Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 514

Воронцов Александр Сергеевич

ИНВАРИАНТЫ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОРБИТ КОПРИСОЕДИНЕННОГО ДЕЙСТВИЯ ГРУПП ЛИ.

01.01.04 – геометрия и топология

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
д.ф.-м.н., акад. Фоменко А.Т.
д.ф.-м.н., проф. Болсинов А.В.

Москва, 2010

Оглавление

Введение

Данная диссертация посвящена описанию орбит и инвариантов коприсоединенного действия групп Ли. Этот вопрос имеет приложение в теории вполне интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем. Орбиты коприсоединенного действия групп Ли являются естественным примером симплектических многообразий. Задание на $2n$-мерной орбите коприсоединенного действия группы Ли набора функций в инволюции, содержащего n независимых функций эквивалентно заданию на этой орбите вполне интегрируемой гамильтоновой системы, в качестве гамильтониана можно взять любую из функций. В частности, многие классические динамические системы можно рассматривать как системы на орбитах коприсоединенного действия групп Ли.

Пусть G — конечномерная группа Ли (комплексная или вещественная), $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $\mathfrak{g}^*$ — пространство, двойственное к алгебре Ли. Определим действие группы на себе сопряжением, $s_g\colon G \to G$, задаваемое формулой

$$s_g(h) = ghg^{-1}.$$

Дифференциал этого действия в единице e группы G определяет действие G на касательном пространстве к группе в этой точке, то есть на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Это действие называется присоединенным и обозначается $\mathrm{Ad}_g(\xi), g \in G, \xi \in \mathfrak{g}$.

Обозначим через Ad^* действие G на пространстве $\mathfrak{g}^*$, двойственное к присоединенному действию на $\mathfrak{g}$, то есть удовлетворяющее условию

$$\langle \mathrm{Ad}^*_g x, \xi \rangle = \langle x, \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}} \xi \rangle, \forall g \in G, x \in \mathfrak{g}^*, \xi \in \mathfrak{g}.$$

Угловые скобки здесь и далее обозначают спаривание элементов из основного и двойственного пространства. Это действие называется коприсоединенным действием алгебры Ли.

Нам понадобятся также соответствующие представления алгебры Ли. Присоединенное действие Ad является отображением $\mathrm{Ad}\colon G \to GL(\mathfrak{g})$. Дифференциал этого отображения в единице группы определяет присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, обозначаемое $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$.

Коприсоединенное представление алгебры Ли совпадает с коммутатором, то есть $\mathrm{ad}_\xi \eta = [\xi, \eta]$. Для того чтобы ввести коприсоединенное представление алгебры Ли можно либо рассмотреть аналогичную конструкцию для Ad^*, либо, что эквивалентно, определить его соотношением

$$\langle \mathrm{ad}^*_\xi x, \eta \rangle = -\langle x, \mathrm{ad}_\xi \eta \rangle.$$

Замечательное свойство орбит коприсоединенного действия состоит в том, что они являются симплектическими многообразиями с канонической симплектической структурой. Для того чтобы ее определить нам понадобится следующее простое утверждение, доказанное, например, в [5].

Утверждение 0.1. *Касательное пространство к орбите коприсоединенного действия группы Ли $\mathfrak{g}$ в точке x состоит из векторов вида $\mathrm{ad}^*_\xi x_0$.*

Тогда для любых двух векторов y и z из касательного пространства к орбите в точке x мы можем выбрать такие $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, что $y = \mathrm{ad}^*_\xi x$, $z = \mathrm{ad}^*_\eta x$. Определим значение формы на векторах y и z формулой

$$\omega(y, z) = \langle x, [\xi, \eta] \rangle.$$

Это определение не зависит от выбора ξ и η, поскольку они определяются с точностью до ζ таких что $\mathrm{ad}^*_\zeta x = 0$, но

$$\langle x, [\xi + \zeta, \eta] \rangle = \langle x, \mathrm{ad}_{\xi+\zeta} \eta \rangle = -\langle \mathrm{ad}^*_{\xi+\zeta} x, \eta \rangle = -\langle \mathrm{ad}^*_\xi x, \eta \rangle = \langle x, [\xi, \eta] \rangle.$$

Замкнутость полученной формы следует из тождества Якоби для коммутатора на $\mathfrak{g}$. Построенная форма называется в разных источниках формой Березина, формой Кириллова и формой Костанта. Мы будем называть ее формой Кириллова.

Можно смотреть на симплектическую структуру на орбитах с другой, в некоторых случаях более продуктивной точки зрения. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}$. На двойственном пространстве к алгебре Ли $\mathfrak{g}^*$ естественным образом вводится скобка Пуассона (ее обычно называют скобкой Пуассона—Ли). Для любых двух функций $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ рассмотрим их дифференциалы в точке x. Они будут линейными функционалами на $\mathfrak{g}^*$, то есть элементами $\mathfrak{g}$. Определим значение скобки Пуассона—Ли функций f и g в точке x формулой

$$\{f, g\}(x) = \langle x, [df_x, dg_x] \rangle,$$

здесь угловые скобки обозначают спаривание элементов из алгебры и коалгебры. Можно записать это определение в координатах используя тензор структурных констант алгебры Ли c^i_{jk}:

$$\{f, g\}(x) = c^i_{jk} x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_k}.$$

Скобка Пуассона–Ли на $\mathfrak{g}^*$, вообще говоря, вырождена. Симплектические листы скобки совпадают с орбитами коприсоединенного действия соответствующей группы Ли G, а форма, обратная скобке Пуассона, ограниченной на симплектические листы совпадает с формой Кириллова, введенной выше.

Естественная симплектическая структура на орбитах коприсоединенного действия группы Ли позволяет рассматривать гамильтоновы системы на этих орбитах. Один из первых примеров такого подхода — работы В.И. Арнольда, рассматривавшего системы на двойственном пространстве к алгебре Ли, обобщающие уравнения Эйлера динамики твердого тела.

А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко ([9], [28]) предложили идею “некоммутативного интегрирования” гамильтоновых систем. Дадим в начале важное определение.

Определение 1. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется интегрируемой, если на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ существует q функционально независимых функций $f_1, \ldots, f_q$ в инволюции относительно скобки Пуассона–Ли, причем $q = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$.*

Рассмотрим гамильтонову систему на симплектическом многообразии M. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{h}$ ее интегралов. Если ее можно включить в некоторую большую (вообще говоря некоммутативную) алгебру Ли $\mathfrak{g}$, такую что $\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g} = \dim M$ мы будем говорить, что система интегрируема в некоммутативном смысле.

А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко доказали важную теорему:

Теорема 0.1 (А.С.Мищенко, А.Т. Фоменко, [8]). *Пусть M — симплекти-*

ческое многообразие, пусть $\mathfrak{g}$ *— алгебра Ли функционально независимых интегралов гамильтоновой динамической системы и выполняется равенство* $\dim\mathfrak{g} + \operatorname{ind}\mathfrak{g} = \dim M$*. Если алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *интегрируема, то существует другая, коммутативная алгебра Ли* $\mathfrak{g}_0$ *функционально независимых интегралов, причем* $2\dim\mathfrak{g}_0 = \dim M$*.*

Таким образом вопрос об эквивалентности понятий некоммутативной интегрируемости и интегрируемости по Лиувиллю сводится к вопросу об интегрируемости алгебр Ли.

А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко сформулировали гипотезу

Гипотеза 1. *Любая алгебра Ли интегрируема в классе полиномов.*

Эта гипотеза известна как гипотеза Мищенко—Фоменко. Сами авторы доказали ее для редуктивных алгебр Ли, позднее ими и другими авторами (подробный обзор приведен в [5]) гипотеза была доказана для других классов алгебр Ли.

Окончательная точка в доказательстве этого утверждения была поставлена С.Т. Садэтовым, доказавшем гипотезу Мищенко—Фоменко для произвольной алгебры Ли (см. [11]), более простое изложение доказательства Садэтова привел А.В. Болсинова в [27]. Ключевым соображением в доказательстве Садэтова является индукция по размерности, которая возможна благодаря следующей лемме:

Лемма 0.1 (см. [27]). *Любая алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *над полем* $\mathbb{K}$ *характеристики 0 удовлетворяет одному из следующих условий:*

1. *$\mathfrak{g}$ имеет коммутативный идеал I, не являющийся одномерным центром алгебры Ли $\mathfrak{g}$;*

2. *$\mathfrak{g}$ имеет идеал $\mathfrak{h}_m$ изоморфный алгебре Гейзенберга, при этом центр $\mathfrak{g}$ совпадает с центром идеала $\mathfrak{h}_m$;*

3. *$\mathfrak{g} = L \oplus \mathbb{K}$, где L — полупроста;*

4. *$\mathfrak{g}$ полупроста.*

В первых двух случаях Садэтов приводит конструкции, позволяющие свести построение полного коммутативного набора полиномов для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ к построению полного коммутативного набора полиномов для некоторой алгебры меньшей размерности.

Первый случай содержит важный класс алгебр Ли, а именно алгебры Ли, представимые в виде полупрямой суммы с коммутативным идеалом. Rawnsley ([3]), а позднее Baguis ([4]) рассматривали топологию орбит коприсоединенного действия групп Ли, алгебра которых имеет вид полупрямой суммы. Оказывается, что в этом случае топологию орбит также можно описать, сводя ее к описанию орбит в некоторой меньшей алгебре Ли.

Аналогичную редукцию можно провести для всех алгебр Ли, удовлетворяющих условию (1) леммы 1. Конструкцию можно также распространить на алгебры Ли, удовлетворяющие условию (2) леммы 1.

Случай (3) леммы 1 естественным образом сводится к случаю полупростой алгебры, а для полупростой алгебры Ли коммутативный набор строится с помощью конструкции, предложенной А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко, называемой методом сдвига аргумента

Теорема 0.2 (А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко, [8]). *Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли. Пусть f_i — инварианты коприсоединенного действия. Возьмем произвольный элемент $a \in \mathfrak{g}^*$. Для каждого инварианта f_i рассмотрим разложение функции $f(x+\lambda a)$ в ряд по степеням параметра λ:*

$$f_i(x+\lambda a) = \sum_j \lambda^j g_{ij}(x).$$

Все функции g_{ij} находятся в инволюции относительно скобки Пуассона—Ли.

Таким образом метод сдвига аргумента позволяет строить наборы функций в инволюции на $\mathfrak{g}^*$. Возникает естественный вопрос, в каком случае получаемый набор будет полным, то есть будет содержать $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$ независимых функций.

Окончательный ответ на этот вопрос для комплексного случая был получен А.В. Болсиновым ([17]):

Теорема 0.3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная конечномерная комплексная алгебра Ли, $S = \{y \in \mathfrak{g}^* | \dim \operatorname{Ann}(y) > \operatorname{ind} \mathfrak{g}\}$ — множество сингулярных элементов в $\mathfrak{g}$, a — регулярный элемент, то есть $a \notin S$. Инволютивное семейство, полученное сдвигом инвариантов на элемент a полно на $\mathfrak{g}^*$ тогда и только тогда, когда* $\operatorname{codim} S \geq 2$.

Доказательство критерия Болсинова использует другой взгляд на метод сдвига аргумента. Это взгляд связан с понятием бигамильтоновых систем. Пусть на M заданы две скобки Пуассона $\{,\}_1$ и $\{,\}_2$. Скобки Пуассона называются согласованными, если любая их линейная комбинация $\lambda\{,\}_1 + \mu\{,\}_2$ также является скобкой Пуассона.

Иногда согласованные скобки называют пуассоновыми или гамильтоновыми парами. Обозначим пару согласованных скобок Пуассона $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и рассмотрим пучок скобок $J = \lambda\mathcal{A} + \mu\mathcal{B}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Для фиксированной точки $x \in M$ скобка Пуассона является кососимметрической 2-формой. Обозначим через $r = \max_{x \in M, C \in J} \operatorname{rk} C(x)$. Будем называть скобку из пучка J регулярной, если ее ранг равен r почти всюду на M. Пара согласованных скобок Пуассона позволяет построить коммутативный набор функций благодаря следующему утверждению:

Теорема 0.4. *Пусть f, g — функции, лежащие в ядрах регулярных скобок Пуассона в пучке J (функции Казимира этих скобок). Тогда они находятся в инволюции относительно всех скобок Пуассона в пучке J.*

Это значит, что объединение функций Казимира всех регулярных скобок пучка образует коммутативное семейство функций на M.

Семейство, получаемое сдвигом инварианта на вектор $a \in \mathfrak{g}^*$ может быть получено как семейство, отвечающее паре согласованных скобок Пуассона: введенной ранее скобке Пуассона–Ли и скобке "с замороженным аргументов" $\{,\}_a$, определяемой для данного a равенством

$$\{f, g\}(x) = \langle a, [df_x, dg_x] \rangle. \tag{1}$$

Оказалось, что бигамильтонов подход к изучению динамических систем на двойственном пространстве к алгебре Ли дает новый взгляд на некоторые алгебраические свойства алгебр Ли.

Изложим содержание работы более подробно.

В первой главе в начале излагаются результаты Rawnsley и Baguis о структуре орбит коприсоединенного действия групп Ли, которые затем обобщаются на случай, когда коммутативный идеал не выделяется в качестве полупрямого слагаемого.

Основной подход состоит в следующем: рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}$, содержащую идеал I и соответствующую группу Ли G. Вложение $I \subset \mathfrak{g}$ определяет естественную проекцию $p\colon \mathfrak{g}^* \to I^*$. Поскольку I является идеалом, действие, индуцируемое на I^* коприсоединенным действием группы является фактически действием группы Ли G/I. Обозначим это действие Φ, а его дифференциал — ϕ. Проекция p превращает орбиты коприсоединенного действия группы Ли G в расслоения над орбитами этого действия. Мы доказываем следующие теоремы, описывающие структуру этих расслоений.

Теорема 0.5. *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ содержит коммутативный идеал I. Тогда орбита элемента x при коприсоединенном действия соответствующей группы Ли является локально тривиальным расслоением. База расслоения — орбита $O_\Phi(p(x)) \subset I^*$ элемента $p(x)$ при действии Φ, а слой над точкой a является прямым произведением орбиты коприсоединенного действия в $\mathrm{Ann}(a)^*$ и линейного пространства V, причем* $\dim V = \dim O_I$.

Теорема 0.6. *Пусть G — группа Ли, такая что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ содержит $(2n+1)$-мерный идеал $\mathfrak{h}$, изоморфный алгебре Гейзенберга. Тогда существует подалгебра $\mathfrak{k}$, такая что $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{k}$ и $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k} = z(\mathfrak{h})$, а орбита* *коприсоединенного действия группы G представляет собой расслоение над базой R^{2n}, слоем которого является орбита коприсоединенного действия элемента $\pi(x)$ в $\mathfrak{k}^*$, где π — проекция на второе слагаемое в разложении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{k}$.*

Доказанные теоремы дают простую геометрическую интерпретацию коммутативного набора полиномов, построенного с помощью метода Садэтова. Слоение Лиувилля, задаваемое полными коммутативными наборами полиномов, построенными по Садэтову согласовано со структурой расслоения, описанной в теоремах 0.5 и 0.6, при этом слои имеют вид $\mathbb{R}^k \times K$, где K — слои, получаемые из аналогичного набора для меньшей алгебры Ли. Таким образом слоение определяется набором полиномов для полупростой алгебры Ли, которые строятся методом сдвига аргумента.

В связи с этим приобретают интерес другие способы построения полных наборов полиномов, задающих более интересную динамику на орбитах коприсоединенного действия. Одним из возможных способов построения является метод цепочек подалгебр. В случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ представляет собой полупрямую сумму алгебры Ли $\mathfrak{r}$ с коммутативным идеалом V: $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} +_\phi V$, естественное вложение $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ позволяет воспользоваться этим методом. Мы приводим кратко описание метода цепочек подалгебр и доказываем критерий, показывающий когда его применение для полупрямой суммы дает полный набор функций.

Во второй главе рассматриваются алгебры Ли вида полупрямой суммы классической алгебры Ли с коммутативным идеалом. Алгебры Ли такого вида возникают в прикладных задачах, например, алгебра Ли $e_3 = so(3) + \mathbb{R}^3$ является естественным пространством для описания динамики трехмерного твердого тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести. Алгебра Ли $so(n) + \mathbb{R}^n$ соответствует n-мерному обобщению этой задачи.

Для алгебр Ли вида $so(n) +_\rho \mathbb{R}^n$, $sl(n) +_\rho \mathbb{R}^n$ и $sp(n) +_\rho \mathbb{R}^{2n}$ в явном виде выписаны инварианты и описана топология орбит коприсоединенного действия для таких алгебр Ли.

Явный вид инвариантов позволяет применить метод сдвига аргумента и получить конкретные полные коммутативные наборы, соответствующие некоторым интегрируемым системам на двойственном пространстве к алгебре Ли.

Третья глава диссертации посвящена исследованию бигамильтоновой структуры на алгебрах Ли. Опираясь на теорему Кронекера—Жордана о каноническом виде пучка кососимметрических форм мы изучаем пучок, порождаемый скобкой Пуассона—Ли и скобкой с замороженным аргументом (1).

Такой подход позволяет получить элементарное доказательство критерия Болсинова (см. Теорема 0.3), теоремы Костанта и теоремы Винберга

Теорема 0.7 (Костант). *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— полупростая алгебра Ли. Пусть* f_i *— канонические инварианты коприсоединенного представления. Тогда градиенты* df_i *независимы во всех регулярных точках* $\mathfrak{g}^*$.

Теорема 0.8 (Э.Б.Винберг). *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— конечномерная алгебра Ли,* $a \in \mathfrak{g}^*$ *— произвольный элемент. Тогда* $\operatorname{ind} \operatorname{Ann}(a) \geq \operatorname{ind} \mathfrak{g}$.

Также с помощью приведения пучка скобок к каноническому виду вводится понятие кронекеровых индексов алгебры Ли, которые обобщают понятие показателей для полупростой алгебры Ли. При этом вычисление кронекеровых индексов сводится к задачам линейной алгебры.

Мы доказываем новую оценку снизу на степени полиномиальных инвариантов алгебры Ли в терминах кронекеровых индексов:

Теорема 0.9. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— алгебра Ли,* $f_1, \ldots, f_s$ $(s = \operatorname{rk} \mathfrak{g})$ *— набор алгебраически независимых полиномиальных инвариантов коприсоединенного представления и* $\deg f_1 \leq \deg f_2 \leq \ldots$. *Пусть* $r_1 \leq r_2 \leq \ldots$ *— кронекеровы индексы алгебры Ли* $\mathfrak{g}$. *Тогда* $\deg f_i \geq r_i$.

Автор глубоко признателен своему научному руководителю, академику А.Т. Фоменко, за внимание к работе, а также А.В. Болсинову за множество полезных замечаний и предложенных идей.

