МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

ВЕДЮШКИНА ВИКТОРИЯ ВИКТОРОВНА

УДК 517.938.5

Интегрируемые биллиарды на клеточных комплексах и интегрируемые гамильтоновы системы.

01.01.04 геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
академик РАН А.Т.Фоменко

Москва–2020 г.

Оглавление

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень её разработанности

Диссертация посвящена созданию и существенному развитию нового научного направления, находящегося на стыке теории интегрируемых невырожденных устойчивых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы (см. подробнее главу 3 в книге [5]) и теории математических биллиардов. Это стало возможным благодаря введению нового класса интегрируемых биллиардных систем – биллиардных книжек. Этот класс введён автором и обобщает ранее разработанные и исследованные топологические интегрируемые биллиарды – ориентируемые многообразия, состоящие из элементарных плоских биллиардов-листов, ограниченных дугами софокусных квадрик (более подробно, см. [87]). Оказывается, этот новый класс биллиардов-книжек позволяет реализовывать многие важные гамильтоновы интегрируемые системы в математической физике, механике, топологии, симплектической геометрии. Анализ топологии лиувиллевых слоений топологических биллиардов и биллиардных книжек произведен с помощью методов теории Фоменко–Цишанга об инвариантах интегрируемых систем. Это позволило обнаружить множество новых и нетривиальных результатов и связей, позволяющих моделировать многие другие интегрируемые системы с помощью интегрируемых биллиардов.

Классической теории математического биллиарда – задаче о движении материальной точки в плоской области, ограниченной кусочно-гладкой кривой, с абсолютно упругим отражением на границе – посвящено множество работ (отметим книги В. В. Козлова, Д. В. Трещёва [22] и С. Л. Табачникова [48], в которых дан обзор современных и классических исследований биллиардов).

Интегрируемость биллиарда в области, ограниченной эллипсом, была замечена в работе Дж. Д. Биркгофа [4]. Интегрируемость геодезического потока на эллипсоиде следует из теоремы Якоби–Шаля. При стремлении меньшей полуоси эллипсоида к нулю движение по геодезическим на нём переходит в движение по ломаным, целиком лежащим в образе эллипсоида – плоской области, ограниченной эллипсом.

В настоящее время в теории математического биллиарда можно выделить два ярких направления исследований. Во-первых, это направление, посвященное вопросам интегрируемости.

Дж.Д.Биркгофом была сформулирована гипотеза, которая состоит в следующем. Пусть односвязная область ограничена гладкой кривой. При этом биллиард в данной области является интегрируемым — то есть, вдоль траекторий сохраняется функция, независимая с квадратом длины вектора скорости (иначе говоря, энергией системы). Тогда данная кривая обязательно является эллипсом. В последнее время этой тематике было посвящено множество ярких работ. Отметим здесь работы С. В. Болотина [68], М. Бялого и А. Е. Миронова [66, 67, 11], а также исследование А.Глуцюка [72], доказавшего гипотезу Биркгофа для алгебраических кривых в том случае, если дополнительный интеграл полиномиален по импульсам. Интегрируемость биллиарда сохраняется, если перейти к плоским областям, ограниченным дугами эллипсов и гипербол одного софокусного семейства, на границе которых нет точек излома с углами $\frac{3\pi}{2}$. В этом случае все углы в точках излома равны $\frac{\pi}{2}$, поскольку известно, что софокусные квадрики пересекаются всегда под прямыми углами. В книге [22] В. В. Козлов, Д. В. Трещёв заметили, что эти динамические системы также являются интегрируемыми (т.е. имеется дополнительный независимый интеграл Λ). Для системы плоского биллиарда в эллипсе были построены координаты, в которых движение представляется в виде условно-периодического движения по торам. Яркие результаты в другом интересном направлении исследований интегрируемых биллиардов, посвященном изучению слоений Лиувилля, были получены в работах [70, 12] В. Драговича, М. Раднович. Работы автора [52, 53] продолжили данное исследование. В них автором были построены новые классы биллиардов: плоские биллиардные области, ограниченные дугами софокусных эллипсов и гипербол и не вложимые в плоскость изометрично, а также области, уже не обязательно являющиеся плоскими, полученные склейками элементарных областей вдоль выпуклых сегментов границ.

Настоящая диссертация существенно развивает данное направление. Во-первых, полностью исследована топология ранее построенного класса топологических биллиардов — ориентируемых поверхностей, склеенных из элементарных "кирпичей" — плоских элементарных биллиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик. Во-вторых, введен новый класс биллиардных книжек — оснащенных перестановками на одномерных клетках клеточных комплексов, двумерными клетками которых являются элементарные биллиарды. Более подробно о представлении биллиардных книжек в виде клеточных комплексов см. замечание 35 в третьей главе диссертации.

Эффективным методом изучения топологии возникающего слоения Лиувилля является вычисление инвариантов лиувиллевой эквивалентности — меченых молекул Фоменко–Цишанга. Две интегрируемые системы называются лиувиллево эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию изоэнергетических многообразий диффеоморфизм, переводящий слоение Лиувилля одной системы в слоение Лиувилля другой системы, сохраняющий ориентацию критических траекторий–окружностей данных слоений. В случае общего положения почти все торы Лиувилля являются замыканиями нерезонансных траекторий (как в большинстве невырожденных классических случаев интегрируемости). В этом случае лиувиллева эквивалентность систем означает, что сравниваемые системы имеют “одинаковые” замыкания решений (т.е. интегральных траекторий), в том числе на трёхмерных уровнях постоянной энергии. Топологический тип слоения Лиувилля полностью определяется инвариантом Фоменко–Цишанга, который является некоторым графом с числовыми метками (см. работу [60] А. Т. Фоменко, Х. Цишанга и книгу [5] А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко).

В настоящей диссертации получена полная классификация топологических интегрируемых биллиардов, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол. А именно, во-первых, получена классификация биллиардных “столов” по отношению к некоторому естественному отношению эквивалентности (см. её определение в первой главе диссертации). Во-вторых, для каждого из этих биллиардов вычислен инвариант Фоменко–Цишанга лиувиллевой эквивалентности, т.е. сделан полный анализ их слоения Лиувилля. По сравнению с ранее выполненными работами автора эта классификация включает в себя случаи топологических биллиардов, полученных склейками элементарных биллиардов как вдоль выпуклых, так и вдоль невыпуклых границ. Также выполнены классификации следующих объектов. Во-первых, выпуклых топологических биллиардов, склеенных из элементарных биллиардов, ограниченных дугами софокусных парабол. Во-вторых, выпуклых некомпактных топологических биллиардов, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол. Для всех компактных биллиардов получена полная классификация типов соответствующих слоений Лиувилля вычислением инвариантов Фоменко–Цишанга. Для некомпактных биллиардов более грубая классификация даётся в терминах грубых молекул. Также вычислены инварианты лиувиллевой эквивалентности ряда топологических биллиардов, ограниченных дугами концентрических окружностей.

В диссертации под кратким термином “биллиард” мы понимаем как биллиардную область (“биллиардный стол”) так и динамическую систему, описывающую динамику материальной точки на биллиардной области. В дальнейшем мы будем указывать, что именно имеется в виду.

Сравнение инвариантов нового класса биллиардов с вычисленными ранее инвариантами других интегрируемых систем (например, случаев динамики твердого тела или интегрируемых геодезических потоков на ориентируемых 2-поверхностях) позволило обнаружить лиувиллеву эквивалентность этих систем найденным биллиардам. Выделим здесь три ярких случая.

Во-первых, были найдены новые случаи реализуемости биллиардами классических интегрируемых систем (например, случаи интегрируемых систем Чаплыгина и Горячева).

Во-вторых, для многих случаев удалось показать, что биллиарды на ряде изоэнергетических поверхностей позволяют “понизить степень” дополнительного интеграла. Более точно, обнаружены биллиарды, лиувиллевы слоения которых с одним и тем же каноническим интегралом степени два (на их изоэнергетической поверхности) оказываются лиувиллево эквивалентными лиувиллевым слоениям на некоторых изоэнергетических трехмерных поверхностях для ряда классических интегрируемых систем, обладающих интегралами степеней больше двух.

В-третьих, удалось установить лиувиллеву эквивалентность линейно и квадратично интегрируемых геодезических потоков на двумерных ориентируемых поверхностях (торе и сфере) интегрируемым биллиардам.

Данные результаты позволили поднять вопрос о моделировании всех слоений Лиувилля интегрируемыми биллиардами. Этот вопрос в виде гипотез A, B, C был сформулирован А.Т.Фоменко. Первый пункт общей гипотезы (гипотеза A) — о моделировании в изоэнергетической поверхности биллиарда произвольной невырожденной бифуркации торов Лиувилля — 3 атома — был доказан автором совместно с И.С.Харчевой. Следующий шаг теоремы о справедливости гипотезы B, а именно о моделировании грубых молекул особого вида — графов, содержащих атомы без звездочек и без меток – также был доказан автором совместно с И.С.Харчевой. Завершающий шаг теоремы о моделировании грубых молекул со звездочками также сделан, однако этот результат пока не опубликован полностью (он не включен в диссертацию). Далее в описанном классе биллиардов было найдено препятствие к гипотезе C. Была обнаружена меченая молекула, слоение Лиувилля которой не реализуется указанными выше классами биллиардов. Тем не менее, автором и А.Т.Фоменко было обнаружено исчезновение этого препятствия в классе магнитных биллиардов: оказалось, что эта молекула все-таки реализуется. Конкретный пример биллиарда был найден автором и С.Е.Пустовойтовым. В рамках гипотезы C о моделировании биллиардами слоений Лиувилля интегрируемых систем важные результаты были получены автором совместно с В.А.Кибкало. А именно, с помощью биллиардных книжек реализуются многие реберные инварианты меченых молекул, а также реализуются произвольные значения класса Эйлера соответствующего расслоения Зейферта. Ранее, как в исследованных механических системах, так и интегрируемых биллиардах, указанное число не превышало 2 (за исключением геодезического потока на $\mathbb{R}P^2$, где он равен 4).

Цели и задачи диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели.

1. Классифицировать все топологические биллиарды (топологические биллиардные поверхности) — двумерные ориентируемые многообразия, являющиеся склейками двумерных плоских биллиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик; классифицировать все выпуклые некомпактные топологические биллиарды, ограниченные дугами софокусных эллипсов и гипербол; классифицировать все выпуклые топологические биллиарды, склеенные из элементарных биллиардов, ограниченных дугами софокусных парабол.

2. Вычислить инварианты лиувиллевой эквивалентности — меченые молекулы Фоменко-Цишанга — для всех описанных выше биллиардов, а также для некоторых биллиардных книжек.

3. Среди найденных слоений Лиувилля биллиардов найти слоения, которые эквивалентны слоениям Лиувилля, ранее обнаруженным в известных случаях интегрируемости твердого тела, что позволит промоделировать ряд задач динамики твердого тела наглядными

биллиардами. Найти слоения Лиувилля интегрируемых биллиардов, эквивалентные слоениям Лиувилля интегрируемых случаев динамики твердого тела, обладающих интегралами степеней 3 и 4. Найти биллиардные слоения, кодирующие линейно и квадратично интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых поверхностях (торе и сфере).

4. Исследовать первые три пункта гипотезы А.Т.Фоменко о моделировании биллиардами интегрируемых систем.

Объект и предмет исследования

Диссертация посвящена исследованию топологии слоений Лиувилля, во-первых, ранее введенных автором интегрируемых систем, а именно, топологических биллиардов. Они получаются склейкой из плоских элементарных биллиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик. Интегрируемость элементарных биллиардов изучалась, например, в книге В.В.Козлова и Д.В.Трещева. Во-вторых, в диссертации автором введен новый класс интегрируемых биллиардных систем — биллиардные книжки (специальные клеточные комплексы). Этот класс естественно обобщает ранее разработанные и исследованные автором топологические интегрируемые биллиарды — ориентируемые многообразия, состоящие из элементарных биллиардов-листов, ограниченных дугами софокусных квадрик. Введенные топологические биллиарды и биллиардные книжки также существенно расширяют класс ранее исследованных биллиардов, включая в себя так называемые невыпуклые и некомпактные биллиарды.

Научная новизна

Все результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно или (в нескольких случаях) при равноценном вкладе с соавторами. Впервые обнаружены связи нового введенного автором класса биллиардных книжек с известными проблемами в теории интегрируемых гамильтоновых систем, таких как понижение степени интегралов, реализация сложных систем при помощи более наглядных и простых систем.

Положения, выносимые на защиту

Следующие результаты являются основными и выносятся на защиту:

1) классификация топологических биллиардов:

- имеется ровно 52 неэквивалентные серии компактных топологических биллиардов, склеенных из элементарных биллиардов, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол;

- имеется ровно 18 неэквивалентных серий компактных выпуклых топологических биллиардов, склеенных из элементарных биллиардов, ограниченных дугами софокусных парабол;
- имеется ровно 22 неэквивалентные серии некомпактных элементарных биллиардов, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол, и ровно 20 выпуклых топологических биллиардов, склеенных из таких элементарных биллиардов;

2) топология слоения Лиувилля:

- имеется ровно 24 типа инвариантов Фоменко-Цишанга компактных топологических биллиардов, склеенных из элементарных биллиардов, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол;
- найдены три типа инвариантов Фоменко-Цишанга компактных топологических биллиардов, склеенных из плоских биллиардов, ограниченных концентрическими окружностями;
- инварианты Фоменко-Цишанга компактных топологических биллиардов, ограниченных дугами софокусных парабол в точности совпадают с инвариантами, которые классифицируют слоения Лиувилля компактных выпуклых топологических биллиардов, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол
- имеется ровно 17 типов графов Фоменко для некомпактных выпуклых топологических биллиардов;
- для многих классов биллиардных книжек полностью вычислены инварианты Фоменко-Цишанга;

3) реализация известных гамильтоновых систем математической физики, механики и геометрии:

- оказывается, системы интегрируемых биллиардов лиувиллево эквивалентны ряду важных случаев интегрируемых гамильтоновых систем при подходящих значениях энергии, в частности, случаям Чаплыгина–Горячева, Соколова, Ковалевской на $so(4)$;
- обнаружены биллиарды, лиувиллевы слоения которых с одним и тем же каноническим интегралом степени два лиувиллево эквивалентные лиувиллевым слоениям на некоторых изоэнергетических трехмерных поверхностях для ряда классических интегрируемых систем, обладающих интегралами степеней три и четыре (в частности, случаи Дуллина–Матвеева, Соколова, Ковалевской на $so(4)$, Ковалевской-Яхьи, Горячева–Чаплыгина–Сретенского); в этом смысле мы можем в некоторых случаях говорить о понижении степеней интегралов;

- системы биллиардов позволяют реализовывать все линейно и квадратично интегрируемые геодезические потоки на двумерных ориентируемых поверхностях (торе и сфере);

4) гипотеза А.Т.Фоменко:

- справедлива гипотеза А.Т.Фоменко о моделировании биллиардами бифуркаций торов Лиувилля устойчивых невырожденных интегрируемых систем с двумя степенями свободы;
- существует препятствие к справедливости гипотезы C в классе биллиардных книжек;
- найденное препятствие исчезает в классе магнитных биллиардов.

Методы исследования

В работе используется теория топологического анализа интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, построенная акад. А. Т. Фоменко, проф. Х. Цишангом, проф. А. В. Болсиновым и другими. Активно применяются методы топологии трехмерных многообразий и теории биллиардов, в частности, разработанные акад. С.В.Матвеевым, акад. В.В. Козловым, акад. Д.В. Трещёвым [22] и другими авторами [48, 68, 70].

Автором разработан новый эффективный метод подсчета классифицирующих инвариантов топологических биллиардов.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер.

Полученные результаты расширяют ранее известные перечни лиувиллевых эквивалентностей известных ранее интегрируемых гамильтоновых систем интегрируемым топологическим биллиардам. Это позволяет находить новые, неизвестные ранее, случаи реализации гамильтоновых систем.

Разработанный автором метод вычисления инвариантов Фоменко-Цишанга, а также метод конструирования биллиардных книжек позволяют расширить класс биллиардных задач и строить новые интересные примеры интегрируемых систем, топология слоений Лиувилля которых весьма нетривиальна, но решения которых достаточно наглядны.

В рамках нового научного направления в теории биллиардов, возникшего в комбинации с теорией топологической классификации интегрируемых систем, получены результаты, вскрывшие глубокую связь многих классических гамильтоновых систем, а также, в частности, современных задач динамики твердого тела с новыми биллиардными системами. Оказалось, что двумерные биллиарды реализуют сложные и многопараметрические системы физики, механики, геометрии.

Это означает, что многие важные эффекты, наблюдаемые в сложных и трудно поддающихся анализу проблемах физики и механики, наглядно и эффективно реализуются системами на подходящих биллиардных книжках.

Степень достоверности и апробация результатов

Основные результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и прошли апробацию на следующих научных конференциях и семинарах:

- Международная молодежная научная школа «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы» (ноябрь 2017, Воронеж);
- Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2018 (январь 2018, Воронеж);
- International Conference Geometry Dynamic Integrable Systems-2018 (июнь 2018, Долгопрудный);
- XX Geometrical Seminar (May 20-23, 2018, Vrnjacka Baja, Serbia);
- International Conference on Topology and its Applications (Nafpaktos, Greece, July 7-11, 2018);
- International Conference Integrable Systems and Nonlinear Dynamics (October 1-5, 2018 Yaroslavl, Russia);
- International Conference on Partial Differential Equations and Applications in Memory of Professor B.Yu.Sternin (Moscow, Russia, November 6-9, 2018);
- Вторая международная молодежная научная школа «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы» (12-13 ноября 2018, Воронеж);
- Workshop on Applied Topology (Kyoto, Japan, January 7–11, 2019);
- 5th International Conference on Finite Dimensional Integrable Systems in Geometry and Mathematical Physics (Shanghai, China, May 6-12, 2019);
- Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80-летию академика В. А. Садовничего (МГУ, 13-15 мая 2019);
- Workshop on Mathematical Billiards: 2019 (Sydney, Australia, June 24-27, 2019);
- New methods in differential geometry (Friedrich-Schiller-University, Jena, Germany, November 17-19, 2019);
- Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2020 (Воронеж, 27-30 января, 2020);

- Dynamics in Siberia – 2020 (Институт математики им. Соболева, г.Новосибирск, 24-29 февраля, 2020);
- семинар "Дифференциальная геометрия и приложения" под руководством акад. А. Т. Фоменко (механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова), неоднократно;
- семинар "Современные геометрические методы" под руководством акад. А. Т. Фоменко, проф. А. С. Мищенко, проф. А. В. Болсинова, проф. А. А. Ошемкова, проф. Е. А. Кудрявцевой, доц. И. М. Никонова, доц. А. Ю. Коняева, асс. В. В. Ведюшкиной (механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова), неоднократно;
- семинар "Гамильтоновы системы и статистическая механика" под рук. акад. В.В.Козлова, проф. С.В.Болотина и акад. Д.В.Трещева (механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова).
- семинар "Топология трехмерных многообразий" под рук. акад. С.В.Матвеева (математический факультет ЧелГУ, кафедра компьютерной топологии и алгебры, Челябинск).
- семинар "Асимптотические методы в математической физике" под рук. д.ф.-м.н. С. Ю. Доброхотова (Институт проблем механики имени А.Ю.Ишлинского РАН, лаборатория механики и природных катастроф).
- семинар научного отдела "Современная математическая физика" ЛТФ ОИЯИ, под рук. проф. А.П. Исаева.
- семинар Отдела математической физики под рук. член-корр. РАН И.В.Воловича (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН).

Публикации

Основные результаты диссертации представлены в 17 работах, 17 из которых индексируются в международных базах WoS и Scopus или входят в список рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности. Список работ приведен в конце диссертации.

Структура и объём

Диссертация состоит из введения, пяти глав и двух приложений. Текст диссертации изложен на 283 страницах. Список литературы содержит 105 наименований.

Содержание работы

Во **введении** формулируется цель работы, кратко излагаются её результаты, содержание и разработанные методы, а также освещается место данных исследований в современной теории интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы и интегрируемых биллиардов. Указаны приложения к актуальным задачам математической физики, топологии, симплектической геометрии. В **первой главе** вводятся основные понятия теории интегрируемых гамильтоновых систем, в том числе дано описание слоений Лиувилля, их особенностей, а именно "атомов", кодирующих бифуркации торов Лиувилля в слоениях Лиувилля. Далее описываются инварианты Фоменко–Цишанга лиувиллевой эквивалентности, их определение и свойства. Вводятся несколько типов плоских интегрируемых биллиардов (называемые элементарными), которые классифицированы с точностью до естественного отношения эквивалентности.

Приведём фундаментальные понятия, активно используемые в диссертации — понятия лиувиллевой эквивалентности, инвариантов Фоменко и инвариантов Фоменко-Цишанга.

Определение. Пусть $(M_1^4, \omega_1, f_1, g_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, f_2, g_2)$ — две интегрируемые по Лиувиллю системы на симплектических многообразиях M_1^4 и M_2^4, обладающих, соответственно, интегралами f_1, g_1 и f_2, g_2. Рассмотрим неособые изоэнергетические поверхности $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$. Интегрируемые гамильтоновы системы называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный диффеоморфизм $Q_1^3 \to Q_2^3$, который, кроме того, сохраняет ориентацию 3-многообразий Q_1^3 и Q_2^3 и ориентацию всех критических окружностей.

В этом определении предполагается наложение ряда ограничений на изоэнергетические поверхности. В частности, условие неособости означает, что ограничение на поверхность первого интеграла (как правило это гамильтониан системы) невырождено, т.е. $df \neq 0$ всюду на Q^3. В определении мы предполагаем, что критические окружности-решения ориентированы потоком ненулевого векторного поля $\mathrm{sgrad}\, f$.

Инварианты Фоменко (грубые молекулы) и Фоменко-Цишанга (меченые молекулы) являются одномерными графами с некоторыми метками, классифицирующими слоения Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы с точностью до грубой эквивалентности и лиувиллевой эквивалентности. Подробнее см. [60] и книгу [5] А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко.

Теорема (А. Т Фоменко, Х. Цишанг)**.** *Две невырожденные интегрируемые гамильтоновы системы на регулярных изоэнергетических поверхностях* $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$ *и* $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$ *лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

Другим фундаментальным понятием, используемым в диссертации, являются биллиарды. Классический биллиард — это динамическая система, описывающая движение (материальной) точки в плоской области, ограниченной кусочно-гладкой кривой, углы излома которой составляют $\frac{\pi}{2}$. Среди известных нетривиальных классов классических интегрируемых биллиардов укажем биллиард в компактной плоской области, ограниченной дугами софокусных эллипсов и гипербол (эллиптико-гиперболический биллиард), а также два важных предельных случая этого биллиарда — биллиард в области, ограниченной дугами софокусных парабол (параболический биллиард), который получается устремлением одного фокуса на бесконечность, и биллиард в области, ограниченной концентрическими окружностями.

Интегрируемость биллиарда в плоской области, ограниченной эллипсом, следует из интегрируемости задачи Якоби о геодезическом потоке на эллипсоиде. Геодезический поток на эллипсоиде интегрируем вследствие теоремы Якоби–Шаля.

Теорема (Якоби, Шаль, см. [4]). *Касательные прямые к геодезической линии на квадрике в n-мерном евклидовом пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадрики еще $n-2$ конфокальных с ней квадрик, одних и тех же для всех точек данной геодезической.*

В двумерном случае при стремлении к нулю наименьшей оси эллипсоида геодезические на эллипсоиде переходят в ломаные на плоской области, а именно, в траектории биллиарда в эллипсе. Отметим, что для этих траекторий на границе верен стандартный закон биллиардного отражения. При этом, если фиксировать ломаную, то прямые, содержащие её звенья, являются касательными к некоторой квадрике (эллипсу или гиперболе), софокусной с граничным эллипсом. Эти эллипсы и гиперболы получаются в результате предельного перехода из однополостных и двуполостных гиперболоидов, которых касались касательные к геодезическим на эллипсоиде. Если в качестве области выбрать область, ограниченную дугами софокусных эллипсов и гипербол (углы не больше π), то для траекторий биллиарда в ней будет сохраняться то же свойство что и для биллиарда в эллипсе, то есть система биллиарда останется интегрируемой.

Зафиксируем семейство софокусных квадрик соотношением

$$(b-\lambda)x^2 + (a-\lambda)y^2 = (b-\lambda)(a-\lambda).$$

Здесь $a,\ b$ — фиксированные параметры семейства, которые в частности фиксируют расстояние между фокусами. Если $a > b > 0$, данное соотношение описывает семейство софокусных эллипсов и гипербол, в которые включены фокальная прямая $y = 0$ и предельная гипербола $x = 0$.

Под элементарным биллиардом понимается компактная связная часть плоскости, граница которой состоит из дуг софокусных квадрик и не содержит углов $3\pi/2$. Отметим, что софокусные квадрики всегда пересекаются под прямыми углами. Запрет углов $3\pi/2$ позволяет корректно определить биллиардное движение после попадания материальной точки в угол. А именно, после отражения точка продолжает движение в противоположном направлении по тому же отрезку, по которому попала в угол. Выделим три важных случая.

Пусть семейство софокусных квадрик состоит из эллипсов и гипербол. Имеет смысл расширить множество элементарных биллиардов, включив в него накрытия над областью, ограниченной двумя эллипсами, а также части этих накрытий. Эти элементарные биллиарды изображены на рисунках 1 и 2. На множестве элементарных биллиардов можно ввести естественное отношение эквивалентности, которое, как было показано автором [55], сохраняет слоение Лиувилля. Аккуратное определение дано в первой главе диссертации (параграф 1.3). Нестрого говоря, два биллиарда называются эквивалентными, если один получается из другого изометрией плоскости или же изменением параметров границ так, чтобы изменяемые дуги границ во время деформации не меняли бы своего типа. Определение запрещает сегменту изменяемой границы менять свой тип, то есть сегменты во время деформации остаются либо эллиптическими (т.е. параметры квадрик, на которых располагаются эти сегменты, непрерывно меняются в пределах $(-\infty,\ b)$), либо гиперболическими (т.е. параметры квадрик, на которых располагаются эти сегменты, непрерывно меняются в пределах $(b,\ a]$), либо все время лежат на фокальной прямой (во все время деформации параметр остается равным b). При этом повторим, что мы предполагаем что все эллипсы и гиперболы принадлежат одному семейству софокусных квадрик с параметрами a и b.

Замечание. Поясним определение на примере двух биллиардов – A'_1 и A'_2. Вроде бы естественная деформация, которая переводит биллиард A'_1 в A'_2 переводит сегмент гиперболы в отрезок фокальной прямой. Однако, при этом параметр этой гиперболы принимает значение b, что запрещено.

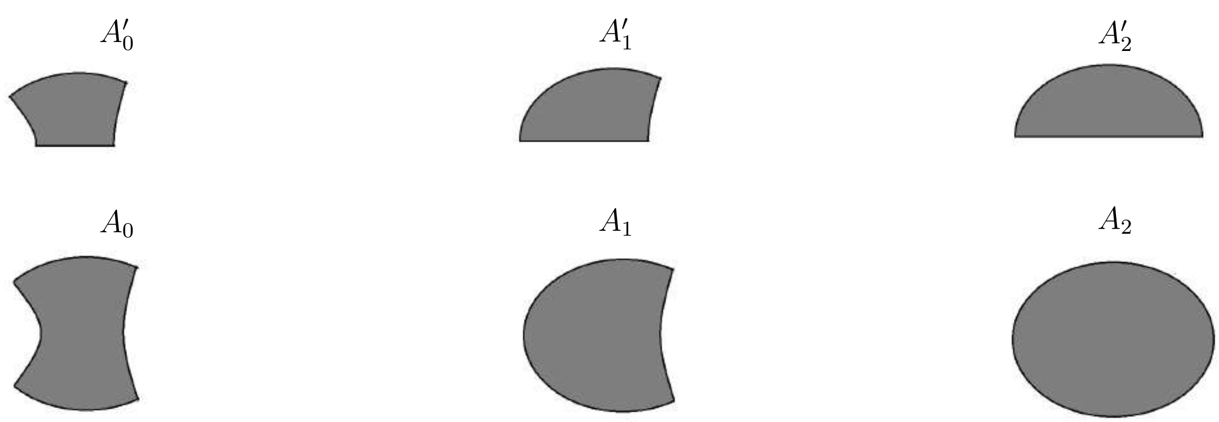


Рис. 1: Элементарные области, образующие конечную серию A

Пусть софокусные квадрики являются софокусными параболами. Введя определение элементарных биллиардов и отношения эквивалентности на этом множестве аналогично указанным выше определениям, автором было показано, что такие биллиарды принадлежат к одному из пяти классов. Каждый из этих классов имеет аналог в множестве эллиптико-гиперболических биллиардов. А именно, это — биллиарды $\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3$, соответствующие биллиардам $A_1,\ B_1, B_0$ и биллиарды $\omega_1,\ \omega_2$, соответствующие биллиардам $A'_1,\ B'_1$.

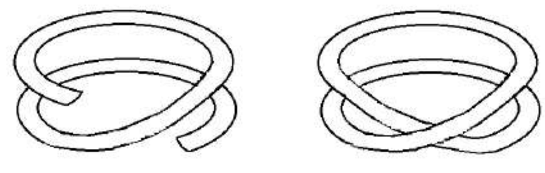


Рис. 2: Примеры элементарных областей, принадлежащих бесконечным сериям B и C. На рисунке изображены области B_4 (слева) и C_4 (справа).

Наконец, в случае концентрических окружностей, отнесем к элементарным биллиардам области, ограниченные одной окружностью (биллиард D), двумя концентрическими окружностями (биллиард C), а также из части, ограниченные прямыми, проходящими через центр, так чтобы все внутренние углы составляли $\frac{\pi}{2}$.

Интегрируемость всех описанных выше биллиардов позволяет исследовать топологию их изоэнергетических поверхностей в терминах инвариантов Фоменко-Цишанга. Отметим, что возникающие здесь двумерные торы Лиувилля и особые слои трехмерных атомов (бифуркаций торов Лиувилля), а также сами изоэнергетические 3-многообразия являются кусочно-гладкими. Это обстоятельство, однако, не влияет на построение инвариантов таких систем, т.е. на построение 3-атомов, 2-атомов и вычисление меток на молекулах. Поэтому мы будем использовать те же обозначения, что и для гладких систем. Более подробно вопросы гамильтонового сглаживания для любых кусочно-гладких гамильтоновых систем (включая биллиарды на склеенных биллиардных столах, не обязательно плоских и не обязательно интегрируемых) при условии

- трансверсальности гамильтонова векторного поля гиперповерхностям излома и
- (в случае двумерного стола) равенства 2π полного угла в каждой вершине излома

рассмотрены в работах В.Лазуткина [76] и Е.А.Кудрявцевой [27].

Во **второй главе** автором дана классификация интегрируемых топологических биллиардов. Дадим неформальное описание топологической биллиардной поверхности (более подробное определение приведено в главе 2).

Определение. Топологические биллиарды — это двумерные ориентируемые поверхности (возможно, с краем), полученные изометричными склейками конечного числа элементарных биллиардов вдоль некоторых сегментов границ. Во-первых, при этом потребуем, чтобы склеиваемые биллиарды были расположены по одну сторону от общего сегмента. Во-вторых, потребуем, чтобы в каждой вершине склейки суммарный угол всех элементарных биллиардов, примыкающих к данной вершине, был равен $\frac{\pi}{2}$, π или 2π.

Под топологическим интегрируемым биллиардом будем понимать следующую динамическую систему. Материальная точка при движении по одному элементарному биллиарду попадая на ребро склейки, отражается от него и продолжает движение по другому элементарному биллиарду–листу, склеенному с данным вдоль этого ребра склейки. При попадании в вершину материальная точка после отражения продолжает движение по тому же отрезку прямой, по которому она попала в эту вершину. Однако лист, на котором она продолжает движение после отражения в вершине, зависит от склейки в ней. Здесь возможны четыре случая.

Случай первый. Если в этой вершине не сходилось других элементарных биллиардов, то лист не меняется (см. рис. 3а).

Случай второй. Если в этой вершине сходятся два элементарных биллиарда, причем склеенных только вдоль одного ребра (суммарный угол равен π), то после отражения материальная точка переходит на другой лист (см. рис. 3б).

Случай третий. Если суммарный угол в вершине равен 2π, то занумеруем биллиарды следующим образом. Лист 1 склеен с листами 2 и 3 и имеет ровно одну точку-вершину с листом 4. Если точка движется по листу с номером 1, то после отражения она продолжает своё движение по листу с номером 4 (см. рис. 3в).

Случай четвертый. Наконец, пусть суммарный угол в вершине равен π, но склейка произошла вдоль двух ребер. Такие точки называются *коническими*. В этом случае после отражения точка продолжает движение по тому же листу, по которому она попала в этот угол (см. рис. 3г).

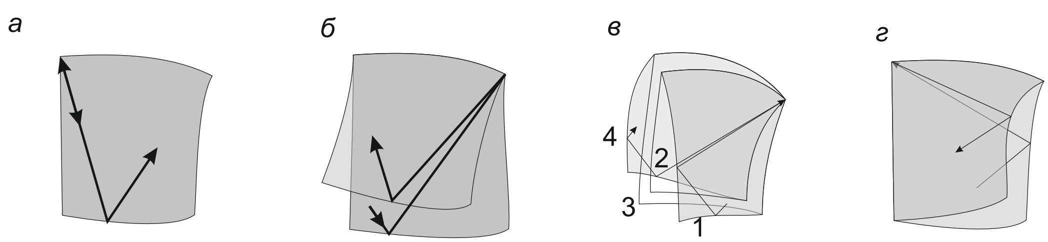


Рис. 3: Четыре типа отражения в вершинах топологического биллиарда.

Обозначения.

По аналогии с выпуклыми топологическими биллиардами, обозначим топологические биллиарды без конических точек через Δ_α. В скобках будем указывать элементарные биллиарды, образующие биллиард Δ, причем если эквивалентные элементарные биллиарды в его составе склеиваются друг с другом последовательно в некотором количестве экземпляров, то будем указывать это количество, например $\Delta_\alpha(kA_0)$, а если нет, то будем указывать это отдельным суммированием, например $\Delta_\alpha(\Omega + kA_0 + \Omega)$, здесь два эквивалентных биллиарда Ω склеены не друг с другом, а с биллиардами A_0. В данном примере Ω это один из биллиардов A_0, A_0' или B_0 где склейка происходит вдоль дуг эллипсов. Напомним, что биллиард B_0 это биллиард, принадлежащий серии биллиардов-лент B (см. рис. 2), который не пересекается с фокальной прямой.

Топологические биллиарды с коническими точками (т.е. точками, образованными двумя углами, склеенными по обеим сторонам) обозначим через Δ_β. Введём типы конических точек. Как легко видеть из определения, конические точки делятся на три типа. Конические точки типа x – это конические точки, образованные склейкой вдоль эллиптического сегмента и горизонтального сегмента. Конические точки типа y образованы склейкой гиперболического сегмента и эллиптического сегмента. Конические точки типа c, иначе говоря, центральные конические точки, образованы склейкой вдоль гиперболического сегмента m и горизонтального сегмента l — отвечающего квадрике с параметром b.

Пусть Ω – некоторый элементарный или топологический биллиард.

Введём обозначения склеек, показывающих, какие именно конические точки образовались. Через $\Delta_\beta(2\Omega)_c$ обозначим результат склейки двух экземпляров биллиарда Ω вдоль дуг некоторой фиксированной гиперболы и фокальной прямой, т.е. с образованием центральной конической точки типа c.

Через $\Delta_\beta(2\Omega)_y$ обозначим результат склейки двух экземпляров биллиарда Ω вдоль дуг некоторой фиксированной гиперболы и некоторого фиксированного эллипса, т.е. с образованием конической точки типа y.

Через $\Delta_\beta(2\Omega)_x$ обозначим результат склейки двух экземпляров биллиарда Ω вдоль дуг некоторого фиксированного эллипса и фокальной прямой, т.е. с образованием конической точки типа x (т.е. лежащей на оси абсцисс).

В обозначениях мы будем указывать каждую коническую точку, а также её тип. Например $\Delta_\beta(2\Omega)_{yy}$ – биллиард, склеенный из двух экземпляров биллиарда Ω с образованием двух конических точек типа y.

Рассмотрим три элементарных биллиарда A_0, A_0' и B_0. Каждый из них является четырехугольником, противоположные стороны которого лежат либо на гиперболах, либо на эллипсах (быть может, один из эллипсов вырожден и соответствует отрезку между фокусами). Обозначим через $\widetilde{A_0}$ гомеоморфный диску топологический биллиард, полученный склейками произвольного числа биллиардов из указанного набора вдоль эллиптических границ. Обозначим через $\widetilde{B}$ гомеоморфный диску топологический биллиард, полученный склейками произвольного числа элементарных областей-лент серии B вдоль гиперболических сегментов.

Не гомеоморфные диску невыпуклые топологические биллиарды, не содержащие фокусов и полученные склейками вдоль эллиптических (гиперболических) сегментов без конических точек, будем обозначать через $\Delta_{\alpha e}$ (соотв., $\Delta_{\alpha h}$). Если невыпуклый биллиард не содержит фокусов и содержит две конические точки одного типа, то обозначим его через $\Delta_{\beta e}$ (соотв., $\Delta_{\beta h}$) в случае, если эти точки лежат на одном эллипсе (соотв., гиперболе).

Используем введенные выше обозначения и рассмотрим следующие пятьдесят две серии невыпуклых областей, разбитых на следующие семь групп. Топологические биллиарды $\widetilde{A_0}$ и $\widetilde{B}$ были определены выше.

