МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Ворушилов Константин Сергеевич

УДК 512.81+514.745.8

Инварианты Жордана–Кронекера конечномерных алгебр Ли

Специальность 1.1.3 (01.01.04) — геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
д.ф.-м.н., профессор А.А. Ошемков,
д.ф.-м.н., профессор А.В. Болсинов

Москва – 2022

Оглавление

Введение

Актуальность темы и степень ее разработанности

Диссертация посвящена исследованию некоторых свойств согласованных пуассоновых структур на алгебрах Ли.

Эффект интегрируемости для большинства из известных интегрируемых гамильтоновых систем связан с наличием бигамильтоновой структуры (см.[2, 13, 19, 22]). Однако до сих пор остается открытым вопрос об эффективном методе построения биинтегрируемой системы по заданному пучку согласованных скобок Пуассона. Если пучок является кронекеровым или, наоборот, полупростым (т.е. допускающим полупростой оператор рекурсии с различными собственными значениями), то вопрос решается довольно легко. Трудности возникают в том случае, когда пуассонов пучок имеет сложную алгебраическую структуру. Под алгебраической структурой здесь понимается класс эквивалентности пары бивекторов, задающих согласованные скобки в точке общего положения, по отношению к заменам переменных в рассматриваемой точке. Такие классы эквивалентности описываются теоремой Жордана–Кронекера о разложении ([24]; см. также [12]), аналогичной классической теореме о приведении к жордановой нормальной форме. Даже в линейном приближении в смысле работы [6], т.е. в предположении, что пуассонов пучок является линейным (одна из скобок линейная, а другая - постоянная в подходящих координатах), этот вопрос является отрытым. Именно такая ситуация является основным объектом анализа диссертационной работы. Отметим, что многие известные интегрируемые системы, возникающие в физике, механике и геометрии допускают бигамильтонову реализацию именно такого типа, т.е. естественным образом определены на двойственном пространстве некоторой алгебры Ли и являются гамильтоновыми относительно пучка скобок Пуассона, заданного скобкой Пуассона–Ли и постоянной скобкой.

Одним из первых важных результатов об интегрируемых системах на алгебрах Ли был метод сдвига аргумента, предложенный А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко в [20].

В дальнейшем критерий полноты семейства функций, построенных с помощью метода сдвига аргумента, был получен в работах А. В. Болсинова. В недавней работе А. В. Болсинова и Pumei Zhang [3] были введены инварианты Жордана–Кронекера алгебр Ли. Эти инварианты представляют собой наборы индексов двух типов (жордановы и кронекеровы индексы, подробнее см. Определение 1), описывающие алгебраическую структуру пучка скобок Пуассона общего положения на двойственном пространстве к алгебре Ли. В работе [3] также была получена переформулировка критерия полноты семейства функций, построенных с помощью метода сдвига аргумента, на языке этих инвариантов. Этот и другие результаты (например, связанные со структурой особенностей интегрируемой гамильтоновой системы на алгебре Ли) стимулировали изучение различных свойств инвариантов Жордана–Кронекера для алгебр Ли. В частности, в работе [3] эти инварианты были вычислены для полупростых алгебр Ли и алгебр Ли размерности не больше 5. В настоящее время имеется лишь несколько отдельных результатов о вычислении инвариантов Жордана–Кронекера для некоторых специальных классов алгебр Ли.

Отметим, что задачи, связанные с изучением инвариантов Жордана–Кронекера и проблемой построения биинтегрируемой системы с полиномиальными интегралами на произвольной конечномерной алгебре Ли (так называемая *обобщенная гипотеза Мищенко–Фоменко*, подробнее см. стр. 12) включены в список наиболее важных открытых проблем теории конечномерных интегрируемых систем [5, 7, 8, 23]. В частности, в перечисленных работах сформулированы следующие задачи:

Задача 1 (Problem 14 [7])**.** *Доказать обобщенную гипотезу Мищенко–Фоменко, или привести контрпример.*

Задача 2 (Problem 5.6. [8])**.** *Вычислить инварианты Жордана—Кронекера для наиболее интересных классов алгебр Ли, в частности, для*

a) полупрямых сумм $\mathfrak{g} +_{\phi} V$, где $\phi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ – представление простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а V - коммутативный идеал;

b) борелевских подалгебр простых алгебр Ли;

c) параболических подалгебр простых алгебр Ли;

d) централизаторов сингулярных элементов простых алгебр Ли;

e) алгебр Ли малой размерности.

Диссертационная работа посвящена именно решению задачи 1 для маломерных алгебр Ли, а также пунктов *a)* и *b)* задачи 2.

Цели и задачи диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Вычисление инвариантов Жордана–Кронекера для полупрямых сумм алгебр Ли вида $\mathfrak{g} +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k$, где $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли $so(n)$ или $sp(n)$, для всех значений n и k.

2. Вычисление инвариантов Жордана–Кронекера для полупрямых сумм алгебр Ли вида $\mathfrak{g} +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k$, где $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли $sl(n)$ или $gl(n)$, для всех значений n и k, кроме случаев, когда $k < n$ и n не кратно k.

3. Вычисление инвариантов Жордана–Кронекера для борелевских подалгебр $Bso(n)$ и $Bsp(n)$ для всех возможных n.

4. Нахождение полных наборов полиномиальных функций в биинволюции для всех семимерных нильпотентных алгебр Ли из списка, представленного в работе M.-P. Gong [14].

Положения, выносимые на защиту

1. Вычислены инварианты Жордана–Кронекера для полупрямых сумм алгебр Ли вида $\mathfrak{g} +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k$, где $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли $so(n)$ или $sp(n)$, для всех значений n и k.

2. Вычислены инварианты Жордана–Кронекера для полупрямых сумм алгебр Ли вида $\mathfrak{g} +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k$, где $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли $sl(n)$ или $gl(n)$, для всех значений n и k, кроме случаев, когда $k < n$ и n не кратно k.

3. Вычислены инварианты Жордана–Кронекера для борелевских подалгебр $Bso(n)$ и $Bsp(n)$ для всех возможных n.

4. Обобщенная гипотеза Мищенко–Фоменко верна для всех семимерных нильпотентных алгебр Ли из полного списка, представленного в работе M.-P. Gong [14].

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно.

Методы исследования

В диссертации используются методы линейной алгебры, дифференциальной геометрии,теории групп и алгебр Ли. При вычислении инвариантов Жордана–Кронекера алгебр Ли используются методы, предложенные А. В. Болсиновым, Pumei Zhang, А. С. Воронцовым. Для построения полных наборов в биинволюции на маломерных алгебрах Ли применяется пакет символьных вычислений «Wolfram Mathematica 12».

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании интегрируемых систем на алгебрах Ли. Разработанные в диссертации методы могут быть применены для вычисления инвариантов Жордана–Кронекера и построения наборов полиномов в биинволюции на других классах алгебр Ли.

Апробация работы

Основные результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и прошли апробацию на следующих научных конференциях и семинарах:

- XXIII международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2016» (Москва, Россия, 11–15 апреля 2016 г.);
- международная молодежная научная школа «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы» (Воронеж, Россия, 13–16 ноября 2017 г.);
- международная конференция «Зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2018» (Воронеж, 25–31 января 2018 г.);
- XX geometric seminar (Vrnjacka Banja, Serbia, May 20–23, 2018);
- международная конференция «Геометрические методы в теории управления и математической физике» (Рязань, 25-28 сентября 2018 г.);
- PhD Seminar, Friedrich-Schiller-Universität Jena, (December 3, 2018);
- XXVI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2019» (Москва, Россия, 8-12 апреля 2019 г.);

- International conference “Scientific heritage of Sergey A. Chaplygin: nonholonomic mechanics, vortex structures and hydrodynamics” (Cheboksary, June 2–6, 2019);

- Equadiff - 2019 (Leiden, Netherlands, July 8–12, 2019);

- Ломоносовские чтения 2020. Секция математики (Москва, Россия, 21-28 октября 2020 г.);

- XXVIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2021» (Москва, Россия, 12-23 апреля 2021 г.);

- Семинар «Современные геометрические методы» под руководством акад. А. Т. Фоменко, проф. А. С. Мищенко, проф. А. В. Болсинова, проф. А. А. Ошемкова, проф. Е. А. Кудрявцевой, доц. И. М. Никонова, доц. А. Ю. Коняева, доц. В. В. Ведюшкиной (механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова);

- Семинар «Алгебра и топология интегрируемых систем» под руководством проф. Е. А. Кудрявцевой, проф. А. В. Болсинова, проф. А. А. Ошемкова, доцента А. Ю. Коняева.

Публикации автора

Основные результаты диссертации изложены в четырех работах [27, 28, 29, 30], в том числе по теме диссертации 4, из них 4 статьи опубликованы в рецензируемых научных изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science, Scopus, RSCI.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Текст диссертации изложен на 97 страницах и содержит одну таблицу. Список литературы содержит 30 наименований.

Содержание работы

В главе 1 приведены основные определения и утверждения, связанные с обобщенной гипотезой Мищенко–Фоменко и теорией инвариантов Жордана–Кронекера.

В главе 2 вычислены инварианты Жордана–Кронекера полупрямых сумм алгебр Ли вида $\mathfrak{g} +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k$, где $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли $so(n)$ или $sp(n)$, для всех значений n и k :

- Алгебры Ли $so(n)+_\phi(\mathbb{R}^n)^k$ имеют кронекеров тип (то есть, инвариантами Жордана–Кронекера являются только кронекеровы индексы).

  1. $k < n-2$: Кронекеровы индексы равны

  $$\underbrace{2,\ldots,2,}_{\frac{k(k+1)}{2}\text{ раз}}\ 2k+2,\ 2k+4,\ \ldots,\ n+k-1; \quad n+k=2m+1;$$

  $$\underbrace{2,\ldots,2,}_{\frac{k(k+1)}{2}\text{ раз}}\ 2k+2,\ 2k+4,\ \ldots,\ n+k-2,\ \frac{n+k}{2}; \quad n+k=2m.$$

  2. $k=n-1$ и $k=n-2$: Кронекеровы индексы равны

  $$\underbrace{2,\ldots,2;}_{\frac{n(n-1)}{2}\text{ раз}} \quad k=n-1;$$

  $$\underbrace{2,\ldots,2,}_{\frac{(n-2)(n-1)}{2}\text{ раз}} \quad n-1; \quad k=n-2.$$

  3. $k \geqslant n$: Кронекеровы индексы равны

  $$\underbrace{1,\ldots,1,}_{n(k-n+1)\text{ раз}} \quad \underbrace{2,\ldots,2.}_{\frac{n(n-1)}{2}\text{ раз}}$$

- Алгебры Ли $\mathfrak{g} = sp(n) + {}_\phi(\mathbb{R}^n)^k, n = 2m$, в зависимости от m и k могут иметь кронекеров (только кронекеровы индексы) или смешанный тип (и кронекеровы, и жордановы индексы).

  1. $k = 2l-1, l \leqslant m$: алгебра Ли имеет кронекеров тип, инвариантами Жордана–Кронекера являются $\frac{k(k-1)}{2}$ кронекеровых индексов, равных 2, и $m-\frac{k-1}{2}$ кронекеровых индексов, равных k_i, где k_i - нечетные числа, начиная с числа $k(k-1)+1$.

  2. $k > 2m$: алгебра Ли имеет кронекеров тип, инвариантами Жордана–Кронекера являются следующие кронекеровы индексы:

  $$\underbrace{1,\ldots,1,}_{-2m(2m+1)+2mk\text{ раз}} \quad \underbrace{2,\ldots,2;}_{m(2m+1)\text{ раз}}$$

3. $k = 2l, l \leqslant m$: алгебра Ли имеет смешанный тип, инвариантами Жордана–Кронекера являются k жордановых индексов, равных 2, а также $\frac{k(k-1)}{2}$ кронекеровых индексов 3, и $m - \frac{k}{2}$ индексов, равных k_i, где k_i - четные числа, начиная с числа $2k+2$.

В главе 3 вычислены инварианты Жордана–Кронекера для полупрямых сумм алгебр Ли вида $\mathfrak{g} +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k$, где $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли $sl(n)$ или $gl(n)$, для всех значений n и k, кроме случаев, когда $k < n$ и n не кратно k :

- Алгебры Ли серии $sl(n) +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k$ в случае $k > n$ имеют кронекеров тип. Инвариантами Жордана–Кронекера являются $kn - \operatorname{ind}\mathfrak{g}$ индексов $l+1$ и $(l-1)\operatorname{ind}\mathfrak{g}$ индексов, равных l, где $l \operatorname{ind}\mathfrak{g} \leqslant kn < (l+1)\operatorname{ind}\mathfrak{g}$.

- Алгебры Ли серии $gl(n) +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k$ в случае $k > n$ имеют кронекеров тип. Инвариантами Жордана–Кронекера являются $kn - \operatorname{ind}\mathfrak{g}$ индексов, равных $l+1$, и $(l-1)\operatorname{ind}\mathfrak{g}$ индексов, равных l, где $l \operatorname{ind}\mathfrak{g} \leqslant kn < (l+1)\operatorname{ind}\mathfrak{g}$.

- Алгебры Ли $sl(n) +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^n$ имеют смешанный тип. Инвариантами Жордана–Кронекера являются $n \cdot (n-1)$ жордановых индексов, равных 2, и один кронекеров индекс, равный n.

- Алгебры Ли $sl(kl) +_{\phi} (\mathbb{R}^{kl})^k$ имеют смешанный тип. Инвариантами Жордана–Кронекера являются один кронекеров индекс, равный $\frac{kl(l+1)}{2}$, и $\frac{kl(l+1)}{2} \cdot (k-1)$ жордановых индексов, равных 2.

- Алгебры Ли $gl(kl) +_{\phi} (\mathbb{R}^{kl})^k$ имеют жорданов тип (то есть, инвариантами Жордана–Кронекера являются только жордановы индексы). Инвариантами Жордана–Кронекера являются $\frac{kl(l+1)}{2} \cdot (k-1)$ жордановых индексов, из которых $\frac{kl(l+1)}{2}$ штук равны 4, а остальные равны 2.

В главе 4 вычислены инварианты Жордана–Кронекера для борелевских подалгебр $Bso(n)$ и $Bsp(n)$ для всех возможных n:

- Алгебры Ли серии $Bsp(2n)$ имеют жорданов тип. Инвариантами Жордана–Кронекера являются $\frac{n(n+1)}{2}$ жордановых индексов, равных 2.

- Алгебры Ли $Bso(4s)$ имеют жорданов тип. Инвариантами Жордана–Кронекера являются $s(s+1)$ жордановых индексов 2 и $\frac{s(s-1)}{2}$ жордановых индексов 4.

- Алгебры Ли $Bso(4s+1)$ имеют жорданов тип. Инвариантами Жордана–Кронекера являются $s(s+2)$ жордановых индексов 2 и $\frac{s(s-1)}{2}$ жордановых индексов 4.

- Алгебры Ли $Bso(4s+2)$ имеют смешанный тип. Инвариантами Жордана–Кронекера являются $s(s+1)$ жордановых индексов 2, $\frac{s(s-1)}{2}$ жордановых индексов 4, и один кронекеров индекс, равный $2s+1$.

- Алгебры Ли серии $Bso(4s+3)$ имеют жорданов тип. Инвариантами Жордана–Кронекера являются $(s+1)(s+1)$ жордановых индексов 2 и $\frac{s(s+1)}{2}$ жордановых индексов 4.

В главе 5 найдены полные наборы полиномиальных функций в биинволюции для всех семимерных нильпотентных алгебр Ли из списка M.-P. Gong [14]. Список всех рассмотренных алгебр Ли с полными наборами в биинволюции приведен в таблице 1.

В заключении перечислены основные результаты диссертации, а также предложены возможные направления дальнейших исследований в рамках тематики работы.

Благодарности

Автор выражает благодарность своим научным руководителям А. А. Ошемкову и А. В. Болсинову за постановку задачи, постоянное внимание к работе и помощь на всех этапах ее подготовки. Автор благодарит сотрудников кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ за творческую атмосферу и поддержку.

Глава 1

Предварительные сведения

Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная конечномерная алгебра Ли со структурными константами c_{ij}^k. Для функций на ее двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ естественным образом определена скобка Пуассона

$$\{f, g\}(x) = c_{ij}^k x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*). \tag{1.1}$$

Данная пуассонова структура (называемая также «скобкой Ли–Пуассона») задается тензором типа (2,0) на $\mathfrak{g}^*$, т.е. семейством билинейных форм $\mathcal{A}_x$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, матрицы которых $\mathcal{A}_x = (c_{ij}^k x_k)$ линейно зависят от координат x_i точки $x \in \mathfrak{g}^*$. Можно рассматривать и комплексные алгебры Ли $\mathfrak{g}$; в таком случае вместо гладких функций рассматриваются комплексно-аналитические. На практике в обоих случаях как правило рассматриваются функции из класса полиномиальных или рациональных функций.

Вполне интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы на алгебрах Ли задаются полным набором функций, находящихся в инволюции относительно скобки Ли–Пуассона. Полным набором считается набор, содержащий в себе n функций, дифференциалы которых линейно независимы почти всюду на $\mathfrak{g}^*$, где $n = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$. Хорошо известно, что данное число является максимальным (см. [26], Гл. 5). Наибольший с практической точки зрения интерес представляют гамильтоновы системы, где полный набор в инволюции можно выбрать среди полиномиальных функций.

В 1978 году А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко предложили метод сдвига аргумента для построения полных коммутативных наборов [20]. Суть метода в следующем. Если f и g — инварианты коприсоединенного представления алгебры Ли, то для $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ их так называемые «сдвиги» $f(x + \lambda a)$ и $g(x + \mu a)$ находятся в инволюции относительно сразу двух пуассоновых структур: скобки Ли–Пуассона (1.1) и скобки «с замороженным аргументом»

$$\{f, g\}_a(x) = c_{ij}^k a_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*), \tag{1.2}$$

для которой матрица соответствующей билинейной формы $(c_{ij}^k a_k)$ на $\mathfrak{g}$ постоянна.

Инварианты коприсоединенного представления могут не быть определенными глобально. В таком случае, метод сдвига аргумента позволит построить только локально определенные наборы. Однако А. В. Браиловым была предложена модификация метода сдвига аргумента, устраняющая данную проблему.

Пусть $a \in \mathfrak{g}^*$ — такой регулярный элемент, что Ad^*-инварианты $f_1, \ldots, f_s, s = \operatorname{ind} \mathfrak{g}$ определены в окрестности a и независимы. Тогда рассмотрим разложения в ряд Тейлора:

$$f_i(a + \lambda x) = f_i^{(0)} + \lambda f_i^{(1)} + \lambda^2 f_i^{(2)} + \ldots. \tag{1.3}$$

Полученные коэффициенты $f_i^{(k)}$ являются однородными многочленами. Нетрудно убедиться в том, что эти многочлены находятся в биинволюции относительно скобки Ли–Пуассона (1.1) и скобки «с замороженным аргументом» (1.2) (для удобства далее кавычки будем опускать).

С помощью метода сдвига аргумента А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко удалось построить полные наборы полиномов в инволюции для полупростых и некоторых других классов алгебр Ли. На основании этих результатов авторами была выдвинута гипотеза, полностью доказанная С. Т. Садэтовым в 2004 году:

Теорема 1 (С. Т. Садэтов)**.** *На двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует полный набор полиномов в инволюции относительно скобки Ли–Пуассона* (1.1).

Доказательство теоремы 1 подробно описано, например, в [9]. В отличие от наборов, построенных методом сдвига аргумента, наборы полиномов, построенные методом Садэтова, не находятся в инволюции относительно скобки с замороженным аргументом. Поэтому остается открытым естественный вопрос о возможности построения полного набора в биинволюции, т.е. в инволюции относительно обеих пуассоновых структур (см. [5, Задача 12], а также [7] и [3]).

Обобщенная гипотеза Мищенко–Фоменко. *На двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует полный набор полиномов в биинволюции, т.е. в инволюции как относительно скобки Ли–Пуассона* (1.1)*, так и относительно скобки с замороженным аргументом* (1.2).

Для некоторых классов алгебр Ли такие наборы были построены. В частности, для алгебр Ли верхнетреугольных матриц и маломерных алгебр Ли ($\dim \mathfrak{g} \leqslant 5$), а также для некоторых других классов наборы построены в [3]. Тем не менее, в общем случае обобщенная гипотеза Мищенко–Фоменко не доказана.

С методом сдвига аргумента тесно связано понятие инвариантов Жордана–Кронекера. В каждой точке $\mathfrak{g}^*$ пуассоновы структуры (1.1) и (1.2) задаются парой кососимметричных форм; мы можем привести такую пару форм к некоторому стандартному виду, используя следующую теорему.

Теорема 2 (Жордана–Кронекера, см. [24])**.** *Пусть A и B — две произвольные билинейные кососимметрические формы на линейном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$. Тогда существует такой базис пространства V, в котором формы A и B одновременно приведены к блочно-диагональному виду $A = \operatorname{diag}\{A_1, \ldots, A_n\}, B = \operatorname{diag}\{B_1, \ldots, B_n\}$ с блоками следующих видов:*

1. *Жорданов блок с собственным значением $\lambda_i \in \mathbb{K}$:*
$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & J(\lambda_i) \\ -J^T(\lambda_i) & 0 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$
где
$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix},$$
а E — единичная матрица;

2. *Жорданов блок с собственным значением $\lambda_i = \infty$:*
$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & J(0) \\ -J^T(0) & 0 \end{pmatrix};$$

3. *Кронекеров блок:*
$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & K_1 \\ -K_1^T & 0 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & K_2 \\ -K_2^T & 0 \end{pmatrix},$$
где K_1 и K_2 — матрицы размера $(k_i - 1) \times k_i$ следующего вида:
$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из Теоремы 2 видно, что кронекеровы блоки имеют нечетный размер, а жордановы блоки всегда четного размера. Для произвольной пары кососимметричных форм A и B значения λ_i, появляющиеся в жордановых блоках, являются корнями некоторого многочлена $\mathbf{f}(\lambda)$, который мы будем называть характеристическим многочленом пучка $A + \lambda B$.

Базис из теоремы Жордана-Кронекера не будет единственным, однако блоки определены однозначно с точностью до перестановки. Максимальный по λ ранг $A + \lambda B$ называется рангом пучка $\mathcal{P} = \{A + \lambda B\}$, количество кронекеровых блоков равно $\operatorname{corank} \mathcal{P}$.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. *Для характеристического многочлена* $\mathbf{f}(\lambda)$ *пучка* $\mathcal{P} = \{A + \lambda B\}$ *справедлива следующая формула:*

$$2 \deg \mathbf{f}(\lambda) = \dim V - (2 \sum_{i=1}^{\operatorname{corank} \mathcal{P}} k_i - \operatorname{corank} \mathcal{P}). \tag{1.4}$$

Доказательство. $\mathbf{f}(\lambda)$ есть пфаффиан диагонального минора $A + \lambda B$, проходящего через строки, содержащие только жордановы блоки. Действительно, определители $A_i + \lambda B_i$ для блоков жорданова типа имеют вид $-\det^2(J(\lambda_i) - \lambda E)$. Квадратный корень произведения этих определителей есть в точности многочлен, имеющий все корни λ_i с необходимыми кратностями. Значит, сумма размеров жордановых блоков равна $2 \deg \mathbf{f}(\lambda)$. С другой стороны, сумма размеров кронекеровых блоков равна

$$\sum_{i=1}^{\operatorname{corank} \mathcal{P}} (2k_i - 1) = (2 \sum_{i=1}^{\operatorname{corank} \mathcal{P}} k_i - \operatorname{corank} \mathcal{P}).$$

$\square$

Если пара форм A и B приведена к блочно-диагональному виду, описанному в теореме 2, то этот вид мы будем называть разложением Жордана–Кронекера (или ЖК-разложением) пары A и B. Известно (см. [3]), что для открытого всюду плотного множества пар (x, a) в $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ разложение Жордана–Кронекера пары форм $\mathcal{A}_x$ и $\mathcal{A}_a$ одинаково в том смысле, что для всех таких пар количество и размеры кронекеровых блоков и жордановых блоков для каждого λ_i одни и те же. Это означает, что данные числа можно рассматривать как инварианты самой алгебры Ли.

Определение 1. Инвариантами Жордана–Кронекера алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называются числовые характеристики, описывающие разложение Жордана–Кронекера пары форм $\mathcal{A}_x$ и $\mathcal{A}_a$ для $(x, a) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ общего положения, а именно

- кронекеровы индексы k_i, каждый из которых соответствует кронекерову блоку размера $(2k_i - 1) \times (2k_i - 1)$, $i = 1, \ldots, s$; $s = \operatorname{ind}\mathfrak{g}$;

- жордановы индексы m_j, каждый из которых соответствует жорданову блоку размера $m_j \times m_j$; и их количество для каждого λ_i - корня характеристического многочлена $\mathbf{f}(\lambda)$ пучка $\mathcal{P} = \{\mathcal{A}_x + \lambda\mathcal{A}_a\}$.

В случае, когда разложение Жордана–Кронекера пары форм $\mathcal{A}_x$ и $\mathcal{A}_a$ общего положения содержит только кронекеровы (только жордановы) блоки, говорят, что алгебра Ли имеет кронекеров тип (соответственно, жорданов тип). Если же в разложении Жордана–Кронекера пары форм присутствуют и жордановы, и кронекеровы блоки, говорят, что алгебра Ли имеет смешанный тип.

Понятие инвариантов Жордана–Кронекера алгебры Ли было введено А. В. Болсиновым и P. Zhang в работе [3].

Для $(x, a) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ общего положения характеристический многочлен пучка $\mathcal{A}_x + \lambda\mathcal{A}_a$ имеет вид $\mathbf{f}_\mathfrak{g}(x + \lambda a)$, где $\mathbf{f}_\mathfrak{g}(x)$ — фундаментальный полуинвариант коприсоединенного представления алгебры Ли, который по определению является наибольшим общим делителем пфаффианов всех диагональных миноров матрицы $\mathcal{A}_x$. Фундаментальный полуинвариант содержит существенную информацию об инвариантах Жордана–Кронекера алгебры Ли: сумма жордановых индексов, соответствующих λ_i равна $2l_{\lambda_i}$, где l_{λ_i} - кратность λ_i как корня многочлена $\mathbf{f}_\mathfrak{g}(x + \lambda a)$.

