3) функционально независимы п.в., находятся в инволюции и векторное поле  $\text{sgrad } p_\varphi$  полно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Посчитаем градиенты  $H$  и  $p_\varphi$  в координатах  $(u, \varphi, p_u, p_\varphi)$ :

$$\text{grad } H = \begin{pmatrix} H'_u = -\frac{a'_{11}(u)}{a_{11}^3(u)} p_u^2 - \hat{\varepsilon} \frac{a'_{22}(u)}{a_{22}^3(u)} p_\varphi^2 + V'(u) \\ H'_\varphi = 0 \\ H'_{p_u} = \frac{p_u}{a_{11}^2(u)} \\ H'_{p_\varphi} = -\frac{p_\varphi}{a_{22}^2(u)} \end{pmatrix}, \quad \text{grad } p_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.10)$$

Далее с помощью соотношения (4.1.5) вычислим  $\text{sgrad } H, \text{sgrad } p_\varphi$ :

$$\text{sgrad } H = \begin{pmatrix} H'_{p_u} \\ H'_{p_\varphi} \\ -H'_u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{sgrad } p_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1.11)$$

Теперь легко увидеть, что  $\{H, p_\varphi\} = (\text{sgrad } H)^T \omega_{ij} (\text{sgrad } p_\varphi) = 0$ .

Полнота поля  $\text{sgrad } p_\varphi$  следует из того, что его интегральные линии – это окружности вида  $\{*\} \times S^1 \times \{*\} \times \{*\} \subset M^4$ .  $\square$

Утверждения 16 недостаточно для того, чтобы гамильтонова система  $(S, V)$  была вполне интегрируема по Лиувиллю. Как показывают утверждения 18, 19, поток  $\text{sgrad } H$  не всегда полон. Однако, несмотря на это, для связных компактных компонент совместного регулярного множества уровня интегралов энергии и кинетического момента выполняются утверждения теоремы Лиувилля, т.е. справедливо утверждение 17.

**Утверждение 17.** Пусть  $S$  ( $S'$ ) – поверхность с координатами  $(u, \varphi)$  и римановой метрикой (1.1.1) (псевдоримановой метрикой (1.1.2)). Пусть на ней действует центральный потенциал  $V(u)$ . Тогда для такой гамильтоновой системы связная компонента совместной регулярной поверхности уровня интегралов энергии и кинетического момента  $T_{E,K} = \{(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) \in M^4 \mid \frac{p_u^2}{2a_{11}^2(u)} + \hat{\varepsilon} \frac{p_\varphi^2}{2a_{22}^2(u)} + V(u) = E, p_\varphi = K\}$  является либо тором, либо цилиндром.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Заметим, что согласно утверждению 16 выполняются все условия определения 4.1.4, кроме полноты потока  $\text{sgrad } H$ . Этого достаточно для применения теоремы 1 работы [30], являющейся обобщением классической теоремы Лиувилля.

Дадим далее альтернативное доказательство в случае, когда связная компонента  $T_{E,K}$  компактна. Рассмотрим векторное поле  $\text{sgrad } p_\varphi$  на связной компоненте  $T_{E,K}$ . Поверхность  $T_{E,K}$  инвариантна относительно поля  $\text{sgrad } p_\varphi$ , т.к. из коммутирования  $H, p_\varphi$  следует, что  $H, p_\varphi$  являются первыми интегралами не только для поля  $\text{sgrad } H$ , но и для поля  $\text{sgrad } p_\varphi$ . У поля  $\text{sgrad } p_\varphi$  не будет особых точек, т.к. его интегральные линии суть окружности  $\{*\} \times S^1 \times \{*\} \times \{*\}$ . А значит эйлерова характеристика (как сумма индексов особых точек векторного поля) совместной компактной поверхности уровня равна 0, т.е. это тор или бутылка Клейна. Так как поверхность  $T_{E,K}$  регулярна, то векторы  $\text{sgrad } H, \text{sgrad } p_\varphi$  образуют базис ее касательного пространства в каждой ее точке. Поэтому эта поверхность ориентируема, т.е. не может являться бутылкой Клейна.

Для бертрановского потенциала можно, используя замкнутость ограниченных орбит, построить в явном виде гомеоморфизм между тором и  $T_{E,K}$ . Пусть  $T_{E,K}$  компактна и  $(u, \varphi, p_u, p_\varphi) \in T_{E,K}$ . Тогда существует такая ограниченная, а значит в силу замыкаемости бертрановского потенциала, замкнутая траектория  $\gamma(t)$ . При некотором значении времени  $t = t_0$  тело при движении по этой траектории проходит точку с координатами  $(u, \varphi)$  и имеет энергию и кинетический момент равные соответственно  $E, K$ . Эта траектория не является круговой, так как на фазовой орбите, отвечающей круговой орбите,  $\text{sgrad } H$  пропорционален  $\text{sgrad } p_\varphi$ , поэтому содержащая ее поверхность  $T_{E,K}$  не регулярна. Все некруговые ограниченные орбиты с такими же значениями  $H, p_\varphi$  получаются из  $\text{Im } \gamma$  поворотом на некий угол  $\varphi_0$ . Поэтому каждую такую орбиту (траекторию) можно задать углом  $\varphi_0$ . Т.к. траектория замкнута, то каждая точка на траектории  $\theta(\varphi)$  однозначно задаётся углом  $\varphi$  (точка однозначно задаётся моментом времени  $t$ , а  $\varphi(t)$  – монотонна).

Поэтому все точки на совместной компоненте уровня интегралов  $H, p_\varphi$  можно взаимнооднозначно задать двумя угловыми координатами  $(\varphi_0, \varphi)$ , и значит она является тором  $S^1 \times S^1$ .

Аналогично с цилиндром, который получается в некомпактном случае.  $\square$

Далее среди всех систем  $(S, V)$  и  $(S', V)$  движения по поверхности  $S$  с римановой метрикой (1.1.1) или  $S'$  с псевдоримановой метрикой (1.1.2) под действием центрального потенциала  $V$  будем рассматривать только бертрановские. Также далее рассуждения будут проходить в бертрановских координатах (зам. 1.1.2). Для определения всех случаев полноты потока  $\text{sgrad } H$  заметим, что у ограниченных орбит поток  $\text{sgrad } H$  всегда полон. В случае же неограниченных нужно посчитать, выходит ли орбита на границу поверхности за конечное время или нет. Если выходит, значит параметр на соответствующей траектории не продолжается до бесконечности и поток неполон.

**Определение 4.1.5.** Пусть задана поверхность Бертрана  $S \approx (a, b) \times S^1$  с замыкающим потенциалом  $V$ . Тогда граница  $\theta = a$  (или  $\theta = b$ ) *достигается*, если существует неособая орбита  $\{\theta = \theta(\varphi) \mid \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$ , где  $-\infty \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq \infty$ , упирающаяся в границу  $\theta = a$ , т.е.  $\theta(\varphi) \rightarrow a$  при  $\varphi \rightarrow \varphi_0$  для некоторого действительного  $\varphi_0$ . Граница  $\theta = a$  (или  $\theta = b$ ) *достигается асимптотически* или является *асимптотой*, если существует неособая орбита  $\theta = \theta(\varphi)$ , наматывающаяся на граничную окружность  $\theta = a$ , т.е.  $\varphi_i \in \{-\infty, +\infty\}$  и  $\theta(\varphi) \rightarrow a$  при  $\varphi \rightarrow \varphi_i$  для некоторого  $i \in \{1, 2\}$ . Граница  $\theta = a$  (или  $\theta = b$ ) *достигается (или достигается асимптотически) за конечное время*, если существует неособая траектория  $\vec{r}(t) = (\theta(t), \varphi(t))$  и действительное  $t_0$  такие, что  $\theta(t) \rightarrow a$  при  $t \rightarrow t_0$ . Граница  $\theta = a$  (или  $\theta = b$ ) *вполне недостижима*, если она не достигается и не достигается асимптотически.

**Утверждение 18.** Пусть задана пара Бертрана  $(S, V)$ , где  $S$  – максимальная риманова поверхность Бертрана, параметризованная тройкой  $(c, t, \mu)$ , с бертрановскими координатами  $(\theta, \varphi \bmod 2\pi)$  и метрикой (2.1.2),  $V(\theta)$  – замыкающий потенциал на  $S$ . Тогда справедливы следующие положения.

1. В случае  $t = 0, c = 0$  и потенциала  $V_1(\theta) = A\theta$  ( $A < 0$ ) граница  $\theta = 0$  (абсолют) достигается за бесконечное время всеми неособыми орбитами с уровнями  $(E, K)$  интегралов таких, что  $E \geq 0$ , при остальных значениях  $(E, K)$  граница вполне недостижима. Граница  $\theta = \infty$  (полюс) вполне недостижима. Если потенциал  $V_2(\theta) = \frac{A}{\theta^2}$  ( $A > 0$ ), то обе границы  $\theta = 0, \theta = \infty$  вполне недостижимы.
2. В случае  $t = 0, c > 0$  и потенциала  $V_1(\theta)$  граница  $\theta = 0$  (граничный экватор) достигается за конечное время неособыми орбитами с уровнями  $(E, K)$  интегралов таких, что  $2E \geq c\mu^2 K^2$ , при других значениях  $(E, K)$  граница вполне недостижима. Граница  $\theta = \infty$  (полюс) вполне недостижима. Если потенциал  $V_2(\theta)$ , то обе границы  $\theta = 0, \theta = \infty$  вполне недостижимы.

3. В случае  $t = 0, c < 0$  и потенциала  $V_1(\theta)$  граница  $\theta = \sqrt{-c}$  (абсолют) достигается за бесконечное время всеми неособыми орбитами с уровнями  $(E, K)$  интегралов из области  $\{E > A\sqrt{-c}\} \cup \{E = A\sqrt{-c}, -A > \mu^2 K^2 \sqrt{-c}\}$ , при остальных значениях  $(E, K)$  граница вполне недостижима. Граница  $\theta = \infty$  (полюс) вполне недостижима. Для потенциала  $V_2(\theta)$  граница  $\theta = \sqrt{-c}$  достигается за бесконечное время всеми неособыми орбитами с уровнями  $(E, K)$  интегралов из области  $\{E > \frac{A}{-c}\} \cup \{E = \frac{A}{-c}, 2A > \mu^2 K^2 c^2\}$ , при остальных значениях  $(E, K)$  граница вполне недостижима. Граница  $\theta = \infty$  вполне недостижима.
4. В случае  $t > 0$  и потенциала  $V_2$  граница  $\theta = \infty$  (полюс) вполне недостижима. Граница  $\theta = \theta_2$  (абсолют) достигается за бесконечное время всеми неособыми орбитами с уровнями  $(E, K)$  интегралов из области  $\{E > \frac{A}{\theta_2^2}\} \cup \{E = \frac{A}{\theta_2^2}, \frac{2A}{\mu^2(\theta_2^4+t)} > K^2\}$ , при остальных значениях  $(E, K)$  граница вполне недостижима.
5. В случае значения параметров  $(c, t)$  из области  $\Omega_2 \cup l_3 = \{t < 0, c < 0, c^2 + 4t \geq 0\}$  (см. рис. 2.2) и потенциала  $V_2 = \frac{A}{\theta^2}(A(\theta^4 + t) > 0)$  имеем две поверхности. Граница первой поверхности  $\theta = \theta_2$  (абсолют) достигается за бесконечное время всеми неособыми орбитами с уровнями  $(E, K)$  интегралов из области  $\{E > \frac{A}{\theta_2^2}\} \cup \{E = \frac{A}{\theta_2^2}, \frac{2A}{\mu^2(\theta_2^4+t)} > K^2\}$ , при остальных значениях  $(E, K)$  граница вполне недостижима. Граница первой поверхности  $\theta = \infty$  (полюс) вполне недостижима. Граница  $\theta = 0$  (полюс) второй поверхности достигается за конечное время всеми неособыми орбитами с уровнями  $(E, K)$  интегралов из области  $\{2A < \mu^2 K^2 t\} \cup \{2A = \mu^2 K^2 t, 2E > \mu^2 K^2 c\}$ , при остальных значениях  $(E, K)$  граница вполне недостижима. Граница  $\theta = \theta_1$  (абсолют) второй поверхности достигается за бесконечное время всеми неособыми орбитами с уровнями  $(E, K)$  интегралов из области  $\{E > \frac{A}{\theta_1^2}\} \cup \{E = \frac{A}{\theta_1^2}, \frac{2A}{\mu^2(\theta_1^4+t)} > K^2\}$ , при остальных значениях  $(E, K)$  граница вполне недостижима.
6. В случае значения параметров  $(c, t)$  из области  $\Omega_3 = \{c^2 + 4t < 0\} \cup \{c > 0, t < 0, c^2 + 4t \geq 0\}$  (см. рис. 2.2) и потенциала  $V_2 = \frac{A}{\theta^2}(A(\theta^4 + t) > 0)$  имеем две поверхности. Граница первой и второй поверхностей  $\theta = \sqrt[4]{-t}$  (граничный экватор) достигается за конечное время всеми неособыми орбитами с уровнями  $(E, K)$  интегралов из области  $\{2(E - \frac{A}{\sqrt{-t}}) - \mu^2 K^2(2\sqrt{-t} + c) \geq 0\}$ , при остальных значениях  $(E, K)$  граница вполне недостижима. Граница  $\theta = \infty$  (полюс) первой поверхности вполне недостижима. Граница  $\theta = 0$  (полюс) второй поверхности достигается за конечное время всеми неособыми орбитами с уровнями  $(E, K)$  интегралов из области  $\{\mu^2 K^2 t > 2A\} \cup \{\mu^2 K^2 t = 2A, \mu^2 K^2 c = 2E\}$ , при остальных значениях  $(E, K)$  граница вполне недостижима.

**Утверждение 19.** Пусть задана пара Бертрана  $(S', V)$ , где  $S'$  – максимальная псевдориманова поверхность Бертрана, параметризованная тройкой  $(c, t, \mu)$ , с бертрановски-



ми координатами  $(\theta, \varphi \bmod 2\pi)$  и псевдоримановой метрикой (2.1.8),  $V(\theta)$  – замыкающий потенциал на  $S'$ . Тогда справедливы следующие положения.