Глава 1

Орбиты коприсоединенного действия для полупрямой суммы

Этот параграф посвящен описанию орбит коприсоединенного действия групп Ли, алгебра которых представима в виде полупрямой суммы. Орбиты групп такого вида подробно рассматривались в работах Rawnsley [3], P. Baguis [4]. Мы приведем их результаты, которые затем будут обобщены.

Пусть $G = R \times_{\Phi} V$ полупрямое произведение группы Ли R и коммутативной группы V, которую мы будем отождествлять с векторным пространством. Элементы группы G мы будем обозначать парой (g, u), $g \in R$, $u \in V$. Для R будем использовать мультипликативные обозначения, для V — аддитивные. Произведение элементов в алгебре задается формулой

$$(g, u) \circ (h, v) = (gh, u + \Phi(g)v).$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$, соответствующая группе Ли G имеет вид полупрямой суммы $\mathfrak{r} +_{\varphi} V$. Здесь $\mathfrak{r}$ — алгебра Ли группы Ли R, а φ — дифференциал отображения

Φ. Присоединенное действие G на $\mathfrak{g}$ задается формулой

$$\mathrm{Ad}_{(g,u)}(\xi, v) = (\mathrm{Ad}_g \xi, \Phi(g)v - \Phi(g)\phi(\xi)\Phi(g^{-1})u),$$

где ϕ — дифференциал действия Φ. Двойственное пространство к $\mathfrak{g}$ естественным образом отождествляется с $\mathfrak{r}^* + V^*$. Тогда для коприсоединенного действия имеем

$$\mathrm{Ad}^*_{(g,u)}(x, a) = (\mathrm{Ad}^*_g x + A_g(a, u), \Phi^*(g)a).$$

Здесь $A_g(a, u)\colon V \times V^* \to \mathfrak{r}^*$ обозначает билинейное отображение, определяемое условием $\langle A_g(a, u), \xi\rangle = \langle \Phi^*(g)a, \phi(\xi)u\rangle$. Для того, чтобы описать вид орбит коприсоединенного представления нам понадобятся некоторые свойства отображения A.

Замечание 1.1.

$$A_g(a, v) = A_e(\Phi^*(g)a, v),$$

где e — единица группы.

Далее мы будем изучать образ отображения $A_g(a, v)$ при фиксированном a. Предыдущее замечание показывает, что этот вопрос сводится к описанию образа отображения $A_e(a_0, v)$. Обозначим для краткости $A(a, v) = A_e(a, v)$.

Лемма 1.1. *Образ отображения $A(a_0, v)$ при фиксированном a_0 совпадает с ортогональным дополнением к аннулятору элемента a_0 в смысле представления ϕ^*.*

Доказательство. Проверим включение

$$\mathrm{Im}\, A(a_0, v) \subseteq (\mathrm{Ann}\, a_0)^{\perp}.$$

Пусть $\xi \in \operatorname{Ann} a_0$. Тогда

$$\langle \xi, A(a_0, v) \rangle = \langle -\phi^*(\xi) a_0, v \rangle = 0.$$

Для того, чтобы показать, что образ оператора $A(a_0, v)$ в точности совпадает с ортогональным дополнением к аннулятору найдем размерность образа. Сумма размерностей $\dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Ker} A$ равна $\dim V$. В ядре оператора A лежат такие элементы $u \in V$, что для любого $\xi \in \mathfrak{g}$ выполняется

$$\langle u, \phi^*(\xi) a_0 \rangle = 0.$$

$\phi^*(\xi) a_0$ при $\xi \in \mathfrak{g}$ заметает в точности касательное пространство к орбите элемента a_0 при действии Φ^*, а значит ядром A является ортогональное дополнение к этому пространству и $\dim KerA = codim\, O(a_0)$, но коразмерность орбиты действия Φ равна размерности аннулятора. Отсюда размерность образа $A(a_0, v)$ совпадает с размерностью орбиты элемента a_0 при действии Φ^*:

$$\dim ImA = \dim V - \dim \operatorname{Ker} A = \dim V - codim\, O(a_0) = \dim O(a_0).$$

Для того, чтобы доказать утверждение леммы осталось записать утверждение о сумме размерностей ядра и образа для представления Φ^*:

$$\dim \mathfrak{g} = \dim Im\Phi^* + \dim Ker\Phi^* = \dim O(a_0) + \dim Ann(a_0).$$

Из последнего равенства следует, что размерность орбиты $\dim O(a_0)$ (а значит и размерность образа оператора $A(u, v)$) равна коразмерности аннулятора элемента a_0, то есть совпадает с размерностью его ортогонального дополнения.

Включение $A(a_0, v) \subseteq Ann_\phi(a_0)^\perp$ и равенство размерностей этих пространств доказывает лемму. □

Замечание 1.2. *Доказанная лемма уже позволяет нам описать орбиты элементов вида* $(0, a)$*. Ответом будет множество вида* (x, b)*, где* b *принадлежит орбите элемента* a *при действии* Φ^**, а* $x \in Annb^{\perp}$*. Это утверждение легко получается из леммы 1.1 и того факта, что для элемента* $x \in (Annb)^{\perp}$ *элемент* $\mathrm{Ad}^*_g x \in (Ann\Phi^*(g)b)^{\perp}$.

Rawnsley рассматривает расслоение p над орбитой действия Φ^* в V^*, слоем $p^{-1}(a)$ которого является орбита коприсоединенного действия группы $Ann_{\phi}(a)$ и доказывает (предложение 3.1 в [4]), что имеет место биекция между расслоениями такого вида и орбитами коприсоединенного действия в $\mathfrak{g}^*$.

Для того, чтобы упростить дальнейшее обобщение результатов мы опишем немного другую конструкцию. Рассмотрим проекцию $\pi\colon \mathfrak{g}^* \to V^*$. Эта проекция превращает орбиту коприсоединенного действия элемента $x \in \mathfrak{g}$ в локально тривиальное расслоение, базой которого является орбита $\pi(a) \in V^*$ при действии Φ^*. Чтобы задать локальную тривиализацию в окрестности точки a достаточно выбрать в группе G в окрестности единицы подмногообразие Q, трансверсальное $St(a)$. Отображение $g \to \mathrm{Ad}^*_g(a), g \in Q$ задает изоморфизм Q с некоторой окрестностью точки a, Это подмногообразие изоморфно окрестности точки a. Этот изоморфизм продолжается до локальной тривиализации.

Перейдем теперь к описанию слоя этого расслоения. Зафиксируем точку $a_0 \in V^*$. Рассмотрим стабилизатор действия Φ^*. Слоем $\pi^{-1}(a)$ будет орбита точки (x, a_0) при действии этого стабилизатора. Вложение $Ann_{\phi}(a_0) \subset \mathfrak{r}$ определяет отображение $p\colon \mathfrak{r}^* \to Ann_{\phi}(a_0)^*$.

Лемма 1.1 показывает, что $p \circ \mathrm{Ad}_u^* = p$ для всех $u \in V$. Это означает, что проекция p орбиты коприсоединенного действия элемента совпадает с орбитой коприсоединенного действия $Ann_{\phi^*}(a)$ на $Ann_{\phi^*}(a)^*$. Таким образом слой $p^{-1}(a)$ в свою очередь является расслоением, базой которого является орбита коприсоединенного действия $Ann_\phi(a)$, а слоем — $Ann_\phi(a)^\perp$, линейное пространство, размерность которого равна размерности орбиты Φ.

Таким образом получаем теорему, описывающую структуру орбит. Приводимая формулировка несколько отличается от формулировки теоремы у Baguis, это сделано для того, чтобы упростить дальнейшее обобщение результата.

Теорема 1.1 (Rawnsley). *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ — полупрямая сумма алгебры Ли $\mathfrak{r}$ с коммутативным идеалом V по представлению ϕ. Тогда орбита коприсоединенного действия является расслоением E_V, база которого — орбита O_Φ действия Φ^* на V, а слой $p^{-1}(a)$ является расслоением E_a. База расслоения E_a — орбита коприсоединенного действия $Ann_\phi(a)$ в $Ann_\phi(a)^*$, а слой является n-мерным векторным пространством, где $n = \dim O_\Phi$. Слой расслоения E_a вложен в $\mathfrak{g}^*$ как $Ann_\phi(a)^\perp$.*

Замечание 1.3. *Из теоремы 1.1 легко получить теорему Раиса об индексе полупрямой суммы.*

Индексом представления ϕ мы будем называть коразмерность орбиты общего положения для действия группы, соответствующего этому представлению.

Теорема 1.2 (Rais, [21]). *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ — полупрямая сумма алгебры Ли $\mathfrak{r}$ с коммутативным идеалом V по представлению ϕ. Тогда ин-*

декс алгебры $\mathfrak{g}$ *равен сумме* $\operatorname{ind}\phi^* + \operatorname{ind} Ann_\phi(a)$*, где* ϕ^* *— представление, двойственное к* ϕ*, а* a *— регулярный элемент в* V^* *в смысле действия* ϕ^* *(то есть орбита* a *имеет максимально возможную размерность).*

Доказательство. Рассмотрим орбиту общего положения. Ее размерность равна

$$\dim O_\Phi + \dim O_{Ann_\phi(a)} + \dim \underset{\phi}{\mathrm{Ann}}(a)^\perp.$$

Поскольку $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathrm{Ann}_\phi(a)^* + \dim \mathrm{Ann}_\phi(a) \perp$ мы получаем для индекса $\mathfrak{g}$ выражение $\operatorname{ind}\mathfrak{g} = \operatorname{ind}\phi^* + \operatorname{ind}\mathrm{Ann}_\phi(a)$. □

Отметим еще один важный частный случай. Если проекция $p(x,a)$ элемента $(x,a) \in \mathfrak{r}^* + V^*$ на $Ann_\phi(a)^*$ такова, что орбита $p(x,a)$ тривиальна, то орбита элемента (x,a) диффеоморфна кокасательному расслоению к орбите элемента a при действии Φ.

1.1 Симплектическая структура

Теорема 1.3. *Пусть алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *представима в виде полупрямой суммы алгебры* $\mathfrak{r}$ *с коммутативным идеалом* V *по представлению* Φ*. Тогда орбита элемента* $(0,a) \in \mathfrak{r}^* + V^*$ *симплектоморфна кокасательному расслоению к орбите элемента* a *при действии* Φ^**.*

Доказательство. Симплектоморфизм легко предъявляется явно. Кокасательное пространство к орбите $O(a) \subset V^*$ в точке a можно отождествить с факторпространством $V/T_a(O(a))^\perp$. Поскольку ядро отображения $A(.,a)$ равно $T_a(O(a))^\perp$ (см. доказательство леммы 1.1) это отображение корректно определено на кокасательном пространстве к орбите. Рассмотрим отображение $t\colon T^*O(*a) \to \mathfrak{g}^*$ переводящее $(q,p) \to (A(q,p),q) \in \mathfrak{r}^* + V^*$. Проверим, что построенное отображение является симлектоморфизмом. Образом вектора dp при таком отображении будет $(A(dp,x),0) = \mathrm{ad}^*_{(0,dp)}(A(q,p),q)$, образом вектора dq — $(A(dq,p),dq) = \mathrm{ad}^*_{(\xi,\phi(\xi)p)}(A(q,p),q)$, где $\phi^*(\xi)q = dq$. Последнее равенство проверяется непосредственно:

$$\langle \mathrm{ad}^*_{(\xi,\phi(\xi)p)}(A(q,p),q),(\eta,u)\rangle = \langle (A(q,p),q),[(\xi,\phi(\xi)p),(\eta,u)]\rangle =$$
$$\langle (A(q,p),q),([\xi,\eta],\phi(\xi)u-\phi(\eta)\phi(\xi)p\rangle = \langle A(p,q),[\xi,\eta]\rangle+\langle q,\phi\xi u-\phi(\eta)\phi(\xi)p\rangle. \tag{1.1}$$

Пользуясь определением $A(q,p)$ получаем

$$\langle A(p,q),[\xi,\eta]\rangle+\langle q,\phi(\xi)u-\phi(\eta)\phi(\xi)p\rangle = \langle q,\phi([\xi,\eta])p\rangle+\langle q,\phi(\xi)u-\phi(\eta)\phi(\xi)p\rangle =$$
$$\langle q,\phi(\xi)\phi(\eta)p\rangle + \langle q,\phi(\xi)u\rangle = \langle dq,\phi(\eta)p\rangle + \langle dq,u\rangle = \langle (A(dq,p),dq\rangle,(\eta,u)). \tag{1.2}$$

Из полученного представления получаем, что

$$\omega(dp_1,dp_2) = \langle (A(q,p),q),[(0,p_1),(0,p_2)]\rangle = 0,$$
$$\omega(dq_1,dq_2) = \langle (A(q,p),q),[(\xi_1,\phi(\xi_1)p)),(\xi_2,\phi(\xi_2)p)]\rangle =$$
$$= \langle (A(q,p),q),([\xi_1,\xi_2],\phi(\xi_2)\phi(\xi_1)p - \phi(\xi_1)\phi(\xi_2)p)\rangle = 0,$$
$$\omega(dp,dq) = \langle (A(q,p),q),[(0,dp),(\xi,\phi(\xi)p)]\rangle = \langle (A(q,p),q),(0,\phi(\xi)dp)\rangle = \langle dq,dp\rangle.$$

Таким образом, подняв форму Кириллова с орбиты коприсоединенного действия на кокасательное расслоение к орбите действия Φ с помощью отображения t^* мы получаем каноническую симплектическую структуру. $\square$

Можно обобщить предыдущую теорему следующим образом:

Теорема 1.4 ([4], Proposition 5.1)**.** *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ представима в виде полупрямой суммы алгебры $\mathfrak{r}$ с коммутативным идеалом V по представлению Φ. Обозначим через y проекцию элемента (x, a) на $Ann_\phi(a)^*$. Если орбита коприсоединенного действия элемента $O(y) \subset Ann_\phi(a)$ тривиальна, то орбита элемента (x, a) симплектоморфна кокасательному расслоению к орбите элемента a при действии Φ^* с "подкрученной" симплектической структурой $\omega = \omega_0 + \pi^*\omega_1$, где ω_0 — каноническая симплектическая структура кокасательного расслоения, а ω_1 — некоторая замкнутая (возможно вырожденная) 2-форма на орбите элемента a в V^*.*

Доказательство. В рассматриваемом случае орбита является расслоением над орбитой действия Φ^* в V^*. Рассмотрим произвольное сечение этого расслоения $l(q)$. Тогда можно построить отображение $t\colon T^*O \to \mathfrak{g}^*$ в орбиту коприсоединенного действия группы $\mathfrak{g}$ определяемое равенством

$$t(p, q) = (l(q) + A(q, p), q).$$

Далее можно повторить выкладки, приведенные в доказательстве предыдущего утверждения. Единственное изменение состоит в том, что

$$\omega(dq_1, dq_2) = \langle l(q), [\xi_1, \xi_2] \rangle.$$

Форма ω_1 зависит от выбора $l(q)$, но ее когомологический класс определен однозначно, поскольку замена сечения с $l(q)$ на $l(q) + l_1(q)$ приводит к замене формы с ω_1 на $\omega_1 + dl_1$ (здесь сечение $l_1(q)$ интерпретируется как 1-форма в кокасательном расслоении, с которым орбита отождествляется при помощи t).

Выбор другого сечения $l(q)$ соответствует классической конструкции изменения нулевой точки в слое кокасательного расслоения. $\square$

Перейдем теперь к общему случаю.

Мы можем выделить в орбите элемента $(x, a) \in \mathfrak{g}^*$ естественное подмногообразие M — орбиту этого элемента при действии группы R, соответствующей алгебре $\mathfrak{r}$. Симплектическую структуру на M можно ограничить с орбиты коприсоединенного действия. Симплектическая структура на орбите коприсоединенного действия элемента (x, a) описывается как сумма симплектической структуры на многообразии M и симплектической структуры на кокасательном расслоении к орбите действия Φ. Обозначим $\sigma\colon G \to O(x, a)$ — естественную проекцию группы G на орбиту, $\sigma_1\colon G \to G/V \to\to M$ — композицию проекции на G/I с проекцией G/I на ее орбиту, а $\sigma_2\colon G \to T^*O_\Phi(a)$ — композицию коприсоединенного действия группы G на элементе $(0, a)$ и симплектоморфизма, описанного в теореме 1.3. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1.5 ([4], Theorem 4.7)**.** *Форма Кириллова ω на орбите коприсоединенного действия элемента (x, a) связана с формами на M и кокасательном расслоении к орбите a при действии Φ соотношением*

$$\sigma^*\omega = \sigma_1^*\omega_M + \sigma_2^*\omega_{T^*O(0,a)}.$$

Доказательство. Справедливость этого утверждения легко проверяется непосредственно. Распишем левую часть для пары векторов $a = \mathrm{ad}^*_{(\xi,u)}(x, a)$ и

$b = \mathrm{ad}^*_{(\eta,v)}(x,a)$

$$\omega(a,b) = \langle([\xi,\eta],\phi(\xi)v - \phi(\xi)u),(x,a)\rangle = \langle[\xi,\eta],x\rangle + \langle\phi(\xi)v - \phi(\xi)u,a\rangle,$$

но слагаемые в последнем выражении совпадают с формами $\sigma_1^*\omega_M$ и $\sigma_2^*\omega_{T^*O(0,a)}$.

$\square$

Следует отметить, что рассматриваемое расщепление формы не согласовано со стуктурой расслоения, описанной в теореме 1.1, и зависит от выбора элемента (x,a).

1.2 Случай полупрямой суммы $\mathfrak{g} +_{\mathrm{ad}} \mathfrak{g}^c$.

Рассмотрим полупрямую сумму $\mathfrak{g} +_{\mathrm{ad}} \mathfrak{g}^c$, здесь $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли, а $\mathfrak{g}^c$ — коммутативная алгебра Ли, размерность которой равна размерности $\mathfrak{g}$ и действие $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}^c$ совпадает с присоединенным представлением. Такая конструкция использовалась например в работе [26]. Мы остановимся более подробно на описании структуры орбит и симплектической структуры на орбите.

Как известно (см. например [5]) для любой конечномерной алгебры Ли аннулятор регулярного элемента в смысле коприсоединенного представления коммутативен. В соответствие с результатами изложенными выше орбитой общего положения для алгебры $\mathfrak{g} +_{\mathrm{ad}} \mathfrak{g}^c$ будет кокасательное расслоение к орбите коприсоединенного действия алгебры $\mathfrak{g}$ с подкрученной симплектической структурой.

В отличие от произвольной полупрямой суммы в рассматриваемом случае для любого элемента $x \in (\mathfrak{g}^c)^*$ можно задать канонический базис в его аннуляторе в смысле действия $\mathfrak{g}$.

По всей видимости, теоремы, приводимые ниже в этом параграфе известны, однако нам не удалось найти в литературе их доказательства, поэтому мы приводим все теоремы с доказательством.