Оказывается, в некоторых случаях знание инвариантов Жордана–Кронекера позволяет проверить обобщенную гипотезу Мищенко–Фоменко для алгебры Ли. Например, гипотеза справедлива, если алгебра Ли имеет кронекеров тип, так как в таком случае инвариантов и функций, полученных из них методом сдвига аргумента хватает для полноты набора (подробнее см. ниже).

Здесь и далее в изложении часто используются понятия аннулятора, индекса и сингулярного множества:

$$\operatorname{Ann} y = \{\, \xi \in \mathfrak{g} \mid \operatorname{ad}^*_\xi y = 0 \,\}, \quad y \in \mathfrak{g}^*;$$

$$\operatorname{ind}\mathfrak{g} = \min_{y \in \mathfrak{g}^*} \dim \operatorname{Ann} y;$$

$$\operatorname{Sing}\mathfrak{g} = \{\, y \in \mathfrak{g}^* \mid \dim \operatorname{Ann} y > \operatorname{ind}\mathfrak{g} \,\}.$$

Определение 2. Коэффициенты $f_i^{(k)}(x)$ в формуле (1.3), полученные методом сдвига аргумента Ad^*-инвариантов $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, \operatorname{ind}\mathfrak{g}$, на элемент $a \in \mathfrak{g}^*$ образуют подкольцо в кольце многочленов $\mathbf{P}(\mathfrak{g})$; мы будем называть это подкольцо семейством сдвигов Ad^*-инвариантов на $a \in \mathfrak{g}^*$ и обозначать $\mathcal{F}_a$. Семейство $\mathcal{F}_a$ полно, если из него можно выбрать $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$ функционально независимых полиномов.

Следующие две теоремы позволяют понять связь инвариантов Жордана–Кронекера с устройством семейства сдвигов $\mathcal{F}_a$. В частности, теорема 4 устанавливает справедливость обобщенной гипотезы Мищенко–Фоменко для алгебр Ли кронекерова типа.

Теорема 4 (Bolsinov–Zhang, [3]). *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ кронекерова типа, т.е. в ЖК-разложении пучка $\{\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a\}$ общего положения содержатся только кронекеровы блоки;*

2. $\operatorname{codim} \operatorname{Sing} \mathfrak{g} \geqslant 2$;

3. *семейство сдвигов $\mathcal{F}_a$ Ad^*-инвариантов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на элемент a общего положения полно (см. Теорему 3 [3]).*

Теорема 5 (Bolsinov–Zhang, [3]). *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ жорданова типа;*

2. $\operatorname{ind} \mathfrak{g} = 0$ *(фробениусова алгебра Ли);*

3. *семейство сдвигов $\mathcal{F}_a$ на элемент a общего положения тривиально, т.е. $\mathcal{F}_a = \mathbb{C}$.*

Число кронекеровых блоков - это в точности максимальное число независимых гладких (возможно, локальных) инвариантов коприсоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что в свою очередь равно $\operatorname{ind} \mathfrak{g}$. Интересно то, что если инварианты полиномиальны, то кронекеровы индексы возможно оценить при помощи степеней полиномов:

Теорема 6 (Воронцов,[10]). *Пусть $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ – алгебраически независимые полиномиальные инварианты коприсоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}, s = \operatorname{ind} \mathfrak{g}$, со степенями $\deg f_1 \leqslant \ldots \leqslant \deg f_s$. Тогда справедлива следующая оценка для кронекеровых индексов $k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_s$:*

$$\deg f_i \geqslant k_i.$$

Следствие 1. *Если алгебра кронекерова типа, и выполнено условие*

$$\sum_{i=1}^{s} \deg f_i = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g}), \tag{1.5}$$

то оценка теоремы 6 превращается в строгое равенство:

$$\deg f_i = k_i.$$

Доказательство. Следует из равенства (1.4). $\square$

В случае, когда алгебра Ли имеет жорданов или смешанный тип, оценка степеней Ad^*-инвариантов не позволяет нам однозначно определить инварианты Жордана–Кронекера (в жордановом случае Ad^*-инварианты вообще отсутствуют). Следующее предположение позволяет получить информацию о размере и числе жордановых блоков.

Предложение 1 ([3], Proposition 13)**.** *Пусть $(x, a) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$ - пара общего положения, λ_i - один из корней характеристического многочлена $\mathbf{f}_\mathfrak{g}(x + \lambda a)$. Положим $y = x + \lambda_i a \in$* Sing .

1. *Число жордановых блоков, отвечающих корню λ_i, равно*
$$\frac{1}{2}(\dim \mathrm{Ann}\, y - \mathrm{ind}\, \mathfrak{g}).$$
2. *Число жордановых блоков размера 4×4 и больше, отвечающих корню λ_i, равно*
$$\frac{1}{2}(\mathrm{ind}\, \mathrm{Ann}\, y - \mathrm{ind}\, \mathfrak{g}).$$

В работе рассматривается такой важный класс алгебр Ли, как полупрямые суммы по стандартному представлению. Для подсчета индексов в данных случаях используется следующая теорема.

Теорема 7 (Rais [21],[4])**.** *Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{H} \rtimes_\Phi V$ — полупрямое произведение группы Ли $\mathcal{H}$ по представлению Φ, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus_\phi V$ — ее алгебра Ли (где $\phi = d\Phi$), $y = (Y, l)$ — элемент двойственного пространства $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{h}^* \oplus V^*$, $\mathrm{St}(l) \subset \mathfrak{h}$ — стационарная подалгебра элемента l относительно двойственного представления ϕ^*, $\pi : \mathfrak{h}^* \to \mathrm{St}(l)^*$ — естественная проекция. Тогда размерность аннулятора $y \in \mathfrak{g}^*$ равна сумме размерности аннулятора $\pi(Y) \in \mathrm{St}(l)^*$ в алгебре Ли $\mathrm{St}(l)$ и коразмерности орбиты $\mathcal{O}_l$ элемента l при действии Φ^* группы $\mathcal{H}$ на V^*:*

$$\dim \mathrm{Ann}\, y = \dim \mathrm{Ann}_{\mathrm{St}(l)}\, \pi(Y) + \mathrm{codim}\, \mathcal{O}_l.$$

Более того, если y — элемент общего положения, St_0 — стационарная подалгебра общего положения представления ϕ^*, а $\mathrm{ind}\, \phi$ — минимальная коразмерность орбиты представления Φ^*, то

$$\mathrm{ind}\, \mathfrak{g} = \mathrm{ind}\, \mathrm{St}_0 + \mathrm{ind}\, \phi.$$

Глава 2

Инварианты Жордана–Кронекера полупрямых сумм $sp(2n) +_\phi (\mathbb{R}^{2n})^k$ и $so(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$

2.1 Некоторые сведения о рассматриваемых алгебрах Ли

2.1.1 Общая конструкция

$Sp(n)$, $n = 2m$ - симплектическая группа, ее элементами являются симплектические матрицы размера $2m \times 2m$, то есть такие матрицы, для которых выполняется свойство

$$X^T \Omega X = \Omega, \quad X \in Sp(n),$$

где Ω - кососимметричная матрица (с ненулевым определителем). Ее алгебра Ли $sp(n)$, $\dim sp(n) = m(2m+1)$, состоит из всех матриц, удовлетворяющих соотношению

$$(\Omega A)^T = \Omega A, \quad A \in sp(n).$$

$SO(n)$ - специальная ортогональная группа, ее элементами являются невырожденные матрицы с определителем 1, для которых выполняется свойство

$$X^T G X = G, \quad X \in SO(n),$$

где G - невырожденная симметричная матрица. В качестве матрицы G обычно рассматривают стандартную единичную матрицу. Ее алгебра Ли $so(n)$ состоит из всех матриц, удовлетворяющих соотношению

$$(GA)^T = -GA, \quad A \in so(n).$$

Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{H} \rtimes_\Phi V$ - полупрямое произведение группы Ли $\mathcal{H}$ ($SO(n)$ или $Sp(n)$) по стандартному представлению $\Phi = \underbrace{\rho \oplus \cdots \oplus \rho}_{k \text{ раз}}$, ρ - стандартное представление $\mathcal{H}$, $V = \underbrace{\mathbb{R}^n \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}^n}_{k \text{ раз}}$, элементы V будем отождествлять с прямоугольными матрицами W размера $n \times k$; тогда в матричном выражении $\Phi(X)W = XW$, $X \in \mathcal{H}$.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} +_\phi V$ - ее алгебра Ли, $\phi = d\Phi$ - соответствующее представление алгебры Ли, $\mathfrak{g}^*$ - двойственное пространство к алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Введем следующие обозначения для $g \in \mathcal{G}$, $\xi \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{g}^*$:

$$g = \begin{pmatrix} X & W \\ 0 & E \end{pmatrix}; \xi = \begin{pmatrix} A & H \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix} Y & L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где $X \in \mathcal{H}$, $A \in \mathfrak{h}$, $Y \in \mathfrak{h}^*$; $W, H \in V$, $L \in V^*$.

Иногда вместо данных обозначений будем также использовать упрощенные обозначения вида $g = (X, W)$ для элемента $g \in \mathcal{G}$, и т. п.

2.1.2 Индексы рассматриваемых алгебр Ли

Индексы для алгебр Ли $so(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$ и $sp(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$ были вычислены в работах [11] и [16].

Индексы $so(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$

1. $k \leqslant n$: $\operatorname{ind} \mathfrak{g} = \frac{k(k+1)}{2} + \left[\frac{n-k}{2}\right]$;

2. $k > n$: $\operatorname{ind} \mathfrak{g} = nk - \frac{n(n-1)}{2}$.

Индексы $sp(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k, n = 2m$

1. $k = 2l, l \leqslant m$: $\operatorname{ind} \mathfrak{g} = \frac{k(k-2)}{2} + m$;

2. $k = 2l-1, l \leqslant m$: $\operatorname{ind} \mathfrak{g} = \frac{(k-1)^2}{2} + m$;

3. $k > 2m$: $\operatorname{ind} \mathfrak{g} = 2km - 2m^2 - m$.

В обоих случаях ответ был получен с помощью теоремы Раиса (Теорема 7). Отметим, что в работе [11] случай $sp(n)$ при $k > 2m$ не был описан, а в случаях, где $k \leqslant 2m$, индексы указаны с ошибкой.

2.1.3 Инварианты коприсоединенного представления рассматриваемых алгебр Ли

Теорема 8 ([11], см. также [16]). *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли $so(n)+_{\phi}(\mathbb{R}^n)^k$ или $sp(n)+_{\phi}(\mathbb{R}^n)^k$, y — элемент $\mathfrak{g}^*$, рассматриваемый в форме* (2.1). *Построим по элементу y матрицу M следующим образом:*

$$M(y) = \begin{pmatrix} Y & \Lambda L \\ -L^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Ad^**-инвариантами алгебры Ли $\mathfrak{g}$ являются суммы главных миноров матрицы M, проходящие через последние k столбцов, а также функции вида $l_i^T \Lambda l_j$ ($\Lambda = E$ в случае $so(n) +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k$ и $\Lambda = \Omega$ в случае $sp(n) +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k$), вычисленные на всевозможных парах векторов (l_i, l_j), где l_i являются столбцами матрицы L.*

Изложенный выше результат был доказан ранее в работе [11] (случай $so(n) +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k$ также рассмотрен в работе [16]). Приведенное в работе [11] доказательство корректное и полное, однако итоговая теорема, посвященная этому результату (Теорема 3 в [11]), была сформулирована с ошибкой, в частности, данная теорема допускает в качестве инвариантов суммы главных миноров, проходящих хотя бы через один из k последних столбцов, что противоречит рассуждениям, из которых следует данная теорема.

2.2 Инварианты Жордана-Кронекера алгебры $so(n)+_{\phi}(\mathbb{R}^n)^k$

Имеет место следующая теорема, схема доказательства которой описана, например, в [4] (также см. §45 в [26]).

Теорема 9 (А. В. Болсинов, [4]). *Пусть*

1. $\mathfrak{g} = so(n) +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k, k$ *- любое натуральное число;*
2. $\mathfrak{g} = sp(n) +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k, n = 2m, k$ *нечетно, или* $k > 2m$.

Тогда семейство $\mathcal{F}_a$ сдвигов инвариантов полно. Если же ограничения на число слагаемых не выполнены, то семейство $\mathcal{F}_a$ неполное.

Теорема 9 вместе с теоремой 4 позволяют определить тип рассматриваемых алгебр Ли в смысле определения 1.

Следствие 2. *Алгебры Ли описанные в теореме 9, имеют кронекеров тип; алгебры Ли $\mathfrak{g} = sp(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$, $n = 2m$, $k = 2l$, $l \leqslant m$, являются алгебрами смешанного типа.*

Доказательство. Кронекеровость алгебр Ли, перечисленных в теореме 9, следует из полноты семейства $\mathcal{F}_a$ по теореме 4. Алгебры Ли $\mathfrak{g} = sp(2m) +_\phi (\mathbb{R}^{2m})^k$ при $k = 2l$, $l \leqslant m$ имеют смешанный тип, поскольку они не кронекеровы и $\operatorname{ind}\mathfrak{g} \neq 0$.

□

Теорема 10 (Основная теорема об инвариантах Жордана–Кронекера $so(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$)**.** *Алгебры Ли $so(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$ имеют кронекеров тип. Инварианты Жордана–Кронекера в зависимости от значений n и k следующие:*

1. *$k < n - 2$: Кронекеровы индексы равны*

$$\underbrace{2, \dots, 2,}_{\frac{k(k+1)}{2}\ \text{раз}}\ 2k+2,\ 2k+4,\ \dots,\ n+k-1; \quad n+k = 2m+1;$$

$$\underbrace{2, \dots, 2,}_{\frac{k(k+1)}{2}\ \text{раз}}\ 2k+2,\ 2k+4,\ \dots,\ n+k-2,\ \frac{n+k}{2}; \quad n+k = 2m.$$

2. *$k = n - 1$ и $k = n - 2$: Кронекеровы индексы равны*

$$\underbrace{2, \dots, 2;}_{\frac{n(n-1)}{2}\ \text{раз}} \quad k = n-1;$$

$$\underbrace{2, \dots, 2,}_{\frac{(n-2)(n-1)}{2}\ \text{раз}} \quad n-1; \quad k = n-2.$$

3. *$k \geqslant n$: Кронекеровы индексы равны*

$$\underbrace{1, \dots, 1,}_{n(k-n+1)\ \text{раз}} \quad \underbrace{2, \dots, 2.}_{\frac{n(n-1)}{2}\ \text{раз}}$$

Доказательство. По следствию 2 такие алгебры Ли кронекерова типа, следовательно, доказательство теоремы сводится к нахождению кронекеровых индексов.

Случай $k < n$

Степени полиномов в максимальном наборе независимых Ad^*-инвариантов, описанных в теореме 8, нам известны: $\frac{k(k+1)}{2}$ Ad^*-инвариантов степени 2, $\left[\frac{n-k}{2}\right]$ Ad^*-инвариантов четных степеней, начиная с $2k+2$; если наибольшая степень инварианта равна $n+k$, т.е. инвариант равен определителю кососимметрической матрицы, то вместо него можно взять пфаффиан, то есть инвариант степени, меньшей изначального в 2 раза. Приведенные степени удовлетворяют условиям следствия 1; воспользовавшись этим следствием, получаем, что степени Ad^*-инвариантов в точности равны кронекеровым индексам.

Случай $k \geqslant n$

Ad^*-инварианты, описанные в теореме 8, имеют степень 2; среди них можно выбрать $\frac{n(n+1)}{2} + n(k-n) = nk - \frac{n(n-1)}{2}$ независимых. По теореме 6 размер кронекеровых блоков может быть равен 1 или 3. Количество блоков можно найти, решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a + 3b = \dfrac{n(n-1)}{2} + nk \\ a + b = nk - \dfrac{n(n-1)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{n(n-1)}{2} \\ a = n(k-n+1) \end{cases}$$

□

2.3 Инварианты Жордана-Кронекера алгебры $sp(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$

Данная серия отличается от предыдущей наличием алгебр Ли смешанного типа, которые несколько сложнее в рассмотрении с точки зрения ЖК-инвариантов.

Найдем действие оператора присоединенного представления на вектор $\xi \in \mathfrak{g}$ (в обозначениях (2.1)):

$$\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \xi = g^{-1} \xi g = \begin{pmatrix} X^{-1}AX & X^{-1}AW + X^{-1}H \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отождествим $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$:

$$\langle y, \xi \rangle = \mathrm{Tr}(AY) + \sum_{i=1}^{k} l_i^T h_i,$$

где l_i и h_i — векторы-столбцы матриц H (для $\xi = (A, H)$) и L (для $y = (Y, L)$) соответственно.

Отсюда можем найти общий вид оператора коприсоединенного представления на $y \in \mathfrak{g}^*$:

$$\mathrm{Ad}_g^* y = \begin{pmatrix} XYX^{-1} - V & {X^{-1}}^T L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где

$$V = \frac{\Psi_i + \Omega \Psi_i^T \Omega}{2}, \quad \Psi_i = VL^T X^{-1}.$$

Пусть $g(t)$ — кривая в $\mathcal{G}$, такая, что $g(0) = e$. Тогда $\zeta = \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} g = \begin{pmatrix} B & P \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\zeta \in \mathfrak{g}$. Тогда найдем формулу для коприсоединенного представления алгебры Ли при данном отождествлении, пользуясь определением:

$$(\mathrm{ad}_\zeta^*\ y)\xi = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\mathrm{Ad}_g^* y)\xi,\ \forall \xi \in \mathfrak{g};$$

$$\mathrm{ad}_\zeta^*\ y = \begin{pmatrix} BY - YB - V^* & -B^T L \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $V^* = \dfrac{PL^T + \Omega L P^T \Omega}{2}$. Таким образом, $\zeta \in \mathrm{Ann}\, y$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} B^T L = 0 \\ [B, Y] = V^* \end{cases}. \tag{2.3}$$

Теорема 11 (Основная теорема об инвариантах Жордана–Кронекера $sp(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$, $n = 2m$)**.** *Пусть $\mathfrak{g} = sp(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$, $n = 2m$.*

1. *$k = 2l - 1, l \leqslant m$: алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеют кронекеров тип, ЖК-разложение пучка общего положения $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$, $(x, a) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$, имеет $\frac{k(k-1)}{2}$ блоков размера 3 и $m - \frac{k-1}{2}$ блоков размера $2k_i - 1$, где k_i - нечетные числа, начиная с числа $k(k-1)+1$.*

2. *$k > 2m$: алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеют кронекеров тип, ЖК-разложение пучка общего положения $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$, $(x, a) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$, содержит следующие блоки:*

$$\underbrace{1, \ldots, 1}_{-2m(2m+1)+2mk \text{ раз}}, \quad \underbrace{3, \ldots, 3}_{m(2m+1) \text{ раз}};$$

3. $k = 2l, l \leqslant m$: алгебра смешанного типа, ЖК-разложение пучка общего положения $\mathcal{A}_x + \lambda\mathcal{A}_a$, $(x, a) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$, содержит k жордановых блоков размера 2, соответствующих различным характеристическим числам - решениям уравнения

$$\mathrm{Pf}((L_x + \lambda L_a)^T \Omega (L_x + \lambda L_a)) = 0$$

для элементов $x = (Y_x, L_x)$ и $a = (Y_a, L_a)$ общего положения (т.е. один жорданов блок размера 2 для каждого характеристического числа), а также $\frac{k(k-1)}{2}$ кронекеровых блоков размера 3, и $m - \frac{k}{2}$ блоков размера $2k_i - 1$, где k_i - четные числа, начиная с числа $2k + 2$.

Доказательство. 1. В случае $k = 2l - 1, l \leqslant m$, среди описанных в теореме 8 функций мы можем выбрать набор независимых, состоящий из $\frac{k(k-1)}{2}$ Ad^*-инвариантов степени 2 и $m - \frac{k-1}{2}$ Ad^*-инвариантов степеней нечетных чисел, начиная с числа $k(k-1)+1$. Степени Ad^*-инвариантов удовлетворяют условиям следствия 1, значит, равны кронекеровым индексам алгебры.

2. В случае $k > 2m$ Ad^*-инварианты имеют степень 2, их количество равно $-m(2m+1) + 2mk$. Размер кронекеровых блоков в таком случае может быть равен 1 или 3. Количество блоков можно найти, решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a + 3b = m(2m+1) + 2mk \\ a + b = -m(2m+1) + 2mk \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = n(2m+1) \\ a = -2m(2m+1) + 2mk \end{cases}$$

3. Известно (см [3], Section 7), что нули фундаментального полуинварианта являются объединением всех неприводимых компонент коразмерности один множества Sing сингулярных элементов в $\mathfrak{g}^*$. Обозначим это объединение Sing_0, а его элементы будем называть сингулярными элементами общего положения.

Утверждение 12. *Для элемента $y = (Y, L)$ из пространства $\mathfrak{g}^*$, где $\mathfrak{g} = sp(2n) + (\mathbb{R}^{2n})^k, k = 2l$, многочлен $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(y) = \mathrm{Pf}(L^T \Omega L)$ задает $\mathrm{Sing}_0 \subset \mathfrak{g}^*$.*

Доказательство утверждения. Для доказательства того, что $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(y)$ задает Sing_0, достаточно показать, что

1) элемент $y = (Y, L)$ регулярен, если Y - элемент общего положения в $sp(2n)$, и $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(y) \neq 0$;

2) элемент $y = (Y, L)$ сингулярен, если Y - элемент общего положения в $sp(2n)$, и $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(y) = 0$.

1) Рассмотрим систему (2.3). Первое уравнение вместе с условием $B \in sp(n)$ можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} B^T\Omega = -\Omega B \\ B^T L = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Отметим, что размерность пространства решений данной системы зависит только от ранга L и не зависит от значения $L^T\Omega L$. В случае $\det(L^T\Omega L) \neq 0$ матрица L может быть приведена к блочному виду:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{matrix}} & L_{21} & \dots & L_{l1} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{matrix}} & \dots & L_{l2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{matrix}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

для $\Omega = \operatorname{diag}\{J, \dots, J\}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $*$ - некоторое ненулевое число. В таком случае решения второго уравнения системы (2.4) - это такие матрицы B, у которых первые k строк равны нулю; учитывая также первое уравнение, получаем, что и первые k столбцов должны быть равны нулю. Следовательно, пространство решений системы (2.4) изоморфно $sp(2m - k)$. Действуя Ad^*-преобразованием (2.2) на элемент y, с помощью выбора подходящей матрицы W можем привести матрицу Y к такому же блочному виду, как и матрицу B. Из сказанного выше следует, что второе уравнение системы (2.3) разлагается на систему двух независимых уравнений:

$$\begin{cases} [B, Y] = 0, \\ V^* = 0. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} [B, Y] = 0, \\ \Omega P L^T = L P^T \Omega. \end{cases}$$

Пространство решений первого уравнения равно $\operatorname{ind} sp(2m-k) = m-\frac{k}{2}$. Второе уравнение можно переписать как $\Omega PL^T = (\Omega PL^T)^T$. P и L - прямоугольные матрицы размера $n \times k$; из вида L следует, что все элементы матрицы P в строчке $k+1$ и ниже определятся однозначно, а среди оставшихся k^2 элементов свободными останутся $\frac{k(k-1)}{2}$. Сумма получившихся чисел равна $\frac{k(k-2)}{2}+m$, что в точности равно индексу рассматриваемой алгебры Ли, следовательно, элемент y является элементом общего положения в g^*.

2) При $\det L^T\Omega L = 0$ и отсутствии каких либо других условий на матрицу L без ограничения общности будем считать, что L можно привести к следующему виду:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{matrix}} & B_{21} & \dots & B_{l1} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{matrix}} & \dots & B_{l2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \boxed{\begin{matrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{matrix}} \\ 0 & 0 & \dots & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

С учетом сказанного выше для предыдущего случая, второе уравнение системы (2.4) можно переписать как $L'^T B' = 0$, где $B' \in sp(2m-k+2)$ - правый нижний блок матрицы B, а L' имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\Omega \to \Omega'} \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \Omega' = \operatorname{diag}\{\Omega_4, \Omega_*\}, \Omega_4 = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{pmatrix},$$

здесь мы заменили стандартный базис для упрощения вида; Ω_* - произвольная кососимметрическая матрица размера $2m-k-2$. Решения уравнения $L'^T B' = 0$

в данном базисе записываются так:

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B'_1 & 0 & {B'_2}^T \\ -\Omega_* B'_2 & 0 & B'_3 \end{pmatrix};$$

B'_1 - симметричная матрица $2 \times 2, B'_2$ - прямоугольная матрица $(2m-k-2) \times 2$, $B'_3 \in sp(2m-k-2)$.

При Ad*-преобразовании (2.2) элемента y при $X = E$ матрица L не изменится, а матрица Y перейдет в матрицу $Y - \frac{WL^T + \Omega L W^T \Omega}{2}$. Выбором матрицы W можно привести Y к виду

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Y' \end{pmatrix},\ Y' \in sp(2m-k+2),\ Y' = \begin{pmatrix} 0 & Y'_1 & {Y'_2}^T \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_* Y'_2 & Y'_3 \end{pmatrix},$$

где размеры блоков матрицы Y' совпадают с размерами соответствующих блоков матрицы B'.

Тогда ограничение второго уравнения системы (2.3) на $sp(2m-k+2)$ в данной ситуации запишется так:

$$[B', Y'] = \begin{pmatrix} -Y'_1 B'_1 + {Y'_2}^T \Omega B'_2 & 0 & -Y'_1 {B'_2}^T - {Y'_2}^T B'_3 \\ 0 & B'_1 Y'_1 + {B'_2}^T \Omega Y'_2 & B'_1 {Y'_2}^T + {B'_2}^T Y'_3 \\ -B'_1 \Omega Y'_2 + \Omega B'_2 Y'_3 & -\Omega B'_2 Y'_1 + B'_3 \Omega Y'_2 & [B'_3, Y'_3] - \Omega Y'_2 {B'_2}^T - \Omega B'_2 {Y'_2}^T \end{pmatrix},$$

$$V'^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P'_4 & 0 & 0 \\ P'_6 - P'^T_6 & P'^T_4 & -P'^T_8 \Omega \\ P'_8 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$P' = PL^T = \begin{pmatrix} P'_1 & P'_2 & 0 & 0 \\ P'_3 & P'_4 & 0 & 0 \\ P'_5 & P'_6 & 0 & 0 \\ P'_7 & P'_8 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \\ P_5 & P_6 \\ P_7 & P_8 \end{pmatrix},$$

Верхняя квадратная подматрица размера $k \times k$ матрицы L невырождена, поэтому Первые два столбца P' — это некоторое невырожденное линейное преобразование изначальной матрицы P, зная элементы которого, мы можем однозначно восстановить элементы матрицы P. Поэтому нам неважно, на что из этого (P или P') смотреть как на неизвестные.