1. В случае  $t = 0, c < 0$  и потенциала  $V_1(\theta) = A\theta$  ( $A < 0$ ) граница  $\theta = 0$  (граничный экватор) достигается за конечное время всеми неособыми орбитами с уровнями  $(E, K)$  интегралов таких, что  $E \geq \mu^2 K^2 \frac{c}{2}$ , при остальных значениях  $(E, K)$  граница вполне недостижима. Граница  $\theta = \sqrt{-c}$  (абсолют) достигается за бесконечное время всеми неособыми орбитами с уровнями  $(E, K)$  интегралов из области  $\{E > A\sqrt{-c}\} \cup \{E = A\sqrt{-c}, K^2 > \frac{-A}{\mu^2\sqrt{-c}}\}$ , при остальных значениях  $(E, K)$  граница вполне недостижима.
2. В случае  $t = 0, c < 0$  и потенциала  $V_2(\theta) = \frac{A}{\theta^2}$  ( $A > 0$ ) (см. теорему 6) граница  $\theta = \sqrt{-c}$  достигается только за бесконечное время всеми неособыми орбитами с уровнями  $(E, K)$  интегралов из области  $\{E > \frac{A}{-c}\} \cup \{E = \frac{A}{-c}, K > \frac{\sqrt{2A}}{-\mu c}\}$ , при остальных значениях  $(E, K)$  граница вполне недостижима. Граница  $\theta = 0$  вполне недостижима.
3. В случае  $t > 0$  и потенциала  $V_2(\theta) = \frac{A}{\theta^2}$  ( $A > 0$ ) граница  $\theta = 0$  (полюс) достигается за конечное время всеми неособыми орбитами с уровнями  $(E, K)$  интегралов из области  $\{K^2 > \frac{2A}{\mu^2 t}\} \cup \{K^2 = \frac{2A}{\mu^2 t}, E > \frac{Ac}{t}\}$ , при остальных значениях  $(E, K)$  граница вполне недостижима. Граница  $\theta = \theta_2$  (абсолют) достигается за бесконечное время всеми неособыми орбитами с уровнями  $(E, K)$  интегралов из области  $\{E > \frac{A}{\theta_2^2}\} \cup \{E = \frac{A}{\theta_2^2}, K^2 > \frac{2A}{\mu^2(\theta_2^4+t)}\}$ , при остальных значениях  $(E, K)$  граница вполне недостижима.
4. В случае значения параметров  $(c, t)$  из области  $\Omega_2 := \{(c, t) : t < 0, c < 0, c^2 + 4t > 0\}$  (см. рис. 2.1) имеем две максимальные поверхности. Граница  $\theta = \sqrt[4]{-t}$  (граничный экватор) первой и второй поверхностей достижима за конечное время всеми неособыми орбитами с уровнями  $(E, K)$  интегралов из области  $\{E \geq \frac{A}{\sqrt{-t}} + \mu^2 K^2(\sqrt{-t} + \frac{c}{2})\}$ , при остальных значениях  $(E, K)$  граница вполне недостижима. Граница  $\theta = \theta_1$  (абсолют) первой поверхности достижима за бесконечное время всеми неособыми орбитами с уровнями  $(E, K)$  интегралов из области  $\{E > \frac{A}{\theta_1^2}\} \cup \{E = \frac{A}{\theta_1^2}, K^2 > \frac{2A}{\mu^2(\theta_1^4+t)}\}$ , при остальных значениях  $(E, K)$  граница вполне недостижима. Граница  $\theta = \theta_2$  (абсолют) второй поверхности достижима за бесконечное время всеми неособыми орбитами с уровнями  $(E, K)$  интегралов из области  $\{E > \frac{A}{\theta_2^2}\} \cup \{E = \frac{A}{\theta_2^2}, K^2 > \frac{2A}{\mu^2(\theta_2^4+t)}\}$ , при остальных значениях  $(E, K)$  граница вполне недостижима.

**Замечание 4.1.1.** Утверждения 18, 19 позволяют выделить три случая в зависимости от полноты потоков и компактности регулярных слоев Лиувилля.

1. Потоки  $\text{sgrad } H$  полны и регулярные слои компактны для следующих римановых максимальных поверхностей Бертрана и потенциалов:  $t = c = 0, V_2$ ;  $t = 0, c > 0, V_2$ .

Среди псевдоримановых поверхностей нет удовлетворяющих требованиям полноты потоков и компактности слоев.

2. Потоки  $\text{sgrad } H$  полны, но среди регулярных слоев есть некомпактные для следующих римановых максимальных поверхностей Бертрана и потенциалов:  $t = c = 0, V_1$ ;  $t = 0, c < 0, V_1$ ;  $t = 0, c < 0, V_2$ ;  $t > 0, V_2$ ;  $t < 0, c < 0, c^2 + 4t > 0, \hat{a} = \theta_2, \hat{b} = \infty, V_2$ .  
Потоки  $\text{sgrad } H$  полны, но среди регулярных слоев есть некомпактные для следующих псевдоримановых максимальных поверхностей Бертрана и потенциалов:  $t = 0, c < 0, V_2$ .
3. Потоки  $\text{sgrad } H$  неполны во всех остальных случаях.

**Замечание 4.1.2.** В утверждениях 18, 19 рассматривались максимальные поверхности Бертрана, т.е. такие, которые не являются подповерхностью никакой другой поверхности Бертрана. Пусть риманова поверхность Бертрана  $S_0 \approx (a_1, b_1) \times S^1$  не максимальна и является подповерхностью максимальной поверхности Бертрана  $S \approx (a, b) \times S^1$  так, что  $a < a_1 < b_1 < b$ . Тогда обе её границы  $\theta = a_1$  и  $\theta = b_1$  достигаются за конечное время. В самом деле у исходной поверхности  $S$  согласно предложению 2.5 существует замкнутая траектория с энергией  $E$ , кинетическим моментом  $K$ , перицентром  $a_1$  и апоцентром  $b_1$  и периодом  $T$ . Тогда время движения от  $a_1$  до  $b_1$  равно  $t_1 < T$  ( $t_1 = T/2q$ ), поэтому если рассмотреть орбиту с энергией  $E$  и кинетическим моментом  $K$  на поверхности  $S_0$ , то полное время, которое потребуется, чтобы добраться от одной границы до другой конечно и равно  $t_1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Прежде всего сформулируем факт достижимости границы в терминах функций  $V(\theta)$  и  $a_{22}^2(\theta)$  и констант  $E, K$ . Необходимым и достаточным условием того, что движение с энергией  $E$ , моментом  $K$  возможно в точке  $(\theta_0, \varphi_0)$  является

$$\tilde{V}(\theta_0) = E - V(\theta_0) - \hat{\varepsilon} \frac{K^2}{2a_{22}^2(\theta_0)} \geq 0. \quad (4.1.12)$$

В самом деле согласно (1.1.5) выполнено  $\tilde{V}(\theta_0) = \frac{a_{11}^2(\theta_0)\dot{\theta}_0^2}{2}$ , откуда сразу следует необходимость, достаточность следует из теоремы существования решения задачи Коши дифференциального уравнения (1.1.5) с начальным условием  $\theta(\varphi_0) = \theta_0$ .

Соответственно, если граница  $\theta = a$  достигается, то в некоторой ее окрестности возможно движение по некоторой неособой орбите, т.е. существует орбита  $\{\theta = \theta(\varphi)\}$  и действительное  $\varepsilon > 0$  такие, что  $\forall \theta_0 \in (a, a + \varepsilon) \exists \varphi_0 : \theta(\varphi_0) = \theta_0$ . Однако этого недостаточно, чтобы граница  $\theta = a$  достигалась, т.к. если  $\tilde{V}(a) = 0$  орбита  $\{\theta = \theta(\varphi)\}$  может наматываться на границу (с бесконечным числом витков) так ее и не достигнув. Необходимое условие достижимости границы  $\theta = a$ , совпадающее с достаточным условием достижимости или асимптотической достижимости границы  $\theta = a$ , формулируется так:  $\tilde{V}(\theta) > 0$  в некоторой окрестности границы  $\theta = a$  вида  $(a, a + \varepsilon)$ . Но для систем Бертрана асимптотическая достижимость невозможна в силу явных формул (2.2.18)–(2.2.20)

для орбит в бертрановских координатах (см. конец доказательства теоремы 6). Поэтому окончательно необходимое и достаточное условие достижимости границы  $\theta = a$  для бертрановских систем формулируется так:  $\tilde{V}(\theta) > 0$  в некоторой окрестности границы  $\theta = a$  вида  $(a, a + \varepsilon)$ . Для выполнения последнего условия (а значит, и для достижимости границы  $\theta = a$ ) достаточно того, что либо  $0 < \tilde{V}(a) \leq +\infty$ , либо  $\tilde{V}(a) = 0$  и  $\tilde{V}'(a) > 0$ . Здесь мы используем, что для бертрановских систем эффективный потенциал имеет простой вид (см. (2.2.21)), поэтому он (вместе со своими производными) естественно продолжается (возможно, бесконечностью) по непрерывности в граничные точки интервала  $(a, b)$ .

Проверку с производными можно опустить, если известно, что время движения до границы хотя бы по одной траектории конечно.

Имея условия, которые позволяют определить достигается ли граница, осталось привести условие для определения достигается ли граница за конечное время или за бесконечное. Для этого достаточно записать время движения по орбите с энергией  $E$  и моментом  $K$  от параллели  $\theta = \theta_{11}$  до параллели  $\theta = \theta_{22}$  (согласно (1.1.5) и (1.1.6)) и устремлять одну из крайних параллелей  $(\theta_{11}, \theta_{22})$  к границе:

$$T = \int_{\theta_{11}}^{\theta_{22}} \frac{a_{11}(\theta)d\theta}{\sqrt{2(E - V(\theta)) - \hat{\varepsilon} \frac{K^2}{a_{22}^2(\theta)}}}. \quad (4.1.13)$$

Заметим, что под корнем стоит как раз величина  $2\tilde{V}(\theta)$ , поэтому если движение возможно, то подкоренное выражение в интеграле (4.1.13) неотрицательно.

Рассмотрим риманову ( $\hat{\varepsilon} = 1$ ) максимальную бертрановскую поверхность  $S \approx (0, \infty) \times S^1$ , соответствующую  $c = t = 0$  и потенциал  $V_1(\theta) = A\theta$  ( $A < 0$ ). Если граница  $\theta = \infty$  достигается, то тогда существует орбита  $\theta(\varphi)$  с некоторыми  $E, K$  такая, что  $\tilde{V}(\theta)$  в окрестности  $\infty$  положительна. Но при  $\theta \rightarrow \infty$  функция  $\tilde{V}(\theta) = E - A\theta - \frac{K^2\mu^2}{2}\theta^2$  стремится к  $-\infty$  при любых значениях  $E, K \neq 0$  (что соответствует неособости орбиты), что означает (по критерию (4.1.12)), что данная граница не достигается.

Видно, что при  $\theta \rightarrow 0$  функция  $\tilde{V}(\theta) \rightarrow E$ , а также  $\tilde{V}'(0) = -A > 0$ , т.е. граница  $\theta = 0$  достигается при  $E \geq 0$  и не достигается при  $E < 0$ . При  $E \geq 0$  время движения между параллелями  $\theta_{11}$  и  $\theta_{22}$  вычисляется (согласно (4.1.13))

$$T = \int_{\theta_{11}}^{\theta_{22}} \frac{d\theta}{\theta^2 \sqrt{2(E - A\theta) - K^2\mu^2\theta^2}}.$$

При  $\theta_{11} = 0$  интеграл в 0 расходится, т.е. граница  $\theta = 0$  достигается за бесконечное время.

Рассмотрим теперь на той же поверхности потенциал  $V_2 = \frac{A}{\theta^2}$  ( $A > 0$ ). Тогда функция  $\tilde{V}(\theta) = E - \frac{A}{\theta^2} - \frac{K^2\mu^2}{2}\theta^2$ . При любых значениях  $E, K \neq 0$   $\tilde{V}(\theta) \rightarrow -\infty$  при  $\theta \rightarrow 0$  и при  $\theta \rightarrow \infty$ , поэтому обе границы  $\theta = 0$  и  $\theta = \infty$  не достигаются.

Рассмотрим риманову максимальную бертрановскую поверхность  $S \approx (0, \infty) \times S^1$ , соответствующую  $c > 0$  и потенциал  $V_1(\theta) = A\theta$  ( $A < 0$ ). Функция  $\tilde{V}(\theta) = E - A\theta -$

$\frac{K^2\mu^2}{2}(\theta^2 + c)$ . При  $\theta \rightarrow 0$  функция  $\tilde{V}(\theta)$  стремится к величине  $E - \frac{K^2\mu^2 c}{2}$ , которая может быть положительной при тех значениях  $E, K$ , при которых  $2E > c\mu^2 K^2$ ; при  $2E = c\mu^2 K^2$ , т.е.  $\tilde{V}(0) = 0$ , выполнено  $\tilde{V}'(0) > 0$ . Значит граница  $\theta = 0$  достигается. Но при  $\theta \rightarrow \infty$  функция  $\tilde{V}(\theta) \rightarrow -\infty$  при любых значениях  $K \neq 0, E$  и граница  $\theta = \infty$  не достигается. Время движения между параллелями  $\theta_{11}$  и  $\theta_{22}$  в этом случае вычисляется по формуле

$$T = \int_{\theta_{11}}^{\theta_{22}} \frac{d\theta}{(\theta^2 + c)\sqrt{2(E - A\theta) - K^2\mu^2(\theta^2 + c)}}.$$

При  $\theta_{22} \rightarrow \theta_{11} = 0$  подынтегральная функция не превосходит константы  $\frac{1}{c\sqrt{2E - K^2\mu^2 c}}$ , т.е. интеграл конечен и граница  $\theta = 0$  достигается за конечное время.

Выполнено также  $\tilde{V}'(0) = -A > 0$ , хотя это условие проверять уже не обязательно, т.к. время движения между какой-нибудь параллелью и границей конечно. В случае гукковского потенциала  $V_2 = \frac{A}{\theta^2}$  ( $A > 0$ ) функция  $\tilde{V}(\theta)$  стремится к  $-\infty$  в окрестности обеих границ, поэтому обе границы не достигаются.

Для максимальной поверхности Бертрана (римановой)  $S \approx (\sqrt{-c}, \infty) \times S^1$ , отвечающей значениям параметров  $t = 0, c < 0$  (зона  $l_2$  на рис. 2.2), и потенциала  $V_1 = A\theta$  ( $A < 0$ ) функция  $\tilde{V}(\theta) = E - A\theta - \frac{K^2\mu^2}{2}(\theta^2 + c)$ . При  $\theta \rightarrow \infty$   $\tilde{V}(\theta) \rightarrow -\infty$  при любых значениях  $E, K \neq 0$ , поэтому граница  $\theta = \infty$  не достигается. Граница  $\theta = \sqrt{-c}$  достигается при  $\tilde{V}(\sqrt{-c}) = E - A\sqrt{-c} > 0$ ; при  $E = A\sqrt{-c}$  неравенство  $\tilde{V}'(\sqrt{-c}) = -A - K^2\mu^2\sqrt{-c} > 0$  выполняется при  $-A > \mu^2 K^2 \sqrt{-c}$ . Соответствующий интеграл расходится в  $\sqrt{-c}$ , поэтому граница  $\theta = \sqrt{-c}$  достигается за бесконечное время.

Остальные случаи разбираются аналогично. Осветим еще только случай максимальной римановой поверхности Бертрана  $S \approx (0, \sqrt[4]{-t}) \times S^1$ , отвечающей значениям параметров  $(c, t)$  из области  $\Omega_3$  (см. рис. 2.2). На  $S$  действует замыкающий потенциал  $V_2(\theta) = A\theta^{-2}$  ( $A < 0$ ).

Имеем функцию  $\tilde{V}(\theta) = E - \frac{A}{\theta^2} - \frac{\mu^2 K^2}{2}(\theta^2 + c - t\theta^{-2})$ . Тогда  $\tilde{V}(\sqrt[4]{-t}) = E - \frac{A}{\sqrt{-t}} - \frac{\mu^2 K^2}{2}(2\sqrt{-t} + c)$ , и при любом значении  $K \neq 0$  можно подобрать  $E$  такое, что  $\tilde{V}(\sqrt[4]{-t}) > 0$ , следовательно, граница  $\theta = \sqrt[4]{-t}$  достигается при  $E - \frac{A}{\sqrt{-t}} - \frac{\mu^2 K^2}{2}(2\sqrt{-t} + c) > 0$ ; в случае равенства граница также достигается, т.к.  $\text{sgn}\tilde{V}(\sqrt[4]{-t}) = \text{sgn}2A$ . Далее для  $K^2 < \frac{2A}{\mu^2 t}$  выполняется  $\tilde{V}(\theta) \rightarrow +\infty$  при  $\theta \rightarrow 0$ . Значит, граница  $\theta = 0$  достигается при  $K^2 < \frac{2A}{\mu^2 t}$ ; при  $K^2 = \frac{2A}{\mu^2 t}$  выполнено  $\tilde{V}(\theta) = 2E - \mu^2 K^2(\theta^2 + c)$ , значит граница  $\theta = 0$  в этом случае при  $2E = c\mu^2 K^2$ .