Утверждение 1.1. *Пусть f — инвариант коприсоединенного действия $\mathfrak{g}$. Обозначим через $i\colon (\mathfrak{g}^c)^* \to (\mathfrak{g})^*$ естественное ("тождественное") отображение. Тогда для любого $a \in \mathfrak{g}^*$ имеем $df(i(a)) \in Ann(a)$.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что образ орбиты действия $\mathfrak{g}$ на $(\mathfrak{g}^c)^*$ при отображении i совпадает с орбитой коприсоединенного действия $\mathfrak{g}$. Аннулятор $a \in (\mathfrak{g}^c)^*$ совпадает с аннулятором $i(a)$. Известно, что градиенты инвариантов коприсоединенного действия в точке a лежат в $\mathrm{Ann}_\phi(a)$, что доказывает утверждение. □

Поскольку размерность аннулятора равна коразмерности орбиты в $(\mathfrak{g}^c)^*$, фактически предыдущее утверждение показывает, как построить для каждой точки $a \in (\mathfrak{g}^c)^*$ канонический базис в $\mathrm{Ann}_\phi(a)$. Наличие такого базиса позволяет в явном виде выписать инварианты коприсоединенного действия для алгебры $\mathfrak{g} +_{\mathrm{ad}} \mathfrak{g}^c$.

Теорема 1.6. *Пусть $f_j, j = 1 \dots k = ind\mathfrak{g}$ — набор инвариантов коприсоединенного действия $\mathfrak{g}$. Обозначим через $i\colon (\mathfrak{g}^c)^* \to (\mathfrak{g})^*$ естественное ("тождественное") отображение. Рассмотрим точку $(x, y) \in (\mathfrak{g} + \mathfrak{g}^c)^*$. Рассмотрим функции $f_j(i(y))$ и $g_j(x, y) = \langle x, df_j(i(y))\rangle$. Эти функции являются инвариантами коприсоединенного действия алгебры $\mathfrak{g} +_{ad} \mathfrak{g}^c$.*

Если градиенты df_j независимы в точках x и $i(y)$, то и градиенты dg_j независимы в точке (x, y).

Доказательство. Покажем, что описанные функции являются инвариантами коприсоединенного действия. Их инвариантность относительно действия $\mathfrak{g}$ следует из того, что все объекты, участвующие в их определении, инвариантны относительно коприсоединенного действия. При действии элемента из $\mathfrak{g}^c$ получим $\mathrm{Ad}^*_{(e,u)}(x, a) = (x + A(u, a), a)$. Поскольку дифференциал df_j лежит в аннуляторе a, а $A(u, a) \in Ann_\phi(a)^\perp$,

$$g_j(\mathrm{Ad}^*_{(e,u)}(x, a)) = \langle x + A(u, a), df_j(i(a))\rangle = \langle x, df_j(i(a))\rangle = g_j(x, a).$$

□

В случае полупростой компактной алгебры Ли у инвариантов орбиты есть еще одно естественное представление. Симплектические структуры различных регулярных орбит коприсоединенного действия для элементов вида (y, x_0) $\mathfrak{g} +_{\mathrm{ad}} \mathfrak{g}^c$ различаются тем, какую 2-форму они индуцируют на орбите в $\mathfrak{g}^c$ (см. теорему 1.4). Между классом этих форм и инвариантами коприсоединенного представления вида g_i есть взаимно однозначное соответствие.

Пусть $\mathfrak{g}$ — компактная полупростая алгебра Ли. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{g} +_{\mathrm{ad}} \mathfrak{g}^c$. Зафиксируем регулярный элемент $a \in (\mathfrak{g}^c)^*$ и соответсвующую картановскую подалгебру $H = Ann_\phi(a)$. Отождествляя $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ с помощью формы Киллинга можно считать, что каждому элементу $x \in H$ соответствует орбита элемента (x, a) при коприсоединенном действии. Эта орбита является кокасательным расслоением к орбите элемента $a \in (\mathfrak{g}^c)^*$. Обозначим орбиту элемента a через $O(a)$. Зафиксируем ее вложение в $T^*O(a)$ и рассмотрим ограничение формы Кириллова на это нулевое сечение. В зависимости от выбора сечение форма может меняться, но ее класс когомологий сохраняется. Таким образом мы получаем для каждой орбиты $O(x,a)$ некоторый класс когомологий $[\omega] \in H^2(O(a))$, причем он зависит лишь от проекции x на Картановскую подалгебру. Обозначим этот класс через $h(x)$.

Теорема 1.7. *Отображение h — изоморфизм между H и $H^2(O(a),\mathbb{R})$.*

Доказательство. Устройство $H^2(O(a),\mathbb{R})$ для орбиты коприсоединенного действия полупростых групп известно (см. например, [12]). Для орбиты общего положения (“фактор по максимальному тору”) $H^2(O,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^k, k = \operatorname{ind} G$. Таким образом для того, чтобы доказать, что h является изоморфизмом, достаточно проверить, что $\operatorname{Ker} h = 0$.

Рассмотрим базис Вейля, с $Ann_\phi(a)$ в качестве картановской подалгебры. Для любого элемента $x \in H$ существует корень $e_\alpha \in Ann_\phi(a)$, такой что $\langle \alpha, h\rangle \neq 0$. Рассмотрим подгруппу, состоящую из α и соответствующих корневых векторов $E_\alpha, E_{-\alpha}$. Орбита элемента $a \in \mathfrak{g}^c$ при действии этой подгруппы является компактным многообразием. Форма Кириллова, ограниченная на эту орбиту является ненулевой, на паре векторов $\mathrm{ad}^*_{E_\alpha} a$, $\mathrm{ad}^*_{E_{-\alpha}} a$ она принимает значение $\langle x, [E_\alpha, E_{-\alpha}]\rangle = \langle x, \alpha\rangle$, которое отлично от 0 в силу выбора α. Поскольку форма Ad-инвариантна, ее интеграл по указанной орбите отличен от 0. Это значит, что форма $h(x)$ не является точной. $\square$

Замечание 1.4. *В случае, если алгебра Ли не компактна, теорема 1.7 не верна: например для алгебры ли $sl(2) + sl(2)$ орбитой коприсоединенного действия элемента $(0,a)$ является гиперболоид, группа вторых* *когомологий которого тривиальна, хотя картановская подалгебра H одномерна.*

1.3 Случай коммутативного идеала

Перейдем теперь к рассмотрению ситуации, когда идеал не выделяется в качестве полупрямого слагаемого. Использование той же стратегии позволяет получить результаты, аналогичные результатам для полупрямых произведений.

Пусть $\mathfrak{g}$ содержит коммутативный идеал I. Этот идеал может, вообще говоря, не выделяться в качестве полупрямого слагаемого, тем не менее можно сформулировать утверждения, аналогичные утверждениям для полупрямой суммы.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, содержащая идеал I. G — соответствующая группа. Так как I — идеал, он является инвариантным подпространством для присоединенного действия группы Ли G. Следовательно мы можем рассмотреть ограничение присоединенного действия группы на это подпространство

$$\mathrm{Ad}|_I \colon G \to GL(I).$$

Рассмотрим также действие группы G на I^*, двойственное к $\mathrm{Ad}|_I$ и обозначим его Φ:

$$\langle u, \Phi(g)x \rangle = \langle \mathrm{Ad}_{g^{-1}} u, x \rangle, \ \forall u \in I, x \in I^*.$$

Справедлива следующая лемма

Лемма 1.2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $I \subset \mathfrak{g}$ — идеал. Тогда ограничение проекции $p\colon \mathfrak{g}^* \to I^*$ на орбиту $O(x)$ коприсоединенного действия группы G является локально тривиальным расслоением над образом этой орбиты $p(O(x))$. При этом $p(O(x))$ является орбитой действия Φ.*

Доказательство. Проекция p, коприсоединенное действие G на $\mathfrak{g}^*$ и действие Φ связаны соотношением

$$p \circ \mathrm{Ad}_g^* = \Phi(g) \circ p.$$

Этот факт следует из определения Φ: значение $\langle p(\mathrm{Ad}_g^* x), u\rangle$, $x \in \mathfrak{g}$, $u \in I$ по определению проекции равно $\langle \mathrm{Ad}_g^* x, u\rangle$, а для последнего выражения справедливо $\langle \mathrm{Ad}_g^* x, u\rangle = \langle x, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} u\rangle$. Поскольку $\mathrm{Ad}_{g^{-1}} u \in I$ мы можем заменить x его проекцией $p(x)$, получая

$$\langle p(\mathrm{Ad}_g^* x), u\rangle = \langle x, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} u\rangle = \langle p(x), \mathrm{Ad}_{g^{-1}} u\rangle = \langle \Phi(g) p(x), u\rangle, \forall x \in \mathfrak{g}^*, u \in I.$$

Из этого следует, что проекция $p(O(x))$ совпадает с орбитой действия Φ элемента $p(x)$.

Зафиксируем элемент $a \in p(O(x))$. Рассмотрим его стабилизатор в смысле действия Φ: $St(a) = \{g \in G | \Phi(g)a = a\}$. Выберем в окрестности единицы группы G подмногообразие M, трансверсальное к $St(a)$. Пусть U_e — достаточно малая окрестность единицы в M, диффеоморфная диску. Тогда образ отображения $q\colon U_e \to p(O(x))$, определяемого равенством $q(h) = \Phi(h)a$, является диффеоморфной диску окрестностью $U_a \subset p(O(x))$ точки a, и q задает диффеоморфизм между U_a и U_e.

Тривиализация расслоения $f\colon p^{-1}(U_a) \to U_a \times p^{-1}(a)$ задается формулой

$$f(x) = (p(x), \mathrm{Ad}_{h^{-1}}^* x),$$

где $h = q^{-1}(p(x)) \in M$.

$\square$

Пусть $p(x) = a$. Тогда слоем $p^{-1}(a)$ расслоения, описанного в теореме, будет орбита элемента x при действии группы $St(a)$.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда идеал I коммутативен. Это, в частности, означает, что $\phi(u) = 0$, $\forall u \in I$. Обозначим через K нормальную подгруппу, соответствующую идеалу I. $\Phi(h) = id$, $\forall h \in K$, следовательно можно корректно определить действие $\Phi_1 \colon G/K \to GL(I^*)$ и проекция орбиты на I^* является орбитой этого действия.

Рассмотрим слой $p^{-1}(a)$. Пусть $p(x) = a$. Тогда слоем $p^{-1}(a)$ расслоения, описанного в теореме, будет орбита элемента x при действии группы $St(a)$. Эта группа заведомо содержит подгруппу K, следовательно для любой точки $x \in p^{-1}(a)$ можно выделить естественное подмногообразие в $p^{-1}(a)$, являющееся образом x при действии K. Обозначим это подмногообразие $O_K(x)$. Обозначим через $Ann(a)$ подалгебру, соответствующую подгруппе $St(a)$, т.е. $Ann(a) = \{\xi \in \mathfrak{g} | \phi(\xi)a = 0\}$. В двойственном пространстве к $\mathfrak{g}$ есть естественное подпространство, являющееся ортогональным дополнением к $Ann(a)$:

$$Ann(a)^{\perp} = \{x \in \mathfrak{g}^* | \langle x, \xi \rangle = 0 \forall \xi \in Ann(a)\}.$$

Утверждение 1.2. *$O_K(x)$ является аффинной плоскостью, параллельной ортогональному дополнению к $Ann(a)$.*

Доказательство. Рассмотрим касательное пространство к $O_K(x)$ в точке x. Оно натянуто на векторы вида $\mathrm{ad}^*_u x$, $u \in I$. Покажем, что касательное пространство совпадает с $Ann(a)^{\perp}$. Пусть $\xi \in Ann(a)$. Тогда

$$\langle \xi, \mathrm{ad}_u^* x \rangle_{\mathfrak{g}} = -\langle \mathrm{ad}_u \xi, x \rangle_{\mathfrak{g}} = \langle \mathrm{ad}_\xi u, a \rangle_I = -\langle u, \phi(\xi) a \rangle_I = 0$$

Переход от спаривания в $\mathfrak{g}$ к спариванию в I возможен потому, что $\mathrm{ad}_u \xi \in I$, последнее равенство следует из того, что $\xi \in Ann(a)$. Мы доказали включение $T_x O_K(x) \subseteq Ann(a)^{\perp}$. Для того чтобы доказать совпадение этих пространств рассмотрим их размерности. Ядро отображения $\mathrm{ad}_{\cdot}^* x\colon I \to \mathfrak{g}^*$ определяется условием $\langle \mathrm{ad}_u^* x, \xi \rangle = -\langle \mathrm{ad}_\xi^* x, u \rangle = -\langle \phi(\xi) x, u \rangle = 0 \; \forall \xi \in \mathfrak{g}$. Поскольку $\phi(\xi) x$ при $\xi \in \mathfrak{g}$ заметает касательное пространство к орбите действия Φ размерность ядра отображения $\mathrm{ad}_{\cdot}^* x$ равна коразмерности орбиты действия Φ в I. Это значит, что размерность образа равна размерности орбиты Φ. Но размерность ортогонального дополнения к стабилизатору также равна размерности орбиты, что доказывает равенство $T_x O_K(x) \subseteq Ann(a)^{\perp}$.

Мы получили, что распределение, задаваемое касательными плоскостями к орбите действия K состоит из плоскостей, параллельных $Ann(a)^{\perp}$. Это означает, что сами орбиты действия K совпадают с этими плоскостями. □

Зафиксировав в $\mathfrak{g}^*$ подпространство P трансверсальное к $Ann(a)^{\perp}$ мы можем представить слой $p^{-1}(a)$ в виде прямого произведения $Ann(a)^{\perp} \times O_{Ann}$, где O_{Ann} — проекция орбиты на P вдоль $Ann(a)^{\perp}$. При этом образ O_{Ann} при естественной проекции $\pi\colon p^{-1}(a) \to Ann(a)^*$ совпадает с орбитой элемента $\pi(x)$ при коприсоединенном действии $St(a)$ на $Ann(a)^*$. Этот факт следует из того, что проекция π коммутирует с коприсоединенным действием $Ann(a)$. Доказательство полностью повторяет доказательсво аналогичного факта для проекии p.

Следует заметить, что представление орбиты в виде прямого произведения не является каноническим, а зависит от выбора подпространства P, в частности, если пространство R не является Ad-инвариантным, эта структура прямого произведения не согласована с коприсоединенным действием группы G.

Суммируя сказанное получаем теорему

Теорема 1.8. *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ содержит коммутативный идеал I. Тогда орбита элемента x при коприсоединенном действия соответствующей группы Ли является локально тривиальным расслоением. База расслоения — орбита $O_\Phi(p(x)) \subset I^*$ элемента $p(x)$ при действии Φ, а слой над точкой a является прямым произведением орбиты коприсоединенного действия элемента $\pi(x)$ в $\mathrm{Ann}(a)^*$ и линейного пространства V, причем $\dim V = \dim O_\Phi$.*

В случае, если проекция элемента x на I^* равна 0. Предыдущая теорема становится тривиальной: размерность орбиты $p(x) \in I^*$ равна 0, то есть вся орбита представляется в виде расслоения надо точкой. Для того, чтобы описать орбиту такого элемента рассмотрим следующую конструкцию. Проекция $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I$ определяет вложение $\sigma\colon (\mathfrak{g}/I)^* \subset \mathfrak{g}^*$. Образ этого вложения описывается условием проекция x на I^* равна 0, то есть орбита элемента x лежит в образе этого вложения.

Справедливо следующее утверждение

Теорема 1.9. *Если проекция элемента x на I^* тривиальна, то существует такой элемент $y \in (\mathfrak{g}/I)^*$ такой что $\sigma(y) = x$ и орбита элемента x является образом орбиты $O(y) \subset (\mathfrak{g}/I)^*$ элемента y при вложении σ.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что коприсоединенное действие группы G на образе вложения σ совпадает с коприсоединенным действием G/I на $(\mathfrak{g}/I)^*$. Достаточно проверить, что для всех $v \in I$ $\mathrm{ad}_v^* x = 0$:

$$\langle \mathrm{ad}_v^* x, a \rangle = -\langle x, \mathrm{ad}_v a \rangle = 0,$$

поскольку $\mathrm{ad}_v a \in I$, а проекция x на I^* равна 0 по условию. □

Заметим, что в случае, если действие Φ на I^* тривиально, то есть I лежит в центре алгебры Ли $\mathfrak{g}$, аннулятор совпадает со всей алгеброй Ли. В этом случае описанная конструкция не позволяет уменьшить размерность рассматриваемой алгебры.

1.3.1 Симплектическая структура для случая коммутативного идеала

В отличие от полупрямой суммы, для которой можно было выбрать для любой точки $a \in V^*$ элемент $(0, a)$, орбита которого изоморфна кокасательному расслоению орбиты элемента a при действии Φ в случае коммутативного идеала такой выделенной орбиты может не быть. Поэтому глобально разложения, описанного в теореме 1.5 вообще говоря нет.

Аналогичное разложение можно было бы проделать задать локально, но и в этом случае кроме двух слагаемых в теореме 1.5 добавится еще одно, возникающее из-за того, что идеал не выделяется в виде полупрямого слагаемого.

В отличие от полупрямой суммы база расслоения E_I не вкладывается канонически в $\mathfrak{g}$. Зафиксируем для удобства подпространство $\mathfrak{r}$, трансверсальное I. Теперь можно считать, что I^* отождествлено с $\mathfrak{r}^\perp$. В дальнейшем мы не будем это специально оговаривать.

Для пары векторов вида $y = \mathrm{ad}^*_{(\xi,u)}(x,a)$ и $z = \mathrm{ad}^*_{(\eta,v)}(x,a)$ значение формы Кириллова будет равно

$$\omega(y,z) = \langle([\xi,\eta]_1, \phi(\xi)v - \phi(\eta)u + [\xi,\eta]_2), (x,a)\rangle =$$
$$\langle[\xi,\eta]_1, x\rangle + \langle\phi(\xi)v - \phi(\eta)u, a\rangle + \langle([\xi,\eta]_2), a\rangle. \quad (1.3)$$

Здесь $[\xi,\eta]_1$ — проекция коммутатора $[\xi,\eta]$ на $\mathfrak{r}$, а $[\xi,\eta]_2$ — проекция коммутатора на I. Первые два слагаемых соответствуют форме на M и форме на кокасательном расслоении (если их соответствующим образом определить локально), а третье слагаемое дает новую по сравнению с теоремой 1.5 добавку.

Нам будут важны еще два факта о симплектической структуре на орбите коприсоединенного действия. Первое утверждение описывает симплектическую структуру в слое.