Полностью матрица V^* при описанных выше переобозначениях выглядит так:

$$V^* = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} P'_1 & P'_2 & 0 & 0 \\ P'_3 & P'_4 & 0 & 0 \\ P'_5 & P'_6 & 0 & 0 \\ P'_7 & P'_8 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega P'^T_1\Omega & -\Omega P'^T_5 & \Omega P'^T_3 & \Omega P'^T_7\Omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -P'^T_2\Omega & P'^T_6 & -P'^T_4 & -P'^T_8\Omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

В ограничении второго уравнения системы (2.3) на дополнение до $sp(2m-k-2)$ (то есть, в первом блочном столбце и первой блочной строчке матрицы V^*) останутся условия на P; рассмотрим их повнимательнее. Решения уравнения $P'_1+\Omega P'^T_1\Omega = 0$ - пространство размерности $\frac{(k-2)(k-3)}{2}$. $P'_3 = 0$ и $P'_7 = 0$, очевидно, полностью определяют P'_3 и P'_7. Пространство решений уравнения $P'_2 = \Omega P'^T_5$ имеет размерность $2(k-2)$. Сложив получившиеся размерности пространств решений, получим $\frac{(k-2)(k+1)}{2} = \frac{k(k-2)}{2} + \frac{k}{2} - 1$.

Рассмотрим матрицу V'^*. Уравнение во второй блочной строке первого столбца $P'_6+P'^T_6 = 0$ для матрицы P'_6 размера 2×2 решается элементарно, пространство решений уравнения имеет размерность 1.

Так как мы взяли Y общего положения, будем считать, что матрица Y'_1 невырождена. Матрица P'_4 присутствует только в первых двух уравнениях на главной блочной диагонали. В случае, если B'_1 и B'_2 заданы, P'_4 определится однозначно (важно уточнить, что из трех неизвестных в этом уравнении матрица P'_4 имеет наименьшую размерность).

Осталось 4 матрицы-неизвестных: P'_8, B_1, B_2 и B_3 и 3 уравнения:

$$\begin{cases} -Y'_1{B'_2}^T - {Y'_2}^T B'_3 = 0 \\ B'_1{Y'_2}^T + {B'_2}^T Y'_3 = P'^T_8\Omega \\ [B'_3, Y'_3] + \Omega Y'_2{B'_2}^T - \Omega B'_2{Y'_2}^T = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Единственное условие на P'_8 задается во втором уравнении.

Выразив B_2 из первого уравнения, подставим его в третье уравнение, и, пользуясь тем, что B_3 - симплектическая, а Y_1 - невырожденная симметричная, получаем уравнение

$$[B_3, Y_3 - \Omega Y_2 Y_1^{-1} Y_2^T] = 0$$

Выражение в правом аргументе коммутатора - симплектическая матрица, поэтому размерность пространства решений данного уравнения равна $\operatorname{ind} sp(2m-k-2) = m-\frac{k}{2}-1$. В первом уравнении системы матрица B_2 определена целиком через B_3. Сложив все получившиеся размерности с размерностью пространства матриц B_1 (она является симметричной 2×2 матрицей, следовательно, определяется тремя переменными), получаем

$$m - \frac{k}{2} - 1 + 1 + \frac{k(k-2)}{2} + \frac{k}{2} - 1 + 3 = m + \frac{k(k-2)}{2} + 2,$$

что ровно на 2 больше индекса алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Следовательно, утверждение 2) верно. Таким образом, показано, что $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(y)$ задает множество Sing_0.

□

Утверждение 13. *В случае алгебры Ли* $\mathfrak{g} = sp(2n) + (\mathbb{R}^{2n})^k$, $k = 2l$, *характеристическим многочленом пучка* $\mathcal{A}_x + \lambda\mathcal{A}_a$ *является многочлен* $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x + \lambda a) = \operatorname{Pf}((L_x + \lambda L_a)^T \Omega (L_x + \lambda L_a))$ *для элементов* $x = (Y_x, L_x)$ *и* $a = (Y_a, L_a)$ *общего положения.*

Доказательство утверждения. Докажем, что уравнение, задающее Sing_0, входит в характеристический многочлен с кратностью один, то есть, все жордановы блоки имеют размер 2. По предложению 1, для этого достаточно показать, что для подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, являющейся аннулятором сингулярного элемента общего положения из $\mathfrak{g}^*$, верно $\dim \mathfrak{h} = \operatorname{ind} \mathfrak{g} + 2$ и $\operatorname{ind} \mathfrak{h} = \operatorname{ind} \mathfrak{g}$.

Найдем вид элементов из $\mathfrak{h}$. В стандартном базисе (где матрица Ω имеет блочно-диагональный вид с блоками 2×2) рассмотрим элемент $y \in \mathfrak{g}^*$ специального вида, удовлетворяющий условию $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(y) = 0$. Матрица Y выглядит следующим образом:

$$Y = \begin{pmatrix} 0^* & 0 & 0 \\ 0 & Y_1 & 0 \\ 0 & 0 & Y_2 \end{pmatrix}, Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

где 0^* - блок нулей размера $(k-2) \times (k-2)$.

Матрица L имеет такой вид:

$$L = \begin{pmatrix} \begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \begin{matrix}1&0\\0&0\end{matrix} \\ 0 & 0 & \dots & \begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Аннулятор такого элемента имеет следующий вид:

$$B = \begin{pmatrix} 0^* & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ b_1&0&b_2&0 \\ 0&0&0&0 \\ b_2&0&b_3&0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} \beta_1&0&0&0& \\ 0&-\beta_1&0&0& \\ 0&0&\beta_2&0& \\ 0&0&0&-\beta_2& \\ &&&&\ddots \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

где 0^* - блок нулей размера $(k-2)\times(k-2)$;

$$P = \begin{pmatrix} \begin{matrix}p_{11}&0\\0&p_{11}\end{matrix} & P_{1,2} & \dots & \begin{matrix}p_{1l,1}&p_{1l,3}\\p_{1l,2}&p_{1l,4}\end{matrix} \\ -\Omega P_{1,2}\Omega & \begin{matrix}p_{22}&0\\0&p_{22}\end{matrix} & \dots & \begin{matrix}p_{2l,1}&p_{2l,3}\\p_{2l,2}&p_{2l,4}\end{matrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{matrix}0&0\\-p_{1l,2}&p_{1l,1}\end{matrix} & \begin{matrix}0&0\\-p_{2l,2}&p_{2l,1}\end{matrix} & \dots & \begin{matrix}2b_2&2b_3\\0&p_1\end{matrix} \\ \begin{matrix}0&0\\-p_{1l,4}&p_{1l,3}\end{matrix} & \begin{matrix}0&0\\-p_{2l,4}&p_{2l,3}\end{matrix} & \dots & \begin{matrix}2b_1&2b_2\\-p_1&0\end{matrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Докажем это. В силу того, что верхний левый $(k-2)\times(k-2)$-блок матрицы L единичный, а также того, что матрица B удовлетворяет условию $\Omega B + B^T\Omega = 0$, из уравнения $B^T L = 0$ следует, что матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0^* & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & B_3 \\ 0 & B_4 & B_2 \end{pmatrix}, \Omega B_3 + B_4^T \Omega = 0, \tag{2.12}$$

причем первая и третья строки матриц B_1 и B_3 равны нулю. Уравнение $[B, Y] + V^*$ выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0^* & 0 & 0 \\ 0 & [B_1, Y_1] & B_3 Y_2 - Y_1 B_3 \\ 0 & B_4 Y_1 - Y_2 B_4 & [B_2, Y_2] \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P_1 + \Omega P_1^T \Omega & P_4 L^* + \Omega P_2^T \Omega & \Omega P_3^T \Omega \\ P_2 + \Omega L^{*T} P_4^T \Omega & P_5 L^* + \Omega L^{*T} P_5^T \Omega & \Omega L^{*T} P_6^T \Omega \\ P_3 & P_6 L^* & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.13}$$

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_4 \\ P_2 & P_5 \\ P_3 & P_6 \end{pmatrix}; L^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим уравнение в правом нижнем блоке. Так как матрица Y_2 диагональная (но с произвольными парами различных собственных значений), коммутировать с ней также могут только диагональные матрицы. Размерность пространства решений данного уравнения равна $m - l - 1$.

Уравнение в левом нижнем блоке (эквивалентное уравнению в правом верхнем блоке) имеет единственное решение $P_3 = 0$. Уравнение в левом верхнем блоке $P_1 + \Omega P_1^T \Omega = 0$ можно переписать как $\Omega P_1 = -(\Omega P_1)^T$; нетрудно проверить, что такому условию удовлетворяют только матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} p_{11} & 0 \\ 0 & p_{11} \end{matrix} & P_{1,2} & \\ -\Omega P_{1,2} \Omega & \begin{matrix} p_{22} & 0 \\ 0 & p_{22} \end{matrix} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Размерность пространства решений такого уравнения равна $l - 1 + 2(l-1)(l-2) = (l-1)(2l-3)$.

Во всех оставшихся блоках присутствует матричный коэффициент L^*. Эти блоки можно дополнительно разбить на блоки 4×4 или 4×2 все получившиеся уравнения распадутся на несколько типов уравнений, где уравнения одного типа имеют одинаковые решения. Уравнения каждого типа естественно возникнут при рассмотрении случая $sp(8)+(\mathbb{R}^8)^4$, то есть, когда квадратный блок 0^* и матрица B_2 имеют размер 2×2.

Рассмотрим уравнение $P_4L^*+\Omega P_2^T\Omega=0$.

$$\begin{pmatrix} p_{41} & 0 & p_{43} & 0\\ p_{42} & 0 & p_{44} & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -p_{26} & p_{25} & -p_{28} & p_{27}\\ p_{22} & -p_{21} & p_{24} & -p_{23}\end{pmatrix}=0. \tag{2.15}$$

Отсюда получаем, что

$$P_2^T=\begin{pmatrix} 0 & -p_{42} & 0 & -p_{44}\\ 0 & p_{41} & 0 & p_{43}\end{pmatrix}.$$

Аналогично, при больших размерах блока 0^*, получаем аналогичные решения: четные строки матрицы P_2 определяются через элементы матрицы P_4, а нечетные строки нулевые. Размерность пространства решений равна $4(l-1)$.

Теперь рассмотрим пару уравнений

$$B_3Y_2-Y_1B_3+\frac{1}{2}(\Omega L^{*T}P_6^T\Omega)=0;\;\; B_4Y_1-Y_2B_4+\frac{1}{2}(P_6L^*)=0.$$

Так как $\Omega B_3+B_4^T\Omega=0$, уравнения эквивалентны. Рассмотрим подробнее второе уравнение:

$$\begin{pmatrix} b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44}\\ b_{45} & b_{46} & b_{47} & b_{48}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0\\ 0 & -\alpha_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44}\\ b_{45} & b_{46} & b_{47} & b_{48}\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_{61} & 0 & p_{62} & 0\\ p_{63} & 0 & p_{64} & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & b_{43} & 0 & b_{41}\\ 0 & b_{47} & 0 & b_{45}\end{pmatrix}-\alpha_1\begin{pmatrix} b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44}\\ -b_{45} & -b_{46} & -b_{47} & -b_{48}\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_{61} & 0 & p_{62} & 0\\ p_{63} & 0 & p_{64} & 0\end{pmatrix}.$$

Первая и третья строки матрицы B_3 в силу $\Omega B_3+B_4^T\Omega=0$ совпадают со вторым и четвертым столбцами матрицы B_4, то есть, они равны нулю, следовательно, $B_3=B_4=P_6=0$.

Осталось последнее уравнение: $[B_1,Y_1]+\frac{1}{2}(P_5L^*+\Omega L^{*T}P_5^T\Omega)$. Распишем его подробнее. Заметим, что, как было упомянуто выше, первая и третья строчки матрицы B_1 нулевые:

$$[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{1,21} & 0 & b_{1,23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{1,23} & 0 & b_{1,43} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}] + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_{51} & 0 & p_{55} & 0 \\ 2p_{52} & -p_{51} & p_{56}+p_{54} & -p_{53} \\ p_{53} & 0 & p_{57} & 0 \\ p_{54}+p_{56} & -p_{55} & 2p_{58} & -p_{57} \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} -b_{1,23} & 0 & -b_{1,43} & 0 \\ 0 & b_{1,23} & 0 & b_{1,21} \\ -b_{1,21} & 0 & -b_{1,23} & 0 \\ 0 & -b_{1,43} & 0 & -b_{1,23} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_{51} & 0 & p_{55} & 0 \\ 2p_{52} & -p_{51} & p_{56}+p_{54} & -p_{53} \\ p_{53} & 0 & p_{57} & 0 \\ p_{54}+p_{56} & -p_{55} & 2p_{58} & -p_{57} \end{pmatrix}.$$

Из последнего уравнения и получаем искомый вид. Размерность пространства решений равна $3+1=4$.

Таким образом, мы нашли вид элементов подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Подсчитаем размерность получившейся подалгебры:

$$m-l-1+(l-1)(2l-3)+4(l-1)+4 = m-l+3+(l-1)(2l+1),$$

что ровно на 2 больше индекса алгебры Ли. Для доказательства того, что $\operatorname{ind}\mathfrak{h} = \operatorname{ind}\mathfrak{g} = 2$, достаточно заметить, что некоммутирующими являются только элементы с ненулевыми значениями на местах $b_{1,21}$ и $b_{1,43}$. Таким образом, доказано, что все жордановы блоки имеют размер 2, следовательно, уравнение, задающее Sing_0, входит в характеристический многочлен с кратностью 1. □

При $k = 2l, l \leqslant m$, в наборе, описанном в теореме 8, имеется $\frac{k(k-1)}{2}$ Ad^*-инвариантов второй степени, а также $m - \frac{k}{2}$ инвариантов четных степеней, начиная с $2k+2$. По теореме 6 мы можем оценить кронекеровы индексы степенями инвариантов, значит, можем оценить и сумму размеров кронекеровых блоков числом $\frac{3}{2}k(k-1) + (3k+2m+1)(m-\frac{k}{2}) = m(2m+1)+2km-2k$, что ровно на $2k$ меньше размерности алгебры; с другой стороны, нам известно, что степень характеристического многочлена равна k, следовательно, можем воспользоваться формулой (1.4). Сумма степеней инвариантов равна $m^2+m(k+1)+\frac{k(k-2)}{2}-k$, что в точности равно $\frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g}+\operatorname{ind}\mathfrak{g}) - \deg \mathbf{p}(\lambda)$. Таким образом, кронекеровы индексы совпадают со степенями инвариантов, а все жордановы блоки имеют размер 2.

□

Глава 3

Инварианты Жордана–Кронекера полупрямых сумм вида $sl(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$ и $gl(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$

3.1 Некоторые сведения о рассматриваемых алгебрах Ли

3.1.1 Общая конструкция

$SL(n)$ — специальная линейная группа, ее элементами являются матрицы размера $n \times n$ с определителем, равным единице. Известно, что эта группа является группой Ли; ее алгебра Ли $sl(n)$ состоит из всех матриц размера $n \times n$ с нулевым следом.

$GL(n)$ — полная линейная группа, ее элементами являются матрицы размера $n \times n$, определитель которых не равен нулю. Эта группа также является группой Ли; элементами ее алгебры Ли $gl(n)$ являются все матрицы размера $n \times n$.

Как и в предыдущей главе, мы будем рассматривать полупрямые произведения $\mathcal{G} = \mathcal{H} \rtimes_\Phi (\mathbb{R}^n)^k$, заданные стандартным представлением Φ группы $\mathcal{H}$ ($SL(n)$ или $GL(n)$) в $\mathbb{R}^n$, и соответствующие полупрямые суммы $\mathfrak{g} = sl(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$. Мы будем использовать обозначения, аналогичные (2.1).

3.1.2 Индексы рассматриваемых алгебр Ли

Индексы для алгебр Ли $sl(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$ и $gl(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$ были вычислены в работах [11] и [16].

Индексы $sl(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$

1. $k \geqslant n$: $\operatorname{ind}\mathfrak{g} = kn - n^2 + 1$;
2. $k < n$: $\operatorname{ind}\mathfrak{g} = kr - r^2 + 1$, где $n = kd + r$, $0 \leqslant r < k$.

Индексы $gl(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$

1. $k \geqslant n$: $\operatorname{ind}\mathfrak{g} = kn - n^2$;
2. $k < n$: $\operatorname{ind}\mathfrak{g} = kr - r^2$, где $n = kd + r$, $0 \leqslant r < k$.

В обоих случаях ответ был получен с помощью теоремы Раиса (Теорема 7).

3.1.3 Явный вид оператора коприсоединенного представления

Найдем действие оператора присоединенного представления (для $g = (X, W) \in \mathcal{G}$) на вектор $\xi = (A, H) \in \mathfrak{g}$:

$$\operatorname{Ad}_{g^{-1}} \xi = g^{-1}\xi g = \begin{pmatrix} X^{-1}AX & X^{-1}AW + X^{-1}H \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отождествим $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ с помощью скалярного произведения:

$$\langle \xi, y \rangle = \operatorname{Tr}(AY) + \sum_{i=1}^{k} l_i^T h_i,$$

где $y = (Y, L) \in \mathfrak{g}^*$, l_i — векторы-столбцы матрицы L, а h_i — векторы-столбцы матрицы H.

Отсюда можем найти общий вид действия оператора коприсоединенного представления на элемент $y \in \mathfrak{g}^*$:

$$\operatorname{Ad}_g^* y = \begin{pmatrix} XYX^{-1} + V & {X^{-1}}^T L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где

$$WL^T X^{-1} - \frac{\operatorname{Tr}(WL^T X^{-1})}{n} E \tag{3.2}$$

в случае $sl(n)$ и

$$V = WL^T X^{-1} \tag{3.3}$$

в случае $gl(n)$.

Пусть $g(t)$ — кривая в $\mathcal{G}$, где $g(0) = e$. Тогда $\zeta = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g = \begin{pmatrix} B & P \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$. Найдем коприсоединенное представление алгебры Ли, пользуясь определением

$$(\mathrm{ad}^*_\zeta\, y)\xi = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\mathrm{Ad}^*_g\, y)\xi,\ \ \xi \in \mathfrak{g}.$$

Вычисляя, получаем

$$\mathrm{ad}^*_\zeta\, y = \begin{pmatrix} BY - YB + V^* & -B^T L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

где $V^* = PL^T - \frac{L^T P}{n} E$ в случае $sl(n)$ и $V^* = PL^T$ в случае $gl(n)$.

Таким образом, $\zeta \in \mathrm{Ann}\, y$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} B^T L = 0 \\ [B, Y] = V^* \end{cases}. \tag{3.5}$$

3.1.4 Типы алгебр Ли и Ad^*-инварианты

Определить тип алгебры Ли в смысле определения 1 для случая $sl(n)$ для любых n и k позволяет следующая теорема.

Теорема 14 (Болсинов, [4]). *Алгебры Ли $sl(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$ имеют кронекеров тип, если либо $k = 1$, либо $n \not\equiv 0 \bmod k$. В остальных случаях рассматриваемые алгебры Ли имеют смешанный тип.*

Инварианты коприсоединенного представления для расматриваемых алгебр Ли описаны в [11]. Для алгебры Ли $sl(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$ Ad^*-инварианты имеют вид $\det M(y)$, где $M(y)$ — матрица размера $n \times n$, которая строится по элементу $y = (Y, L)$ следующим образом.

Пусть $n = kd + r$, $0 \leqslant r < k$. В матрице $M(y)$ несколько групп столбцов, каждая из которых строится по l_i — векторам-столбцам матрицы L. Первыми расположены d групп по k столбцов, где первая группа — это группа столбцов l_i, $i = 1, \ldots, k$, вторая —

$Y^T l_i$, третья — $(Y^T)^2 l_i$ и т. д. до группы $(Y^T)^{d-1} l_i$. Последняя группа состоит из r столбцов вида $(Y^T)^d l_i$; различные Ad^*-инварианты получаются при выборе из всевозможных наборов по r векторов l_i в этой группе.

Зная вид Ad^*-инвариантов, можем вычислить их степень:

$$\deg f_i = \frac{(d+1)(n+r)}{2},\ n = kd + r,\ 0 \leqslant r < k.$$

Для серии $gl(n) +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k$ данные функции не являются Ad^*-инвариантами, однако они являются полуинвариантами коприсоединенного представления. Соответственно, инварианты коприсоединенного представления этой серии — это отношения данных функций [16].

Для некоторых чисто кронекеровых случаев серии $sl(n) +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k$ ответ можно получить, используя теорему 6 и следствие 1. Вычислим левую и правую части формулы (1.5):

$$\frac{\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g}}{2} = \frac{n^2 - 1 + kn + kr - r^2 + 1}{2} = \frac{(n+r)(k+n-r)}{2} = \frac{k(n+r)(d+1)}{2},$$
$$\sum_{i=1}^{s} \deg f_i(y) = \frac{(d+1)(n+r)}{2}(kr - r^2 + 1).$$

Их равенство выполняется при $r = 1$ или $k = r + 1$.

3.2 Случай $k > n$

Алгебры Ли серии $sl(n) +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k$ в данном случае ($k > n$) имеют кронекеров тип, то есть для описания инвариантов Жордана–Кронекера требуется найти лишь кронекеровы индексы. Для этого мы используем метод цепочек (см., например, [10]). Рассмотрим некоторую алгебру Ли $\mathfrak{g}$, $x, a \in \mathfrak{g}^*$ — элементы общего положения. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}^*_{\xi_1} x &= 0,\\
\mathrm{ad}^*_{\xi_2} x &= \mathrm{ad}^*_{\xi_1} a,\\
\mathrm{ad}^*_{\xi_3} x &= \mathrm{ad}^*_{\xi_2} a,\\
&\dots\\
\mathrm{ad}^*_{\xi_{l-1}} a &= \mathrm{ad}^*_{\xi_l} x.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Вектор $v \in \mathfrak{g}$ назовем вектором высоты n, если существует цепочка $\xi_i \in \mathfrak{g}$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяющая системе (3.6), такая что $\xi_n = v$. Обозначим через V_i пространство векторов высоты i. Тогда число кронекеровых блоков размера больше $2k-1$ равно $\dim V_{k+1} - \dim V_k$.

Предложение 2 ([10]). *Для алгебр Ли $sl(n) +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k$ при $k > n$ пространство V_l векторов высоты l имеет размерность $l \operatorname{ind} \mathfrak{g}$, если $l \operatorname{ind} \mathfrak{g} < kn$, и kn в остальных случаях.*

Доказательство. Пусть $\xi_i = (B_i, P_i)$, $x = (Y_x, L_x)$, $a = (Y_a, L_a)$. Обозначим через L_x^* матрицу, составленную из первых n столбцов матрицы L_x. Действием оператора Ad^* ее можно привести к виду единичной матрицы E. Из общего вида оператора коприсоединенного представления (3.4) следует, что условие на B_1, задаваемое первым уравнением системы (3.6), имеет вид $B_1^T L_x = 0$, откуда $B_1 = 0$. Все последующие B_i также равны нулю, так как правая часть уравнения $B_{i+1}^T L_x = B_i^T L_a$ равна нулю.

Обозначим через P_i^* матрицу, составленную из первых n столбцов матрицы P_i. Рассмотрим матричное уравнение

$$P_i L_x^T - \frac{\operatorname{Tr}(P_i L_x^T)}{n} E = P_{i-1} L_a^T - \frac{\operatorname{Tr}(P_{i-1} L_a^T)}{n} E \tag{3.7}$$

Все недиагональные элементы матрицы P_i^* входят в линейные уравнения, задаваемые (3.7), один раз. Система уравнений, задаваемых диагональными элементами (3.7), может иметь ранг не больше $n-1$, так как левая часть (3.7) имеет нулевой след. Матрица коэффициентов, с которыми диагональные элементы матрицы P_i^* входят в эту систему, имеет вид $\frac{-1}{n} I + E$, где I — матрица всех единиц. Легко проверить, что матрица коэффициентов имеет ранг $n-1$.

Таким образом, на первом шаге мы имеем n^2-1 независимых линейных уравнений и kn неизвестных. Их разность и есть размерность пространства V_1, она равна индексу рассматриваемой алгебры Ли. На следующем шаге к неизвестным P_2 мы прибавляем неизвестные P_1, получая систему из n^2-1 уравнений с $\operatorname{ind} \mathfrak{g} + kn$ неизвестных; размерность V_2 соответственно равна $2 \operatorname{ind} \mathfrak{g}$. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока на каком-то шаге i разность числа неизвестных и числа уравнений не станет большей или равной kn, что будет означать, что P_i не зависит от P_j, $j < i$, и может быть задана произвольно. Размерность всех V_l при $l \geqslant i$ будет равна kn. $\square$

Теорема 15 (Основная теорема об инвариантах Жордана–Кронекера $sl(n) +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k$ в случае $k > n$). *Алгебры Ли серии $sl(n) +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k$ в случае $k > n$ имеют кронекеров тип. ЖК-разложение пучка $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ для $x, a \in \mathfrak{g}^*$ общего положения содержит*

$kn - \operatorname{ind}\mathfrak{g}$ *блоков размера* $2l+1$ *и* $(l-1)\operatorname{ind}\mathfrak{g}$ *кронекеровых блоков размера* $2l-1$, *где* $l\operatorname{ind}\mathfrak{g} \leqslant kn \leqslant (l+1)\operatorname{ind}\mathfrak{g}$.