- Группа биллиардов A_0 состоит из четырех серий биллиардов без конических точек $\Delta_\alpha(n\widetilde{A_0})$

(гомеоморфен диску), $\Delta_{\alpha h}(n\widetilde{A_0})$ и $\Delta_{\alpha e}(n\widetilde{A_0})$(гомеоморфны кольцу) и $\Delta_{\alpha eh}(n\widetilde{A_0})$ (гомеоморфен тору), двух серий биллиардов с одной конической точкой $\Delta_\beta(2n\widetilde{A_0})_y$ и $\Delta_\beta(2n(\widetilde{A_0}+A_0'))_c$, пяти серий с двумя коническими точками $\Delta_{\beta h}(2n\widetilde{A_0})_{yy}$, $\Delta_\beta(2n(\widetilde{A_0}+A_0'))_{cy}$, $\Delta_{\beta h}(2n(A_0'+\widetilde{A_0}+A_0'))_{cc}$, $\Delta_{\beta e}(2n\widetilde{A_0})_{yy}$, $\Delta_{\beta e}(2n(A_0'+\widetilde{A_0}))_{cc}$, трех серий с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(2n\widetilde{A_0})_{yyyy}$, $\Delta_\beta(2n(\widetilde{A_0}+A_0'))_{ccyy}$, $\Delta_\beta(2n(A_0'+\widetilde{A_0}+A_0'))_{cccc}$.

- Группа биллиардов A_1 состоит из четырех серий биллиардов без конических точек $\Delta_\alpha(A_1+nA_0+mB_1+2mnB_0)$, $\Delta_\alpha((A_1+2mB_1+A_1)+2n(A_0+2mB_0))$, $\Delta_\alpha((A_1+nA_0+A_1)+2m(B_1+nB_0))$ и $\Delta_\alpha(2(A_1+nA_0+2mB_1+4mnB_0+A_1))$, и серии биллиардов с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2(A_1+nA_0+mB_1+2mnB_0))_{yy}$. Поясним, что серия биллиардов $\Delta_\alpha((A_1+2mB_1+A_1)+2n(A_0+2mB_0))$ получена последовательной приклейкой к двум биллиардам A_1 вдоль эллиптических сегментов "ленты" из $2m$ биллиардов, эквивалентных B_1, и последующей приклейкой вдоль гиперболических сегментов n экземпляров "колец", каждое из которых получено склейкой пары экземпляров биллиарда A_0 и $2m$ экземпляров биллиарда B_0. Серия $\Delta_\alpha((A_1+nA_0+A_1)+2m(B_1+nB_0))$ получена последовательной приклейкой к двум биллиардам A_1 вдоль гиперболических сегментов "ленты" из n биллиардов, эквивалентных A_0, и последующей приклейкой вдоль эллиптических сегментов m экземпляров "колец", каждое из которых получено склейкой пары экземпляров B_1 и $2n$ экземпляров B_0.

- Группа биллиардов A_2 состоит из двух серий $\Delta_\alpha(A_2+nC_2)$ и $\Delta_\alpha(A_2+2nC_2+A_2)$.

- Группа биллиардов A_1' состоит из четырех серий биллиардов без конических точек $\Delta_\alpha(A_1'+nA_0'+mB_1'+2mnB_0)$, $\Delta_\alpha((A_1'+2mB_1'+A_1')+2n(A_0'+2mB_0))$, $\Delta_\alpha((A_1'+nA_0'+A_1')+2m(B_1'+nB_0))$ и $\Delta_\alpha(2(A_1'+nA_0'+2mB_1'+4mnB_0+A_1'))$, и восьми серий биллиардов с коническими точками: четыре серии биллиардов с одной конической точкой $\Delta_\beta(2(A_1'+nA_0'+mB_1'+2mnB_0))_x$, $\Delta_\beta(2(A_1'+nA_0'+mB_1'+2mnB_0))_y$, $\Delta_\beta(2(A_1'+nA_0'+mB_1'+2mnB_0))_c$ и $\Delta_\beta(2A_1'+nC_1)_c$, три серии биллиардов с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2(((A_1'+nA_0'+A_1')+2m(B_1'+nB_0))))_{xx}$, $\Delta_\beta(2((A_1'+2mB_1'+A_1')+2n(A_0'+2mB_0)))_{cc}$, $\Delta_\beta(2A_1'+2nC_1+2A_1')_{cc}$ и серия биллиардов с тремя коническими точками $\Delta_\beta(2(A_1'+nA_0'+mB_1'+2mnB_0))_{xyc}$.

- Группа биллиардов A_2' состоит из двух серий без конических точек $\Delta_\alpha(A_2'+nB_2'')$, $\Delta_\alpha(A_2'+2nB_2''+A_2')$, либо к серии биллиардов с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2(A_2'+nB_2''))_{xx}$.

- Группа биллиардов B состоит из четырех серий биллиардов без конических точек $\Delta_\alpha(n\widetilde{B})$ (гомеоморфен диску), $\Delta_{\alpha h}(n\widetilde{B})$ и $\Delta_{\alpha e}(2n\widetilde{B})$ (гомеоморфны кольцу) и $\Delta_{\alpha eh}(2n\widetilde{B})$ (гомеоморфен тору), двух серий с одной конической точкой $\Delta_\beta(2n\widetilde{B})_y$ и $\Delta_\beta(2n(\widetilde{B}+B'))_x$, пяти серий с двумя коническими точками $\Delta_{\beta h}(2n\widetilde{B})_{yy}$, $\Delta_\beta(2n(\widetilde{B}+B'))_{xy}$, $\Delta_{\beta h}(2n(B'+\widetilde{B}))_{xx}$, $\Delta_{\beta e}(2n\widetilde{B})_{yy}$, $\Delta_{\beta e}(2n(B'+\widetilde{B}+B'))_{xx}$, трех серий с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(2n\widetilde{B})_{yyyy}$, $\Delta_\beta(2n(\widetilde{B}+B'))_{xxyy}$, $\Delta_\beta(2n(B'+\widetilde{B}+B'))_{xxxx}$.

- Группа биллиардов C состоит из двух серий биллиардов $\Delta_\alpha(nC_m)$ (гомеоморфен кольцу) и $\Delta_{\alpha e}(2nC_m)$ (гомеоморфен тору).

Топологические биллиарды назовем эквивалентными, если они могут быть получены друг из друга заменой элементарных биллиардов в их составе на им эквивалентные. При этом эквивалентность элементарных биллиардов подробно определена в первой главе диссертации.

Теорема (см. теорему 2 [83] и теорему 2.1 [87]; в диссертации теорема 2.1 главы 2)**. Классификация топологических биллиардных поверхностей.** *Рассмотрим множество топологических биллиардов с точностью до описанной выше эквивалентности. Тогда любой топологический биллиард (топологическая кусочно-гладкая биллиардная поверхность, "стол") эквивалентен одной из указанных пятидесяти двух серий биллиардов, принадлежащих одной из семи групп* A_0, A_1, A_2, A_1', A_2', B *и* C*. Биллиарды, принадлежащие к разным группам неэквивалентны между собой. Внутри этих групп биллиарды, принадлежащие различным сериям, также неэквивалентны.*

Заметим, что ранее в кандидатской диссертации автора [57] были классифицированы топологические биллиарды, для которых были запрещены склейки вдоль невыпуклых сегментов. Такие склейки характеризуются тем, что касающиеся их биллиардные траектории нельзя корректно определить. Для траектории материальной точки, касающейся невыпуклой склейки, нельзя по непрерывности определить лист из двух возможных, на котором она продолжит своё движение после касания (см. рис. 4).

В то же время, отметим что для невыпуклых биллиардов слоения Лиувилля по-прежнему можно корректно определить. В самом деле. Рассмотрим параметр софокусной квадрики – второй интеграл биллиардной системы. Значениям интеграла, отличным от значения параметра квадрики, на которой лежит невыпуклая склейка, соответствуют двумерные торы Лиувилля. Значению интеграла, равному значению параметра квадрики, на которой лежит невыпуклая склейка, соответствует особый слой некоторого 3-атома. Тем самым, слоение Лиувилля корректно определно, несмотря на то, что на некоторых слоях интегральные траекториях корректно не определяются.

Получаем, что в изоэнергетической поверхности окрестность прообраза значения дополнительного интеграла, соответствующего невыпуклой склейке может быть описана в терминах 3-атомов (бифуркаций торов Лиувилля). Это усложняет слоения Лиувилля по сравнению с выпуклыми биллиардами. В настоящей диссертации дана полная классификация всех топологических биллиардов, полученных склейками элементарных как вдоль выпуклых так и вдоль невыпуклых граничных сегментов. Ещё раз отметим, что дополнительный интеграл является кусочно-гладкой функцией на кусочно-гладком многообразии Q^3 и слои слоения Лиувилля также кусочно-гладкие. Далее в диссертации дается полная лиувиллева классификация указанных выше классов биллиардов. Ответ даётся в терминах инвариантов Фоменко–Цишанга,

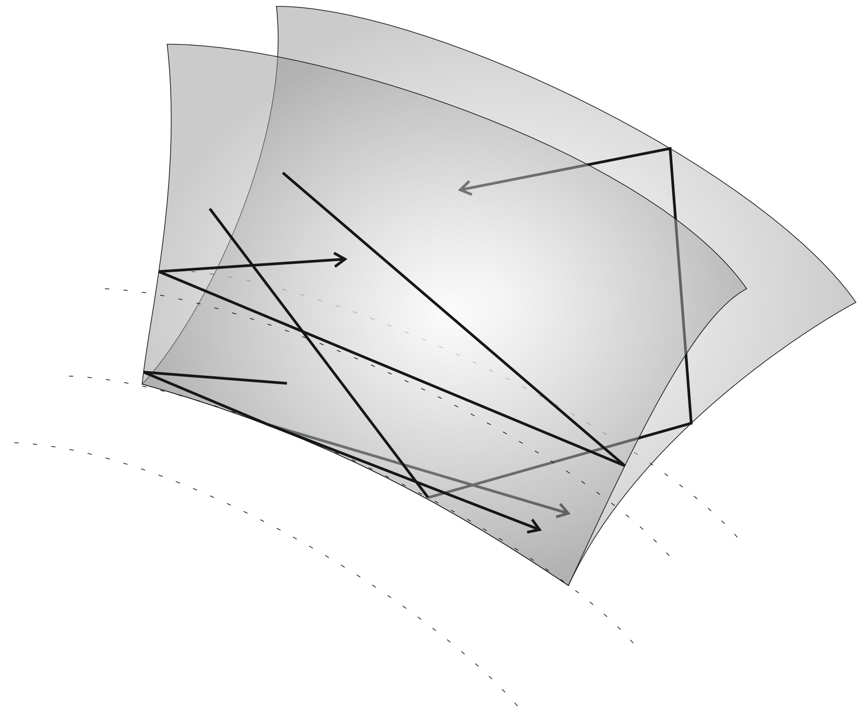


Рис. 4: Для траектории материальной точки, касающейся невыпуклой склейки, нельзя по непрерывности определить лист из двух возможных, на котором она продолжит своё движение после касания.

классифицирующих невырожденные системы с двумя степенями свободы на изоэнергетических поверхностях.

Теорема (см. теоремы 4.1, 4.2 и 4.3 [87]; в диссертации теоремы 2.2, 2.3 и 2.4)**.** *Рассмотрим компактные топологические биллиарды ("столы"), склеенные из элементарных биллиардов, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол. Рассмотрим эти биллиарды как динамические интегрируемые системы. Тогда они классифицируются двадцатью четырьмя типами инвариантов Фоменко-Цишанга. Каждый тип состоит из одной, двух, четырех, шести или девяти серий меченых молекул. Все они приводятся на рисунках 2.8-2.13, 2.19, 2.23–2.26 в главе 2.*

В качестве примера некомпактных интегрируемых систем в диссертации рассмотрены некомпактные элементарные и выпуклые топологические биллиарды, ограниченные дугами софокусных эллипсов и гипербол. По сравнению с компактным случаем эта классификация включает в себя большее число биллиардов. Обозначения биллиардов, используемые в нижеследующих предложениях, подробно даны во второй главе диссертации.

Предложение (см. предложения 3.1 и 3.2 [82]; в диссертации предложения 2.4.1 и 2.4.2)**.** *Рассмотрим некомпактные биллиардные поверхности ("столы"), ограниченные дугами софокусных эллипсов и гипербол, с точностью до описанной выше эквивалентности.*

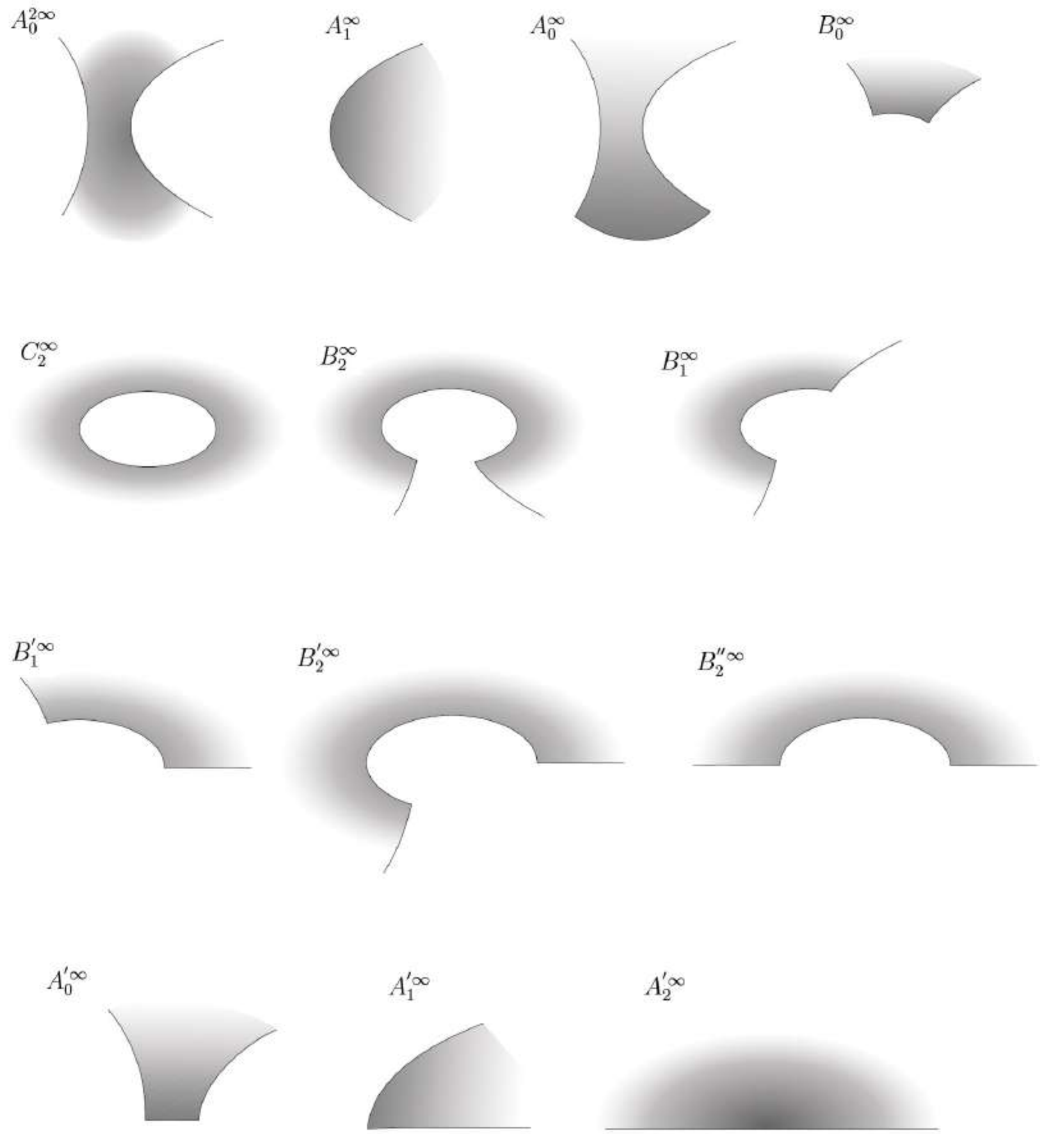


Рис. 5: Простейшие некомпактные элементарные биллиарды.

Тогда любой простейший (т.е. являющийся подмножеством плоскости) неособый некомпактный элементарный биллиард эквивалентен одному из следующих семи биллиардов: биллиарды $A_0^{2\infty}$ и A_1^{∞}, ограниченные ветвями гипербол, биллиард C_2^{∞}, ограниченный эллипсом, и биллиарды A_0^{∞}, B_0^{∞}, B_1^{∞} и B_2^{∞}, ограниченные двумя дугами гипербол и одной дугой эллипса (см. рис. 5).

Любой простейший особый элементарный биллиард эквивалентен одному из следующих шести биллиардов: биллиард $A_0'^{\infty}$, ограниченный фокальной прямой и двумя дугами гипербол, биллиарды $B_1'^{\infty}$, $B_2'^{\infty}$ и $B_2''^{\infty}$, ограниченные дугой эллипса и дугами гипербол, в том числе вырожденных, биллиард $A_1'^{\infty}$, ограниченный фокальной прямой и одной дугой гиперболы и биллиард в верхней полуплоскости $A_2'^{\infty}$ (см. рис. 5).

Любой составной (т.е. полученный изометричными склейками простейших биллиардов, *расположенных по разные стороны от склеиваемой дуги границы) элементарный некомпактный биллиард принадлежит к одной из следующих пяти серий:*

- $(B_0')_\infty$ *и* $(B_0)_\infty$ *– биллиарды, полученные в результате бесконечного числа склеек компактных элементарных биллиардов типа* B*, при этом компактный граничный гиперболический сегмент является прямолинейным и криволинейным соответственно;*

- B_∞ *– биллиард, полученный в результате бесконечного числа склеек компактных элементарных биллиардов типа* B*, при этом у такого биллиарда отсутствуют гиперболические сегменты границы;*

- B_n^∞, $B_n'^\infty$ *и* $B_n''^\infty$*, а также биллиарды* C_1^∞ *и* $C_n^\infty, n > 2$ *– аналоги простейших некомпактных элементарных биллиардов;*

- $(B_0')_\infty^\infty$ *и* $(B_0)_\infty^\infty$ *– биллиарды, полученные в результате бесконечного числа склеек некомпактных простейших элементарных биллиардов типа* B^∞*, при этом некомпактный граничный гиперболический сегмент является прямолинейным и криволинейным соответственно;*

- B_∞^∞ *– биллиард, полученный в результате бесконечного числа склеек некомпактных элементарных биллиардов типа* B^∞.

Предложение (см. предложение 3.3 [82]; в диссертации предложение 2.4.3)**.** *Любой топологический некомпактный биллиард* Δ *эквивалентен биллиарду, принадлежащему к одному из следующих четырех классов:*

1. *класс топологических биллиардов, склеенных из эквивалентных друг другу элементарных биллиардов, и не содержащих конических точек состоит из пяти серий биллиардов:*

$$\Delta_\alpha(2B_\infty),\ \Delta_\alpha(2(B_0)_\infty),\ \Delta_\alpha(2(B_0')_\infty),\ \Delta_\alpha(\sum_{i=1}^{\infty} A_0),\ \Delta_\alpha(\sum_{-\infty}^{+\infty} A_0);$$

2. *класс топологических биллиардов, склеенных из эквивалентных друг другу элементарных биллиардов с образованием конических точек состоит из шести серий биллиардов:*

$$\Delta_\beta(\sum_{i=1}^{\infty} 2A_0)_y,\ \Delta_\beta(2A_0^\infty)_y,\ \Delta_\beta(2(B_1)_\infty)_y,\ \Delta_\beta(2(B_0')_\infty)_x,\ \Delta_\beta(2A_1'^\infty)_c,\ \Delta_\beta(2A_0'^\infty)_c;$$

3. *класс топологических биллиардов, склеенных из элементарных биллиардов, принадлежащих более чем одному классу эквивалентности, и не содержащих конических точек со-*

стоит из шести серий биллиардов:

$$\Delta_\alpha(\sum_{i=1}^{\infty} A_0 + A_0'),\ \Delta_\alpha(\sum_{i=1}^{\infty} A_0 + B_0),\ \Delta_\alpha(A_0^\infty + \sum_{i=1}^{k} A_0),\ k \leq \infty$$

$$\Delta_\alpha(A_0^\infty + \sum_{i=1}^{k} A_0 + B_0),\ \Delta_\alpha(A_0^\infty + \sum_{i=1}^{k} A_0 + A_0'),\ \Delta_\alpha(A_0^\infty + \sum_{i=1}^{k} A_0 + A_0^\infty),\ k < \infty;$$

4. *класс топологических биллиардов, склеенных из элементарных биллиардов, принадлежащих более чем одному классу эквивалентности, с образованием конических точек состоит из трех серий биллиардов:*

$$\Delta_\beta((2A_0')_c+\sum_{i=1}^{k} 2A_0+2A_0^\infty),\ k < \infty,\ \Delta_\beta((2A_0')_c+\sum_{i=1}^{\infty} 2A_0),\ \Delta_\beta((2A_0)_y+\sum_{i=1}^{k} 2A_0+2A_0^\infty),\ k < \infty.$$

Для описания топологии некомпактных изоэнергетических поверхностей Q^3, описывающих перестройки торов, цилиндров и плоскостей необходимо ввести некомпактные атомы-бифуркации. Теория некомпактных атомов, как и теория инвариантов лиувиллевой эквивалентности в некомпактном случае пока ещё окончательно не построена. В диссертации дано построение грубых молекул, использующих новые некомпактные атомы-бифуркации. В классической теории Фоменко–Цишанга ребра графов Фоменко задают однопараметрические семейства двумерных торов Лиувилля. В нашем случае некомпактных биллиардов мы будем рассматривать аналоги графов Фоменко. Здесь их ребра могут соответствовать также однопараметрическим семействам плоскостей и цилиндров.

Теорема (см. теорему 3.1 [82]; в диссертации теорема 2.7)**.** *Слоения Лиувилля некомпактных выпуклых топологических биллиардов описываются аналогами графов Фоменко, принадлежащих к одному из семнадцати типов. Все они указаны в таблице в разделе 4.4 второй главы диссертации.*

Перейдем к случаю компактных топологических биллиардов, склеенных из параболических биллиардных областей. Ранее автором были вычислены инварианты только элементарных биллиардов, ограниченных дугами софокусных парабол. В настоящей диссертации классифицированы все топологические биллиардные поверхности (как многообразия) и вычислены инварианты Фоменко-Цишанга.

Рассмотрим следующие серии параболических топологических биллиардов.

1: Конечная серия параболических биллиардов Ω_1 состоит из трех биллиардов без конических точек: $\Delta_\alpha(2\Omega_1)$ (склейка вдоль одного граничного сегмента), $\Delta_\alpha(4\Omega_1)$ (склейка четырех экземпляров элементарного биллиарда Ω_1 без свободной границы), $\Delta_\alpha(\Omega_1 + \Omega_2)$ и биллиарда $\Delta_\beta(2\Omega_1)_{yy}$ с двумя коническими точками.

2: Конечная серия параболических биллиардов ω_1, состоит из трех биллиардов без конических точек: $\Delta_\alpha(2\omega_1)$ (склейка вдоль одного граничного сегмента), $\Delta_\alpha(4\omega_1)$ (склейка четырех экземпляров элементарного биллиарда ω_1), $\Delta_\alpha(\omega_1+\omega_2)$; трех биллиардов $\Delta_\beta(2\omega_1)_y$, $\Delta_\beta(2\omega_1)_x$ и $\Delta_\beta((2\omega_1)_x+2\omega_2)$ с одной конической точкой, биллиарда $\Delta_\beta((2\omega_1)_x+(2\omega_1)_x)$ с двумя коническими точками и биллиарда $\Delta_\beta(2\omega_1)_{xxy}$ с тремя коническими точками.

3: Бесконечная серия бесфокусных параболических биллиардов Ω_2, состоит из следующих подсерий. Определим числа $n_1, n_2, n_3 \in \{0,1\},\ k \in \{\mathbb{N}, 0\}$, а элементарный биллиард Ω считаем эквивалентным биллиарду Ω_3 или ω_2. Подсерии биллиардов без конических точек имеют вид $\Delta_\alpha((1+n_1)(n_2\Omega+k\Omega_2+n_3\Omega))$ (гомеоморфны диску) и вид $\Delta_\alpha((1+n_1)(k\Omega_2))^2$ (гомеоморфны цилиндру). Две подсерии биллиардов с одной конической точкой имеют вид $\Delta_\beta(2(n_1\Omega_3+k\Omega_2+n_2\Omega))_y$ (здесь $k+n_1\neq 0$) и $\Delta_\beta(2(n_1\Omega_3+k\Omega_2+\omega_2))_x$. Две подсерии биллиардов с двумя коническими точками имеют вид $\Delta_\beta(2(n_1\Omega_3+k\Omega_2+n_2\Omega_3))_{yy}$ и $\Delta_\beta(2(\omega_2+k\Omega_2+\omega_2))_{xx}$.

Предложение ([85]; в диссертации предложение 2.3.1)**.** *Любой параболический топологический биллиард Δ эквивалентен биллиарду, принадлежащему одной из трех серий Ω_1, ω_1 и Ω_2.*

Теорема (теорема 2 в [85]; в диссертации теорема 2.5)**.** *Пусть внутренность параболического топологического биллиарда Δ содержит фокусы. Тогда инварианты Фоменко–Цишанга — меченые молекулы W^*, описывающие топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 таких топологических биллиардов Δ, разбиваются на семь неэквивалентных между собой типов, которые приведены на рис. 6.*

Если пересечение внутренности параболического топологического биллиарда Δ с фокальной прямой пусто, то инвариант Фоменко–Цишанга имеет вид $A \xrightarrow{r=0,\varepsilon=1} A$, когда биллиард Δ не содержит конических точек, и вид $A \xrightarrow{r=\frac{1}{2},\varepsilon=1} A$, когда биллиард Δ содержит конические точки.

Теорема (теорема 3 в [85]; в диссертации теорема 2.6)**.** *Пусть параболический топологический биллиард Δ принадлежит серии Ω_2 (т.е. не содержит фокусов). Тогда инвариант Фоменко–Цишанга — меченая молекула W^*, описывающая топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 биллиарда Δ, имеет следующий вид* (см. рис. 7):

1. *если биллиардная область гомеоморфна кольцу, то бифуркация на уровне интеграла $p=0$ описывается атомом C_n, где n — это количество отрезков фокальной прямой, лежащих внутри всех областей Ω;*

2. *если биллиардная область односвязна, то бифуркация на уровне интеграла $p=0$ описывается атомом B_n, где n это количество отрезков фокальной прямой, лежащих внутри всех областей Ω, причем атом имеет столько звездочек, сколько конических точек типа x имеет биллиард Δ;*

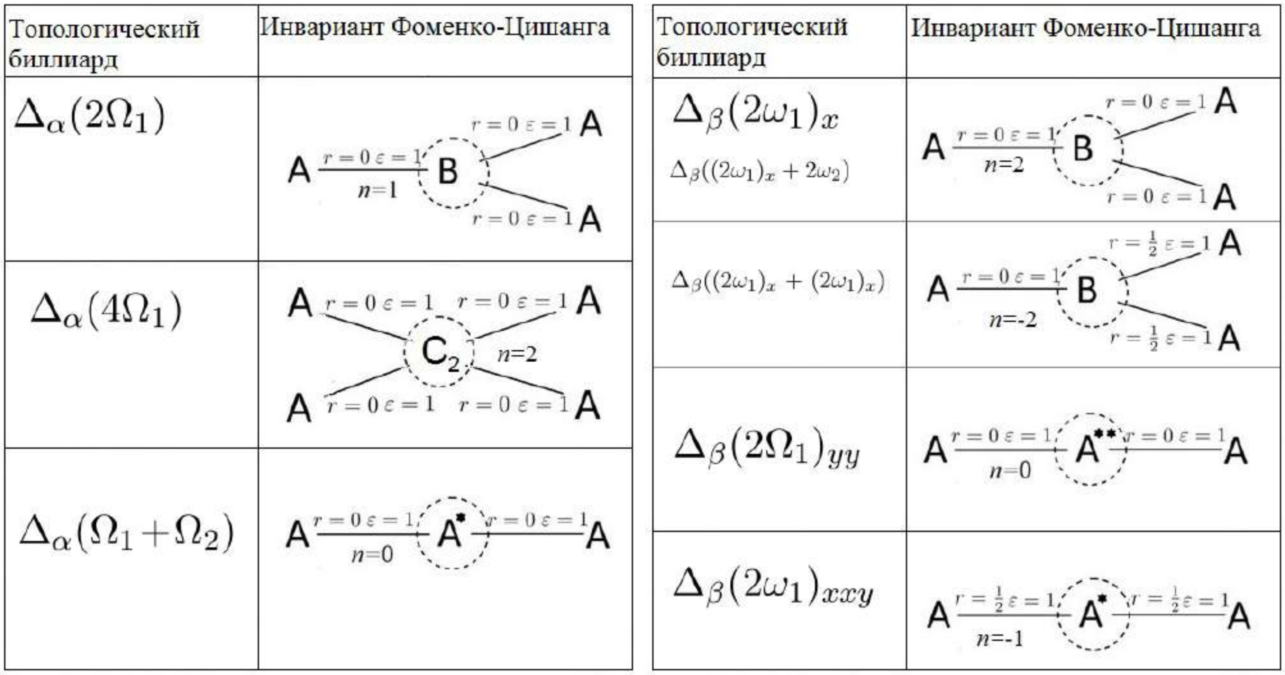


Рис. 6: Инварианты Фоменко—Цишанга параболических топологических биллиардов, содержащих фокусы.

3. *все молекулы (см. рис. 7) содержат ребра, на которых метки r бесконечны: $r = \infty$, $\varepsilon = \pm 1$; в случае, если область биллиарда односвязна, то такое ребро одно; в случае, если область биллиарда — кольцо — то таких рёбер два;*

4. *на остальных ребрах молекулы стоят метки $r = 0$, $\varepsilon = 1$ или $r = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = 1$, причем количество дробных меток в молекуле совпадает с количеством конических точек, имеющих тип y.*

Перейдём к случаю круговых биллиардов. Следующее предложение описывает топологию слоений Лиувилля элементарных круговых биллиардов и склеенного из них гомеоморфного сфере выпуклого топологического биллиарда $\Delta(2D)$, который получается склейкой двух экземпляров области D вдоль граничной окружности.

Предложение (см. предложение 7.1 [91]; в диссертации предложение 2.5.1)**.** *Рассмотрим слоения Лиувилля на изоэнергетических поверхностях $Q^3 = \{(x, v) \in M^4 : |v|^2 = 1\}$ для следующих биллиардов. Биллиард D (диск), ограниченный одной окружностью. Биллиард C (кольцо), ограниченный двумя концентрическими окружностями. Топологический биллиард $\Delta(2D)$, гомеоморфный сфере, получается склейкой двух экземпляров области D вдоль граничной окружности. Тогда инвариант Фоменко–Цишанга — меченая молекула, описывающая топологию слоения Лиувилля, имеет для перечисленных биллиардов вид $A - A$ со следующими метками:*

$r = 0$, $\varepsilon = 1$, *для биллиарда D,*

$r = \infty$, $\varepsilon = 1$, *для биллиарда C,*

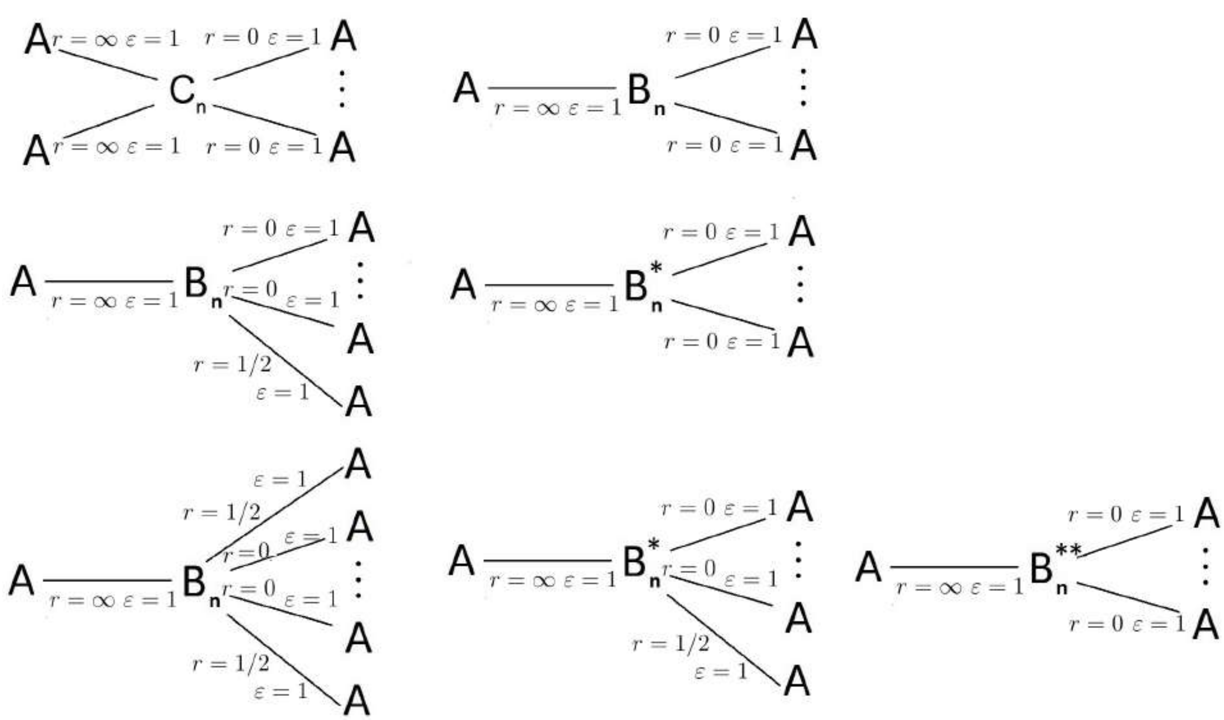


Рис. 7: Инварианты Фоменко—Цишанга параболических топологических биллиардов, не содержащих фокусов.

$r = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = 1$, *для биллиарда* $\Delta(2D)$.

Следующее предложение описывает топологию слоений Лиувилля изоэнергетических поверхностей невыпуклых круговых биллиардов $\Delta(D + nC + D)$ (гомеоморфен сфере) и $T(nC)$ (гомеоморфен тору).

Предложение (см. предложение 7.2 [91]; в диссертации предложение 2.5.2)**.** *Инварианты Фоменко-Цишанга – меченые молекулы, описывающие топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности* $Q^3 = \{(x, v) \in M^4 : |v|^2 = 1\}$ *биллиардов* $\Delta(D + nC + D)$ *и* $T(nC)$ *имеют вид, показанный на рис. 2.45 во второй главе диссертации. Внутри графов* $W(\tilde{f})$ *и* $W_2(\tilde{f})$ *метки следующие. Между атомами* A *и седловыми атомами* $r = 0$, $\varepsilon = 1$, *а между седловыми атомами* $r = \infty$, $\varepsilon = 1$.

В **третьей главе** введен новый класс интегрируемых биллиардов — биллиардная книжка, которая определяется как биллиардная система на клеточном комплексе. Биллиардные книжки – двумерные клеточные комплексы, введенные автором, двумерными клетками-листами которых являются элементарные биллиарды, а одномерными клетками-ребрами – гладкие дуги их вообще говоря кусочно-гладких границ [86]. При этом каждой одномерной клетке – корешку книжки – приписана перестановка $\sigma \in S_n$, где n это число двумерных клеток (листов), склеенных по данному ребру. Локально в окрестности каждой вершины рассмотрим естественное вложение всех элементарных биллиардов в плоскость. Потребуем чтобы в образе сумма углов при вершине равнялась $\frac{\pi}{2}$ или π. Локальная структура окрестности вершины склейки во всех этих случаях показана на рис. 8. В случае *а* в вершине сходятся два корешка, в *б* – три. В диссертации мы ограничимся случаем *а* и одним частным частным случаем *б*.

В случае *а* в нульмерных клетках (вершинах биллиарда) необходимо добавить условие коммутирования на соседних ребрах: перестановки σ_1 и σ_2 на этих корешках коммутируют $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$. Это условие является следствием требования о корректном определении по непрерывности траектории, которая попадает в угол. Естественно потребовать, чтобы траектория материальной точки непрерывно менялась при изменении начальных данных в окрестности вершин биллиарда. Это позволяет обобщить закон биллиардного отражения в прямых углах, а именно, материальная точка, ударяющаяся в вершину прямого угла после отражения продолжает движение по той же прямой по которой и попала в этот угол.

Рассматриваемые в диссертации случаи *б* предполагают тождественность перестановок на корешках, по отношению к которым биллиарды расположены с одной стороны. Это также позволяет определить по непрерывности любую траекторию в вершине.

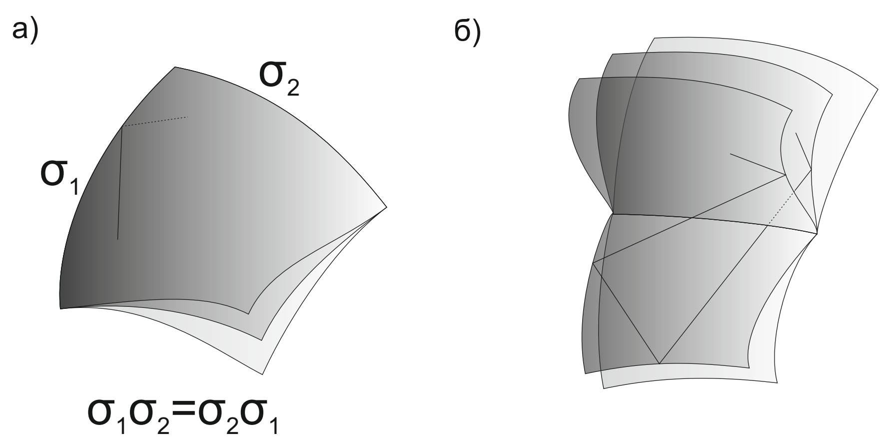


Рис. 8: Локальная структура окрестности вершины склейки биллиардной книжки.

Заметим важный факт, что если элементарные биллиарды, из которых склеена биллиардная книжка, принадлежат одному и тому же классу интегрируемых биллиардов (например биллиардов, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол), то тогда полученная биллиардная книжка также будет интегрируемой. Это позволяет изучать слоение Лиувилля изоэнергетических поверхностей биллиардных книжек. И.С.Харчевой было показано, что при условии коммутирования перестановок на двух соседних корешках, изоэнергетическая поверхность является трехмерным кусочно-гладким многообразием.