Теорема 1.10. *Пусть точка $a \in I^*$ фиксирована. Рассмотрим слой E_a на этой точкой. Рассмотрим естественную проекцию $p\colon E_a \to Ann_\phi(a)^*$. Тогда ограничение формы Кириллова на E_a $\omega_1 = \omega|_{E_a}$ связано с формой Кириллова ω_{Ann} на орбите в $Ann_\phi(a)^*$ соотношением $\omega_1 = p^*(\omega_{Ann})$.*

Доказательство. Слой E_a совпадает с орбитой действия $Ann_\phi(a)$. Это означает, что нам достаточно проверить равенство только для векторов вида $\mathrm{ad}^*_\xi x$, $\xi \in Ann_\phi(a)$. Записывая 1.3 мы получаем, что выражение $\langle\phi(\xi)v - \phi(\eta)u, a\rangle$ равно нулю, если $\xi, \eta \in Ann_\phi(a)$. Два оставшихся слагаемых не изменяются, когда мы переходим от E_a к $Ann_\phi(a)^*$. □

Второе утверждение носит более локальный характер. Зафиксируем точку $x \in \mathfrak{g}^*$. Пусть $p(x) = a$ и P — подпространство в $\mathfrak{g}$ трансверсальное к

$Ann(a)$. Тогда в касательном пространстве можно выделить два естественных подпространства: подпространство T_1, натянутое на векторы $\mathrm{ad}^*_\xi x, \xi \in P$ и подпространство T_2, натянутое на векторы $\mathrm{ad}^*_u x, u \in I$.

Фактически мы выделяем в орбите коприсоединенного действия подмногообразие, диффеоморфное кокасательному расслоению к орбите O_Φ, но делаем это локально. Подпространство $T_1 + T_2$ — касательное пространство к этому подмногообразию. Ограничение формы Кириллова на это подмногообразие будет канонической формой на кокасательном расслоении с некоторой добавкой на базе расслоения, что показывает следующая теорема.

Теорема 1.11. *Подпространство T_1 изотропно, и ограничение формы Кириллова на $T_1 \oplus T_2$ невырождено.*

Доказательство. Доказательство сводится к прямой проверке. По определению для векторов $\mathrm{ad}^*_u x$ и $\mathrm{ad}^*_v x$ имеем

$$\omega(\mathrm{ad}^*_u x, \mathrm{ad}^*_v x) = \langle [u, v], x \rangle = \langle 0, x \rangle = 0.$$

Докажем невырожденность этой формы. Заметим, что если вектор u принадлежит ортогональному дополнению к касательному пространству к орбите элемента x при действии Φ, то $\mathrm{ad}^*_u x = 0$:

$$\langle \mathrm{ad}^*_u x, \xi \rangle = -\langle x, [u, \xi] \rangle = -\langle \phi^*(\xi) x, u \rangle = 0.$$

Следовательно, можно определять u с точностью до элемента из ортогонального дополнения и считать его элементом из кокасательного пространства к орбите. Для пары векторов $\mathrm{ad}^*_u x$ и $\mathrm{ad}^*_\xi x$ имеем

$$\omega(\mathrm{ad}^*_u x, \mathrm{ad}^*_\xi x) = \langle \phi(\xi) u, x \rangle = -\langle u, \phi^*(\xi) x \rangle.$$

Отображение $\xi \to \phi^*(\xi)x$ задает изоморфизм между R и касательным пространством к орбите. Тогда в последнем равенстве написано просто спаривание элементов из касательного и кокасательного пространства к орбите. Ясно, что оно невырождено. □

1.4 Случай идеала, изоморфного алгебре Гейзенберга

Рассмотрим случай, когда алгебра $\mathfrak{g}$ содержит идеал, изоморфный алгебре Гейзенберга $\mathfrak{h}$. Алгебра Ли $\mathfrak{h}$ представляет собой сумму линейного пространства $V = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ с фиксированной симплектической структурой ω и одномерного центра $\mathfrak{z} = \operatorname{span} e_0$ с коммутационными соотношениями

$$[e_i, e_j] = \omega(e_i, e_j)e_0, i, j = 1 \ldots 2n.$$

Пространство V определено, вообще говоря, неоднозначно, но мы будем считать, что оно зафиксировано.

Топология орбиты в этом случае будет даже более простой, чем в случае коммутативного идеала. Это связано с наличием следующего замечательного свойства, доказываемого, например, в [27]

Теорема 1.12. *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ содержит идеал $\mathfrak{h}$, изоморфный алгебре Гейзенберга. Тогда существует подалгебра $\mathfrak{k}$, такая что $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{k}$ и $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{z}$.*

Ниже мы явным и естественным образом построим подалгебру $\mathfrak{k}$.

Аналогично случаю коммутативного идеала рассмотрим естественную проекцию $\pi\colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$. В этом случае также можно применить 1.2 и представить орбиту коприсоединенного действия элемента $x \in \mathfrak{g}$ в виде локально тривиального расслоения над $\pi(O(x))$. Рассмотрим образ этого отображения. Будем считать, что x — элемент общего положения, то есть естественная проекция $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{z}^*$ не переводит его в 0, иначе говоря $\langle x, e_0 \rangle \neq 0$.

Докажем следующую лемму, описывающую проекцию орбиты на $\mathfrak{h}^*$.

Лемма 1.3. *Образом орбиты коприсоединенного действия элемента x, такого что $\langle x, e_0 \rangle \neq 0$ при проекции π является $2n$-мерная плоскость, параллельная V^*.*

Доказательство. Заметим, что $\langle x, e_0 \rangle$ не меняется при коприсоединенном действии. Это следует из того, что e_0 лежит в центре алгебры $\mathfrak{g}$, соответственно $\langle \mathrm{Ad}^*_g x, e_0 \rangle = \langle x, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} e_0 \rangle = \langle x, e_0 \rangle$. Рассмотрим теперь образ при действии одномерных подгрупп $\exp(e_i)$. Поскольку нас интересует лишь проекция π, достаточно рассмотреть $\langle e_i, \mathrm{Ad}^*_{exp(e_i)} x \rangle$. Мы проверим просто, что дифференциалы отображений, то есть ad^*_u, $u \in V$ заметают все пространство V^*.

$$\langle \mathrm{ad}^*_a x, e_j \rangle = -\langle x, [a, e_j] \rangle = -\langle x, e_0 \omega(a, e_j) \rangle.$$

Поскольку $\langle x, e_0 \rangle \neq 0$, выбирая a так, что $\omega(a, e_j) \neq 0$ получаем требуемое. $\square$

Таким образом базой расслоения служит пространство $\mathbb{R}^{2n}$. Зафиксируем в $\mathfrak{h}^*$ элемент x_0, такой что $\langle x_0, e_0 \rangle \neq 0$. Тогда справедливо следующее утверждение

Утверждение 1.3. *Аннулятор элемента x_0 в смысле представления*

$$\phi \colon \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{h}^*),$$

индуцированного коприсоединенным представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ пересекается с V тривиально.

Доказательство. Пусть $u, v \in V$. Тогда

$$\langle \phi^*(v)x_0, u\rangle = \langle x_0, [u, v]\rangle = \langle x_0, \omega(u, v)e_0\rangle.$$

Последнее выражение отлично от 0, если $\omega(u, v) \neq 0$, а значит v не может лежать в аннуляторе x_0. $\square$

Это утверждение эквивалентно теореме 1.12. Аннулятор x_0 является подалгеброй $\mathfrak{k}$, существование которой утверждается в теореме: он не пересекается с V по предыдущему утверждению, а его размерность равна $\dim \mathfrak{g} - \dim V$.

Итак, перейдем к описанию слоя $p^{-1}(x_0)$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ представляется в виде прямой суммы подпространств $\mathrm{Ann}_\phi(x_0) \oplus V$. Двойственное пространство в этом случае естественно представлять в виде суммы подпространств $\mathrm{Ann}_\phi(x_0)^* + V^*$, где $\mathrm{Ann}_\phi(x_0)^* = V^\perp$, $V^* = \mathrm{Ann}_\phi(x_0)^\perp$.

Пусть $p(a) = x_0$. Возьмем разложение $a = a_V + a_{Ann}$, где a_V и a_{Ann} — проекции на соответствующие подпространства: $a_V \in V^*$, $a_{Ann} \in Ann_\phi(x_0)^*$. Слоем $p^{-1}(x_0)$ орбиты a будет орбита элемента a_{Ann} при действии $St(x_0)$.

Таким образом мы доказали теорему, описывающую топологию орбит коприсоединенного действия для алгебры $\mathfrak{g}$.

Теорема 1.13. *Пусть G — группа Ли, такая что алгебра Ли содержит $2n+1$-мерный идеал $\mathfrak{h}$, изоморфный алгебре Гейзенберга. Тогда существует подалгебра $\mathfrak{k}$, такая что $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{k}$ и $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k} = z(\mathfrak{h})$. Если для элемента $x \in \mathfrak{g}^*$ выполняется условие $\langle x, e_0\rangle \neq 0$, то его орбита коприсоединенного действия группы G представляет собой расслоение над* *базой R^{2n}, слоем которого является орбита коприсоединенного действия алгебры $\mathfrak{k}$ элемента $\pi(x)$, где π — проекция на второе слагаемое в разложении $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{k}$.*

Поскольку база расслоения стягиваема, расслоение является тривиальным.

Рассмотрим теперь нерегулярные орбиты. Если $\langle x, e_0 \rangle = 0$, то проекция x на $\mathfrak{h}^*$ ненулевая, структура орбит аналогична случаю полупрямой суммы с коммутативным идеалом. Равенство $\langle x, e_0 \rangle = 0$ выполняется для всех элементов орбиты x, поскольку $\mathrm{Ad}_g e_0 = e_0$ для любого g. Рассмотрим проекцию $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ и соответсвующее вложение $\sigma\colon (\mathfrak{g}/\mathfrak{z})^* \to \mathfrak{g}^*$. Орбита элемента x целиком лежит в образе σ и совпадает с орбитой элемента $y \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{z})^*$, для которого $\sigma(y) = x$.

Алгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{k} +_\phi V$, где ϕ — симплектическое действие на V, индуцированное соответствующим действием в алгебре $\mathfrak{g}$.

Двойственное пространство к этой алгебре отождествляется с подпространством $\mathrm{Im}\,\sigma \subset \mathfrak{g}^*$, выделяемым условием $\langle x, e_0 \rangle = 0$. То есть описание орбит элементов, для которых $\langle x, e_0 \rangle = 0$ сводится к описанию орбит в алгебре $\mathfrak{k} +_\phi V$, таким образом мы можем воспользоваться теоремами 1.8 и 1.9.

Коприсоединенное действие на орбите элемента x совпадает с коприсоединенным действием на орбитах алгебры $\mathfrak{k} +_\phi V$.

1.4.1 Симплектическая структура для случая идеала, изоморфного алгебре Гейзенберга

Опишем симплектическую структуру на орбите коприсоединенного действия алгебры Ли рассматриваемого вида. Удобно описывать ее в точке a такой, что $\langle a, e_i\rangle = 0, \forall i = 1, \ldots, 2n$. В остальных точках можно получить симплектическую структуру, пользуясь ее G-инвариантностью.

Представим двойственное пространство к алгебре Ли $\mathfrak{g}$ в виде прямой суммы подпространств $Ann_\phi(a)^*$ и V^*. В касательном пространстве к орбите естественно выделить два подпространство: образ V при отображении $\mathrm{ad}^*_\cdot a$ и образ $Ann_\phi(a)$ при отображении $\mathrm{ad}^*_\cdot a$. Первое совпадает с V^*, а второе вложено в $Ann_\phi(a)^*$.

Ограничение формы Кириллова ω на V^* совпадает с симплектической структурой ω_V на V, умноженной на $\langle a, e_0\rangle$:

$$\omega(\mathrm{ad}^*_{e_i}a, \mathrm{ad}^*_{e_j}a) = \langle a, [e_i, e_j]\rangle = \omega_V(e_i, e_j) * \langle a, e_0\rangle.$$

Ограничение формы Кириллова ω на $Ann_\phi(a)^*$ совпадает с поднятием симплектической структуры с орбиты $Ann_\phi(a)$ с помощью естественной проекции:

$$\omega(\mathrm{ad}^*_\xi a, \mathrm{ad}^*_\eta a) = \langle a, [\xi, \eta]\rangle,$$

поскольку $[\xi, \eta] \in Ann_\phi(a)$ последнее выражение равно

$$\langle p(a), [\xi, \eta]\rangle = \omega_{Ann_\phi(a)}(\mathrm{ad}^*_\xi p(a), \mathrm{ad}^*_\eta(a)),$$

где $p\colon\ : \mathfrak{g}^* \to Ann_\phi(a)^*$ — проекция.

Следующая теорема о симплектической структуре на орбитах коприсоединенного действия, показывает, что в случае, если $\langle x, e_0 \rangle \neq 0$ орбита коприсоединенного действия является прямым произведением двух симплектических многообразий.

Теорема 1.14. *Если алгебра Ли группы G содержит идеал, изоморфный алгебре Гейзенберга, и $x \in \mathfrak{g}^*$ такой, что $\langle x, e_0 \rangle \neq 0$, то симплектическая структура на орбите элемента x коприсоединенного действия группы G представляется в виде суммы $\omega = \omega_{Ann} + \omega_V$, то есть согласована со структурой прямого произведения, введенной в теореме 1.13.*

Доказательство. Для того, чтобы доказать это утверждение остается проверить, что для любых $\xi \in Ann_\phi(a)$ и $v \in V$ $\omega(\mathrm{ad}^*_\xi a, \mathrm{ad}^*_v a) = 0$. Расписывая значение формы Кириллова по определению получаем

$$\omega(\mathrm{ad}^*_\xi a, \mathrm{ad}^*_v a) = \langle a, [\xi, v] \rangle = \langle \phi^*(\xi), v \rangle = 0,$$

поскольку $\xi \in Ann_\phi(a)$. □

1.5 Теорема Садэтова и построение полных коммутативных наборов полиномов.

Приведенные в этой главе результаты о структуре орбит коприсоединенного действия группы Ли в известном смысле проясняют геометрический смысл полных коммутативных наборов, получаемых методом Садэтова. В случае, если шаг индукции реализуется с помощью коммутативного идеала мы добавляем к набору интегралов координаты в базе расслоения E_I. Это означает, что совместная поверхность уровня интегралов заведомо будет целиком лежать внутри одного слоя.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.15. *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ содержит коммутативный идеал I. Пусть f_i — полный коммутативный набор полиномов, построенный с помощью метода Садэтова. Тогда совместные поверхности уровня интегралов лежат целиком в одном слое расслоения $p\colon \mathfrak{g}^* \to I^*$ и являются прямым произведением евклидова пространства, размерность которого равна размерности орбиты действия $\mathfrak{g}$ на Ij, на поверхность уровня для набора на $Ann(a)^*$, являющегося ограничением исходного набора f_i.*

Доказательство. Первая часть утверждения очевидна, поскольку координаты на V^* входят в набор, построенный методом Садэтова. Из теоремы 1.11 следует, что никакие функции из набора не могут зависеть от переменных из $Ann(a)^\perp$, иначе они не будут коммутировать с координатами на V^*. Следовательно, корректно определено ограничение этих функций на $Ann(a)^*$. Ограничения этих функций будут задавать коммутативный набор на $Ann(a)^*$. Отсюда следует, что совместные поверхности уровня функций из исходного набора являются произведением совместной поверхности уровня функция на $Ann(a)^*$ на евклидово пространство $Ann(a)^\perp$. $\square$

Аналогичное утверждение справедливо для случая, когда редукция происходит с помощью подалгебры Гейзенберга.

Теорема 1.16. *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ содержит идеал $\mathfrak{h}$, изоморфный алгебре Гейзенберга $\dim \mathfrak{h} = 2k+1$, $\mathfrak{h} = V + z(\mathfrak{h})$ Пусть f_i — полный коммутативный набор полиномов, построенный с помощью метода Садэтова. Пусть $\mathfrak{k}$ — подалгебра, трансверсальная V. Тогда совместные поверхности уровня интегралов являются прямым произведением евклидова пространства размерности k на поверхность уровня для набора полиномов на $\mathfrak{k}^*$, полученного как ограничение набора f_i.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предыдущего утверждения. Набор функций построенный методом Садэтова включает k функций, зависящих от координат на V, градиенты которых порождают лагранжево подпространство. Зафиксируем значение этих функций и рассмотрим косоортогональное дополнение V' к их градиентам в смысле формы ω на V. Поскольку ограничение формы Кириллова на V невырождено для того чтобы набор был коммутативным, функции в наборе, построенном методом Садэтова не должны зависеть от координат на V'. Это позволяет ограничить их на K^* и показывает, что совместная поверхность уровня функций, построенных методом Садэтова является прямым произведением пространства размерности k на совместную поверхность ограничения этих функций на K^*. □

Единственная ситуация, в которой метод Садэтова дает результат не объясняемый напрямую описанной в этой главе структурой орбит, это ситуация когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ содержит коммутативный идеал, совпадающий с центром, но не являющийся нильрадикалом алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В этом случае база расслоения в теореме 1.8 — точка и слой совпадает с орбитой коприсоединенного действия.

Это наблюдение делает более интересным вопрос о построении коммутативных наборов другого типа. Многие известные методы построения коммутативных наборов для полупрямой суммы алгебры Ли с коммутативным идеалом (А.В. Браилов, А.С. Тен) дают наборы, градиенты которых порождают одинаковое пространство. Более интересный набор можно получить методом цепочек подалгебр.

Метод цепочек подалгебр основан на следующей лемме.

Лемма 1.4 ((А.Т. Фоменко, В.В. Трофимов, [5]). *Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — подалгебра. И $\pi\colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ — естественное отображение . Если функции f_1 и f_2 находятся в инволюции на $\mathfrak{h}^*$, то $\pi^* f_1$ и $\pi^* f_2$ находятся в инволюции на $\mathfrak{g}^*$.*

Если мы умеем каким либо образом строить полный коммутативный набор $h_1, \dots, h_k$ на $\mathfrak{h}$, то полный коммутативный набор на $\mathfrak{g}^*$ можно пытаться строить следующим образом: “поднять” функции h_i на $\mathfrak{g}^*$ и дополнить набор инвариантами коприсоединенного представления. Полученный набор заведомо будет коммутативным (функции $\pi^* h_i$ находятся в инволюции согласно лемме, а инварианты коприсоединенного представления лежат в ядре скобки Пуассона) но может не быть полным.

В случае полупрямой суммы

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{r} +_\varphi V \tag{1.4}$$

имеется следующая естественная цепочка: $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$. Сформулируем критерий, показывающий, в каком случае набор, построенный с помощью такой цепочки, будет полным.

Теорема 1.17. *Набор функций на $\mathfrak{g}^*$, получаемый с помощью цепочки $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$, будет полным, если полным будет набор функций на $\mathfrak{r}^*$, получаемый из цепочки $\mathrm{Ann}_\phi(a) \subset \mathfrak{r}$.*

Это утверждение можно доказать используя теорему Раиса и вычисляя количество функций, которые войдут в набор, но в этом случае придется дополнительно заботиться об их независимости. Вместо этого мы приведем доказательство этого утверждения в других, более инвариантных терминах.