Доказательство. Воспользуемся предложением 2. Как уже было сказано выше, число кронекеровых блоков размера больше $2k-1$ равно $\dim V_{k+1} - \dim V_k$. Все такие разности равны $\operatorname{ind}\mathfrak{g}$, до разности $\dim V_{l+1} - \dim V_l$; эта разность равна $kn - \operatorname{ind}\mathfrak{g}$. Все последующие разности равны нулю. □

Для $gl(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$ вычисления проводятся аналогичным образом.

Теорема 16 (Основная теорема об инвариантах Жордана–Кронекера $gl(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$ в случае $k > n$)**.** *Алгебры Ли серии* $gl(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$ *в случае* $k > n$ *имеют кронекеров тип. ЖК-разложение пучка* $\mathcal{A}_x + \lambda\mathcal{A}_a$ *для* $x, a \in \mathfrak{g}^*$ *общего положения содержит* $kn - \operatorname{ind}\mathfrak{g}$ *кронекеровых блоков размера* $2l+1$ *и* $(l-1)\operatorname{ind}\mathfrak{g}$ *кронекеровых блоков размера* $2l-1$, *где* $l\operatorname{ind}\mathfrak{g} \leqslant kn < (l+1)\operatorname{ind}\mathfrak{g}$.

Доказательство аналогично случаю $sl(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$.

3.3 Случай $k = n$

Для алгебр Ли серии $gl(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^k$ данный случай ($k = n$) был описан в работе [3].

Теорема 17 (Основная теорема об инвариантах Жордана–Кронекера $sl(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^n$)**.** *Характеристический многочлен для алгебр Ли* $\mathfrak{g} = sl(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^n$ *имеет вид* $\mathbf{f}_\mathfrak{g}(x + \lambda a)$, *где* $\mathbf{f}_\mathfrak{g}(x) = (\det L)^{n-1}$ *— фундаментальный полуинвариант коприсоединенного представления* $\mathfrak{g}$, $x = (Y, L) \in \mathfrak{g}^*$. $\mathbf{f}_\mathfrak{g}(x + \lambda a)$ *имеет* n *различных корней кратности* $n-1$; *каждому корню соответствует* $n-1$ *жордановых блоков размера 2 в разложении Жордана–Кронекера пучка общего положения* $\mathcal{A}_x + \lambda\mathcal{A}_a$. *Также разложение Жордана–Кронекера пучка общего положения данной алгебры Ли содержит один кронекеров блок размера* $2n-1$.

Предложение 3. *Разложение Жордана–Кронекера пучка* $\mathcal{A}_x + \lambda\mathcal{A}_a$ *для* $x, a \in \mathfrak{g}^*$ *общего положения алгебры Ли* $\mathfrak{g} = sl(n) +_\phi (\mathbb{R}^n)^n$ *содержит один кронекеров блок размера* $2n-1$.

Доказательство. Воспользуемся методом цепочек. Пусть $\xi_i = (B_i, P_i)$, $x = (Y_x, L_x)$, $a = (Y_a, L_a)$. Преобразованием Ad^* можем привести матрицу L_x к виду единичной матрицы

E. Из рассуждений, аналогичных представленным в доказательстве предложения 2, следует, что $B_i = 0$. Условие на P_i преобразуем следующим образом:

$$P_i - \frac{\mathrm{Tr}(P_i)}{n}E = P_{i-1}L_a^T - \frac{\mathrm{Tr}(P_{i-1}L_a^T)}{n}E$$

$$\Updownarrow$$

$$P_i - P_{i-1}L_a^T - \frac{\mathrm{Tr}(P_i - P_{i-1}L_a^T)}{n}E = 0. \tag{3.8}$$

Решения уравнения (3.8) имеют вид $P_i = \alpha_0 E + \alpha_1 L_a^T + \dots + \alpha_{i-1}(L_a^{i-1})^T$. Действительно, для произвольной матрицы S решения уравнения $S - \frac{\mathrm{Tr}\, S}{n}E = 0$ имеют вид $S = \mu E$. Рассматриваемое уравнение (3.8) имеет такой вид при $S = P_i - P_{i-1}L_a^T$, $P_0 = 0$. Выразив P_i, получаем $P_i = \mu E + P_{i-1}L_a^T$. Вид P_j при $j < i$ находится аналогично.

Размерность пространства V_i векторов высоты i равна i до момента $i = n + 1$, так как матрицы $E, L_a, L_a^2, \dots, L_a^i$ линейно зависимы при $i \geqslant n$ и независимы при $i < n$ при условии $\mathrm{rank}\, L_a = n$. Это означает, что размерности V_i стабилизируются на n, из чего и следует доказываемое утверждение. □

Доказательство теоремы 17. $\mathbf{f}(x) = \mathrm{Det}\, L$ - инвариант коприсоединенного представления данной алгебры Ли; этот многочлен неприводим как определитель произвольной матрицы. Степень данного многочлена равна n, следовательно, $\mathbf{f}(x + \lambda a)$ имеет n различных корней.

Из доказательства предложения 3 известно, что при $\mathbf{f}(x) \neq 0$ элемент x является регулярным (размерность аннулятора x минимальна). Покажем, что если при $\mathbf{f}(x) = 0$ элемент $x \in \mathfrak{g}^*$ синуглярный (то есть, размерность пространства решений уравнения $\mathrm{ad}_\xi^* x = 0$ больше минимальной), то корни $\mathbf{f}(x)$ совпадают с корнями фундаментального полуинварианта алгебры Ли. После доказательства этого факта воспользуемся предложением 1 для выяснения кратности множителя $\mathbf{f}(x)$ в фундаментальном полуинварианте (и, что то же самое, кратности $\mathbf{f}(x+\lambda a)$ в характеристическом многочлене).

Найдем размерность пространства решений $\mathrm{ad}_\xi^* x = 0$. Уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} BY - YB + PL^T - \frac{\mathrm{Tr}(PL^T)}{n}E = 0 \\ -B^T L = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

Условие $\det L = 0$ означает, что максимальный возможный ранг матрицы L равен $n-1$.

В этом случае преобразованием Ad^* мы можем привести L к следующему виду:

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & l \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где E_{n-1} — единичная матрица размера $(n-1)\times(n-1)$, $l \in \mathbb{R}^{n-1}$. В этом случае матрица $PL^T - \frac{\mathrm{Tr}(PL^T)}{n}E$ имеет нули на первых $n-1$ местах последнего столбца. Решением второго уравнения являются матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b^T & 0 \end{pmatrix},$$

где $b \in \mathbb{R}^{n-1}$. Коммутатор $[B, Y]$ имеет нули на первых $n-1$ местах последнего столбца. Используя рассуждения, примененные выше в доказательстве предложения 2, получаем, что первое матричное уравнение системы (3.9) задает систему из $n(n-1)$ независимых линейных уравнений с n^2+n-1 неизвестными, то есть размерность пространства решений данной системы равна $2n-1$.

Теперь можем воспользоваться предложением 1. Получаем, что корню λ уравнения $\mathbf{f}(x+\lambda a) = 0$ соответствует $\frac{1}{2}(\dim \mathrm{Ker}(\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a) - \mathrm{ind}\,\mathfrak{g}) = \frac{1}{2}(2n-1-1) = n-1$ жордановых блоков.

В разложении Жордана–Кронекера пучка $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ имеется один кронкеров блок размера $2n-1$, то есть сумма размеров жордановых блоков равна $\dim \mathfrak{g} - 2n + 1 = 2n^2 - 1 - 2n + 1 = 2n(n-1)$. Это равно нижней грани суммы жордановых блоков в данной ситуации, достигаемой при условии, что все блоки имеют размер 2. Значит, каждому корню $\mathbf{f}(x+\lambda a)$ соответствует $n-1$ жордановых блоков размера 2, то есть, кратность каждого корня равна $n-1$. $\square$

3.4 Случай $n = lk$

3.4.1 Сингулярное множество

Теорема 18. *Множество регулярных элементов алгебр Ли серий $sl(lk) +_{\phi} (\mathbb{R}^{lk})^k$ и $gl(lk) +_{\phi} (\mathbb{R}^{lk})^k$ описывается условием $\det M(x) \neq 0$, где $M(x)$ — матрица, построенная способом, описанным выше (см. начало раздела 3.1.4).*

Доказательство разобьем на несколько предложений.

Предложение 4. *В случае* $sl(lk) +_{\phi} (\mathbb{R}^{lk})^k$ *при* $\det M(x) \neq 0$ *размерность аннулятора элемента* x *минимальна.*

Доказательство. Рассмотрим элемент $x \in \mathfrak{g}^*$ как пару (Y, L), как было описано выше. Сначала применим к нему Ad^*-преобразование, приводящее L к виду $\begin{pmatrix} L' \\ 0 \end{pmatrix}$, где L' — диагональная матрица. Затем подействуем на получившийся элемент $x' = (\tilde{Y}, L') \in \mathfrak{g}^*$, где $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}$ и Y_1 — матрица размера $k \times k$, преобразованием Ad^*_g, где $g = (X, W) \in G$,

$$X = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ X_1 & X_4 \end{pmatrix}, \qquad XYX^{-1} + V = \begin{pmatrix} 0 & Y_2 X_4^{-1} \\ 0 & X_1 Y_2 X_4^{-1} - \lambda E + X_4 Y_4 X_4^{-1} \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

$\mathrm{Tr}\, \lambda E = \mathrm{Tr}\, X_1 Y_2^T X_4^{-1}$, а V задано формулой (3.2). Легко видеть, что выбирая $g = (X, W)$ таким образом, можно Ad^*-преобразованием привести компоненту Y элемента $x = (Y, L) \in \mathfrak{g}^*$ к виду $\begin{pmatrix} 0 & Y_2' \\ 0 & Y_4' \end{pmatrix}$, где $Y_2' = \begin{pmatrix} E_k & 0 \end{pmatrix}$. Из формулы (3.10) видно, что выражение $X_1 Y_2 X_4^{-1} - \lambda E + X_4 Y_4 X_4^{-1}$ задает такое же преобразование, как и $XYX^{-1} + V$, но на меньшем подпространстве размерности $n - k$. Поэтому можно выбрать матрицу X_4 специального вида (как в формуле (3.10), но отличного от вида матрицы X на прошлом шаге лишь размерами матриц $\tilde{X}_1$ и $\tilde{X}_4$) и, повторить этот процесс несколько раз. В результате мы приведем исходный элемент $y = (Y, L)$ к виду

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & E_{k(l-2)} & 0 \\ 0 & 0 & E_k \\ 0 & 0 & Y' \end{pmatrix}, \; L = \begin{pmatrix} L' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

где $Y' \in sl(k)$, а L' — диагональная матрица.

Рассмотрим уравнение $\mathrm{ad}^*_\xi x = 0$, где $\xi = (B, P)$, а $\mathrm{ad}^*_\xi x$ имеет вид (3.4). Условие $B^T L = 0$ с учетом (3.11) означает, что B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ B_{2,1} & \dots & B_{2,l} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{l,1} & \dots & B_{l,l} \end{pmatrix}$$

Условие в левой верхней части (3.4)

$$[B, Y] + PL^T - \frac{\mathrm{Tr}\, PL^T}{n} E = 0, \tag{3.12}$$

в данном случае можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{2,1} & \dots & B_{2,l-1} + B_{2,l}Y' \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & B_{l,1} & \dots & B_{l,l-1} + B_{l,l}Y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_{2,1} & \dots & B_{2,l} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{l,1} & \dots & B_{l,l} \\ Y'B_{l,1} & \dots & Y'B_{l,l} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_1L' - \alpha E & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ & & \ddots & \\ P_lL' & 0 & \dots & -\alpha E \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда сразу видно, что $B_{i,j} = 0$ при $i \leqslant j$ и $P_iL' = B_{i+1,1} = B_{i+2,2} = \dots = B_{l,l-i}$ при $i = 2, \dots, l-1$. Также выполнено $Y'B_{l,1} = P_lL'$, $Y'B_{l,i} = B_{l,i-1}$ для $1 < i < l$, а $B_{l,l-1} = \alpha E$. Кроме того, условия на диагонали $B_{i,i-1} - B_{i+1,i} - \alpha E = 0$ при $2 < i \leqslant l-1$ и $-B_{2,1} + P_1L' - \alpha E = 0$ определяют все оставшиеся переменные через переменную α. Следовательно, размерность пространства решений $\mathrm{ad}^*_\xi x = 0$ равна единице, т.е. минимальна. □

Предложение 5. *Для элемента $x \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{g} = gl(lk) +_\phi (\mathbb{R}^{lk})^k$, при $\det M(x) \neq 0$ размерность аннулятора x минимальна.*

Доказательство. Доказывается аналогично. Случай $gl(n)$ отличается от случая $sl(n)$ лишь тем, что в уравнении (3.12) отсутствует слагаемое $\frac{\mathrm{Tr}\, PL^T}{n}E$. □

Предложение 6. *В случае $sl(lk) +_\phi (\mathbb{R}^{lk})^k$ уравнение $\det M(x) = 0$ задает множество $\mathrm{Sing}_0 \in \mathfrak{g}^*$ сингулярных элементов общего положения.*

Доказательство. Ранг матрицы $M(x)$ должен быть меньше максимального хотя бы на единицу. Применяя рассуждения из доказательства предложения 4, мы можем Ad^*-преобразованием привести $x = (Y, L)$ к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & E_{k(l-2)} & 0 & L' \\ 0 & 0 & E'_k & 0 \\ 0 & 0 & Y' & 0 \end{pmatrix},$$

где $Y' \in sl(k)$, L' — диагональная матрица (которую в случае gl можно считать единичной), а E'_k — матрица ранга $k-1$.

Рассмотрим уравнение в левой верхней части (3.4)

$$[B, Y] + PL^T - \frac{\mathrm{Tr}\, PL^T}{n}E = 0,$$

которое в данном случае можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{2,1} & \dots & B_{2,l-1}E'_k + B_{2,l}Y' \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & B_{l,1} & \dots & B_{l,l-1}E'_k + B_{l,l}Y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_{2,1} & \dots & B_{2,l} \\ \vdots & & \vdots \\ E'_kB_{l,1} & \dots & E'_kB_{l,l} \\ Y'B_{l,1} & \dots & Y'B_{l,l} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_1 - \alpha E & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ & & \ddots & \\ P_l & 0 & \dots & -\alpha E \end{pmatrix} = 0.$$

Здесь, как и в предыдущем случае, выполняются условия $B_{i,j} = 0$ при $i \leqslant j$, но теперь исключается случай $B_{l,l} = 0$, а вместо этого выполняется условие $E'_k B_{l,l} = 0$. Также выполняются условия $P_i = B_{i+1,1} = B_{i+2,2} = \cdots = B_{l-1,l-i+1} = E'_k B_{l,l-i}$ при $i = 2, \ldots, l-1$ и условия $Y'B_{l,1} = P_l$, $Y'B_{l,i} = B_{l,i-1}$ для $1 < i < l$ и $B_{l,l-1}E'_k + B_{l,l}Y' - Y'B_{l,l} = \alpha E$. Условия на диагонали: $B_{i,i-1} - B_{i+1,i} - \alpha E = 0$ при $2 < i \leqslant l-2$, $-B_{21} + P_1 - \alpha E = 0$ и $B_{l-1,l-2} - E'_k B_{l,l-1} = \alpha E$.

Получается система уравнений

$$\begin{cases} P_1 - E'_k B_{l,l-1} = (l-1)\alpha E, \\ E'_k B_{l,l} = 0, \\ B_{l,l-1}E'_k + B_{l,l}Y' - Y'B_{l,l} = \alpha E. \end{cases} \tag{3.13}$$

Матрицу E'_k можно привести к виду $\begin{pmatrix} E_{k-1} & \phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Чтобы не создавать путаницу с индексами, введем для матриц, входящих в систему (3.13), обозначения $P = P_1$, $C = B_{ll}$, $D = B_{l,l-1}$, $Y = Y'$, и каждую из них разобьем на блоки следующим образом: $P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3^T & p_4 \end{pmatrix}$, где P_1 — матрица размера $(k-1) \times (k-1)$, и так далее. Система (3.13) перепишется следующим образом:

$$\begin{cases} P - E'_k D = (l-1)\alpha E, \\ E'_k C = 0, \\ DE'_k + CY - YC = \alpha E. \end{cases} \tag{3.14}$$

В описанных переобозначениях согласно второму уравнению системы (3.14) матрица C полностью определяется через свою компоненту C_3, из третьего уравнения системы выражаются D_1, D_3 и α (при этом матричное уравнение в блоке $\begin{pmatrix} \cdot & * \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ выражается через оставшиеся), а из первого уравнения — P_1, P_3 и p_4. Также из первого уравнения мы получаем уравнение $P_2 = D_2 + d_4\phi$, размерность пространства решений которого составляет k. Прибавив к этому числу размерность C_3, получаем, что размерность пространства решений системы (3.13) (то есть, размерность аннулятора элемента x) равна $2k - 1$, что больше 1 во всех интересующих нас случаях. Таким образом, элемент x сингулярен. $\square$

Предложение 7. *В случае* $gl(n) +_\phi (\mathbb{R}^{lk})^k$ *уравнение* $\det M(x) = 0$ *задает множество*

$\mathrm{Sing}_0 \in \mathfrak{g}^*$ *сингулярных элементов общего положения (см. пункт 3 доказательства теоремы 11).*

Доказательство. Действуя так же, как и в случае $sl(n)$, мы получаем систему, аналогичную (3.13):

$$\begin{cases} P_1 - E'_k B_{l,l-1} = 0, \\ E'_k B_{l,l} = 0, \\ B_{l,l-1} E'_k + B_{l,l} Y' - Y' B_{l,l} = 0, \end{cases}$$

где матрицы Y' и $B_{l,l}$ не обязательно имеют нулевой след. Размерность пространства решений (размерность аннулятора элемента x, удовлетворяющего $\det M(x) = 0$) в данном случае составляет $2k - 2$. □

3.4.2 Неприводимость множества сингулярных элементов и размер кронекерова блока

В этом разделе доказываются две леммы о свойствах многочлена $\det M(y)$ (см. начало раздела 3.1.4). Мы доказываем их для случая $y \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{g} = gl(kl) + (\mathbb{R}^{kl})^k$ (где элемент y рассматривается в обозначениях (2.1)), но рассуждения в случае $sl(kl) + (\mathbb{R}^{kl})^k$ полностью аналогичны (см. замечание в конце этого раздела).

Лемма 19. *Многочлен* $\det M(y)$ *является неприводимым степени* $\frac{kl(l+1)}{2}$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для случая, когда Y — диагональная матрица. Действительно, степень в таком случае та же самая, но если после ограничения на некоторое подпространство в $\mathfrak{g}^*$ многочлен имеет максимально возможную степень и неприводим, то он неприводим и на всем пространстве $\mathfrak{g}^*$. Итак, далее предполагаем, что Y диагональна.

Если многочлен $\det M(y)$ приводим, то у него есть делитель — многочлен f (не пропорциональный $\det M(y)$). Заметим, что многочлен $\det M(y)$ является «квазисимметричным» в следующем смысле: при перестановке столбцов матрицы L, а также при перестановке строк матрицы L и соответствующей перестановке диагональных элементов матрицы Y получится (с точностью до знака) тот же многочлен $\det M(y)$. Поэтому многочлен $\det M(y)$ зависит от всех элементов матрицы L (иначе он был бы нулевым). Из структуры матрицы $M(y)$ видно, что каждый из элементов матрицы L может входить в многочлены $\det M(y)$ не более чем в первой степени. Значит, то же самое верно и для его делителя f. Ясно также, что если многочлен f зависит линейно от одного из элементов матрицы L, то он зависит линейно и от всех элементов матрицы L из той же строки. Иными словами, все элементы из одной строки матрицы L входят лишь в один из множителей f, на которые разлагается многочлен $\det M(y)$. Далее, из квазисимметричности следует, что если все элементы каких-то m строк матрицы L входят в множитель f, то многочлен $\det M(y)$ делится также и на многочлены, полученные из многочлена f заменой этих m строк на другие. Число таких многочленов равно C_{kl}^m. Случай, когда C_{kl}^m больше степени $\frac{kl(l+1)}{2}$ многочлена $\det M(y)$, невозможен. Поскольку случаи $k = 1$ и $l = 1$ уже разобраны ранее (см. [3] и раздел 3.3), остается разобрать лишь следующие варианты: $m = k = l = 2$, $m = 1$, $m = 0$.

В случае $m = k = l = 2$ имеем равенство $C_{kl}^m = \frac{kl(l+1)}{2}$, но поскольку многочлен должен зависеть и от переменных матрицы Y, получаем противоречие.

В случае $m = 1$ получаем, что $\det M(y)$ раскладывается в произведение скобок, каждая из которых зависит от элементов только одной строки матрицы L. Тогда в многочлене $\det M(y)$ присутствуют слагаемые, содержащие произведение всех элементов из одного столбца матрицы L, но это невозможно, так как столбцов в матрице $M(y)$, в которых есть эти элементы, всего l.

Случай $m = 0$ означает, что $\det M(y)$ представляется в виде произведения двух множителей, один из которых содержит все элементы L. Это означает, что существует такой многочлен f от элементов матрицы Y, что из условия $f(Y) = 0$ (при любом выборе матрицы L) следует $\det M(y = (Y, L)) = 0$. Покажем, что такой ситуации не может быть. Для этого достаточно для любого многочлена f указать такую матрицу L, что $\det M(y) \neq 0$ при каких-то Y, удовлетворяющих условию $f(Y) = 0$.

Рассмотрим матрицу L следующего вида: в столбце i в строках $(i-1)l+1, \ldots, (i-1)l+l$ стоят единицы, остальные элементы нулевые. Тогда рассматриваемый многочлен f должен быть произведением k определителей Вандермонда, каждый из которых зависит от своей группы диагональных элементов $y_{il+1}, \ldots, y_{il+l}$ матрицы Y. Равенство нулю этого многочлена эквивалентно равенству двух собственных значений матрицы Y (т.е. двух ее диагональных элементов), причем эти элементы должны быть из одной группы $y_{il+1}, \ldots, y_{il+l}$. Но в случае совпадения таких собственных значений можно изменить матрицу L таким образом, чтобы совпадающие собственные значения входили в разные группы.

Таким образом, для всех возможных случаев неприводимость $\det M(y)$ доказана.

$\square$

Лемма 20. *Многочлен* $\det M(x+\lambda a)$, $x+\lambda a = (Y_x+\lambda Y_a, L_x+\lambda L_a)$, *имеет ровно* $\frac{kl(l+1)}{2}$ *различных корней.*

Доказательство. В качестве матрицы L возьмем матрицу следующего вида: в столбце i в строках $(i-1)l+1,\dots,(i-1)l+l$ стоят различные переменные, остальные элементы нулевые; в качестве Y рассмотрим диагональную матрицу. Получим произведение k определителей Вандермонда, каждый из которых является произведением $C_l^2 = \frac{l(l-1)}{2}$ линейных полиномов, домноженное на произведение всех ненулевых элементов матрицы L (которых всего kl):

$$P(Y,L) = a_1 \cdot \ldots a_{kl} \cdot \prod_{1<t<k} \prod_{(t-1)l\leqslant i<j\leqslant(t-1)l+l} (y_i - y_j).$$

□

Замечание 1. При замене $Y \in gl(n)$ на $Y \in sl(n)$ обе доказанные выше теоремы верны: в лемме 19 конкретное разложение не используется, а в лемме 20 в конкретном разложении y_{kl} можно всюду заменить на $-\sum_{i=1}^{kl-1} y_i$.

3.4.3 Характеристический многочлен и основная теорема

Теорема 21. 1. *Фундаментальным полуинвариантом алгебры Ли* $\mathfrak{g} = sl(kl) +_\phi (\mathbb{R}^{kl})^k$ *является многочлен* $\mathbf{f}_\mathfrak{g}(x) = (\det M(x))^{k-1}$. *Характеристический многочлен пучка общего положения имеет вид* $(\det M(x+\lambda a))^{k-1}$.

2. *Фундаментальным полуинвариантом алгебры Ли* $\mathfrak{g} = gl(kl) +_\phi (\mathbb{R}^{kl})^k$ *является многочлен* $\mathbf{f}_\mathfrak{g}(x) = (\det M(x))^k$. *Характеристический многочлен пучка общего положения имеет вид* $(\det M(x+\lambda a))^k$.

Доказательство. 1. Из неприводимости $\det M$ следует, что все собственные значения имеют одинаковые кратности ([3], Proposition 5). Так как в сингулярном элементе ранг пучка падает на $2k-2$, то каждому собственному значению соответствует $k-1$ жорданов блок ([3], Corollary 6). Число корней $\det M(x+\lambda a) = 0$ равно $\frac{kl(l+1)}{2}$, следовательно, всего имеем $\frac{kl(l+1)(k-1)}{2}$ жордановых блоков. Размер жордановых блоков четный, соответственно, подпространство, отвечающее сумме жордановых блоков, имеет размерность $\alpha \cdot kl(l+1)(k-1)$, где α — натуральное число. В таких обозначениях жордановы блоки имеют размер 2α. Рассмотрим разность размерности алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и этого числа:

$$n^2 + kn - 1 - \alpha \cdot kl(l+1)(k-1) = k^2l^2 + k^2l - 1 - \alpha \cdot kl(l+1)(k-1) = \\ = kl(k(l+1) - \alpha(k(l+1) - l - 1)) - 1. \qquad (3.15)$$

Данная разность должна быть положительной; это происходит только при $\alpha = 1$, что означает, что все жордановы блоки имеют размер 2. Значит, в характеристическом многочлене все корни имеют кратность $k-1$, а в фундаментальном полуинварианте такую кратность имеет, соответственно, компонента $\det M(x)$.

2. В данном случае отсутствует кронекеров блок (индекс равен нулю) и размерность алгебры больше на 1, что делает возможной только ситуацию, в которой каждому собственному значению отвечают $k-2$ блока размера 2 и один блок размера 4. Дальнейшие рассуждения аналогичны случаю $sl(kl) +_{\phi} (\mathbb{R}^{kl})^k$.