Предложение ([94]; в диссертации предложение 3.2.1)**.** *Инвариант Фоменко-Цишанга, классифицирующий слоение Лиувилля биллиардной книжки* $\mathbb{B}(2A_0, A_1)$ *изображен на рисунке 9.*

Оказывается, эта интересная биллиардная книжка реализует знаменитый интегрируемый случай Горячева–Чаплыгина при подходящем значении энергии. Подробнее, см. ниже и главу 4. Также удалось показать, что биллиарды позволяют реализовывать нетривиальные трехмерные

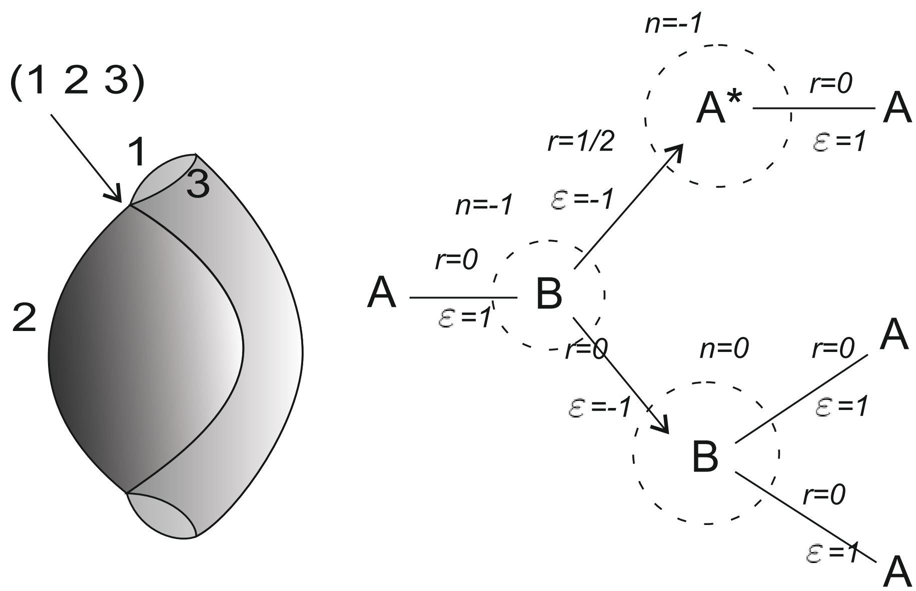


Рис. 9: Биллиардная книжка $B(2A_0,\ A_1)$ и соответствующий ей инвариант Фоменко-Цишанга.

многообразия как изоэнергетические поверхности.

Предложение (см. предложение 1 [95]; в диссертации предложение 3.3.1)**.** *Пусть B_0 элементарный биллиард, имеющий пустое пересечение с фокальной прямой и ограниченный двумя дугами гипербол (выпуклой и невыпуклой) и двумя дугами эллипсов. Рассмотрим $\mathbb{B}$ – биллиардную книжку, склеенную из n экземпляров биллиардов B_0, причём на выпуклом гиперболическом корешке книжки задана перестановка $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ n)$, а на выпуклом эллиптическом корешке – перестановка σ^k. Перестановки, соответствующие невыпуклым дугам биллиарда B_0, тождественные. Тогда инвариант Фоменко-Цишанга, классифицирующий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 для данного биллиарда, имеет вид $A - A$, где метка $r = \frac{k}{n},\ \varepsilon = 1$. Изоэнергетическая поверхность, задаваемая таким инвариантом, гомеоморфна линзовому пространству $L(n, k)$.*

Определение. Рассмотрим четыре экземпляра четырехугольного биллиарда B_0 (см. рис. 10 б) обозначенных через $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$, склеенных в тор. Обозначим через c и d выпуклую и невыпуклую границы биллиардов B_0, лежащие на эллипсах, а через a и b обозначены выпуклая и невыпуклая границы, лежащие на гиперболах (см. рис. 10 а). На полученном торе (склеенном из четырех биллиардов $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ и δ, см. рис. 10 в) биллиардное движение определим так. Внутри листов B_0 материальная точка движется прямолинейно. Если два листа были склеены вдоль некоторой границы, то точка, двигаясь по одному из них, после удара о границу продолжает движение по второму. Данный биллиард назовем *торическим биллиардом* и обозначим через $T(B_0)$. Таким образом, на торе $T(B_0)$ есть две параллели, образованные эллиптическими границами c и d склеенных биллиардов, и два меридиана (образованных гиперболическими границами a и b).

Определение. Пусть n и k – взаимно простые натуральные числа, причем $k < n$. Напомним, что через σ была обозначена перестановка $(1\ 2\ \ldots\ n)$. Рассмотрим n экземпляров биллиарда $T(B_0)$. Занумеруем биллиарды числами от 1 до n и продолжим нумерацию на их листы $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$. На объединении этих биллиардов зададим следующее движение (см. рис. 10 г). На выпуклой гиперболической границе a материальная точка при движении по листу α_i (соотв. β_i) после удара переходит на лист $\gamma_{\sigma(i)}$ (соотв. $\delta_{\sigma(i)}$), а при движении по листу γ_i (соотв. δ_i) после удара переходит на лист $\alpha_{\sigma^{-1}(i)}$ (соотв. $\beta_{\sigma^{-1}(i)}$).

На выпуклой эллиптической границе c материальная точка при движении по листу α_i (соотв. γ_i) после удара переходит на лист $\beta_{\sigma^k(i)}$ (соотв. $\delta_{\sigma^k(i)}$), а при движении по листу β_i (соотв. δ_i) после удара переходит на лист $\alpha_{\sigma^{-k}(i)}$ (соотв. $\gamma_{\sigma^{-k}(i)}$).

На невыпуклых границах b и d движение задаётся как обычно, то есть без смены биллиарда $T(B_0)$ и симметрично. Данный биллиард (биллиардную книжку) обозначим через $T(B_0, n, k)$.

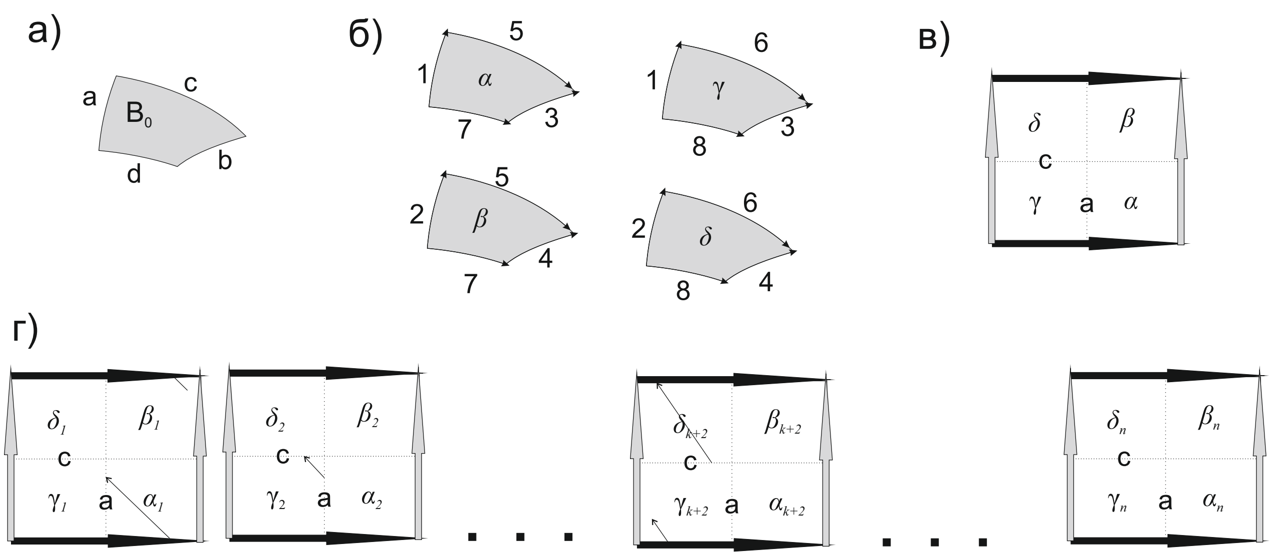


Рис. 10: На рис. а) изображен биллиард B_0 и четыре его сегмента границы: a (выпуклая гиперболическая), b (вогнутая гиперболическая), c (выпуклая эллиптическая) и d (вогнутая эллиптическая). На рис. б) изображена склейка четырех таких биллиардов, обозначенных через $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ в тор. На рис. в) изображен тор, у которого есть два выделенных цикла – меридиан a и параллель c. На рис. г) приведен пример траектории на объединении n таких торов. Траектория двигаясь по листу α на первом торе после пересечения меридиана переходит на лист γ на торе с номером $\sigma(1) = 2$, а после пересечения параллели c на тор с номером $\sigma^k(2) = k + 2$.

Замечание 1. Другими словами, движение по книжке $T(B_0, n, k)$ — это движение материальной точки по объединению n экземпляров тора $T(B_0)$. При этом, материальная точка переходит с тора на тор по следующему правилу. Ориентируем меридиан a так, чтобы листы α и β были расположены справа. При достижении меридиана a на торе с номером i материальная точка “перескакивает” либо на тор с номером $\sigma(i)$ (если переход осуществляется справа налево) либо на тор с номером $\sigma^{-1}(i)$ (если переход происходит слева направо). Ориентируем параллель c так, чтобы листы α и γ были расположены снизу. Тогда при достижении параллели c материальная точка на торе с номером i “перескакивает” либо на тор с номером $\sigma^k(i)$ (если переход осуществляется снизу вверх) либо на тор с номером $\sigma^{-k}(i)$ (если переход происходит сверху вниз).

Как оказалось, с помощью биллиардов можно реализовывать классические интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых поверхностях.

Предложение (см. предложение 2 [95]; в диссертации предложение 3.4.1)**.** *Инвариант Фоменко-Цишанга, классифицирующий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 для биллиардной книжки $T(B_0, n, k)$ имеет вид, представленный на рисунке 11.*

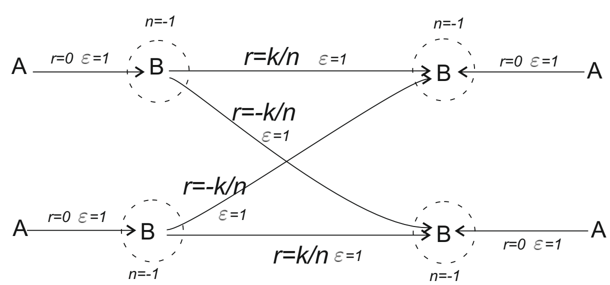


Рис. 11: Инвариант Фоменко-Цишанга, классифицирующий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 для биллиардной книжки $T(B_0, n, k)$.

В заключительном параграфе этой главы представлена аналогичная конструкция, где вместо тора $T(B_0)$ рассмотрен произвольный гомеоморфный тору топологический биллиард, скленный из биллиардов B_0 (предложение 3.5.2). Это приводит к тому, что вместо атомов B возникают произвольные семьи-деревья $W(f)$ и $W(g)$, состоящие из 3-атомов серий B и C. Как показано в следующей главе, это позволило реализовать любой геодезический поток на двумерном торе с метрикой, допускающей квадратичный интеграл.

Четвертая глава посвящена реализации других систем физики, механики, геометрии интегрируемыми биллиардами.

Вычисление инвариантов Фоменко-Цишанга элементарных и топологических биллиардов позволило обнаружить их совпадение в большом числе случаев с инвариантами, вычисленными ранее в случаях интегрируемости в динамике твердого тела (Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, Ковалевской-Яхьи, Клебша и Соколова). Это позволило доказать лиувиллеву эквивалентность случаев интегрируемости в динамике твердого тела элементарным и обобщенным биллиардам. В работах [55, 56] В.В.Ведюшкиной и А.Т.Фоменко приведён список ранее обнаруженных лиувиллево эквивалентных слоений и указаны области на бифуркационных диаграммах случаев Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, соответствующие этим изоэнергетическим 3-поверхностям. Для каждого инварианта указан биллиард моделирующий поведение замыканий решений на данных изоэнергетических поверхностях. В настоящее время В.В.Ведюшкиной в соавторстве с А.Т.Фоменко найдены новые лиувиллевы эквивалентности системам Горячева и Чаплыгина.

Предложение (В.В.Ведюшкина, А.Т.Фоменко см. предложение 2.1 [82]; в диссертации предложение 4.1.1)**.** *Следующие случаи динамики твердого тела реализуются (лиувиллево эквивалентны) следующим топологическим биллиардам:*

- *случай Чаплыгина в динамике твердого тела в жидкости, см. [37], реализуется топологическими биллиардами, указанными на рисунках 4.4а,г,д, отвечающих зонам энергии (1), (2) и (3) соответственно;*
- *случай Горячева, см. [37], реализуется топологическими биллиардами, указанными на рисунке 4.4а, – зоны энергии (1) и (3), 4.4б – зона энергии (2), 4.4в – зона энергии (4);*

Реализация систем физики и механики интегрируемыми биллиардами для ряда интегрируемых систем имеет ещё одно яркое приложение. А именно, удалось обнаружить кусочно-гладкую лиувиллеву эквивалентность квадратично интегрируемых топологических биллиардов и интегрируемых систем, обладающих интегралами больших степеней, а именно, 3 и 4. При этом, известно, что степень интегралов некоторых из этих систем (в частности Ковалевской и Горячева-Чаплыгина) нельзя понизить в классе гладких лиувиллевых эквивалентностей [8].

Теорема (А.Т.Фоменко, В.В.Ведюшкина [90]; в диссертации теорема 4.2)**.** *Интегрируемые системы Ковалевской [5], Ковалевской–Яхьи [47], Ковалевской на алгебре Ли so(4) [20], Горячева–Чаплыгина–Сретенского [5], Соколова [34], Дуллина-Матвеева [35] с интегралами степеней 3 и 4 реализуются в подходящих зонах энергии (т.е. на подходящих изоэнергетических 3-многообразиях) интегрируемыми биллиардами, обладающими каноническим интегралом степени 2. Другими словами, различные интегрируемые системы с интегралами больших степеней оказываются лиувиллево эквивалентными биллиардным системам с одним и тем же каноническим квадратичным интегралом*

$$\Lambda = -\left(x_1 v_2 - x_2 v_1\right)^2 + v_1^2 b + v_2^2 a$$

(на соответствующем биллиарде). Этот канонический интеграл является параметром софокусной квадрики (на изоэнергетической поверхности $v_1^2 + v_2^2 = 1$). Результаты представлены на рис. 12. В первой колонке указаны моделирующие биллиарды, во второй колонке — соответствующие инварианты Фоменко-Цишанга, задаваемые данными системами, в третьей колонке указаны соответствующие случаи интегрируемости (в скобках указаны номера инвариантов или изоэнергетических зон, используя обозначения работ [5, 47, 20, 33, 35], в четвертой — топологический тип изоэнергетического 3-многообразия. Отметим, что биллиардами реализованы (в указанном смысле) молекулы систем, отвечающие некоторым специальным уровням энергии (см. перечисление всех этих уровней в работах [5, 47, 20, 33, 35]).

Замечание 2. Отметим, что для некоторых инвариантов, указанных в таблице на рис. 12, существуют системы, с такими же молекулами, обладающие интегралами степени два или один. Например, молекула во второй строке встречается в случае Лагранжа (обладающей линейным интегралом), а молекула в седьмой строке – в случае Эйлера (где интеграл квадратичен). Однако интегралы в этих других системах записываются различными аналитическими формулами. Суть утверждения теоремы состоит в том, что у биллиардов, реализующих эти системы, квадратичный интеграл один и тот же, а именно, параметр софокусной квадрики. Повторим, что в этом смысле все эти разные интегралы "сводятся" к одному и тому же интегралу.

Теорема (В.В.Ведюшкина, А.Т.Фоменко: см. теорему 4.1 [91]; в диссертации теорема 4.4)**. Реализация линейно интегрируемых геодезических потоков на торе и сфере с помощью топологических биллиардов, ограниченных окружностями.**

1) Любой геодезический поток на двумерной ориентируемой поверхности (тор и сфера), допускающий линейный интеграл, лиувиллево эквивалентен топологическому биллиарду, состоящему из плоских биллиардов, ограниченных концентрическими окружностями. При этом линейный интеграл любого такого геодезического потока сводится к одному и тому же каноническому линейному интегралу на топологическом биллиарде.

2) Этот интеграл является углом между траекторией частицы и границей (т.е. окружностью) любого элементарного биллиарда в составе данного топологического биллиарда. Вообще говоря, обнаруженная лиувиллева эквивалентность является кусочно-гладкой.

3) Указанный топологический биллиард алгоритмически и в явном виде строится исходя из параметров интегрируемой метрики. А именно, получаются следующие биллиарды: гомеоморфный сфере биллиард $\Delta(D + nC + D)$ и гомеоморфный тору $T(nC)$ (конкретные описания эти биллиардов см. выше).

Теорема (В.В.Ведюшкина, А.Т.Фоменко: см. теорему 4.2 [91]; в диссертации теорема 4.5)**. Реализация квадратично интегрируемых геодезических потоков на торе и сфере с помощью топологических биллиардов, ограниченных софокусными квадриками.**

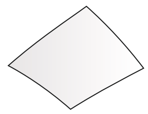
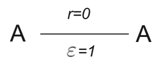
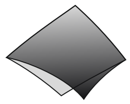
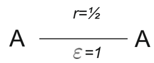
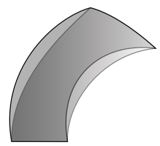
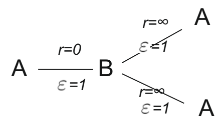
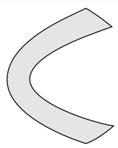
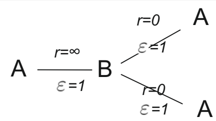
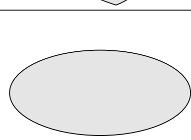
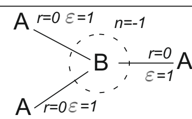
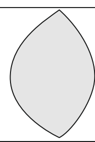
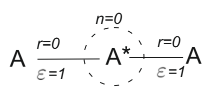
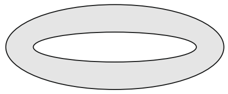
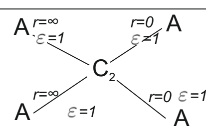
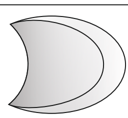
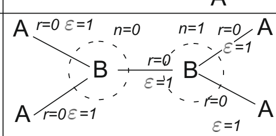
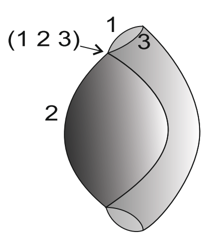
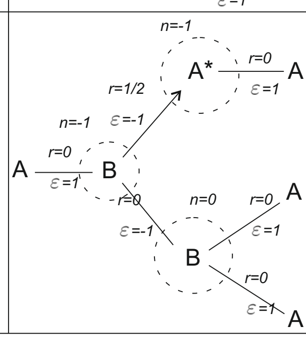
Интегрируемый биллиард	Инвариант Фоменко-Цишанга	Известные случаи интегрируемости	Тип Q^3
		Ковалевская (1), Ковалевская-Яхья (h_1), Ковалевская на so(4) (1,7,11), Дуллин-Матвеев (1), Горячев-Чаплыгин-Сретенский (1), Соколов (A)	S^3
		Дуллин-Матвеев (2)	RP^3
		Ковалевская (5), Ковалевская-Яхья (h_{16},h_{28}), Ковалевская на so(4) (32), Горячев-Чаплыгин-Сретенский (4)	$S^1 \times S^2$
		Ковалевская на so(4) (10)	S^3
		Ковалевская-Яхья (h_{18}), Ковалевская на so(4) (2,9), Соколов (B)	S^3
		Ковалевская на so(4) (6), Горячев-Чаплыгин-Сретенский (2)	S^3
		Соколов (I)	$S^1 \times S^2$
		Ковалевская на so(4) (8)	S^3
		Горячев-Чаплыгин-Сретенский (6)	$S^1 \times S^2$

Рис. 12: Случаи понижения степени.

1) Любой геодезический поток на двумерной ориентируемой поверхности (тор и сфера), допускающий квадратичный интеграл (не сводящийся к линейному), лиувиллево эквивалентен топологическому биллиарду, состоящему из плоских биллиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик. При этом квадратичный интеграл любого такого геодезического потока *сводится к одному и тому же каноническому квадратичному интегралу на топологическом биллиарде.*

2) Этот квадратичный интеграл Λ *задаётся формулой*

$$\Lambda = -\left(x_1v_2 - x_2v_1\right)^2 + v_1^2 b + v_2^2 a$$

и является параметром квадрики (эллипса или гиперболы), которой касаются прямые, содержащие звенья биллиардной траектории (на изоэнергетической поверхности $v_1^2 + v_2^2 = 1$*). Вообще говоря, обнаруженная лиувиллева эквивалентность является кусочно-гладкой.*

3) Указанный топологический биллиард алгоритмически в явном виде строится исходя из параметров интегрируемой метрики и эквивалентен либо топологическим биллиардам $\Delta_\alpha(2(A_1+mA_0+nB_1+2mnB_0+A_1))$ *и* $\Delta_{\alpha eh}(2nB_0)$ *или биллиардной книжке* $T(\Delta_{\alpha eh}(2nB_0), n, k)$ *(конкретные описания см. в главах 2 и 3).*

Пятая глава посвящена гипотезе А.Т.Фоменко [88] о реализуемости произвольных слоений Лиувилля (т.е. меченых молекул) интегрируемых систем с двумя степенями свободы (в классе лиувиллевой эквивалентности). Приведем первые четыре пункта этой гипотезы.

В классе слоений Лиувилля интегрируемых биллиардов реализуются

A любые бифуркации двумерных торов Лиувилля (иначе говоря, 3-атомы);

B любые грубые молекулы – инварианты Фоменко;

C любые меченые молекулы – инварианты Фоменко-Цишанга;

D любые изоэнергетические 3-многообразия (класс граф-многообразий, т.е. многообразий Вальдхаузена).

Гипотеза A была полностью доказана автором совместно с И.С.Харчевой.

Теорема (В.В.Ведюшкина, И.С.Харчева: см. теорему 2 [86]; в диссертации теорема 5.1)**.** *Для любого ориентируемого 3-атома (со звездочками или без) алгоритмически строится биллиардная книжка, склеенная из простейших биллиардов* A_0'*, такая что слоение Лиувилля прообраза окрестности особого значения интеграла* $\Lambda = b$ *(в случае атома* A *— особого значения* $\lambda = 0$*) на её изоэнергетической поверхности* Q^3 *послойно гомеоморфно данному атому.*

Гипотеза B доказана в случае, когда атомы-бифуркации торов Лиувилля не содержат звездочек. В этом случае реализующий такую грубую молекулу алгоритм реализует глобальное расслоение Зейферта (семью в терминах инварианта Фоменко-Цишанга), база которого состоит из 2-атомов, склеенных согласно исходной грубой молекуле. Завершающий шаг теоремы о моделировании грубых молекул со звездочками также сделан, однако этот результат пока не опубликован полностью (он не включен в диссертацию).

Теорема (В.В.Ведюшкина, И.С.Харчева: см. теорему 2 [88]; в диссертации теорема 5.3). *Гипотеза B Фоменко верна для грубых молекул, не содержащих атомов со звездочками. А именно, для любой грубой молекулы, содержащей атомы, слоение Зейферта которых не содержит особых слоев (т.е. содержит только атомы без звездочек) алгоритмически построена биллиардная книжка, склеенная из простейших биллиардов B_0, такая, что ее инвариант Фоменко–Цишанга имеет структуру графа, совпадающего с данной грубой молекулой. Более точно: изоэнергетическая поверхность такой биллиардной книжки склеена из кусков наперед заданных атомов в порядке, задаваемом грубой молекулой.*

Для гипотезы C было найдено препятствие для реализации гамильтоновых систем биллиардами из некоторых классов. Подробнее см. пятую главу диссертации. Это препятствие описывается следующей теоремой.

Теорема (см. теорему 1 [92]; в диссертации теорема 5.6). *Рассмотрим слоение Лиувилля на $S^1 \times S^2$, заданное молекулой $A \longrightarrow A$, $r = \infty$, $\varepsilon = -1$, то есть отвечающее модицифированному ("скрученному") волчку Лагранжа. Тогда не существует интегрируемой биллиардной книжки, ограниченной дугами софокусных квадрик, реализующей это слоение Лиувилля.*

Тем не менее, это препятствие удалось устранить в классе магнитных биллиардов, ограниченных окружностями.

Теорема (В.В.Ведюшкина, А.Т.Фоменко: см. теорему 3.2 [93]; в диссертации теорема 5.7). *Слоение Лиувилля "скрученного" волчка Лагранжа в зоне энергии, соответствующей изоэнергетическому многообразию $S^1 \times S^2$ и с молекулой $A - A$ снабженной метками $r = \infty$, $\varepsilon = -1$, реализуется слоением Лиувилля изоинтегральной поверхности $R = const < r_0$ магнитного биллиарда в кольце.*

Приложение 1 посвящено доказательству локальной гипотезы А.Т.Фоменко C в некоторых важных случаях.

1. Пусть γ — произвольное ребро с метками r, ε некоторой меченой молекулы W^*. Тогда существует биллиард, реализующий такую комбинацию чисел r, ε на одном из ребер своей меченой молекулы.

Отметим, что имеются следующие четыре варианта: метка $r = p/q$ конечна, и $\varepsilon = \pm 1$; метка $r = \infty$, и $\varepsilon = \pm 1$.

2. (усиление пункта **1**) В условиях пункта **1** существует подходящий биллиард, реализующий произвольную пару меток r и ε на ребре между любыми, наперед заданными атомами.

3. Пусть S — семья с целочисленной меткой n в некоторой меченой молекуле W^* интегрируемой системы. Тогда существует биллиард из указанных выше классов, реализующий некоторую семью с точно такой же целочисленной меткой n.

4. (усиление пункта **3**) В условиях пункта **2** существует подходящий биллиард, реализующий не только данную метку n, но и саму семью, т.е. граф с нужными атомами и нужным набором ребер.

5. (реализация меченой окрестности любой семьи) Пусть S — семья с целочисленной меткой n в некоторой меченой молекуле, причем внешние ребра γ_i семьи оснащены произвольными метками r_i, ε_i. Тогда существует подходящий биллиард, реализующий такой меченый подграф в своей меченой молекуле.

В приложении доказаны пункты 1 и 3, а также показаны случаи реализации пар меток на ребре с наперед заданными атомами (пункт 2).

Приложение 2 посвящено изоэнергетическим многообразиям. В частности, удалось показать, что для 3-многообразия, гомеоморфного связной сумме произвольных линзовых пространств и $S^1 \times S^2$, существует биллиард, изоэнергетическая поверхность которого гомеоморфна такому многообразию. Это позволяет реализовать как изоэнергетические поверхности биллиарда некоторые многообразия Вальдхаузена, которые не являются многообразиями Зейферта (к примеру, связные суммы линзовых пространств).

Благодарности

Особую благодарность автор выражает своему научному консультанту акад. А.Т.Фоменко за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Автор благодарит проф. А.В. Болсинова за глубокий анализ текста и важные комментарии, проф. Е.А.Кудрявцеву за множество ценных замечаний, способствовавших улучшению изложения, проф. А.А.Ошемкова за огромный вклад в улучшение текста диссертации, в частности за ряд существенных разъяснений и комментариев, относящихся к теории инвариантов Фоменко-Цишанга, акад. С.В.Матвеева за помощь в вопросах трехмерной топологии, проф. П.Е. Рябова за ценные комментарии относящиеся к теории некомпактных бифуркаций, своих соавторов В.А.Кибкало, И.С.Харчеву, С.Е.Пустовойтова и всех участников семинара "Геометрия интегрируемых биллиардов" за множество ценных обсуждений. Также выражает искреннюю признательность всему коллективу кафедры Дифференциальной геометрии и приложений за творческую атмосферу и постоянную научную поддержку.

Глава 1

Основные понятия

1.1 Основные понятия теории интегрируемых систем

Определение 1.1. Четномерное гладкое многообразие M^{2n} называется симплектическим, если на нём задана симплектическая структура, то есть невырожденная, замкнутая кососимметричная форма на касательных векторах к M^{2n}: $\omega(a,b) := \omega_{ij}a^i b^j$.

Определение 1.2. Пусть (M^{2n}, ω) – симплектическое многообразие с некоторой гладкой функцией H. Тогда можно определить векторное поле $\mathrm{sgrad} H$, ей соответствующее, по следующему правилу $(\mathrm{sgrad} H)^i = w^{ij}\frac{\partial H}{\partial x^j}$, где через w^{ij} обозначены элементы матрицы, обратной к невырожденной матрице симплектической формы.

Определение 1.3. Динамическая система на гладком симплектическом многообразии M^{2n} называется гамильтоновой, если динамическая система имеет вид $v = \mathrm{sgrad} H$, для некоторой функции H. В этом случае функцию H называют гамильтонианом.

Определение 1.4. На функциях на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) скобку Пуассона можно определить следующим образом $\{f_1, f_2\} := \omega^{ij}\frac{\partial f_1}{\partial x^i}\frac{\partial f_2}{\partial x^j}$.

Если скобка Пуассона двух функций равняется нулю, то говорят, что эти функции относительно данной скобки находятся в инволюции или коммутируют.

1.1.1 Теорема Лиувилля.

Пусть M^{2n} – симплектическое многообразие с формой ω и $v = \mathrm{sgrad} H$ – гамильтонова система с гладким гамильтонианом H.

Определение 1.5. Гамильтонова система v называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю* (будем также говорить *интегрируемая система*), если существует набор функционально независимых, находящихся друг с другом в инволюции гладких функций $f_1, ..., f_n$, являющихся первыми интегралами гамильтоновой системы v, причем соответствующие им векторные поля $\mathrm{sgrad} f_i$ являются полными.

Часто при задании интегрируемой системы сразу указывают не только гамильтониан, но и конкретный набор первых интегралов $f_1, \ldots, f_n$, которые удовлетворяют описанным выше свойствам. Обычно в качестве интеграла f_1 берется гамильтониан H рассматриваемой системы.

Определение 1.6. Слоением Лиувилля интегрируемой гамильтоновой системы называется разбиение многообразия M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня функций $f_1, ..., f_n$.

Теорема 1.1 (J. Liouville [77] и более подробно см. теорему 1.2 в книге А.В.Болсинова и А.Т.Фоменко [5])**.** *Пусть на M^{2n} с симплектической формой ω задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система $v = \mathrm{sgrad} H$ с первыми интегралами $f_1 = H,\ f_2, ..., f_n$, причем соответствующие им векторные поля $\mathrm{sgrad} f_i$ являются полными. Фиксируем вектор значений $\xi = \{\xi_1, ..., \xi_n\},\ f_i = \xi_i$. Пусть T_ξ — регулярная поверхность уровня интегралов $f_1, ..., f_n$. Тогда*

1. *T_ξ – гладкое лагранжево подмногообразие, инвариантное относительно потоков $v = \mathrm{sgrad} H$ и $\mathrm{sgrad} f_2, ..., \mathrm{sgrad} f_n$.*

2. *Если подмногообразие T_ξ связно и компактно, то T_ξ диффеоморфно $n-$мерному тору T^n. Такие торы называются торами Лиувилля.*

3. *Слоение Лиувилля в некоторой окрестности U тора Лиувилля T_ξ тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению тора T^n на диск D^n.*

4. *В окрестности $U = T^n \times D^n$ существует система координат $s_1, ..., s_n, \varphi_1, ..., \varphi_n$, называемых переменными действие-угол, со следующими свойствами:*

   - *$s_1, ..., s_n$ – координаты на диске D^n, $\varphi_1, ..., \varphi_n$ – стандартные угловые координаты на торе T^n, $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.*
   - *$\omega = \Sigma d\varphi_i \wedge ds_i$.*
   - *Переменные действия s_i являются функциями от интегралов $f_1, ..., f_n$.*
   - *В переменных действие-угол гамильтонов поток v выпрямляется на каждом торе Лиувилля из окрестности U, т.е. гамильтоновы уравнения принимают вид*

     $$\dot{s}_i = 0,\ \dot{\varphi}_i = q_i(s_1, ..., s_n), i = 1, 2, ..., n.$$

     Это означает, что на каждом торе поток v задаёт условно-периодическое движение, а траектории являются прямолинейными обмотками тора (рациональными или иррациональными).

Многие задачи механики и математической физики (в частности, движение волчка — твердого тела с одной закрепленной точкой, и быть может дополнительными условиями) допускают описание в виде динамической системы $\dot{x_i} = \{H, x_i\}$ на шестимерном фазовом многообразии с некоторой скобкой Пуассона.

Выбор нужного количества независимых функций Казимира указанной скобки Пуассона (например, для известной алгебры Ли $e(3)$ группы движений трехмерного пространства таковыми являются геометрический интеграл и интеграл площадей) и ограничение системы на их совместную поверхность уровня общего положения M^4 (являющуюся, как правило, орбитой коприсоединенного представления и симплектическим листом для заданной скобки Пуассона) позволяет перейти к рассмотренному выше случаю гамильтоновой системы с двумя степенями свободы на симплектическом многообразии. Далее будем рассматривать именно такие гамильтоновые системы, являющиеся вполне интегрируемыми с некоторыми интегралом F. Размерность их торов Луивилля будет равна двум.

1.1.2 Отношение эквивалентности на множестве интегрируемых гамильтоновых систем.

Определение 1.7. Изоэнергетической поверхностью называется подмножество в M^4, задаваемое уравнением $H(x) = const$.

Определение 1.8. Пусть $(M_1^4, \omega_1, H_1, f_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, H_2, f_2)$ — две интегрируемые по Лиувиллю системы на симплектических многообразиях M_1^4 и M_2^4, обладающих, соответственно, интегралами H_1, f_1 и H_2, f_2. Рассмотрим неособые изоэнергетические поверхности $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : H_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : H_2(x) = c_2\}$. Интегрируемые гамильтоновы системы называются *лиувиллево эквивалентными на Q_1^3 и Q_2^3*, если существует послойный диффеоморфизм $Q_1^3 \to Q_2^3$, который, кроме того, сохраняет ориентацию 3-многообразий Q_1^3 и Q_2^3 и ориентацию всех критических окружностей.

В этом определении предполагается наложения ряда ограничений на изоэнергетические поверхности Q^3 системы $v = \mathrm{sgrad} H$. В частности, условие неособости Q^3 означает, что $dH \neq 0$ всюду на Q^3. В определении мы предполагаем, что критические окружности-решения ориентированы потоком ненулевого векторного поля $\mathrm{sgrad}\ H$.

1.1.3 Инварианты Фоменко-Цишанга интегрируемых систем.

Грубые инварианты.

Пусть $v = \mathrm{sgrad} H$ — гамильтонова система на симплектическом четырехмерном многообразии (M^4, ω). Обозначим через Q_h изоэнергетическую поверхность уровня $H(x) = h$. Это множество инвариантно относительно векторного поля v.

Рассмотрим неособую изоэнергетическую поверхность, в точках которой $dH(x) \neq 0$. Далее будем предполагать ее компактной.

Интегрируемость гамильтоновой системы v с двумя степенями свободы требует наличия одного дополнительного интеграла f, функционально независимого с гамильтонианом H. После ограничения на Q^3 этот интеграл является гладкой функцией, обязательно имеющей критические точки (ввиду компактности Q^3).

Обозначим это ограничение f на Q, той же буквой f. Можно показать [5], что в силу наших предположений интеграл f не может иметь изолированных критических точек на Q.

Определение 1.9 (см. определение 3.3 [5])**.** Интегрируемая гамильтонова система называется топологически устойчивой на изоэнергетической поверхности $Q^3_{h_0}$, если структура лиувиллева слоения системы не меняется при достаточно малых изменениях уровня энергии. Иначе говоря, системы $(v, Q^3_{h_0})$ и $(v, Q^3_{h_0+\varepsilon})$ лиувиллево эквивалентны, если ε достаточно мало.

В диссертации будем рассматривать устойчивые интегрируемые системы.

Рассмотрим гладкое многообразие X^2 и на нем гладкую функцию $f : X^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Определение 1.10. Точка $x \in X^2$ называется *критической* для функции f, если все частные производные равны нулю в этой точке. В противном случае точка называется *регулярной*.

Определение 1.11. Критическая точка $x \in X^2$ называется *невырожденной* для функции f, если определитель матрицы вторых частных производных в данной точке отличен от нуля.

Определение 1.12. Уровень $\{f = c\}$ называется критическим, если на этом уровне есть хотя бы одна критическая точка, в противном случае он называется *регулярным*.

Определение 1.13. Гладкая функция называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены.

Определение 1.14. Функцией Ботта на многообразии Q^3 называется такая функция f, все критические точки которой организованы в невырожденные критические подмногообразия.

Тем самым, множество критических точек в Q^3 есть несвязное объединение гладких подмногообразий. Невырожденность такого подмногообразия понимается в следующем смысле. Второй дифференциал $d^2 f$ должен быть невырожден на подпространстве, трансверсальном к критическому подмногообразию (в каждой его точке). Иными словами, в ограничении на трансверсаль к подмногообразию интеграл f есть функция Морса.

Пусть интеграл f некоторой интегрируемой системы v является функцией Ботта на регулярной компактной трехмерной изоэнергетической поверхности Q.

Предложение 1.1.1 (см. предложение 1.15 [5])**.** *Каждая связная компонента критического множества интеграла f на Q является одномерным или двумерным гладким подмногообразием, и диффеоморфна либо окружности, либо двумерному тору, либо бутылке Клейна.*

Отметим что в системах изучаемых в диссертации критические многообразия гомеоморфные торам и бутылкам Клейна не встречаются. Поэтому можно считать, что все критические многообразия боттовских интегралов являются окружностями.

Согласно теореме Лиувилля многообразие Q^3 расслоено на регулярные торы и особые слои (оно получается в результате склейки регулярных окрестностей особых слоев по их общим граничным торам). База возникающего слоения Лиувилля на Q^3 является одномерным графом W, называемым графом Кронрода-Риба функции $f|_{Q^3}$. Каждой вершине этого графа W, соответствует особый слой и некоторая бифуркация торов Лиувилля. Устройство слоения в его некоторой малой окрестности описывается комбинаторным объектом, называемым 3-атомом. Тем самым, каждой вершине можно сопоставить некоторый атом. Граф, для каждой вершины которого указан соответствующий ей атом, называется инвариантом (грубой молекулой) Фоменко.