Время движения между параллелями  $\theta_{11}, \theta_{22}$  в этом случае равно:

$$T = \int_{\theta_{11}}^{\theta_{22}} \frac{d\theta}{(\theta^2 + c - t\theta^{-2})\sqrt{2(E - \frac{A}{\theta^2}) - K^2\mu^2(\theta^2 + c - t\theta^{-2})}}.$$

При  $\theta_{22} = \sqrt[4]{-t}$  интеграл сходится в  $\sqrt[4]{-t}$ , т.к. при  $\theta \rightarrow \sqrt[4]{-t}$  подынтегральная функция стремится к константе  $\frac{1}{(2\sqrt{-t}+c)\sqrt{2(E - \frac{A}{\sqrt{-t}}) - K^2\mu^2(2\sqrt{-t}+c)}}$ ; при этом подкоренное выражение

больше нуля, т.к. оно равно  $\tilde{V}(\sqrt[4]{-t}) > 0$  (мы подобрали подходящее  $E$ ), а  $2\sqrt{-t} + c > 0$  в силу  $(c, t) \in \Omega_3$ . При  $\theta_{11} = 0$  интеграл сходится, т.к. при  $\theta \rightarrow 0$  подынтегральная функция эквивалентна  $\frac{\theta^3}{-t\sqrt{-2A+\mu^2K^2t}}$ .

В случае максимальных поверхностей Бертрана с псевдоримановой метрикой доказательство проходит по той же схеме, при этом значение переменной  $\hat{\varepsilon}$  берется равным минус единице.

□

Евклидова плоскость  $\mathbb{R}^2$  с законом всемирного тяготения и законом притяжения Гаука служит отличным примером к утверждению 18. Евклидова плоскость, если в ней проколоть притягивающий центр, является максимальной поверхностью Бертрана  $(0, \infty) \times S^1$ , отвечающей следующим значениям параметров  $t = c = 0$ ,  $\mu = 1$ . В случае потенциала Гаука, который в полярных координатах равен  $Ar^2$  ( $A > 0$ ), все неособые орбиты будут эллипсами, поэтому ни одна из границ  $r = 0, r = \infty$  не достигается (ни одна траектория не упирается в притягивающий центр и ни одна не уходит на бесконечность). В случае же потенциала Ньютона все неособые орбиты будут либо эллипсами, либо параболами, либо гиперболами, что означает недостижимость границы  $r = 0$ , но достижимость за бесконечное время границы  $r = \infty$  (например, гиперболой).

## 4.2 Бифуркационные диаграммы.

Для бертрановской системы  $(S', V)$ , где  $S'$  – максимальная поверхность Бертрана с псевдоримановой метрикой (1.1.2), а  $V$  замыкающий потенциал на ней, рассмотрим два первых интеграла энергии  $H$  и кинетического момента  $p_\varphi$ . Для указанных интегралов рассмотрим слоение Лиувилля фазового пространства  $M^4$  гамильтоновой системы Бертрана на совместные слои уровней интегралов  $H$  и  $p_\varphi$ . Топологические свойства слоения Лиувилля фазового пространства интегрируемой гамильтоновой системы связаны с особенностями отображения момента.

**Определение 4.2.1.** Отображение  $F_{KE} : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , задаваемое правилом  $F_{KE}(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) = (p_\varphi, H) = (p_\varphi, \frac{p_\theta^2}{2a_{11}^2(\theta)} - \frac{p_\varphi^2}{2a_{22}^2(\theta)} + V(\theta))$  назовем *отображением момента*.

Точку  $m \in M^4$  назовем *особой точкой* отображения момента, если  $\text{rk } dF_{KE}(x) < 2$ . Соответственно  $\text{rk } dF_{KE}(x)$  назовем *рангом особой точки*  $x$ . Образ множества всех особых точек при отображении момента назовем *бифуркационной диаграммой*.

Построим бифуркационные диаграммы отображения момента для систем Бертрана, а также на плоскости  $ОКЕ$  изобразим различные зоны точек  $(K, E)$ , выделяющие различные типы движений (круговое, некруговое ограниченное, неограниченное с одной стороны, неограниченное с двух сторон) – назовем всю эту конструкцию расширенной бифуркационной диаграммой. Таким образом каждой точке на плоскости  $(K, E)$  соответствует

слой слоения Лиувилля. Мы не рассматриваем вырожденное движение, т.е. движение по меридианам  $\varphi = \text{const}$ , что соответствует нулевому значению кинетического момента. Соответственно, на плоскости  $ОКЕ$ , где мы изобразим расширенную бифуркационную диаграмму, будет выколото множество  $K = 0$ . Заметим, что случаи  $K > 0$  и  $K < 0$  симметричны, бифуркационная диаграмма симметрична относительно  $ОЕ$ , поэтому ограничимся построением при  $K > 0$ . Для удобства разобьем множество  $\Sigma = F_{KE}[M^4]$  на несколько подмножеств.

**Определение 4.2.2.**  $\Sigma_2$  – образ множества точек фазового пространства, в которых  $\text{rk } dF_{KE} = 2$ .

$\Sigma_1$  – образ множества особых точек ранга 1.

$\Sigma_0$  – образ множества особых точек ранга 0.

$I_B$  – образ множества точек фазового пространства, которые лежат на фазовых траекториях, соответствующих ограниченными орбитам.

Для системы Бертрана выполняется  $\Sigma = \Sigma_0 \sqcup \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$ . В самом деле  $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  в виду того, что  $0 \leq \text{rk } dF \leq 2$ . Далее  $\text{grad } p_\varphi \neq 0$  ввиду (4.1.10), поэтому верно  $\Sigma_0 = \emptyset$ . Для множества  $\Sigma_1$  верно  $\text{rk } dF_{KE} = 1 \Leftrightarrow \text{rk}(\text{grad } p_\varphi, \text{grad } H) = 1 \Leftrightarrow$  вектора  $\text{grad } H, \text{grad } p_\varphi$  линейно зависимы. С учетом (4.1.10) линейная зависимость означает, что

$$\begin{cases} -2 \frac{a'_{22}(\theta)}{\mu^2 a_{22}^5(\theta)} p_\theta^2 + \frac{a'_{22}(\theta)}{a_{22}^3(\theta)} p_\varphi^2 + V'(\theta) = 0 \\ \frac{p_\theta}{a_{11}^2(\theta)} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{a'_{22}(\theta)}{a_{22}^3(\theta)} p_\varphi^2 + V'(\theta) = 0 \\ p_\theta = 0 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Здесь применен тот факт, что в используемых нами бертрановских координатах  $a_{11}^2(\theta) = a_{22}^4(\theta) \cdot \mu^4$ . Условия (4.2.1) в точности означают, что данные  $K, E$  достигаются на круговой орбите  $\{\theta\} \times S^1$  и только на ней (согласно определению импульса  $p_\theta$  и предложению 2.1), поэтому прообраз  $F_{KE}^{-1}(\Sigma_1)$  состоит из точек фазовых траекторий, соответствующих круговым орбитам. Верно и обратное, на круговых орбитах выполняются условия (4.2.1). Таким образом  $\Sigma_1$  состоит только из образа точек фазовых траекторий, соответствующих круговым орбитам, поэтому  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ .

Например, в случае закона Ньютона гравитационного притяжения в  $\mathbb{R}^2$  все невырожденные орбиты можно разделить на ограниченные и неограниченные. Ограниченные будут всегда замкнуты, т.к. они эллипсы. Эллипсам будут соответствовать значения  $(K, E) \in I_B$ , окружностям, как частному случаю эллипса, будут соответствовать значения  $(K, E) \in \Sigma_1 \subset I_B$ . Параболам и гиперболам будут соответствовать значения  $(K, E) \in \Sigma_2 \setminus I_B$ .

В общем случае также множество  $I_B$  соответствует тем значениям интегралов энергии и момента, которые достигаются только на ограниченных орбитах. К ограниченным относятся круговые, поэтому  $\Sigma_1 \subset I_B$  всегда.

Для каждого случая ( $t = 0, V_1 = A\theta + B; t = 0, V_2 = \frac{A}{\theta^2} + B; t > 0, V_2; t < 0, V_2$ ) представим по два рисунка – бифуркационная диаграмма вместе с образом всего фазового пространства и расширенная бифуркационная диаграмма.

**Замечание 4.2.1.** Поскольку константа  $B$  ни на что не влияет, в дальнейшем мы будем строить бифуркационную диаграмму без неё. Если далее везде вместо  $E$  представить  $E - B$ , то получатся формулы и диаграммы с учетом  $B$ .

**Предложение 4.1.** Рассмотрим максимальную поверхность Бертрана  $S'$ , соответствующую значениям параметров  $(c, t, \mu)$  из области  $l_1$  (рис. 2.1), и потенциал  $V = A\theta$  ( $A < 0$ ). Для такой гамильтоновой системы бифуркационная диаграмма и полный образ отображения момента (на плоскости  $(K, E)$ ) имеют вид (рис. 4.1). Точка  $A_1$  имеет координаты  $(\sqrt{\frac{-A}{\mu^2\sqrt{-c}}, A\sqrt{-c}}$ ) и не принадлежит  $\Sigma$ , множество  $\Sigma_1$  представляет из себя кривую  $E_1(K) = \{(K, E) : E = \frac{c\mu^2 K^2}{2} - \frac{A^2}{2\mu^2 K^2}, \sqrt{\frac{-A}{\mu^2\sqrt{-c}}} < K < \infty\}$ .

Область  $\Sigma_2$  делится кривыми  $E_2(K), E_3(K)$  на четыре зоны (рис. 4.2)  $I_B, I_1, I_2, I_3$ , где  $E_2(K) = \{(K, E) : E = \frac{c\mu^2 K^2}{2}, 0 < K < \infty\}$ ,  $E_3(K) = \{(K, E) : E = A\sqrt{-c}, \sqrt{\frac{-A}{\mu^2\sqrt{-c}}} < K < \infty\}$ . Прообраз любой точки из  $\Sigma_1$  – окружность, прообраз любой точки из  $I_B$  тор (рис. 4.2). Прообраз каждой точки из  $I_1$  цилиндр, соответствующие фазовые потоки полны. Прообраз каждой точки из  $I_2$  цилиндр с неполными фазовыми потоками, время на соответствующих траекториях не продолжается ни до  $+\infty$ , ни до  $-\infty$ . Прообраз любой точки из  $I_3$  – пара цилиндров с неполными потоками; время на траекториях цилиндра, лежащего в  $\{r_\theta < 0\}$ , не продолжается до  $+\infty$ , но продолжается до  $-\infty$ , для цилиндра  $\{r_\theta > 0\}$  наоборот. Граница зон  $I_1$  и  $I_B$  содержится в  $I_1$ , граница зон  $I_2$  и  $I_B$  содержится в  $I_2$ , граница зон  $I_1$  и  $I_3$  содержится в  $I_3$ , граница зон  $I_2$  и  $I_3$  содержится в  $I_3$ , общая граничная точка четырех зон принадлежит  $I_3$ .

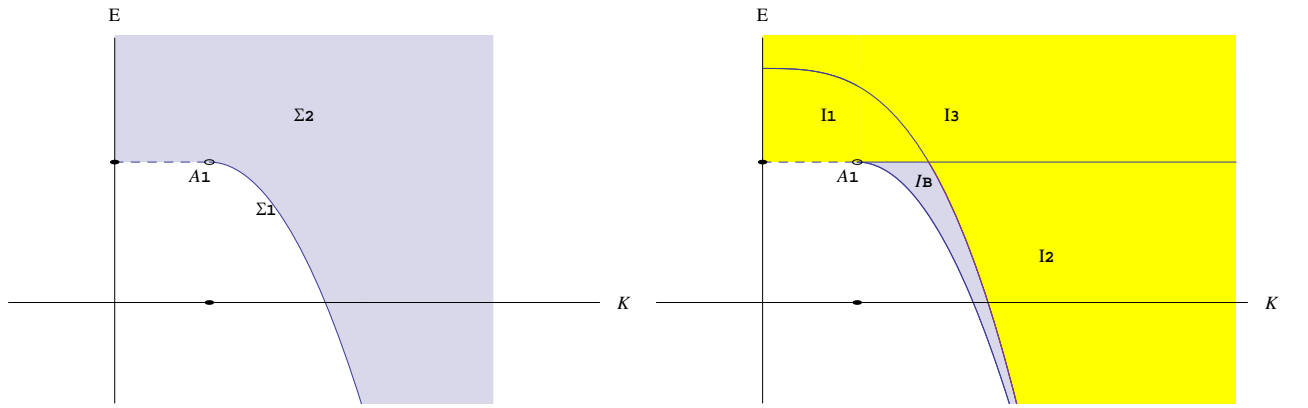


Рис. 4.1: Бифуркационная диаграмма и  $\Sigma$  в случае  $l_1, V_1$ . Рис. 4.2: Расширенная бифуркационная диаграмма в случае  $l_1, V_1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Покажем, что  $\Sigma$  имеет вид как на рис. 4.1. Точка  $(K, E) \in \Sigma$ ,

назовем такие значения первых интегралов допустимыми, если существует орбита с соответствующими значениями интегралов энергии  $E$  и момента  $K$ . Согласно (4.1.12) необходимым и достаточным условием того, чтобы было возможно движение по  $S'$  под действием  $V$  с энергией  $E$  и моментом  $K$  является существование  $\theta_0$  из интервала  $(0, \sqrt{-c})$  такого, что

$$\tilde{V}(\theta_0) = E - V(\theta_0) + \frac{K^2}{2a_{22}^2(\theta_0)} \geq 0. \quad (4.2.2)$$

Подставим в условие (4.2.2) нашу псевдориманову метрику  $a_{22}^2 = -\frac{1}{\mu^2(\theta^2+c)}$  и замыкающий потенциал  $V(\theta) = A\theta$  ( $A < 0$ ):  $\tilde{V}(\theta_0) := E - A\theta_0 - \frac{K^2\mu^2c}{2} - \frac{K^2\mu^2\theta_0^2}{2}$ . Таким образом задача свелась к нахождению всех пар  $(K > 0, E)$ , для которых существует  $\theta_0 \in (0, \sqrt{-c}) : \tilde{V}(\theta_0) \geq 0$ .

Производная  $\tilde{V}'(\theta) = -A - K^2\mu^2\theta$  обращается в ноль в точке  $\theta_{max} = -\frac{A}{K^2\mu^2}$ . Если максимум функции  $\tilde{V}$  (ноль  $\tilde{V}'$ ) принадлежит  $(0, \sqrt{-c})$ , то вопрос существования  $\theta_0$ , удовлетворяющей  $\tilde{V}(\theta_0) \geq 0$ , эквивалентен условию  $\tilde{V}(\theta_{max}) \geq 0$ . Пусть  $\sigma_1$  – множество точек  $(K, E) \in \Sigma$ , для которых максимум функции  $\tilde{V}(\theta)$  принадлежит интервалу  $(0, \sqrt{-c})$ , а  $\sigma_2 := \Sigma \setminus \sigma_1$  – множество точек  $(K, E) \in \Sigma$ , для которых функция  $\tilde{V}(\theta)$  не достигает максимума на интервале  $(0, \sqrt{-c})$ . Условие  $\theta_{max} = -\frac{A}{K^2\mu^2} \in (0, \sqrt{-c})$  эквивалентно  $K > \sqrt{\frac{-A}{\sqrt{-c}}}$ . Таким образом, чтобы найти  $\sigma_1$  достаточно найти все пары  $(K, E)$ , для которых  $\tilde{V}\left(-\frac{A}{\mu^2K^2}\right) \geq 0$ . Имеем  $\tilde{V}\left(-\frac{A}{\mu^2K^2}\right) = E + \frac{A^2}{\mu^2K^2} - \frac{\mu^2K^2c}{2} - \frac{A^2}{2\mu^2K^2} \geq 0$ , что соответствует тому, что при  $K > \sqrt{\frac{-A}{\sqrt{-c}}}$  точки  $(E, K)$  расположены на кривой  $E_1(K)$  и выше неё.