$\square$

Лемма 22. *Разложение Жордана–Кронекера пучка $\mathcal{A}_x + \lambda\mathcal{A}_a$ при $x, a \in \mathfrak{g}^*$ общего положения на алгебре Ли $\mathfrak{g} = sl(kl) +_{\phi} (\mathbb{R}^{kl})^k$ содержит один кронекеров блок размера $kl(l+1) - 1$.*

Доказательство. Индекс $\mathfrak{g}$ равен единице, значит, кронекеров блок один. Из предыдущей теоремы мы уже знаем размеры всех жордановых блоков, значит, чтобы узнать размер кронекерова блока, достаточно вычислить разность (3.15) при $\alpha = 1$. $\square$

В процессе доказательства предыдущей теоремы были найдены размеры и количество жордановых блоков для каждого корня характеристического многочлена. Воспользовавшись этой информацией, а также леммой 22, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 23 (Основная о ЖК-инвариантах $sl(kl) +_{\phi} (\mathbb{R}^{kl})^k$ и $gl(kl) +_{\phi} (\mathbb{R}^{kl})^k$)**.**

1. *Разложение Жордана–Кронекера пучка $\mathcal{A}_x + \lambda\mathcal{A}_a$ при $x, a \in \mathfrak{g}^*$ общего положения алгебры Ли $\mathfrak{g} = sl(kl) +_{\phi} (\mathbb{R}^{kl})^k$ содержит один кронекеров блок размера $kl(l+1) - 1$ и $k-1$ жордановых блоков размера 2 для каждого из $\frac{kl(l+1)}{2}$ различных корней характеристического многолчена $(\det M(x + \lambda a))^{k-1}$.*

2. *Разложение Жордана–Кронекера пучка $\mathcal{A}_x + \lambda\mathcal{A}_a$ при $x, a \in \mathfrak{g}^*$ общего положения алгебры Ли $\mathfrak{g} = gl(kl) +_{\phi} (\mathbb{R}^{kl})^k$ содержит $k-1$ жордановых блоков для каждого из $\frac{kl(l+1)}{2}$ различных корней характеристического многочлена $(\det M(x + \lambda a))^k$, причем $k-2$ блока имеют размер 2, а один имеет размер 4.*

Глава 4

Инварианты Жордана–Кронекера борелевских подалгебр Ли $Bso(n)$ и $Bsp(n)$

В данной главе вычислены инварианты Жордана–Кронекера для борелевских подалгебр Ли $Bso(n)$ и $Bsp(2n)$. Этот результат, вместе с результатом [3] для $Bsl(n)$, является полным решением задачи 2 для борелевских подалгебр классических простых алгебр Ли (оставляя пункт *b)* открытым только для исключительных алгебр Ли). В случае $Bsp(n)$ также приведен полный набор полиномиальных функций в биинволюции. Стоит отметить, что возможность построения наборов для $Bsp(n)$ (см. ниже) и для $Bsl(n)$ ([3], см. также [1]) обеспечивается наличием достаточного числа функций, получаемых методом сдвига аргумента в инвариантах и полуинвариантах коприсоединенного представления. Таких сдвигов оказывается недостаточно в случае $Bso(n)$; поэтому вопрос о построении полного набора полиномиальных функций в биинволюции для данной серии остается открытым.

4.1 Случай $Bsp(2n)$

4.1.1 Общие сведения о серии

Группа $SP(2n)$ - группа матриц $2n \times 2n$ из $SL(2n)$, удовлетворяющих равенству $G\Omega G^T\Omega^{-1} = E$, где Ω - кососимметрическая форма стандартного вида. Элементы G

имеют следующий вид:

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, AB^T = BA^T, CD^T = DC^T, AD^T - BC^T = E.$$

Борелевская подгруппа этой группы состоит из автоморфизмов, сохраняющих полуфлаг изотропных подпространств, или полный флаг попарно дополнительных подпространств (легко проверить, что подойдет стандартный флаг). Отсюда следует, что элемент G лежит в борелевской подгруппе, если $C = 0$, A - верхнетреугольная матрица; условия на B и D теперь выглядят так: $AB^T = BA^T, AD^T = E$.

Алгебра Ли такой группы состоит из матриц следующего вида:

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & -X_1^T \end{pmatrix}, X_1 - \text{ верхнетреугольная матрица}, X_2 = X_2^T.$$

Скобка Ли в такой алгебре - стандартный коммутатор матриц. Нетрудно вычислить размерность такой алгебры Ли: $\dim \mathfrak{g} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$.

Будем рассматривать $\mathfrak{g}^*$ как пространство матриц вида

$$\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ 0 & -Y_1^T \end{pmatrix}, Y_1 - \text{ верхнетреугольная матрица}, Y_2 = Y_2^T. \tag{4.1}$$

Тогда отождествление $\mathfrak{g}$ с двойственным к ней пространством выглядит следующим образом:

$$\langle Y | X \rangle = \operatorname{Tr} Y X^T, Y \in \mathfrak{g}^*, X \in \mathfrak{g}.$$

Данное отождествление не является каноническим. Однако если мы расмотрим данную алгебру Ли в ортонормированном базисе относительно скалярного произведения $\langle X_1 | X_2 \rangle = \operatorname{Tr} X_1 X_2^T, X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ (фактически это значит, что все повторяющиеся переменные в описанном матричном представлении элемента алгебры нужно домножить на $\frac{\sqrt{2}}{2}$), то такое отождествление каноническое. Здесь и далее мы будем опускать данные коэффициенты, подразумевая, что сделали замену вида $x' = \sqrt{2}x$ там, где это необходимо. Такая замена не повлияет на решение уравнений, учитывая, что нам интересны не сами решения, а размерности пространств решений.

Действие $\operatorname{Ad}_G^* Y$ выглядит так:

$$\operatorname{Ad}_G^* Y = \pi \begin{pmatrix} (A^{-1})^T Y_1 A^T + (A^{-1})^T Y_2 B^T & (A^{-1})^T Y_2 A^{-1} \\ * & -BY_2 A^{-1} - AY_1^T A^{-1} \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

где π - проекция на $\mathfrak{g}^*$, заключающаяся в подставлении нулей вместо некоторых элементов, а именно, всех в левом нижнем блоке, строго нижнетреугольных в левом верхнем блоке и строго верхнетреугольных в правом нижнем блоке.

Индекс алгебры Ли $Bsp(2n)$ равен 0 для любых натуральных n. Это означает, что у данной алгебры Ли остутствуют инварианты коприсоединенного представления, а значит, и кронекеровы блоки в разложении Жордана–Кронекера пучка $\mathcal{A}_x + \lambda\mathcal{A}_a$ общего положения. Следовательно, среди инвариантов Жордана–Кронекера будут только жордановы индексы и их количество для каждого корня характеристического многочлена.

Полуинварианты коприсоединенного представления были найдены В. В. Трофимовым:

Теорема 24 (В. В. Трофимов, [25])**.** *Пусть Δ_i - главный минор порядка i матрицы Y_2 в элементе Y вида* (4.1)*. Тогда функции Δ_i, $i = 1, \ldots, n$, являются полуинвариантами коприсоединенного представления.*

Каждый из Δ_i можно рассматривать как определитель матрицы квадратичной формы, при этом известно, что такой определитель является неприводимым многочленом.

4.1.2 Характеристический многочлен и ЖК–инварианты

Теорема 25. *Фундаментальным полуинвариантом алгебры Ли $Bsp(2n)$ является многочлен $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x) = \prod_{i=1}^{n} \Delta_i$. Характеристическим многочленом пучка $\mathcal{A}_x + \lambda\mathcal{A}_a$ общего положения для $Bsp(2n)$ является многочлен $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x + \lambda a)$.*

Доказывать будем по частям.

Рассмотрим множество $\mathrm{Sing} = \{y \in \mathfrak{g}^* \mid \dim \mathrm{Ann}\, y > \mathrm{ind}\, \mathfrak{g}\}$. Как было описано ранее, данное множество может быть объединением компонент разной размерности, но в рассматриваемых нами случаях всегда имеется компонента коразмерности один Sing_0 (такая компонента отсутствует только в случае алгебры Ли кронекерова типа). Нетрудно заметить, что в случае, когда фундаментальный полуинвариант имеет вид $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x) = p_1^{l_1}(x) \cdot \ldots \cdot p_m^{l_m}(x)$, многочлен, определяющий Sing_0, является произведением тех же самых неприводимых компонент p_i, взятых с кратностью один: $\mathbf{f}_{\mathrm{Sing}_0}(x) = p_1(x) \cdot \ldots \cdot p_m(x)$. Чтобы понять, что полуинварианты Δ_i (и только они) являются компонентами p_i, докажем следующие утверждения.

Утверждение 26. *Элемент $x \in \mathfrak{g}^*$ регулярен при $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x) \neq 0$.*

Доказательство. Условие $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x) \neq 0$ эквивалентно условию, что главные миноры Δ_i порядка i матрицы Y_2 не равны нулю. Рассмотрим, как действует Ad^* на $\mathfrak{g}^*$ (4.2). При таком действии симметричную матрицу Y_2 с последовательными ненулевыми угловыми минорами можно привести к диагональному виду. Доказать это можно индукцией по размеру матрицы. Случай матрицы 1×1 очевидный, а дальше посмотрим на шаг:

$$\begin{pmatrix} Q & b \\ b^T & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} L^TQL & L^T(Qm+b) \\ m^TQL + b^TL & b^Tm + m^Tb + c \end{pmatrix}.$$

Здесь описано действие верхнетреугольной матрицей $\begin{pmatrix} L & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. На второй диагонали все можно обратить в ноль, отсюда следует утверждение.

Тогда при $A = E$ блочно-диагональное уравнение в левом верхнем блоке (4.2) примет вид $Y_1 + Y_2B$. Выбором матрицы B (в силу ее симметричности и диагональности Y_2) можно добиться того, что все выражение будет равно нулю.

Рассмотрим для такого элемента уравнение $\mathrm{ad}^*_X Y = 0$:

$$\pi \begin{pmatrix} -Y_2X_2^T & X_1^TY_2 + Y_2X_1 \\ 0 & X_2^TY_2 \end{pmatrix} = 0, X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & -X_1^T \end{pmatrix}.$$

Под π понимается проекция, действующая таким же образом, что и в (4.2). Условие $\pi(Y_2X_2^T) = \pi(Y_2X_2) = 0$ при Y_2 диагональной эквивалентно условию $X_2 = 0$. Условие $X_1^TY_2 + Y_2X_1 = 0$ также можно интерпретировать как равенство нулю матрицы X_1, так как слагаемые отличаются друг от друга по сути транспонированием, и одно из слагаемых - верхнетреугольная матрица, а другое - нижнетреугольная с одинаковыми элементами на диагонали.

Из вышесказанного следует, что размерность пространства решений уравнения $\mathrm{ad}^*_X Y = 0$ равна нулю, то есть, размерность аннулятора Y минимальная из возможных. Это означает, что элемент Y регулярен. $\square$

Утверждение 27. *Элемент x сингулярен при $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x) = 0$.*

Доказательство. Многочлен $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x) = \prod_{i=1}^n \Delta_i$ обращается в ноль тогда и только тогда, когда один из множителей Δ_i равен нулю. Следовательно, для доказательства утверждения достаточно проверить два случая: когда равен нулю только определитель матрицы Y_2 (в этом случае матрица диагонализуема), и когда равен нулю любой другой минор (в этом случае матрица диагонализуема только блочно, в разложении присутствует один блок 2×2).

- в первом случае выражение Y_1+Y_2B можно сделать равным нулю лишь частично; правый нижний элемент в нуль обратить не получится. Рассмотрим для такого элемента уравнение $\operatorname{ad}^*_X Y = 0$:

$$\pi \begin{pmatrix} X_1^T Y_1 - Y_1 X_1^T - Y_2 X_2^T & X_1^T Y_2 + Y_2 X_1 \\ * & X_2^T Y_2 + X_1 Y_1 - Y_1 X_1 \end{pmatrix}.$$

  Уравнение в правом верхнем блоке решается аналогично регулярному случаю с тем лишь исключением, что условие на правый нижний элемент X_1 отсутствует. В силу этого $\pi(X_1^T Y - Y_1 X_1^T) = 0$. Уравнение $Y_2 X_2^T = 0$ решается аналогично регулярному случаю с тем же исключением (нет условия на правый нижний элемент матрицы X_2). Размерность пространства решений увеличивается на 2.

- будем считать, что нулю равен предпоследний диагональный минор. Тогда матрица Y_2 имеет диагональный блок $(n-2)\times(n-2)$ и блок 2×2 с элементами только на второй диагонали.

  Рассмотрим выражение $Y_1 + Y_2B$. В правом нижнем блоке произведение Y_2B выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & g \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bg & bh \\ bf & bg \end{pmatrix},$$

  откуда видно, что мы снова можем обратить в нуль все элементы, кроме, например, правого нижнего.

  Теперь рассмотрим $\operatorname{ad}^*_X Y = 0$. Уравнение $X_1^T Y_2 + Y_2 X_1 = 0$ вне правого нижнего блока 2×2 решается так же, как и в регулярном случае, а в блоке выглядит так:

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_1y_2 + x_3y_2 \\ x_3y_2 + x_1y_2 & 2x_2y_2 \end{pmatrix},$$

  откуда видно, что $x_2 = 0$, а x_1 можно выразить через x_3. Тогда X_1 и Y_1 - диагональные матрицы, следовательно, они перестановочны. Остается лишь уравнение $Y_2X_2^T = 0$, в котором решение вне блока аналогично регулярному случаю, а в блоке аналогично уже рассмотренному - правый нижний элемент не имеет никаких условий.

  Из вышесказанного следует, что размерность пространства решений (то есть, аннулятора выбранного элемента Y) увеличивается на 2. Это означает, что в обоих случаях элемент Y принадлежит сингулярному множеству по определению.

$\square$

Доказательство Теоремы 25. В доказанных выше утверждениях найден вид уравнения $\mathbf{f}_{\mathrm{Sing}_0}(x)$, $x \in \mathfrak{g}^*$, задающего сингулярное множество. Строго говоря, найденный многочлен может не совпадать с фундаментальным полуинвариантом, если неприводимые компоненты (в нашем случае Δ_i) входят в полуинвариант с кратностью, отличной от единицы. Но размерность алгебры Ли $Bsp(2n)$ равна $n(n+1)$, что ровно в два раза больше суммы степеней Δ_i. по определению фундаментального полуинварианта, его степень для фробениусовой алгебры Ли равна половине размерности алгебры Ли. Значит, кратность каждой неприводимой компоненты может быть равна только единице. $\square$

Число различных корней характеристического многочлена равно $\frac{n(n+1)}{2}$; все корни имеют кратность 1. Это означает, что сумма размеров жордановых блоков, отвечающих каждому корню характеристического многочлена λ_i, равна двум, то есть, каждому λ_i соответствует ровно один блок размера 2×2.

Теорема 28 (Основная теорема об инвариантах Жордана–Кронекера $Bsp(2n)$)**.** *Алгебры Ли серии $Bsp(2n)$ имеют жорданов тип. Характеристический многочлен $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x + \lambda a) = \prod_{i=1}^{n} \Delta_i(x + \lambda a) = 0$, $x, a \in \mathfrak{g}^*$, имеет $\frac{n(n+1)}{2}$ различных корней; каждому из них соответствует один жорданов индекс 2.*

4.1.3 Полный набор в биинволюции

Как было показано выше, неприводимые компоненты фундаментального полуинварианта имеют кратность один, то есть, полуинвариант совпадает с уравнением, задающим сингулярное множество. Такая ситуация удовлетворяет условиям теоремы 6 в [3]:

Теорема 29 (Bolsinov–Zhang, [3])**.** *Пусть $\mathfrak{g}$ — фробениусова алгебра Ли, и пусть геометрическая степень $\mathrm{Sing} \in \mathfrak{g}^*$ равна половине размерности алгебры Ли. Тогда пучок общего положения $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ не содержит жордановых блоков размера больше 2, все корни характеристического многочлена различны, и коэффициенты характеристического многочлена образуют полный набор функций в би-инволюции.*

Полный набор в биинволюции может быть получен из соображений, используемых в теореме 29, то есть, мы можем взять набор симметрических полиномов от корней характеристического многочлена. Однако полный набор, эквивалентный данному, можно получить более наглядно. Возьмем скобку Ли двух элементов

$$\left[\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} AA_1 - A_1A & AB_1 + BC_1 - A_1B - B_1C \\ 0 & CC_1 - C_1C \end{pmatrix}.$$

Если мы возьмем ненулевыми только элементы B и B_1, то увидим, что они коммутируют. Так как по определению скобка Ли–Пуассона задается матрицей $\mathcal{A}_x = (c_{ij}^k x_k)$, из вышесказанного следует, что в этой матрице имеется правый нижний блок нулей размера $n \times n$, что в точности означает, что в качестве функций в би-инволюции мы можем взять линейные функции от элементов матрицы B. Так как алгебра Ли фробениусова, нам нужно найти $\frac{\dim \mathfrak{g}}{2}$ функций. Именно столько функций мы и нашли, так как размерность B равна половине размерности алгебры.

Стоит отметить, что данный набор был ранее построен А. А. Короткевичем в [18], но рассматривался только как набор в инволюции относительно скобки Ли–Пуассона. Однако вид матрицы $\mathcal{A}_a = (c_{ij}^k a_k)$ такой же, как и $\mathcal{A}_x$ в том смысле, что матрица содержит такой же блок нулей, то есть построенные функции действительно находятся в инволюции относительно обеих пуассоновых структур.

4.2 Случай $Bso(2k)$

4.2.1 Общие сведения о серии

Элементами группы Ли $BSO(n)$ являются матрицы из $SL(n)$, удовлетворяющие равенству $G\Sigma G^T\Sigma^{-1} = E$, где Σ - симметричная форма стандартного вида, и сохраняющие фиксированный полуфлаг изотропных пространств $0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_k$ ($n = 2k$ или $n = 2k+1$).

При $n = 2k$ в качестве такой формы мы выберем следующую:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда элемент G имеет следующий вид:

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & {A^{-1}}^T \end{pmatrix}, \ A \text{ - верхнетреугольная, } BA^T + AB^T = 0.$$

Элементы $X \in Bso(2k)$ и $Y \in Bso(2k)^*$ в матричном виде запишутся так:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & -X_1^* \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ 0 & -Y_1^* \end{pmatrix},$$

где матрицы X_1 и Y_1 верхнетреугольные, X_2 и Y_2 - кососимметричные, а $*$ обозначает классическое транспонирование матрицы, $R^* = R^T$. В данном случае снова рассматривается отождествление $\langle Y|X\rangle = \mathrm{Tr}(YX^T)$; так же, как и в предыдущем случае оно неканоническое, но как и в предыдущем случае, в рамках данной статьи каноничность несущественна (матрица Грама соответствующего скалярного произведения является скалярной матрицей).

$$\mathrm{Ad}_G^* Y = \pi \begin{pmatrix} A^{-1^T} Y_1 A^T + A^{-1^T} Y_2 B^T & (A^{-1})^T Y_2 A^{-1} \\ * & BY_2 A^{-1} - AY_1^T A^{-1} \end{pmatrix},$$

где π - проекция, заключающаяся в подставлении нулей вместо всех элементов в блоке, отмеченном $*$, а также нижнетреугольных элементов в левом верхнем блоке и верхнетреугольных в правом нижнем.

Иногда наряду с вышеописанным представлением (которое будет далее называться стандартным) полезно рассматривать представление, использованное В. В. Трофимовым в [25]. В таком представлении (на примере элемента Y) Y_2 - кососимметричная относительно побочной диагонали, а Y_1^* - матрица, получающаяся из Y_1 транспонированием относительно побочной диагонали; то же самое справедливо и для соответствующих подматриц элемента X. Вся матрица Y в таком представлении кососимметричная относительно побочной диагонали. В таком представлении удобно определять полуинварианты.

Данные представления изоморфны. Изоморфизм задается так:

$$\phi(Y) = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 S \\ 0 & -SY_1^T S \end{pmatrix},$$

где S - матрица единиц на побочной диагонали. Очевидно, что $\phi^2 = \mathrm{Id}$. По ходу статьи, используется стандартное представление; в случае необходимости использовать представление, описанное выше, мы будем использовать отображение ϕ.

Размерность $Bso(4s)$ равна $4s^2$; размерность $Bso(4s+2)$ равна $4s^2+4s+1$. Индекс $Bso(4s)$ равен нулю, что означает, что алгебры Ли данной серии фробениусовы, и задача нахождения инвариантов Жордана–Кронекера сводится к задаче нахождения характеристического многочлена; индекс $Bso(4s+2)$ равен единице.

4.2.2 Полуинварианты $Bso(2k)$

Рассмотрим матрицу $\phi(Y)$, $Y \in Bso(2k)^*$. Функция J_{2i-1} вычисляется следующим образом:

1. Вычеркнем первые $2i-1$ строк и последние $2i-1$ столбцов $\phi(Y)$;
2. к уже вычеркнутым вычеркнем еще одну строку и один столбец с индексом j, $j = 2i, \dots, k$;
3. считаем определитель подматрицы, стоящей на пересечении вычеркнутых строк и столбцов;
4. делаем так для всех возможных j и складываем получившиеся определители.

Аналогичным образом определяются функции J_{2i}.

Рассмотрим также функции Δ_{2i}, которые можно определить как угловые миноры матрицы Y_2S, проходящие через первые $2i$ строк и последние $2i$ столбцов.

Теорема 30 (Трофимов, [25])**.** *Функции Δ_{2i} при $i \leqslant s$, и J_{2i-1} при $i \leqslant s$ являются полуинвариантами коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(2k)$, $k = 2s$ или $k = 2s+1$. Функции J_{2s} являются полуинвариантами коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(4s+2)$.*

Многочлены Δ_{2i} приводимы как определители кососимметричных матриц: $\Delta_{2i} = (P_i)^2$; многочлены P_i в свою очередь неприводимы. Многочлены J_{2i-1}, являющиеся суммами более чем одного минора, неприводимы. Для проверки этого факта достаточно рассмотреть матрицу Y такую, что $\phi(Y)$ имеет следующий вид:

$$\phi(Y) = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2' \\ 0 & -Y_1^t \end{pmatrix},$$

$$
Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & l \\ \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, Y_2' = \begin{pmatrix} p & & & & & & & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 & & \dots & \alpha_2 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & & & & & & & 0 & -\alpha_2 & 0 \\ & & & & & & \iddots & & & \\ & & 0 & \alpha_{2i-2} & 0 & & & & & \\ & & \beta & 0 & -\alpha_{2i-2} & & & & 0 & \\ & & 0 & -\beta & 0 & & & & & \\ & \iddots & & & & & & & & \\ 0 & & & & \dots & & & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}
$$

где t - транспонирование относительно второй диагонали, элемент λ в матрице Y_1 расположен на строке $2i-1$ и столбце $2i$; в матрице Y_2' на диагонали выше побочной расположено $2i-1$ ненулевых элементов.

Функция J_{2i-1} от такого элемента равна $\alpha_2^2 \cdot \alpha_4^2 \cdot \ldots \cdot \alpha_{2i-2} lp + \alpha_1^2 \cdot \alpha_3^2 \cdot \ldots \cdot \alpha_{2i-3} \lambda \beta$. Такой многочлен, очевидно, неприводим.

С другой стороны, если J_{2i-1} состоит из одного слагаемого-определителя, то такая функция приводима и представляет собой произведение $P_i \cdot Q_i$, где Q_i неприводим (как корень из определителя кососимметричной матрицы).

J_{2s} разложим похожим образом: $J_{2s} = P_s \cdot Q_{s+1}$, где множитель Q_{s+1} неприводим. В этом несложно убедиться, если заметить, что J_{2s} по сути своей является определителем матрицы $(2s+1) \times (2s+1)$ с кососимметричной подматрицей размера $2s \times 2s$ и практически произвольными оставшимися строкой и столбцом.

4.2.3 Серия $Bso(4s)$: характеристический многочлен и ЖК–инварианты

Теорема 31. *Фундаментальный полуинвариант коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(4s)$ имеет вид*

$$
\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x) = (P_1)^2 \cdot (P_2)^2 \cdot \ldots \cdot (P_{s-1})^2 \cdot J_1 \cdot \ldots \cdot J_{2s-1}, \quad P_i = \sqrt{\Delta_{2i}}.
$$

Характеристический многочлен пучка общего положения $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ имеет вид $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x + \lambda a)$.

Перед доказательством теоремы следует отметить, что P_s делит J_{2s-1}, соответственно в представлении выше можно заменить J_{2s-1} на $P_s \cdot Q_s$.

Как и в разделе 4.1.2, нам нужно проверить, что нули указанных многочленов действительно задают сингулярное множество. Однако в данном случае сумма степеней многочленов, взятых с кратностью один, меньше половины размерности алгебры, то есть, нам необходимо понять кратность, с которой каждая неприводимая компонента входит в $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x)$. Доказательство теоремы заключается в проверке двух утверждений.

Утверждение 32. *Элемент Y регулярен при $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(Y) \neq 0$.*

Доказательство. Как было указано выше, любой элемент алгебры $Bso(2k)^*$ задается двумя матрицами размера $k \times k$: верхнетреугольной Y_1 и кососимметричной Y_2.

Система уравнений, задающая аннулятор Y, выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} X_1^T Y_2 + Y_2 X_1 = 0; \\ \pi(X_1^T Y_1 - Y_1 X_1^T + Y_2 X_2) = 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

где π - проекция на пространство верхнетреугольных матриц.

В случае $Bso(4s)$ элемент общего положения Ad^* −преобразованием может быть приведен к такому виду: матрица Y_2 имеет вид стандартной кососимметричной, а матрица Y_1 имеет вид *проекции стандартной кососимметричной формы на пространство верхнетреугольных матриц* - то есть, блочно-диагональный вид с блоками вида $\begin{pmatrix} 0 & \beta_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Первое уравнение эквивалентно условию $X_1^T Y_2 = (X_1^T Y_2)^T$. Так как Y_2 блочно-диагональна с блоками 2×2, а X_1 верхнетреугольная, произведение $X_1^T Y_2$ верхнетреугольно, что означает, что все элементы вне блоков на диагонали равны нулю. В блоках же стоят условия $X_{ii}^T \alpha_i \Omega = -\alpha_i \Omega X_{ii}$, где $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Из этого условия следует, что диагональные блоки X_{ii} представляют собой верхнетреугольные матрицы со следом 0.