Рассмотрим полный набор функций на $\mathfrak{r}^*$ и поднимем их на $\mathfrak{g}^*$. В каждой точке $\mathfrak{g}^*$ рассмотрим подпространство P, натянутое на градиенты этих функций. Его косоортогональное дополнение в смысле скобки Пуассона на $\mathfrak{g}^*$ содержит в себе подпространство P и подпространство, натянутое на градиенты инвариантов алгебры $\mathfrak{g}$, то есть ядро скобки Пуассона. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы набор, получаемый добавлением к исходному набору был полным, является точное равенство

$$P^{\perp} = P + Ker(\{,\}). \tag{1.5}$$

Это равенство должно выполняться почти всюду на $\mathfrak{g}^*$.

Можно заменить это равенство следующим включением:

$$\mathfrak{r}^{\perp} \subseteq \mathfrak{r} + Ker(\{,\}). \tag{1.6}$$

Здесь $\mathfrak{r}$ обозначает подпространство, натянутое на градиенты координатных функций на $\mathfrak{r}$. Это условие эквивалентно равенству (1.5) в следующем смысле. Если мы выберем в $\mathfrak{r}$ полный набор функций и обозначим пространство, порождаемое их градиентами P, то из (1.6) будет следовать (1.5). Обратное ((1.6) из (1.5)) очевидно, поскольку справедливы включения $\mathfrak{r}^{\perp} \subseteq P^{\perp}$ и $P \subseteq \mathfrak{r}$. Включение (1.6) должно выполняться почти во всех точках $\mathfrak{g}^*$.

В этих терминах теорема может быть переформулирована следующим образом:

Утверждение 1.4. *Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} +_{\rho} V$. Обозначим $\mathrm{Ann}_{\phi}(a)$ — стабилизатор элемента общего положения из V. Если для $\mathrm{Ann}_{\phi}(a)$ справедливо включение $\mathrm{Ann}_{\phi}(a)^{\perp} \subseteq \mathrm{Ann}_{\phi}(a) + \mathfrak{r}^{\perp}$ (здесь кососортогональное дополнение берется в смысле скобки Пуассона на $\mathfrak{r}$), то справедливо включение $\mathfrak{r}^{\perp} \subseteq \mathfrak{r}+\mathfrak{g}^{\perp}$ (здесь кососортогональное дополнение берется в смысле скобки Пуассона на $\mathfrak{g}^*$).*

Доказательство. Запишем выражение для скобки Пуассона в $\mathfrak{g}$ в точке (x, a):

$$\{(\xi, u), (\eta, v)\} = \langle [\xi, \eta], x\rangle + \langle \rho(\xi)v - \rho(\eta)u, a\rangle. \tag{1.7}$$

Рассмотрим вектор (η, v), лежащий в кососортогональном дополнении к $\mathfrak{r}$ в $\mathfrak{g}$. Это означает, что для него справедливо соотношение

$$\{(\xi, 0), (\eta, v)\} = \langle [\xi, \eta], x\rangle + \langle \rho(\xi)v, a\rangle = 0 \quad \forall \xi. \tag{1.8}$$

Выбирая $\xi \in \mathrm{Ann}\, a$, получаем, что для всех таких ξ выполняется соотношение

$$\langle [\xi, \eta], x\rangle = 0. \tag{1.9}$$

Это означает, что η принадлежит к кососортогональному дополнению $(\mathrm{Ann}\, a)^{\perp}$. По нашему предположению это означает, что либо $\eta \in \mathrm{Ann}\, a$, либо η — лежит в ядре скобки Пуассона для алгебры $\mathfrak{r}$.

В первом случае мы получаем, что из (1.8) и $\eta \in \operatorname{Ann} a$ следует, что

$$\{(\xi, u), (\eta, v)\} = 0, \tag{1.10}$$

то есть (η, v) лежит в ядре скобки Пуассона для $\mathfrak{g}$. Во втором случае из (1.8) получаем

$$\langle \rho(\xi) v, a \rangle = 0. \tag{1.11}$$

Это означает, что $(0, v)$ лежит в ядре скобки Пуассона, откуда следует включение $\mathfrak{r}^{\perp} \subseteq \mathfrak{r} + \mathfrak{g}^{\perp}$. $\square$

Глава 2

Инварианты и орбиты для полупрямых сумм

В этом разделе приведена информация об инвариантах, орбитах и аннуляторах для некоторых специальных алгебр Ли, представимых в виде полупрямой суммы. Мы рассмотрим полупрямые суммы $so(n) +_\phi \mathbb{R}^n$, $sl(n) +_\phi \mathbb{R}^N$ и $sp(n) +_\phi \mathbb{R}^{2n}$, где ϕ обозначает представление минимальной размерности.

2.1 Группы $sp(n) +_\varphi \mathbb{R}^{2n}$ и $so(n) +_\varphi \mathbb{R}^n$ (общая конструкция)

Приведем общую конструкцию, из которой можно получить инварианты для алгебр вида $sp(n) +_\varphi \mathbb{R}^{2n}$ и $so(n) +_\varphi \mathbb{R}^n$. Эта конструкция во многом повторяет идеи, описанные в работе [14],

Рассмотрим линейное пространство V размерности n и невырожденную билинейную форму Λ на нем. Предположим, что форма Λ является либо симметричной либо кососимметричной.

Обозначим G группу линейных преобразований пространства V, сохраняющих форму Λ. Эту группу можно считать вложенной в $SL(n)$. Для группы G определено естественное действие на V, поэтому можно рассмотреть полупрямое произведение $R = G \times V$, операция в котором определяется как

$$(g, u) \circ (h, v) = (gh, u + gv). \tag{2.1}$$

Здесь gv обозначает действие g на вектор v.

В дальнейшем будет удобно рассматривать матичную реализацию такого полупрямого произведения:

$$\begin{pmatrix} & u^1 \\ C & \vdots \\ & u^n \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix}, C \in G, u \in V. \tag{2.2}$$

Элементы алгебры Ли $\mathfrak{r}$ группы R в матричном виде имеют вид

$$\begin{pmatrix} & u^1 \\ \xi & \vdots \\ & u^n \\ 0 \dots 0 & 0 \end{pmatrix}, \xi \in \mathfrak{g}, u \in V. \tag{2.3}$$

Элементы коалгебры удобно представлять в виде матриц

$$\begin{pmatrix} & 0 \\ X & \vdots \\ & 0 \\ a_1 \dots a_n & 0 \end{pmatrix}, X \in \mathfrak{g}^*, a \in V^*. \tag{2.4}$$

Здесь $\mathfrak{g}^*$ обозначает ортогональное дополнение к V, а V^* – ортогональное дополнение к $\mathfrak{g}$. Спаривание элементов алгебры и коалгебры – след произведения соответствующих матриц.

Для того, чтобы работать в координатах удобно использовать тензорные обозначения. Элементы пространства V – векторы, элементы пространства V^* –ковекторы, элементы пространств $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ – линейные операторы на V, то есть тензоры типа $(1,1)$. Действие оператора $C \in \mathfrak{g}$ на вектор $u \in V$ – свертка $C_i^j u^i$.

В этих обозначениях нетрудно установить, каким условиям удовлетворяют матрицы из G и $\mathfrak{g}$. Условие того, что операторы из G сохраняют форму Λ записывается в виде

$$\Lambda_{ij} C_\alpha^i C_\beta^j = \Lambda_{\alpha\beta}. \tag{2.5}$$

Ясно, что для алгебры $\mathfrak{g}$ это условие переписывается в виде

$$\Lambda_{i\beta} \xi_\alpha^i + \Lambda_{\alpha i} \xi_\beta^i = 0. \tag{2.6}$$

Наша цель – описать инварианты981коприсоединенного действия группы Ли R в инвариантных терминах. Для этого нам понадобится явное выражение для Ad^* в выбранных нами координатах. Для сокращения обозначений будем матрицу (2.2) записывать в виде пары элементов (C, u). (Соответственно матрицы (2.3) и (2.4) в виде пар (ξ, u) и (X, a)).

Теорема 2.1. *Пусть Λ^{ij} – тензор обратный к Λ_{ij}, то есть такой, что $\Lambda_{ij}\Lambda^{jk} = \delta_i^k$. Тогда*

$$Ad^*_{(C,u)}(X, a) = (CXC^{-1} + \frac{1}{2}(a_i u^j - \Lambda^{j\alpha} a_\alpha \Lambda_{i\beta} u^\beta), (C^{-1})_i^j a_j) \tag{2.7}$$

Доказательство. Чтобы выписать явную формулу для Ad^* можно воспользоваться общей формулой для Ad^* для полупрямых сумм вида $\mathfrak{g} +_\varphi V$ (см. [5]):

$$Ad^*_{(C,u)}(X, a) = (Ad^*_C(X) + A(u, a), \varphi(C)a). \tag{2.8}$$

A в этой формуле обозначает отображение $A\colon V \times V^* \to \mathfrak{g}^*$, определяемое равенством

$$\langle A(u, a), \xi\rangle = \langle \varphi(\xi)u, a\rangle. \tag{2.9}$$

В нашем случае получаем

$$\langle A(u, a), \xi\rangle = \xi^j_i u^i a_j = \langle \xi, u^i a_j\rangle. \tag{2.10}$$

Матрица $u^i a_j$ вообще говоря не лежит в $\mathfrak{g}^*$. Для того, чтобы получить выражение для $A(u, v)$ нужно спроектировать эту матрицу на $\mathfrak{g}^*$ ортогонально $\mathfrak{g}$.

Лемма 2.1. *Матрица $Y_1 = u^i a_j - \Lambda^{i\alpha} a_\alpha \Lambda_{\beta j} u^\beta$ лежит в $\mathfrak{g}^*$, а матрица вида $Y_2 = u^i a_j + \Lambda^{i\alpha} a_\alpha \Lambda_{\beta j} u^\beta$ лежит в $\mathfrak{g}^\perp$.*

Оба утверждения проверяются непосредственно. Для того, чтобы проверить, что матрица Y_1 лежит в подпространстве $\mathfrak{g}^*$ нужно проверить, что для матрицы $\bar{Y}_1 \in \mathfrak{g}$, которая имеет те же координаты, что и Y_1 выполняется соотношение: (2.6):

$$\Lambda_{ik}(Y_1)^i_j = \Lambda_{ik}(u^i a_j - \Lambda^{i\alpha} a_\alpha \Lambda_{\beta j} u^\beta). \tag{2.11}$$

Если поменять порядок индексов у Λ_{ik} и у $\Lambda_{\beta j}$ выражение не изменится, но после всех сверток получим

$$\Lambda_{ik}(Y_1)^i_j = \Lambda_{ki} u^i a_j - a_k \Lambda_{j\beta} u^\beta. \tag{2.12}$$

Аналогично для $\Lambda_{ji}(Y_1)^i_k$ получаем

$$\Lambda_{ji}(Y_1)^i_k = \Lambda_{ij}u^i a_k - a_j\Lambda_{k\beta}u^\beta, \tag{2.13}$$

а значит $\Lambda_{ik}(Y_1)^i_j + \Lambda_{ji}(Y_1)^i_k = 0$.

Остается проверить, что Y_2 ортогонален $\mathfrak{g}$. Пусть $\xi \in \mathfrak{g}$. Тогда

$$\langle Y_2, \xi\rangle = \xi^j_i(u^i a_j + \Lambda^{i\alpha}a_\alpha\Lambda_{\beta j}u^\beta). \tag{2.14}$$

Пользуясь (2.6), получаем

$$\langle Y_2, \xi\rangle = \xi^j_i u^i a_j - \Lambda^{i\alpha}a_\alpha\Lambda_{ji}\xi^j_\beta u^\beta = 0. \tag{2.15}$$

Доказанная лемма означает, что проекцию матрицы $a_i u^j$ на подпространство $\mathfrak{g}^*$ можно записать в виде $\frac{1}{2}(a_i u^j - \Lambda^{j\alpha}a_\alpha\Lambda_{i\beta}u^\beta)$, что и требовалось. $\square$

Для того, чтобы получить выражение для инвариантов Ad^*, сопоставим каждому элементу $(X, a) \in \mathfrak{g}^*$ матрицу следующего вида:

$$M_{(X,a)} = \begin{pmatrix} & \Lambda^{1i}a_i \\ X & \vdots \\ & \Lambda^{ni}a_i \\ a_1 \dots a_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

То есть в последней строке запишем координаты a, а в последнем столбце запишем координаты вектора, который получится, если у a поднять индекс с помощью Λ.

Посмотрим, что происходит с матрицей $M_{(X,a)}$ если мы действуем на (X, a) с помощью Ad^*. Нетрудно проверить, что

$$M_{Ad^*_{(C,0)}(X,a)} = \bar{C}M\bar{C}^{-1}, \tag{2.17}$$

где $\bar{C}$ обозначает матрицу

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} & 0 \\ C & \vdots \\ & 0 \\ 0\ldots0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Это означает, что при действии элементов вида $(C, 0)$ инварианты матрицы M не меняются. Посмотрим, что происходит при действии элементов вида (E, u). Из явного вида для Ad^* ясно, что последние строка и столбец остаются неизменными, а к каждой строке (столбцу) матрицы X прибавляется с некоторым весом последняя строка (столбец).

Ясно, что при такой операции остаются неизменными диагональные миноры матрицы M, содержащие последнюю строку и последний столбец. Напомним, что коэффициенты характеристического многочлена любой матрицы могут быть записаны как суммы ее диагональных миноров. Для того, чтобы получить сумму диагональных миноров матрицы M, содержащих последнюю строку и столбец нужно из суммы всех ее диагональных миноров вычесть сумму миноров матрицы X соответствующего порядка.

Приведенные выше рассуждения показывают, что коэффициенты многочлена

$$\det(M - \lambda E) + \lambda \det(X - \lambda E) \tag{2.19}$$

являются инвариантами коприсоединенного действия группы R.

Из доказательства ясно, что ответ не сильно изменится, если вместо действия $\mathfrak{g}$ на V рассмотреть несколько его “копий”:

$$\mathfrak{r}_k = \mathfrak{g} +_{\varphi^k} V^k. \tag{2.20}$$

В этом случае удобно считать, что у векторов a и ковекторов u есть дополнительный индекс ζ, меняющийся от 1 до k. Действие $\langle a, u\rangle$ теперь будет записываться в виде $u^{i\zeta}a_{i\zeta}$. Соответственно в формуле для $A(u, v)$ ((2.10)) получим

$$\langle A(u, a), \xi\rangle = \xi_i^j u^{i\zeta} a_{j\zeta} = \langle \xi, u^{i\zeta} a_{j\zeta}\rangle. \tag{2.21}$$

Далее нужно описать проекцию последней матрицы на $\mathfrak{g}$, но поскольку приведенные выше выкладки справедливы для каждого слагаемого в сумме по ζ, то они справедливы и для всей суммы в целом.

Ясно, что если рассмотреть матрицу

$$M_{(X,a),k} = \begin{pmatrix} & & \Lambda^{1i}a_{i1} & & \Lambda^{1i}a_{ik} \\ & X & \vdots & \dots & \vdots \\ & & \Lambda^{ni}a_{i1} & & \Lambda^{ni}a_{ik} \\ a_{11} & a_{n1} & & & \\ \dots\dots\dots & & & 0 & \\ a_{1k} & a_{nk} & & & \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

для нее будут справедливы те же рассуждения, что и для матрицы $M_{(X,a)}$, а именно, суммы ее диагональных миноров, содержащих последние k столбцов будут инвариантами.

Таким образом мы получаем следующее выражение для инвариантов $\mathfrak{r}_k$:

Теорема 2.2. *Рассмотрим многочлен* $\det(M - \lambda E)$. *Коэффициент при* λ^m *является многочленом* F_m *от элементов* X *и переменных* a_{ij}. *Обозна-*

чим $\bar{F}_m$ сумму тех мономов в F_m, в которых суммарная степень по переменным a_{ij} равна $2k$. Тогда многочлены $\bar{F}_m$ являются инвариантами коприсоединенного действия группы $\mathfrak{r}_k$.

Отказаться от условия на форму Λ не удается. Если группа G сохраняет произвольную билинейную форму Λ на V, то она сохраняет одновременно ее симметричную часть и кососимметричную части, поскольку они выражаются через Λ. Это значит, что интересующая нас группа является пересечением двух групп и проекция на ее алгебру устроена более сложно.

Вопрос о полноте полученного набора нужно рассматривать отдельно для каждого вида алгебр.

2.2 Инварианты и орбиты коприсоединенного представления

2.2.1 Инварианты для алгебры Ли $so(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^n)^k$

Посмотрим, какой результат дает формула, полученная в предыдущем разделе. Инварианты для алгебр этого вида были описаны в работе [14].

Для того, чтобы показать, что построенные в теореме 2.2 инварианты выделяют орбиты найдем в начале индекс алгебры Ли $so(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^n)^k$, воспользовавшись теоремой Раиса.

Инвариантами представления φ^* являются скалярные произведения векторов из $\mathbb{R}^n$ (мы будем обозначать скалярное произведение круглыми скобками). Независимыми будут всевозможные попарные произведения векторов

(a^i, a^j) (включая скалярные квадраты), то есть индекс представления φ равен $\frac{k(k+1)}{2}$. Аннулятором для элемента $(\mathbb{R}^n)^k$ общего положения будет $so(n-k)$. Окончательно получаем

$$\operatorname{ind} so(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^n)^k = \frac{k(k+1)}{2} + \left[\frac{n-k}{2}\right].$$

Это совпадает с количеством ненулевых функций, построенных нами.

Покажем, что градиенты построенных нами функций независимы в точке общего положения. Для этого достаточно указать подпространство, в ограничении на которое рассматриваемые функции независимы. Рассмотрим матрицы вида

$$M_{(X,a)} = \begin{pmatrix} 0 & 0\ldots0 & a \\ 0 & & 0 \\ \vdots & X & \vdots \\ 0 & & 0 \\ a & 0\ldots0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X \in so(n-1). \tag{2.23}$$

Инвариантами в этом случае будут a^2 и $a^2\mathrm{tr}X^k$. Среди функций $a^2\mathrm{tr}X^k$ найдется $\operatorname{ind} so(n-1)$ независимых между собой функций, которые вместе с первым инвариантом обеспечат $\operatorname{ind}(so-1)+1 = \operatorname{ind} so(n) +_\varphi \mathbb{R}^n$. Для большего числа слагаемых в полупрямой сумме нужно рассмотреть ограничение на подпространство вида

$$
M_{(X,a),k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \begin{matrix} a_1^1 & & a_1^k \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_k^1 & & a_k^k \end{matrix} \\ & & \\ 0 & X & 0 \\ & & \\ \begin{matrix} a_1^1 \dots a_k^1 \\ \vdots \\ a_1^k \dots a_k^k \end{matrix} & 0 & 0 \end{pmatrix}, X \in so(n-k), a^i \in \mathbb{R}^k \qquad (2.24)
$$

Инвариантами будут всевозможные попарные произведения (a^i, a^j) и следы степеней матрицы X. Ясно, что из этого набора можно выбрать нужное количество $\left(\operatorname{ind} so(n-k) + \frac{k(k+1)}{2}\right)$ независимых инвариантов. В случае, если $k > n$ достаточное число независимых инвариантов можно выбирать из попарных произведений векторов a^i.