Чтобы найти  $\sigma_2$  нужно заметить, что если функция  $\tilde{V}(\theta)$  не имеет максимума на  $(0, \sqrt{-c})$ , тогда она возрастает и существование  $\theta_0 \in (0, \sqrt{-c}) : \tilde{V}(\theta_0) \geq 0$  эквивалентно условию  $\tilde{V}(\sqrt{-c}) > 0$ . Что даёт в итоге  $E > A\sqrt{-c}$  для точек при  $K \leq \sqrt{\frac{-A}{\sqrt{-c}}}$  (на рис. 4.1 уровень  $E = A\sqrt{-c}$  обозначен пунктиром).

Объединяя теперь найденные  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  получаем  $\Sigma$ .

Покажем, что  $\Sigma_1$  задаётся кривой  $E_1(K)$ . Первый способ состоит в том, что каждая круговая орбита  $\theta = \theta_0$  имеет свою уникальную  $K$ , поэтому можно из первого уравнения системы (4.2.1) выразить  $\theta$  через  $K$  и подставив в (4.1.2) получить как связаны  $E$  и  $K$  для круговой орбиты. Согласно (4.2.1) для  $a_{22}^2(\theta) = -\frac{1}{\mu^2(\theta^2+c)}$  и  $V = A\theta$  имеем  $\mu^2\theta K^2 + A = 0$ , т.е.  $\theta = \frac{-A}{\mu^2K^2}$ . Далее полученную  $\theta$  вместе с условием  $p_\theta = 0$  подставим в (4.1.2) и получим  $E_1(K)$ :

$$E = \frac{K^2\mu^2c}{2} - \frac{A^2}{2\mu^2K^2}.$$

Т.к.  $\theta \in (0, \sqrt{-c})$  (замечание 2.1.4), то  $K \in (\sqrt{\frac{-A}{\mu^2\sqrt{-c}}}, \infty)$ .

Второй способ состоит в том, что условия (4.2.1) определяют круговую орбиту. Обратимся к уравнению орбиты (2.2.18) – оно показывает, что в случае замкнутой орбиты, происходит флуктуация вокруг положения  $-\frac{A}{\mu^2K^2}$  с амплитудой  $\sqrt{1 + \frac{2E\mu^2K^2}{A^2} - c\frac{\mu^4K^4}{A^2}}$ , для



круговой орбиты амплитуда приравняется к нулю, что даёт ту же зависимость  $E_1(K)$  между  $E$  и  $K$ .

Множество  $I_B$  представляет из себя точки  $(K, E)$ , соответствующие ограниченным орбитам. Для установления таких  $(K, E)$  воспользуемся явным видом орбиты  $\theta(\varphi)$  и установим, при каких условиях на  $(K, E)$  она не выходит на границы  $\{0\} \times S^1, \{\sqrt{-c}\} \times S^1$  ни при каком  $\varphi$ :

$$0 < -\frac{A}{\mu^2 K^2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{2E\mu^2 K^2}{A^2} - c \frac{\mu^4 K^4}{A^2}} \right), \quad (4.2.3)$$

$$-\frac{A}{\mu^2 K^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2E\mu^2 K^2}{A^2} - c \frac{\mu^4 K^4}{A^2}} \right) < \sqrt{-c}. \quad (4.2.4)$$

Что со всеми условиями на константы ( $A < 0, c < 0, K > \sqrt{\frac{-A}{\sqrt{-c}}}$ ) даёт:

$$E < \frac{cK^2}{2}, \quad E < \sqrt{-c}A, \quad E \geq \frac{K^2 \mu^2 c}{2} - \frac{A^2}{2\mu^2 K^2}. \quad (4.2.5)$$

Прообразом каждой точки  $(K, E) \in I_B$  будет компактное множество и согласно утверждению 17 оно является тором Лиувилля  $T^2 \approx F^{-1}[(K, E)]$  в случае  $(K, E) \in I_B \setminus \Sigma_1$  и окружностью в случае  $(K, E) \in \Sigma_1$ .

Для  $I_2$  верно, что каждому значению  $(K, E)$  соответствуют орбиты, ограниченные только с одной стороны (со стороны параллели  $\{\sqrt{-c}\} \times S^1$ ), т.к. нарушается условие (4.2.3) и выполняется условие (4.2.4). По прежнему каждая такая орбита получается из другой поворотом вокруг оси вращения поверхности, т.е. орбита  $\theta = \theta_1(\varphi)$  получается из орбиты  $\theta = \theta_2(\varphi)$  подстановкой  $\theta_1(\varphi) = \theta_2(\varphi + \varphi_0)$  для некоторого  $\varphi_0$ . Поэтому (см. утверждение 17) прообраз любой точки из  $I_2$  будет цилиндром. Согласно утверждению 19 траектория выходит за конечное время на границу  $\theta = 0$  поверхности  $S'$ , значит и фазовая траектория выходит на границу цилиндра за конечное время, т.е. поток на цилиндре неполон.

Аналогично орбиты, соответствующие зоне  $I_1$ , ограничены со стороны параллели  $\{0\} \times S^1$  и не ограничены с противоположной. Прообразом каждой точки из  $I_1$  тоже будет цилиндр только уже с полным потоком.

Для зоны  $I_3$  верно, что соответствующие орбиты будут не ограничены с двух сторон. Теперь орбиты делятся на две группы – с положительным значением  $p_\theta$  (частица движется от  $\theta = 0$  до  $\theta = \sqrt{-c}$ ) и отрицательным  $p_\theta$  (частица движется от  $\theta = \sqrt{-c}$  до  $\theta = 0$ ), что означает, что прообразами в зоне  $I_3$  будут пары цилиндров, симметричные в фазовом пространстве  $M^4$  относительно гиперплоскости  $p_\theta = 0$  (последнее можно понимать так: точка  $(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi)$  принадлежит первому цилиндру тогда и только тогда, когда точка  $(\theta, \varphi, -p_\theta, p_\varphi)$  принадлежит второму цилиндру; а можно и по-другому: поверхность  $S'$

можно реализовать определенным образом в  $\mathbb{R}_2^3$ , значит, добавив две размерности, можно реализовать фазовое пространство  $M^4$  в  $\mathbb{R}_2^5$ ).  $\square$

Заметим, что прообраз любой точки  $(K, E) \in \Sigma$  будет симметричен относительно гиперплоскости  $p_\theta = 0$ , т.е. указанный прообраз переходит себя при отображении  $(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) \rightarrow (\theta, \varphi, -p_\theta, p_\varphi)$ .

**Предложение 4.2.** Рассмотрим максимальную поверхность Бертрана  $S'$ , соответствующую значениям параметров  $(c, t, \mu)$  из области  $I_1$  (рис. 2.1), и замыкающий потенциал  $V = A\theta^{-2}$  ( $A > 0$ ). Для такой гамильтоновой системы бифуркационная диаграмма и полный образ фазового пространства (на плоскости  $(K, E)$ ) имеют вид (рис. 4.3). Точка  $A_1$  имеет координаты  $(\frac{\sqrt{2A}}{-\mu c}, \frac{A}{-c})$  и не принадлежит  $\Sigma$ , множество  $\Sigma_1$  представляет из себя кривую  $E_1(K) = \{(K, E) : E = \frac{c\mu^2 K^2}{2} + \sqrt{2A}\mu K, \frac{\sqrt{2A}}{-\mu c} < K < \infty\}$ .

Область  $\Sigma_2$  делится кривой  $E_2(K)$  на две зоны (рис. 4.4)  $I_B, I_1$ , где  $E_2(K) = \{(K, E) : E = \frac{A}{-c}, \frac{\sqrt{2A}}{-\mu c} < K < \infty\}$ . Прообраз любой точки из  $\Sigma_1$  – окружность, прообраз любой точки из  $I_B$  тор (рис. 4.4). Прообраз каждой точки из  $I_1$  цилиндр с полными фазовыми потоками. Граница зон  $I_1$  и  $I_B$  содержится в  $I_1$ .

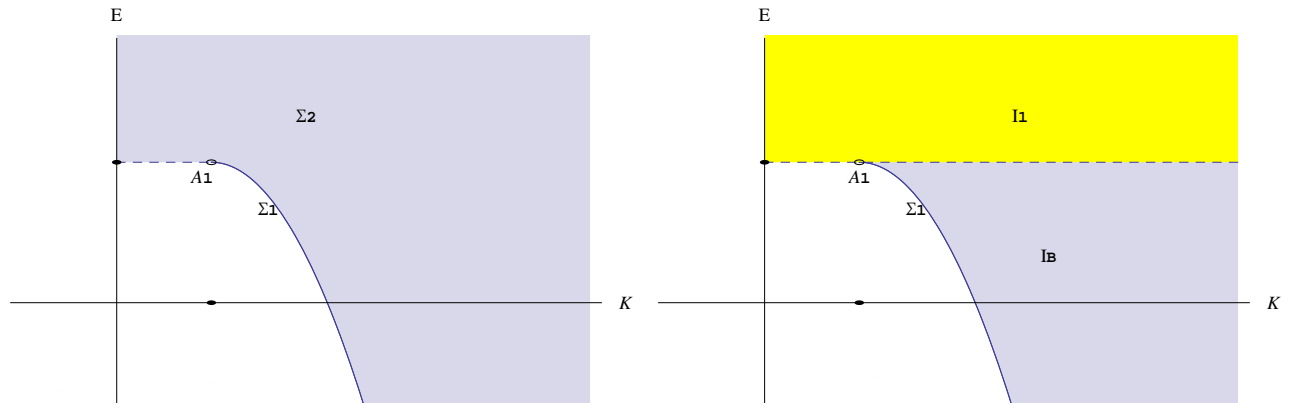


Рис. 4.3: Бифуркационная диаграмма и  $\Sigma$  в случае  $I_1, V_2$ .

Рис. 4.4: Расширенная бифуркационная диаграмма в случае  $I_1, V_2$ .

Доказательство предложения 4.1 почти дословно повторяет доказательство предложения 4.1 с той лишь разницей, что вместо потенциала  $V_1(\theta)$  берётся потенциал  $V_2(\theta)$  и фактом, что граница  $\{0\} \times S^1$  не достижима (из-за чего  $\Sigma_2$  делится на 2 зоны, а не на 4 как на рис. 4.2).

**Предложение 4.3.** Рассмотрим максимальную поверхность Бертрана  $S'$ , соответствующую значениям параметров  $(c, t, \mu)$  из области  $\Omega_1$  (рис. 2.1), и потенциал  $V = A\theta^{-2}$  ( $A > 0$ ). Для такой гамильтоновой системы бифуркационная диаграмма и полный образ отображения момента (на плоскости  $(K, E)$ ) имеют вид (рис. 4.5). Точки  $A_1, A_2$

имеют координаты  $(\frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{\theta_2^4+t}}, \frac{A}{\theta_2^2})$ ,  $(\frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{t}}, \frac{Ac}{t})$  соответственно и не принадлежат  $\Sigma$ . Множество  $\Sigma_1$  представляет из себя кривую  $E_1(K) = \{(K, E) : E = \frac{c\mu^2 K^2}{2} + \mu^2 K^2 \sqrt{\frac{2A}{\mu^2 K^2} - t}, \sqrt{\frac{-A}{\mu^2 \sqrt{-c}}} < K < \infty\}$ .

Область  $\Sigma_2$  делится кривыми  $E_2(K), E_3(K)$  на четыре зоны (рис. 4.6)  $I_B, I_1, I_2, I_3$ , где  $E_2(K) = \{(K, E) : E = \frac{A}{\theta_2^2}, \frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{\theta_2^4+t}} < K < \infty\}$ ,  $E_3(K) = \{(K, E) : K = \frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{t}}, \frac{Ac}{t} < E < \infty\}$ . Прообраз любой точки из  $\Sigma_1$  – окружность, прообраз любой точки из  $I_B$  тор (рис. 4.6). Прообраз каждой точки из  $I_1$  цилиндр, соответствующие фазовые потоки полны, прообраз каждой точки из  $I_2$  цилиндр с неполными фазовыми потоками, время на соответствующих фазовых траекториях не продолжается ни до  $+\infty$ , ни до  $-\infty$ . Прообраз любой точки из  $I_3$  – пара цилиндров с неполными потоками; время на траекториях цилиндра, лежащего в  $\{r_\theta < 0\}$ , не продолжается до  $+\infty$ , но продолжается до  $-\infty$ , для цилиндра  $\{r_\theta > 0\}$  наоборот. Граница зон  $I_1$  и  $I_B$  содержится в  $I_1$ , граница зон  $I_2$  и  $I_B$  содержится в  $I_2$ , граница зон  $I_1$  и  $I_3$  содержится в  $I_3$ , граница зон  $I_2$  и  $I_3$  содержится в  $I_3$ , общая граничная точка четырех зон принадлежит  $I_3$ .

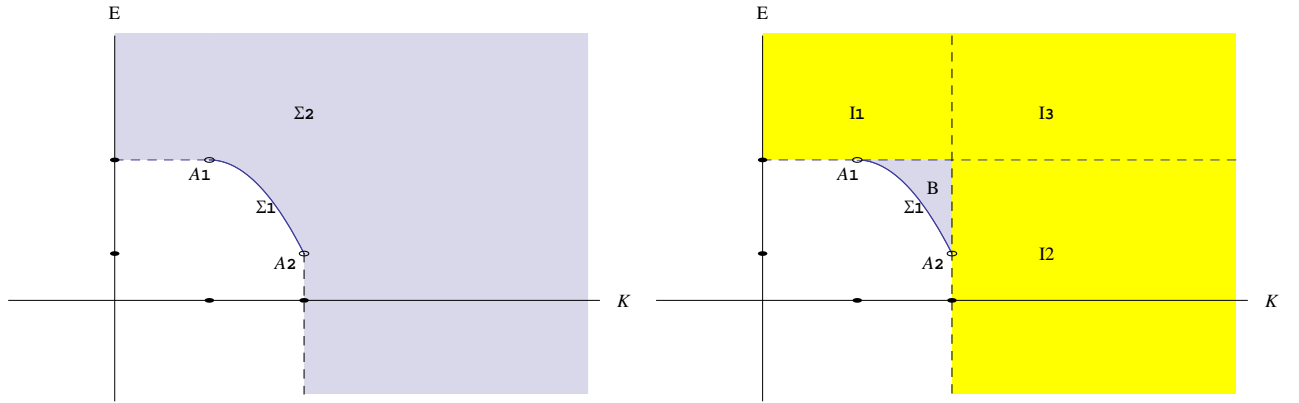


Рис. 4.5: Бифуркационная диаграмма и  $\Sigma$  в случае  $\Omega_1, V_2$ .

Рис. 4.6: Расширенная бифуркационная диаграмма в случае  $\Omega_1, V_2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в случае с предложением 4.1 критерий (4.2.2) позволяет обосновать вид множества  $\Sigma_2$  (рис. 4.5), а условия (4.2.1) вид  $\Sigma_1$ .