Рассмотрим второе уравнение (4.3). Заметим, что X_1 и Y_1 имеют блочно-диагональный вид с одинаковыми блоками, поэтому их коммутатор тоже будет блочно-диагональным с теми же блоками. Удобно сначала рассмотреть все элементы вне этих блоков; все они содержатся в слагаемом $Y_2 X_2$; так как Y_2 блочно-диагональна с невырожденными блоками 2×2, то условие $Y_2 X_2 = 0$ вне диагональных блоков по сути означает, что все элементы X_2 вне диагональных равны нулю. Рассмотрим уравнения, возникающие в блоках 2×2.

$$X_{ii}^T \Lambda_i - \Lambda_i X_{ii}^T + \alpha \Omega X_{2,ii} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_i x_{i1} \\ 0 & \beta_i x_{i2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_i x_{i2} & -\beta_i x_{i1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha_i x_{2,i} & 0 \\ 0 & -\alpha_i x_{2,i} \end{pmatrix} = 0. \tag{4.4}$$

Очевидно, равенство выполняется только при $x_{i1} = x_{i2} = x_{2,i} = 0$. Отсюда получаем, что все элементы X равны нулю, значит, размерность пространства решений (иначе говоря, аннулятора Y) равна нулю, то есть, минимальная из возможных. Это означает, что элемент Y регулярен. □

Замечание 2. Данная схема рассмотрения будет использоваться во всех случаях $Bso(n)$: мы будем сводить систему уравнений к некоторой блочно-диагональной, и рассматривать получившиеся блоки. Для «стандартных» блоков 2×2 рассмотрение ограничивается приведенным выше. Более того, условие того, что коммутатор двух матриц X и X' с соответствующими подматрицами блочно-диагонального вида равен нулю, сводится к условиям на соответствующие блоки на диагоналях; элементы с ненулевыми блоками разной «высоты» (то есть, разного расположения на блочной диагонали) коммутируют. Поэтому почти всегда будет удобно свести решение к рассмотрению одного блока, что аналогично рассмотрению случая алгебры Ли меньшей размерности.

Замечание 3. Вид, к которому приводятся элементы, удобен тем, что для элементов такого вида $J-$полуинварианты содержат всего одно ненулевое слагаемое, причем для любого i J_{2i-1} зависит только от одного элемента Y_1 - от β_i. Причем приведение к данному виду никак не использует условия $J_{2i-1} \neq 0$, соответственно, при равенстве нулю одного из J_{2i-1} элемент все еще может быть приведен к описанному блочно-диагональному виду, но соответствующий β_i будет равен нулю.

Утверждение 33. *Элемент Y сингулярен при $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(Y) = 0$. Аннулятор сингулярного элемента общего положения Y, соответствующего равенству нулю одного из $(P_i), i = 1, \ldots, s-1$, является двумерной коммутативной подалгеброй.*

Доказательство. Из замечания 3 следует, что при $J_{2i-1} = 0$ достаточно проверить уравнение (4.4) при $\beta_i = 0$. Очевидно, размерность пространства решений увеличится на 2 за счет неопределенности x_{i1} и x_{i2}.

В случае, если $\Delta_{2s} = 0$, матрицу Y снова можно привести к виду, описанному в утверждении 32 за исключением последних блоков 2×2 в обеих матрицах: $Y_{2,s}$ будет нулевым, а $Y_{1,s}$ - произвольным верхнетреугольным. Очевидно, что вне нижнего диагонального блока 2×2 все условия аналогичны ранее рассмотренным; поэтому, согласно замечанию 2 можно рассмотреть случай $Bso(4)$.

Первое уравнение (4.3) тавтологическое, а второе имеет вид

$$\pi(X_1^T Y_1 - Y_1 X_1^T) = \begin{pmatrix} -x_2 y_2 & x_1 y_2 - x_3 y_2 \\ 0 & x_2 y_2 \end{pmatrix} = 0,$$

размерность пространства решений данного уравнения равна единице, и еще единица получается из отсутствия условий на X_2.

В случае, когда равен нулю один из Δ_{2i}, $i \neq s$, матрицу Y_2 можно привести к блочно-диагональному виду, где все блоки стандартные 2×2 кроме одного блока 4×4, имеющего вид $W = \begin{pmatrix} 0 & \gamma E \\ -\gamma E & 0 \end{pmatrix}$. Система сводится к блочно-диагональной, поэтому в соответствии с Замечанием 2 рассмотрим случай $Bso(8)$.

Выберем такой Y :

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что данный элемент действительно является сингулярным, при этом из определенных полуинвариантов в нуль обращается только Δ_2. Аннулятор данного элемента имеет вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & x_2 & 0 & x_1 \\ x_2 & 0 & -x_1 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Данная подалгебра, очевидно, коммутативна. □

Доказательство теоремы 31. Утверждение 33 означает, что если Y является точкой общего положения множества решений уравнения $P_1 \cdot \ldots \cdot P_{s-1}(x) = 0$, то $\dim \operatorname{Ann} Y - \operatorname{ind} \mathfrak{g} = 2$ и $\operatorname{ind} \operatorname{Ann} Y - \operatorname{ind} \mathfrak{g} = 2$. Можно воспользоваться предложением 1.

В рассматриваемой ситуации каждому корню характеристического многочлена соответствует один жорданов блок. Из предложения 1 следует, что каждому корню $P_i(x + \lambda a) = 0$ соответствует один жорданов блок размера больше 2; складывая суммы степеней P_i, получаем, что количество различных корней, возникающих в данных компонентах, равно $\frac{s(s-1)}{2}$. Корням уравнений $J_{2i-1}(x + \lambda a) = 0$ ($s(s+1)$ различных) могут соответствовать и блоки размера 2. Исходя из этого, можем получить оценку снизу суммы размеров жордановых блоков для всех корней характеристического многочлена: $2 \cdot s(s+1) + 4 \cdot \frac{s(s-1)}{2} = 4s^2$, что равно размерности алгебры Ли, то есть, оценке сверху такой суммы. Следовательно, каждому корню $P_i(x + \lambda a) = 0$, $i = 1, \ldots, s-1$, соответствует один жорданов блок размера 4, то есть, кратность неприводимой компоненты P_i

фундаментального полуинварианта равна двум. Аналогично, корням $J_{2i-1}(x+\lambda a)=0$, $i=1,\ldots,s$, соответствуют жордановы блоки размера 2, следовательно, неприводимые компоненты $J_{2i-1}(x)$ входят в полуинвариант с кратностью один. Таким образом, вид фундаментального инварианта (соответственно, характеристического многочлена) полностью определен. $\square$

В процессе доказательства Теоремы 31 мы фактически нашли число и размеры жордановых блоков для каждого корня характеристического многочлена, то есть, доказали следующую теорему.

Теорема 34 (Основная теорема об инвариантах Жордана–Кронекера $Bso(4s)$)**.** *Алгебры Ли $Bso(4s)$ имеют жорданов тип. Характеристический многочлен $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x+\lambda a)=0$ пучка $\mathcal{A}_x+\lambda\mathcal{A}_a$ общего положения имеет $s(s+1)$ корней кратности 1 и $\frac{s(s-1)}{2}$ корней кратности 2. Каждому корню кратности 1 соответствует один жорданов индекс 2; каждому корню кратности 2 соответствует один жорданов индекс 4.*

4.2.4 Серия $Bso(4s+2)$: кронекеров блок

Алгебры Ли данной серии имеют смешанный тип, то есть, в разложении Жордана–Кронекера пары форм общего положения присутствуют кронекеровы блоки. Так как индекс алгебры равен единице, такой блок единственный.

Лемма 35. *Справедлива оценка кронекерова индекса:*

$$k_1 \leqslant 2s+1.$$

Доказательство. Ad^*-инвариантом данной алгебры Ли является функция $f(x)=\frac{J_{2s}}{\Delta_{2s}}$. Ранее было показано, что $J_{2s}=P_s\cdot Q_{s+1}$, а значит, дробь $\frac{J_{2s}}{\Delta_{2s}}$ можно сократить.

Степень Q_{s+1} как многочлена равна $s+1$, степень P_s равна s. Согласно ([3], Section 6, также см. [10]), в случае рационального инварианта индекс k_i может быть оценен сверху суммой степеней числителя и знаменателя: $k_1\leqslant \deg P_s+\deg Q_{s+1}=2s+1$. $\square$

Лемма 36. *Кронекеров индекс равен $2s+1$.*

Доказательство. Воспользуемся методом сдвига аргумента. Рассмотрим такой элемент

Y_x (записанный в стандартном представлении):

$$Y_{1,x} = \begin{pmatrix} * & * & \dots & \dots & * & y_{11} \\ 0 & * & \dots & \dots & * & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & * & y_{12} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & * & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & * & y_{1s} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & * & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_{2,x} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & y_{21} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & & 0 & 0 & y_{22} \\ & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \alpha_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -\alpha_s & 0 & y_{2s} \\ 0 & -y_{21} & 0 & -y_{22} & & 0 & -y_{2s} & 0 \end{pmatrix}.$$

На месте символов $*$ могут быть любые элементы, такой элемент может быть выбран регулярным (подробнее об этом в следующем разделе). Инвариант $\frac{J_{2s}}{\Delta_{2s}}$ представляет собой частное определителя матрицы, получаемой из $Y_{2,x}$ заменой последней строки на последнюю строку $Y_{1,x}$, и углового минора порядка $2s$ матрицы $Y_{2,x}$. Легко заметить, что он имеет такой вид:

$$\frac{J_{2s}}{\Delta_{2s}} = \sum_{i=1}^{s} \frac{y_{1i}y_{2i}}{\alpha_i}.$$

Рассмотрим его сдвиг на элемент Y_a: $Y_{1,a}$ и $Y_{2,a}$ имеют такой же вид, что и $Y_{1,x}$ и $Y_{2,x}$; $\alpha_{1,a} = \ldots = \alpha_{s,a} = 1, y_{1s,a} = y_{2s,a} = 1$, остальные элементы равны нулю.

Для получения матрицы градиентов сдвигов достаточно взять градиент самой функции, сделать замену $x \to a + \lambda x$ и дифференцировать компоненты в точке $\lambda = 0$.

В полученной матрице размера $3s$ мы будем рассмаривать группы столбцов, соответствующие тройкам $(\mathbf{v}_{\alpha_i}, \mathbf{v}_{y_{1i}}, \mathbf{v}_{y_{2i}})$, где элементу, например, y_{1i} соответствует столбец с первым элементом - частной производной инварианта по $y_{1i,a}$, и так далее. Тройки, соответствующие $i \neq s$, имеют ранг 2 (легко проверить, что $y_{2i}\mathbf{v}_{y_{1i}} - y_{1i}\mathbf{v}_{y_{2i}} = 0$), и, вообще говоря, представляют собой векторы

$$P \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_i \\ \\ (-1)^2\alpha_i^2 \\ \vdots \\ (-1)^2\alpha_i^{2s+1} \end{pmatrix},$$

где $P = y_{1i}$ или $P = y_{2i}$. Из каждой такой тройки мы можем убрать по одному вектор-столбцу, оставив таким образом $2s + 1$ векторов. Теперь для проверки утверждения достаточно доказать, что полученная матрица размера $(2s+1) \times (2s+1)$ невырождена.

Рассмотрим тройку $(\mathbf{v}_{\alpha_s}, \mathbf{v}_{y_{1s}}, \mathbf{v}_{y_{2s}})$. Все элементы данных вектор-столбцов, начиная с четвертого, представляют собой произведение некоторого многочлена на α_s; если $\alpha_s = 0$, получаем

$$(\mathbf{v}_{\alpha_s}, \mathbf{v}_{y_{1s}}, \mathbf{v}_{y_{2s}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y_{2s} & y_{1s} \\ -y_{1s}y_{2s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Такая матрица имеет ненулевой определитель.

Проверим, что $(2s-2)\times(2s-2)$-подматрица координат оставшихся столбцов, начиная с четвертой, невырождена. Столбцы $\mathbf{v}_{\alpha_i}$ представляют собой векторы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & (-1)y_{1i}y_{2i} & (-1)^2 2\alpha_i y_{1i}y_{2i} & \ldots & (-1)^{2s-2}(2s-2)\alpha_i^{2s-3}y_{1i}y_{2i} \end{pmatrix}^T,$$

соответственно, можно вынести $y_{1i}y_{2i}$ за знак определителя. Получаем подматрицу такого вида (нас интересуют вектор-столбцы, начиная с четвертой координаты):

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_1^2 & 2\alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots \\ -3\alpha_1^2 & -\alpha_1^3 & -3\alpha_2^2 & -\alpha_2^3 & \ldots \\ 4\alpha_1^3 & \alpha_1^4 & 4\alpha_2^3 & \alpha_2^4 & \ldots \\ -5\alpha_1^4 & -\alpha_1^5 & -5\alpha_2^4 & -\alpha_2^5 & \ldots \\ & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

Определитель такой матрицы равен $\alpha_1^4 \cdot \ldots \cdot \alpha_{s-1}^4 \cdot \prod\limits_{i\neq j}(\alpha_i - \alpha_j)^4$ и, очевидно, в общей ситуации не равен нулю.

Таким образом мы доказали независимость сдвигов инварианта. Подпространство, натянутое на дифференциалы сдвигов, соответствует правому нижнему нулевому блоку в кронекеровом блоке, поэтому доказанное означает, что размер этого нулевого блока (равный кронекерову индексу) не меньше, чем $2s+1$. □

4.2.5 Серия $Bso(4s+2)$: характеристический многочлен и ЖК–инварианты

Теорема 37. *Фундаментальный полуинвариант коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(4s+2)$ имеет вид*

$$\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x) = (P_1)^2 \cdot (P_2)^2 \cdot \ldots \cdot (P_{s-1})^2 \cdot J_1 \cdot \ldots \cdot J_{2s-1}, \quad P_i = \sqrt{\Delta_{2i}}.$$

Характеристическим многочленом пучка $\mathcal{A}_x + \lambda\mathcal{A}_a$ общего положения является многочлен $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x + \lambda a)$.

Как и выше, разобьем доказательство теоремы на два утверждения.

Утверждение 38. *Элемент Y регулярен при $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(Y) \neq 0$.*

Доказательство. Аналогично утверждению 32.

Если $\Delta_2, \ldots, \Delta_{2s-2}$ не равны нулю, то Ad^*-преобразованием мы можем привести $(2s-2) \times (2s-2)$ подматрицу матрицы Y_2 к стандартному виду.

При $\Delta_{2s} \neq 0$ возможно получить блочно-диагональное представление с s блоками 2×2 и блоком 1×1 в самом низу диагонали, нулевым в кососимметричной матрице и ненулевым в верхнетреугольной.

В соответствии с замечанием 2 рассмотрим блок 1×1 отдельно. В матрице X_1 соответствующий элемент x_{11} будет свободным: в первом уравнении системы (4.3) условие на $x_1 1$ не появляется за счет равенства нулю соответствующего блока в матрице Y_2; во втором уравнении (4.3) при вычислении коммутатора в блоке 1×1 получим условие вида $x_{11}\gamma - \gamma x_{11} = 0$, то есть, условие выполняется при любых x_{11}. Отсюда получаем, что аннулятор элемента общего положения такого вида имеет размерность 1.

При $\Delta_{2s} = 0$ получим похожее блочно-диагональное представление с $s - 1$ блоками 2×2 и блоком 3×3 в самом низу диагонали.

Рассмотрим этот блок отдельно, то есть, рассмотрим случай $Bso(6)$ с $\Delta_2 = 0$. Элемент Y в таком случае можно привести к следующему виду:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \gamma_3 \\ 0 & \gamma_2 & \gamma_4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решая систему уравнений (4.3) для данного элемента, находим аннулятор данного элемента:

$$X_1 = 0, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & x_{21} & 0 \\ -x_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что размерность аннулятора снова равна единице. □

Утверждение 39. *Элемент Y сингулярен при $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(Y) = 0$. Аннулятор сингулярного элемента общего положения Y, соответствующего равенству нулю одного из P_i, $i = 1, \ldots, s-1$, является трехмерной коммутативной подалгеброй.*

Доказательство. 1. Если $J_{2i-1} = 0$, рассуждение полностью повторяет аналогичное из Утверждения 33.

2. Если $\Delta_{2s} \neq 0$, но $\Delta_{2i} = 0$, $i \neq s$, то нахождение аннулятора проводится по аналогии с $Bso(4s)$: матрицу Y_2 можно привести к блочно-диагональному виду с множеством блоков 2×2, одним блоком 4×4, а также одним блоком 1×1, который был рассмотрен в предыдущем Утверждении. То же самое будет, если мы рассмотрим ситуацию, когда $\Delta_{2s} = 0$, но $\Delta_{2s-2} \neq 0$ (при этом какой-то еще $\Delta-$полуинвариант равен нулю). В таком случае «хорошим» видом будет являться вид с множеством 2×2 блоков, одним 4×4 блоком, и одним 3×3 блоком, ситуация в котором разобрана в предыдущем утверждении. Аннулятор будет коммутативной подалгеброй в соответствии с Замечанием 2 и уже доказанной коммутативностью двумерной подалгебры, отвечающей блоку 4×4.

3. Ситуация, когда $\Delta_{2s-2} = \Delta_{2s} = 0$ не сводится ни к одной предыдущей, так как в блочно-диагональном разложении появляется блок размера 5×5.

Рассмотрим последний случай отдельно. Y можно привести к виду (стандартное представление)

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ -a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & -b & 0 & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим такой элемент:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Все полуинварианты, входящие как множители в фундаментальный, кроме Δ_{2s-2}, не равны нулю.

Решая систему уравнений (4.3) для такого элемента, получаем, что аннулятор состоит из элементов вида

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -x_3 \\ 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 & 0 & -x_3 \\ -x_1 & 0 & x_3 & x_2 & 0 \\ 0 & -x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в том, что такие элементы составляют коммутативную подалгебру размерности 3, что не является минимальной размерностью аннулятора в данном случае; следовательно, элемент Y сингулярен. □

Доказательство теоремы 37. Снова воспользуемся предложением 1, откуда получаем, что каждому корню $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x + \lambda a) = 0$ соответствует один жорданов блок (так как размерность аннулятора любого сингулярного элемента общего положения больше индекса алгебры Ли на 2); при этом для решений уравнений $P_i(x+\lambda a) = 0$, $i = 1, \dots, s-1$, жордановы блоки имеют размер, больший 2×2; остальным корням могут соответствовать жордановы блоки размера 2. Сумма жордановых индексов равна $\dim \mathfrak{g} - \sum_{i=1}^{\operatorname{ind} \mathfrak{g}} (2k_i - 1) = 4s^2 + 2s$; несложно проверить, что такая сумма достигается только в случае, если корням $P_i(x + \lambda a) = 0$, $i = 1, \dots, s-1$, соответствуют блоки размера 4×4, а корням $J_{2i-1}(x + \lambda a) = 0$, $i = 1, \dots, s$ - блоки размера 2×2. Значит, неприводимые компоненты P_i входят в фундаментальный инвариант с кратностью 2, а компоненты J_{2i-1} - с кратностью один. Таким образом, вид фундаментального полуинварианта полностью определен. □

Теорема 40 (Основная теорема об инвариантах Жордана–Кронекера $Bso(4s+2)$)**.** *Алгебры Ли $Bso(4s+2)$ имеют смешанный тип. Характеристический многочлен пучка $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ общего положения имеет $s(s+1)$ корней кратности 1 и $\frac{s(s-1)}{2}$ корней кратности 2. Каждому корню кратности 1 соответствует один жорданов блок размера 2, а каждому корню кратности 2 - один жорданов блок размера 4. Также инвариантом Жордана–Кронекера $Bso(4s+2)$ является один кронекеров индекс, равный $2s+1$.*

4.3 Случай $Bso(2k+1)$

4.3.1 Общие сведения о серии

Общая конструкция была описана в разделе 4.2.1. В случае группы $BSO(2k+1)$ форма Σ имеет вид

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E \\ 0 & 1 & 0 \\ E & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где единичные матрицы E имеют размер $k \times k$. Элемент $G \in BSO(2k+1)$ устроен следующим образом:

$$G = \begin{pmatrix} A & -Ae & B \\ 0 & 1 & e^T \\ 0 & 0 & A^{-1^T} \end{pmatrix},$$

A - верхнетреугольная матрица $k \times k$, B - матрица размера $k \times k$ такая, что $BA^T + Aee^TA^T + AB^T = 0$.

Мы снова используем отождествление $\langle Y|X\rangle = \mathrm{Tr}(YX^T)$; $X \in Bso(2k+1)$, $Y \in Bso^*(2k+1)$ имеют одинаковый вид. Например, для Y:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & y & Y_2 \\ 0 & 0 & -y^T \\ 0 & 0 & -Y_1^T \end{pmatrix},$$

где Y_1 и Y_2 - матрицы $k \times k, y$ - вектор длины k.

Коприсоединенное представление Ad^* задается следующим образом:

$$\pi \begin{pmatrix} \begin{matrix} A^{-1^T}Y_1A^T - A^{-1^T}ye^TA^T + \\ +A^{-1^T}Y_2B^T \end{matrix} & A^{-1^T}y + A^{-1^T}Y_2e & A^{-1^T}Y_2A^{-1} \\ * & * & e^TY_2A^{-1} - y^TA^{-1} \\ * & * & BY_2A^{-1} + Aey^TA^{-1} - AY_1^TA^{-1} \end{pmatrix},$$

где π - проекция, заключающаяся в подставлении нулей вместо всех элементов в блоках, отмеченных $*$, а также нижнетреугольных элементов в левом верхнем блоке и верхнетреугольных в правом нижнем.

Так же, как и для случая $Bso(2k)$, полуинварианты проще описать в представлении, используемом В. В. Трофимовым в [25]. Изоморфизм представлений задается следующей формулой:

$$\phi(Y) = \begin{pmatrix} Y_1 & y & Y_2 S \\ 0 & 0 & -y^T S \\ 0 & 0 & -SY_1^T S \end{pmatrix},$$

где S - матрица единиц на побочной диагонали. В таком представлении Y представляет собой верхнетреугольную матрицу, кососимметричную относительно побочной диагонали.

Размерность в случае $Bso(2s+1)$ равна $4s^2+2s$, а в случае $Bso(2s+3)$ – $4s^2+6s+2$. Индекс для алгебр Ли данной серии равен нулю, то есть, алгебры Ли фробениусовы, и для нахождения инвариантов Жордана–Кронекера достаточно найти жордановы индексы и их количество для каждого корня характеристического многочлена.

4.3.2 Полуинварианты $Bso(2k+1)$

В целом конструкция полуинвариантов не отличается от таковой для $Bso(2k)$. Единственное различие появляется в алгоритме получения J-полуинвариантов (для элемента $\phi(Y), Y \in Bso(2k+1)$):

1. Вычеркнем первые $2i-1$ строк и последние $2i-1$ столбцов $\phi(Y)$;
2. к уже вычеркнутым вычеркнем еще одну строку и один столбец с индексом j, $j = 2i, \dots, k+1$;
3. на пересечении вычеркнутых строк и столбцов получилась матрица, считаем ее определитель;
4. делаем так для всех возможных j и складываем получившиеся определители с коэффициентом 1, кроме определителя, соответствующего $j = k+1$ - его добавляем в общую сумму с коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Все рассуждения о независимости и неприводимости, приведенные для полуинвариантов $Bso(2k)$, справедливы и в данном случае.

Теорема 41 (Трофимов,[25])**.** *Функции Δ_{2i} при $i \leqslant s$, и J_{2i-1} при $i \leqslant s$ являются полуинвариантами коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(2k+1)$, $k = 2s$*

или $k = 2s+1$. Функция $J_{2s+1} = \Delta_{2s+2}$ является полуинвариантом коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(4s+3)$.

4.3.3 Серия $Bso(4s+1)$: характеристический многочлен и ЖК–инварианты

Теорема 42. *Фундаментальный полуинвариант коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(4s+1)$ имеет вид*

$$\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x) = (P_1)^2 \cdot (P_2)^2 \cdot \ldots \cdot (P_{s-1})^2 \cdot P_s \cdot J_1 \cdot \ldots \cdot J_{2s-1}, \quad P_i = \sqrt{\Delta_{2i}}.$$

Характеристический многочлен пучка $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ общего положения имеет вид $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x + \lambda a)$.

Доказательство. Если $\Delta_{2s} \neq 0$, то Ad^*-преобразованием можем привести элемент Y к такому виду, чтобы матрица Y_2 имела блочно-диагональный вид с блоками размера 2 (если остальные $\Delta_{2i} \neq 0$), либо с одним блоком размера 4 (если один из Δ_{2i}, $i \neq s$, равен нулю), а вектор-столбец y был нулевым.

Система уравнений на аннулятор имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \pi(X_1^T Y_1 - Y_1 X_1^T + Y_2 X_2 - y x^T) = 0; \\ X_1^T y + Y_2 x = 0; \\ X_1^T Y_2 + Y_2 X_1 = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Очевидно, из условия $y = 0$ и второго уравнения следует, что $x = 0$. После этого оставшиеся уравнения в точности повторяют таковые для случая $Bso(4s)$, соответственно, все рассуждения, описанные выше для характеристического многочлена $Bso(4s)$, верны и для данного случая.

Единственная ситуация, отличающая данный случай от $Bso(4s)$ - ситуация, когда $\Delta_{2s} = 0$. Нужно проверить, что в этом случае ранг падает. В данном случае Ad^*-преобразованием матрицу Y_2 возможно диагонализовать с несколькими блоками 2×2 стандартного вида и одним нулевым блоком 2×2; вектор-столбец y можно сделать нулевым везде, кроме последних двух элементов. Достаточно рассмотреть случай $Bso(5)$, решив систему (4.5) для такого элемента Y:

$$
Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_4 & 0 & 0 \\ 0 & y_3 & y_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y_4 & -y_5 \\ 0 & 0 & 0 & -y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y_2 & -y_3 \end{pmatrix}.
$$

Легко устанавливается, что ранг системы (4.5) равен четырем, размерность аннулятора, следовательно, равна двум. Элемент Y сингулярен.