Атомы-бифуркации.

Приведём ниже эффективный метод описания перестроек торов Лиувилля, основанный на понятиях двумерных и трёхмерных атомов [5] (далее, часто будем говорить о 2-атомах и 3-атомах).

Далее, пусть f – функция Морса гладкое многообразии X^2.

Определение 1.15. Введем на многообразии X^2 следующее отношение эквивалентности: на каждом уровне функции f точки x_1 и $x_2 \in X^2$ считаем эквивалентными, если они принадлежат одной компоненте связности. Профакторизуем X^2 по этому отношению эквивалентности. Получим граф (см. рис. 1.1), который называется *графом Кронрода-Риба* для функции f на многообразии X^2.

Регулярным значениям уровня соответствуют окружности, тогда как вершинам — особые слои, содержащие точки, где $df = 0$.

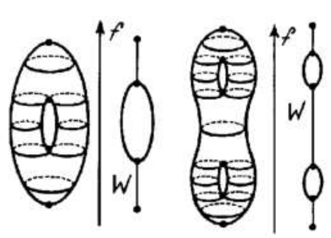


Рис. 1.1: Граф Кронрода-Риба для функций высоты на торе и сфере с двумя ручками

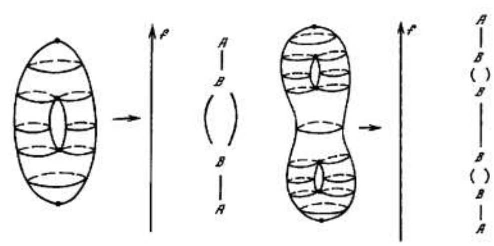


Рис. 1.2: Молекула для функций высоты на торе и сфере с двумя ручками

Рассмотрим достаточно малую ε – окрестность некоторой вершины графа (соответствующей критическим точкам функции f). Ее прообраз с точностью до послойного диффеоморфизма будем называть *2-атомом.* Опишем 2-атомы более строго.

Определение 1.16. Двумерным атомом называется пара (P^2, K), где P^2 – связная компактная поверхность с краем, ориентируемая или неориентируемая, а K – связный граф в ней такой, что выполняются следующие условия.

1. Либо K состоит только из одной точки, т.е. изолированной вершины степени ноль, либо все вершины графа K имеют степень 4.

2. Каждая связная компонента множества $P^2 \setminus K$ гомеоморфна кольцу $S^1 \times (0, 1]$ и множество этих колец можно разбить на два класса – положительные кольца и отрицательные кольца так, так чтобы:

3. К каждому ребру графа K примыкало ровно одно положительное кольцо и ровно одно отрицательное кольцо.

При этом атомы обычно рассматривают с точностью до естественной эквивалентности: два атома (P^2, K) и (P'^2, K') эквивалентны, если существует гомеоморфизм, переводящий P'^2 вP^2, и K' в K. Отметим, что на 2-атоме возникает естественное одномерное слоение. Его слоями являются линии уровня функции f.

Приведём примеры часто встречающихся двумерных атомов.

Двумерный атом A гомеоморфен диску – он расслоен на концентрические окружности, стягивающиеся на особый слой – центральную точку. Двумерный атом B представляет собой перестройку одной окружности в две, особым слоем этого атома является “восьмерка”. Двумерный атом C_2 представляет собой перестройку двух окружностей в две. Примеры этих простых атомов представлены на рисунке 1.3. Для описания топологии систем в настоящей работе нам

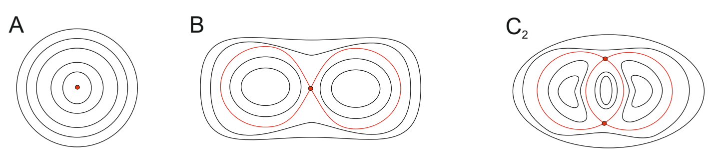


Рис. 1.3: Двумерные атомы A, B и C_2.

потребуются две бесконечных серии атомов. Так как в различных источниках их обозначения разнятся, то примем за атомы серий B_n и C_n атомов, изображённые на рисунке 1.4.

Поясним, что атом B является частным случаем серии B_n (при $n = 1$). Число n в атомах серий B_n и C_n — это число вершин соответствующих графов K. Примем обозначение, при котором атом C_1 гомеоморфен атому B.

Пусть c особое значение боттовского интеграла f на невырожденной изоэнергетической поверхности интегрируемой системы $v = \mathrm{sgrad} H$. Пусть L — особый слой слоения Лиувилля, отвечающий данному значению C. Пусть $U(L)$ — достаточно малая инвариантная окрестность

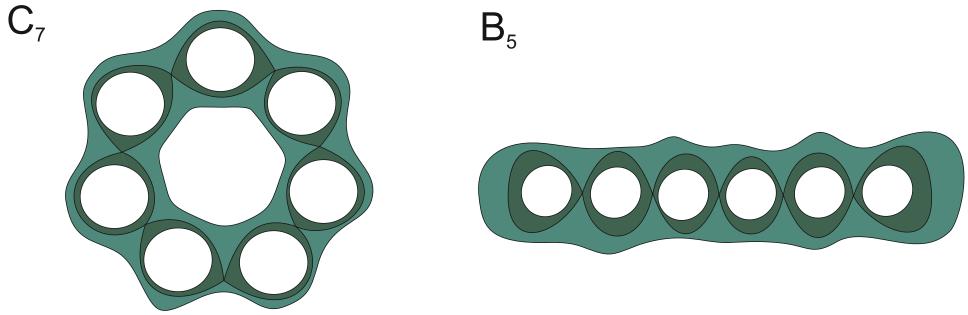


Рис. 1.4: Примеры двумерных атомов серий B и C, а именно, атомы B_5 и C_7.

особого слоя L в изоэнергетической поверхности Q^3. Можно считать, что $U(L)$ — это связная компонента множества $f^{-1}(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, содержащая L.

Трехмерное многообразие $U(L)$ с естественной структурой слоения Лиувилля называется 3-атомом. Уточним это определение. Будем считать, что два таких 3-многообразия лиувиллево эквивалентны, если

а) существует послойный диффеоморфизм между ними, т.е. сохраняющий структуру слоения Лиувилля

б) этот диффеоморфизм сохраняет ориентацию этих 3-многообразий, а также ориентацию на критических окружностях, задаваемых гамильтоновым потоком.

Определение 1.17. [58, 59, 61] Класс лиувиллевой эквивалентности многообразия $U(L)$ называется 3-атомом.

Отметим, что 3-атом всегда ориентируем. Эту ориентацию считаем фиксированной.

Определение 1.18. Компактное ориентируемое трехмерное многообразие (с краем или без края), разбитое на непересекающиеся простые замкнутые кривые (слои), называется *многообразием Зейферта*, если каждый слой имеет целиком состоящую из слоев окрестность, послойно гомеоморфную расслоенному полноторию. Многообразие Зейферта с заданной на нем структурой слоев называется *расслоением Зейферта.*

Поясним понятие расслоенного полнотория, использованного выше. Пусть m и n — взаимно простые целые числа, $0 \leq m < n$. Отображение g — поворот диска D^2 на угол $\frac{2\pi m}{n}$. В произведении $D^2 \times [0,1]$ склеим каждую точку $(x,0)$ с точкой $(g(x),1)$. Получим нетривиально расслоенное полноторие. Особый слой — ось полнотория — соответствует окружности, проходящей через центр диска (т.е. где $x = g(x)$). Каждый другой слой обходит тор ровно n раз, закручиваясь вокруг особого слоя m раз. Пара чисел (n,m) называется параметрами расслоенного полнотория, а также параметрами его особого слоя.

Пусть Q — многообразие Зейферта (с краем или без). Введем на нем отношение эквивалентности, полагая, что две точки эквивалентны тогда и только тогда, когда они лежат в одном слое.

Определение 1.19. Фактор-пространство многообразия Q по этому отношению эквивалентности обозначим через P и назовем базой расслоения Зейферта.

Согласно теореме А.Т.Фоменко [58, 59, 61], любой 3-атом невырожденной устойчивой системы (т.е. системы на неособой поверхности уровня гамильтониана) является расслоением Зейферта над 2-атомом, причем особые слои этого расслоения могут иметь только тип (2,1). Более строго, верна следующая теорема

Теорема 1.2 (А. Т. Фоменко [58, 59, 61], а также теорему 3.3 в книге А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко [5])**.** *Пусть $U(L)$ — трехмерный атом, содержащий особый слой L (где f на $U(L)$ является функцией Ботта) в регулярной изоэнергетической поверхности Q^3_h интегрируемой невырожденной гамильтоновой системы. Тогда*

- *Трехмерное многообразие $U(L)$ является многообразием Зейферта, особые слои которого (если они существуют) имеют один и тот же тип (2, 1).*
- *Эти особые слои являются в точности критическими окружностями боттовского интеграла f с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами (см. подробнее [5]).*
- *Если особых слоев у этого расслоения Зейферта нет, то многообразие $U(L)$ является прямым произведением $P(L) \times S^1$ где замыкание $P(L)$ — двумерная ориентируемая поверхность с краем.*
- *В общем случае структура расслоения Зейферта на $U(L)$ и структура слоения Лиувилля на $U(L)$ согласованы в том смысле, что каждый слой расслоения Зейферта (окружность) лежит на каком-то слое слоения Лиувилля. В частности, интеграл f постоянен на слоях расслоения Зейферта.*

Оказывается (см. подробнее [5]), что любой седловой 3-атом может быть получен одним из двух способов:

1. Прямым произведением некоторого ориентируемого седлового 2-атома на окружность S^1.
2. Второй способ устроен несколько сложнее. Здесь мы опишем *атом со звездочками.* Пусть дан двумерный ориентируемый седловой атом $\hat{P}$. Для определенности фиксируем на нём функцию $\hat{f}$, которая задает слоение. Предположим, что на 2-атоме задано гладкое отображение $\tau : \hat{P} \longrightarrow \hat{P}$, обладающее следующими свойствами:

   (a) $\tau^2 = id$,

(b) τ сохраняет уровни, т.е. $\hat{f}(\tau(x)) = \hat{f}(x)$,

(c) τ сохраняет ориентацию,

(d) некоторое конечное число критических точек является неподвижными точками инволюции τ.

Для построения 3-атома рассмотрим цилиндр $P \times [0, 2\pi]$ и склеим его основания по инволюции τ, отождествляя точки $(x, 2\pi)$ и $(\tau(x), 0)$. В результате мы получим ориентируемое 3-многообразие U с краем. Функция $\hat{f}$ естественным образом определена на U, поскольку $\hat{f}(\tau(x)) = \hat{f}(x)$, и ее поверхности уровня задают структуру слоения на U с единственным особым слоем. Отметим, что топологически многообразие U является расслоением над окружностью со слоем $\hat{P}$.

Если профакторизовать $\hat{P}$ по инволюции τ, получим другой 2-атом P. Выделим на нем звездочками точки на критической окружности, которые сохраняются под действием инволюции τ. Полученный 2-атом P с выделенными звездочками называется *атомом со звездочками*, а 2-атом $\hat{P}$ называется *дублем* P.

Иногда после факторизации получается кольцо со звездочками, расслоенное на окружности. В этом случае считаем, что у нас атом A со звездочками.

Ясно, что дубль $\hat{P}$ является разветвленным двулистным накрытием над 2-атомом P, причем точками ветвления являются как раз звездочки атома P.

Следует иметь ввиду, что дублей у одного атома со звездочками может быть несколько и все они задают один и тот же 3-атом. Поэтому многообразие U однозначно определяется атомом со звездочками P.

Свяжем с таким атомом граф Γ, являющийся графом для 2-атома P. Добавим к множеству его вершин звездочки. *Сложность атома со звездочками* – это число вершин его графа Γ.

Таким образом, все ориентируемые 3-атомы можно описать ориентируемыми 2-атомами и ориентируемыми 2-атомами, на которых стоит конечное число звездочек на критическом уровне.

Пример. На рис. 1.7 приведен пример простого 3-атома A^*. Он устроен несколько сложнее атома B (см. рис. 1.6), который является прямым произведением восьмёрки на окружность. Нужно удалить из полнотория лишь одно тонкое полноторие, но обходящее два раза вдоль оси. Особый слой L получается протаскиванием вдоль окружности вращающейся восьмерки, успевающей провернуться на угол π за один оборот. При прохождении через особый уровень один тор перестраивается в один тор.

Теперь построим отображение, которое сопоставит каждому двумерному атому (со звездочками или без) некий трёхмерный атом. Возьмём двумерный атом (P^2, K) и построим функцию Морса f на P^2 такую, что её единственный критический уровень совпадает с K. Такая функция

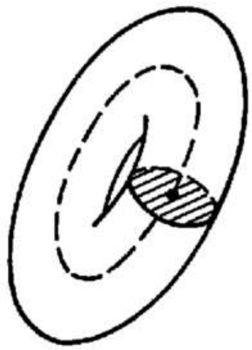


Рис. 1.5: 3-атом A.

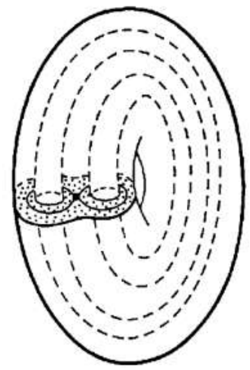


Рис. 1.6: 3-атом B.

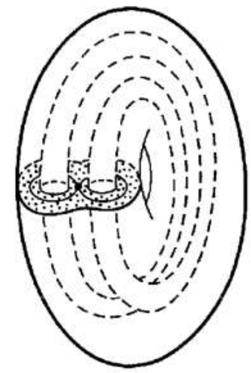


Рис. 1.7: 3-атом A^*.

определена однозначно с точностью до послойной эквивалентности. Она естественным образом расслаивает P^2 своими линиями уровня. Из теоремы 3.1 [5] вытекает, что по базе P^2 с отмеченными на ней звездочками (если они есть) однозначно (с точностью до послойной эквивалентности) восстанавливается 3-многообразие $U(L)$ со структурой расслоения Зейферта. Так как неособые линии уровня функции f на базе P^2 представляют собой окружности, то тогда их образом в 3-многообразии $U(L)$ будут торы. В случае, когда двумерный атом (P^2, K) не содержит звездочек, особый слой – образ графа K будет представлять собой прямое произведение графа K на окружность. В дальнейшем нам понадобится понятие дубля атома со звездочками. Пусть двумерный атом (P^2, K) содержит точки-звездочки. Для такого атома можно построить его дубль $(\hat{P}^2, \hat{K})$ – разветвленное двулистное накрытие над (P^2, K) так, чтобы точками ветвления были как раз точки-звездочки. Это можно сделать, например, сделав разрезы трансверсально графу K в точках-звездочках и склеив два экземпляра разрезанных атомов вдоль границы разреза. Заметим, что функцию f на P^2 можно продолжить до функции Морса $\hat{f}$ на поверхности P. При этом на дубле $(\hat{P}^2, \hat{K})$ определена естественная инволюция $\tau : \hat{P}^2 \to \hat{P}^2$, меняющая местами две части дубля – исходные поверхности P^2. Эта инволюция, очевидно, обладает следующими свойствами:

1. $\tau^2 = id$,

2. τ сохраняет функцию f, т.е. $\hat{f}(\tau(x)) = \hat{f}(x)$ для любого $x \in \hat{P}$,

3. τ сохраняет ориентацию.

Для построения 3-атома рассмотрим цилиндр $\hat{P} \times [0, 2\pi]$ и склеим его основания по инволюции τ, отождествляя точки $(x, 2\pi)$ и $(\tau(x), 0)$. В результате мы получим ориентируемое 3-многообразие U с краем, которое и будем называть 3-атомом со звездочками.

Звездочки являются неподвижными точками инволюции. Оказывается, в некоторых случаях важно расположение звездочки на особом слое двумерного атома. Дело в том, что при построении дубля разному расположению звездочек отвечают, вообще говоря, разные инволюции, а потому, в результате могут получаться различные 3-атомы. Покажем конструкцию получения бесконечных серий B_n^* и B_n^{**}, $n > 0$ атомов со звездочками, необходимых в настоящей работе. Двумерные атомы этих серий получаются в результате добавления точек-звездочек на граничные окружности соответствующих графов K (см. рис. 1.8). В качестве дублей атомов серий B_n^* и B_n^{**} будут выступать атомы B_{2n+1} и C_{2n+2} соответственно.

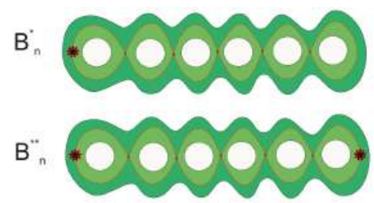


Рис. 1.8: Плоские атомы со звездочками серий B_n^* и B_n^{**}.

Отметим, что 3-атомы можно задавать в терминах так называемых почти прямых произведений, следуя Н.Т.Зунгу [78]. Мы не будем использовать это представление 3-атомов.

Выбор циклов на торах Лиувилля.

Определение 1.20. Две интегрируемые гамильтоновы системы грубо лиувиллево эквиваленты если базы слоения Лиувилля на них совпадают, т.е. их графы Фоменко W изоморфны.

Построенная молекула Фоменко – граф W – описывает топологию слоения Лиувилля не полностью, так как она содержит не всю информацию о склейках регулярных окрестностей особых слоев.

Для описания топологии слоения необходимо выбрать пары так называемых допустимых базисов на граничных торах и указать матрицы перехода от одного базиса к другому. Структура атома-бифуркации задаёт правило выбора допустимого базиса. Более подробное изложение приведено в работах [5, 60, 62], здесь ограничимся явным указанием построения.

Случай атома A.

В этом случае бифуркации тора Лиувилля соответствует полноторие. В качестве первого базисного цикла λ необходимо выбрать меридиан полнотория, т.е. цикл, стягивающийся внутри полнотория в точку. В качестве второго базисного цикла μ можно взять произвольный цикл, дополняющий λ до базиса. В этом случае цикл μ можно считать слоем расслоения Зейферта. Слои расслоения Зейферта имеют естественную ориентацию, задаваемую гамильтоновым векторным полем. Говоря точнее, только один из этих слоев является траекторией рассматриваемого векторного поля, а именно – критическая окружность дополнительного интеграла f, ось полнотория. Ориентация этого слоя позволяет однозначно определить ориентацию на цикле μ. Кроме того, мы имеем ориентацию на всём 3-атоме, а, следовательно, и на его граничном торе. Поэтому мы можем однозначно определить ориентацию и первого базисного цикла λ, потребовав, чтобы пара (λ, μ) была положительно ориентирована.

Случай седлового атома без звездочек. В этом случае 3-атом U имеет структуру тривиального S^1-расслоением над двумерным атомом P. Тогда в качестве первого базисного цикла λ_i на каждом из граничных торов T_i мы возьмём слой этого расслоения. Дополнительные циклы μ_i выбираются следующим образом. Рассмотрим произвольное сечение $P \subset U$. Оно высекает на каждом граничном торе T_i некоторый цикл μ_i. Эти циклы мы и возьмём в качестве вторых базисных циклов на торах T_i. Ориентация на базисных циклах выбирается однозначно так же, как и в предыдущем случае.

Случай атома со звездочками. Как и в предыдущем случае, в качестве первых базисных циклов λ_i на каждом из граничных торов T_i мы возьмём слой расслоения Зейферта. Однако наличие особых слоёв не позволяет нам далее поступать аналогично, так как это расслоение не имеет глобального сечения такого, чтобы каждый слой пересекал его ровно один раз. Оказывается, можно очень естественным способом построить циклы допустимой системы координат, используя для этого дубль $\hat{P}$ базы расслоения Зейферта. Будем пользоваться тем, что расслоение Зейферта в случае трехмерного атома со звездочками обладает "удвоенным" сечением, то есть в него можно вложить поверхность $\hat{P}$ так, что любой неособый слой расслоения Зейферта пересекает $\hat{P}$ ровно в двух точка, а особый слой – в одной. Такое вложение определяет естественную инволюцию $\tau : \hat{P} \to \hat{P}$ такую, что база P расслоения Зейферта является фактор-пространством $P = \hat{P}/\tau$.

Рассмотрим вложенный дубль $\hat{P} \subset U$ и его границу $\partial\hat{P} = \hat{P} \cap \partial U$. Пусть $\hat{\mu}_i = \hat{P} \cap T_i$ – часть границы $\partial\hat{P}$, лежащая на торе $T_i \subset \partial U$.

Возможны два случая. Первая возможность состоит в том, что $\hat{\mu}_i$ представляет собой объединение двух отдельных циклов, каждый из которых пересекается со слоем λ_i расслоения Зейферта в одной точке и, следовательно, является сечением расслоения Зейферта на граничном торе T_i. Во втором случае $\hat{\mu}_i$ является связным циклом, имеющим индекс пересечения 2 со слоем $\lambda_i = \lambda$.

Построим из циклов $\hat{\mu}_i$ нужные нам циклы μ_i допустимой системы координат. Для начала в первом случае в качестве цикла μ_i необходимо взять одну из связных компонент $\hat{\mu}_i$, а во втором положить $\mu_i = \frac{1}{2}(\hat{\mu}_i + \lambda_i)$. Локально на каждом граничном торе построенные циклы μ_i будут полностью удовлетворять требуемым свойствам, т.е. будут настоящими сечениями расслоения Зейферта на каждом из граничных торов. Однако, для согласованности различных способов построения циклов (см. книгу [5]) один из этих циклов необходимо чуть подправить, добавив к нему цикл, кратный слою λ. При этом кратность должна выбираться так, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$\sum_i \mu_i = \frac{1}{2}(\sum_i \hat{\mu}_i + s\lambda) = \frac{\partial\hat{P} + s\lambda}{2},$$

где s – число критических окружностей в U с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами, т.е. количество звездочек в атоме U.

Молекула Фоменко-Цишанга – полный инвариант Лиувиллевой эквивалентности.

Точке каждого ребра грубой молекулы W, соответствует тор Лиувилля. На нём определены два допустимых базиса, которые определяются по правилам выше, согласно тем атомам, которые соединяет выбранное ребро. На каждом ребре графа W можно указать стрелкой ориентацию этого ребра. Обычно это делают глобально, исходя из направления роста дополнительного интеграла, однако это можно сделать и произвольно. Для каждой пары базисов можно указать матрицу перехода от одного базиса к другому, которая называется матрицей склейки. Так как допустимые базисы выбираются неоднозначно, то полученная матрица склейки может меняться при замене одних допустимых базисов на другие. Однако по матрице склейки можно определить ряд чисел-меток, которые для всех таких матриц будут совпадать (см. [5, 60, 62]).

Пусть на выбранном ребре найдена матрица склейки $C_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$. Сопоставим матрице склейки C_i следующие числовые метки.

Определение 1.21. Числовой рациональной меткой r_i на ребре e_i молекулы W называется:

$$r_i = \begin{cases} \dfrac{\alpha_i}{\beta_i} \mod 1 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, & \text{если } \beta_i \neq 0, \\ \text{символ } \infty, & \text{если } \beta_i = 0. \end{cases}$$

Определение 1.22. Числовой целочисленной меткой ε_i на ребре e_i молекулы W называется:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \text{sign } \beta_i, & \text{если } \beta_i \neq 0, \\ \text{sign } \alpha_i, & \text{если } \beta_i = 0. \end{cases}$$

Назовём бесконечным ребро молекулы с меткой r_i, равной ∞. Остальные рёбра будем называть конечными. Разрежем молекулу по всем конечным рёбрам. В результате молекула распадётся на некоторое число связных кусков.

Определение 1.23. Семьёй называется кусок молекулы, который не содержит атомов A после разреза молекулы по всем конечным ребрам.

В каждой семье все рёбра можно разделить на три класса: входящие, выходящие и внутренние.

Определение 1.24. Сопоставим каждому из этих рёбер e_i целое число Θ_i по следующему правилу:

$$\Theta_i = \begin{cases} [\dfrac{\alpha_i}{\beta_i}], & \text{если } e_i \text{ – выходящее ребро}, \\ [-\dfrac{\delta_i}{\beta_i}], & \text{если } e_i \text{ – входящее ребро}, \\ [-\dfrac{\gamma_i}{\alpha_i}], & \text{если } e_i \text{ – внутреннее ребро}. \end{cases}$$

Тогда для каждой семьи определена целочисленная метка n, определенная по следующему правилу
$$n = \sum \Theta_i,$$
где сумма берётся по всем рёбрам данной семьи.

Числовые метки r, ε и n инвариантны относительно допустимых замен базисов на граничных торах (см. леммы 4.5 и 4.6 книги [5]) Напомним, что замена является допустимой, если она преобразует один допустимый базис в другой (более подробно см. [5]).

Определение 1.25. Молекула W, снабжённая числовыми метками r, ε и n, называется меченой молекулой или инвариантом Фоменко-Цишанга.

Теорема 1.3. *[А. Т Фоменко, Х. Цишанг: [5, 60, 62]] Две невырожденные интегрируемые гамильтоновы системы на изоэнергетических поверхностях $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : H_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : H_2(x) = c_2\}$ лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

Влияние ориентации на метки.

При построении меченой молекулы W^* мы использовали ориентации многообразия Q^3, критических окружностей дополнительного интеграла f (для данной системы $v = \mathrm{sgrad} H$) и ориентации рёбер молекулы. При изменении любой из этих ориентаций меченая молекула W^* будет, вообще говоря, меняться. Опишем формальные правила, показывающие, что происходит с меченой молекулой при заменах ориентаций.

Изменение ориентации на ребре молекулы.

В случае бесконечного ребра метки ε и n не меняются. Если метка r была бесконечной, то она не меняется. В случае конечного ребра метка $r = (\frac{\alpha}{\beta})\mathrm{mod}1$ меняется на метку $r^* = (\frac{\delta}{\beta})\mathrm{mod}1$, где δ однозначно определяется из условия $(\alpha\delta - 1)\mathrm{mod}\beta = 0$.

Изменение ориентации 3-многообразия Q.

- Ребро соединяет атомы одного типа, т.е. либо A с A либо седло с седлом. Тогда в случае конечного ребра метки r и ε меняют знаки. В случае бесконечного ребра метки r и ε не меняются.

- Ребро соединяет атомы разных типов. При замене ориентации многообразия Q^3 в случае конечного ребра метка r меняет знак, а метка ε не меняется. В случае бесконечного ребра наоборот: метка r не меняется, а метка ε меняет знак.

- Метка n заменяется на метку n' которая вычисляется следующим образом. Пусть l – число ребер молекулы, несущих на себе дробную метку r и инцидентных данной семье (т.е. входящих или исходящих), а s – число звездочек у всех атомов, образующих данную семью. Тогда

$$n' = -n - l - s.$$

1.2 Классическая постановка биллиардной задачи.

Пусть область Ω на плоскости $\mathbb{R}^2$ такова, что граница области является кусочно-гладкой кривой, причем в точках излома этой кривой углы равны $\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим динамическую систему, описывающую движение (материальной) точки внутри области Ω с естественным отражением на границе $P = \partial\Omega$. Эту систему назовём "биллиардом в области". Будем считать, что в точках, где граница P не гладкая (тогда, как было сказано выше, угол излома обязательно равен $\frac{\pi}{2}$) траектории системы можно доопределить по непрерывности: а именно, попав в вершину угла границы, материальная точка, не теряя скорости, отразится назад по той же траектории. Таким образом, с формальной точки зрения фазовым пространством системы является многообразие

$$M^4 := \{(x, v)| \quad x \in \Omega, v \in T_x\mathbb{R}^2 \ , |v| > 0\}/ \sim$$

где отношение эквивалентности в регулярных точках граничной задаётся так

$$(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \in P, \quad |v_1| = |v_2| \quad \text{и} \quad v_1 - v_2 \perp T_{x_1}P.$$

Здесь через T_xP обозначена касательная прямая к области Ω в точке x, а через $|v|$ – евклидова длина вектора v.

Если точка x является вершиной угла, то по непрерывности потребуем чтобы $v_1 = -v_2$ (как было сказано выше).

Это отношение эквивалентности иногда будем называть биллиардным законом.

1.3 Эллиптико-гиперболический биллиард.

Пусть область биллиарда Ω ограничена дугами софокусных эллипсов и гипербол.

Определение 1.26. Фиксируем систему координат (x, y). Определим софокусные квадрики как квадрики семейства

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1 \quad \lambda \in (-\infty, b) \cup (b, a)$$

и полученные из них "предельным переходом", точнее квадрики семейства

$$(b-\lambda)x^2 + (a-\lambda)y^2 = (a-\lambda)(b-\lambda), \lambda \leq a. \tag{1.1}$$

Здесь $\infty \geq a \geq b > 0$ — фиксированная пара чисел (определяющая семейство софокусных квадрик), λ — параметр семейства (определяющий квадрику семейства).

В классическом случае ($\infty > a > b$) при $\lambda \neq a$ или b это эллипсы или гиперболы. При $\lambda = b$ эта квадрика является парой совпадающих прямых $y = 0$, и как множество совпадает с горизонтальной осью. Далее будем также называть ее фокальной прямой, отрезок между фокусами вырожденными эллипсом, а выходящие из фокусов непересекающиеся лучи — вырожденной гиперболой. Вырожденные эллипс и гиперболы можно определить как поточечные пределы эллипсов и гипербол софокусного семейства соответственно, близких к $\lambda = b$.

Параметру $\lambda = a$ соответствует вырожденная квадрика, точки которой составляют вертикальную ось. Заметим, что для компактной биллиардной области (стола) отрезок этой прямой, попадающий в область Ω, является поточечным пределом попадающих в него дуг ветвей невырожденных гипербол. Будем называть соответствующую уровню $\lambda = a$ кривую гиперболой (а не вырожденной квадрикой) для упрощения изложения.

При $\infty = a > b$ софокусные квадрики являются софокусными параболами.

Под осями семейства квадрик в дальнейшем будем понимать координатные оси Ox и Oy. При $a = b$ квадрики вырождаются в концентрические окружности и ортогональные им радиальные прямые. Этот случай отдельно описан в разделе 1.5 настоящей работы.

Нетрудно показать, что софокусные квадрики ортогональны друг другу.

Замечание 3. В дальнейших рассуждениях эллипсы и гиперболы предполагаются софокусными квадриками семейства (1.1) (причем $\infty > a > b$), если не оговорено иного. В случае рассмотрения круговых биллиардов ($0 < a = b < \infty$) мы особо отметим это.

Определение 1.27. Пусть дана компактная область в плоскости, ограниченная дугами софокусных квадрик, все углы которой в точках излома границы равны $\frac{\pi}{2}$. В этом случае граница области является либо простой замкнутой кривой, либо несвязным объединением двух эллипсов. Дуги квадрик, концами которых служат углы области, назовем *сегментами квадрик*, ограничивающих данную область (или сегментами границы данной области).

В нашей работе мы не рассматриваем биллиарды с “внутренними стенками”. Т.е. мы считаем, что у каждой граничной точки любая достаточно малая окрестность разбивается на две части — внутреннюю и внешнюю.

Легко понять, что сегменты принадлежат к одному из четырёх типов: эллипс, дуга невырожденной гиперболы, заключённая между двумя эллипсами, дуга невырожденного эллипса, заключённая между двумя гиперболами, отрезок фокальной прямой.

Теорема 1.4 (Якоби, Шаль см. например, [22]). *Касательные прямые к геодезической линии на квадрике в n-мерном евклидовом пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадрики еще $n-2$ конфокальных с ней квадрик, одних и тех же для всех точек данной геодезической.*

Рассмотрим геодезический поток трехосного эллипсоида. Он интегрируем. Касательные прямые к фиксированной геодезической являются касательными к некоторому гиперболоиду, конфокальному с данным трехосным эллипсоидом. Дж.Д. Биркгоф [4] заметил, что если устремить малую полуось эллипсоида к нулю, то геодезические на нём перейдут в биллиардные траектории–ломаные внутри эллипса. Интегрируемость сохранится. А именно, касательные в любой точке биллиардной траектории внутри эллипса касаются эллипса или гиперболы, софокусных с этим эллипсом. Далее, см. например [22], было замечено, что в если в качестве плоского биллиарда рассмотреть область, ограниченную дугами софокусных эллипсов и гипербол, то интегрируемость сохранится. А именно, звенья любой биллиардной траектории в области Ω лежат на прямых, касательных к некоторой квадрике, софокусной с семейством квадрик, образующих границу P области Ω.

Рассмотрим функции $|v|^2$ — квадрат модуля вектора скорости — и Λ — значение параметра λ софокусной квадрики–каустики, которой касается данная траектория или её продолжения.

Предложение 1.3.1. *Пусть прямая с направляющим вектором* $(v_1,\ v_2)$ *проходит через точку с координатами* (x, y)*. Тогда параметр софокусной квадрики семейства* (1.1)*, которой касается данная прямая, равен*

$$\lambda = \frac{bv_1^2 + av_2^2 - (v_2x - v_1y)^2}{v_1^2 + v_2^2}. \qquad (*)$$

Доказательство. Множество точек прямой с направляющим вектором $(v_1,\ v_2)$, проходящей через точку с координатами (x, y), можно параметризовать параметром t следующим образом $(x + tv_1, y + tv_2)$. Напомним, что квадрика семейства (1.1) описывается соотношением

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(a - \lambda).$$

Если прямая имеет с этой квадрикой ровно одну точку пересечения, то подставляя координаты точки прямой в это соотношение получаем уравнение, которое имеет ровно одно решение относительно t :

$$(b - \lambda)(x + tv_1)^2 + (a - \lambda)(y + tv_2)^2 = (a - \lambda)(a - \lambda).$$

Перепишем это уравнение сгруппировав степени t :

$$t^2\left((b-\lambda)v_1^2 + (a-\lambda)v_2^2\right) + 2t\left((b-\lambda)xv_1 + (a-\lambda)yv_2\right) + x^2(b-\lambda) + y^2(a-\lambda) - (a-\lambda)(b-\lambda) = 0. \quad (**)$$

Рассмотрим отдельно случай, при котором данное уравнение не является квадратным. Тогда

$$(b - \lambda)v_1^2 + (a - \lambda)v_2^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{bv_1^2 + av_2^2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

В этом случае легко видеть, что $\lambda > b$ (т.е. эта квадрика — гипербола) и $\frac{v_1}{v_2} = \pm\frac{\sqrt{a-\lambda}}{\sqrt{\lambda-b}}$. Такое соотношение означает, что вектор (v_1, v_2) коллинеарен направляющему вектору асимптоты гиперболы, который задаются уравнением

$$\frac{x}{\sqrt{a-\lambda}} \pm \frac{y}{\sqrt{\lambda-b}} = 0.$$

В этом случае прямая и квадрика, конечно имеют одну общую точку, однако в этой точке они пересекаются трансверсально. Для касания (на бесконечности) необходимо чтобы прямая $(x+tv_1, y+tv_2)$ являлась асимптотой. Это означает что вектора $(v_1,\ v_2)$ и (x, y) коллинеарны, т.е. $xv_2 - yv_1 = 0$. В результате формула (*) в случае, если уравнение (**) не квадратное, доказана.

Далее, пусть квадратное уравнение (**) имеет один корень, то получаем следующее соотношение на λ :

$$((b-\lambda)xv_1 + (a-\lambda)yv_2)^2 - \left((b-\lambda)v_1^2 + (a-\lambda)v_2^2\right)\left(x^2(b-\lambda) + y^2(a-\lambda) - (a-\lambda)(b-\lambda)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b-\lambda)^2x^2v_1^2 + 2(a-\lambda)(b-\lambda)xyv_1v_2 + (a-\lambda)^2y^2v_2^2 - (b-\lambda)^2x^2v_1^2 - (a-\lambda)(b-\lambda)x^2v_2^2 -$$

$$-(a-\lambda)(b-\lambda)y^2v_1^2 - (a-\lambda)^2y^2v_2^2 + (a-\lambda)(b-\lambda)^2v_1^2 + (a-\lambda)^2(b-\lambda)v_2^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(a-\lambda)(b-\lambda)xyv_1v_2 - (a-\lambda)(b-\lambda)x^2v_2^2 - (a-\lambda)(b-\lambda)y^2v_1^2 + (a-\lambda)(b-\lambda)^2v_1^2 + (a-\lambda)^2(b-\lambda)v_2^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-\lambda)(b-\lambda)\left(2xyv_1v_2 - x^2v_2^2 - y^2v_1^2 + (b-\lambda)v_1^2 + (a-\lambda)v_2^2\right) = 0.$$

Возникающие тривиальные решения $\lambda = a$ и $\lambda = b$, соответствующие координатным осям, всегда появляются в случае общего положения (так как любая не параллельная координатной оси прямая пересекает её в одной точке). Таким образом, выражая λ из последней скобки, получаем $\lambda = \dfrac{bv_1^2 + av_2^2 - (v_2x - v_1y)^2}{v_1^2 + v_2^2}$.

□

Рассмотрим на открытой области $\Omega_0 = \Omega \setminus \partial\Omega$ – внутренности биллиардной области Ω — следующие две функции $|v|^2$ и Λ. На области Ω_0 функции $|v|^2$ и Λ гладкие. Относительно стандартной симплектической структуры на плоской области Ω_0 функции $|v|^2$ и Λ коммутируют. Отметим, что на границе области Ω эта симплектическая структура не определена. Таким образом, данная "биллиардная" система обладает двумя независимыми на Ω_0 интегралами:

1. $v_1^2 + v_2^2$ — квадрат модуля вектора скорости,

2. $\Lambda = \dfrac{bv_1^2 + av_2^2 - (v_2x - v_1y)^2}{v_1^2 + v_2^2}$ — параметр софокусной квадрики.

1.3.1 Определение плоского эллиптико-гиперболического биллиарда.

Определение 1.28. *Простейшей элементарной (плоской) областью* Ω назовем компактную, связную часть плоскости, граница которой состоит из сегментов софокусных квадрик семейства (1.1), углы между которыми равны $\frac{\pi}{2}$.

По определению каждая простейшая элементарная область является частью плоскости. Т.е. для неё задано тождественное изометричное вложение в плоскость.