Обоснование рисунка 4.6 упирается в поиск условий на  $K, E$ , при которых соответствующие орбиты будут ограничены с обеих сторон ( $I_B$ ), ограничены только со стороны  $\{0\} \times S^1$  ( $I_2$ ), ограничены только со стороны  $\{\theta_2\} \times S^1$  ( $I_1$ ), неограничены с обеих сторон ( $I_3$ ). Данные условия удобно получить с помощью уравнения орбиты (2.2.20):

$$\begin{cases} t - \frac{2A}{\mu^2 K^2} < 0, & \frac{E}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2} > 0, \\ \frac{E}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{E}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2}\right)^2 + t - \frac{2A}{\mu^2 K^2}} < \theta_2^2 \end{cases} \quad (4.2.6)$$

Последнее из неравенств (4.2.6) эквивалентно ограниченности траектории со стороны края  $\{\theta_2\} \times S^1$ , первая строчка даёт условие ограниченности орбиты со стороны края  $\{0\} \times S^1$ .

Полнота или неполнота потоков с учетом случаев продолжаемости времени до  $+\infty$  и  $-\infty$  следует из утверждения 19 и предложения 2.2.  $\square$

**Предложение 4.4.** *Рассмотрим максимальную поверхность Бертрана  $S'$  с координатами  $(\theta, \varphi)$  и метрикой (2.1.8), соответствующую значениям параметров  $(c, t, \mu)$  из области  $\Omega_2$  (рис. 2.1); без ограничения общности координата  $\theta$  меняется в пределах первой компоненты, т.е. в пределах интервала  $(\theta_1, \sqrt[4]{-t})$ . На  $S'$  действует потенциал  $V = A\theta^{-2}$  ( $A < 0$ ). Для такой гамильтоновой системы бифуркационная диаграмма и полный образ отображения момента (на плоскости  $(K, E)$ ) имеют вид (рис. 4.7). Точка  $A_1$  имеет координаты  $(\frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{\theta_1^4+t}}, \frac{A}{\theta_1^2})$  и не принадлежит  $\Sigma$ . Множество  $\Sigma_1$  представляет из себя кривую  $E_1(K) = \{(K, E) : E = \frac{c\mu^2 K^2}{2} + \mu^2 K^2 \sqrt{\frac{2A}{\mu^2 K^2} - t}, \frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{\theta_1^4+t}} < K < \infty\}$ .*

*Область  $\Sigma_2$  делится кривыми  $E_2(K), E_3(K)$  на четыре зоны (рис. 4.8)  $I_B, I_1, I_2, I_3$ , где  $E_2(K) = \{(K, E) : E = \frac{A}{\theta_1^2}, \frac{\sqrt{2A}}{\mu\sqrt{\theta_1^4+t}} < K < \infty\}$ ,  $E_3(K) = \{(K, E) : E = \frac{c\mu^2 K^2}{2} + \sqrt{-t}\mu^2 K^2 + \frac{A}{\sqrt{-t}}, 0 < K < \infty\}$ . Прообраз любой точки из  $\Sigma_1$  – окружность, прообраз любой точки из  $I_B$  тор (рис. 4.8). Прообраз каждой точки из  $I_1$  цилиндр, соответствующие фазовые потоки полны, прообраз каждой точки из  $I_2$  цилиндр с неполными фазовыми потоками, время на траекториях, лежащих на цилиндре не продолжается вправо до  $+\infty$ , не продолжается влево до  $-\infty$ . Прообраз любой точки из  $I_3$  – пара цилиндров с неполными потоками; время на траекториях цилиндра, лежащего в  $\{r_\theta < 0\}$ , продолжается до  $+\infty$ , но не продолжается до  $-\infty$ , для цилиндра  $\{r_\theta > 0\}$  наоборот. Граница зон  $I_1$  и  $I_B$  содержится в  $I_1$ , граница зон  $I_2$  и  $I_B$  содержится в  $I_2$ , граница зон  $I_1$  и  $I_3$  содержится в  $I_3$ , граница зон  $I_2$  и  $I_3$  содержится в  $I_3$ , общая граничная точка четырех зон принадлежит  $I_3$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Доказательство повторяет основные этапы доказательств предложений 4.1 - 4.3. Критерий (4.1.12) и формулы (4.2.1) обосновывают вид множеств  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Разбиение  $\Sigma_2$  на зоны  $I_B, I_1, I_2, I_3$  определяется ограниченностью соответствующих орбит  $\theta(\varphi)$ . Явный вид орбиты (2.2.20) позволяет записать условия ограниченности с каждой стороны:

$$\begin{cases} \frac{E}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{E}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2}\right)^2 + t - \frac{2A}{\mu^2 K^2}} < \sqrt{-t} \\ \frac{E}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{E}{\mu^2 K^2} - \frac{c}{2}\right)^2 + t - \frac{2A}{\mu^2 K^2}} > \theta_1^2 \end{cases} \quad (4.2.7)$$

Уравнения (4.2.7) определяют ограниченность орбиты  $\theta(\varphi)$ . Если выполняются обе оценки, то орбита ограничена с двух сторон ( $I_B$ ), если только одна, то орбита ограничена с одной стороны ( $I_1, I_2$ ), если ни одна, то орбита неограничена с обеих сторон ( $I_3$ ).

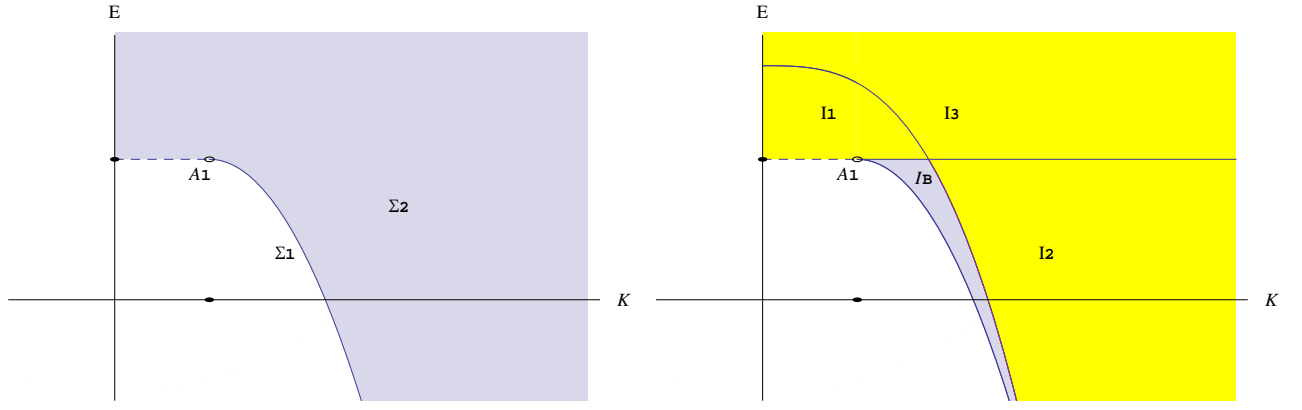


Рис. 4.7: Бифуркационная диаграмма и  $\Sigma$  в случае  $\Omega_2, V_2$ . Рис. 4.8: Расширенная бифуркационная диаграмма в случае  $\Omega_2, V_2$ .

Последние неравенства влекут условия, иллюстрирующие деление  $\Sigma_2$ :

$$E < \frac{A}{\theta_1^2}, \quad E < \frac{c\mu^2 K^2}{2} + \mu^2 K^2 \sqrt{-t} + \frac{A}{\sqrt{-t}}$$

Полнота, неполнота потоков является прямым следствием утверждения 19 и предложения 2.2.  $\square$

**Замечание 4.2.2.** Диаграммы (рис. 4.1 - 4.8), построены для максимальных поверхностей Бертрана  $S'$  с псевдоримановой метрикой. В случае немаксимальной поверхности  $S'_0$ , которая является подповерхностью максимальной  $S'$ , диаграммы сохранят общий вид, но будут меньше, т.е. каждое из множеств  $\Sigma_1, I_B, \Sigma_2$  уменьшится. Например, в случае  $S' \approx (\varepsilon, \sqrt{-c} - \varepsilon) \times S^1$  для некоторого инфинитезимального положительного  $\varepsilon$  и замыкающего потенциала  $V_1(\theta) = A\theta$  ( $A < 0$ ) образ особых точек ранга 1 станет частью кривой  $E_1(K)$  (см. рис. 4.1):  $\Sigma_1 = \{(K, E) : E = \frac{c\mu^2 K^2}{2} - \frac{A^2}{2\mu^2 K^2}, \sqrt{\frac{-A}{\mu^2(\sqrt{-c}-\varepsilon)}} < K < \sqrt{\frac{-A}{\mu^2\varepsilon}}\}$ . Образ особых точек ранга 2 представляется в виде объединения трёх множеств:  $\Sigma_2 = \Sigma_{21} \cup \Sigma_{22} \cup \Sigma_{23}$ , где  $\Sigma_{21} = \{(K, E) : E > A(\sqrt{-c} - \varepsilon) - \frac{\mu^2 K^2}{2}(2\sqrt{-c}\varepsilon - \varepsilon^2), 0 < K < \sqrt{\frac{-A}{\mu^2(\sqrt{-c}-\varepsilon)}}\}$ ,  $\Sigma_{22} = \{(K, E) : E > \frac{c\mu^2 K^2}{2} - \frac{A^2}{2\mu^2 K^2}, \sqrt{\frac{-A}{\mu^2(\sqrt{-c}-\varepsilon)}} < K < \sqrt{\frac{-A}{\mu^2\varepsilon}}\}$ , и последнее множество  $\Sigma_{23} = \{(K, E) : E > A(\sqrt{-c} - \varepsilon) - \frac{\mu^2 K^2}{2}(2\sqrt{-c}\varepsilon - \varepsilon^2), \sqrt{\frac{-A}{\mu^2\varepsilon}} < K\}$  (см. рис. 4.9).

**Замечание 4.2.3.** В компактном случае для интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем согласно теореме Лиувилля [33] можно построить в некоторой окрестности фазового пространства переменные действие-угол. Координата  $\varphi$  является циклической для системы Бертрана, поэтому действием для нее будет кинетический момент, поле ко-сого градиента которого направлено вдоль окружностей  $\{*\} \times S^1 \times \{*\} \times \{*\} \subset M^4$ . Другое дело интеграл полной энергии  $E$ , для которого интегральные линии поля  $\text{sgrad } E$  в точности фазовые траектории нашей системы. Т.к. система бертрановская, то все ограниченные орбиты будут замкнуты, а значит им соответствуют замкнутые фазовые траектории.

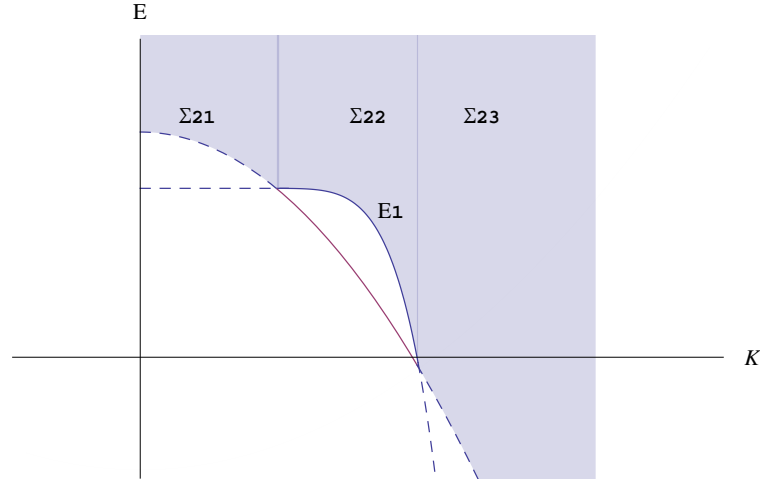


Рис. 4.9: Бифуркационная диаграмма и  $\Sigma$  в случае немаксимальной поверхности Бертра на  $l_1, V_1$ .

Рассмотрим какую-нибудь орбиту  $\{\theta = \theta(\varphi)\} \subset S'$  и соответствующую ей фазовую траекторию  $\gamma(t) \subset M^4$ . Мы знаем период движения по орбите  $\{\theta = \theta(\varphi)\}$ , а значит и период функции  $\gamma(t)$ , который вычисляется по формуле (2.3.2). Построим переменную  $I(E, K)$  такую, что траектории поля  $\text{sgrad } I$  совпадают с траекториями поля  $\text{sgrad } E$  с точностью до перепараметризации, при этом период новых траекторий будет равен  $2\pi$ . Для этого заметим, что согласно (2.3.2) период не зависит от интеграла  $K$ , поэтому переменную  $I$  будем искать в виде  $I(E)$ . Далее  $\text{sgrad } I(E) = I'(E) \text{sgrad } E$ , поэтому периоды  $T_I$  и  $T$  траекторий полей  $\text{sgrad } I$  и  $\text{sgrad } E$  связаны соотношением  $T_I = \frac{T}{I'(E)}$ , откуда с учетом требования  $T_I = 2\pi$  получаем  $I'(E) = \frac{T}{2\pi}$ . Осталось проинтегрировать последнее равенство по  $E$ , для чего выпишем его, пользуясь (2.3.2):

$$I'(E) = \frac{T}{2\pi} = \frac{q}{4\sqrt{\Delta}} \left( \frac{\sqrt{\Delta} + c}{\sqrt{E(\sqrt{\Delta} + c) + 2A}} + \frac{\sqrt{\Delta} - c}{\sqrt{E(c - \sqrt{\Delta}) + 2A}} \right),$$

где  $\Delta = c^2 + 4t$ . Интегрирование приводит к

$$I(E) = \frac{q}{2\sqrt{\Delta}} \left( \sqrt{E(\sqrt{\Delta} + c) + 2A} - \sqrt{E(c - \sqrt{\Delta}) + 2A} \right). \quad (4.2.8)$$

Заметим, что формула (4.2.8) справедлива как для риманова случая так и для псевдориманова для аналога потенциала Гука  $V_2$ .

Если построить вместо отображения момента  $F_{KE}: M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  отображение  $F_{KI}: M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  по правилу  $(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) \rightarrow (I, K)$ , и соответственно вместо диаграмм, описываемых предложениями 4.2-4.4 (псевдориманов случай, гуковский потенциал), построить диаграммы на плоскости  $OKI$ , то граничные кривые, разделяющие зоны  $I_B, I_1, I_2, I_3$  спрямятся. Например, на рисунке 4.4 кривая  $\{(K, E) : E = \frac{c\mu^2 K^2}{2} + \sqrt{2A}\mu K, \frac{\sqrt{2A}}{-\mu c} < K < \infty\}$  будет

задаваться так :  $\{(K, I) : I = \frac{q\mu K}{2}, \frac{\sqrt{2A}}{-\mu c} < K < \infty\}$ .

Заметим также, что формула (4.2.8) имеет ограничения, связанные с некомпактностью системы. Период  $T$  посчитан для ограниченных орбит, для неограниченных орбит выражения, стоящие под корнями становятся отрицательными, поэтому переменная  $I(E)$  для области фазового пространства  $F_{KE}^{-1}[\Sigma \setminus I_B] \subset M^4$ , отвечающей неограниченным траекториями, не определена, а определена только для  $F_{KE}^{-1}[I_B]$ . При этом когда точка  $(K, E)$  движется по области  $I_B$  и подходит к границе  $E_2(K)$  (диаграмма 4.4), знаменатель последней дроби правой части (2.3.2) стремится к нулю, что означает стремление к бесконечности производной  $I'(E)$  и величины поля  $\text{sgrad } I$ .