Выпишем в явном виде несколько инвариантов $so(n) +_\varphi \mathbb{R}^n$:

$$
I_0 = (a, a),
$$

$$
I_2 = 2(a, X^2 a) - \mathrm{tr} X^2 (a, a)
$$

$$
I_4 = 4(a, X^4 a) - 2\mathrm{tr} X^2 (a, X^2 a) + (\mathrm{tr} X^2)^2 (a, a) - \mathrm{tr} X^4 (a, a).
$$

2.2.2 Орбиты для алгебры Ли $so(n) + \mathbb{R}^n$

Теорема 2.3. *Орбиты в $so(n) + \mathbb{R}^n$ бывают следующих топологических типов:*

1. *Регулярная орбита — расслоение над* T^*S^{n-1} *со слоем* K*, где* K *— регулярная орбита в* $so(n-1)$.

2. *Сингулярная орбита первого типа — расслоение над* T^*S^{n-1} *со слоем* K*, где* K *— сингулярная орбита в* $so(n-1)$.

3. *Сингулярная орбита второго типа — орбита в* $so(n)$ *(регулярная или сингулярная).*

Доказательство. По сути эта теорема – применение результатов первой главы к алгебре $so(n) + \mathbb{R}^n$. Поскольку аннулятором для ненулевого элемента в $\mathbb{R}^n$ является полупростая алгебра $so(n-1)$ любое действие соответствующей группы вполне приводимо. Поэтому слой E_a в теореме 1.8 каноническим образом представляется в виде прямого произведения произведение базы расслоения (орбиты в двойственном пространстве к $so(n-1)$) на слой (евклидово пространство размерности n).

Это позволяет заменить в описании орбиты базу расслоения на T^*S^{n-1}, а слой – на орбиту в $so(n)$. В регулярном случае эта орбита будет регулярной.

Для регулярной орбиты расслоение K не является тривиальным ни для каких n кроме $n = 2, 4, 8$. Тривиальность расслоения для $n = 2, 4, 8$ следует из параллелизуемости сфер S^1, S^3 и S^7. Отдельно можно выделить случай $n = 3$, здесь аннулятор регулярного элемента коммутативен и орбитой является кокасательное роасслоение к сфере (с подкрученной симплектической структурой).

Для всех остальных размерностей расслоение будет нетривиальным, поскольку тривиализация этих расслоения эквивалентна параллелизуемости касательного расслоения сфер соответствующей размерности.

$\square$

Канонический представитель для каждой орбиты – элемент вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \multicolumn{3}{c}{\dotfill} & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & \multicolumn{3}{c}{\dotfill} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} & 0 \\ 0 & \multicolumn{3}{c}{\dotfill} & 0 & a \end{pmatrix},$$

в регулярном случае все λ_i различны. В случае сингулярной орбиты первого типа некоторые значения имеют кратность больше 2. Канонический представитель для каждой орбиты — элемент вида

$$\begin{pmatrix} I_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dotfill} & 0 \\ 0 & I_{n_2}(\lambda_2) & \multicolumn{2}{c}{\dotfill} & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & \\ 0 & \multicolumn{1}{c}{\dotfill} & 0 & I_{n_k}(\lambda_k) & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\dotfill} & 0 & a \end{pmatrix},$$

где $I_k(\lambda)$ — блок $2k \times 2k$ вида

$$\begin{pmatrix} & & \lambda & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda \\ -\lambda & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & -\lambda & & \end{pmatrix}$$

Орбиты характеризуются набором кратностей собственных значений $n_1, \ldots, n_k$, причем $\sum_k n_k = n - 1$ и не более чем одна из них (отвечающая нулевому собственному значению) нечетна. Аннулятор такой орбиты — прямая сумма

$$\mathbb{R} + \sum_k SO(n_k).$$

Размерность аннулятора равна $1+\sum_k \frac{n_k(n_k-1)}{2}$, а индекс равен $1+\sum_k \frac{n_k}{2} = [\frac{n+1}{2}]$.

Сингулярные орбиты второго типа являются орбитами в $SO(n)$. Канонический представитель для каждой орбиты — элемент вида

$$\begin{pmatrix} I_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & I_{n_2}(\lambda_2) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & & \ddots \qquad 0 & \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots \; 0 & I_{n_k}(\lambda_k) & 0 \end{pmatrix},$$

где $I_k(\lambda)$ — блок $2k \times 2k$ вида

$$\begin{pmatrix} & & & \lambda & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda \\ -\lambda & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & -\lambda & & & \end{pmatrix}$$

Орбиты характеризуются набором кратностей собственных значений $n_1, \dots, n_k$, причем $\sum_k n_k = n$ и не более чем одна из них (отвечающая нулевому собственному значению) нечетна. Аннулятор такой орбиты — прямая сумма

$$\sum_k SO(n_k) + R^{n_k}.$$

Размерность аннулятора равна $\sum_k \frac{n_k(n_k+1)}{2}$, индекс равен $\sum_k [\frac{n_k+1}{2}] = \frac{n+1}{2}$.

Утверждение 2.1. *Для любого элемента $a \in so(n) + \mathbb{R}^n$ выполняется равенство $indAnn(a) = ind(so(n) + \mathbb{R}^n)$.*

2.2.3 Инварианты для алгебры Ли $sp(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^{2n})^k$

Как и в предыдущем случае, среди инвариантов, которые дает теорема 2.2, многие обращаются в 0. Покажем, что среди них найдется нужное число линейно независимых. Индекс алгебре снова находится по теореме Раиса 1.2.

В этом случае ответ зависит от четности k. Для четных k инвариантами представления φ^* являются всевозможные косые произведения $\omega(a^i, a^j)$, $i \neq j$.

Аннулятором регулярного элемента будет $sp(n-k)$, таким образом

$$\operatorname{ind} sp(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^{2n})^k = \frac{k(k-1)}{2} + n - k, \text{ если } k = 2l.$$

Для нечетного k количество инвариантов представления φ^* по-прежнему равно $\frac{k(k-1)}{2}$, но аннулятор регулярного элемента имеет вид полупрямой суммы $sp(n-k)$ с алгеброй Гейзенберга $\mathfrak{h}_{2(n-k)}$. Индекс этой алгебры равен $n-k+1$, откуда

$$\operatorname{ind} sp(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^{2n})^k = \frac{k(k-1)}{2} + n - k + 1, \text{ если } k = 2l-1.$$

Будем считать, что мы работаем в координатах, в которых кососимметрическая форма составлена из матриц 2×2 вида $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, расположенных на главной диагонали. Для случая $sp(n) +_{\phi} \mathbb{R}^{2n}$ рассмотрим ограничение инвариантов на подпространство с координатами

$$M_{(X,a)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\dots 0 & a \\ 1 & 0 & 0\dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & X & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & a & 0\dots 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X \in sp(n-1). \tag{2.25}$$

Инвариантами так же как и в случае $so(n) + \mathbb{R}^n$ будут следы степеней $\mathrm{tr} X^k$ и a^2. Ясно, что среди $\mathrm{tr} X^k$ найдется $n-1 = \operatorname{ind} sp(n-1)$ независимых инвариантов.

Для полупрямой суммы с четным числом слагаемых можно рассмотреть подпространство с координатами

$$M_{(X,a),k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ & & \\ 0 & X & 0 \\ & & \\ a_1^1 \dots a_{2k}^1 & & \\ \vdots & 0 & 0 \\ a_1^k \dots a_{2k}^k & & \end{pmatrix}, X \in sp(n-k), a^i \in \mathbb{R}^k \tag{2.26}$$

Звездочка означает результат применения матрицы Λ^{ij}. Здесь нужное число инвариантов набирается из $n-k$ инвариантов на $sp(n-k)$ и $2k^2-k$ попарных косых произведений $\omega(a^i,a^j)$.

В случае с нечетным числом слагаемых $(2k-1)$ будем считать, что $a_{2k}^i = 0$ (при этом в части, обозначенной звездочкой, нули будут в $2k-1$ строке), а X будем считать блочно-диагональной матрицей, первый блок у которой имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Инвариантами будут $\mathrm{tr} X^i$ (среди них можно выбрать $n-k$ независимых), $\sum_i (a_{2k-1}^i)^2$ и попарные косые произведения $\omega(a^i,a^j), i \neq j$.

Явные вычисления дают следующие выражения для инвариантов:

$$I_1 = \omega(a, aX),$$

$$I_3 = 2\omega(a, aX^3) - \omega(a, aX)\mathrm{tr}X^2,$$

$$I_5 = 4\omega(a, aX^5) - 2\omega(a, aX^3)\mathrm{tr}X^2 + \omega(a, aX)((\mathrm{tr}X^2)^2 - \mathrm{tr}X^4).$$

2.2.4 Орбиты для алгебры Ли $sp(n) +_{\varphi} \mathbb{R}^{2n}$

Теорема 2.4. *Орбиты коприсоединенного действия для алгебры Ли вида $sp(n) +_{\varphi} \mathbb{R}^{2n}$ бывают следующих топологических типов:*

1. *регулярная орбита имеет вид расслоения над $T^*(\mathbb{R}^{2n}\backslash 0)$ слой которого является прямым произведением $\mathbb{R}^{2n-2} \otimes K$, где K — регулярная орбита в $sp(n-1)$.*

2. *Сингулярная первого типа имеет вид расслоения над $T^*(\mathbb{R}^{2n}\backslash 0)$ слой которого является прямым произведением $\mathbb{R}^{2n-2} \otimes K$, где K — сингулярная орбита в $sp(n-1)$.*

3. *Сингулярная орбита первого типа — расслоение над $T^*(\mathbb{R}^{2n}\backslash 0)$ со слоем Q, где Q — орбита (возможно сингулярная) коприсоединенного действия алгебры $sp(n-1) +_{\phi} \mathbb{R}^{2n-2}$.*

4. *Сингулярная орбита второго типа – орбита коприсоединенного действия алгебры Ли $sp(n)$.*

Доказательство. Доказательство теоремы следует из 1.8. Поскольку орбитой элемента в $\mathbb{R}^{2n}$ является все пространство кроме точки 0, орбита расслоения является расслоением над $T^*(\mathbb{R}^{2n})$, слой которого является орбитой в $Ann(a)$. Аннулятором регулярного элемента является полупрямая сумма с алгеброй Гейзенберга $sp(n-1) +_{\rho} \mathfrak{h}_{2n-2}$, где $\mathfrak{h}_{2n-2}$ — идеал, изоморфный алгебре Гейзенберга и сумма берется по симплектическому действию $sp(n-1)$ на пространстве $\mathfrak{h}_{2n-2}$.

Орбита коприсоединенного действия для такой алгебры Ли описывается теоремой 1.13, регулярная орбита представляет собой прямую сумму $\mathbb{R}^{2n-2}$ и орбиты в $sp(n-1)$.

Сингулярные орбиты описываются теоремой 1.9 $\square$

2.2.5 Инварианты для алгебры $sl(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^n)^k$

Индекс алгебры Ли можно найти по теореме Раиса 1.2. Рассмотрим для начала более простой случай $sl(n) +_{\varphi} \mathbb{R}^n$. В тривиальном случае $n = 1$ индекс этой алгебры равен 1. При $n > 1$ индекс представления φ^* равен 0, а значит $\operatorname{ind} sl(n) +_{\varphi} \mathbb{R}^n = \operatorname{ind} Ann_{\varphi}(a)$.

Аннулятор элемента общего положения изоморфен $sl(n-1) +_{\varphi} \mathbb{R}^{n-1}$. Проведя те же рассуждения получим, что

$$\operatorname{ind} sl(n) +_{\varphi} \mathbb{R}^n = \operatorname{ind} sl(n-1) +_{\varphi} \mathbb{R}^{n-1} = \cdots = \operatorname{ind} sl(1) +_{\varphi} \mathbb{R} = 1. \quad (2.27)$$

Для нескольких слагаемых в полупрямой сумме ситуация аналогична. Тривиальными случаями здесь будут случаи $n \leq k$. В этом случае аннулятор элемента общего положения тривиален, а индекс представления равен разности $\dim(\mathbb{R}^n)^k - \dim sl(n)$.

Если $n > k$, то индекс представления φ^* равен нулю и аннулятор изоморфен $sl(n-k) +_{\varphi} (\mathbb{R}^{n-k})^k$. Таким образом по индукции можно прийти к случаю $k \geq n$. Окончательно получаем следующий ответ:

$$\operatorname{ind} sl(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^n)^k = kr - r^2 + 1, \text{ где } r \text{ — остаток от деления } n \text{ на } k$$

Для того, чтобы описать инварианты для алгебры $sl(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^n)^k$ нужно найти явный вид Ad^* для этой алгебры Ли. Как и в предыдущих случаях будем считать, что группа $SL(n) +_{\varphi} (\mathbb{R}^n)^k$ вложена в $sl(n+k)$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} C & u_1 \dots u_k \\ 0, \dots, 0 & \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

$C \in SL(n)$, $u_i \in \mathbb{R}^n$. Коалгебру удобно представить в виде

$$\begin{pmatrix} X & 0 \dots 0 \\ a_1 & \\ \dots & 0 \\ a_k & \end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

Прямое вычисление показывает, что

$$Ad^*_{(C,u)}(X,a) = (Ad^*_C X + ua - \mathrm{tr}(ua)E, aC^{-1}). \tag{2.30}$$

Для проверки этой формулы нужно просто убедиться, что матрица λE ортогональна $sl(n)$:

$$\langle \lambda E, X \rangle = \mathrm{tr} \lambda E X = \lambda \mathrm{tr} X = 0. \tag{2.31}$$

Теорема 2.5. *Единственным инвариантом коприсоединенного действия группы $SL(n) +_{\phi} \mathbb{R}^n$ является определитель матрицы M, составленной из строк a, aX, aX^2, …, aX^{n-1}, то есть объем параллелепипеда, натянутого на эти векторы.*

Доказательство. Сначала проверим, что $\det M$ не меняется при сопряжении элементом $(C, 0)$. При сопряжении этим элементом элемент коалгебры (X, a) переходит в элемент (CXC^{-1}, aC^{-1}). При этом в матрице M каждая строка умножается справа на C^{-1}. Это означает, что матрица M переходит в MC^{-1}, но $\det MC^{-1} = \det M \det C^{-1} = \det M$.

Теперь рассмотрим, что происходит при сопряжении элементом $(0,u)$. Ковектор (X,a) при этом переходит в $(X+va-\mathrm{tr}(va)E)$. Посмотрим, как при этом изменяется матрица M. Первая строка матрицы остается неизменной. Вторая строка имеет вид $a(X+va-\mathrm{tr}(va)E)$. Удобно записать это выражение, используя тензорные обозначения:

$$a_i(X^i_j+v^ia_j-n*v^ia_i\delta^i_j)=a_iX^i_j+a_iv^ia_j-v^ia_ia_j=a_iX^i_j, \tag{2.32}$$

то есть ко второй строке матрицы прибавляется первая с некоторым коэффициентом, что не меняет определителя матрицы.

Далее не трудно по индукции проверить, что в k-ой строке матрицы M будет стоять линейная комбинация первых k строк предыдущей матрицы (при этом k-ая строка исходной матрицы входит в эту линейную комбинацию с коэффициентом 1).

$$a(X+va-\mathrm{tr}(va)E)^k=a(X+va-\mathrm{tr}(va)E)^{k-1}(X+va-\mathrm{tr}(va)E). \tag{2.33}$$

Пользуясь предположением индукции, получаем, что

$$a(X+va-\mathrm{tr}(va)E)^{k-1}=aX^{k-1}+b,$$

где b — линейная комбинация первых $k-2$ строк. Отсюда

$$a(X+va-\mathrm{tr}(va)E)^k=(aX^{k-1}+b)(X+va-\mathrm{tr}(va)E)=aX^k+c, \tag{2.34}$$

где c — линейная комбинация первых $k-1$ строк исходной матрицы. Это означает, что определитель матрицы не меняется.

Этот инвариант нетривиален, поскольку для матрицы и вектора общего положения векторы $a,aX,\ldots,aX^n$ линейно независимы. □

Теорема 2.6. *Пусть $n = kd+r$, $r < k$. Тогда для группы $SL(n) +_\varphi (\mathbb{R}^n)^k$ инвариантами коприсоединенного представления будут определители матриц $M_{i_1\dots i_r}$, составленных из следующих строк: $a_1, \dots, a_k$, $a_1X, \dots a_kX$, $\dots$, $a_1X^{d-1}, \dots a_kX^{d-1}$ и r строк вида $a_{i_r}X^d$. Эти инварианты не будут независимы, но из них можно выбрать полный набор независимых инвариантов.*

Доказательство. Доказательство полностью повторяет доказательство для случая $SL(n) + \mathbb{R}^n$. При действии элемента вида $(C, 0)$ матрица $M_{i_1\dots i_r}$ умножается справа на C^{-1}, что не меняет ее определителя.

При действии элемента вида $(0, u)$ строки вида a_iX^q заменяются на строки $a_iX^q + \sum \dots$, где под суммой стоит линейная комбинация векторов a_kX^s, $0 \leq s < q$. Такая замена не меняет определителя матрицы.

Для того чтобы показать, что среди этих инвариантов можно выбрать нужное число независимых, рассмотрим невырожденную диагональную матрицу X с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. И последние r из них равны 1. Выберем векторы a^i так, чтобы у каждого из них из первые kd координат были нулевыми, за исключением d единиц (у a^1 это будут первые d координат, у a^2 – вторые d и т.д. Оставшиеся r координат мы выбираем произвольно. В этом случае матрица M будет иметь блочно-диагональный вид. Рассмотрим k "укороченных" векторов, составленных из последних r координат. Описанные инварианты можно трактовать как объем параллелепипеда, натянутого на первые r "укороченных" векторов и коэффициенты разложения остальных "укороченных" векторов по этому базису, которые, очевидно, независимы.