Определение 1.29. *Составной элементарной (локально-плоской) областью* (Ω, U_i) назовём двумерное связное, компактное, локально-плоское гладкое риманово многообразие с кусочно-гладким краем, не имеющее изометричного вложения в плоскость, которое может быть разбито в конечное объединение простейших элементарных областей U_i, ограниченных дугами квадрик из одного и того же софокусного семейства (1.1) так, что либо пересечение любых двух элементарных областей U_i и U_j пусто, либо существуют изометричные вложения этих областей U_i, U_j в плоскость, совпадающие на их пересечении $U_i \cap U_j$, т.е. пересечение $U_i \cap U_j$ является как сегментом границы области U_i, так и сегментом границы области U_j, образ этого пересечения $U_i \cap U_j$ при любой из этих изометрий является дугой квадрики семейства (1.1), а образы областей U_i и U_j лежат по разные стороны от этой дуги, в случае если эта дуга не лежит на осях семейства (1.1).

Простейшие элементарные области и составные элементарные области будем называть просто элементарными. Биллиардное движение в такой области иногда будем называть эллиптико-гиперболическим, а саму область – эллиптико-гиперболической биллиардной областью. Допуская некоторую вольность речи, мы иногда вместо словосочетания "биллиардная область" будем использовать слово биллиард, так как из контекста обычно понятно, идет ли речь о двумерном многообразии или биллиардной динамике.

Замечание 4. Прокомментируем это определение. Во-первых, ещё раз почеркнем, что составные биллиардные области не вложимы изометрично в плоскость. Приведем пример “конического кольца”, которое не вложимо изометрично в плоскость, но является составной областью в нашем смысле. В дальнейшей классификации такая область обозначена C_1 (см. пример на рис. 1.11 б)). Она получается так. Возьмем область, ограниченную двумя эллипсами и фокальной прямой. Два граничный отрезка фокальной прямой изометрично склеим друг с другом. Локально в окрестности каждой внутренней точки такого биллиарда метрика является плоской.

1.3.2 Отношение эквивалентности.

Определение 1.30. Элементарная область (Ω, U_i), ограниченная дугами квадрик из софокусного семейства (1.1), называется **эквивалентной** другой элементарной области (Ω', U_i'), ограниченной дугами квадрик из того же семейства (1.1), если (Ω', U_i') можно получить из (Ω, U_i) путем композиции перечисленных ниже преобразований.

- Последовательное изменение сегментов границы в образах некоторых простейших элементарных областей U_i при их изометричных вложениях в плоскость путем непрерывной деформации в классе квадрик (1.1). Потребуем выполнения трех условий.

1. Во все время деформации сегмент границы лежит либо на софокусном эллипсе (т.е. их параметр квадрики, на которой он лежит, меняется в пределах $(-\infty, b)$), либо на софокусной гиперболе (т.е. параметры квадрики, на которой он лежит, меняется в пределах $(b, a]$), либо является отрезком фокальной прямой (т.е. параметр софокусной квадрики, на которой он лежит, равен b во все время деформации);
2. Одновременно меняются и остаются равными друг другу значения параметра λ для квадрик, являющихся гиперболами, содержащих образы общей граничной дуги любых двух пересекающихся простейших элементарных областей при их изометричных вложениях в плоскость, согласованных на этой дуге до деформации (а потому также во время и после деформации);
3. Одновременно меняются и остаются равными друг другу значения параметра λ для квадрик, являющихся эллипсами, содержащих образы эллиптических граничных сегментов (разных элементарных областей), имеющих общую вершину;

- Симметрия относительно оси семейства (1.1) во всех простейших элементарных областях U_i одновременно;
- Объединение нескольких простейших элементарных областей в одну путем их изометричных склеек по дугам границ. При этом простейшие элементарные области расположены по разные стороны от склеиваемого сегмента. Это обеспечивает то, что на ребре склейки метрика остается плоской.
- Разбиения одной элементарной области на более мелкие вдоль дуг софокусных квадрик.

Замечание 5. Определение 1.30 запрещает сегменту изменяемой границы менять свой тип, то есть сегменты во время деформации остаются либо эллиптическими (т.е. параметры квадрик, на которых располагаются эти сегменты, непрерывно меняются в пределах $(-\infty, b)$), либо гиперболическими (т.е. параметры квадрик, на которых располагаются эти сегменты, непрерывно меняются в пределах $(b, a]$), либо все время лежат на фокальной прямой (во все время деформации параметр остается равным b). Поясним изменение параметров гиперболических дуг. Пусть параметр гиперболической граничной дуги равен $\lambda \in (b, a)$. Будем увеличивать этот параметр. Тогда значению $\lambda = a$ будет соответствовать вертикальная прямая, а дальнейшее изменение параметра приводит к смене ветви гиперболы. Такую деформацию мы разрешаем. В работах автора [53, 55] было показано, что в слоении Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 биллиарда в элементарной области, имеется столько критических окружностей на седловом уровне дополнительного интеграла (параметра квадрики), сколько отрезков в пересечении с внутренностью этой области имеет фокальная прямая (для составной элементарной области – сумма числа пересечений для каждой простейшей элементарной и числа общих ребер простейших элементарных областей, лежащих при их погружениях в плоскость на фокальной прямой).

Замечание 6. Поясним определение на примере двух биллиардов – A'_1 и A'_2 (см. рис. 1.9). Вроде бы естественная деформация, которая переводит биллиард A'_1 в A'_2 переводит сегмент гиперболы в отрезок фокальной прямой. Однако, при этом параметр этой гиперболы принимает значение b, что запрещено.

1.3.3 Классификация элементарных эллиптико-гиперболических биллиардных областей.

Приведём необходимый нам для дальнейшего факт, ранее доказанный автором в статье [55].

Предложение 1.3.2 ([55]). *Любая элементарная область (Ω, U_i) эквивалентна области, принадлежащей одной из следующих трёх серий (все они представлены на рисунках 1.9, 1.10 и 1.11):*

1. *Односвязные элементарные области, изометрично вложимые в плоскость, содержащие отрезок фокальной прямой между фокусами (внутри области или на границе). Существует ровно шесть типов. Представители всех классов этой серии изображены на рисунке 1.9. Для каждого класса укажем f – количество фокусов, принадлежащих области, f' – число фокусов принадлежащих границе области. Такие области будем обозначать A_f, если их граница не содержит отрезок фокальной прямой, и A'_f иначе.*

2. *Односвязные элементарные области, изометрично погружаемые в плоскость так, что образ области при этом погружении не содержит отрезка фокальной прямой между фокусами. Каждую такую область ограничивает четырёхугольник, образ которого при указанном погружении состоит из дуг двух эллипсов и двух гипербол (быть может совпадающих). Такие области будем обозначать либо B_n, либо B'_n, либо B''_n в зависимости от того, образы нуля, одного или двух отрезков границы лежат на фокальной прямой, где n — это количество связных компонент прообраза фокальной прямой при изометричном погружении области вместе с ее границей в плоскость. Будем называть их областями типа B. Примеры областей изображены на рисунке 1.10.*

3. *Неодносвязные элементарные области C_n, склеенные из биллиардов B_1 особого вида. Рассмотрим биллиард B_1, ограниченный двумя софокусными эллипсами и вертикальной прямой (гиперболой с параметром $\lambda = a$). Биллиард C_n получается последовательной изометричной склейкой n экземпляров такого биллиарда B_1 в кольцо вдоль прямолинейных сегментов (см. примеры на рис. 1.11). Эти сегменты имеют одинаковую длину и вдоль них происходит указанная выше изометричная склейка элементарных биллиардов.*

При этом области, принадлежащие к различным сериям (A, B или C) неэквивалентны между собой, а также неэквивалентны между собой внутри каждой серии области с различными индексами.

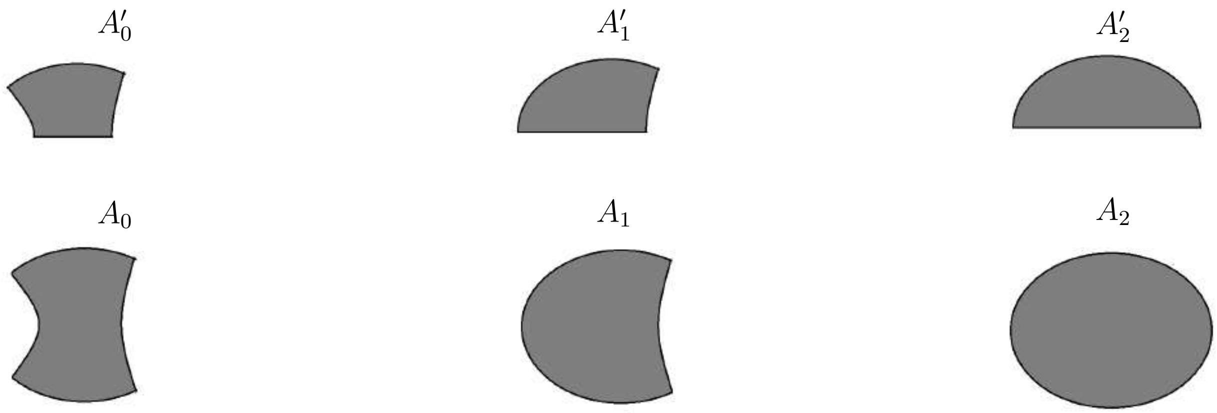


Рис. 1.9: Представители классов элементарных областей, образующих конечную серию A

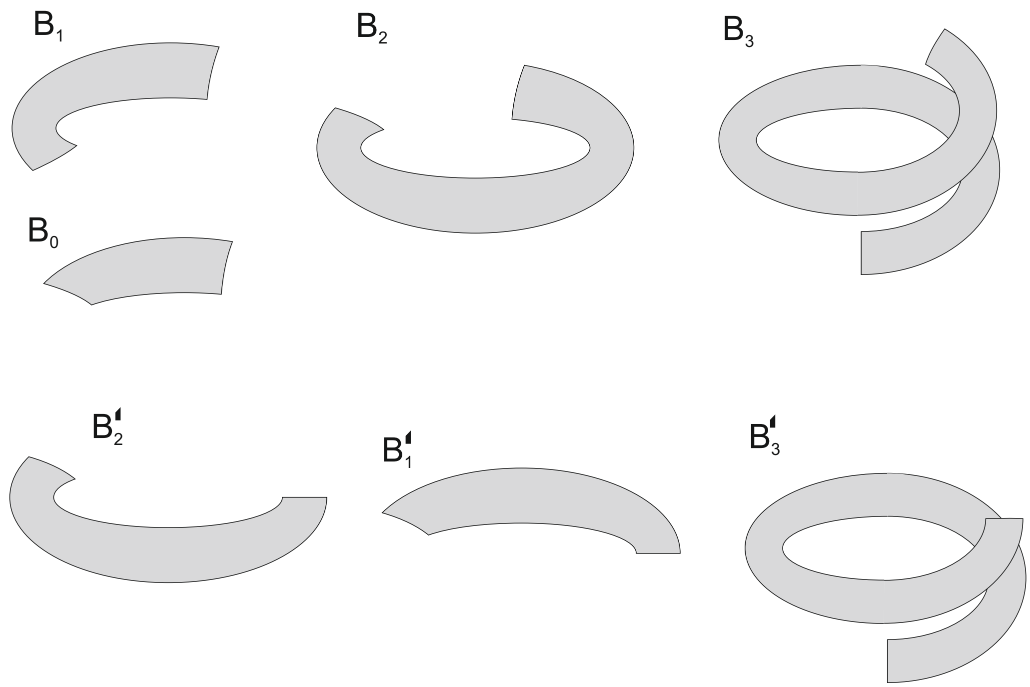


Рис. 1.10: Примеры элементарных областей, принадлежащих бесконечной серии B.

Замечание 7. Прокомментируем последнюю серию C_n биллиардов, гомеоморфных кольцу. Такие биллиарды имеют изометричное вложение в плоскость только при $n = 2$. Эта область ограничена двумя эллипсами. При четных $n = 2k$ биллиард C_n является k-листным накрытием над биллиардом C_2. Для нечетного n описание менее наглядное, оно описано в предложении 1.3.2.

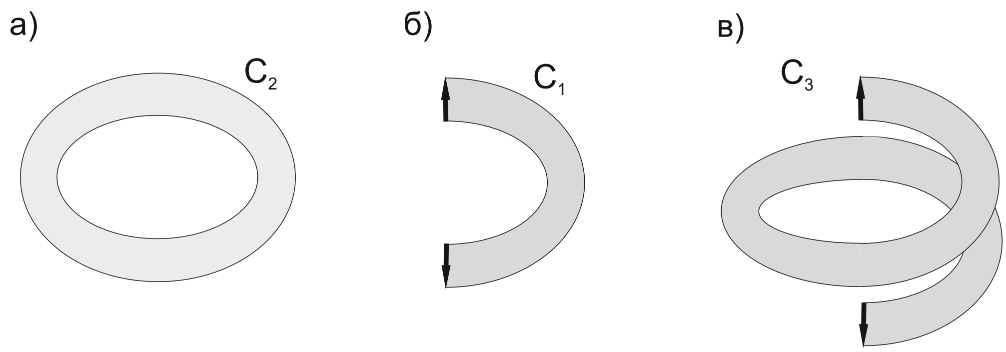


Рис. 1.11: Примеры элементарных областей, принадлежащих бесконечной серии C_n. На рисунке а) изображена область C_2. На рисунках б) и в) стрелками указаны части границ биллиардов B_1, которые необходимо отождествить чтобы получить неодносвязные биллиарды C_1 и C_3 соответственно.

1.4 Параболический биллиард.

Зафиксируем систему координат на плоскости OXY. Уравнение

$$y^2 + 4px - 4p^2 = 0 \tag{1.2}$$

описывает семейство софокусных парабол (p – параметр параболы). Фокус парабол находится в начале координат, а директрисами являются вертикальные прямые, проходящие через точки вида $(2p, 0)$. Включим в это семейство прямую $y = 0$, соответствующую параметру $p = 0$. Будем называть эту прямую *вырожденной параболой*.

Лемма 1.5. *Параболы, задаваемые уравнением* (1.2)*, при различных значениях параметров пересекаются под прямыми углами.*

Доказательство. Пусть l_p и l_q – две параболы, удовлетворяющие уравнению (1.2) с параметрами p и q соответственно. Тогда координаты точки их пересечения имеют следующий вид: $(p+q, \pm 2\sqrt{-pq})$.

Очевидно, что софокусные параболы пересекаются тогда и только тогда когда их параметры имеют разные знаки, таким образом выражение $\sqrt{-pq}$ корректно определено.

Продифференцируем уравнение (1.2) по x и по y. Получим вектор нормали к параболе (1.2). Подставим в результат координаты точки пересечения $(p+q, 2\sqrt{-pq})$. Для парабол l_p и l_q координаты векторов нормали N_{l_p} и N_{l_q} в точке их пересечения примут следующий вид:

$$N_{l_p} = (4p, 4\sqrt{-pq}) \quad N_{l_q} = (4q, 4\sqrt{-pq}).$$

Легко видеть, что такие вектора ортогональны. Лемма доказана. $\square$

Лемма 1.6. *Пусть точка (x, y) принадлежит параболической биллиардной области Ω, а именно, области на плоскости, ограниченной дугами софокусных парабол семейства (1.2), такой, что ее граница $\partial\Omega$ не содержит углов $\frac{3\pi}{2}$. Рассмотрим траекторию биллиарда в области Ω, проходящую через точку (x_0, y_0) в направлении вектора (скорости) (v_1, v_2). Тогда для любой точки (x, y, w_1, w_2) данной биллиардной траектории выполняется следующее свойство: прямые, проходящие через точки (x, y) в направлении векторов скорости (w_1, w_2), касаются (одной и той же) параболы с параметром $p = \frac{v_2(v_2x - v_1y)}{v_1^2 + v_2^2}$.*

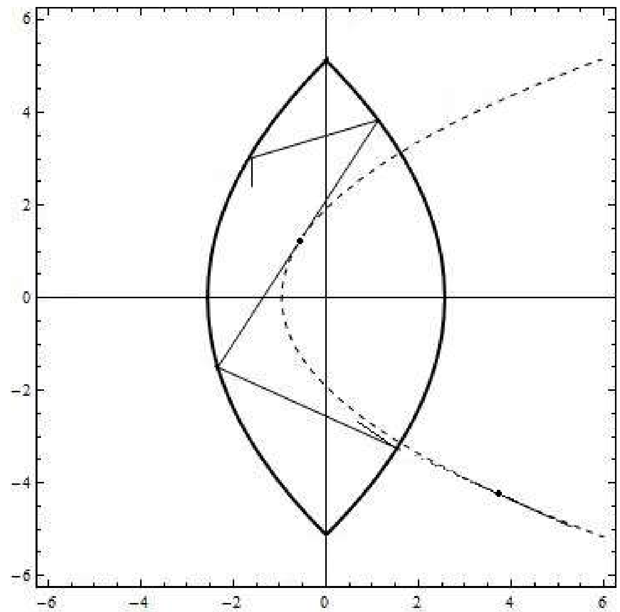


Рис. 1.12: Биллиардное движение в области Ω, ограниченной двумя параболами (выделены жирным). Пунктиром выделена парабола, которой касается траектория или её продолжение. Жирным выделены точки касания.

Определение 1.31. *Параболической биллиардной областью* Ω назовём компактную связную часть плоскости, граница которой состоит из дуг софокусных парабол семейства (1.2), углы между которыми не превышают π.

1.4.1 Отношение эквивалентности.

Напомним, что параболу с параметром $p = 0$, принадлежащую семейству (1.2), мы называем вырожденной параболой.

Определение 1.32. Параболическая биллиардная область Ω, ограниченная софокусными параболами семейства (1.2), называется *эквивалентной* области Ω', если она может быть продеформирована в Ω' с помощью композиции двух преобразований:

1. путем непрерывного изменения границы в классе парабол семейства (1.2) так, чтобы параметр p параболы, на которой лежит изменяемый сегмент сохранял свой знак или оставался равным нулю во все время деформации;

2. симметрией относительно оси семейства (1.2).

Определение 1.33. Параболическая биллиардная область Ω, ограниченная софокусными параболами семейства (1.2) называется особой, если одна из парабол, формирующих ее границу, является вырожденной (т.е. её параметр $p = 0$).

1.4.2 Классификация параболических биллиардных областей.

Предложение 1.4.1 ([54])**.** *Существует ровно три класса эквивалентности параболических неособых областей Ω, ограниченных дугами софокусных парабол: область Ω_1, ограниченная двумя параболами, параметры которых имеют разные знаки, область Ω_2, ограниченная тремя параболами, и область Ω_3, ограниченная четырьмя параболами с различными значениями параметров, а именно двумя положительными и двумя отрицательными, не имеющая общих точек с горизонтальной осью Ox (см. рис. 1.13).*

Существует ровно два класса эквивалентности параболических особых областей: область ω_1, ограниченная двумя невырожденными и одной вырожденной параболой, и область ω_2, ограниченная тремя невырожденными и одной вырожденной параболой (см. рис. 1.13).

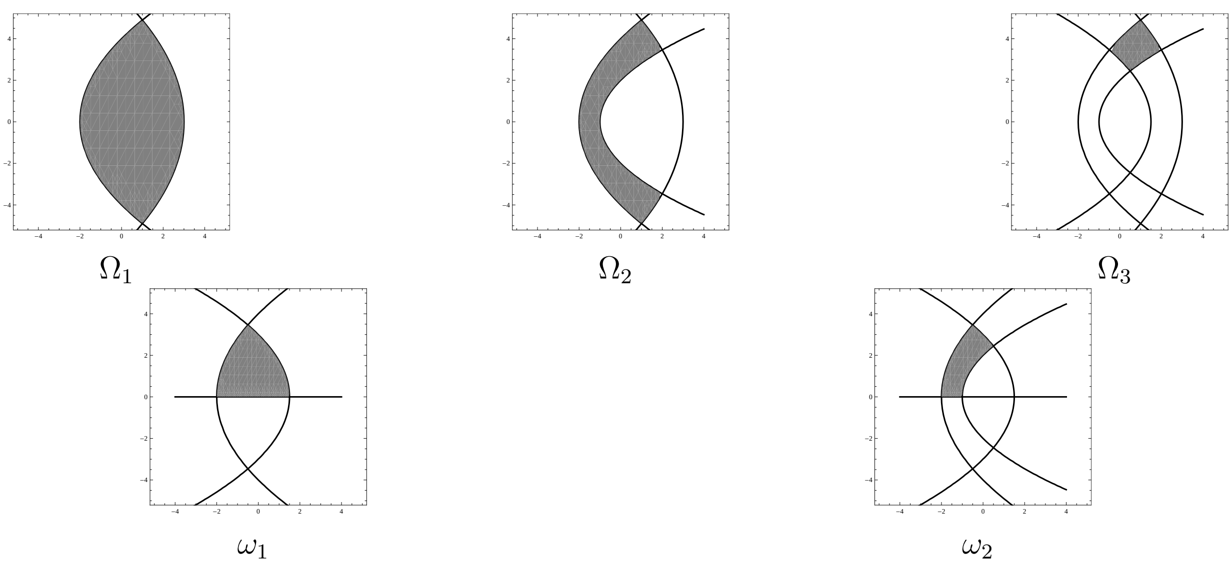


Рис. 1.13: Параболические биллиардные области, ограниченные семейством софокусных парабол. Жирным выделены параболы, ограничивающие каждую область. На рисунке области закрашены.

1.5 Круговой биллиард

Рассмотрим семейство концентрических окружностей с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{1.3}$$

Биллиардную область, ограниченную одной или двумя окружностями из этого семейства назовём круговой. Он является интегрируемым. Если мы фиксируем траекторию, то существует "огибающая" окружность с центром в начале координат радиуса $r < R$ которой касаются все звенья траектории-ломаной. Однако здесь в качестве интеграла естественнее взять угол φ между отрезками траектории и граничной окружностью (см. рис. 2.44).

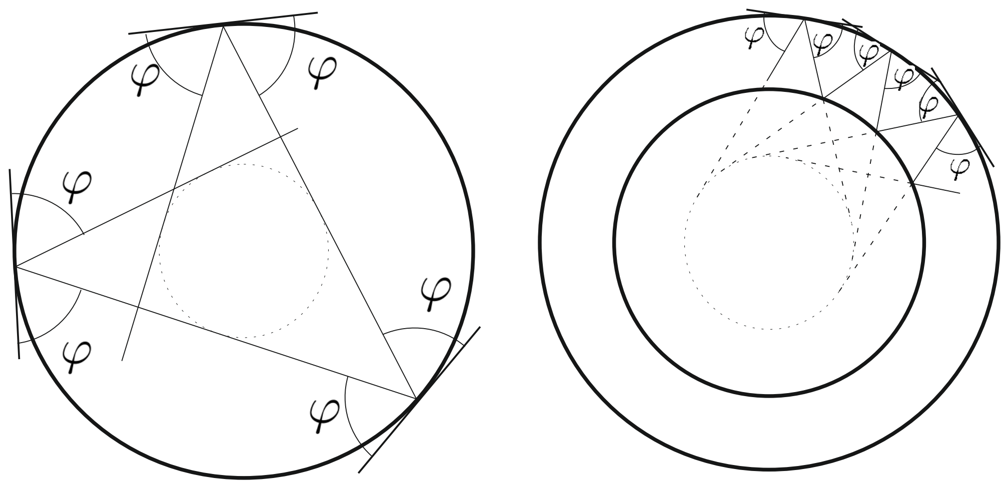


Рис. 1.14: Интегрируемость биллиарда D (слева) и биллиарда C (справа). При отражении материальной точки сохраняется угол φ. Легко показать что существует "огибающая" окружность (показанная пунктиром), которой касаются прямые, на которых лежат отрезки траектории.

У таких биллиардов существуют две особых траектории, отвечающие движениям точки вдоль большей граничной окружности (по и против часовой стрелки). Все остальные траектории лежат на торах. Отметим, что траектории, лежащие на прямых, проходящих через начало координат также лежат на торе.

Включим в этот класс биллиарды, который ограничены не только концентрическими окружностями, но и прямыми, проходящими через их общий центр (при условии, что прямые пересекаются под прямыми углами и внутри области нет углов $\frac{3\pi}{2}$). Такие биллиарды также будут интегрируемы. Для таких биллиардов траектории не распадаются на два класса — движение по и против часовой стрелки. В качестве интеграла можно по-прежнему взять угол ϕ между траекторией и границей. В этом случае $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Замечание 8. В итоге возникает достаточно богатый класс круговых биллиардов, образованных дугами концентрических окружностей и отрезками прямых, проходящих через общий центр окружностей. В том случае, когда такой биллиард не содержит центр окружностей, то он может быть ограничен любыми прямыми, проходящими через центр окружностей. Ниже мы вернемся к анализу этого широкого класса биллиардов при доказательстве существования препятствия к гипотезе А.Т.Фоменко С о моделировании слоений Лиувилля произвольных интегрируемых систем слоениями Лиувилля интегрируемых биллиардов.

Ниже мы опишем слоения Лиувилля двух примеров — биллиарда в половине и четверти круга.

Глава 2

Классификация интегрируемых топологических биллиардов.

В главе рассматриваются биллиарды на двумерных поверхностях, полученных изометричными склейками из плоских элементарных биллиардов друг с другом. Такие биллиарды мы называем топологическими. При этом, конечно, нам важна не только топология поверхности, но и возникающая на ней кусочно-плоская метрика, позволяющая задать геодезический биллиардный поток на ней.

2.1 Классификация топологических биллиардных поверхностей, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол.

2.1.1 Правила склейки.

Определение 2.1. Пусть l_1 и l_2 — одинаковые граничные сегменты двух элементарных биллиардов Ω_1 и Ω_2, содержащиеся в квадрике семейства (1.1) с параметром $\lambda_{l_1} = \lambda_{l_2}$, при этом простейшие элементарные биллиарды Ω_1 и Ω_2 расположены по одну сторону от общего сегмента.

Определим *склейку* биллиардов Ω_1 и Ω_2 вдоль сегментов l_1 и l_2 (образы которых после склейки будем называть *ребром склейки*) как склейку вдоль l_1 и l_2 по гомеоморфизму между l_1 и l_2, согласованному с изометричными вложениями простейших элементарных биллиардов, составляющих биллиарды Ω_1 и Ω_2, в плоскость. Границы ребер склейки будем называть *вершинами склейки*.

Определение 2.2. *Топологической локально-плоской биллиардной поверхностью* Δ назовём двумерное ориентируемое многообразие с кусочно-гладкой римановой метрикой, которое получается в результате определённой выше склейки конечного числа элементарных биллиардов вдоль некоторых граничных сегментов при выполнении следующих условий. Потребуем, чтобы в каждой вершине склейки сходилось либо четыре ребра склейки (такие вершины склейки назовём *внутренними вершинами склейки*) либо одно ребро склейки и два свободных ребра (такие вершины склейки назовем *граничными вершинами склейки*) либо два ребра склейки и ни одного свободного ребра (такие вершины склейки назовем *коническими точками*). Обозначим связную компоненту объединения всех горизонтальных ребер склейки через $\cup m_i, \{i \in 1..n\}$ где m_i последовательно соединены друг с другом. Потребуем, чтобы минимум одно из ребёр склейки m_1 или m_n образовывало коническую точку.

Назовем склейку вдоль ребра l *выпуклой,* если этот сегмент является выпуклым по отношению к склеиваемым вдоль него элементарным биллиардам. Если ребро склейки является строго невыпуклым (по отношению к склеиваемым элементарным биллиардам), то назовем такую склейку *невыпуклой.*

Топологическая биллиардная поверхность называется *невыпуклой* если она содержит хотя бы одну невыпуклую склейку.

Замечание 9. По аналогии с элементарными биллиардными областями, допуская вольность речи, будем заменять словосочетание "топологическая локально-плоская биллиардная поверхность" на словосочетание "топологический биллиард".

Таким образом, для каждой топологической биллиардной поверхности Δ фиксирован набор элементарных биллиардных областей Ω_i с набором ребер склейки f_{ij} между ними, которые, будучи склеенными вдоль этих рёбер, образуют биллиардную поверхность Δ. Граничные сегменты биллиардов Ω_i, которые не являются ребрами склейки, назовём *свободными ребрами*, а их объединение для фиксированного биллиарда Δ – *свободной границей.* Биллиарды, склеенные без образования конических точек, будем обозначать через Δ_α, а биллиарды с коническими точками — через Δ_β.

Замечание 10. В работе автора [55] были рассмотрены топологические биллиарды (названные обобщенными), полученные склейками из элементарных биллиардов вдоль выпуклых эллиптических сегментов без конических точек и склейками вдоль выпуклых эллиптических и гиперболических сегментов с образованием конических точек. Для каждого из таких биллиардов исследована топология слоения Лиувилля и вычислена молекула Фоменко-Цишанга – инвариант лиувиллевой эквивалентности.

Определение 2.3. Топологический биллиард Δ, склеенный из элементарных биллиардов Ω_i вдоль ребер склейки f_{ij} называется *эквивалентным* другому топологическому биллиарду Δ', склеенному из элементарных биллиардов Ω_i' вдоль ребер склейки f_{ij}', если биллиард Δ' можно получить из биллиарда Δ путем замены элементарных биллиардов Ω_i на им эквивалентные.

Замечание 11. В отличии от работы [55] в определениях склеек 2.1, 2.2 сегментам склейки допускается быть невыпуклыми, а также гиперболическими. Если рассматривать только выпуклые склейки, то полученное отношение эквивалентности сохраняет инвариант Фоменко-Цишанга при замене области на ей эквивалентную.

Как показано в работе [55] для выпуклых биллиардов, если внутренность стола не имеет общих точек с фокальной прямой, то молекула Фоменко имеет вид $A - A$. Напомним, что внутренние точки дуги склейки топологического биллиарда не являются точками границы, а являются точками внутренности стола. Если пересечение внутренности биллиарда с фокальной прямой непусто, то молекула Фоменко имеет структуру одного седлового атома (описывающего уровень интеграла $\Lambda = b$), соединённого с подходящим числом атомов A. При добавлении невыпуклых склеек атомы A заменяются на некоторые графы, вершины которых (атомы B_n и C_n) соответствуют невыпуклым склейкам. Однако так как центральный седловой атом на уровне $\Lambda = b$ сохраняется, то данное отношение эквивалентности полезно для описания структуры инварианта.

2.1.2 Теорема о классификации топологических биллиардных поверхностей, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол.

Обозначения.

Напомним, что мы обозначили топологические биллиарды без конических точек через Δ_α. В скобках будем указывать элементарные биллиарды, образующие биллиард Δ, причем если эквивалентные элементарные биллиарды в его составе склеиваются друг с другом последовательно в некотором количестве экземпляров, то будем указывать это количество, например $\Delta_\alpha(kA_0)$, а если нет, то будем указывать это отдельным суммированием, например $\Delta_\alpha(\Omega + kA_0 + \Omega)$ – два эквивалентных биллиарда Ω склеены не друг с другом, а с биллиардами A_0 (см. пример на рис. 2.1).

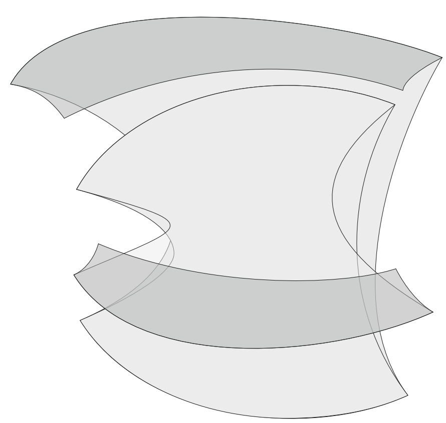


Рис. 2.1: Биллиард $\Delta_\alpha(B_0 + 3A_0 + B_0)$, полученный склейкой двух биллиардов B_0 и трех биллиардов A_0.

Напомним, что мы обозначили через Δ_β топологические биллиарды с коническими точками (т.е. точками, образованными двумя углами, склеенными по обеим сторонам). Введём типы конических точек. Как легко видеть из определения, конические точки делятся на три типа. Конические точки типа x – это конические точки, образованные склейкой вдоль эллиптического сегмента и горизонтального сегмента. Конические точки типа y образованы склейкой гиперболического сегмента и эллиптического сегмента. Конические точки типа c, иначе говоря центральные конические точки, образованы склейкой вдоль гиперболического сегмента m и горизонтального сегмента l — отвечающего квадрике с параметром b.

Пусть Ω – некоторый элементарный или топологический биллиард. Введём обозначения склеек, показывающих какие именно конические точки образовались (см. рис. 2.2).

Через $\Delta_\beta(2\Omega)_c$ обозначим результат склейки двух экземпляров биллиарда Ω вдоль дуг некоторой фиксированной гиперболы и фокальной прямой, т.е. с образованием центральной конической точки типа c.

Через $\Delta_\beta(2\Omega)_y$ обозначим результат склейки двух экземпляров биллиарда Ω вдоль дуг некоторой фиксированной гиперболы и некоторого фиксированного эллипса, т.е. с образованием конической точки типа y.

Через $\Delta_\beta(2\Omega)_x$ обозначим результат склейки двух экземпляров биллиарда Ω вдоль дуг некоторого фиксированного эллипса и фокальной прямой, т.е. с образованием конической точки типа x (т.е. лежащей на оси абсцисс).

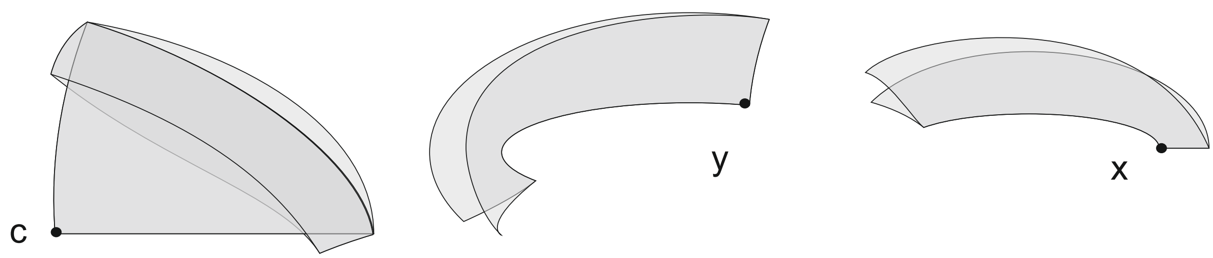


Рис. 2.2: Типы конических точек.

В обозначениях мы будем указывать каждую коническую точку, а также её тип. Например $\Delta_\beta(2\Omega)_{yy}$ – биллиард, склеенный из двух экземпляров биллиарда Ω с образованием двух конических точек типа y (см. пример на рис. 2.3).

Рассмотрим три элементарных биллиарда A_0, A_0' и B_0. Каждый из них является четырехугольником, противоположные стороны которого лежат либо на гиперболах, либо на эллипсах (быть может один из эллипсов вырожден и соответствует отрезку между фокусами). Обозначим через $\widetilde{A_0}$ гомеоморфный диску топологический биллиард, полученный склейками произвольного числа биллиардов из указанного набора вдоль эллиптических границ (см. пример на рис. 2.4 а). Обозначим через $\widetilde{B}$ гомеоморфный диску топологический биллиард, полученный склейками произвольного числа элементарных областей-лент серии B вдоль гиперболических сегментов

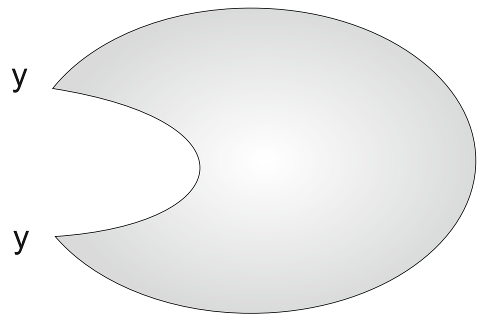


Рис. 2.3: Топологический биллиард $\Delta_\beta(2A_1)_{yy}$ – биллиард, склеенный из двух экземпляров биллиарда A_1 с образованием двух конических точек типа y.

(см. пример на рис. 2.4 б).

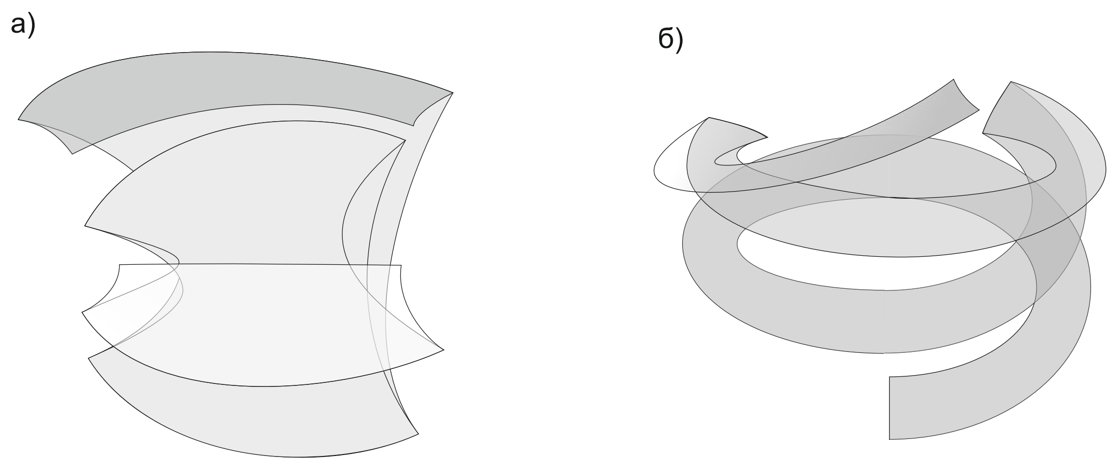


Рис. 2.4: Топологический биллиард $\Delta_\alpha(B_0 + 3A_0 + A_0')$ вида $\widetilde{A_0}$, т.е. полученный склейками биллиардов A_0, A_0' и B_0 вдоль эллиптических границ (а). Топологический биллиард $\Delta_\alpha(B_3 + B_2 + B_1)$ вида $\widetilde{B}$, полученный склейками биллиардов элементарных областей-лент серии B вдоль гиперболических сегментов (б).

Не гомеоморфные диску невыпуклые топологические биллиарды, не содержащие фокусов и полученные склейками вдоль эллиптических (гиперболических) сегментов без конических точек будем обозначать через $\Delta_{\alpha e}$ (соотв., $\Delta_{\alpha h}$). Примеры таких биллиардов изображены на рис. 2.5.