Аналогично рассмотренным выше случаям, воспользуемся предложением 1, что позволит найти размеры жордановых блоков, а вместе с этим и кратности корней и соответствующих им неприводимых компонент. $\square$

Теорема 43 (Основная теорема об инвариантах Жордана–Кронекера $Bso(4s+1)$)**.** *Алгебры Ли $Bso(4s+1)$ имеют жорданов тип. Характеристический многочлен пучка общего положения имеет $\frac{s(s-1)}{2}$ корней кратности 2 и $s(s+2)$ корней кратности 1. Каждому корню кратности 1 соответствует один жорданов индекс 2, каждому корню кратности 2 соответствует один жорданов индекс 4.*

4.3.4 Серия $Bso(4s+3)$: характеристический многочлен и ЖК–инварианты

Теорема 44. *Фундаментальный полуинвариант коприсоединенного представления алгебры Ли $Bso(4s+3)$ имеет вид*

$$
\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x) = (P_1)^2 \cdot (P_2)^2 \cdot \ldots \cdot (P_s)^2 \cdot P_{s+1} \cdot J_1 \cdot \ldots \cdot J_{2s-1}, \quad P_i = \sqrt{\Delta_{2i}}.
$$

Характеристический многочлен пучка $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ общего положения имеет вид $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x + \lambda a)$.

Для данной серии J_{2s+1} также является полуинвариантом, но (формально) в разложении $\mathbf{f}_{\mathfrak{g}}(x)$ на множители не участвует, так как $\Delta_{2s+2} = J_{2s+1}$.

Доказательство. 1. При $\Delta_{2i} \neq 0$, $i = 1, \ldots, s$, Y_2 приводится к стандартному виду: стандартные кососимметричные блоки размера 2, и один (последний, как в $Bso(4s+2)$) нулевой блок размера 1; у вектор-столбца y первые $2s$ элементов нулевые, а последний произвольный; Y_1 блочно-диагональна с блоками 2×2 вида $\begin{pmatrix} 0 & \beta_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и одним нулевым одномерным.

2. При $\Delta_{2s+2} = 0$ можно сделать почти то же самое, но последний элемент вектора y при таком условии должен быть равен нулю; тогда матрица Y_1 будет иметь уже ненулевой блок размера 1. Ранг в таком случае упадет на 2.

3. Все остальные случаи, когда ранг падает на 2 за счет обращения в нуль $J-$полуинварианта, эквивалентны описанным для предыдущих серий, то есть, в блоке размера 2 (уравнение (4.4)) за счет равенства нулю Λ образуются две свободные переменные.

4. В случае, если равен нулю любой блок Δ_{2i}, кроме Δ_{2s}, задача сводится к известной: все блоки размера 2, блок размера 4, и последний блок размера 1. Ранг падает на 2 за счет блока 4×4, соответствующий аннулятор является коммутативной подалгеброй.

5. Если $\Delta_{2s} = 0$, то ситуация сводится к ситуации с блоком размера 3, однако за счет вектора y (и того, что размерности пространства решений должны быть разные) не получится просто свести все к случаю $Bso(4s+2)$.

Все описанные случаи достаточно рассмотреть для маленькой алгебры Ли $Bso(7)$. Действительно, посмотрим на систему (4.5): если y имеет первые k координат равными нулю, то $X_1^T y$ имеет те же координаты равными нулю, и (если их четное число) эти же k координат равны нулю в векторе x (это следует из уравнения $X_1^T y + Y_2 x = 0$); тогда «добавка» $-yx^T$ в первом уравнении влияет только на последний блок (размера 1 или 3, как описано выше), а вне этого блока это уравнение ничем не отличается от второго уравнения системы (4.3).

Итак, рассмотрим сначала регулярный случай:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Случай отличается от аналогичного $Bso(6)$ наличием векторов x и y и условием на них.

Решая систему (4.5), легко убедиться, что при $y_0 \neq 0$, размерность пространства ее решений равна нулю; если же $y_0 = 0$, то размерность равна двум.

В случае $\Delta_2 = 0$ нам нужно найти аннулятор следующего элемента:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_{11} & 0 & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & y_{12} & y_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{13} & 0 & -y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{11} & -y_{12} & -y_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аннулятор двумерен, базисные элементы такие:

$$X_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$X_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{y_{12}}{2y_{11}}x_{15} & \frac{y_0}{y_2}x_{15} & 0 & 0 & \frac{y_{12}}{2y_2}x_{15} \\ 0 & 0 & x_{15} & -\frac{y_{12}}{y_0}x_{15} & 0 & 0 & -\frac{y_{11}}{y_2}x_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{y_{12}}{2y_2}x_{15} & \frac{y_{11}}{y_2}x_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{y_0}{y_2}x_{15} & \frac{y_{12}}{y_0}x_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y_{12}}{2y_{11}}x_{15} & -x_{15} & 0 \end{pmatrix};$$

два этих базисных элемента коммутативны. Таким образом, все возможные ситуации сингулярных элементов общего положения рассмотрены. Для доказательства теоремы осталось лишь воспользоваться Предложением 1 $\square$

Теорема 45 (Основная теорема об инвариантах Жордана–Кронекера $Bso(4s+3)$)**.** *Алгебры Ли данной серии имеют жорданов тип. Характеристический многочлен пучка* $\mathcal{A}_x + \lambda \mathcal{A}_a$ *общего положения имеет* $(s+1)(s+1)$ *корней кратности 1 и* $\frac{s(s+1)}{2}$ *корней кратности 2. Каждому корню кратности 1 соответствует один жорданов индекс 2, каждому корню кратности 2 соответствует один жорданов индекс 4.*

Глава 5

Наборы в биинволюции для семимерных нильпотентных алгебр Ли

В таблице представлены нильпотентные алгебры Ли из списка M.-P. Gong [14] (всего 119 алгебр и 6 однопараметрических семейств алгебр). Для всех этих алгебр Ли найдены наборы полиномов в биинволюции (последний столбец). Также в третьем столбце указаны инварианты Жордана–Кронекера, а именно размеры жордановых и кронекеровых блоков. Инварианты Жордана–Кронекера для этих алгебр Ли были получены А. Ю. Грозновой в [15].

За x_i в таблице принимаются базисные элементы алгебры Ли, или, что то же самое при отождествлении $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$, координатные функции на $\mathfrak{g}^*$; a_i — координаты элемента $a \in \mathfrak{g}^*$. Если к полиному применяется метод сдвига аргумента для получения полного набора, рядом с ним указано «плюс сдвиг» или «плюс сдвиги» в зависимости от степени полинома (так как наборы имеют степень не больше трех, это либо один полином-сдвиг, либо два). В последнем столбце также отмечен тип построенного набора (линейный, квадратичный, кубический) по максимальной степени полиномов, входящих в него.

Таблица 1: Полные наборы в биинволюции на семимерных нильпотентных алгебрах Ли

Алгебра Ли	Соотношения	ЖК-инварианты	полный биинволютивный набор полиномов
37A	$[x_1, x_2] = x_5$, $[x_2, x_3] = x_6$, $[x_2, x_4] = x_7$	К:1,1,1,1,3	$x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ (линейный)
37B	$[x_1, x_2] = x_5$, $[x_2, x_3] = x_6$, $[x_3, x_4] = x_7$	Ж:2,2; К:1,1,1	x_1, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
37C	$[x_1, x_2] = x_5$, $[x_2, x_3] = x_6$, $[x_2, x_4] = x_7$, $[x_3, x_4] = x_5$	Ж:4; К:1,1,1	x_1, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
37D	$[x_1, x_2] = x_5$, $[x_1, x_3] = x_6$, $[x_2, x_4] = x_7$, $[x_3, x_4] = x_5$	Ж:2,2; К:1,1,1	x_1, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
357A	$[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = x_5$, $[x_1, x_4] = x_7$, $[x_2, x_4] = x_6$	Ж:2,2; К:1,1,1	x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
357B	$[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = x_5$, $[x_1, x_4] = x_7$, $[x_2, x_3] = x_6$	Ж:2,2; К:1,1,1	x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
357C	$[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = x_5$, $[x_1, x_4] = x_7$, $[x_2, x_3] = x_6$, $[x_2, x_4] = x_5$	Ж:2,2; К:1,1,1	x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
27A	$[x_1, x_2] = x_6$, $[x_1, x_4] = x_7$, $[x_3, x_5] = x_7$	Ж:2; К:1,1,3	x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
27B	$[x_1, x_2] = x_6$, $[x_1, x_5] = x_7$, $[x_2, x_3] = x_7$, $[x_3, x_4] = x_6$	К:1,1,5	x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
257A	$[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = x_6$, $[x_1, x_5] = x_7$, $[x_2, x_4] = x_6$	Ж:2; К:1,1,3	x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
257B	$[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = x_6$, $[x_1, x_4] = x_7$, $[x_2, x_5] = x_7$	Ж:2; К:1,1,3	x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)

257C	$[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = x_6$, $[x_2, x_4] = x_6$, $[x_2, x_5] = x_7$	Ж:2,2; К:1,1,1	x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
257D	$[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = x_6$, $[x_1, x_4] = x_7$, $[x_2, x_4] = x_6$, $[x_2, x_5] = x_7$	К:1,1,5	x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
257E	$[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = x_6$, $[x_2, x_4] = x_7$, $[x_4, x_5] = x_6$	Ж:2; К:1,1,3	x_2, x_3, x_5, x_6, x_7 (линейный)
257F	$[x_1, x_2] = x_3$, $[x_2, x_3] = x_6$, $[x_2, x_4] = x_7$, $[x_4, x_5] = x_6$	Ж:2; К:1,1,3	x_1, x_3, x_5, x_6, x_7 (линейный)
257G	$[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = x_6$, $[x_1, x_5] = x_7$, $[x_2, x_4] = x_7$, $[x_4, x_5] = x_6$	К:1,1,5	x_2, x_3, x_5, x_6, x_7 (линейный)
257H	$[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = x_6$, $[x_2, x_4] = x_6$, $[x_4, x_5] = x_7$	К:1,1,5	x_2, x_3, x_5, x_6, x_7 (линейный)
257I	$[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = x_6$, $[x_1, x_4] = x_6$, $[x_1, x_5] = x_7$, $[x_2, x_3] = x_7$	Ж:2; К:1,1,3	x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
257J	$[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = x_6$, $[x_1, x_5] = x_7$, $[x_2, x_3] = x_7$, $[x_2, x_4] = x_6$	К:1,1,5	x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
257K	$[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = x_6$, $[x_2, x_3] = x_7$, $[x_4, x_5] = x_7$	Ж:2; К:1,1,3	$x_1x_7 - x_2x_6 + \frac{x_3^2}{2}$ плюс сдвиг, x_5, x_6, x_7 (квадратичный)
257L	$[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = x_6$, $[x_2, x_3] = x_7$, $[x_2, x_4] = x_6$, $[x_4, x_5] = x_7$	К:1,1,5	$-2x_1x_7 + 2x_2x_6 - x_3^2$ плюс сдвиг,x_5, x_6, x_7 (квадратичный)
247A	$[x_1, x_i] = x_{i+2}$, $i = 2, 3, 4, 5$	К:1,1,1,1,3	$x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ (линейный)

247B	$[x_1, x_i] = x_{i+2}$, $i = 2, 3, 4$, $[x_3, x_5] = x_7$	Ж:2; К:1,1,3	x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
247C	$[x_1, x_i] = x_{i+2}$, $i = 2, 3, 4, 5$, $[x_3, x_5] = x_6$	Ж:2; К:1,1,3	x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
247D	$[x_1, x_i] = x_{i+2}$, $i = 2, 3, 4$, $[x_2, x_5] = x_7$, $[x_3, x_4] = x_7$	Ж:2; К:1,1,3	$x_1x_7 - x_3x_6 + x_4x_5$ плюс сдвиг, x_5, x_6, x_7 (квадратичный)
247E	$[x_1, x_i] = x_{i+2}$, $i = 2, 3, 4$, $[x_1, x_5] = x_6$, $[x_2, x_5] = x_7$, $[x_3, x_4] = x_7$	Ж:2; К:1,1,3	$x_1x_7 - (x_2 + x_3)x_6 + x_4x_5$ плюс сдвиг, $x_5 - x_4, x_6, x_7$ (квадратичный)
247F	$[x_1, x_i] = x_{i+2}$, $i = 2, 3$, $[x_2, x_4] = x_6$, $[x_2, x_5] = x_7$, $[x_3, x_4] = x_7$, $[x_3, x_5] = x_6$	К:1,1,5	x_1, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
247G	$[x_1, x_i] = x_{i+2}$, $i = 2, 3, 4$, $[x_1, x_5] = x_6$, $[x_2, x_4] = x_6$, $[x_2, x_5] = x_7$, $[x_3, x_4] = x_7$, $[x_3, x_5] = x_6$	К:1,1,5	$x_4^2x_6 + x_5^2x_6 + 2x_1x_6^2 - 2x_2x_6^2 - 2x_3x_6^2 - 2x_4x_5x_7 + 2x_2x_6x_7 + 2x_3x_6x_7 - 2x_1x_7^2$ плюс сдвиги, x_6, x_7 (кубический)
247H	$[x_1, x_i] = x_{i+2}$, $i = 2, 3, 4$, $[x_2, x_4] = x_6$, $[x_2, x_5] = x_7$, $[x_3, x_4] = x_7$, $[x_3, x_5] = x_6$	К:1,1,5	$x_5^2x_6 - 2x_4x_5x_7 + x_7(x_4^2 + 2x_1x_6 - 2x_2x_6 + 2x_3x_6 - 2x_1x_7)$ плюс сдвиги, x_6, x_7 (кубический)
247I	$[x_1, x_i] = x_{i+2}$, $i = 2, 3$, $[x_2, x_5] = x_6$, $[x_3, x_4] = x_6$, $[x_3, x_5] = x_7$	К:1,1,5	x_1, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
247J	$[x_1, x_i] = x_{i+2}$, $i = 2, 3$, $[x_1, x_5] = x_6$, $[x_2, x_5] = x_7$, $[x_3, x_4] = x_7$, $[x_3, x_5] = x_6$	К:1,1,5	$x_1x_7 - x_2x_6 + x_4x_5$ плюс сдвиг, x_4, x_6, x_7 (квадратичный)

247K	$[x_1, x_i] = x_{i+2}$, $i = 2, 3, 4$, $[x_2, x_5] = x_7$, $[x_3, x_4] = x_7$, $[x_3, x_5] = x_6$	К:1,1,5	$-\frac{1}{2}x_4^2x_6 + x_2x_6^2 + x_4x_5x_7 + x_7(x_1x_7 - x_3x_6)$плюс сдвиги, x_6, x_7 (кубический)
247L	$[x_1, x_i] = x_{i+2}$, $i = 2, 3, 4, 5$, $[x_2, x_3] = x_6$	Ж:2; К:1,1,3	x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
247M	$[x_1, x_i] = x_{i+2}$, $i = 2, 3, 4$, $[x_2, x_3] = x_6$, $[x_3, x_5] = x_7$	К:1,1,5	x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
247N	$[x_1, x_i] = x_{i+2}$, $i = 2, 3$, $[x_1, x_5] = x_6$, $[x_2, x_3] = x_7$, $[x_2, x_4] = x_6$	Ж:2; К:1,1,3	x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
247O	$[x_1, x_i] = x_{i+2}$, $i = 2, 3, 4$, $[x_1, x_5] = x_7$, $[x_2, x_3] = x_7$, $[x_3, x_5] = x_6$	К:1,1,5	x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
247P	$[x_1, x_i] = x_{i+2}$, $i = 2, 3$, $[x_2, x_3] = x_6$, $[x_2, x_5] = x_7$, $[x_3, x_4] = x_7$	Ж:2; К:1,1,3	x_1, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
247Q	$[x_1, x_i] = x_{i+2}$, $i = 2, 3, 4$, $[x_2, x_3] = x_6$, $[x_2, x_5] = x_7$, $[x_3, x_4] = x_7$	К:1,1,5	$x_1x_7 - x_3x_6 + x_4x_5$плюс сдвиг, x_5, x_6, x_7 (квадратичный)
247R	$[x_1, x_i] = x_{i+2}$, $i = 2, 3, 4$, $[x_1, x_5] = x_6$, $[x_2, x_3] = x_6$, $[x_2, x_5] = x_7$, $[x_3, x_4] = x_7$	К:1,1,5	$-x_2x_6x_7 - x_3x_6x_7 + x_1x_7^2 + x_5(x_6^2 + \frac{1}{2}x_4x_7) + x_4(\frac{1}{2}x_5x_7 - x_6^2)$ плюс сдвиги, x_6, x_7 (кубический)
2457A	$[x_1, x_i] = x_{i+1}$, $i = 2, 3$, $[x_1, x_i] = x_{i+2}$, $i = 4, 5$	К:1,1,1,1,3	$x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ (линейный)
2457B	$[x_1, x_i] = x_{i+1}$, $i = 2, 3$, $[x_1, x_4] = x_7$, $[x_2, x_5] = x_6$	Ж:2; К:1,1,3	x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)

2457C	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,$ $[x_1,x_i]=x_{i+2},\ i=4,5,$ $[x_2,x_5]=x_6$	Ж:2; К:1,1,3	x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
2457D	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,$ $[x_1,x_i]=x_{i+2},\ i=4,5,$ $[x_2,x_3]=x_6,\ [x_2,x_5]=x_6$	Ж:2; К:1,1,3	x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
2457E	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,$ $[x_1,x_4]=x_7,\ [x_2,x_3]=x_6,$ $[x_2,x_5]=x_6$	Ж:2; К:1,1,3	x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
2457F	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,$ $[x_1,x_i]=x_{i+2},\ i=4,5,$ $[x_2,x_3]=x_6$	Ж:2; К:1,1,3	x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
2457G	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,$ $[x_1,x_4]=x_7,\ [x_1,x_5]=x_6,$ $[x_2,x_3]=x_6$	Ж:2; К:1,1,3	x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
2457H	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,$ $[x_1,x_4]=x_7,\ [x_2,x_3]=x_6,$ $[x_2,x_5]=x_7$	Ж:2; К:1,1,3	x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
2457I	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,$ $[x_1,x_4]=x_6,\ [x_2,x_3]=x_6,$ $[x_2,x_5]=x_7$	К:1,1,5	x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
2457J	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,$ $[x_1,x_4]=x_6,$ $[x_2,x_3]=x_6+x_7,$ $[x_2,x_5]=x_7$	К:1,1,5	x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
2457K	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,$ $[x_1,x_4]=x_7,\ [x_1,x_5]=x_6,$ $[x_2,x_3]=x_6,\ [x_2,x_5]=x_7$	К:1,1,5	x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)

2457L	$[x_1, x_i] = x_{i+1},\ i = 2, 3,$ $[x_1, x_4] = x_6,\ [x_1, x_5] = x_7,$ $[x_2, x_3] = x_5,\ [x_2, x_4] = x_7,$ $[x_2, x_5] = x_6$	K:1,1,5	x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
2457M	$[x_1, x_i] = x_{i+1},\ i = 2, 3,$ $[x_1, x_4] = x_7,\ [x_1, x_5] = x_6,$ $[x_2, x_3] = x_5,\ [x_2, x_4] = x_6$	K:1,1,5	x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
2357A	$[x_1, x_2] = x_4,\ [x_1, x_4] = x_5,$ $[x_1, x_5] = x_7,$ $[x_2, x_3] = x_5 + x_6,$ $[x_3, x_4] = -x_7$	K:1,1,5	x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
2357B	$[x_1, x_2] = x_4,\ [x_1, x_3] = x_6,$ $[x_1, x_4] = x_5,\ [x_1, x_5] = x_7,$ $[x_2, x_3] = x_5,\ [x_3, x_4] = -x_7$	K:1,1,5	x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
2357C	$[x_1, x_2] = x_4,\ [x_1, x_4] = x_5,$ $[x_1, x_5] = x_7,\ [x_2, x_3] = x_5,$ $[x_2, x_4] = x_6,\ [x_3, x_4] = -x_7$	K:1,1,5	$x_4x_5 - x_2x_7 - x_3x_6$ плюс сдвиг, x_5, x_6, x_7 (квадратичный)
2357D	$[x_1, x_2] = x_4,\ [x_1, x_3] = x_6,$ $[x_1, x_4] = x_5,\ [x_1, x_5] = x_7,$ $[x_2, x_3] = x_5,\ [x_2, x_4] = x_6,$ $[x_3, x_4] = -x_7$	K:1,1,5	$x_2x_7 + x_3x_6 - x_4x_5$ плюс сдвиг, x_5, x_6, x_7 (квадратичный)
23457A	$[x_1, x_i] = x_{i+1},\ i = 2, 3, 4,$ $[x_1, x_5] = x_6,\ [x_2, x_3] = x_7$	Ж:2; K:1,1,3	x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
23457B	$[x_1, x_i] = x_{i+1},\ i = 2, 3, 4,$ $[x_2, x_3] = x_7,\ [x_2, x_5] = x_6,$ $[x_3, x_4] = -x_6$	K:1,1,5	$2x_1x_6 - x_4^2 + 2x_3x_5$ плюс сдвиг, x_5, x_6, x_7 (квадратичный)
23457C	$[x_1, x_i] = x_{i+1},\ i = 2, 3, 4,$ $[x_1, x_5] = x_6,\ [x_2, x_5] = x_7,$ $[x_3, x_4] = -x_7$	Ж:2; K:1,1,3	$x_1x_7 - x_2x_6 + x_3x_5 - \frac{1}{2}x^2$ плюс сдвиг, $x_5(-a_5x_7 + \frac{1}{2}x_5a_7) + x_4(a_6x_7 - x_6a_7), x_6, x_7$ (квадратичный)

23457D	$[x_1, x_i] = x_{i+1},\ i = 2, 3, 4,$ $[x_1, x_5] = x_6,\ [x_2, x_3] = x_6,$ $[x_2, x_5] = x_7,\ [x_3, x_4] = -x_7$	К:1,1,5	$\frac{1}{2}(x_5^2x_6 - 2x_4x_6^2 + x_4^2x_7 - 2x_3x_5x_7 + 2x_7(x_2x_6 - x_1x_7))$плюс сдвиги, x_6, x_7 (кубический)
23457E	$[x_1, x_i] = x_{i+1},\ i = 2, 3, 4,$ $[x_1, x_5] = x_6,$ $[x_2, x_3] = x_5 + x_7,$ $[x_2, x_4] = x_6$	К:1,1,5	x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
23457F	$[x_1, x_i] = x_{i+1},\ i = 2, 3, 4,$ $[x_2, x_3] = x_5 + x_7,$ $[x_2, x_5] = x_6,\ [x_3, x_4] = -x_6$	К:1,1,5	$x_1x_6 + x_3x_5 - \frac{1}{2}x_4^2$ плюс сдвиг, x_5, x_6, x_7 (квадратичный)
23457G	$[x_1, x_i] = x_{i+1},\ i = 2, 3, 4,$ $[x_1, x_5] = x_6,\ [x_2, x_3] = x_5,$ $[x_2, x_4] = x_6,\ [x_2, x_5] = x_7,$ $[x_3, x_4] = -x_7$	К:1,1,5	$\frac{1}{3}x_5^3 + x_3x_6^2 + x_7(\frac{1}{2}x_4^2 + x_2x_6 - x_1x_7) - x_5(x_4x_6 + x_3x_7)$ плюс сдвиги, x_6, x_7 (кубический)
17	$[x_1, x_2] = x_7,\ [x_3, x_4] = x_7,$ $[x_5, x_6] = x_7$	Ж:2,2,2, К:1	$x_2, x_4, x_5, x_6 + x_3, x_7$ (линейный)
157	$[x_1, x_2] = x_3,\ [x_1, x_3] = x_7,$ $[x_2, x_4] = x_7,\ [x_5, x_6] = x_7$	Ж:2,4, К:1	$x_1 + x_2, x_3 - x_4, x_5, x_7$ (линейный)
147A	$[x_1, x_2] = x_4,\ [x_1, x_3] = x_5,$ $[x_1, x_6] = x_7,\ [x_2, x_5] = x_7,$ $[x_3, x_4] = x_7$	Ж:2,4, К:1	x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
147B	$[x_1, x_2] = x_4,\ [x_1, x_3] = x_5,$ $[x_1, x_4] = x_7,\ [x_2, x_6] = x_7,$ $[x_3, x_5] = x_7$	Ж:2,4, К:1	x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
147D	$[x_1, x_2] = x_4,\ [x_1, x_3] = -x_6,$ $[x_1, x_5] = x_7,\ [x_1, x_6] = x_7,$ $[x_2, x_3] = x_5,\ [x_2, x_6] = x_7,$ $[x_3, x_4] = -2x_7$	Ж:2,4, К:1	x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)

147E	$[x_1, x_2] = x_4$, $[x_1, x_3] = -x_6$, $[x_1, x_5] = -x_7$, $[x_2, x_3] = x_5$, $[x_2, x_6] = \lambda x_7$, $[x_3, x_4] = (1-\lambda)x_7, \lambda \neq 0, 1$	Ж:2,4, К:1	x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
1457A	$[x_1, x_i] = x_{i+1}$, $i = 2, 3$, $[x_1, x_4] = x_7$, $[x_5, x_6] = x_7$	Ж:2, К:1,1,3	x_2, x_3, x_4, x_5, x_7 (линейный)
1457B	$[x_1, x_i] = x_{i+1}$, $i = 2, 3$, $[x_1, x_4] = x_7$, $[x_2, x_3] = x_7$, $[x_5, x_6] = x_7$	Ж:2,4, К:1	x_3, x_4, x_5, x_7 (линейный)
137A	$[x_1, x_2] = x_5$, $[x_1, x_5] = x_7$, $[x_3, x_4] = x_6$, $[x_3, x_6] = x_7$	К:1,3,3	x_2, x_3, x_5, x_6, x_7 (линейный)
137B	$[x_1, x_2] = x_5$, $[x_1, x_5] = x_7$, $[x_2, x_4] = x_7$, $[x_3, x_4] = x_6$, $[x_3, x_6] = x_7$	Ж:6, К:1	x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
137C	$[x_1, x_2] = x_5$, $[x_1, x_4] = x_6$, $[x_1, x_6] = x_7$, $[x_2, x_3] = x_6$, $[x_3, x_5] = -x_7$	К:1,3,3	x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
137D	$[x_1, x_2] = x_5$, $[x_1, x_4] = x_6$, $[x_1, x_6] = x_7$, $[x_2, x_3] = x_6$, $[x_2, x_4] = x_7$, $[x_3, x_5] = -x_7$	Ж:6, К:1	x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
1357A	$[x_1, x_2] = x_4$, $[x_1, x_4] = x_5$, $[x_1, x_5] = x_7$, $[x_2, x_3] = x_5$, $[x_2, x_6] = x_7$, $[x_3, x_4] = -x_7$	Ж:6, К:1	x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
1357B	$[x_1, x_2] = x_4$, $[x_1, x_4] = x_5$, $[x_1, x_5] = x_7$, $[x_2, x_3] = x_5$, $[x_3, x_4] = -x_7$, $[x_3, x_6] = x_7$	К:1,3,3	x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
1357C	$[x_1, x_2] = x_4$, $[x_1, x_4] = x_5$, $[x_1, x_5] = x_7$, $[x_2, x_3] = x_5$, $[x_2, x_4] = x_7$, $[x_3, x_4] = -x_7$, $[x_3, x_6] = x_7$	Ж:6, К:1	x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)