### 4.3 Слои Лиувилля и их перестройки.

Построенные расширенные бифуркационные диаграммы (предложения 4.1 - 4.4) и отображение момента  $F_{KE}$  помогают в исследовании топологии слоения Лиувилля (первых интегралов энергии  $H$  и момента  $p_\varphi$ ) гамильтоновой псевдоримановой системы Бертрана. Каждый слой слоения Лиувилля представляет из себя прообраз точки  $(K, E)$  при отображении момента  $F_{KE}$ , и является объединением всех фазовых траекторий, соответствующих траекториям движения с энергией  $E$  и кинетическим моментом  $K$ . Как следует из вышеупомянутых предложений 4.1-4.4 каждый слой представляет из себя одно из следующих множеств: окружность, двумерный тор, цилиндр, пара цилиндров. При этом бифуркационная диаграмма, т.е. множество  $\Sigma_1$ , в нашем случае состоит только из образа особых точек ранга 1. Прообраз каждой точки  $(K, E) \in \Sigma_1$  окружность вида  $\{\theta_0\} \times S^1 \times \{0\} \times \{K\} \subset M^4$ . Прообраз каждой точки из  $I_B$  тор. Прообраз каждой точки из  $I_1$  и из  $I_2$  цилиндр. Прообраз каждой точки из  $I_3$  – пара цилиндров. В каждом из четырех случаев диаграмм 4.2, 4.4, 4.6, 4.8, кроме второго (предложение 4.2), множество  $\Sigma$  делится кривыми  $E_2(K), E_3(K)$  на 4 камеры  $C_B, C_1, C_2, C_3$ , отвечающие различным типам движений, при этом сами граничные кривые  $E_2(K), E_3(K)$  (вместе с кривой  $E_1(K) = \Sigma_1$ ) камерам не принадлежат, т.е. выполнено  $C_B := I_B \setminus \Sigma_1$ ,  $C_1 := I_1 \setminus \{E_2(K) \cup E_3(K)\}$ ,  $C_2 := I_2 \setminus \{E_2(K) \cup E_3(K)\}$ ,  $C_3 := I_3 \setminus \{E_2(K) \cup E_3(K)\}$  (таким образом камеры будут открытыми связными множествами). Слоение Лиувилля над каждой камерой локально тривиально. Соединим две точки  $x \in C_B, y \in C_1$  кривой  $\gamma$ , пересекающей  $E_2(K) \cup E_3(K)$  в одной точке  $z$ . Когда точка  $(K, E)$  двигается по кривой  $\gamma$  в пределах камеры  $C_B$  ее прообраз остается тором, когда  $(K, E)$  пересекает границу камер  $C_B, C_1$  в точке  $z$ , возникает перестройка тора в цилиндр. Для систем Бертрана возникают 3 типа перестроек слоев Лиувилля: тора и окружности ( $C_B$  и  $\Sigma_1$ ), тора и цилиндра ( $C_B$  и  $C_1$  или  $C_B$  и  $C_2$ ), цилиндра и пары цилиндров ( $C_1$  и  $C_3$  или  $C_2$  и  $C_3$ ).

Все перестройки (бифуркации) слоев Лиувилля можно разделить на 3 типа, если смотреть на перестраиваемые множества с точки зрения компактности: компактная бифуркация, при которой компактная поверхность перестраивается в компактную (полная

классификация см. [33]), некомпактная бифуркация, при которой некомпактная поверхность перестраивается в некомпактную, и смешанная, когда в перестройке участвуют как компактные так и некомпактные слои. Также перестройки можно разделить на 2 типа в зависимости от наличия особого уровня: если в перестройке задействован особый слой (т.е. слой содержит точки фазового пространства, в которых  $\text{grad } H$  и  $\text{grad } p_\varphi$  зависимы), то это перестройка через особый слой (особая перестройка), если нет, то неособая перестройка. Система Бертрана богата примерами перестроек, она содержит компактные, смешанные и некомпактные перестройки, а также перестройки особые и неособые: переход между камерами  $C_B$  и  $C_1$  (а также  $C_B$  и  $C_2$ ) соответствует смешанной неособой бифуркации, переход между камерами  $C_3$  и  $C_1$  (а также  $C_3$  и  $C_2$ ) соответствует некомпактной неособой бифуркации.

**Определение 4.3.1.** Будем называть два многообразия  $U_1$  и  $U_2$  со структурой слоения Лиувилля *лиувиллево эквивалентными*, если существует диффеоморфизм  $h: U_1 \rightarrow U_2$ , переводящий слои  $U_1$  в слои  $U_2$ .

**Замечание 4.3.1.** В дальнейшем будем описывать слоение Лиувилля и перестройки его слоев только для системы Бертрана  $(S', V)$ , где  $S' \approx (0, \sqrt{-c}) \times S^1$  с псевдоримановой метрикой (2.1.7),  $V(\theta) = A\theta$  ( $A < 0$ ) – замыкающий потенциал на  $S'$ . Образ отображения момента  $F_{KE}$  фазового пространства системы и его разбиение на камеры представлено на диаграммах 4.1, 4.2.

Рассмотрим изоэкинетическую поверхность  $Q_{K_0}^3 := \{p_\varphi = K_0\} \subset M^4$ . Она состоит из совместных слоев Лиувилля интегралов  $H, p_\varphi$ , притом только таких, для которых  $p_\varphi = K_0$ . Для точки  $x = (E_0, K_0)$ , принадлежащей границе камер рассмотрим её изокинетическую окрестность, т.е. окрестность вида  $J := \{(K, E) : K = K_0, E_0 - \varepsilon < E < E_0 + \varepsilon\}$  для некоторого  $\varepsilon > 0$ . Тогда окрестность прообраза точки  $x$  на изокинетической поверхности, т.е.  $F^{-1}[J]$  назовем атомом, точнее дадим следующее определение.

**Определение 4.3.2.** Назовем атомом  $O_{0-1}$  класс лиувиллевой эквивалентности изокинетической окрестности  $F^{-1}[J]$  прообраза точки  $x$ , лежащей на общей границе камер  $C_B$  и  $C_1$  или на общей границе камер  $C_B$  и  $C_2$ . Атомом  $O_{1-11}$  класс лиувиллевой эквивалентности изокинетической окрестности  $F^{-1}[J]$  прообраза точки  $x$ , лежащей на общей границе камер  $C_3$  и  $C_1$  или на общей границе камер  $C_3$  и  $C_2$ . Назовем атомом  $O_{0-11}$  класс лиувиллевой эквивалентности изокинетической окрестности  $F^{-1}[J]$  прообраза точки  $x$ , образующей общую границу камер  $C_B$  и  $C_3$ .

Выбор не изоэнергетической поверхности, а изокинетической мотивирован тем, что векторное поле  $\text{sgrad } p_\varphi$  не имеет особых точек и тем самым  $dp_\varphi|_{Q_{K_0}^3} \neq 0$  и  $Q_{K_0}^3$  при любом  $K_0$  будет гладким подмногообразием  $M^4$ . В компактном случае известная классификация



атомов содержит лишь атомы минимальной сложности 1 [33]. Однако определенные выше некомпактные атомы имеют нулевую сложность. В системе  $(S', V)$  присутствует еще одна компактная особая перестройка, соответствующая атому А, на диаграмме (см. рис. 4.10) эта перестройка возникает при попадании точки  $(K, E)$  из камеры  $C_B$  на границу  $\Sigma_1$ , что соответствует стягиванию тора на свою ось. Атом  $O_{0-1}$  соответствует перестройке тора в цилиндр, а атом  $O_{1-11}$  соответствует перестройке цилиндра в пару цилиндров. Особый случай представляет атом  $O_{0-11}$ , который соответствует перестройке тора сразу в пару цилиндров при переходе из камеры  $C_B$  в камеру  $C_3$  через общую точку кривых  $E_2(K)$  и  $E_3(K)$ , имеющую координаты  $(\sqrt{\frac{-2A}{\mu^2\sqrt{-c}}}, A\sqrt{-c})$  (см. рис. 4.10).

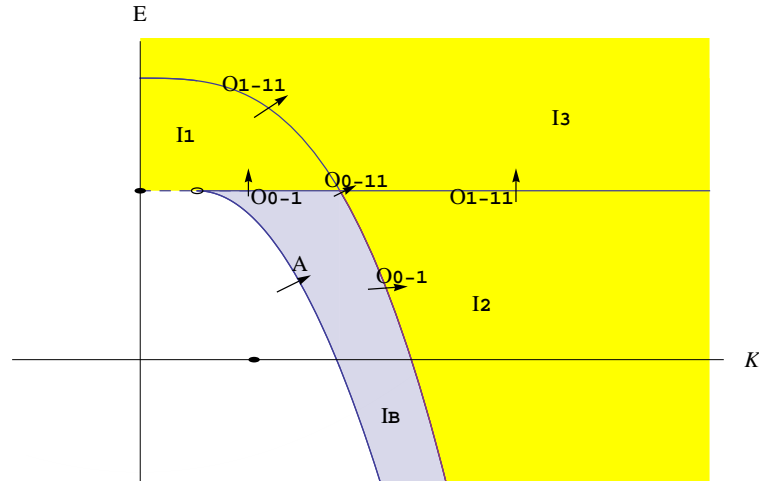


Рис. 4.10: Бифуркационная диаграмма,  $\Sigma$  и атомы в случае системы Бертрана  $l_1, V_1$ .

Так же как и для компактных 3-атомов атомы  $O_{0-1}$ ,  $O_{0-11}$ ,  $O_{1-11}$  удобно описывать с помощью двумерных поверхностей. Поверхность  $Q_{K_0}^3$  инвариантна относительно сдвигов вдоль интегральных траекторий поля  $\text{sgrad } p_\varphi$ , таким образом на  $Q_{K_0}^3$  определено пуассоново действие окружности – сдвига вдоль  $\text{sgrad } p_\varphi$  на угол  $\varphi$ . Слоение Лиувилля  $Q_{K_0}^3$  и слоение  $Q_{K_0}^3$  на интегральные траектории поля  $\text{sgrad } p_\varphi$ , которые являются окружностями  $\{\theta_0\} \times S^1 \times \{*\} \times \{K_0\}$ , согласованы в том смысле, что каждая такая окружность лежит на слое Лиувилля. Рассмотрим поверхность  $Q_{K_0}^2$ , которая получается как фактормножество множества  $Q_{K_0}^3$  по описанному выше действию окружности. Справедливо представление  $Q_{K_0}^3 \approx Q_{K_0}^2 \times S^1$ . Фазовое пространство  $M^4$ , изокINETическая поверхность  $Q_{K_0}^3$  и слои Лиувилля являются поверхностями вращения. На всем фазовом пространстве определены координаты  $(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi)$ , на  $Q_{K_0}^3$  определены координаты  $(\theta, \varphi, p_\theta)$  (т.к. импульс  $p_\varphi$  фиксирован на  $Q_{K_0}^3$  и равен  $K_0$ ), на  $Q_{K_0}^2$  определены координаты  $(\theta, p_\theta)$ . Соответственно,  $Q_{K_0}^2$  слоится на образы слоев Лиувилля при описанной факторизации, среди которых выделяется слой  $Q_{K_0}^1$  (является аналогом особого слоя для компактных атомов), который определяется как фактор прообраза точки  $(K_0, E_0)$ , принадлежащей границам

камер. Для наглядной иллюстрации  $Q_{K_0}^2$  и  $Q_{K_0}^3$  и их слоений построим соответствующие им модели в пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

Модель  $(M_{0-1}^3, M_{0-1}^2, g)$  представляет из себя тройку, где  $M_{0-1}^3$  – трехмерное множество вращения в  $\mathbb{R}^3$ ,  $g$  – действие группы  $S^1$  на  $M_{0-1}^3$  такое, что  $M_{0-1}^3 \approx M_{0-1}^2 \times S^1$ . Точнее пусть  $T^3$  – окрестность двумерного тора в  $\mathbb{R}^3$ , заданная в евклидовых координатах параметрически  $x = (R + r \cos \psi) \cos \varphi$ ,  $y = (R + r \cos \psi) \sin \varphi$ ,  $z = r \sin \psi$ , причем параметры  $\psi, \varphi, r$  меняются в пределах  $\psi \in [\pi, \pi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ ,  $r \in (R/8, R/2)$  ( $R$  – фиксированная положительная константа). Тогда  $M_{0-1}^3$  представляет из себя часть построенной окрестности  $T^3$ :  $M_{0-1}^3 = T^3 \cap \{(x, y, z) : z < R/4\}$ . По построению  $M_{0-1}^3$  – поверхность вращения с осью  $OXZ$ . Аналогом слоения Лиувилля выступает расслоение  $M_{0-1}^3$  на поверхности  $Q_r^2$ , являющиеся пересечениями торов  $x = (R + r \cos \psi) \cos \varphi$ ,  $y = (R + r \cos \psi) \sin \varphi$ ,  $z = r \sin \psi$  (параметр  $r$  определяет тор) и полупространства  $z < \frac{R}{4}$ .

Соответственно за  $M_{0-1}^2$  возьмем связную компоненту сечения  $M_{0-1}^3$  плоскостью  $y = 0$ , т.е. множество  $\{(x, z) : \frac{R^2}{64} < (x - R)^2 + z^2 < \frac{R^2}{4}, z < \frac{R}{4}\} \subset OXZ$ , которое является кольцом (с радиусами  $\frac{R}{2}, \frac{R}{8}$ ) с отрезанным кусочком ( $z \geq \frac{R}{4}$ ). Образами аналогов  $Q_r^2$  слоев Лиувилля при факторизации (по действию группы вращения) являются кривые  $Q_r^1 = Q_r^2 \cap \{y = 0, x > 0\} = \{(x, z) : (x - R)^2 + z^2 = r^2, z < \frac{R}{4}\}$ , среди которых выделим кривую  $Q_{R/4}^1 = \{(x, z) : (x - R)^2 + z^2 = \frac{R^2}{16}, z < \frac{R}{4}\}$  (см. рис. 4.11).

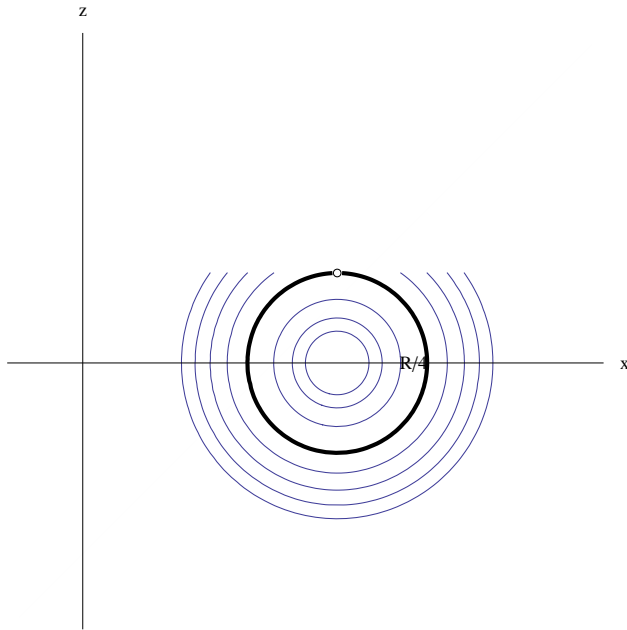


Рис. 4.11: Бифуркации слоев модели  $M_{0-1}^2$ .