Если невыпуклый биллиард не содержит фокусов и содержит две конические точки одного типа, то обозначим его через $\Delta_{\beta e}$ (соотв., $\Delta_{\beta h}$) в случае, если эти точки лежат на одном эллипсе (соотв., гиперболе).

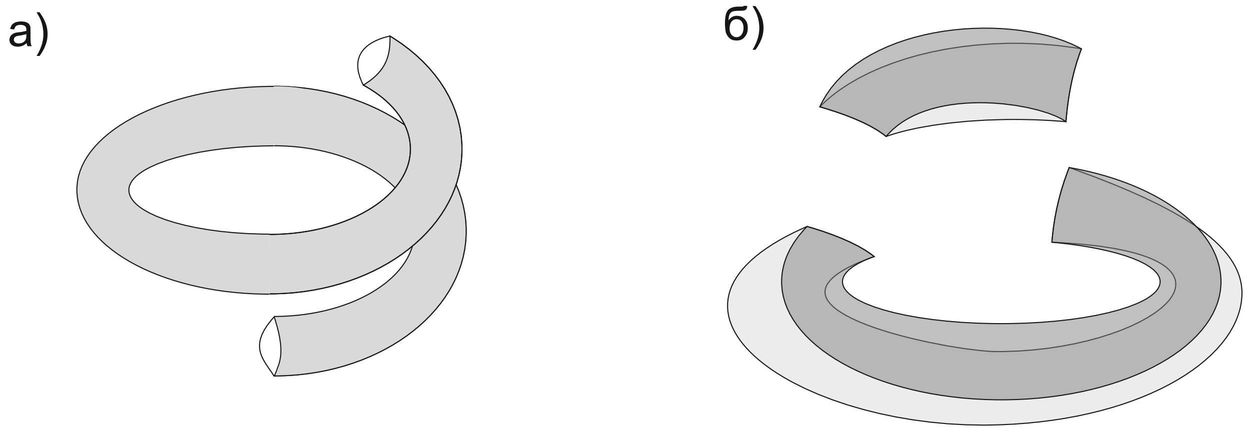


Рис. 2.5: Гомеоморфный кольцу топологический биллиард, полученный склейками вдоль эллиптических сегментов $\Delta_{\alpha e}(2B_3)$ (а). Гомеоморфные кольцу топологические биллиарды $\Delta_{\alpha h}(2B_0)$ и $\Delta_{\alpha h}(2B_2)$, полученные склейками вдоль гиперболических сегментов (б).

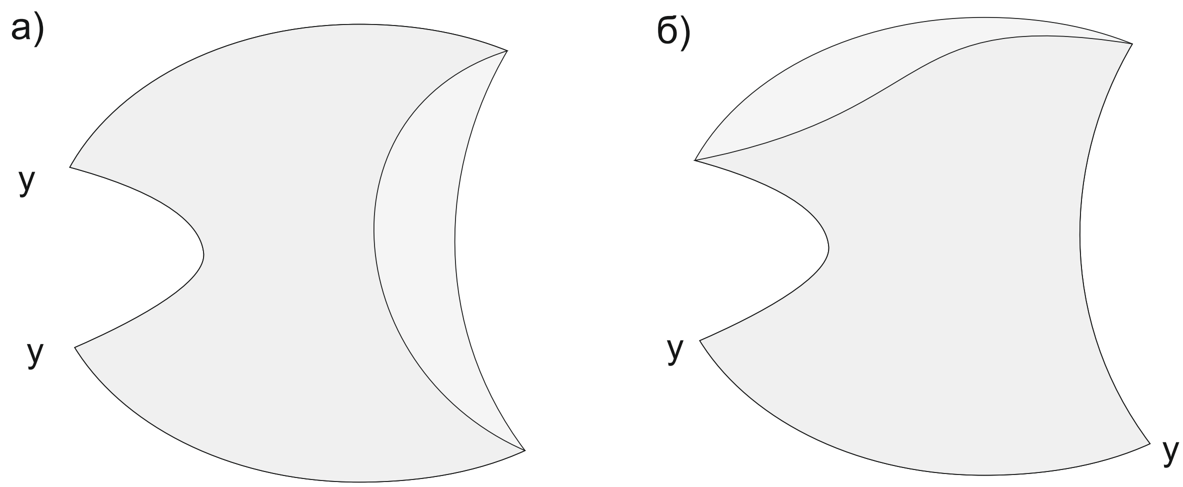


Рис. 2.6: Гомеоморфный кольцу топологический биллиард $\Delta_{\beta h}(2A_0)_{yy}$ (а) и $\Delta_{\beta e}(2A_0)_{yy}$ (б), полученные склейками вдоль гиперболических и эллиптических сегментов соответственно.

Рассмотрим пятьдесят две серии невыпуклых областей, разбитых на следующие семь групп.

- Группа биллиардов A_0 состоит из четырех серий биллиардов без конических точек $\Delta_\alpha(n\widetilde{A_0})$ (гомеоморфен диску), $\Delta_{\alpha h}(n\widetilde{A_0})$ и $\Delta_{\alpha e}(n\widetilde{A_0})$(гомеоморфны кольцу) и $\Delta_{\alpha eh}(n\widetilde{A_0})$ (гомеоморфен тору), двух серий биллиардов с одной конической точкой $\Delta_\beta(2n\widetilde{A_0})_y$ и $\Delta_\beta(2n(\widetilde{A_0}+A_0'))_c$, пяти серий с двумя коническими точками $\Delta_{\beta h}(2n\widetilde{A_0})_{yy}$, $\Delta_\beta(2n(\widetilde{A_0}+A_0'))_{cy}$, $\Delta_{\beta h}(2n(A_0'+\widetilde{A_0}+A_0'))_{cc}$, $\Delta_{\beta e}(2n\widetilde{A_0})_{yy}$, $\Delta_{\beta e}(2n(A_0'+\widetilde{A_0}))_{cc}$, трех серий с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(2n\widetilde{A_0})_{yyyy}$, $\Delta_\beta(2n(\widetilde{A_0}+A_0'))_{ccyy}$, $\Delta_\beta(2n(A_0'+\widetilde{A_0}+A_0'))_{cccc}$.

- Группа биллиардов A_1 состоит из четырех серий биллиардов без конических точек $\Delta_\alpha(A_1+$

$nA_0 + mB_1 + 2mnB_0)$, $\Delta_\alpha((A_1 + 2mB_1 + A_1) + 2n(A_0 + 2mB_0))$, $\Delta_\alpha((A_1 + nA_0 + A_1) + 2m(B_1 + nB_0))$ и $\Delta_\alpha(2(A_1 + nA_0 + 2mB_1 + 4mnB_0 + A_1))$, и серии биллиардов с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2(A_1 + nA_0 + mB_1 + 2mnB_0))_{yy}$. Поясним, что серия биллиардов $\Delta_\alpha((A_1 + 2mB_1 + A_1) + 2n(A_0 + 2mB_0))$ получена последовательной приклейкой к двум биллиардам A_1 вдоль эллиптических сегментов "ленты" из $2m$ биллиардов, эквивалентных B_1, и последующей приклейкой вдоль гиперболических сегментов n экземпляров "колец", каждое из которых получено склейкой пары экземпляров биллиарда A_0 и $2m$ экземпляров биллиарда B_0 (см. пример на рис. 2.7).

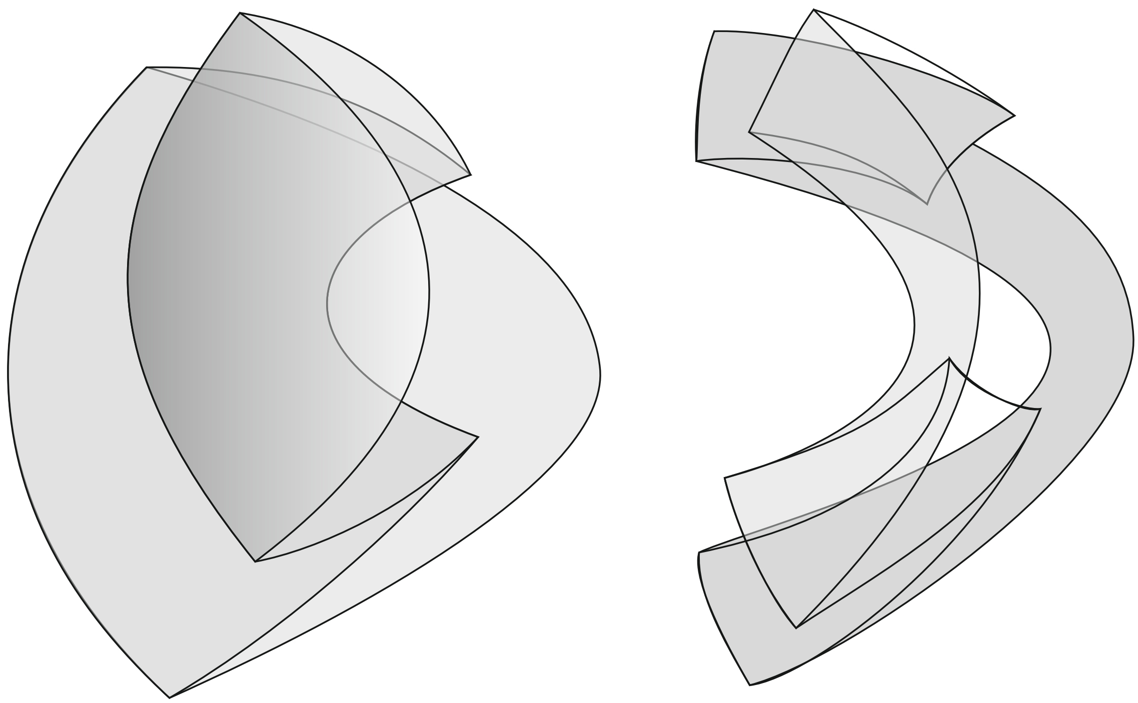


Рис. 2.7: Биллиард $\Delta_\alpha((A_1+2B_1+A_1)+2(A_0+2B_0))$ полученный последовательной приклейкой к двум биллиардам A_1 вдоль эллиптических сегментов "ленты" из двух биллиардов, эквивалентных B_1, и последующей приклейкой вдоль гиперболических сегментов одного "кольца", которое получено склейкой пары экземпляров биллиарда A_0 и двух пар экземпляров биллиарда B_0 (сверху и снизу).

Серия $\Delta_\alpha((A_1+nA_0+A_1)+2m(B_1+nB_0))$ получена последовательной приклейкой к двум биллиардам A_1 вдоль гиперболических сегментов "ленты" из n биллиардов, эквивалентных A_0, и последующей приклейкой вдоль эллиптических сегментов m экземпляров "колец", каждое из которых получено склейкой пары экземпляров B_1 и $2n$ экземпляров B_0.

- Группа биллиардов A_2 состоит из двух серий $\Delta_\alpha(A_2 + nC_2)$ и $\Delta_\alpha(A_2 + 2nC_2 + A_2)$.

- Группа биллиардов A_1' состоит из четырех серий биллиардов без конических точек $\Delta_\alpha(A_1' + nA_0' + mB_1' + 2mnB_0)$, $\Delta_\alpha((A_1' + 2mB_1' + A_1') + 2n(A_0' + 2mB_0))$, $\Delta_\alpha((A_1' + nA_0' + A_1') + 2m(B_1' + nB_0))$ и $\Delta_\alpha(2(A_1' + nA_0' + 2mB_1' + 4mnB_0 + A_1'))$, и восьми серий биллиардов с коническими точками: четыре серии биллиардов с одной конической точкой $\Delta_\beta(2(A_1' + nA_0' + mB_1' + 2mnB_0))_x$, $\Delta_\beta(2(A_1' + nA_0' + mB_1' + 2mnB_0))_y$, $\Delta_\beta(2(A_1' + nA_0' + mB_1' + 2mnB_0))_c$ и $\Delta_\beta(2A_1' + nC_1)_c$, три серии биллиардов с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2(((A_1' + nA_0' + A_1') + 2m(B_1' + nB_0))))_{xx}$, $\Delta_\beta(2((A_1' + 2mB_1' + A_1') + 2n(A_0' + 2mB_0)))_{cc}$, $\Delta_\beta(2A_1' + 2nC_1 + 2A_1')_{cc}$ и серия биллиардов с тремя коническими точками $\Delta_\beta(2(A_1' + nA_0' + mB_1' + 2mnB_0))_{xyc}$.

- Группа биллиардов A_2' состоит из двух серий без конических точек $\Delta_\alpha(A_2' + nB_2'')$, $\Delta_\alpha(A_2' + 2nB_2'' + A_2')$, либо к серии биллиардов с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2(A_2' + nB_2''))_{xx}$.

- Группа биллиардов B состоит из четырех серий биллиардов без конических точек $\Delta_\alpha(n\widetilde{B})$ (гомеоморфен диску), $\Delta_{\alpha h}(n\widetilde{B})$ и $\Delta_{\alpha e}(2n\widetilde{B})$ (гомеоморфны кольцу) и $\Delta_{\alpha eh}(2n\widetilde{B})$ (гомеоморфен тору), двух серий с одной конической точкой $\Delta_\beta(2n\widetilde{B})_y$ и $\Delta_\beta(2n(\widetilde{B}+B'))_x$, пяти серий с двумя коническими точками $\Delta_{\beta h}(2n\widetilde{B})_{yy}$, $\Delta_\beta(2n(\widetilde{B}+B'))_{xy}$, $\Delta_{\beta h}(2n(B'+\widetilde{B}))_{xx}$, $\Delta_{\beta e}(2n\widetilde{B})_{yy}$, $\Delta_{\beta e}(2n(B'+\widetilde{B}+B'))_{xx}$, трех серий с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(2n\widetilde{B})_{yyyy}$, $\Delta_\beta(2n(\widetilde{B}+B'))_{xxyy}$, $\Delta_\beta(2n(B' + \widetilde{B} + B'))_{xxxx}$.

- Группа биллиардов C состоит из двух серий биллиардов $\Delta_\alpha(nC_m)$ (гомеоморфен кольцу) и $\Delta_{\alpha e}(2nC_m)$ (гомеоморфен тору).

Замечание 12. Напомним, что в данном разделе под термином "биллиард" мы понимаем топологическую локально-плоскую биллиардную поверхность.

Теорема 2.1 ([87]). **Классификация топологических биллиардов.**

Любой топологический биллиард эквивалентен одной из пятидесяти двух серий биллиардов одной из семи групп A_0, A_1, A_2, A_1', A_2', B и C. Биллиарды, принадлежащие к разным группам неэквиалентны между собой. Внутри групп биллиарды, принадлежащие различным сериям также неэквивалентны.

Замечание 13. Указанные классы содержат в себе выпуклые топологические биллиарды, классифицированные ранее в работе [55] и существенно их расширяют.

Доказательство. Перечислим все ребра склейки, которые лежат на границе двух биллиардов, принадлежащих различным классам эквивалентности (см. таблицу).

Описание сегмента	В границе каких биллиардов содержится
дуга эллипса, не пересекающая ось абсцисс	B_0, A_0, A'_0
дуга эллипса, с концами на осях координат	B'_1, A'_1
дуга эллипса с концами на горизонтальном диаметре	B''_2, A'_2
дуга эллипса, содержащая одну точку горизонтального диаметра эллипса	B_1, A_1
эллипс	C_2, A_2
дуга гиперболы, один конец которой лежит на оси абсцисс	A'_0, A'_1
дуга гиперболы с концами на невырожденных эллипсах	A_0, A_1

Шаг первый. Пусть в состав топологического биллиарда Δ входит элементарный биллиард C_m, принадлежащий серии биллиардов-колец. Заметим, что мы можем склеить произвольное число экземпляров биллиардов, ему эквивалентное (с чередованием эллиптических склеек вдоль выпуклых и невыпуклых сегментов). В результате получаются либо биллиарды-кольца $\Delta_\alpha(nC_m)$ (мы не отождествляем сегменты свободной границы) либо биллиарды-торы $\Delta_{\alpha e}(2nC_m)$, полученные склейкой эллиптических граничных сегментов биллиарда $\Delta_\alpha(nC_m)$, при этом так как правила склейки обязывают в этом случае чередовать выпуклые и невыпуклые сегменты, число биллиардов C_m обязано быть четным.

В случае, если $m > 2$, не существует других элементарных биллиардов с такими же граничными сегментами (они являются либо $\frac{m}{2}-$листными накрытиями над эллипсом в случае четного m, или факторизацией соответствующего $m-$листного накрытия по стандартному действию группы $\mathbb{Z}_2$ в случае нечетного m). Тогда к такому биллиарду можно приклеить лишь биллиард, ему эквивалентный (нет других областей с тем же граничным сегментом).

Если $m = 2$, то вариантов дальнейшей склейки уже два – помимо биллиарда C_2 возможна склейка с биллиардом A_2, ограниченным эллипсом. В результате получаются две дополнительных серии топологических биллиардов $\Delta_\alpha(A_2+nC_2)$ (к последовательной склейке n экземпляров биллиардов C_2 с одной стороны приклеен биллиард A_2, при этом результат гомеоморфен двумерному диску) и $A_\alpha(A_2 + 2nC_2 + A_2)$ (к последовательной склейке $2n$ экземпляров биллиардов C_2 с двух сторон приклеены биллиарды A_2, при этом результат гомеоморфен двумерной сфере) – в этом случае условие склейки, обязывающее склеиваемые биллиарды находиться по разные стороны от сегмента склейки, требует, чтобы число биллиардов C_2 было четным. Заметим, что к биллиарду A_2 можно приклеить либо биллиард A_2 либо биллиард C_2. В случае склейки двух экземпляров биллиарда A_2 друг с другом можно считать, что данный биллиард принадлежит серии $A_\alpha(A_2 + 2nC_2 + A_2)$ при $n = 0$. В результате описаны все топологические биллиарды, содержащие с своем составе биллиард A_2.

Если $m = 1$, то вариантов дальнейшей склейки также два – помимо биллиарда C_1 возможна склейка с топологическим биллиардом $\Delta_\beta(2A'_1)_c$, склеенным с образованием конической точки из двух экземпляров биллиардов A'_1, у которых гиперболический граничный сегмент вертикальный. В результате получаются по две дополнительных серии обобщенных биллиардов $\Delta_\beta(2A'_1 + nC_1)_c$ (к последовательной склейке n экземпляров биллиардов C_1 с одной стороны приклеен биллиард $\Delta_\beta(2A'_1)_c$, при этом результат гомеоморфен двумерному диску) и $A_\beta(2A'_1 + 2nC_1 + 2A'_1)_{cc}$ – к последовательной склейке $2n$ экземпляров (четности требуют правила склейки) биллиардов C_1 с двух сторон приклеены биллиарды $\Delta_\beta(2A'_1)_c$, при этом результат гомеоморфен двумерной сфере.

Шаг второй.

Пусть в состав топологического биллиарда Δ входит элементарный биллиард A'_2. К такому биллиарду может быть приклеен либо биллиард, ему эквивалентный, либо биллиард, эквивалентный B''_2. Отсюда следует, что если биллиард Δ не содержит конических точек, то он эквивалентен либо серии биллиардов $\Delta_\alpha(A'_2 + nB''_2)$, полученных последовательной склейкой вдоль эллиптических сегментов n элементарных биллиардов, эквивалентных B''_2, либо серии биллиардов $A_\alpha(A'_2 + 2nB''_2 + A'_2)$, отличающейся от предыдущей серии приклейкой области A'_2 к последнем экземпляру B''_2 (при этом правила склейки требуют, чтобы число элементарных биллиардов B''_2 было четным). Если биллиард Δ содержит конические точки, то он принадлежит к серии биллиардов с двумя коническими точками $\Delta_\beta(2(A'_2 + nB''_2))_{xx}$, которые могут быть получены склейкой двух экземпляров области $A_\alpha(A'_2 + nB''_2)$ вдоль всех граничных сегментов.

Шаг третий. Пусть в состав топологического биллиарда Δ входит элементарный биллиард A_1. Неэквивалентные биллиарды, которые могут быть к нему приклеены вдоль граничных сегментов (см. таблицу в начале доказательства), это биллиарды B_1 (склейка вдоль общего эллиптического выпуклого сегмента) и A_0 (склейка вдоль гиперболического сегмента). Предположим, что произошла склейка с этими биллиардами одновременно. Заметим, что по правилам склейки в каждой вершине склейки сходятся либо два биллиарда либо четыре. Следовательно, необходимо добавить четвертый биллиард в каждую из двух вершин склейки. При этом подходит только биллиард B_0 (см. таблицу сегментов). Схематично эта склейка изображена на рисунке 2.8 слева. Заметим, что каждая последующая склейка полученного биллиарда с биллиардом A_0 (или B_1) также будет требовать приклейки биллиардов B_0. В итоге приклейка к биллиарду A_1 n склеенных экземпляров биллиарда A_0 вдоль гиперболических сегментов и m склеенных экземпляров биллиарда B_1 вдоль эллиптических сегментов требует приклейки $2mn$ экземпляров биллиарда B_0. В результате получится топологический биллиард, принадлежащий к серии $\Delta_\alpha(A_1 + nA_0 + mB_1 + 2mnB_0)$. Заметим, что все гиперболические сегменты свободной границы лежат на одной и той же ветви фиксированной гиперболы, а эллиптические сегменты – на одном и том же эллипсе. Дальнейшая склейка вдоль хотя бы одного биллиарда вдоль эллиптического (гиперболического) сегмента требует по правилам склейки добавления биллиардов вдоль всех остальных эллиптических (соответственно гиперболических) сегментов. Это позволяет рассматривать объединение всех эллиптических (гиперболических) сегментов как один топологический эллиптический (соответственно гиперболический) сегмент границы. Назовем полученный биллиард *обобщенным биллиардом* A_1, объединение всех эллиптических (соотв. гиперболических)

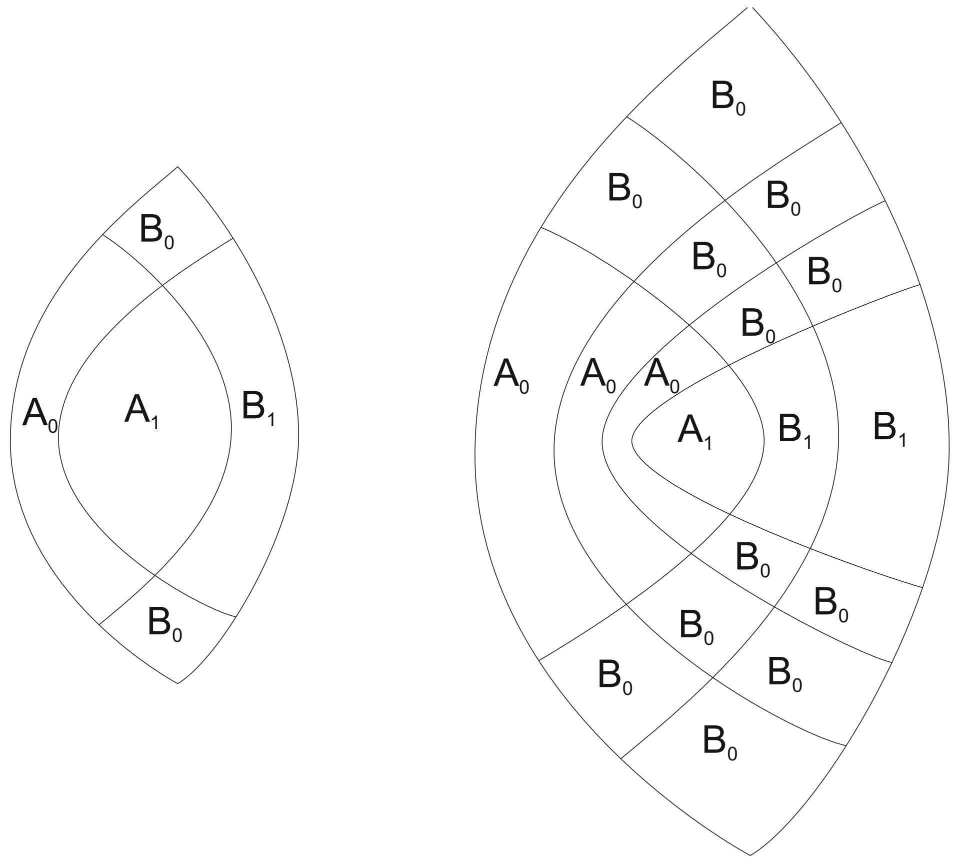


Рис. 2.8: Приклейка к биллиарду A_1 биллиардов A_0 и B_1 одновременно. При этом требуется дополнительная приклейка биллиарда B_0 в каждой из двух возникающих вершин склейки.

сегментов его границы *обобщенным эллиптическим (соотв. гиперболическим) граничным сегментом.* Заметим, что два экземпляра такого обобщенного биллиарда могут быть склеены друг с другом вдоль обобщенного эллиптического сегмента (при этом биллиарды A_0 разбиваются на пары эквивалентных), образуя биллиард $A_\alpha((A_1 + 2mB_1 + A_1) + 2n(A_0 + mB_0))$ (серия получена последовательной приклейкой к двум элементарным биллиардам A_1 вдоль эллиптических сегментов "ленты" из $2m$ биллиардов, эквивалентных B_1 и последующей приклейкой вдоль гиперболических сегментов n экземпляров "колец", каждое из которых получено склейкой пары экземпляров A_0 и $2m$ экземпляров B_0). Склейка двух экземпляров обобщенного биллиарда типа A_1 друг с другом вдоль обобщенного гиперболического сегмента (при этом биллиарды B_1 разбиваются на пары эквивалентных), эквивалентна биллиарду $A_\alpha((A_1{+}nA_0{+}A_1){+}2m(B_1{+}nB_0))$ (серия получена последовательной приклейкой к двум элементарным биллиардам A_1 вдоль гиперболических сегментов "ленты" из n биллиардов, эквивалентных A_0, и последующей приклейкой вдоль эллиптических сегментов m экземпляров "колец", каждое из которых получено склейкой пары экземпляров B_1 и $2n$ экземпляров B_0). Склейка четырех экземпляров обобщенного биллиарда A_1 приводит к образованию биллиарда $\Delta_\alpha(2(A_1{+}nA_0{+}2mB_1{+}4mnB_0{+}A_1))$. Заметим, что эту склейку можно описать так: два экземпляра элементарного биллиарда A_1 приклеиваются с двух сторон вдоль гиперболических сегментов к ленте из n экземпляров биллиардов A_0 (это можно представить как "мятый" овал), затем происходит приклейка $2m$ "поясов", состоящих из биллиардов B_1 и B_0 – каждый "пояс" состоит из пары биллиардов B_1, к которым приклеиваются две ленты из n биллиардов B_0, при этом в каждом "поясе" фиксированы гиперболические сегменты (гиперболическими сегментами либо "мятого" овала, либо предыдущего "пояса"), а все эллиптические сегменты лежат на некотором эллипсе, после чего результат заклеивается ещё одним "мятым" овалом. С другой стороны, эта конструкция симметрична – мы можем рассмотреть "мятый" овал, состоящий из пары биллиардов A_1, между которыми приклеены биллиарды B_1, а "пояса" клеить из биллиардов A_0 и B_0. Склейка двух экземпляров обобщенного биллиарда A_1 друг с другом как вдоль обобщенного эллиптического, так и вдоль обобщенного гиперболического сегментов приводит к образованию биллиарда $\Delta_\beta(2(A_1 + nA_0 + mB_1 + 2mnB_0))_{yy}$ с двумя коническими точками. На этом список биллиардов, которые могут быть склеены из обобщенных биллиардов A_1 (и, следовательно, с использованием элементарного биллиарда A_1) очевидно, исчерпан.

Полностью аналогично можно рассмотреть случай, когда биллиард Δ содержит биллиард A'_1. При этом в обобщенном биллиарде типа A'_1 роль биллиардов A_0 играют биллиарды A'_0, а роль биллиардов B_1 – биллиарды B'_1. Обобщенный биллиард типа A'_1 в наших обозначениях можно записать как $\Delta_\alpha(A'_1 + nA'_0 + mB'_1 + 2mnB_0)$. У такого обобщенного биллиарда есть три типа обобщенных сегментов – эллиптические, гиперболические и горизонтальные. Склейка вдоль обобщенного эллиптического сегмента приводит к образованию биллиарда $\Delta_\alpha((A'_1 + 2mB'_1 + A'_1) + 2n(A'_0 + 2mB_0))$, а склейка вдоль обобщенного гиперболического сегмента – биллиарда $\Delta_\alpha((A'_1 + nA'_0 + A'_1) + 2m(B'_1 + nB_0))$. Биллиард $\Delta_\alpha(2(A'_1 + nA'_0 + 2mB'_1 + 4mnB_0 + A'_1))$ получается склейкой четырех обобщенных биллиардов типа A'_1, при этом свободная граница состоит лишь из горизонтальных сегментов. Обобщенные биллиарды Δ с одной конической точкой получаются склейкой двух экземпляров $\Delta_\alpha(A'_1 + nA'_0 + mB'_1 + 2mnB_0)$ вдоль пары обобщенных сегментов, в результате получаются биллиарды $\Delta_\beta(2(A'_1 + nA'_0 + mB'_1 + 2mnB_0))_x$, $\Delta_\beta(2(A'_1 + nA'_0 + mB'_1 + 2mnB_0))_y$ и $\Delta_\beta(2(A'_1 + nA'_0 + mB'_1 + 2mnB_0))_c$. Уже рассмотренный биллиард $\Delta_\beta(2A'_1 + nC_1)_c$ является частным случаем – биллиард C_1 можно представить как склейку пары биллиардов B'_1 (у которых гиперболический сегмент лежит на вертикальной прямой).

Далее, склейка двух экземпляров биллиарда $\Delta_\alpha((A'_1 + 2mB'_1 + A'_1) + 2n(A'_0 + 2mB_0))$ вдоль всех граничных сегментов приводит к образованию биллиарда $\Delta_\beta(2((A'_1 + 2mB'_1 + A'_1) + 2n(A'_0 + 2mB_0)))_{cc}$ с двумя коническими точками. Уже рассмотренный биллиард $\Delta_\beta(2A'_1 + 2nC_1 + 2A'_1)_{cc}$ также является его частным случаем. Склейка двух экземпляров биллиарда $\Delta_\alpha((A'_1 + nA'_0 + A'_1) + 2m(B'_1 + nB_0))$ приводит к образованию биллиарда $\Delta_\beta(2(((A'_1 + nA'_0 + A'_1) + 2m(B'_1 + nB_0))))_{xx}$.

Наконец склейкой пары биллиардов $\Delta_\alpha(A'_1 + nA'_0 + mB'_1 + 2mnB_0)$ вдоль всех граничных сегментов можно получить биллиард с тремя коническими точками $\Delta_\beta(2(A'_1 + nA'_0 + mB'_1 + 2mnB_0))_{xyc}$.

Шаг четвертый. Очевидно, что осталось рассмотреть случаи, когда биллиард Δ содержит только бесфокусные биллиарды A_0, A'_0 и биллиарды-ленты серии B. Заметим, что в этом случае, в биллиарде Δ не может одновременно быть биллиарда A_0 (или A'_0) и биллиарда ленты, кроме B_0, так как в этом случае, как видно из таблицы сегментов, набор областей, образующих биллиард Δ, содержит биллиард A_1 (или A'_0). Поэтому рассмотрим случай, когда биллиард Δ содержит только бесфокусные биллиарды A_0, A'_0 и биллиард B_0. Напомним, что в этом случае мы обозначим результат их последовательной склейки вдоль эллиптических сегментов через $\widetilde{A_0}$. Результат последовательной склейки n экземпляров такого биллиарда вдоль гиперболических сегментов $\Delta_\alpha(n\widetilde{A_0})$ – гиперболическая лента. Границы этого биллиарда-четырехугольника – это два обобщенных эллиптических и два обобщенных гиперболических сегмента (в обозначениях предыдущего шага). Если биллиард Δ не содержит конических точек, то объединение всех областей Ω_i образует гиперболическую ленту $\Delta_\alpha(n\widetilde{A_0})$ с возможными склейками на границе. При этом вариантов таких склеек всего три – это склейка обобщенных эллиптических сегментов (кольцо $\Delta_{\alpha e}(n\widetilde{A_0})$), склейка обобщенных гиперболических сегментов (кольцо $\Delta_{\alpha h}(n\widetilde{A_0})$) и склейка вдоль эллиптических и гиперболических сегментов в тор (тор $\Delta_{\alpha eh}(n\widetilde{A_0})$).

Пусть биллиард Δ содержит конические точки. Коническая точка может быть образована лишь склейкой двух экземпляров одного и того же биллиарда. Дальнейшие склейки, согласно правилам склейки, полностью дублируются. Пусть коническая точка образована склейкой двух экземпляров биллиардов Ω. Приклейка некоторого биллиарда Ω' к одному экземпляру Ω требует приклейки второго экземпляра этого же самого биллиарда Ω' к другому экземпляру биллиарда Ω. В этом случае можно считать, что биллиард Δ является результатом склейки двух экземпляров четырехугольника – обобщенной гиперболической ленты вдоль некоторых обобщенных сегментов. Перебирая оставшиеся случаи, получаем, что биллиард Δ принадлежит либо к одной из двух серий с одной конической точкой $\Delta_\beta(2n\widetilde{A_0})_y$ и $\Delta_\beta(2n(\widetilde{A_0}+A'_0))_c$, либо к одной из пяти серий с двумя коническими точками $\Delta_{\beta h}(2n\widetilde{A_0})_{yy}$, $\Delta_\beta(2n(\widetilde{A_0}+A'_0))_{cy}$, $\Delta_{\beta h}(2n(A'_0+\widetilde{A_0}+A'_0))_{cc}$, $\Delta_{\beta e}(2n\widetilde{A_0})_{yy}$, $\Delta_{\beta e}(2n(A'_0+\widetilde{A_0}))_{cc}$, либо к одной из трех серий с четырьмя коническими точками $\Delta_\beta(2n\widetilde{A_0})_{yyyy}$, $\Delta_\beta(2n(\widetilde{A_0}+A'_0))_{ccyy}$, $\Delta_\beta(2n(A'_0+\widetilde{A_0}+A'_0))_{cccc}$.

Полностью аналогично рассматривается случай когда биллиард Δ содержит только биллиарды-ленты серии B. Теорема доказана. □

2.1.3 Постановка биллиардной задачи топологического биллиарда

Опишем фазовое пространство M^4 топологического биллиарда. Обозначим через P_i объединение открытых граничных сегментов биллиарда Ω_i, не являющихся рёбрами склейки. Определим

$$M^4_{\Omega_i} := \{(x,v)| \quad x \in \Omega_i, v \in T_x\Omega_i, |v| > 0\}/\sim$$

где отношение эквивалентности задаётся так

$$(x_1,v_1) \sim (x_2,v_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \in P_i, \quad |v_1| = |v_2| \quad \text{и}$$

$$v_1 - v_2 \perp T_{x_1}P \text{ для регулярной точки границы,}$$

$$v_1 = -v_2 \text{ для угла.}$$

Здесь через T_xP обозначена касательная прямая к биллиарду Ω_i в точке x, а через $|v|$ – евклидова длина вектора v.

Далее склеим пространтсво M^4 из $M^4_{\Omega_i}$. Обозначим через Q_{ij} одно из ребер склейки (их может быть несколько) биллиарда, вдоль которого склеиваются элементарные биллиарды Ω_i и Ω_j. Тогда в случае, если Ω_i и Ω_j изометрично вложены в плоскость так, что образы склеиваемых сегментов при этих вложениях совпадают и склеиваются по тождественному отображению, а сами биллиарды лежат по одну и ту же сторону от этих сегментов, многообразия $M^4_{\Omega_i}$ и $M^4_{\Omega_j}$ склеиваются по следующему правилу:

$$(x_1, v_1) \in M^4_{\Omega_i} \sim (x_2, v_2) \in M^4_{\Omega_j} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \in Q_{ij}, \quad |v_1| = |v_2| \quad \text{и} \quad v_1 - v_2 \perp T_{x_1}Q_{ij}.$$

Аналогично определяется правило склеивания $M^4_{\Omega_i}$ и $M^4_{\Omega_j}$ в общем случае. Это правило иногда будем называть обобщенным биллиардным законом.

При попадании в вершину материальная точка после отражения продолжает движение по тому же отрезку прямой, по которому она попала в эту вершину. Однако лист, на котором она продолжает движение после отражения в вершине, зависит от склейки в ней. Здесь возможны четыре случая.

Случай первый. Если в этой вершине не сходилось других элементарных биллиардов, то лист не меняется (см. рис. 2.9 а).

Случай второй. Если в этой вершине сходятся два элементарных биллиарда, причем склеенных только вдоль одного ребра (суммарный угол равен π), то после отражения материальная точка переходит на другой лист (см. рис. 2.9 б).

Случай третий. Если суммарный угол в вершине равен 2π, то занумеруем биллиарды следующим образом. Лист 1 склеен с листами 2 и 3 и имеет ровно одну точку-вершину с листом 4. Если точка движется по листу с номером 1, то после отражения она продолжает своё движение по листу с номером 4 (см. рис. 2.9 в).

Случай четвертый. Наконец, пусть суммарный угол в вершине равен π, но склейка произошла вдоль двух ребер. Такие точки называются *коническими*. В этом случае после отражения точка продолжает движение по тому же листу, по которому она попала в этот угол (см. рис. 2.9 г).

Так определенное пространство естественно расслоено на гомеоморфные друг другу изоэнергетические поверхности Q^3 (напомним, что мы удалили нулевое сечение, то есть $|v| \neq 0$ всюду на M^4). Можно показать (в более общем случае это сделано в третьей главе), что изоэнергетические поверхности являются многообразиями.

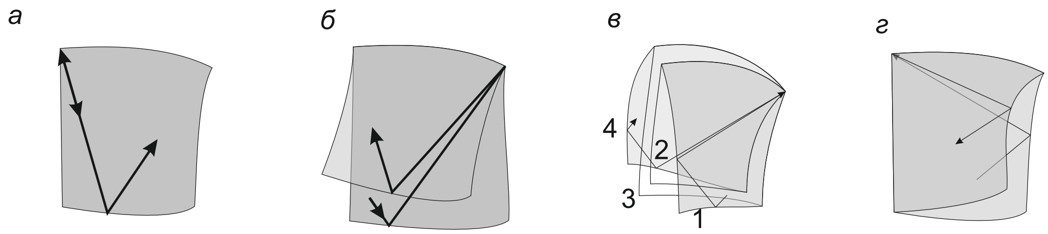


Рис. 2.9: Четыре типа отражения в вершинах топологического биллиарда.