1357D	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_6]=x_7$, $[x_2,x_i]=x_{i+2}$, $i=3,4$, $[x_2,x_5]=x_7$, $[x_3,x_4]=x_7$	Ж:2,4, К:1	x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
1357E	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_2,x_i]=x_{i+2}$, $i=3,4$, $[x_2,x_5]=x_7$, $[x_4,x_6]=x_7$	Ж:2, К:1,1,3	x_1,x_3,x_5,x_6,x_7 (линейный)
1357F	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_3]=x_7$, $[x_2,x_i]=x_{i+2}$, $i=3,4$, $[x_2,x_5]=x_7$, $[x_4,x_6]=-x_7$	Ж:2,4, К:1	x_1,x_5,x_6,x_7 (линейный)
1357G	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_4]=x_6$, $[x_1,x_6]=x_7$, $[x_2,x_3]=x_5$, $[x_2,x_5]=x_7$	К:1,3,3	x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
1357H	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_4]=x_6$, $[x_1,x_6]=x_7$, $[x_2,x_3]=x_5$, $[x_2,x_5]=x_7$, $[x_2,x_6]=x_7$, $[x_3,x_4]=-x_7$	Ж:6, К:1	x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
1357I	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_4]=x_6$, $[x_2,x_3]=x_5$, $[x_2,x_5]=x_7$, $[x_4,x_6]=x_7$	К:1,3,3	x_1,x_3,x_5,x_6,x_7 (линейный)
1357J	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_3]=x_7$, $[x_1,x_4]=x_6$, $[x_2,x_3]=x_5$, $[x_2,x_5]=x_7$, $[x_4,x_6]=x_7$	Ж:6, К:1	x_1,x_5,x_6,x_7 (линейный)
1357L	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_i]=x_{i+2}$, $i=3,4,5$, $[x_2,x_3]=x_7$, $[x_2,x_4]=x_5$, $[x_2,x_6]=\frac{1}{2}x_7$, $[x_3,x_4]=\frac{1}{2}x_7$	Ж:6, К:1	x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
1357M	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_i]=x_{i+2}$, $i=3,4,5$, $[x_2,x_4]=x_5$, $[x_2,x_6]=\lambda x_7$, $[x_3,x_4]=(1-\lambda)x_7$, $\lambda\neq 0$	Ж:6, К:1	x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)

1357N	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_i]=x_{i+2}$, $i=3,4,5$, $[x_2,x_3]=\lambda x_7$, $[x_2,x_4]=x_5$, $[x_3,x_4]=x_7$, $[x_4,x_6]=x_7$	Ж:6, К:1	x_2,x_5,x_6,x_7 (линейный)
1357O	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_3]=x_5$, $[x_1,x_6]=x_7$, $[x_2,x_3]=x_6$, $[x_2,x_4]=x_5$, $[x_2,x_5]=x_7$	К:1,3,3	x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
1357P	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_i]=x_{i+2}$, $i=3,5$, $[x_2,x_3]=x_6$, $[x_2,x_4]=x_5$, $[x_2,x_6]=x_7$, $[x_3,x_4]=x_7$	Ж:6, К:1	x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
1357Q	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_3]=x_5$, $[x_1,x_5]=x_7$, $[x_2,x_3]=x_6$, $[x_2,x_4]=x_6$, $[x_2,x_6]=x_7$	К:1,3,3	x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
1357R	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_3]=x_5$, $[x_1,x_6]=x_7$, $[x_2,x_3]=x_6$, $[x_2,x_4]=x_6$, $[x_2,x_5]=x_7$, $[x_3,x_4]=x_7$	Ж:6, К:1	x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
1357S	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_3]=x_5$, $[x_1,x_5]=x_7$, $[x_1,x_6]=x_7$, $[x_2,x_3]=x_6$, $[x_2,x_4]=x_6$, $[x_2,x_5]=x_7$, $[x_2,x_5]=\lambda x_7$, $[x_3,x_4]=x_7$, $\lambda\neq 1$	Ж:6, К:1	x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
13457A	$[x_1,x_i]=x_{i+1}$, $i=2,3,4$, $[x_1,x_5]=x_7$, $[x_2,x_6]=x_7$	Ж:2, К:1,1,3	x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
13457B	$[x_1,x_i]=x_{i+1}$, $i=2,3,4$, $[x_1,x_5]=x_7$, $[x_2,x_3]=x_7$, $[x_2,x_6]=x_7$	Ж:2, К:1,1,3	x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
13457C	$[x_1,x_i]=x_{i+1}$, $i=2,3,4$, $[x_1,x_6]=x_7$, $[x_2,x_5]=x_7$, $[x_3,x_4]=-x_7$	Ж:2,4, К:1	x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)

13457D	$[x_1, x_i] = x_{i+1},\ i = 2, 3, 4,$ $[x_1, x_5] = x_7,\ [x_2, x_3] = x_5,$ $[x_2, x_4] = x_7,\ [x_2, x_6] = x_7$	К:1,3,3	x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
13457E	$[x_1, x_i] = x_{i+1},\ i = 2, 3, 4,$ $[x_1, x_6] = x_7,\ [x_2, x_3] = x_5,$ $[x_2, x_5] = x_7,\ [x_3, x_4] = -x_7$	Ж:6, К:1	x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
13457F	$[x_1, x_i] = x_{i+1},\ i = 2, 3, 4,$ $[x_1, x_5] = x_7,\ [x_2, x_3] = x_6,$ $[x_2, x_6] = x_7$	К:1,3,3	x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
13457G	$[x_1, x_i] = x_{i+1},\ i = 2, 3, 4,$ $[x_1, x_6] = x_7,\ [x_2, x_3] = x_6,$ $[x_2, x_4] = x_7,\ [x_2, x_5] = x_7,$ $[x_3, x_4] = -x_7$	Ж:6, К:1	x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
13457I	$[x_1, x_i] = x_{i+1},\ i = 2, 3, 4,$ $[x_1, x_5] = x_7,\ [x_2, x_3] = x_6,$ $[x_2, x_5] = x_7,\ [x_2, x_6] = x_7,$ $[x_3, x_4] = -x_7$	Ж:6, К:1	x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
12457A	$[x_1, x_i] = x_{i+1},\ i = 2, 3,$ $[x_1, x_4] = x_6,\ [x_1, x_6] = x_7,$ $[x_2, x_5] = x_6,\ [x_3, x_5] = x_7$	К:1,3,3	x_2, x_3, x_4, x_6, x_7 (линейный)
12457B	$[x_1, x_i] = x_{i+1},\ i = 2, 3,$ $[x_1, x_4] = x_6,\ [x_1, x_6] = x_7,$ $[x_2, x_5] = x_6 + x_7,$ $[x_3, x_5] = x_7$	К:1,3,3	x_2, x_3, x_4, x_6, x_7 (линейный)
12457C	$[x_1, x_i] = x_{i+1},\ i = 2, 3,$ $[x_1, x_4] = x_6,\ [x_2, x_5] = x_6,$ $[x_2, x_6] = x_7,\ [x_3, x_4] = -x_7$	К:1,3,3	$-x_4^2 + 2x_5x_6 + 2x_1x_7$ плюс сдвиг, x_5, x_6, x_7 (квадратичный)
12457D	$[x_1, x_i] = x_{i+1},\ i = 2, 3,$ $[x_1, x_i] = x_{i+2},\ i = 4, 5,$ $[x_2, x_5] = x_6,\ [x_2, x_6] = x_7,$ $[x_3, x_4] = -x_7$	Ж:6, К:1	x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)

12457E	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,$ $[x_1,x_4]=x_6,\ [x_1,x_6]=x_7,$ $[x_2,x_3]=x_6,\ [x_2,x_4]=x_7,$ $[x_2,x_5]=x_6,\ [x_3,x_5]=x_7$	Ж:6, К:1	x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
12457F	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,$ $[x_1,x_4]=x_6,\ [x_2,x_3]=x_6,$ $[x_2,x_i]=x_{i+1},\ i=5,6,$ $[x_3,x_4]=-x_7$	К:1,3,3	$x_1x_7+x_6(x_3-x_5)-\frac{1}{2}x_4^2$ плюс сдвиг, x_5,x_6,x_7 (квадратичный)
12457G	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,$ $[x_1,x_4]=x_6,\ [x_1,x_5]=x_7,$ $[x_2,x_3]=x_6,\ [x_2,x_i]=x_{i+1},$ $i=5,6,\ [x_3,x_4]=-x_7$	Ж:6, К:1	x_3,x_4,x_6,x_7 (линейный)
12457H	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,5,6,$ $[x_2,x_i]=x_{i+2},\ i=3,4,$ $[x_3,x_4]=x_7$	К:1,3,3	$x_4x_5+x_2x_7-x_3x_6$ плюс сдвиг, x_5,x_6,x_7 (квадратичный)
12457I	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,5,6,$ $[x_2,x_i]=x_{i+2},\ i=3,4,$ $[x_2,x_5]=x_7,\ [x_3,x_4]=x_7$	Ж:6, К:1	x_3,x_4,x_6,x_7 (линейный)
12457J	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,5,6,$ $[x_1,x_4]=x_7,\ [x_2,x_i]=x_{i+2},$ $i=3,4,5,\ [x_3,x_4]=x_7$	Ж:6, К:1	x_3,x_4,x_6,x_7 (линейный)
12457K	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,5,6,$ $[x_1,x_4]=x_7,\ [x_2,x_i]=x_{i+2},$ $i=3,4,\ [x_3,x_4]=x_7$	К:1,3,3	$x_2x_7-x_3x_6+x_4x_5$ плюс сдвиг, x_5,x_6,x_7 (квадратичный)
12457L	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,5,6,$ $[x_2,x_i]=x_{i+2},\ i=3,4,$ $[x_2,x_6]=x_7,\ [x_3,x_4]=x_7,$ $[x_3,x_5]=-x_7$	К:1,3,3	$x_7(x_1-x_2)+x_3x_6-$ x_4x_5 плюс сдвиг, $2x_7(x_4+x_5)-x_6^2$, x_6,x_7 (квадратичный)

12457N	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,5,6,$ $[x_1,x_4]=x_7,\ [x_2,x_i]=x_{i+2},$ $i=3,4,\ [x_2,x_5]=\lambda x_7,$ $[x_2,x_6]=x_7,\ [x_3,x_4]=x_7,$ $[x_3,x_5]=-x_7$	Ж:6, К:1	x_3,x_4,x_6,x_7 (линейный)
12357A	$[x_1,x_2]=x_4,\ [x_1,x_i]=x_{i+1},$ $i=4,5,6,\ [x_2,x_3]=x_5,$ $[x_3,x_4]=-x_6,\ [x_3,x_5]=-x_7$	К:1,3,3	x_2,x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
12357B	$[x_1,x_2]=x_4,\ [x_1,x_i]=x_{i+1},$ $i=4,5,6,\ [x_2,x_3]=x_5+x_7,$ $[x_3,x_4]=-x_6,\ [x_3,x_5]=-x_7$	К:1,3,3	$x_2,x_4,x5,x_6,x_7$ (линейный)
12357C	$[x_1,x_2]=x_4,\ [x_1,x_i]=x_{i+1},$ $i=4,5,6,\ [x_2,x_3]=x_5,$ $[x_2,x_4]=x_7,\ [x_3,x_4]=-x_6,$ $[x_3,x_5]=-x_7$	Ж:6, К:1	x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
123457A	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,4,5,6$	К:1,1,1,1,3	x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
123457B	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,4,5,6,$ $[x_2,x_3]=x_7$	Ж:2, К:1,1,3	x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
123457C	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,4,5,6,$ $[x_2,x_5]=x_7,\ [x_3,x_4]=-x_7$	Ж:2,4, К:1	x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
123457D	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,4,5,6,$ $[x_2,x_3]=x_6,\ [x_2,x_4]=x_7$	К:1,3,3	x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
123457E	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,4,5,6,$ $[x_2,x_3]=x_6+x_7,$ $[x_2,x_4]=x_7$	К:1,3,3	x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)
123457F	$[x_1,x_i]=x_{i+1},\ i=2,3,4,5,6,$ $[x_2,x_3]=x_6,\ [x_2,x_4]=x_7,$ $[x_2,x_5]=x_7,\ [x_3,x_4]=-x_7$	Ж:6, К:1	x_4,x_5,x_6,x_7 (линейный)

123457H	$[x_1, x_i] = x_{i+1},\ i = 2, 3, 4, 5, 6,$ $[x_2, x_3] = x_5 + x_7,$ $[x_2, x_4] = x_6,\ [x_2, x_5] = x_7$	К:1,3,3	x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)
123457I	$[x_1, x_i] = x_{i+1},\ i = 2, 3, 4, 5, 6,$ $[x_2, x_3] = x_5,\ [x_2, x_4] = x_6,$ $[x_2, x_5] = \lambda x_7,$ $[x_3, x_4] = (1-\lambda)x_7$	Ж:6, К:1	x_4, x_5, x_6, x_7 (линейный)

Ясно, что набор полиномов в бинволюции для произвольной алгебры Ли строится неоднозначно (если он существует). В таблице приведены примеры таких наборов, что доказывает следующую теорему.

Теорема 46. *Обобщенная гипотеза Мищенко–Фоменко верна для семимерных нильпотентных алгебр Ли.*

Данные таблицы получены с применением пакета символьных вычислений Wolfram Mathematica 12. В большинстве случаев наборы получались изучением устройства матрицы скобок $\mathcal{A}_x$: перестановкой элементов базиса можно было добиться того, что матрица примет вид, в котором выделен правый нижний $n \times n$ блок нулей, где n — количество функций, необходимых для полноты набора. Координатные функции, номера которых задают этот блок, составляют линейный набор в бинволюции, а соответствующие элементы образуют коммутативную подалгебру в алгебре Ли.

В остальных случаях использовался либо метод неопределенных коэффициентов (таким образом находятся квадратичные наборы), либо рассмотрение ядра билинейной формы, иначе говоря, отыскание базиса пространства, натянутого на дифференциалы инвариантов коприсоединенного представления, с целью нахождения самих инвариантов и построения набора методом сдвига аргумента.

Стоит отметить, что в некоторых случаях были построены наборы меньшей степени, чем наборы, получаемые методом сдвига аргумента. Например, у алгебры Ли $23457F$ имеется два инварианта коприсоединенного представления степени 1 (x_6 и x_7) и инвариант степени 3: $-2x_5^3+6x_3x_5x_6-3x_6(x_4^2-2x_1x_6)-3x_5^2x_7$, сдвиги которого дополняют набор инвариантов до полного набора полиномов в бинволюции. Однако для этой алгебры

Ли удалось найти квадратичный набор, используя метод сдвига аргумента на квадратичной функции, которая не является ни инвариантом, ни даже полуинвариантом коприсоединенного представления.

Также интересен случай алгебры Ли $23457C$. В данном случае метод сдвига аргумента не дает полный набор функций в биинволюции, но была найдена подходящая функция, зависящая от элемента a, которую не удалось получить сдвигом какого-либо инварианта или полуинварианта коприсоединенного представления. Это единственный квадратичный полный набор из представленных в таблице, в котором содержатся две квадратичные функции.

Заключение

В работе были получены новые важные сведения об инвариантах Жордана–Кронекера и наборах в биинволюции для различных классов алгебр Ли.

В главе 2 были вычислены инварианты Жордана–Кронекера полупрямых сумм алгебр Ли вида $\mathfrak{g} + (\mathbb{R}^n)^k$, где $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли $so(n)$ или $sp(n)$, для всех значений n и k. Интересно заметить, что в обоих случаях при достаточно большой размерности коммутативного идеала наблюдается похожая картина: алгебры Ли кронекерова типа, кронекеровы индексы принимают значения 1 или 2. Рассмотренные случаи $sp(2n) + (\mathbb{R}^{2n})^k$ имеют только жордановы блоки размера 2, каждый из которых взаимно однозначно соответствует корню характеристического многочлена пучка общего положения. Такая ситуация позволяет построить наборы в биинволюции для данных алгебр Ли (см. [3], также [17]).

В главе 3 вычислены инварианты Жордана–Кронекера для полупрямых сумм алгебр Ли вида $\mathfrak{g} + (\mathbb{R}^n)^k$, где $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли $sl(n)$ или $gl(n)$, для всех значений n и k, кроме случаев, когда $k < n$ и n не кратно k. При возрастании коммутативного идеала наблюдается тот же самый эффект, что и в случаях $so(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ и $sp(2n) + (\mathbb{R}^{2n})^k$, а именно, для больших k алгебры кронекерова типа и кронекеровы индексы равны 1 или 2. Также среди алгебр Ли серии $gl(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ найдены алгебры Ли с жордановыми индексами 4. Случаи подобного типа интересны в рамках вопроса построения наборов в биинволюции (см. ниже).

В главе 4 вычислены инварианты Жордана–Кронекера для борелевских подалгебр $Bso(n)$ и $Bsp(n)$ для всех возможных n. Для алгебр Ли серии $Bsp(n)$ также приведены полные наборы полиномиальных функций в биинволюции. Стоит отметить, что возможность построения наборов для $Bsp(n)$ и для $Bsl(n)$ ([3], см. также [1]) обеспечивается наличием достаточного числа функций, получаемых методом сдвига аргумента в инвариантах и полуинвариантах коприсоединенного представления. Таких сдвигов оказывается недостаточно в случае $Bso(n)$; поэтому вопрос о построении полного набора полиномиальных функций в биинволюции для данной серии остается открытым.

В главе 5 найдены полные наборы полиномиальных функций в биинволюции для семимерных нильпотентных алгебр Ли из списка M.-P. Gong.[14]. В некоторых случаях, где можно было воспользоваться методом сдвига аргумента, были использованы другие методы, позволившие получить наборы с полиномами меньшей степени. Не все функции в полученных наборах оказались инвариантами или полуинвариантами коприсоединенного представления, или их сдвигами; как минимум в одном случае набор только из вышеперечисленных функций найти не удалось.

В качестве направлений дальнейших исследований можно выделить следующие.

1. *Вычисление инвариантов Жордана–Кронекера для остальных классов алгебр Ли, перечисленных в задаче 1.* Логичным продолжением представленного исследования является вычисление инвариантов Жордана–Кронекера для алгебр Ли $gl(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ и $sl(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ при $k < n$ и $k \nmid n$. Также интересным в рамках данной задачи является класс алгебр Ли, являющихся централизаторами сингулярных элементов алгебры Ли $gl(n)$.

2. *Построение полных наборов в биинволюции для рассмотренных в диссертационной работе классов алгебр Ли.* Во многих случаях наборы в биинволюции можно построить известными методами. Однако в рассмотренных сериях возникают интересные примеры, когда этого сделать не удалось.

   Одним из таких примеров является алгебра Ли $gl(4) + (\mathbb{R}^4)^2$. Инвариантами Жордана–Кронекера данной алгебры Ли являются 6 жордановых индексов 4. Данный пример является одним из первых нетривиальных примеров, известных специалистам, где известны инварианты Жордана–Кронекера, но не удалось проверить обобщенную гипотезу Мищенко–Фоменко [7, 8].

   Другим интересным примером, для которого набор в биинволюции получить не удалось, является алгебра $Bso(11)$. Инвариантами Жордана–Кронекера данной алгебры Ли являются 6 жордановых индексов 2 и три жордановых индекса 4. Примечательно, и предыдущий, и данный случаи содержат больше одного блока размера 4.

3. *Решение проблемы реализуемости для алгебр Ли смешанного типа.* Для пучков чисто кронекерова и чисто жорданова типа этот вопрос был исследован И. К. Козловым. В частности, было установлено, что в жордановом случае имеются некото-

рые нетривиальные ограничения на размеры жордановых блоков, а в кронекеровом случае никаких ограничений нет. Для случая смешанного типа имеются лишь отдельные частные результаты, но в целом вопрос не решен.

Литература

[1] Архангельский А. А. Вполне интегрируемые гамильтоновы системы на группе треугольных матриц // Математический сборник — 1979. — Т. 108(150), №1. — С. 134–142.

[2] Болсинов А. В., Борисов А. В. Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли // Математические заметки. — 2002. — Т. 72, № 1. — С. 11–34.

[3] Bolsinov A. V., Zhang P. Jordan-Kronecker invariants of finite-dimensional Lie algebras // Transformation Groups. — 2016. — Vol. 21, no. 1. — P. 51–86.

[4] Болсинов А. В. Интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы на алгебрах Ли // диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, МГУ им. М. В. Ломоносова (1987).

[5] Болсинов А. В., Изосимов А. М., Коняев А. Ю., Ошемков А. А. Алгебра и топология интегрируемых систем. Задачи для исследования // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. — 2012. — Т. 28. — С. 119–191.

[6] Bolsinov A., Izosimov A. Singularities of Bi-Hamiltonian systems // Communications in Mathematical Physics. — 2014. — Vol. 331, no. 2. — P. 507–543.

[7] Bolsinov A., Izosimov A., Tsonev D., Finite-dimensional integrable systems: A collection of research problems, Journal of Geometry and Physics, published online 16 November 2016, http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2016.11.003

[8] Bolsinov A. V., Matveev V. S., Miranda E., Tabachnikov S. Open problems, questions and challenges in finite-dimensional integrable systems // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2018. — Vol. 376, no. 2131. — P. 1–40.

[9] Bolsinov A. V. Complete commutative subalgebras in polynomial Poisson algebras: a proof of the Mischenko–Fomenko conjecture // Theoretical and Applied Mechanics — 2016. — Vol. 43, no. 2. — P. 145–168.

[10] Воронцов А. С., Кронекеровы индексы алгебры Ли и оценка степеней инвариантов // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. — 2011. — Т. 66, № 1. — С. 26–30.

[11] Воронцов А. С., Инварианты алгебр Ли, представимых в виде полупрямой суммы с коммутативным идеалом // Математический сборник. — 2009. — Т. 200, № 8. — С. 45–62.

[12] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука. — 1967.

[13] Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры // Функциональный анализ и его приложения. — 1979. — Т. 13, № 4. — С. 13–30.

[14] Gong M.-P. Classification of Nilpotent Lie Algebras of Dimension 7 (over Algebraically Closed Field and R), UWSpace, University of Waterloo, Ontario, Canada, published online 1998, http://hdl.handle.net/10012/1148

[15] Грознова А. Ю. Вычисление инвариантов Жордана–Кронекера для алгебр Ли малых размерностей, выпускная квалификационная работа, МГУ им. М. В. Ломоносова (2018).

[16] Гусейнов А. Инварианты коприсоединенного представления алгебр Ли $so(n) +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k, sp(n) +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k, gl(n) +_{\phi} (\mathbb{R}^n)^k$, дипломная работа, МГУ им. М. В. Ломоносова (2006).

[17] Izosimov A. M. Generalized argument shift method and complete commutative subalgebras in polynomial Poisson algebras, published online 14 June 2014, arXiv:1406.3777

[18] Короткевич А. А. Интегрируемые гамильтоновы системы на алгебрах Ли малой размерности // Математический сборник. — 2009. — Т. 200, № 12 — С. 3–40.

[19] Magri F. A simple model of the integrable Hamiltonian equation // Journal of Mathematical Physics. — 1978. — Vol. 19, no. 5. — P. 1156–1162.

[20] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Известия АН СССР. — 1978. — Т. 42, № 2. — С. 396–415.

[21] Rais M. L'indice des produits semi-directs $E \underset{\rho}{\times} \mathfrak{G}$ // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Series A. — 1978. — Vol. 287, no. 4. — P. 195–197.

[22] Рейман А. Г., Семенов-Тянь-Шаньский М. А. Интегрируемые системы — Ижевск: Регулярная и Хаотическая Динамика. — 2003.

[23] Rosemann S., Schöbel K. Open problems in the theory of finite-dimensional integrable systems and related fields // Journal of Geometry and Physics. — 2015. — Vol. 87. — P. 396–414.

[24] Thompson R. Pencils of complex and real symmetric and skew matrices // Linear Algebra and its Applications. — 1991. — Vol. 147. — P. 323–371.

[25] Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1979. — Т. 43, № 3. — 714–732.

[26] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. — М.: Факториал — 1995.

Работы автора по теме диссертации в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

[27] Vorushilov K. Jordan–Kronecker invariants for semidirect sums defined by standard representation of orthogonal or symplectic Lie algebras // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2017. — Vol. 38, no. 6. — P. 1121–1130.

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, RSCI WoS, **IF** SJR: 0,378 (2021).

[28] Vorushilov K. S. Jordan–Kronecker invariants of semidirect sums of the form $\mathrm{sl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ and $\mathrm{gl}(n) + (\mathbb{R}^n)^k$ // Journal of Mathematical Sciences — 2021. — Vol. 259, no. 5. — P. 571–582.

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, **IF** SJR: 0,357 (2021).

[29] Ворушилов К. С. Полные наборы полиномов в биинволюции на нильпотентных семимерных алгебрах Ли // Математический сборник. — 2021. — Т. 212, № 9. — С. 3–17.

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, RSCI WoS, **IF** SJR: 0,843 (2021).

[30] Ворушилов К. С. Инварианты Жордана–Кронекера борелевских подалгебр полупростых алгебр Ли // Чебышевский сборник. — 2021. — Т. 22, № 3 — С. 32–56.

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ, **IF** SJR: 0,258 (2021).