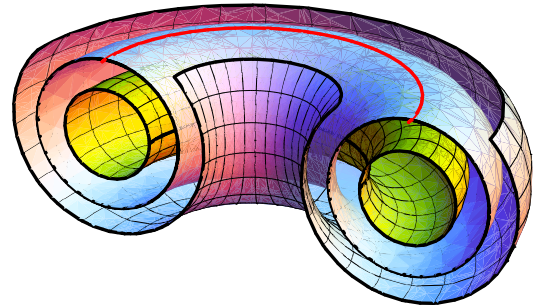


Рис. 4.12: Бифуркации слоев модели  $M_{0-1}^3$ .

Множество  $M_{0-1}^2$ , расслоенное на кривые  $Q_r^1$ , с выделенной кривой  $Q_{R/4}^1$  является в некотором смысле аналогом 2-атома. Поведение слоев  $Q_r^1$  отражает поведение слоев Лиувилля на изокINETической поверхности при переходе точкой  $(K, E)$  из камеры  $C_B$  в  $C_1$  (или  $C_2$ ). При увеличении параметра  $r$  с  $R/8$  до  $R/4$ , кривые  $Q_r^1$  являются концентри-

ческими окружностями, которые увеличиваются – соответствующие им поверхности  $Q_r^2$  представляют собой концентрические торы, которые разрастаются. Таким же образом ведут себя и торы Лиувилля – они остаются торами. Когда  $r$  достигает значения  $R/4$ , то окружность  $Q_{R/4}^1$  теряет свою верхнюю точку и разрывается в интервал – соответствующий тор  $Q_{R/4}^2$  теряет один цикл и разрывается в цилиндр, то же происходит и с тором Лиувилля, когда точка  $(K, E)$  достигает границы камер  $C_B$  и  $C_1$ . При дальнейшем увеличении  $r$ , интервал  $Q_r^1$  остается интервалом, слегка “распрямляясь”, соответствующий цилиндр  $Q_r^2$  гладко деформируется, оставаясь цилиндром (см. рис. 4.11, 4.12).

Чтобы лучше представить связь между геометрией орбит и геометрией соответствующих им фазовых траекторий заметим, что при фиксированных значениях  $E, K$  ограниченная орбита  $\{\theta = \theta_0(\varphi)\}$  определена с точностью до поворота вдоль параллелей поверхности  $S'$  и представляет из себя кривую, колеблющуюся между двумя параллелями  $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_2$ . Все остальные орбиты  $\{\theta = \theta_\alpha(\varphi)\}$  с теми же значениями  $E, K$  получаются из данной поворотом на некоторый угол  $\varphi_\alpha$ , т.е. задаются соотношением  $\theta_\alpha(\varphi) = \theta_0(\varphi + \varphi_\alpha)$ . Фазовая траектория орбиты  $\{\theta = \theta_0(\varphi)\}$  является замкнутой и лежит на резонансном торе Лиувилля  $T_{K,E}^2 = F^{-1}[(K, E)]$ , а фазовые траектории всех таких орбит  $\{\theta = \theta_\alpha(\varphi)\}$  заметают весь тор  $T_{K,E}^2$ .

Поверхность  $p_\theta = 0$  пересекает данный тор по двум окружностям  $S_1^1 = \{(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) : \theta = \theta_1, p_\theta = 0, p_\varphi = K\}$ ,  $S_2^1 = \{(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi) : \theta = \theta_2, p_\theta = 0, p_\varphi = K\}$ , каждая из которых является одним и тем же базовым циклом  $\gamma_1$  фундаментальной группы тора. В процессе перестройки одна из этих окружностей  $S_2^1$  исчезает, разрушая тем самым второй базисный цикл  $\gamma_2$  группы  $\pi_1(T_{K,E}^2)$ , и оставшееся множество  $T_{K,E}^2 \setminus S_2^1$  становится цилиндром.

Рассмотрим развёртку тора Лиувилля  $T_{K,E}^2$ , соответствующего ограниченной орбите  $\{\theta = \theta_0(\varphi)\}$  с энергией  $E$ , кинетическим моментом  $K$ , и экстремальными значениями  $\theta_1, \theta_2$ , как прямоугольник  $A_1A_2A_3A_4$ . На торе существуют координаты угол  $\varphi_1, \varphi_2$ , в которых поток  $\text{sgrad } H$  спрямляется, т.е. выполнено  $\dot{\varphi}_1 = c_1, \dot{\varphi}_2 = c_2$ . Переменная  $\varphi_2$  совпадает с  $\varphi$ . А переменная  $\varphi_1$  есть функция только от  $\theta$ . Уровень  $A_1A_4 = A_2A_3$  отвечает параллели  $\theta = \theta_2$ , а уровень  $B_1B_2$  параллели  $\theta = \theta_1$ . Отношение  $\rho = \frac{c_2}{c_1}$ , называемое числом вращения, равно  $\mu$  для поверхности Бертрана с потенциалом  $V_1 = A\theta$ , равно  $\frac{\mu}{2}$  для поверхности Бертрана с потенциалом  $V_2 = \frac{A}{\theta^2}$ . Соответственно на рис. 4.13, 4.14, 4.15 нарисованы фазовые траектории для  $\mu = 1, \mu = 2, \mu = 0.5$  и потенциала  $V_1$ .

При перестройке тора в цилиндр прямоугольник  $A_1A_2A_3A_4$  становится всё более и более вытянутым, сторона  $A_1A_2$  вытягивается, а фазовые траектории всё более и более крутыми. В пределе  $\theta_2 \rightarrow b$  точка  $(K, E)$  на расширенной бифуркационной диаграмме (рис. 4.2) попадает из  $I_B$  на границу зон  $I_B$  и  $I_1$  (без ограничения общности можно взять первую диаграмму), параллель  $\theta = \theta_2$  уходит на границу  $\{b\} \times S^1$  поверхности  $S'$ , тор  $T_{K,E}^2$  превращается в цилиндр, цикл  $A_1A_4 = A_2A_3$  исчезает, траектории становятся вертикальными (см. рис 4.16, 4.17, 4.18).

Модель  $(M_{1-11}^3, M_{1-11}^2, g)$  представляет из себя тройку, где  $M_{1-11}^3$  – трехмерное мно-

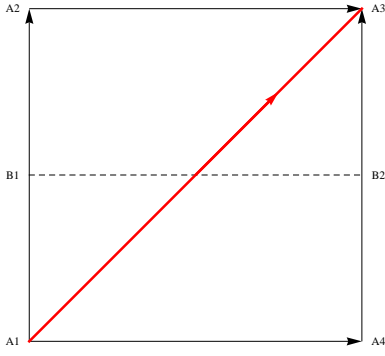


Рис. 4.13: Фазовая траектория при  $\mu = 1$ .

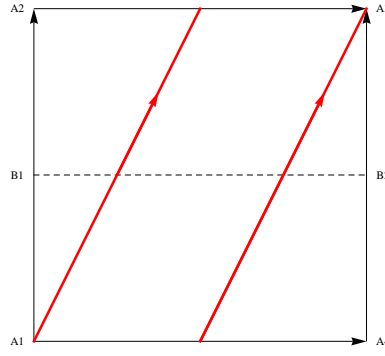


Рис. 4.14: Фазовая траектория при  $\mu = 2$ .

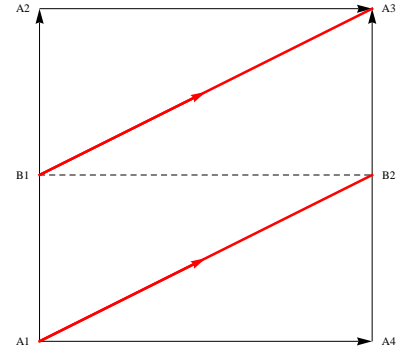


Рис. 4.15: Фазовая траектория при  $\mu = 0.5$ .

жество вращения в  $\mathbb{R}^3$ ,  $g$  – действие группы  $S^1$  на  $M_{1-11}^3$  такое, что  $M_{1-11}^3 \approx M_{1-11}^2 \times S^1$ . Точнее пусть  $T^3$  – окрестность двумерного тора в  $\mathbb{R}^3$ , заданная в евклидовых координатах параметрически  $x = (R + r \cos \psi) \cos \varphi$ ,  $y = (R + r \cos \psi) \sin \varphi$ ,  $z = r \sin \psi$ , причем параметры  $\psi, \varphi, r$  меняются в пределах  $\psi \in [\pi, \pi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ ,  $r \in (R/4, R/2)$  ( $R$  – фиксированная положительная константа). Тогда  $M_{1-11}^3$  представляет из себя часть построенной окрестности  $T^3$ :  $M_{1-11}^3 = T^3 \cap \{(x, y, z) : -\frac{3}{8}R < z < R/4\}$ . По построению  $M_{1-11}^3$  – поверхность вращения с осью  $OXZ$ . Аналогом слоения Лиувилля выступает расслоение  $M_{1-11}^3$  на поверхности  $Q_r^2$ , являющиеся пересечениями торов  $x = (R + r \cos \psi) \cos \varphi$ ,  $y = (R + r \cos \psi) \sin \varphi$ ,  $z = r \sin \psi$  (параметр  $r$  определяет тор) и множества  $-\frac{3}{8}R < z < \frac{R}{4}$ . Соответственно за  $M_{1-11}^2$  возьмем связную компоненту сечения  $M_{1-11}^3$  плоскостью  $y = 0$ , т.е. множество  $\{(x, z) : \frac{R^2}{16} < (x - R)^2 + z^2 < \frac{R^2}{4}, -\frac{3R}{8} < z < \frac{R}{4}\} \subset OXZ$ , которое является кольцом (с радиусами  $\frac{R}{2}, \frac{R}{4}$ ) с отрезанными кусочками ( $z \geq \frac{R}{4}, z \leq -\frac{3}{8}R$ ). Образами аналогов  $Q_r^2$  слоев Лиувилля при факторизации (по действию группы вращения) являются кривые  $Q_r^1 = Q_r^2 \cap \{y = 0, x > 0\} = \{(x, z) : (x - R)^2 + z^2 = r^2, -\frac{3R}{8} < z < \frac{R}{4}\}$ , среди которых выделим кривую  $Q_{3R/8}^1 = \{(x, z) : (x - R)^2 + z^2 = \frac{9R^2}{64}, -\frac{3}{8}R < z < \frac{R}{4}\}$  (см. рис. 4.19).

Поведение слоев  $Q_r^1$  отражает поведение слоев Лиувилля на изокINETической поверхности при переходе точкой  $(E, K)$  из камеры  $C_1$  в  $C_3$  (или из  $C_2$ ). При увеличении параметра  $r$  с  $R/4$  до  $3R/8$ , кривые  $Q_r^1$  являются интервалами, которые увеличиваются – соответствующие им поверхности  $Q_r^2$  представляют собой цилиндры, которые разрастаются. Таким же образом ведут себя и цилиндры Лиувилля – они остаются цилиндрами. Когда  $r$  достигает значения  $3R/8$ , то интервал  $Q_{3R/8}^1$  теряет свою нижнюю точку и разрывается в пару интервалов – соответствующий цилиндр  $Q_{3R/8}^2$  разрывается в пару цилиндров, то же происходит и с цилиндром Лиувилля, когда точка  $(K, E)$  достигает границы камер  $C_3$  и  $C_1$ . При дальнейшем увеличении  $r$ , пара интервалов  $Q_r^1$  остается парой интервалов, соответствующая пара цилиндров  $Q_r^2$  гладко деформируется, оставаясь парой цилиндров.

Модель  $(M_{0-11}^3, M_{0-11}^2, g)$  представляет из себя тройку, где  $M_{0-11}^3$  – трехмерное мно-

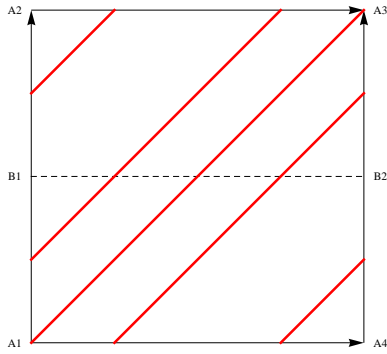


Рис. 4.16: Фазовые траектории на торе.

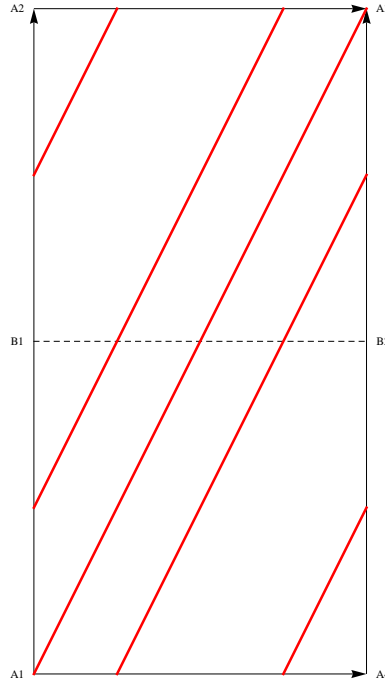


Рис. 4.17: Фазовые траектории на торе, приближающемся к цилиндру.

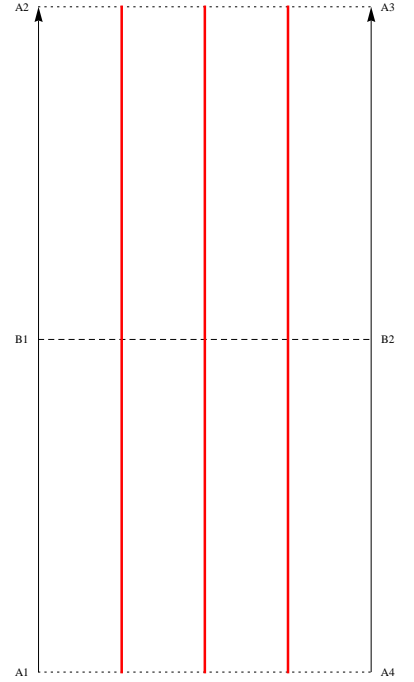


Рис. 4.18: Фазовые траектории на цилиндре.

жество вращения в  $\mathbb{R}^3$ ,  $g$  – действие группы  $S^1$  на  $M_{0-11}^3$  такое, что  $M_{0-11}^3 \approx M_{0-11}^2 \times S^1$ . Точнее пусть  $T^3$  – окрестность двумерного тора в  $\mathbb{R}^3$ , заданная в евклидовых координатах параметрически  $x = (R + r \cos \psi) \cos \varphi$ ,  $y = (R + r \cos \psi) \sin \varphi$ ,  $z = r \sin \psi$ , причем параметры  $\psi, \varphi, r$  меняются в пределах  $\psi \in [\pi, \pi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ ,  $r \in (R/8, R/2)$  ( $R$  – фиксированная положительная константа). Тогда  $M_{0-11}^3$  представляет из себя часть построенной окрестности  $T^3$ :  $M_{0-11}^3 = T^3 \cap \{(x, y, z) : -R/4 < z < R/4\}$ . По построению  $M_{0-11}^3$  – поверхность вращения с осью  $OXZ$ . Аналогом слоения Лиувилля выступает расслоение  $M_{0-11}^3$  на поверхности  $Q_r^2$ , являющиеся пересечениями торов  $x = (R + r \cos \psi) \cos \varphi$ ,  $y = (R + r \cos \psi) \sin \varphi$ ,  $z = r \sin \psi$  (параметр  $r$  определяет тор) и множества  $\{-\frac{R}{4} < z < \frac{R}{4}\}$ . Соответственно за  $M_{0-11}^2$  возьмем связную компоненту сечения  $M_{0-11}^3$  плоскостью  $y = 0$ , т.е. множество  $\{(x, z) : \frac{R^2}{64} < (x - R)^2 + z^2 < \frac{R^2}{4}, -\frac{R}{4} < z < \frac{R}{4}\} \subset OXZ$ , которое является кольцом (с радиусами  $\frac{R}{2}, \frac{R}{8}$ ) с отрезанными кусочками ( $z \geq \frac{R}{4}, z \leq -\frac{R}{4}$ ). Образами аналогов  $Q_r^2$  слоев Лиувилля при факторизации (по действию группы вращения) являются кривые  $Q_r^1 = Q_r^2 \cap \{y = 0, x > 0\} = \{(x, z) : (x - R)^2 + z^2 = r^2, -\frac{R}{4} < z < \frac{R}{4}\}$ , среди которых выделим кривую  $Q_{R/4}^1 = \{(x, z) : (x - R)^2 + z^2 = \frac{R^2}{16}, -\frac{R}{4} < z < \frac{R}{4}\}$  (см. рис. 4.20).