Траектория так определённой биллиардной системы “перескакивает” с одного элементарного биллиарда на другой в точках пересечения с выпуклыми рёбрами склейки и отражается по стандартному закону отражения при ударе о границу биллиарда Δ.

Очевидно, что при таком определении фазового многообразия M^4 сохраняется интегрируемость системы, а именно, сохраняется дополнительный интеграл Λ – параметр софокусной квадрики, которой касается биллиардная траектория. Это связано с тем, что граница любого плоского (элементарного) биллиарда Ω_i, входящего в состав топологического биллиарда Δ и, в частности, все ребра склейки, образованы дугами одного и того же семейства софокусных квадрик.

Поясним склейку вдоль невыпуклых сегментов на следующем примере. Рассмотрим биллиард $\Delta_\alpha(2C_2)$, где два элементарных биллиарда C_2 склеиваются вдоль невыпуклого эллиптического сегмента, лежащего на эллипсе с параметром λ_0.

Пусть дана траектория-ломаная. Её звенья лежат на прямых, касательных к некоторой квадрике (эллипсе или гиперболе). Назовем эту квадрику *интегральной* (интегральным эллипсом или интегральной гиперболой).

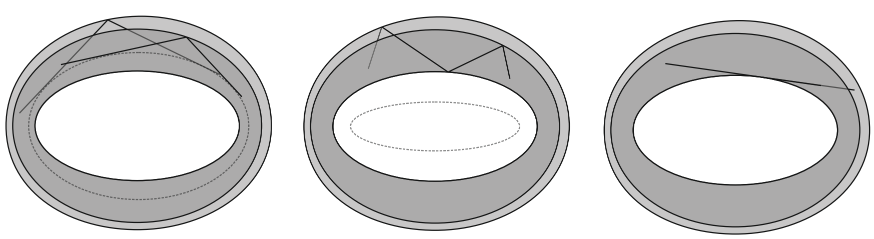


Рис. 2.10: Траектории биллиарда $\Delta_\alpha(2C_2)$, лежащие на уровне интеграла $\lambda < \lambda_0$ (слева), $\lambda > \lambda_0$ (по центру). Траекторию на уровне $\Lambda = \lambda_0$ (справа) нельзя определить как их одновременный непрерывный предел. Пунктиром обозначены интегральные эллипсы.

Если траектории лежат на уровне интеграла $\Lambda < \lambda_0$, то они не пересекают сегмент склейки: при приближении к сегменту склейки они достигают интегрального эллипса, касаются его и отдаляются, оставаясь на том же экземпляре C_2. Если траектории лежат на уровне интеграла $b > \lambda > \lambda_0$ то при достижении сегмента склейки они переходят с одного экземпляра C_2 на другой. Обобщенный биллиардный закон не даёт ответа, как должна выглядеть траектория, лежащая на уровне интеграла $\Lambda = \lambda_0$. На этом уровне интеграла внутреннее ребро склейки лежит на интегральном эллипсе. При достижении интегрального эллипса траектория, с одной стороны, должна остаться на том же экземпляре C_2 (как непрерывный предел траекторий, лежащих на уровнях $\lambda < \lambda_0$), а с другой стороны, перейти на другой экземпляр (как непрерывный предел траекторий, лежащих на уровнях $b > \lambda > \lambda_0$).

Хотя траектории на уровне интеграла $\Lambda = \lambda_0$ не определены, как будет показано в дальнейшем, все остальные неособые слои при $\Lambda \neq \lambda_0$ являются торами, а особые описываются трехмерными атомами. Более того, верно следующее утверждение.

Предложение 2.1.1. *Пусть Δ – невыпуклый топологический биллиард, а l – его невыпуклое ребро склейки, лежащее на квадрике с параметром λ_0. Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$, точки изоэнергетического многообразия Q^3, лежащие на уровнях интеграла $\Lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon; \lambda_0 + \varepsilon)$ послойно гомеоморфны некоторому атому серии B_n (возможно, со звездочками) или C_n.*

Доказательство, а также построение частей грубой молекулы, содержащих эти атомы, будет дано в доказательстве предложения 2.2.2. Следовательно, на Q^3 существует структура слоения Лиувилля.

Гамильтоново сглаживание.

Система биллиарда в общем случае не является гладкой, так как склейка в точках границы, как правило, не позволяет ввести гладкую структуру в декартовых координатах. Необходимо видоизменить определения выше с учетом граничных точек. Описываемый ниже подход и определения предложены А. Т. Фоменко.

Фазовое многообразие M^4 является кусочно-гладким и распадется на гладкие куски (объединение которых мы обозначим $\widetilde{M^4}$), склеенные по точкам, проектирующимся (в случае биллиардной системы) в одни и те же точки границы области, где определен биллиард. На многообразии введем симплектическую структуру только в $\widetilde{M^4}$. Будем говорить, что кусочно-гладкая система на M^4 интегрируема (в кусочно-гладком смысле, но в дальнейшем будем говорить, для краткости, просто об интегрируемости), если существуют непрерывные на M^4 и гладкие на $\widetilde{M^4}$ функционально независимые функции f и H, которые находятся в инволюции на $\widetilde{M^4}$. Подобное определение имеет смысл не только для биллиардных систем, но в данной работе мы будем рассматривать только плоские биллиарды.

Рассмотрим кусочно-гладкое изоэнергетическое многообразие Q^3 и связную компоненту совместного уровня функций f и H. Пусть гамильтоновы потоки $\mathrm{sgrad} f$ и $\mathrm{sgrad} H$ полны. Если можно показать, что связная компактная компонента совместного уровня функций f и H гомеоморфна либо кусочно-гладкому тору либо особому слою кусочно-гладкого трехмерного атома (для конечного числа значений f), то будем говорить, что выполнена кусочно-гладкая теорема Лиувилля. В этом случае мы можем построить грубую молекулу W и определить метки. В случае биллиарда в компактной области полнота гамильтоновых потоков очевидна.

Фактически, кусочно-гладкое слоение Лиувилля в случае биллиардной системы отличается от слоения Лиувилля классической интегрируемой гамильтоновой системы тем, что каждая совместная поверхность уровня, как правило, представляет собой либо особый слой кусочно-гладкого атома либо кусочно-гладкий тор. В дальнейшем мы будем пользоваться однако теми же обозначениями для атомов и молекул, что и в классическом случае.

Случай кусочно-гладкости границы топологических биллиардов, изучаемых в диссертации, в большинстве случаев укладывается в рамки работ В.Лазуткина [76] и Е.А.Кудрявцевой [27] как следствие теоремы В.Лазуткина или Е.А.Кудрявцевой, в тех случаях, когда в вершинах излома полный угол предполагается равным 2π.

Сложность (и открытость) вопроса о гамильтоновом сглаживании возникает из-за поведения системы в фазовом пространстве над точками границы.

Динамическая биллиардная система с полными углами 2π в вершинах, заданная на кусочно-гладком фазовом пространстве M^4 (соотв. Q^3) - гамильтоново сглаживаема (в силу теоремы В.Лазуткина или Е.А.Кудрявцевой) на дополнении к двумерным (соотв. одномерным) подмногообразиям фазового пространства, состоящим из фазовых точек (x, p) таких, что x принадлежит границе биллиардного стола, p касается граничной дуги в точке x. Эти "подмногообразия излома" имеют коразмерность 2 и содержатся (а не совпадают с ним) в 3-мерном (соотв. 2-мерном) прообразе границы биллиардного стола при проекции фазового пространства на конфигурационное многообразие.

- Система непрерывна в любой фазовой точке (x, p) указанного двумерного (соотв. одномерного) "подмногообразия излома" такой, что x принадлежит выпуклой (соотв. вогнутой) граничной дуге или её концу, p касается граничной дуги в точке x, и вдоль этой дуги-корешка книжки — склеено любое число биллиардных столов.

- Система разрывна (а потому гамильтоново несглаживаема) в любой фазовой точке (x, p) указанного двумерного (соотв. одномерного) подмногообразия такой, что x принадлежит вогнутой граничной дуге, p касается граничной дуги в точке x, и вдоль этой дуги склеено больше одного биллиардного стола.

Итак, открытым остается вопрос гладкости биллиардной системы только на указанных выше подмногообразиях коразмерности 2 фазового пространства. Это - "подмногообразия излома", отвечающие касанию вектора скорости граничной дуге. Они являются симплектическими 2-мерными подмногообразиями в M^4, кривыми в Q^3. Они содержатся в "гиперповерхностях излома" — прообразах границы биллиардного стола, и являются гиперповерхностями в них.

2.2 Топологическая классификация интегрируемых топологических биллиардов

2.2.1 Вычисление грубой молекулы

Области эллиптической проекции

Определение 2.4. Пусть Δ – топологический биллиард. Фиксируем некоторое малое $\delta > 0$ такое, что эллипс с параметром $\lambda = b - \delta$ не имеет общих точек ни с одним элементарным биллиардом-лентой серии B или биллиардом-кольцом серии C, входящим в состав биллиарда Δ. Рассмотрим проекцию уровней интеграла $\Lambda \geq b - \delta$. Касательные к траекториям, лежащих на этих уровнях, касаются эллипсов, с параметрами меньшими, чем $b - \delta$. Будем называть соответствующие уровни интеграла эллиптическими. Точки внутренности эллипса с параметром $\lambda = b - \varepsilon$ не лежат в проекциях уровней интеграла (нельзя провести касательные). Поэтому для рассмотрения проекции необходимо удалить из каждой элементарной области, составляющей обобщенную область Δ, внутренность эллипса с параметром $\lambda = b - \delta$. Полученный биллиард (его биллиардную область) назовем *областью эллиптической проекции (эллиптической проекцией)* топологического биллиарда Δ. Класс топологических биллиардов, к которому принадлежит связная компонента области эллиптической проекции, назовем *классом эллиптической проекции* данной компоненты.

Замечание 14. В данном пункте, если не оговорено иное, под областью понимается область одноименного биллиарда – двумерная поверхность.

Замечание 15. При этой операции от каждого элементарного биллиарда серии A останется либо область-лента (для биллиардов $A_0, A'_0, A_1, A'_1, A'_1$) либо область-кольцо C_2 (для биллиарда A_2). Следовательно, области эллиптической проекции принадлежат классу биллиардов, склеенных из биллиардов серий B и C.

Замечание 16. Если эллиптическая проекция биллиарда состоит из нескольких связных компонент, они не обязаны принадлежать к одному классу. К примеру, для биллиарда $\Delta_\beta(2A_0)_y$, эллиптическая проекция состоит из области $\Delta_\beta(2B_0)_y$ и области $\Delta_\alpha(\widetilde{B})$, где $\widetilde{B}$ эквивалентна двум экземплярам области B_0, склеенным вдоль гиперболического сегмента.

Предложение 2.2.1. *Всего существует шестнадцать классов эллиптической проекции. Среди них при этом существует ровно восемь классов, к которым принадлежат эллиптические проекции только одного класса топологических биллиардов, а именно, классы* $\Delta_{\alpha e}(2nC_m)$, $\Delta_{\alpha e}(2n\widetilde{B})$, $\Delta_{\beta h}(2n(B'+\widetilde{B}))_{xx}$, $\Delta_{\beta h}(2n(\widetilde{B}))_{yy}$, $\Delta_{\alpha eh}(2n\widetilde{B})$, $\Delta_\beta(2n\widetilde{B})_{yyyy}$, $\Delta_\beta(2n(\widetilde{B}+B'))_{xxyy}$, $\Delta_\beta(2n(B'+\widetilde{B}+B'))_{xxxx}$.

- *Класс эллиптической проекции биллиарда* $\Delta_\alpha(nC_m)$ *включает эллиптические проекции биллиардов*

$\Delta_\alpha(A_2+nC_2)$, $\Delta_\alpha(A_2+nC_2+A_2)$, $\Delta_\beta(2A_1'+nC_1)_c$ *и* $\Delta_\beta(2A_1'+2nC_1+2A_1')_{cc}$.

- *Класс эллиптической проекции биллиарда* $\Delta_\alpha(n\widetilde{B})$ *включает эллиптические проекции биллиардов* $\Delta_\alpha(A_2'+nB_2'')$, $\Delta_\alpha(A_2'+nB_2''+A_2')$, $\Delta_\alpha(A_1+nA_0+mB_1+2mnB_0)$, $\Delta_\alpha((A_1+mB_1+A_1)+2n(A_0+mB_0))$, $\Delta_\alpha((A_1+nA_0+A_1)+2m(B_1+nB_0))$, $\Delta_\alpha(A_1'+nA_0'+mB_1'+2mnB_0)$, $\Delta_\alpha((A_1'+mB_1'+A_1')+2n(A_0'+mB_0))$, $\Delta_\alpha((A_1'+nA_0'+A_1')+2m(B_1'+nB_0))$, $\Delta_\alpha(2(A_1'+nA_0'+2mB_1'+4mnB_0+A_1'))$, $\Delta_\beta(2((A_1'+2mB_1'+A_1')+2n(A_0'+2mB_0)))_{cc}$,

  $\Delta_\alpha(n\widetilde{A_0})$, $\Delta_{\alpha e}(n\widetilde{A_0})$, $\Delta_\beta(2n(\widetilde{A_0}+A_0'))_c$ *и* $\Delta_{\beta e}(2n(A_0'+\widetilde{A_0}))_{cc}$,

  а также компоненты эллиптической проекции без конических точек биллиардов $\Delta_\beta(2n\widetilde{A_0})_y$, $\Delta_{\beta h}(2n\widetilde{A_0})_{yy}$, *и* $\Delta_{\beta h}(2n(\widetilde{A_0}+A_0'))_{cy}$.

- *Класс эллиптической проекции биллиарда* $\Delta_{\alpha h}(n\widetilde{B})$ *включает эллиптические проекции биллиардов*

  $\Delta_\alpha(2(A_1+nA_0+mB_1+2mnB_0+A_1))$, $\Delta_\beta(2(A_1'+nA_0'+mB_1'+2mnB_0))_c$, $\Delta_{\alpha h}(n\widetilde{A_0})$, $\Delta_{\alpha eh}(n\widetilde{A_0})$, $\Delta_{\beta h}(2n(A_0'+\widetilde{A_0}+A_0'))_{cc}$ *и* $\Delta_\beta(2n(A_0'+\widetilde{A_0}+A_0'))_{cccc}$,

  а также компоненты эллиптической проекции без конических точек биллиардов $\Delta_{\beta e}(2n\widetilde{A_0})_{yy}$, $\Delta_\beta(2n\widetilde{A_0})_{yyyy}$, *и* $\Delta_\beta(2n(\widetilde{A_0}+A_0'))_{ccyy}$.

- *Класс эллиптической проекции биллиарда* $\Delta_\beta(2n\widetilde{B})_y$ *включает эллиптические проекции биллиардов*

  $\Delta_\beta(2(A_1'+nA_0'+mB_1'+2mnB_0))_y$,

  а также компоненты эллиптической проекции с коническими точками биллиардов $\Delta_\beta(2n\widetilde{A_0})_y$, $\Delta_{\beta h}(2n\widetilde{A_0})_{yy}$ *и* $\Delta_{\beta h}(2n(\widetilde{A_0}+A_0'))_{cy}$.

- *Класс эллиптической проекции биллиарда* $\Delta_\beta(2n(\widetilde{B}+B'))_x$ *включает эллиптические проекции с коническими точками биллиарда*

  $\Delta_\beta(2(A_1'+nA_0'+mB_1'+2mnB_0))_x$.

- *Класс эллиптической проекции биллиарда* $\Delta_\beta(2n(\widetilde{B}+B'))_{xy}$,

  включает эллиптические проекции с коническими точками биллиарда $\Delta_\beta(2(A_1'+nA_0'+mB_1'+2mnB_0))_{xyc}$.

- *Класс эллиптической проекции биллиарда* $\Delta_{\beta e}(2n\widetilde{B})_{yy}$ *включает эллиптические проекции с коническими точками биллиардов*

  $\Delta_{\beta e}(2n\widetilde{A_0})_{yy}$, $\Delta_\beta(2n\widetilde{A_0})_{yyyy}$ *и* $\Delta_\beta(2n(\widetilde{A_0}+A_0'))_{ccyy}$.

- *Класс эллиптической проекции биллиарда* $\Delta_{\beta e}(2n(B'+\widetilde{B}+B'))_{xx}$ *включает эллиптические проекции с коническими точками биллиардов*

  $\Delta_\beta(2(A_2'+nB_2''))_{xx}$ *и* $\Delta_\beta(2((A_1'+nA_0'+A_1')+2m(B_1'+nB_0)))_{xx}$.

Пусть дан обобщенный биллиард Δ. Зафиксируем и обозначим через Δ' одну из компонент его эллиптической проекции. Сопоставим ей кусочно-линейную функцию $f(\Delta')$ по следующему правилу. Фиксируем некоторый параметр $\lambda > b$ так, чтобы пересечение ветви гиперболы h_λ софокусного семейства, ему соответствующей, с областью Δ' (точнее с набором элементарных областей, составляющих область Δ') было не пусто. При этом потребуем, чтобы в случае, если область Δ' содержит конические точки, ни одно из рёбер склейки не лежало на гиперболе h_λ. Как легко видеть из предложения 2.2.1, связная компонента P пересечения гиперболы h_λ с областью Δ' гомеоморфна либо окружности (для классов эллиптической проекции, состоящих из одной области), либо отрезку (для классов эллиптической проекции, к которым принадлежат проекции разных областей). Так как все точки P лежат на одной дуге гиперболы, то на P можно задать естественную параметризацию f значением параметра эллипса. Минимумам функции f соответствуют либо края компоненты связности, либо точки ребер склейки выпуклых эллиптических дуг. Максимумам соответствуют склейки невыпуклых эллиптических дуг. В случае, когда P гомеоморфна отрезку, значения на концах области определения соответствуют границе области. Если P гомеоморфна окружности, то значения на концах совпадают (если это минимумы, то склейка выпуклая, если максимумы – то невыпуклая). Потребуем в этом случае, если область Δ содержит конические точки, чтобы точка, с которой начинается параметризация точек P, находилась на эллиптическом сегменте, образующем коническую точку.

На рисунке 2.11 показан пример построения функции $f(\Delta')$ для области Δ', эквивалентной обобщенной ленте $\Delta_\alpha(4B_0)$.

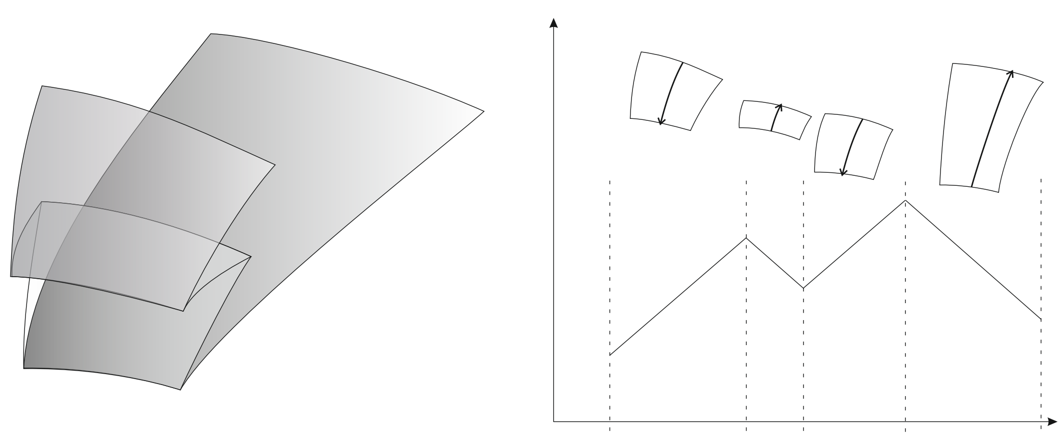


Рис. 2.11: Пример построения функции $f(\Delta_\alpha(4B_0))$ для класса эллиптической проекции вида обобщенной ленты $\Delta_\alpha(4B_0)$.

Замечание 17. Заметим, что из предложения 2.2.1 очевидно следует, что построение по компоненте эллиптической проекции функции f не зависит от выбора дуги гиперболы h_λ. Также очевидно, что если взять в качестве гиперболы h_λ ветвь гиперболы, на которой не лежат конические точки (но возможно лежат сегменты склейки), то результат по-прежнему не изменится.

Пусть f произвольная кусочно-линейная непрерывная функция на отрезке. Построим по кусочно-линейной функции f граф, как описано ниже, и назовем его $W(f)$. Пусть функция f строго ограничена сверху некоторым числом b, и при этом неотрицательна. Рассмотрим область, лежащую над графиком функции и ограниченную сверху прямой $y = b$. Расслоим её на отрезки горизонтальными линиями, то есть линиями $y = const$. Стянем каждый отрезок в точку. В результате область, расположенная между графиком и прямой $y = b$ превратится в граф, являющийся деревом. Заменим концевые вершины получившегося графа, получающиеся из минимумов функции f, атомами A. Вершину, соответствующую отрезку, лежащему на прямой $y = b$, оставим свободной. Во всех остальных вершинах поместим атомы B_k, где k – это количество локальных максимумов функции, в которых соответствующий горизонтальный отрезок касается графика функции.

В случае, если значения функции f в концах области определения совпадают, то по её графику можно построить другой граф, обозначаемый $W_2(f)$, следующим образом. Склеим область над графиком функции в цилиндр. Если исходная область была расслоена отрезками горизонтальных прямых $y = const$, то полученный цилиндр будет расслоен окружностями на отрезки (если окружности пересекаются с графиком функции f) и окружности. Стянем каждый отрезок и каждую окружность в точку. В вершину, соответствующую перестройке нескольких отрезков в окружность поместим атом C_k (при этом число k это число максимумов функции f, которых касается получившаяся окружность) из которого выходит два, а не одно ребро. По-прежнему заменим концевые вершины получившегося графа, получающиеся из минимумов функции f, атомами A, а во всех остальных вершинах поместим атомы B_k, где k – это количество локальных максимумов, которых касается соответствующая окружность. В дальнейшем для упрощения изложения будем говорить что область по-прежнему расслоена отрезками горизонтальных прямых, но левый и правый отрезок склеены в том случае, если их соответственно левый и правый концы не лежат на графике функции f.

Пусть дана функция $f(x)$. Предположим, что для неё существует нетривиальная функция $\tilde{f}(x)$ и число x_0, такое что

$$f(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{если } x \le x_0 \\ \tilde{f}(2x_0 - x) & \text{если } x \ge x_0. \end{cases}$$

Иными словами, что график функции $f(x)$ симметричен относительно прямой $x = x_0$. Рассмотрим граф $W(\tilde{f}(x))$ и изменим его следующим образом. Пусть B_k– седловой атом и пусть один конец горизонтального отрезка, который лежит в его прообразе, находится на прямой $x = x_0$. Тогда, если x_0 — это точка максимума функции $f(x)$, то заменим этот атом на B_k^*, а в противном случае оставим неизменным. Если же x_0 – это точка минимума функции $f(x)$, то соответствующий атом A оставим неизменным, однако выделим это ребро на графе $W(\tilde{f}(x))$. Полученный в результате граф, возможно с одним выделенным ребром, обозначим через $\widetilde{W}(f)$. Заметим, что граф $\widetilde{W}(f)$ получается из графа $W(f)$ с помощью естественной факторизации, переводящей атомы B_{2k} в атомы B_k (происходит в случае если горизонтальный отрезок имеет по k касаний с максимумами функций $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{f}(2x_0 - x)$), а атомы B_{2k+1} в атомы B_k^* (происходит в случае, если горизонтальный отрезок имеет по k касаний с максимумами функций $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{f}(2x_0 - x)$ и при этом x_0 — это точка максимума функции $f(x)$).

Аналогично строятся графы $\widetilde{W_2}(f)$ симметричной функции $f(x)$ (то есть график функции $f(x)$ симметричен относительно некоторой прямой $x = x_0$), у которой совпадают значения на концах области определения. В этом случае факторизация графа $W_2(f)$ требует следующего пояснения. Рассмотрим график соответствующей функции $\tilde{f}(x)$. Если на концах области определения эта функция имела $2k$ минимумов, то тогда в графе $W_2(f)$ верхний атом имеет вид C_{2k}. После факторизации он перейдёт в атом B_k. Если в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ имела максимум, то тогда атом, соответствующий горизонтальному отрезку, касающемуся этого максимума (и возможно других максимумов функции $f(x)$), имеет вид C_{2k+1} или C_{2k+2} (где число k — это число касаний с максимумами функций $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{f}(2x_0 - x)$, не лежащих на прямой $x = x_0$ и не являющихся концами функции $f(x)$). После факторизации эти атомы перейдут в атомы B_k^* и B_k^{**} соответственно. При этом в полученном графе выделим ребра, отвечающие атомам A, переходящим в себя, то есть лежащим в прообразах минимумов функции $\tilde{f}(x)$.

Замечание 18. Заметим, что вид графа $W(f)$, построенного по области эллиптической проекции, зависит от функции f. Этот вид зависит от значений функции в точках локальных максимумов, соответствующих невыпуклым эллиптическим склейкам, а также расположения самих максимумов. Рассмотрим для примера область эллиптической проекции, изображенную на рисунке 2.11. Эта функция имеет два локальных максимума. Обозначим их через x_0 (невыпуклое ребро склейки, ему соответствующее, обозначим через l) и x_1. Для функции изображенной на рисунке имеем: $f(x_0) < f(x_1)$. Заменим данный биллиард на эквивалентный, заменив биллиарды, склеенные вдоль сегмента l на эквивалентные, увеличив параметры данного сегмента. В этом случае значение $f(x_0)$ увеличится. Пока $f(x_0) < f(x_1)$, бифуркации, соответствующие этим точкам максимума, описываются атомами B. В тот момент, когда $f(x_0) = f(x_1)$ бифуркация, соответствующая горизонтальной прямой, проходящей через эти максимумы, описывается атомом B_2 с двумя критическими окружностями. Если продолжить увеличивать $f(x_0)$, то эта бифуркация снова распадётся на два атома B. Заметим, что при такой операции меняется и количество отрезков, высекаемых горизонтальными прямыми над графиком функции f. Следовательно, на примере данного биллиарда видно, что эквивалентность биллиардов не сохраняет структуру графа W, а следовательно, меняет молекулу.

Предложение 2.2.2. *Пусть Δ – связная компонента области эллиптической проекции, гра-*

ницы которой лежат на эллипсах со значениями параметров меньшими чем $b-\delta$. Построим по ней функцию $f := f(\Delta)$. Тогда слоение Лиувилля её прообраза $U := \{(x,v)|x \in \Delta, \Lambda(x,v) \in [0, b-\delta]\}$ в изоэнергетическом многообразии Q^3 описывается в терминах инварианта Фоменко-Цишанга следующим образом.

- *Пусть область Δ принадлежит классу эллиптической проекции $\Delta_\alpha(n\widetilde{B})$, $\Delta_\beta(2n(\widetilde{B} + B'))_{xy}$, $\Delta_{\beta e}(2n\widetilde{B})_{yy}$ или $\Delta_{\beta e}(2n(B' + \widetilde{B} + B'))_{xx}$. Тогда прообраз U гомеоморфен $W(f(\Delta))$.*
- *Пусть область Δ принадлежит классу эллиптической проекции $\Delta_\alpha(nC_m)$ или $\Delta_{\alpha h}(n\widetilde{B})$. Тогда прообраз U гомеоморфен несвязному объединению двух графов $W(f(\Delta))$.*
- *Пусть область Δ принадлежит классу эллиптической проекции $\Delta_{\alpha e}(2n\widetilde{B})$, $\Delta_\beta(2n\widetilde{B})_{yyyy}$, $\Delta_\beta(2n(\widetilde{B}+B'))_{xxyy}$ или $\Delta_\beta(2n(B'+\widetilde{B}+B'))_{xxxx}$. Тогда прообраз U гомеоморфен $W_2(f(\Delta))$.*
- *Пусть область Δ принадлежит классу эллиптической проекции $\Delta_{\alpha e}(2nC_m)$ или $\Delta_{\alpha eh}(2n\widetilde{B})$. Тогда прообраз U гомеоморфен несвязному объединению двух графов $W_2(f(\Delta))$.*
- *Пусть область Δ принадлежит классу эллиптической проекции $\Delta_\beta(2n\widetilde{B})_y$ или $\Delta_\beta(2n(\widetilde{B}+B'))_x$. Тогда прообраз U гомеоморфен $\widetilde{W}(f(\Delta))$.*
- *Пусть область Δ принадлежит классу эллиптической проекции $\Delta_{\beta h}(2n(B' + \widetilde{B}))_{xx}$ или $\Delta_{\beta h}(2n(\widetilde{B}))_{yy}$. Тогда прообраз U гомеоморфен $\widetilde{W_2}(f(\Delta))$.*

При этом на ребрах, соединяющих седловые атомы и атомы A, стоят метки $r = 0, \varepsilon = 1$, а на выделенных ребрах (они также по построению соединяют седловые атомы с минимаксными) стоят метки $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = 1$. На всех остальных внутренних ребрах стоят метки $r = \infty, \varepsilon = 1$.

Определение 2.5. Для выбора циклов на торе поступим следующим образом. Укажем кривую в области эллиптической проекции. Для того чтобы поднять её до цикла на торе Лиувилля, необходимо рассмотреть её оснащение векторами скорости. Зачастую такое оснащение очевидно (так как оснащенная кривая должна быть гомеоморфна окружности в Q^3). Если кривая не всюду оснащена касательными векторами скорости, рассмотрим скалярное произведение векторов оснащения и касательных векторов скорости. Оказывается, что на циклах, которые выбираются в работе, такое произведение вдоль кривой не меняет знака (хотя может принимать нулевое значение). Скажем, что ориентация цикла *согласована* с оснащением в том случае, если вдоль цикла скалярное произведение неотрицательно, и *противоположна* оснащению, если неположительно.

Замечание 19. На циклах μ_A и λ_V, где V – седловой атом, ориентация всегда согласована с оснащением. Это связано с тем, что ориентация цикла обязана совпадать с направлением потока гамильтониана системы – квадрата вектора скорости. Иначе говоря, в пределе должна получится критическая траектория соответствующего атома, направление на которой естественным образом задаётся векторами скорости.

Замечание 20. Циклы μ_V, где V – седловой атом, обязаны иметь разные ориентации на уровнях интеграла, находящихся по разные стороны от критического значения, соответствующего данному атому. Эти циклы – это граничные окружности трансверсального сечения к критической окружности. Задание ориентации на сечении требует по-разному задавать ориентацию циклов на внешних и внутренних границах.

Доказательство. В дальнейшем доказательстве для упрощения изложения вместо выражения "область эллиптической проекции" мы будем использовать просто слово "область".

Напомним, что при построении функции f по области Δ мы фиксировали некоторый параметр $\lambda > b$ так, чтобы пересечение некоторой ветви гиперболы h_λ софокусного семейства, ему соответствующей, с областью Δ (точнее с набором элементарных областей, составляющих область Δ) было не пусто. При этом связная компонента P пересечения гиперболы h_λ с областью Δ гомеоморфна либо окружности, либо отрезку. Пусть область определения функции f есть отрезок $[\alpha, \beta]$, а область значений – отрезок $[f_{min}, f_{max}]$.

Шаг первый. Докажем, что для компоненты P прообраз $W := \{(x,v)|x \in P, \Lambda(x,v) \in [0, b-\delta]\}$ в изоэнергетическом многообразии послойно гомеоморфен несвязному объединению двух двумерных молекул, задающихся графами $W(f(\Delta))$ в случае, если P гомеоморфна отрезку, и графами $W_2(f(\Delta))$ в случае, если P гомеоморфна окружности.

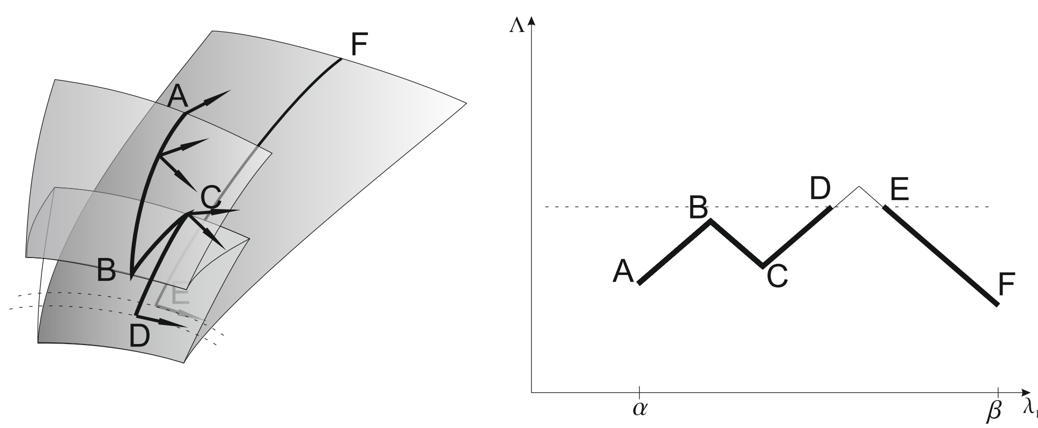


Рис. 2.12: Оснащение точек отрезка P векторами скорости таким образом, чтобы они лежали на уровне интеграла $\Lambda = t$ (пунктирная прямая на графике справа). Точки A и F оснащаются одним вектором скорости вследствие закона отражения на границе, точка D лежит на эллипсе с параметром t, поэтому также оснащается одним вектором скорости.

Фиксируем уровень интеграла $\Lambda = t$. Рассмотрим случай, когда компонента P гомеоморфна отрезку. Пусть прямая $y = t$ трансверсально пересекает график построенной по области Δ функции f (то есть не имеет касания ни с точками минимумов, ни с точками максимумов).

Тогда в области над графиком функции она высекает некоторое количество горизонтальных отрезков, каждый из которых соответствует некоторой точке на ребре графа W. Фиксируем произвольный горизонтальный отрезок Y и рассмотрим ломаную L – часть графика функции f, расположенную не выше этого отрезка. Как видно из рисунка 2.12, ломаной L, а значит и отрезку Y, соответствует окружность в $W := \{(x,v)|x \in P, \Lambda(x,v) \in [0, b-\delta]\}$ на уровне интеграла $\Lambda = t$.

В случае, когда компонента P гомеоморфна окружности, необходимо отдельно выделить следующий случай. Пусть два высекаемых горизонтальных отрезка Y_1 и Y_2 имеют по одному концу на прямых $x = \alpha$ и $x = \beta$ соответственно. Однако дуги компоненты P, соответствующие отрезкам, концы которых лежат на прямых $x = \alpha$ и $x = \beta$ (и которые расположены под отрезками Y_1 и Y_2), склеены между собой. Таким образом, в этом случае двум отрезкам Y_1 и Y_2 соответствует одна окружность (и одна точка на ребре графа $W_2(f)$). В случае, если график функции f расположен строго под прямой $y = t$, то отрезку Y будут соответствовать две окружности.

Пусть прямая $y = t$ касается локального минимума функции x_0. Точка области Δ, соответствующая точке x_0, является либо граничной точкой, либо отвечает выпуклой склейке. На этом сегменте (граничном или склейке) значению интеграла $\Lambda = t$ отвечают криволинейные траектории – движения по этому сегменту. Точка x_0 является пределом стягивающихся в точку отрезков Y_δ, высекаемых над ней близкими прямыми $y = t + \delta$. Так как в прообразе каждого отрезка Y_δ лежит окружность, то каждому минимуму функции f отвечает атом A.

Пусть прямая $y = t$ касается нескольких (как минимум одного) локальных максимумов функции f. Рассмотрим некоторый фиксированный максимум. В нём сходятся концы двух ломаных, расположенных не выше прямой $y = t$. При этом, по-прежнему, граничные точки ломаных (точнее, их прообразы в компоненте P) могут быть оснащены лишь одним вектором скорости, что приводит к склейке окружности, соответствующей ломаной слева, с окружностью, соответствующей ломаной справа от максимума функции. Такая перестройка окружностей, как известно, отвечает либо атому B_k (где k это количество максимумов, которых касается высекаемый отрезок с как минимум одним концом на графике функции), либо атому C_k (в случае, если весь график функции расположен ниже прямой $y = t$, а компонента P гомеоморфна окружности).

Заметим, что мы оснащали точки дуги гиперболами секторами “вправо”, однако если направлять вектора “влево” , то результат от этого не изменится.

Шаг второй. Покажем, что слоение Лиувилля многообразия $U := \{(x,v)|x \in \Delta, \Lambda(x,v) \in [0, b-\delta]\}$ описывается соответствующей грубой молекулой. Рассмотрим случай, когда область Δ не содержит конических точек. Рассмотрим объединение $R := \bigcup\limits_i R_i$ эллиптических сегментов R_i границы и сегментов склейки области $\widehat{\Delta}$, такое что конец каждого сегмента P_i склеен с началом следующего сегмента P_{i+1} в точке, лежащей на ребре склейки (гиперболической), при этом это объединение максимально. Такое объединение назовём обобщенным эллиптическим сегментом. Обобщенный эллиптический сегмент R, как легко видеть из устройства областей эллиптической проекции, гомеоморфен либо отрезку (для областей $\Delta_\alpha(n\widetilde{B})$, $\Delta_{\alpha e}(2n\widetilde{B})$) либо окружности (все остальные области эллиптической проекции без конических точек). Заметим, что область Δ может быть рассмотрена как результат прямого произведения любого её обобщенного эллиптического сегмента R на отрезок или окружность P (построенную по некоторой дуге гиперболы). Легко понять, что на каждом уровне интеграла Λ в трехмерном прообразе $U := \{(x,v)|x \in \Delta, \Lambda(x,v) \in [0, b-\delta]\}$ обобщенному эллиптическому сегменту R отвечает либо одна окружность (если R – отрезок), либо две окружности (если R – окружность). Трехмерный прообраз $U := \{(x,v)|x \in \Delta, \Lambda(x,v) \in [0, b-\delta]\}$ восстанавливается как прямое произведение одной или двух окружностей, соответствующих сегменту R на соответствующую двумерную молекулу.