□

2.2.6 Орбиты для алгебры $sl(n) +_{\varphi^k} (\mathbb{R}^n)^k$

Теорема 2.7. *Орбиты в $sl(n) +_{\phi} \mathbb{R}^n$ бывают следующих топологических типов:*

1. *Регулярная орбита — рассслоение, база которого $T^*(\mathbb{R}^n \backslash 0)$, а слой является аналогичным расслоением для $n-1$, последним в этой цепочке является пространство $T^*(\mathbb{R}^2)$.*

2. *Сингулярная орбита — аналогичное расслоение, но последней в цепочке является некоторая орбита $sl(l)$, являющаяся слоем расслоения с базой $T^*(\mathbb{R}^{l+1} \backslash 0)$.*

Доказательство. Доказательство теоремы следует из теоремы 1.8. Для $n > 1$ орбитой ненулевого элемента $x \in \mathbb{R}^n$ при действии индуцированном присоединенным действием группы будет пространство $\mathbb{R}^n \backslash 0$. Аннулятором x будет алгебра Ли, изоморфная $sl(n-1) + \mathbb{R}^{n-1}$. В $sl(n)$ существует коммутативная подалгебра, трансверсальная $Ann(a)$, поэтому ограничение формы Кириллова на $\mathbb{R}^n \backslash 0$ тривиально.

Сингулярной орбита становится если на одном из шагов орбита проекция элемента на очередной аннулятор такова, что, проекция на коммутативный идеал этого аннулятора равна нулю. В этом случае аннулятором элемента на очередном шаге становится не $sl(k-1) + \mathbb{R}^k$, а $sl(k)$, что добавляет соответствующее прямое слагаемое в описании топологии орбиты.

Указанные расслоения в общем случае не являются прямыми произведениями, поскольку их тривиализация задавала бы параллелизацию сфер S^{k-1}.

$\square$

Глава 3

Бигамильтоновы структуры на алгебрах Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная алгебра Ли. Для функций, определенных на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ определена скобка, называемая скобкой Пуассона–Ли. Дифференциалы функций $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ в данной точке $x \in \mathfrak{g}^*$ естественным образом отождествляются с элементами $\mathfrak{g}$, соответственно определена скобка

$$\{f, g\}(x) = \langle x, [df(x), dg(x)]\rangle.$$

Функциями Казимира для скобки Пуассона–Ли являются инварианты коприсоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Это позволяет надеяться на то, что изучение свойств пуассоновой структуры на $\mathfrak{g}^*$ даст некоторую информацию об инвариантах коприсоединенного представления.

Кроме стандартной скобки Пуассона–Ли на $\mathfrak{g}^*$ можно ввести скобку Пуассона с замороженным аргументом. Для любого элемента $a \in \mathfrak{g}$ определим

$\{,\}_a$:

$$\{f,g\}_a = \langle a, [df(x), dg(x)] \rangle.$$

Можно проверить, что постоянная скобка согласована со скобкой Пуассона–Ли, то есть любая линейная комбинация $\{,\} + \lambda\{,\}_a$ является скобкой Пуассона. Наличие семейства согласованных скобок Пуассона дает дополнительные возможности изучения пуассоновой структуры на орбитах. Подобный подход нередко используется в пуассоновой геометрии [19]. В этой главе мы приведем новые доказательства ряда классических фактов, основанные на бигамильтоновом подходе. Во многих случаях такие доказательства оказываются более простыми и дают дополнительное понимание структуры доказываемых утверждений.

3.1 Теорема Кронекера–Жордана. Кронекеровы индексы алгебры Ли.

Сформулируем в начале классический результат о каноническом виде пучка кососимметрических матриц, теорему Кронекера–Жордана. В случае, если одна из форм $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ невырождена можно перейти к рассмотрению оператора $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$ и задача сводится к теореме Жордана о каноническом виде оператора. В случае, если обе формы имеют ненулевое ядро канонический вид устроен более сложно, обсуждение этих фактов можно найти в работе [20].

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — кососимметрические формы. Тогда существует базис, в котором обе формы приводятся к блочно-диагональному* *виду*

$$\mathcal{A} = diag(A_1, \ldots, A_k), \mathcal{B} = diag(B_1, \ldots, B_k),$$

причем блоки могут быть одного из трех видов:

	A_i	B_i
Жорданов блок, $\lambda \in \mathbb{C}$	$\begin{pmatrix} 0 & J(\lambda) \\ -J(\lambda) & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$
Жорданов блок, $\lambda = \infty$	$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & J(0) \\ -J(0) & 0 \end{pmatrix}$
Кронекеров блок	$\begin{pmatrix} & & & 1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 1 & 0 \\ -1 & & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & \ddots & -1 & & & & \\ & & 0 & & & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & & 0 & 1 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & & & \\ -1 & \ddots & & & & & \\ & \ddots & 0 & & & & \\ & & -1 & & & & \end{pmatrix}$

Здесь (E) обозначает единичную матрицу соответсвующего размера, а $J(\lambda)$ — жорданов блок с собственным значением λ.

Канонический вид однозначно определен с точностью до перестановки блоков, в частности размеры кронекеровых блоков определяются парой форм, а не выбором канонического базиса.

Мы не будем приводить полного доказательства этой теоремы, остановимся лишь на одном важном для нас моменте.

Цепочку векторов p_i, $i = 1, 2, \ldots$ назовем кронекеровой относительно пучка $\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$ (здесь и далее будем считать, что $\mathcal{A}$ является регулярной формой в пучке, то есть ее ранг равен рангу формы общего положения в пучке), если выполняются следующие условия:

1. $\mathcal{A}p_1 = 0$.

2. $\mathcal{A}p_{i+1} = \mathcal{B}p_i$,

Будем говорить, что вектор v является вектором высоты k, если существует кронекерова цепочка p_i, для которой $v = p_k$. Обозначим V_k подпространство всех векторов высоты k. Ясно, что такие векторы действительно образуют подпространство, и имеют место включения $V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq \dots$, причем из-за конечной размерности эта последовательность вложенных подпространств стабилизируется, т.е. существует n такое, что $V_n = V_{n+1} = V_{n+2} = \dots$. Для удобства положим $V_0 = \{0\}$.

Канонический базис в теореме Кронекера-Жордана определен, вообще говоря, неоднозначно. В отличие от него пространства V_i определяются инвариантно, а их размерности связаны естественным образом с размерами кронекеровых блоков: разность $\dim V_{k+1} - \dim V_k$ равна числу блоков размера строго больше $2k - 1$.

Нам понадобится следующее утверждение:

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{A}$ - регулярная скобка пучка $\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$ и a_{ij} — кронекеровы цепочки, которые либо заканчиваются нулем, либо продолжаются до бесконечности, такие что их начальные векторы a_{i0}, $i = 1, \dots, m$ образуют базис в $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Пусть $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_m$ — количество ненулевых векторов в этих цепочках (в случае, если ненулевых векторов бесконечно много мы считаем, что $r = \infty$). Тогда*

1. *$r_i \geq k_i$, где $2k_1 - 1 \leq \cdots \leq 2k_m - 1$ — размеры кронекеровых блоков.*

2. *Можно выбрать числа n_i так, что векторы $a_{ij}, j < n_i$ будут линейно независимы, причем $a_{ij}, j < n_i, i \leq k$, образуют базис в пространстве V_k.*

Доказательство. В условиях теоремы подпространства V_i можно описать следующим образом:

$$V_1 = \mathrm{span}\{a_{i0}\} \tag{3.1}$$

$$V_2 = V_1 + \mathrm{span}\{a_{i1}\} \tag{3.2}$$

$$\ldots \tag{3.3}$$

$$V_k = V_{k-1} + \mathrm{span}\{a_{ik}\}. \tag{3.4}$$

Вложение $V_{k-1} + \mathrm{span}\{a_{ik}\} \subseteq V_k$ очевидно из определения. Докажем обратное утверждение по индукции. Для V_1 включение имеет место по условию теоремы. Рассмотрим произвольный вектор $h \in V_k$. По определению $\mathcal{A}h = \mathcal{B}a_{k-1}$. По предположению индукции $h_{k-1} \in V_{k-1}$ выражается линейно через векторы $a_{ij}, j \leq k-1$. Получаем $\mathcal{A}h = \mathcal{B}h_{k-1} = \mathcal{B}\sum_{j \leq k-1} c^{ij} a_{ij} = \mathcal{A}\sum_{j \leq k-1} c^{ij} a_{ij+1}$. Последнее равенство означает, что h может отличаться от $\sum_{j \leq k-1} c^{ij} a_{ij+1}$ лишь на вектор, лежащий в ядре формы $\mathcal{A}$, но $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = V_1 \subseteq V_{k-1}$.

Пусть некоторый вектор a_{ij} высоты k линейно выражается через другие векторы меньшей высоты либо через векторы той же высоты других цепочек. Тогда то же самое верно для любого вектора a_{ij+l}. Это означает, что для каждой цепочки можно определить число n_i так, чтобы векторы $a_{ij}, j < n_i$ были линейно независимы, но их линейная оболочка совпадала бы с линейной оболочкой всех векторов $a_{ij}, j < n_i$. Назовем n_i эффективными длинами цепочек. Вообще говоря эти величины определены неоднозначно: на очередном шаге нам может потребоваться выбрать один из нескольких зависимых векторов и оборвать соответствующую цепочку. Тем не менее набор чисел n_i (без учета их порядка) имеет инвариантный смысл, поэтому определяется однозначно. Опишем это инвариантное определение.

Если мы укоротим все цепочки до их эффективной длины, мы можем интерпретировать разность $\dim V_{l+1} - \dim V_l$ как количество цепочек, эффективная длина которых превосходит j. Но выше было уже отмечено, что эта разность равна количеству кронекеровых блоков размера больше $2l - 1$. Это означает, что количество кронекеровых блоков размера $2n_l - 1$ равно количеству цепочек с эффективной длиной n_l. Иначе говоря каждой цепочке соответствует кронекеров блок, при этом размер этого блока равен $2n_l - 1$, где n_l — эффективная длина соответствующей цепочки. Набор чисел n_l таким образом не зависит от произвола в выборе базиса в $\mathrm{span}(a_{ij})$, поскольку определяется набором размеров кронекеровых блоков в каноническом виде.

$\square$

Теорема 3.2 показывает, что структура кронекеровых клеток в канонической форме пучка полностью определяется набором кронекеровых цепочек. Вернемся теперь к случаю алгебр Ли. Как уже отмечалось, зафиксировав произвольный элемент $a \in \mathfrak{g}^*$ мы можем рассмотреть пучок кососимметрических форм $\mathcal{A}_a + \lambda\mathcal{A}_x$. Оказывается, что часть канонического базиса, соответствующая кронекеровым клеткам тесно связана с инвариантами коприсоединенного представления. Ключевым соображением здесь является следующий факт, отмеченный Мищенко и Фоменко ([7]):

Утверждение 3.1. *Пусть $f(x)$ — (локальный) инвариант коприсоединенного представления в окрестности регулярной точки $a \in \mathfrak{g}^*$. Рассмотрим разложение $f(a - \lambda x)$ в ряд по степеням λ:*

$$f(a - \lambda x) = \sum_i \lambda^i g_i(x),$$

где $g_i(x)$ — однородные многочлены степени i. Тогда градиенты dg_i образуют кронекерову цепочку относительно пучка форм $\mathcal{A}_a + \lambda \mathcal{A}_x$.

Доказательство. Поскольку $f(x)$ — локальный инвариант, градиент $df(x)$ лежит в ядре формы $\mathcal{A}_x$ для любого x. Запишем это условие в точке $a - \lambda x$:

$$\mathcal{A}_{a-\lambda x} df(a - \lambda x) = \mathcal{A}_a \sum_i \lambda^i dg_i - \lambda \mathcal{A}_x \sum \lambda^i dg_i = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ получаем

$$\mathcal{A}_a dg_i = \mathcal{A}_x dg_{i-1}, i \geq 2 \tag{3.5}$$

$$\mathcal{A}_a dg_1 = 0. \tag{3.6}$$

что доказывает утверждение. □

Можно показать, что для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ размеры кронекеровых блоков одинаковы для почти всех пар $(x, a) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*$. Рассмотрим регулярный элемент a. Выберем локальные инварианты $f_i(x)$, такие что в точке a их градиенты порождают ядро скобки $\mathcal{A}_a$. В соответствии с теоремой 3.1 построим для каждого инварианта кронекерову цепочку. Размеры кронекеровых блоков определяются тем, каковы эффективные длины построенных цепочек. Эти длины зависят вообще говоря от точки x. Рассмотрим размерности подпространств V_i

для всевозможных x и выберем $d_i = max_{a,x}V_i(a,x)$. Условие $dimV_i(a,x_0) < d_i$ означает, что какие-то из векторов высоты i, независимые в какой-то точке x оказались зависимы в точке x_0. Все такие точки выделяются некоторыми алгебраическими условиями, а значит образуют множество коразмерности по крайней мере 1.

Из приведенного выше рассуждения видно, что множество пар (x,a) для которых размерности $\dim V_i(a,x) < max_{(a,x)} \dim V_i$ имеет коразмерность по крайней мере 1.

Определение 2. *Кронекеровыми индексами алгебры Ли назовем величины k_i, определяемые равенством*

$$k_i = \max_{(a,x)\in\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*} \dim V_i(a,x).$$

Кронекеровы индексы равны размерам кронекеровых блоков в нормальной форме пучка $\lambda\{,\}_x + \lambda\{,\}_a$ для пары (x,a) общего положения.

3.2 Критерий Болсинова и теорема Костанта

Пусть f_i — один из инвариантов коприсоединенного представления. Рассмотрим $f_i(a-\lambda x)$ и разложим его в ряд по степеням λ:

$$f_i(a+\lambda x) = g_{i0} + \sum_j \lambda^j g_{ij}(x),$$

где $g_{ij}(x)$ — однородные многочлены степени k. Говорят, что функции g_{ij} получены методом сдвига аргумента. А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко показали ([8]), что эти функции находятся в инволюции относительно скобки Пуассона–Ли.

Будем говорить, что набор является полным, если количество алгебраически независимых функций в нем равно размерности лагранжева подпространства скобки Пуассона—Ли в точке общего положения, то есть $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$.

Применяя описанную конструкцию ко всем инвариантам алгебры Ли мы получаем набор функций g_{ij}. А.В. Болсиновым доказан следующий критерий, показывающий будет ли набор функций, построенный методом сдвига инварианта полным:

Утверждение 3.2 (А.В.Болсинов). *Пусть $\mathcal{F}_a$ — набор полиномов, построенный методом сдвига аргумента. Тогда их дифференциалы $df(x)$, $f \in \mathcal{F}_a$ порождают в точке x подпространство размерности $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$ тогда и только тогда, когда все элементы вида $a + \lambda x$ регулярны.*

Это утверждение легко выводится из теоремы Кронекер—Жордана о пучке кососимметрических форм.

Доказательство. Условие, что все точки вида $a+\lambda x$ регулярны эквивалентно требованию, чтобы в каноническом виде пучка $\mathcal{A}_a + \lambda\mathcal{A}_x$ отсутствовали жордановы клетки. Наличие жордановой клетки означает, что при $-\lambda_0$ равном собственному значению соответствующей клетки ранг формы $\mathcal{A}_a + \lambda_0\mathcal{A}_x$ меньше, чем ранг формы общего положения в пучке. Это означает, что точке $a + \lambda_0 x$ не является регулярной. Таким образом отсутствие Жордановых клеток эквивалентно отсутствию синглярных элементов на прямой $a + \lambda$.

Из 3.2 и 3.1 следует, что в каждой клетке размерности $2q + 1$ градиенты сдвигов инвариантов задают $q+1$-мерное подпространство. Поскольку количество кронекеровых клеток равно индексу алгебры $\mathfrak{g}$, размерность подпространства, натянутого на градиенты сдвигов инвариантов равна $\frac{1}{2}(Q + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$, где Q — суммарная размерность кронекеровых клеток. Ясно, что это выражение равно $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$ тогда и только тогда, когда $Q = \dim \mathfrak{g}$, то есть жордановы клетки отсутсьвуют. $\square$

Критерий Болсинова позволяет получить простое доказательство утверждения Костанта.

Теорема 3.3 (Костант). *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли. Пусть f_i — канонические инварианты коприсоединенного представления. Тогда градиенты df_i независимы во всех регулярных точках $\mathfrak{g}^*$.*

Сам Костант приводит достаточно сложное доказательство этого факта, основанное на явном виде инвариантов коприсоединенного представления полупростых групп Ли. Мы докажем более сильную теорему. Назовем множеством особых точек в $\mathfrak{g}^*$ множество

$$S = \{x \in \mathfrak{g}^* | \operatorname{corank} \mathcal{A}_x < \operatorname{ind} \mathfrak{g}\}$$

Теорема 3.4. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, множество особых точек в двойственном пространстве имеет коразмерность не меньше двух, $f_1, \dots, f_k$, $k = \operatorname{ind} \mathfrak{g}$ — полиномиальные алгебраически независимые инварианты коприсоединенного представления и $\sum \deg f_i = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$. Тогда градиенты инвариантов df_i независимы во всех регулярных точках $\mathfrak{g}^*$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную регулярную точку x. Поскольку множество особых точек имеет коразмерность 2 найдется такой регулярный вектор a, что прямая $x + \lambda a$ не пересекает множество особых точек. Полнота набора в точке x означает, что на дифференциалы функций g_{ij} натянуто подпространство размерности $\frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g}+\operatorname{ind}\mathfrak{g})$. Поскольку в наборе g_{ij} ровно $\sum_i \deg f_i$ функций, из условия $\sum deg f_i = \frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g}+\operatorname{ind}\mathfrak{g})$ следует, что дифференциалы функций g_{ij} независимы в точке x. Сами инварианты f_i входят в набор как g_{i0}, а значит их дифференциалы также независимы. Размерность аннулятора регулярного элемента совпадает с индексом алгебры Ли, а значит градиенты инвариантов образуют базис в аннуляторе x. □

Оба условия — коразмерность множества особых точек и условие на сумму степеней инвариантов существенны. Приведем примеры, когда из-за нарушения одного из условий теорема не выполняется. Продемонстрируем, что в случае, если условия теоремы не выполняются, могут нарушаться оба свойства: инварианты могут быть зависимы в регулярных точках или независимы в сингулярных точках.

Пример. Рассмотрим полупрямую сумму $so(2) +_\phi \mathbb{R}^2 +_\phi \mathbb{R}^2$, где ϕ – естественное представление $so(2)$. Если ввести в коммутативных идеалах координаты x_1, y_1, x_2, y_2, то инвариантами коприсоединенного представления $\mathfrak{g}$ будут $f_1 = x_1^2 + y_1^2$, $f_2 = x_2^2 + y_2^2$, $f_3 = x_1x_2 + y_1y_2$. Сумма степеней инвариантов не удовлетворяет условию, сформулированному в теореме. Сингулярными будут точки, у которых $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$. Для регулярных точек, у которых $x_1 = x_2 \neq 0, y_1 = y_2 \neq 0$ справедливо равенство $df_3 = \frac{1}{2}(df_1 + df_2)$.