Поведение слоев  $Q_r^1$  отражает поведение слоев Лиувилля на изокINETической поверхности при переходе точкой  $(K, E)$  из камеры  $C_B$  в  $C_3$ . При увеличении параметра  $r$  с  $R/8$  до  $R/4$ , кривые  $Q_r^1$  являются концентрическими окружностями, которые увеличиваются – соответствующие им поверхности  $Q_r^2$  представляют собой концентрические торы,

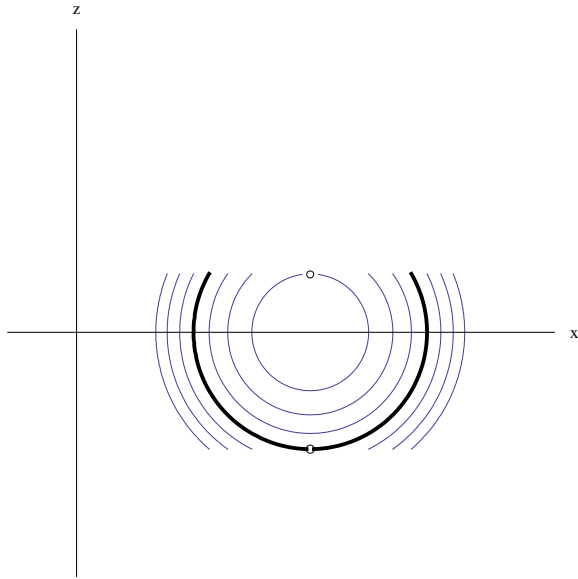


Рис. 4.19: Бифуркации слоев модели  $M_{1-11}^2$ .

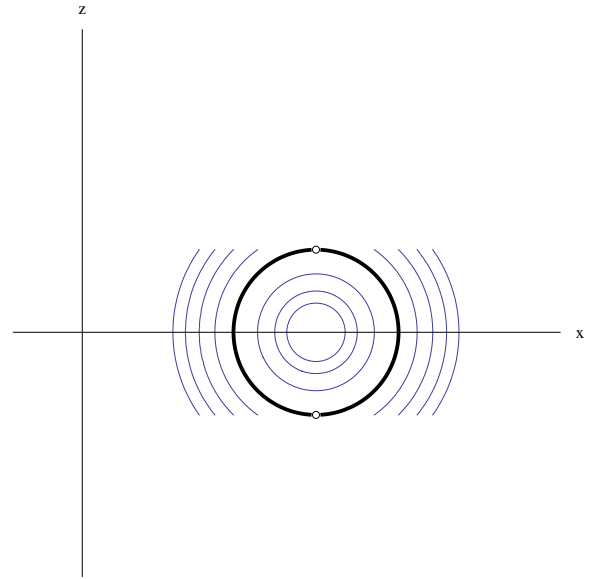


Рис. 4.20: Бифуркации слоев модели  $M_{0-11}^2$ .

которые разрастаются. Таким же образом ведут себя и торы Лиувилля – они остаются торами. Когда  $r$  достигает значения  $R/4$ , то окружность  $Q_{R/4}^1$  теряет свои верхнюю и нижнюю точки и разрывается в пару интервалов – соответствующий тор  $Q_{R/4}^2$  теряет два цикла и разрывается в пару цилиндров, то же происходит и с тором Лиувилля, когда точка  $(K, E)$  достигает границы камер  $C_B$  и  $C_3$ . При дальнейшем увеличении  $r$ , интервал  $Q_r^1$  остается интервалом, соответствующая пара цилиндров  $Q_r^2$  гладко деформируется, оставаясь парой цилиндров.

# Литература

- [1] Ballesteros Á., Enciso A., Herranz F.J., Ragnisco O., Hamiltonian systems admitting a Runge–Lenz vector and an optimal extension of Bertrand’s theorem to curved manifolds// Commun. Math. Phys. **290** (2009), 1033–1049.
- [2] Ballesteros Á., Enciso A., Herranz F.J., Ragnisco O., Bertrand spacetimes as Kepler/oscillator potentials // 2008
- [3] Ballesteros Á., Enciso A., Herranz F.J., Ragnisco O., Riglioni D. New superintegrable models with position-dependent mass from Bertrand’s Theorem on curved spaces
- [4] Bertrand J., Théorème relatif au mouvement d’un point attiré vers un centre fixe, C.R. Acad. Sci. Paris 77 (1873), 849–853. Engl. transl.: F. C. Santos, V. Soares, A. C. Tort, An English translation of Bertrand’s theorem (2007), arXiv:0704.2396v1.
- [5] Besse A., Manifolds all of whose geodesics are closed. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1978. Русск. перевод: А. Бессе, Многообразия с замкнутыми геодезическими. Пер. с англ. под ред. В. М. Алексеева. Москва: Мир, 1981.
- [6] Bolyai W. and Bolyai J., Geometrische Untersuchungen. Leipzig: B. G. Teubner, 1913.
- [7] Darboux G, Sur un problème de mécanique. In book: Cours de mécanique, T. Despeyrous, Vol. 2, Note XIV, Paris: A. Herman, 1886, 461–466.
- [8] Darboux G., Étude d’une question relative au mouvement d’un point sur une surface de révolution// Bull. S. M. F. 1877. **5**. 100–113.
- [9] Despeyrous T., Cours de mécanique. Vol. 2., Note XIV, Paris: A. Herman, 1886.
- [10] Fomenko A.T. "The theory of invariants of multidimensional integrable Hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). Molecular Table of all integrable systems with two degrees of freedom". - In: Topological Classification of Integrable Systems. - Advances in Soviet Mathematics. v.6, 1991. Amer.Math.Soc. pp.1-36.
- [11] Gordon W. B.. On the relation between period and energy in periodic dynamical systems // J. Math. Mech. 19 (1969), 111-114.

- [12] Grandati Y., Bérard A., Méнас F. Inverse problem and Bertrand's theorem // 2008.
- [13] Higgs P. W., Dynamical symmetries in a spherical geometry, I. J. Phys. A. Math. Gen. 12 (1979), 309–323. Русск. перевод: П. Хиггс, Динамические симметрии в сферической геометрии, I. В книге: Классическая динамика в неевклидовых пространствах, ред. А. В. Борисов и И. С. Мамаев. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 125–146.
- [14] Ikeda M. and Katayama N., On generalization of Bertrand's theorem to spaces of constant curvature, Tensor, N. S. 38 (1982), 37–40.
- [15] Killing W., Die Mechanik in den nicht-Euklidischen Raumformen, J. reine angew. Math. Bd. 98 (1885), 1–48. Русск. перевод: В. Киллинг, Механика в неевклидовых пространствах. В книге: Классическая динамика в неевклидовых пространствах, ред. А. В. Борисов и И. С. Мамаев. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 23–72.
- [16] Koenigs G., Sur les lois de force central fonction de la distance pour laquelle toutes les trajectoires sont algébriques, Bull. de la Société de France 17 (1889), 153–155.
- [17] Liebmann H., Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nichteuklidischen Raum, Berichte der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaft, Math. Phys. Klasse, Bd. 54 (1902), 393–423.
- [18] Liebmann H., Über die Zentralbewegung in der nichteuklidische Geometrie, Berichte der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaft, Math. Phys. Klasse, Bd. 55 (1903), 146–153. Русск. перевод: Г. Либман, О движении под действием центральной силы в неевклидовой геометрии, Классическая динамика в неевклидовых пространствах, ред. А. В. Борисов и И. С. Мамаев, Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004, 73–82.
- [19] Lipshitz R., Extension of the planet-problem to a space of  $n$  dimensions and constant integral curvature, Quart. J. Pure Appl. Math. 12 (1873), 349–370.
- [20] Matveev V. S., On projectively equivalent metrics near points of bifurcation. In book: Topological methods in the theory of integrable systems. Eds. Bolsinov A. V., Fomenko A. T. and Oshemkov A. A. Cambridge: Cambridge scientific publishers, 2006, 215–240.
- [21] Neumann C., Ausdehnung der Kepler'schen Gesetze auf der Fall, dass die Bewegung auf einer Kugelfläche stattfindet, Gessellschaft der Wissenschaften, Math. Phys. Klasse 38 (1886), 1–2.
- [22] Newton I., Mathematical Principles of Natural Philosophy// 1728



- [23] Perlick V., Bertrand spacetimes, *Class. Quantum Grav.* 9 (1992), 1009–1021.
- [24] Santoprete M., Gravitational and harmonic oscillator potentials on surfaces of revolution, *Journal of Math. Phys.* 49:4 (2008), 042903, 16 pp.
- [25] Santoprete M., Block Regularization of the Kepler Problem on Surfaces of Revolution with Positive Constant Curvature// 2009.
- [26] Schering F., Die Schwerkraft im Gaussischen Räume, *Nachr. der Königl. Gessellschaft der Wissenschaften Göttingen* 15 (1870), 311–321.
- [27] Serret P., *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes a double courbure*. Paris: Librave de Mallet-Bachelier, 1860, p. 205.
- [28] Slawianowski J. J., Bertrand systems on  $SO(3, R)$ ,  $SU(2)$ , *Bull. de l'Academie Polonica des Sciences. Sér. sci. phys. et astron.* XXVIII, N.2 (1980), 83–94.
- [29] Tikochinsky Y., A simplified proof of Bertrand's theorem, *Am. J. Phys.* 56:12 (1988), 1073–1075.
- [30] Алёшкин К.Р. Топология интегрируемых систем с неполными полями *Матем. сб.*, **205**:9 (2014), 49-64.
- [31] Болсинов А. В., Козлов В. В., Фоменко А. Т., Принцип Мопертюи и геодезические потоки на сфере, возникающие из интегрируемых случаев динамики твердого тела, *Успехи математических наук* 50:3 (1995), 3–32.
- [32] Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. , Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности, *УМН*, 45:2(272) (1990), 49–77
- [33] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы*. Ижевск: Удмуртский университет, 1999.
- [34] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. *Геометрия и топология интегрируемых геодезических потоков на поверхностях. (Монография)*. - Москва, УРСС, 1999. В серии: "Библиотека R& C Dynamics. Регулярная и хаотическая динамика том. 2.
- [35] Борисов А.В., Мамаев И.С., Системы на сфере с избыточным набором интегралов, *Классическая динамика в неевклидовых пространствах*. Ред. А.В. Борисов и И.С. Мамаев, Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 167–182. Engl. transl.: A. V. Borisov, I. S. Mamaev, *Superintegrable systems on a sphere*, *Regular and Chaotic Dynamics* 10:3 (2005), 257–266.

- [36] Классическая динамика в неевклидовых пространствах. Ред. А.В. Борисов и И. С. Мамаев. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
- [37] Козлов В. В., О динамике в пространствах постоянной кривизны, Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 1994. N.2, 28–35.
- [38] Kozlov V. V., Narin A. O., Kepler's problem in constant curvature spaces, *Celestial Mech. and Dynamical Astronomy* 54 (1992), 393–399. Русск. перевод: В. В. Козлов, А. О. Харин, Задача Кеплера в пространствах постоянной кривизны, Классическая динамика в неевклидовых пространствах, А. В. Борисов, И. С. Мамаев, Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 159–166.
- [39] Кудрявцева Е. А., Федосеев Д. А. Механические системы с замкнутыми орбитами на многообразиях вращения // Матем. сб. В печати.
- [40] Лобачевский Н. И., Новые начала геометрии с полной теорией параллельных, Полное собрание сочинений. Сочинения по геометрии. Т. II. М.–Л.: ГИИТЛ, 1949, 158–159. В книге: Классическая динамика в неевклидовых пространствах, А. В. Борисов и И. С. Мамаев, Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 19–21.
- [41] Нгуен Т. З., Фоменко А. Т. Топологическая классификация интегрируемых невырожденных гамильтонианов на изоэнергетической трехмерной сфере. - Успехи математических наук. 1990, т.45, вып.6, с.91-111.
- [42] Нгуен Т. З., Фоменко А. Т., Топологическая классификация интегрируемых невырожденных гамильтонианов на изоэнергетической трехмерной сфере, Успехи математических наук 45:6 (1990), 91–111.
- [43] Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. Москва-Ленинград: государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950.
- [44] Смирнов Р. Г. О классической задаче Бертрана-Дарбу // Фундаментальная и прикладная математика, 12:7 (2006), 231-250.
- [45] Фоменко А. Т., Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю, Функц. анализ и его приложения 22:4 (1988), 38–51.
- [46] Фоменко А. Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем. - Доклады АН СССР, 1986, т.287, No.5, с.1071-1075.
- [47] Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости. - Известия АН СССР. Серия матем. 1986, т.50, No.6, с.1276-1307.

- [48] Фоменко А.Т., Цишанг Х. О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике. - Доклады АН СССР, 1987, т.294, No.2, с.283-287.
- [49] Браилов А.В., Фоменко А.Т. Топология интегральных многообразий вполне интегрируемых гамильтоновых систем. - Математический Сборник, 1987, т.133, No.3, с.375-385.
- [50] Фоменко А.Т., Цишанг Х. О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем. - Известия АН СССР, 1988, т.52, No.2, с.378-407.
- [51] Фоменко А.Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю. - Функц. анализ и его приложения. 1988, т.22, вып.4, с.38-51.
- [52] Фоменко А.Т. Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем. - Успехи математических наук, 1989, т.44, вып.1 (265), с.145-173.
- [53] Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. // Известия АН СССР. 1990, т.54, No.3, с.546-575.
- [54] Фоменко А. Т, Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях, Функц. анализ и его приложения 25:4 (1991), 23–35.
- [55] Щепетиллов А. В., Анализ и механика на двухточечно-однородных римановых пространствах. Москва-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, ИИКИ, 2008.

#### **Публикации автора по теме диссертации**

- [56] Загрядский О. А., Кудрявцева Е.А., Федосеев Д.А. Обобщение теоремы Бертрانا на поверхности вращения // Матем. сб. 2012. **203**, №8. 39-78.
- [57] Загрядский О.А., Федосеев Д.А. О явном виде метрик Бертрана //Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. **67**, №5. 46-50.
- [58] Загрядский О. А., Соотношение классов Бертрана, Бонне и Таннери // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., № 6 (2014), 62-65.
- [59] Загрядский О. А., Поверхности Бертрана с псевдоримановой метрикой вращения // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., №1 (2015), 66-69.
- [60] Загрядский О.А., “Бертрановская система и её фазовое пространство”// Наука и образование МГТУ, 2014, № 12, 365-386.

- [61] Загрядский О.А., международная конференция “Воронежская зимняя математическая школа им. С.Г. Крейна.” (Воронеж, 25-30 января 2012 г.), 68.
- [62] Загрядский О.А., XX международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов” (Москва, 8–13 апреля 2013 г.).
- [63] Загрядский О.А., XXI международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов” (Москва, 7–11 апреля 2014 г.).