Пример. Рассмотрим полупрямую сумму $sl(2) +_\phi \mathbb{R}^2 +_\phi \mathbb{R}^2$, где ϕ – естественное представление $sl(2)$. Введем в $\mathbb{R}^2+\mathbb{R}^2$ координаты x_1, y_1, x_2, y_2. Единственным инвариантом будет $f_1 = x_1y_2 - x_2y_1$. При этом для сингулярных точек вида $(x_1, y_1) = \lambda(x_2, y_2)$ градиент f_1 не равен 0.

Теорема, аналогичная 3.4, доказана А. Панюшевым в работе [25] с использованием другой техники. Он показывает также, что если $codim\ S \geq 2$ условие $\sum \deg f_i = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$ эквивалентно тому, что дифференциалы df_i линейно зависимы в точности в точках множества S.

Отдельный интерес представляет вопрос о том, как устроено подпространство, натянутое на градиенты инвариантов в особой точке. Костант доказывает следующее утверждение:

Теорема 3.5. *Пусть f — инвариант коприсоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $a \in \mathfrak{g}^*$. Тогда $df(a)$ лежит в центре* $(\mathrm{Ann}(a))$.

Костант приводит это утверждение для редуктивных алгебр, ниже мы приведем доказательство для произвольной алгебры Ли в духе бигамильтонова подхода.

3.3 Теорема Винберга.

Основываясь на наблюдениях А.В. Болсинова, А.Г. Элашвили выдвинул гипотезу, что индекс аннулятора произвольного элемента в алгебре Ли совпадает с индексом всей алгебры.

На сегодняшний день эта гипотеза доказана Шарбонелем для редуктивных алгебр Ли [23] и независимо Якимовой [24] для полупростых алгебр Ли. В доказательстве Шарбонеля активно используются идеи, связанные с бигамильтоновой структурой на алгебрах Ли. Ниже будет построен пример нильпотентной алгебры, показывающий, что для нильпотентных алгебр утверждение гипотезы вообще говоря не выполняется.

В общем случае наиболее сильным результатом, связанным с гипотезой Болсинова–Элашвили является теорема Винберга

Теорема 3.6. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— алгебра Ли,* $a \in \mathfrak{g}^*$ *— произвольный элемент. Тогда* $\operatorname{ind} Ann(a) \geq \operatorname{ind} \mathfrak{g}$.

Доказательство, предложенное Э.Б. Винбергом основано на общих свойствах представлений алгебр Ли. Мы приведем другое доказательство этого факта, основанное на теореме Жордана–Кронекера. Оно позволяет понять, что именно является препятствием для равенства индексов в общем случае.

Доказательство. Пусть a — произвольный элемент. Нас интересуют индексы алгебр $\mathfrak{g}$ и $Ann(a)$. Иначе говоря, размерности ядра скобки Пуассона–Ли для регулярного элемента в каждой алгебре. Пусть x — регулярный элемент в $\mathfrak{g}^*$ такой, что его естественная проекция $\pi\colon \mathfrak{g}^* \to Ann(a)^*$ переводит его в регулярный элемент в $Ann(a)^*$. Рассмотрим пучок кососимметрических форм $\mathcal{A}_x + \lambda\mathcal{A}_a$ и приведем его к каноническому виду. Поскольку x — регулярный элемент, в канонической форме не будет блоков, отвечающих "бесконечному" собственному значению. Количество кронекеровых блоков равно размерности ядра формы $\mathcal{A}_x$, то есть индексу алгебры $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим ограничение формы $\mathcal{A}_x$ на ядро формы $\mathcal{A}_a$. Это ограничение будет совпадать со скобкой Пуассона–Ли на $Ann(a)$, взятой в точке $\pi(x)$. Из канонического вида пучка легко понять, как устроено ядро $\mathcal{A}_a$: каждой кронекеровой клетке соответствует одномерное подпространство, каждой жордановой клетке с нулевым собственным значением — двумерное. Для того, чтобы понять, как устроено ядро ограничения формы на $\mathcal{A}_x$ на $Ker\mathcal{A}_a$ достаточно понять, как оно устроено в каждом из блоков. Поскольку для кронекеровых блоков ядро одномерно, ограничение формы $\mathcal{A}_x$ на него вырождено. Для жордановых блоков размера 2 с нулевым собственным значением (то есть не имеющих единиц над диагональю) ядро формы $\mathcal{A}_a$ будет двумерно, а ограничение формы $\mathcal{A}_x$ на него — невырожденным. В случае, если жордановы блоки имеют больший размер, ядро формы $\mathcal{A}_a$ по прежнему двумерно, но ограничение формы $\mathcal{A}_x$ вырождено.

Мы получаем, что размерность ядра ограничения $\mathcal{A}_x$ на $Ker\mathcal{A}_a$ не меньше количества кронекеровых блоков, но это в точности означает, что выполняется неравенство $\operatorname{ind}\operatorname{Ann}(a) \geq \operatorname{ind}\mathfrak{g}$ $\square$

Помимо доказательства теоремы Винберга, рассматриваемая конструкция дает простой путь для построения контрпримера к гипотезе Болсинова–Элашвили в неполупростом случае. Ясно, что для того, чтобы контрпример был возможен, размерность алгебры должна быть не менее 4, поскольку в матрице формы $\mathcal{A}_a$ должен поместиться хотя бы один жорданов блок размера два. Для четырехмерной алгебры такой пример легко строится: рассмотрим базис ξ_1, ξ_2, η_1, η_2. Пусть $[\xi_1, \eta_1] = [\xi_2, \eta_2] = \eta_1$, $[\xi_1, \eta_2] = \eta_2$, $[\xi_2, \eta_1] = [\xi_1, \xi_2] = [\xi_2, \eta_1] = 0$. Справедливость тождества Якоби легко проверяется непосредственно:

$$[[\xi_1, \xi_2], \eta_1] + [[\eta_1, \xi_1], \xi_2] + [[\xi_2, \eta_1], \xi_1] = 0 - [\eta_1, \xi_2] + 0 = 0$$

$$[[\xi_1, \xi_2], \eta_2] + [[\eta_2, \xi_1], \xi_2] + [[\xi_2, \eta_2], \xi_1] = 0 - [\eta_2, \xi_2] + [\eta_1, \xi_1] = 0$$

$$[[\xi_1, \eta_1], \eta_2] + [[\eta_2, \xi_1], \eta_1] + [[\eta_1, \eta_2], \xi_1] = [\eta_1, \eta_2] - [\eta_2, \eta_1] + 0 = 0$$

$$[[\xi_2, \eta_1], \eta_2] + [[\eta_2, \xi_2], \eta_1] + [[\eta_1, \eta_2], \xi_2] = 0 - [\eta_2, \eta_1] + 0 = 0.$$

Рассмотрим базис ξ_i^*, η_i^*, двойственный к базису ξ_i, η_i.

Теорема 3.7. *Для построенной алгебры неравенство в теореме Винберга является строгим для $a = \eta_2^*$.*

Доказательство. Взяв в качестве x и a элементы η_1^* и η_2^* соответственно, мы увидим, что в описанном базисе формы приведены к каноническому виду и при этом матрица $\mathcal{A}_a$ имеет жорданову клетку с нулевым собственным значением размерности два.

Индекс всей алгебры равен 0: скобка Пуассона в точке общего положения невырождена. Посмотрим теперь, как устроен аннулятор элемента η_2^*. Он состоит из таких элементов τ, что $[\tau, \phi]$ ортогонально η_2^* при всех ϕ. Получаем, что аннулятор натянут на базис ξ_2, η_1, то есть является коммутативной подалгеброй, индекс которой равен 2. □

Теорема 3.8. *Разность* $\operatorname{ind} \mathfrak{g} - \operatorname{ind} \operatorname{Ann}(a)$ *является неотрицательным четным числом и может быть любой.*

Доказательство. Из конструкции, применяемой в доказательстве теоремы Винберга, видно, что индекс аннулятора элемента a может увеличиваться только за счет наличия в каноническом виде пучка $\mathcal{A}_x + \mathcal{A}_a$ нетривиальных жордановых клеток. Но каждая такая клетка порождает двумерное подпространство, ограничение $\mathcal{A}_a$ на которое тривиально. Это доказывает первое утверждение.

Разность $2k$ можно получить взяв прямую сумму k экземпляров алгебр, построенных в предыдущей теореме. □

Описанную выше конструкцию можно использовать, чтобы доказать теорему Костанта 3.5.

Доказательство. Центр аннулятора можно описать как пересечение ядер форм $\mathcal{A}_x|_{\operatorname{Ker}\mathcal{A}_a}$ для всевозможных регулярных x. Градиенты инвариантов $df(a)$ лежат в $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_a$. Покажем, что градиент $df(a)$ лежит в подпространстве, отвечающем кронекеровой части канонического базиса для пучка $\mathcal{A}_x + \lambda\mathcal{A}_a$. Рассмотрим инвариант $f(x)$ и запищем разложение

$$f(x - \lambda_0 a + \lambda a) = \sum_j g_j(x)\lambda^j.$$

Векторы dg_j образуют кронекерову цепочку, то следовательно любая их линейная комбинация лежит в подпространстве, отвечающем кронекеровой части канонического базиса. Но $df(a) = \sum_j dg_j(x)\lambda_0^j$. Если f является гладким в точке a, то выбирая λ_0 достаточно малым получим сходящийся ряд.

Получаем, что вектор $df(a)$ лежит в $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_x|_{\operatorname{Ker}A_a}$ при всех x, что эквивалентно утверждению теоремы. □

Замечание 3.1. *Из теоремы Винберга следует также классическая теорема о том, что аннулятор регулярного элемента в смысле коприсоединенного представления алгебры Ли коммутативен.*

3.4 Оценка степеней инвариантов коприсоединенного представления

Следующая теорема показывает применение кронекеровых индексов для оценки степеней полиномиальных инвариантов алгебры Ли снизу:

Теорема 3.9. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $f_1, \ldots, f_s$ ($s = \operatorname{ind}\mathfrak{g}$) — набор алгебраически независимых полиномиальных инвариантов коприсоединен-*

ного представления и $\deg f_1 \leq \deg f_2 \leq \dots$ *Тогда*

$$\deg f_i \geq r_i,$$

где $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_s$ *— кронекеровы индексы алгебры Ли* $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Выберем элементы x и a так, чтобы дифференциалы инвариантов $f_1, \dots, f_k$ были независимы в точке a, а размеры кронекеровых блоков в каноническом виде для пучка $\mathcal{A}_a + \lambda \mathcal{A}_x$ были равны кронекеровым индексам алгебры $\mathfrak{g}$. Рассмотрим цепочки, получающиеся сдвигом инварианта из каждого инварианта f_i.

По теореме 3.2 размеры кронекеровых блоков не превосходят длин соответствующих цепочек, но длины цепочек по определению не могут быть больше степеней соответствующих инвариантов.

Отсюда получаем, что $\deg f_i \geq r_i$. □

В случае, если коразмерность множества особых точек в $\mathfrak{g}$ не меньше 2 и $\sum_i \deg f_i = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$ оценка в теореме 3.9 становится точной, то есть степени инвариантов равны кронекеровым индексам алгебры Ли. Условие коразмерности два означает, что можно выбрать a и x так, что все формы в пучке $\mathcal{A}_a + \lambda \mathcal{A}_x$ имеют один и тот же коранг, равный индексу алгебры. Это означает, что в каноническом виде пучка отсутствуют жордановы клетки. Таким образом сумма размерностей кронекеровых блоков равна размерности алгебры $\mathfrak{g}$, а количество векторов, получаемых из сдвигов инвариантов равно $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g})$. Это означает, что в точке общего положения все эти векторы независимы, то есть длина кронекеровых цепочек совпадает с их эффективной длиной.

В рассматриваемом случае размеры кронекеровых блоков равны кронекеровым индексам алгебры Ли тогда и только тогда, когда все формы в пучке $\mathcal{A}_a + \lambda\mathcal{A}_x$ регулярны, то есть когда прямая $a + \lambda x$ не пересекается со множеством особых точек.

Замечание 3.2. *В теореме 3.9 можно отказаться от условия* $k = \operatorname{ind}\mathfrak{g}$*. Пусть* $\mathfrak{g}$ *— алгебра Ли,* $f_1, \dots, f_s$ $(s \leq \operatorname{ind}\mathfrak{g})$ *— набор алгебраически независимых полиномиальных инвариантов коприсоединенного представления и* $\deg f_1 \leq \deg f_2 \leq \dots \leq \deg f_s$*. Пусть* $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_k$ *— кронекеровы индексы алгебры Ли* $\mathfrak{g}$*. Тогда* $\deg f_i > r_i \forall i \leq s$*.*

Доказательство. Выберем регулярную точку a, в которой дифференциалы f_k независимы. Выберем локальные инварианты (необязательно полиномиальные) $f_{s+1}, \dots, f_k$, $k = \operatorname{ind}\mathfrak{g}$ так, чтобы градиенты df_k были независимы в точке a. Предложение 3.1 справедливо и для локальных инвариантов, поэтому для набора $f_1, \dots, f_k$ можно воспользоваться теми же рассуждениями, что и в доказательстве теоремы 3.9 (если добавленные нами инварианты не полиномиальны, их степень будем считать равной бесконечности). Получим для степеней всех инвариантов оценку $\deg f_i \geq r_i$, но она тем более верна если мы ограничимся меньшим количеством инвариантов. □

С помощь теоремы 3.9 можно получить оценку на степени полиномиальных инвариантов произвольного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Следствие 3.1. *Пусть задано представление алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *в пространстве* V*, коразмерность орбиты общего положения равна* q*, инварианты этого действия* $f_1, \dots, f_q$ *полиномиальны, их градиенты независимы* *в некоторой регулярной точке* $x \in V$ *и* $\deg f_1 \leq \deg f_2 \leq \dots$. *Рассмотрим полупрямую сумму* $\mathfrak{r} = \mathfrak{g} +_{\phi^*} V^*$, *где* ϕ^* *— действие , двойственное к* ϕ. *Пусть* $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_q \leq \dots$ *— кронекеровы индексы алгебры Ли* $\mathfrak{r}$. *Тогда* $\deg f_i \geq k_i$.

Доказательство. Инварианты действия ϕ являются также инвариантами коприсоединенного представления группы $\mathfrak{r}$. Замечание 3.2 показывает, что теорема 3.9 дает в этом случае оценку степеней инвариантов действия ϕ. $\square$

Литература

[1] А. С. Воронцов, Инварианты алгебр Ли, представимых в виде полупрямой суммы с коммутативным идеалом Матем. сб., 200:8 (2009), 45–62

[2] А.С. Воронцов, Кронекеровы индексы алгебры Ли и оценка степеней инвариантов, Вестн. моск. ун-та, сер. 1, Математика. Механика, 2011, No. 1, 26–30.

[3] J. H. Rawnsley, Representations of a semi-direct product by quantization. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 78, no. 2, 345–350, (1975).

[4] P. Baguis, Semidirect products and the Pukansky condition, J. Geom. Phys., 25, 245–270, (1998).

[5] В.В. Трофимов, А.Т. Фоменко, Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995. 448с.

[6] В.В. Трофимов , А.Т. Фоменко, Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли, УМН, 1984, т. 39, вып. 2, с.3-56.

[7] А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко, Уравнения Эйлера на конечномерных алгебрах Ли. Изв. АН СССР. сер. матем. 1978. **42**, №2. 396-415.

[8] А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко, Интегрирование уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли, ДАН СССР. 1976, т.231, No.3, с.536-538.

[9] А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко, Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем, Функц.анализ и его приложения, 1978, т. 12, No. 2, с.49-59.

[10] А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко, Групповые неинвариантные симплектические структуры и гамильтоновы потоки на симметрических пространствах, Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М., изд-во МГУ, 1983, вып. 21, с. 23-83.

[11] С.Т. Садэтов, Доказательство гипотезы Мищенко-Фоменко. Докл. РАН. 2004. **397**. №6. 751-754.

[12] R. Bott, The geometry and representation of compact Lie groups, London Math. Soc. Lecture Note Ser., No. 34, 65-90 (1979).

[13] В.В. Трофимов, А.Т. Фоменко, Динамические системы на орбитах линейных представлений групп Ли и полная интегрируемость некоторых гидродинамических систем, Функц. анализ и его приложения, 1983, т.17, вып.1, с. 31-39. Объем

[14] А. Гусейнов, Дипломная работа. Инварианты коприсоединенного представления алгебр Ли $so(n) +_\varphi \mathbb{R}^n$, $so(n) +_\varphi (\mathbb{R}^n)^k$, $gl(n) + (\mathbb{R}^n)^k$.

[15] В.В. Трофимов, А.Т. Фоменко, Геометрия скобок Пуассона н методы интегрирования по Лиувиллю систем на симметрических пространствах.

ВИНИТИ, Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Том 29, 1986 г.

[16] М.М. Жданова, Дипломная работа. Построение полных коммутативных наборов для полупрямых сумм методом Садэтова.

[17] А. В. Болсинов, "Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли и полнота семейств функций в инволюции Изв. АН СССР. Сер. матем., 55:1 (1991), 68-92

[18] A. V. Bolsinov, A.A. Oshemkov, Bi-Hamiltonian Structures and Singularitiesof Integrable Systems, Regular and Chaotic Dynamics, 2009, Vol. 14.

[19] Ilya Zakharevich, Kronecker webs, bihamiltonian structures, and the method of argument translation, arXiv:math/9908034v3

[20] R.C. Thompson, Pencils of Complex and Real Symmetric and Skew Matrices, Linear Algebra Appl.,1991, vol. 147, pp. 323-371.

[21] M. Rais, L'indice des produits semi-direct $E \times_\rho g$, C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. A 287 (1978), 195-197

[22] A. V. Bolsinov, B. Jovanovic, Integrable geodesic flows on homogeneous spaces, Mat. Sb., 192:7 (2001), 21–40

[23] J.-Y. Charbonnel, A. Moreau, The index of centralizers of elements of reductive Lie algebras, http://arxiv.org/abs/0904.1778

[24] О. С. Якимова, “Индекс централизаторов элементов в классических алгебрах Ли”, Функц. анализ и его прил., 40:1 (2006), 52–64

[25] D.I. Panyushev, “On the coadjoint representation of $\mathbb{Z}_2$-contractions of reductive Lie algebras”, Adv. Math., 213:1 (2007), 380–404

[26] С. П. Новиков, И. Шмельцер, “Периодические решения уравнений Кирхгофа для свободного движения твердого тела в жидкости и расширенная теория Люстерника–Шнирельмана–Морса (ЛШМ). I”, Функц. анализ и его прил., 15:3 (1981), 54–66

[27] А. В. Болсинов, “Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах: доказательство гипотезы Мищенко–Фоменко”, Тр. сем. по вект. и тенз. анализу, 26 (2005), 87–109

[28] А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко, Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями,Тр. сем. по вект. и тенз. анализу, 20, 5–54