Пусть теперь область Δ содержит конические точки. В этом случае, как следует из теоремы о классификации областей, область Δ, фактически, является результатом склейки двух экземпляров некоторой другой области Δ' вдоль некоторых границ. Этот факт приводит к тому что график функции f, построенной по области Δ является симметричным (см. построение молекул выше), а именно состоит из двух склеенных графиков функции f', построенной по области Δ'. В свою очередь, это же верно и для области $\widehat{\Delta}$, полученной из Δ разрезами вдоль нескольких обобщенных гиперболических сегментов H_i (их количество не превосходит двух), образующим конические точки, так чтобы в результате образовалась другая область эллиптической проекции $\widehat{\Delta}$ без конических точек. Пусть прообраз $\hat{U}$ – прообраз для точек области $\widehat{\Delta}$ (для него мы уже все доказали). Отмена биллиардного закона на окружностях или отрезках P, разветвленного двулистно накрывающих H (особые точки этого накрытия совпадают с коническими точками), индуцирует разрезание многообразия $\hat{U}$ трансверсально критическим окружностям по многообразию W, лежащему в прообразе P. Многообразие W, как было показано на первом шаге, описывается соответствующей молекулой $W(f)$ (если P отрезок) или $W_2(f)$ (если P окружность). При этом в силу того что график функции f симметричен относительно некоторой прямой $x = x_0$ (где x_0 фактически это по построению образ конической точки) на многообразии W существует естественная инволюция, при которой неподвижными точками являются точки P переходящие при накрытии обобщенных гиперболических сегментов H_i в конические точки.

Рассмотрим случай, когда область $\widehat{\Delta}$ получена из области Δ разрезом только вдоль одного обобщенного гиперболического сегмента H. После разреза край многообразия $\hat{U}$ состоит из двух компонент, каждая из которых гомеоморфна многообразию W и отвечает направлению векторов “вправо” или “влево”. Обозначим W^{up} и W_{down} части многообразия W, точки которых лежат в разных экземплярах области Δ', составляющих область Δ. До разреза склейка между этими многообразиями происходила так – точки W^{up}, оснащенные векторами “вправо”, склеивались с точками W^{up}, оснащенных векторами “влево.” Теперь склеим из области $\widehat{\Delta}$ область Δ. Эта операция (вследствие закона отражения) индуцирует следующую склейку краёв разрезанного многообразия $\hat{U}$: точки W^{up}, оснащенные векторами “вправо”, склеиваются с точками W_{down}, оснащенных векторами “влево.” Это означает, что края разрезанного многообразия $\hat{U}$ склеиваются под действием инволюции на многообразии W. Если ось инволюции проходила через вершину некоторого седлового атома (это означает, что соответствующая коническая точка лежала на невыпуклом эллиптическом сегменте), то после инволюции этот седловой атом перейдёт в атом со звездочкой, где звездочка и есть эта вершина.

В случае, когда область $\widehat{\Delta}$ получена из области Δ разрезом вдоль двух обобщенных гиперболических сегментов H_1 и H_2, перекрутка, которая возникает при склейке двух кусков разрезанного многообразия $\hat{U}$ вдоль сегмента H_1, компенсируется точно такой же перекруткой вдоль сегмента H_2, что приводит к сохранению слоения.

Шаг третий. Вычисление меток. Фиксируем P и соответствующее ему двумерное сечение W в многообразии U. Отметим несколько важных соображений.

Любой обобщённый эллиптический сегмент склейки (см. второй шаг) соответствует оси некоторого атома. В случае, если обобщенный сегмент выпуклый, ему соответствуют критические траектории, являющиеся осями полноторий-атомов A. Если этот сегмент невыпуклый, то объединение всех его точек, оснащенных касательными к нему векторами, является объединением нескольких критических окружностей седловых атомов, то есть, циклом λ на торах, отвечающих седловым атомам.

Пусть прообраз U описывается в терминах графов $W(f)$ и $W_2(f)$ (нет выделенных ребер, все седловые атомы не содержат звездочек). Тогда для седловых атомов в качестве циклов μ естественно выбрать точки компоненты P, оснащенные векторами скорости. Все они связаны условием существования глобального сечения (более того, двумерной молекулы W). Для минимаксных атомов A точки компоненты P образуют стягивающийся в точку цикл λ. Соответствующий обобщенный эллиптический сегмент R, оснащенный векторами скорости, пересекается с выбранным циклом λ в одной точке, следовательно, может быть выбран в качестве цикла μ.

Пусть молекула W содержит звездочки и выделенные ребра. Зададим ориентацию на ребрах: исходящими от листьев дерева W – атомов A – по ребрам графа к седловому атому B, отвечающему максимуму функции f. Рассмотрим путь, начинающийся в атоме A и проходящий по направлению стрелок до атома со звёздочкой. Циклы, относящиеся к атомам вдоль этого пути, могут быть выбраны так же, как и в предыдущем случае.

Пусть седловой атом V имеет звездочки. Тогда циклы, которые высекаются точками P – это циклы $\hat{\mu}$. По правилам выбора циклов на входящих в этот атом ребрах выберем $\mu = \hat{\mu}$, а на исходящих $\mu = \frac{\hat{\mu}+\lambda}{2}$ (если атом содержит одну звездочку) или $\mu = \hat{\mu} + \lambda$ (если в атоме две звездочки). Поясним, что в последнем случае нет полусуммы, так как часть границы дубля соответствующего атома состоит из двух циклов $\hat{\mu}$. Фактически это означает, что нам необходимо модифицировать цикл λ, сделав обход (половину цикла $\hat{\mu}$) вокруг конической точки (см. рис. 2.13). По этому же правилу выбираются циклы μ на путях графа W, исходящих из атома со звездочкой. Если на этом пути снова попадется атом со звездочкой (это означает, что предыдущий атом имел только одну звездочку), то процедуру необходимо повторить взяв за $\hat{\mu}$ построенные

μ.

Рассмотрим теперь выделенное ребро, исходящее из атома A. Исчезающий цикл λ для атома A по прежнему выбирается как точки компоненты P. Выбранный для невыделенных рёбер цикл μ не подходит – он пересекает цикл λ в двух точках. Подходящий цикл изображен на рисунке 2.13 справа. Заметим, что это цикл фактически является обходом конической точки. Циклы μ на седловых атомах (без звездочек), встречающихся на пути из этого атома A выбираются с тем же обходом, как $\mu = \frac{\hat{\mu}+\lambda}{2}$, где $\hat{\mu}$ – циклы, соответствующие точкам компоненты P.

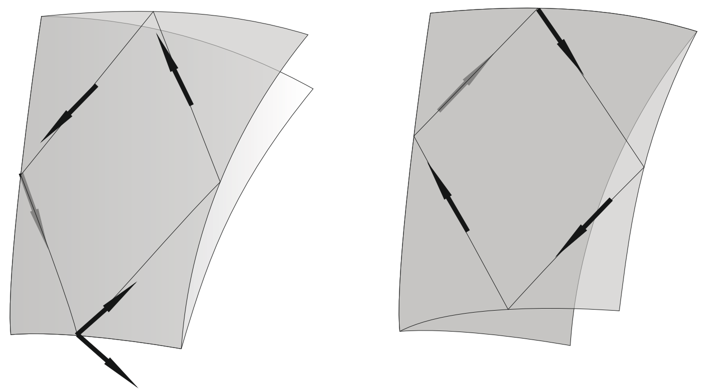


Рис. 2.13: На рисунке слева изображена часть цикла μ на граничном торе седлового атома, отвечающего ребрам, расположенным (в молекуле) выше атома со звездочкой. На рисунке справа показан выбор цикла μ на граничном торе атома A.

Выберем ориентацию на циклах μ, соответствующих точкам компоненты P следующим образом. Для исходящих ребер выберем её согласованной с оснащением векторами скорости (см. определение 2.5), а на входящих – противоположной. Тогда на циклах λ, относящихся к атомам A, ориентацию также необходимо выбрать не согласованной. Выпишем матрицы склейки. Заметим, что естественным образом выбор ориентации цикла μ_A на атоме A совпадает с выбором ориентации цикла λ_V на седловом атоме (так как совпадают направления критических окружностей). Поэтому на невыделенных ребрах между седловым атомом и атомом A матрица склейки всегда имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а на выделенных $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Между седловыми атомами матрицы склейки примут вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. □

Замечание 21. Замена ориентации многообразия, как видно из матриц склейки, не повлечет за собой изменения меток на ребрах. Однако метка n в семье может поменяться, если граф содержит звездочки или выделенные ребра. Можно показать, что вклад в метку n равен 0 тогда и только тогда, когда ориентация внешнего цикла μ_f для семьи согласована с оснащением векторами скорости. Если ориентация противоположна, то вклад в метку равен -1 для графа $\widetilde{W(f)}$ и -2 для графа $\widetilde{W_2(f)}$.

2.2.2 Области гиперболической проекции

Определение 2.6. Пусть Δ – топологический биллиард. Фиксируем некоторое малое $\delta > 0$ такое, что гипербола с параметром $\lambda = b + \delta$ не имеет общих точек ни с одним элементарным биллиардом A_0, A'_0 и B_0. Рассмотрим проекцию уровней интеграла $\Lambda \geq b + \delta$. Касательные к траекториям, лежащих на этих уровнях касаются гипербол, с параметрами большими, чем $b+\delta$. Потому точки внутренности гиперболы с параметром $\lambda = b + \varepsilon$ не лежат в проекциях уровней интеграла (нельзя провести касательные). Под внутренностью такой гиперболы понимаются точки тех двух областей плоскости (на которые гипербола разбивает ее), которые содержат фокусы и "вырожденные гиперболы" – горизонтальные лучи из фокусов. Поэтому для рассмотрения проекции необходимо удалить из каждого элементарного биллиарда, составляющего топологический биллиард Δ, внутренность гиперболы с параметром $\lambda = b + \delta$. Полученный биллиард назовем *областью гиперболической проекции* топологического биллиарда Δ. Класс топологических биллиардов, к которому принадлежит связная компонента области гиперболической проекции, назовем *классом гиперболической проекции* данной компоненты.

Замечание 22. При этой операции от каждого элементарного биллиарда серии A останется биллиард A_0, от биллиарда серии A' останется биллиард A'_0, а от биллиардов-колец серии C и биллиардов-лент серии B – биллиард B_0. Следовательно, области гиперболической проекции принадлежат классу областей, склеенных из областей A_0, A'_0 и B_0.

Предложение 2.2.3. *Всего существует четырнадцать классов гиперболической проекции. Среди них при этом существует ровно семь классов, к которым принадлежат гиперболические проекции только одного класса топологических биллиардов, а именно, классы* $\Delta_{\alpha h}(n\widetilde{A_0})$, $\Delta_{\alpha eh}(n\widetilde{A_0})$, $\Delta_{\beta e}(2n(A'_0+\widetilde{A_0}+A'_0))_{cc}$, $\Delta_{\beta e}(2n\widetilde{A_0})_{yy}$, $\Delta_{\beta e}(2n\widetilde{A_0})_{yyyy}$, $\Delta_{\beta e}(2n(\widetilde{A_0}+A'_0))_{ccyy}$ *и* $\Delta_{\beta e}(2n(A'_0+\widetilde{A_0} + A'_0))_{cccc}$.

- *Класс гиперболической проекции биллиарда* $\Delta_\alpha(n\widetilde{A_0})$ *включает гиперболические проекции биллиардов*

  $\Delta_\alpha(nC_m)$, $\Delta_\alpha(A_2+nC_2)$, $\Delta_\alpha(A'_2+nB''_2)$, $\Delta_\alpha(A'_2+2nB''_2+A'_2)$, $\Delta_\alpha(A_1+nA_0+mB_1+2mnB_0)$, $\Delta_\alpha((A_1+nA_0+A_1)+2m(B_1+nB_0))$, $\Delta_\alpha(A'_1+nA'_0+mB'_1+2mnB_0)$, $\Delta_\alpha((A'_1+nA'_0+A'_1)+2m(B'_1+nB_0))$, $\Delta_\alpha(n\widetilde{B})$, $\Delta_{\alpha h}(n\widetilde{B})$, $\Delta_\beta(2n(\widetilde{B}+B'))_x$, $\Delta_{\beta e}(2n(B'+\widetilde{B}+B'))_{xx}$,

  а также компоненты гиперболической проекции без конических точек биллиардов $\Delta_\beta(2n\widetilde{B})_y$, $\Delta_\beta(2n(\widetilde{B}+B'))_{xy}$ *и* $\Delta_{\beta e}(2n\widetilde{B})_{yy}$.

- *Класс гиперболической проекции биллиарда* $\Delta_{\alpha e}(n\widetilde{A_0})$ *включает гиперболические проекции биллиардов*

  $\Delta_{\alpha e}(2nC_m)$, $\Delta_{\alpha}(A_2+2nC_2+A_2)$, $\Delta_{\beta}(2(A_2'+nB_2''))_{xx}$, $\Delta_{\alpha}((A_1+2mB_1+A_1)+2n(A_0+mB_0))$, $\Delta_{\alpha}(2(A_1+nA_0+2mB_1+4mnB_0+A_1))$, $\Delta_{\alpha}((A_1'+2mB_1'+A_1')+2n(A_0'+2mB_0))$, $\Delta_{\alpha}(2(A_1'+nA_0'+2mB_1'+4mnB_0+A_1'))$, $\Delta_{\beta}(2(A_1'+nA_0'+mB_1'+2mnB_0))_x$, $\Delta_{\beta}(2((A_1'+nA_0'+A_1')+2m(B_1'+nB_0)))_{xx}$, $\Delta_{\alpha e}(2n\widetilde{B})$, $\Delta_{\alpha eh}(2n\widetilde{B})$, $\Delta_{\beta h}(2n(B'+\widetilde{B}+B'))_{xx}$, $\Delta_{\beta e}(2n(B'+\widetilde{B}+B'))_{xxxx}$,

  а также компоненты гиперболической проекции без конических точек биллиардов

  $\Delta_{\beta e}(2n\widetilde{B})_{yyyy}$ *и* $\Delta_{\beta e}(2n(\widetilde{B}+B'))_{xxyy}$.

- *Класс гиперболической проекции биллиарда* $\Delta_{\beta}(2n\widetilde{A_0})_y$ *включает гиперболические проекции биллиардов*

  $\Delta_{\beta}(2(A_1'+nA_0'+mB_1'+2mnB_0))_y$ *и* $\Delta_{\beta}(2n\widetilde{B})_y$.

- *Класс гиперболической проекции биллиарда* $\Delta_{\beta}(2n(\widetilde{A_0}+A_0'))_c$ *включает гиперболические проекции биллиардов*

  $\Delta_{\beta}(2(A_1'+nA_0'+mB_1'+2mnB_0))_c$ *и и* $\Delta_{\beta}(2A_1'+nC_1)_c$

- *Класс гиперболической проекции биллиарда* $\Delta_{\beta h}(2n\widetilde{A_0})_{yy}$ *включает гиперболические проекции с коническими точками биллиардов*

  $\Delta_{\beta}(2(A_1+nA_0+mB_1+2mnB_0))_{yy}$, $\Delta_{\beta h}(2n\widetilde{B})_{yy}$, $\Delta_{\beta e}(2n\widetilde{B})_{yyyy}$ *и* $\Delta_{\beta e}(2n(\widetilde{B}+B'))_{xxyy}$

- *Класс гиперболической проекции биллиарда* $\Delta_{\beta}(2n(\widetilde{A_0}+A_0'))_{cy}$

  включает гиперболическую проекцию с коническими точками биллиарда $\Delta_{\beta}(2(A_1'+nA_0'+mB_1'+2mnB_0))_{xyc}$.

- *Класс гиперболической проекции биллиарда* $\Delta_{\beta e}(2n(A_0'+\widetilde{A_0}+A_0'))_{cc}$ *включает гиперболические проекции с коническими точками биллиардов*

  $\Delta_{\beta}(2((A_1'+2mB_1'+A_1')+2n(A_0'+2mB_0)))_{cc}$ *и* $\Delta_{\beta}(2A_1'+2nC_1+2A_1')_{cc}$.

По области гиперболической проекции Δ можно построить кусочно-линейную функцию, обозначаемую через $g(\Delta)$, аналогичную построению функции f по области эллиптической проекции. Необходимо выбрать эллипс с параметром $\lambda > b$ так, чтобы его пересечение с областью Δ (точнее с набором элементарных биллиардов, составляющих Δ) было не пусто. Далее, оказывается, что множество точек этого пересечения P также гомеоморфно окружности или отрезку. Введём его параметризацию параметром эллипса. Точки экстремума функции $g(\Delta)$ соответствуют гиперболическим склейкам: максимумам соответствуют выпуклые склейки, а минимумам – невыпуклые. Если P гомеоморфна окружности, то значения на концах совпадают (если это максимумы, то склейка выпуклая, если минимумы – то невыпуклая). Если область Δ содержит конические точки, то потребуем в этом случае, чтобы первая точка параметризации находилась на гиперболическом сегменте, образующем коническую точку.

Аналогично тому, как мы строили граф $W(f)$ по функции f, можно выполнить построение графа $W(g)$. Единственное различие будет состоять в том, что вместо стягивания в точку отрезков над графиком функции, мы будем стягивать в точку отрезки под графиком функции. В каком-то смысле функция f рассматривается как функция "профиля дна", а функция g как функция "горного хребта".

Предложение 2.2.4. *Пусть Δ – связная компонента области гиперболической проекции, границы которой лежат на гиперболах со значениями параметров большими чем $b+\delta$. Тогда слоение Лиувилля её прообраза $U := \{(x,v)|x \in \Delta, \Lambda(x,v) \in [b+\delta, a]\}$ в изоэнергетическом многообразии Q^3 может быть описано в терминах инварианта Фоменко-Цишанга следующим образом.*

- *Пусть область Δ принадлежит классу гиперболической проекции $\Delta_\alpha(n\widetilde{A_0})$, $\Delta_\beta(2n(\widetilde{A_0}+A_0'))_{cy}$, $\Delta_{\beta h}(2n\widetilde{A_0})_{yy}$ или $\Delta_{\beta h}(2n(A_0'+\widetilde{A_0}+A_0'))_{cc}$. Тогда прообраз U гомеоморфен $W(g(\Delta))$.*

- *Пусть область Δ принадлежит классу гиперболической проекции $\Delta_{\alpha e}(n\widetilde{A_0})$. Тогда прообраз U гомеоморфен несвязному объединению двух графов $W(g(\Delta))$.*

- *Пусть область Δ принадлежит классу гиперболической проекции $\Delta_{\alpha h}(n\widetilde{A_0})$, $\Delta_\beta(2n\widetilde{A_0})_{yyyy}$, $\Delta_\beta(2n(\widetilde{A_0}+A_0'))_{ccyy}$ или $\Delta_\beta(2n(A_0'+\widetilde{A_0}+A_0'))_{cccc}$. Тогда прообраз U гомеоморфен $W_2(g(\Delta))$.*

- *Пусть область Δ принадлежит классу гиперболической проекции $\Delta_{\alpha eh}(n\widetilde{A_0})$. Тогда прообраз U гомеоморфен несвязному объединению двух графов $W_2(g(\Delta))$.*

- *Пусть область Δ принадлежит классу гиперболической проекции $\Delta_\beta(2n\widetilde{A_0})_y$ или $\Delta_\beta(2n(\widetilde{A_0}+A_0'))_c$. Тогда прообраз U гомеоморфен $\widetilde{W}(g(\Delta))$.*

- *Пусть область Δ принадлежит классу гиперболической проекции $\Delta_{\beta e}(2n(A_0'+\widetilde{A_0}+A_0'))_{cc}$ или $\Delta_{\beta e}(2n\widetilde{A_0})_{yy}$. Тогда прообраз U гомеоморфен $\widetilde{W_2}(g(\Delta))$.*

При этом на ребрах, соединяющих седловые атомы и атомы A стоят метки $r=0, \varepsilon=1$, а на выделенных ребрах (они также по построению соединяют седловые атомы с минимаксными) стоят метки $r=\frac{1}{2}, \varepsilon=1$. На всех остальных внутренних ребрах стоят метки $r=\infty, \varepsilon=1$.

2.2.3 Окрестность уровня интеграла на фокальном уровне

При седловом значении интеграла $\Lambda = b$ траектории обладают следующим свойством: звенья траектории поочерёдно проходят через фокусы семейства (1.1) (фокус меняется как при отражении траектории от границы биллиарда, так и при переходе с одного элементарного биллиарда на другой).

Опишем окрестности прообраза седлового значения интеграла $\Lambda = b$ в терминах атомов-бифуркаций для невыпуклых топологических биллиардов, содержащих фокусы:

Предложение 2.2.5. *Трехмерный прообраз $\Lambda^{-1}([b-\varepsilon, b+\varepsilon])$ в изоэнергетической поверхности Q^3 для топологического биллиарда Δ, содержащего фокусы, гомеоморфен следующим трёхмерным многообразиям (перечисленные ниже атомы трехмерные):*

- *произведение тора на отрезок для классов биллиардов, не содержащих фокусы во внутренности области, а именно, для биллиардов без конических точек принадлежащих к классам A'_1 (серия $\Delta_\alpha(A'_1 + nA'_0 + mB'_1 + 2mnB_0)$), $\Delta_\alpha(2A'_1)$ (серия $\Delta_\alpha((A'_1 + 2mB'_1 + A'_1) + 2n(A'_0 + 2mB_0)))$, A'_2 (серии $\Delta_\alpha(A'_2 + nB''_2)$ и $\Delta_\alpha((A'_1 + nA'_0 + A'_1) + 2m(B'_1 + nB_0)))$, $\Delta_\alpha(2A'_2)$ (серии $\Delta_\alpha(A'_2 + 2nB''_2 + A'_2)$ и $\Delta_\alpha(2(A'_1 + nA'_0 + 2mB'_1 + 4mnB_0 + A'_1)))$ и для класса биллиардов $\Delta_\beta(2A'_1)_y$ с одной конической точкой типа y (серия $\Delta_\beta(2(A'_1 + nA'_0 + mB'_1 + 2mnB_0))_y$).*

- *атом B для классов A_2 (серии $\Delta_\alpha(A_2 + nC_2)$ $\Delta_\alpha((A_1 + nA_0 + A_1) + 2m(B_1 + nB_0)))$,*

  $\Delta_\alpha(2A_1)$ (серия $\Delta_\alpha((A_1 + 2mB_1 + A_1) + 2n(B_1 + mB_0)))$,

  $\Delta_\beta(2A'_1)_x$ (серия $\Delta_\beta(2(A'_1 + nA'_0 + mB'_1 + 2mnB_0))_x$)

  $\Delta_\beta(2A'_1)_c$ (серии $\Delta_\beta(2(A'_1 + nA'_0 + mB'_1 + 2mnB_0))_c$ и $\Delta_\beta(2A'_1 + nC_1)_c$)

  $\Delta_\beta((2A'_1)_c + (2A'_1)_c)$ (серии $\Delta_\beta(2A'_1 + 2nC_1 + 2A'_1)_{cc}$ и $\Delta_\beta(2((A'_1 + 2mB'_1 + A'_1) + 2n(A'_0 + 2mB_0)))_{cc}$,

  $\Delta_\beta(2A'_2)_{xx}$ (серии $\Delta_\beta(2(A'_2 + nB''_2))_{xx}$ и $\Delta_\beta(2(((A'_1 + nA'_0 + A'_1) + 2m(B'_1 + nB_0))))_{xx}$);

- *атом C_2 для класса $\Delta_\alpha(2A_2)$ (серии $\Delta_\alpha(2(A_1 + nA_0 + 2mB_1 + 4mnB_0 + A_1))$ и $\Delta_\alpha(A_2 + 2nC_2 + A_2)$);*

- *атом A^* для областей класса A_1 (серия $\Delta_\alpha(A_1 + nA_0 + mB_1 + 2mnB_0)$), а также для биллиардов с коническими точками класса $\Delta_\beta(2A'_1)_{xyc}$ (серия $\Delta_\beta(2(A'_1 + nA'_0 + mB'_1 + 2mnB_0))_{xyc}$).*

- *атом A^{**} для класса $\Delta_\beta(2A_1)_{yy}$ (серия $\Delta_\beta(2(A_1 + nA_0 + mB_1 + 2mnB_0))_{yy}$).*

Доказательство. Полностью аналогично доказательству соответствующего утверждения для выпуклых топологических биллиардов. □

Теперь опишем окрестности прообраза седлового значения интеграла $\Lambda = b$ в терминах атомов-бифуркаций для невыпуклых топологических биллиардов, не содержащих фокусы:

Предложение 2.2.6. *Пусть Δ – топологический биллиард, не содержащий фокусы. Рассмотрим пересечение внутренности биллиардной области Δ с фокальной прямой. Данное пересечение гомеоморфно несвязному объединению k_1 отрезков и k_2 окружностей. Положим число $k = k_1 + 2k_2$. Пусть две конические точки одного типа (x или c) принадлежат одному отрезку на фокальной прямой в пересечении с областью биллиарда Δ. Назовем такие точки парными. Все остальные конические точки этих типов назовем непарными.*

Трехмерный прообраз $\Lambda^{-1}([b-\varepsilon, b+\varepsilon])$ в изоэнергетической поверхности Q^3 для топологического биллиарда Δ гомеоморфен следующим трёхмерным многообразиям (перечисленные ниже атомы трехмерные):

- *атому B_k, быть может, со звездочками, для биллиардов, гомеоморфных диску; причем количество звездочек равно количеству непарных точек типа x (или c);*
- *несвязному объединению двух атомов B_{k_2} для гомеоморфных кольцу биллиардов $\Delta_{\alpha h}(n\widetilde{A_0})$ и $\Delta_{\alpha e}(2n\widetilde{B})$;*
- *атому C_k для биллиардов гомеоморфных кольцу $\Delta_{\alpha e}(n\widetilde{A_0})$, $\Delta_{\alpha h}(n\widetilde{B})$, $\Delta_{\alpha}(nC_m)$ или сфере (области с четырьмя коническими точками);*
- *несвязному объединению двух атомов C_{k_2} для биллиардов, гомеоморфных тору.*

Доказательство. Докажем утверждение для биллиардов, которые обязаны содержать невыпуклые склейки. Для остальных биллаирдов доказательство полностью аналогично доказательству для соответствующих выпуклых топологических биллиардов. Докажем утверждение для биллиардов, склеенных из биллиардов серии B. Доказательство для биллиардов, склеенных из $\tilde{A}_0$, полностью аналогично, если вместо дуг эллипсов брать дуги гипербол.

Пусть биллиард Δ эквивалентен биллиарду-кольцу $\Delta_{\alpha e}(n\tilde{B})$ или биллиарду-тору $\Delta_{\alpha eh}(n\tilde{B})$. Рассмотрим заполнение биллиарда дугами софокусных эллипсов. Рассмотрим множество точек, которые лежат на дуге одного эллипса с параметром λ. Выберем в этом множестве связную компоненту h_λ. Она гомеоморфна либо отрезку (в случае биллиарда $\Delta_{\alpha e}(n\tilde{B})$), либо окружности (в случае биллиарда $\Delta_{\alpha eh}(n\tilde{B})$). Рассмотрим оснащение точек x компоненты h_λ векторами скорости v, так чтобы выполнялось соотношение $\Lambda(x, v) \in [b-\varepsilon, b+\varepsilon]$. Если компонента h_λ гомеоморфна отрезку, то данное множество точек, по аналогии с биллиардом-лентой B, послойно гомеоморфно несвязному объединению двух атомов B_{k_2} (каждый атом отвечает своему направлению – от фокусов и к фокусам). Если же компонента h_λ гомеоморфна окружности, то данное множество точек, то по аналогии с биллиардом-кольцом C, послойно гомеоморфно несвязному объединению двух атомов C_{k_2}. При этом вся область биллиарда Δ гомеоморфна прямому произведению компоненты h_λ на окружность. Следовательно, трехмерный прообраз состоит из двух компонент связности, каждая из которых гомеоморфен прямому произведению 2-атома (B_{k_2} или C_{k_2}) на окружность, т.е. соответствующим 3-атомам без звездочек.

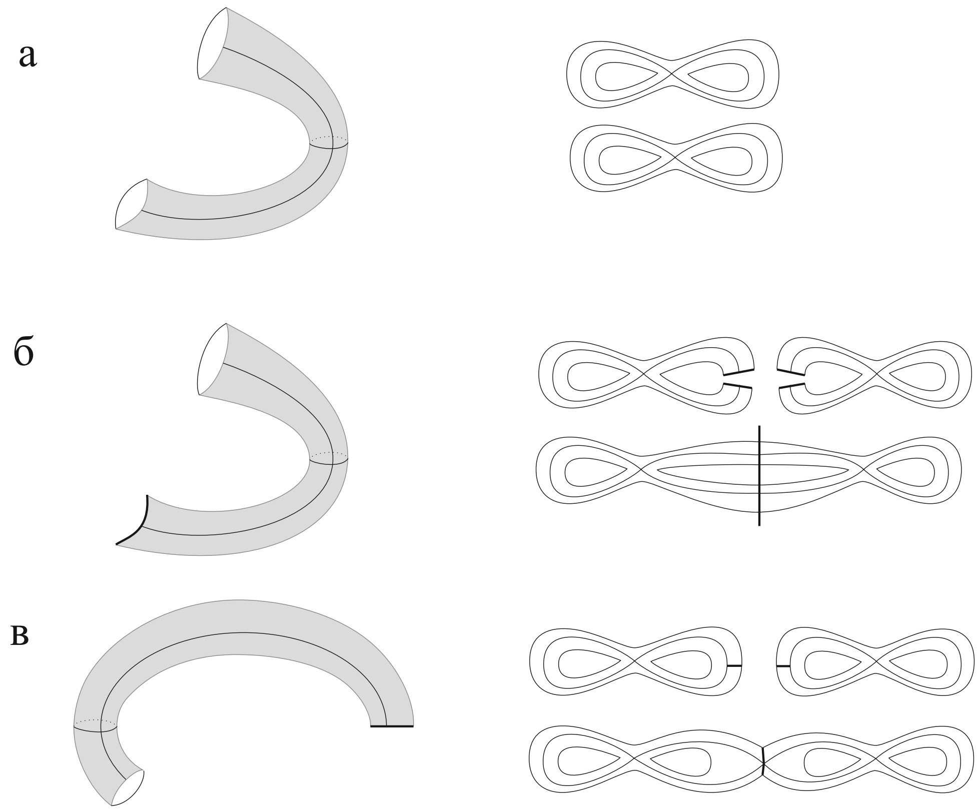


Рис. 2.14: На рисунке изображены двумерные атомы, гомеоморфные прообразам дуг эллипсов для невыпуклых топологических биллиардов, склеенных из областей B. На рисунке а) сверху изображен биллиард, гомеоморфный кольцу, при этом в прообразе дуги эллипса находятся два атома B. При склейках, приводящих к образованию конических точек (рисунки б и в), атомы склеиваются, образуя один длинный атом B. Жирным выделены точки, расположенные на гиперболическом сегменте склейки, образующем конические точки.

Пусть биллиард содержит одну или две пары конических точек, лежащих на одной гиперболе. Такой биллиард можно получить, склеив подходящий биллиард $\Delta_{\alpha e}(2n\tilde{B})$ без конических точек по свободной границе. Результат такой склейки изображен на рисунке ниже: склейка двух экземпляров 2-атомов (и, соответственно, 3-атомов), лежащих в прообразах компонент h_λ в каждом экземпляре биллиардной области $\Delta_{\alpha e}(n\tilde{B})$ даёт длинный атом серии B.

$\square$

2.2.4 Вычисление инвариантов лиувиллевой эквивалентности

Определение 2.7. Пусть биллиард класса Δ может быть получен из биллиарда класса Δ' заменой в элементарных биллиардах дуг эллипсов на дуги гипербол и наоборот. Такие классы биллиардов назовем *двойственными.*

Следующие классы являются двойственными.

- Класс A_2 и класс $\Delta_\alpha(2A_1)$.
- Класс $\Delta_\beta(2A_1')_x$ и класс $\Delta_\beta(2A_1')_c$.
- Класс $\Delta_\beta(2A_2')_{xx}$ и класс $\Delta_\beta((2A_1')_c + (2A_1')_c)$.
- Класс биллиардов, склеенных из областей $\widetilde{B}$ и класс биллиардов, склеенных из биллиардов $\widetilde{A_0}$. При двойственности конические точки типа x переходят в конические точки c и наоборот.

Замечание 23. В дальнейших формулировках и доказательствах примем следующее. Пусть Δ – топологический биллиард. Вырежем из него внутренность достаточно маленького эллипса и для каждой компоненты связности – области эллиптической проекции – построим функцию f. Аналогично, по каждой области гиперболической проекции, – связной компоненте после вырезания из биллиарда внутренности гиперболы (области, содержащей фокусы) – построим функцию g. Если компонент много, то занумеруем соответствующие функции f и g.

Замечание 24. Отметим, что в силу замечаний 11 и 18 некоторые эквивалентные биллиарды с невыпуклыми склейками будут отвечать различным молекулам. Этот новый эффект напрямую следует из того, что вид функций f и g может меняться при переходе от одной эквивалентной области к другой.

Теорема 2.2 (В.В.Ведюшкина [87]). *Инварианты Фоменко-Цишанга – меченые молекулы W^*, описывающие топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 интегрируемых топологических биллиардов (как выпуклых, так и невыпуклых), ограниченных дугами софокусных квадрик и содержащих фокусы этого семейства, изображены на рисунках 2.15. Молекулы двойственных классов получаются из этих молекул заменой функции Λ на $-\Lambda$, а также заменой в графах W функций f на функции g и наоборот.*

Доказательство. Ребра, торы которых соответствуют значениям интеграла $\Lambda < b$, назовем эллиптическими (траектории на этих уровнях касаются эллипсов). Ребра, соответствующие значениям интеграла $\Lambda > b$, назовем гиперболическими.

Пусть молекула не содержит седлового атома. Это равносильно тому, что внутренность биллиарда не содержит точек фокальной прямой. Пусть такой биллиард не содержит конических точек. Тогда соотношения циклов имеют следующий вид: $\lambda_g = -\mu_f = \lambda_A$; $\mu_g = -\lambda_f = -\mu_A$, где базисные циклы (λ_A, μ_A) лежат на эллиптическом торе, $\lambda_f = \lambda_A$; $\mu_f = -\mu_A$, где базисные циклы (λ_A, μ_A) лежат на гиперболическом торе. Тогда матрица склейки на ребре, соответствующем уровню $\Lambda = b$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, если биллиард не содержит невыпуклых склеек,

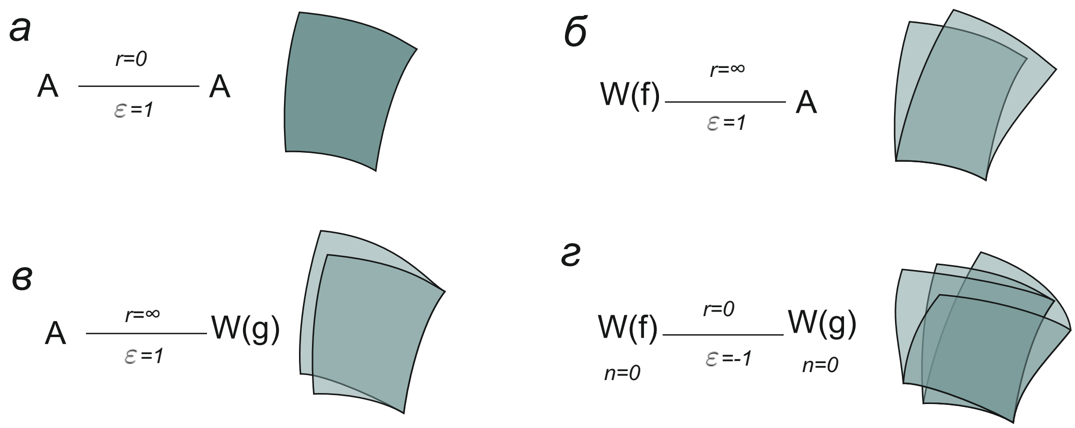


Рис. 2.15: Инварианты Фоменко-Цишанга топологических биллиардов, не содержащих конических точек и фокусов во внутренности области: а) элементарный или выпуклый биллиард, б) биллиард содержит невыпуклые эллиптические склейки, в) биллиард содержит невыпуклые гиперболические склейки, г) биллиард содержит как эллиптические, так и гиперболические невыпуклые склейки.

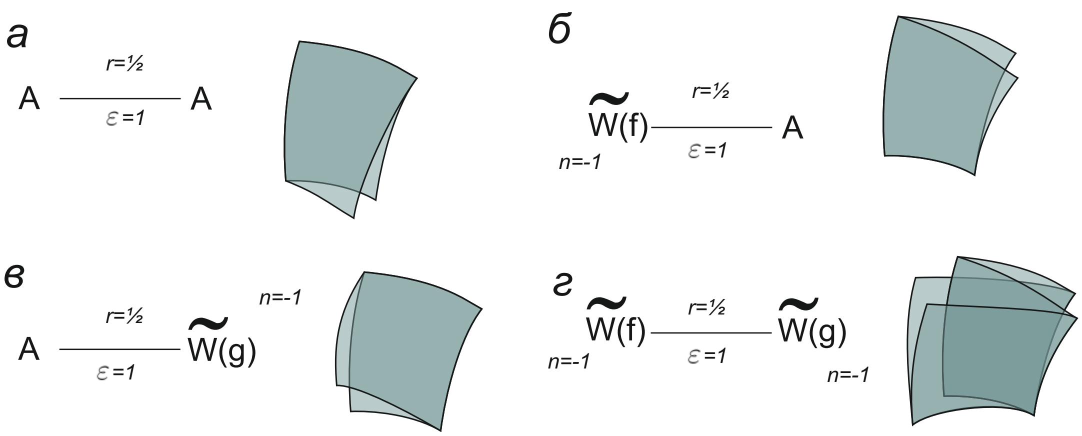


Рис. 2.16: Инварианты Фоменко-Цишанга топологических биллиардов, содержащих одну коническую точку и не содержащих фокусов во внутренности области: а) элементарный или выпуклый биллиард, б) биллиард содержит невыпуклые эллиптические склейки, в) биллиард содержит невыпуклые гиперболические склейки, г) биллиард содержит как эллиптические, так и гиперболические невыпуклые склейки.

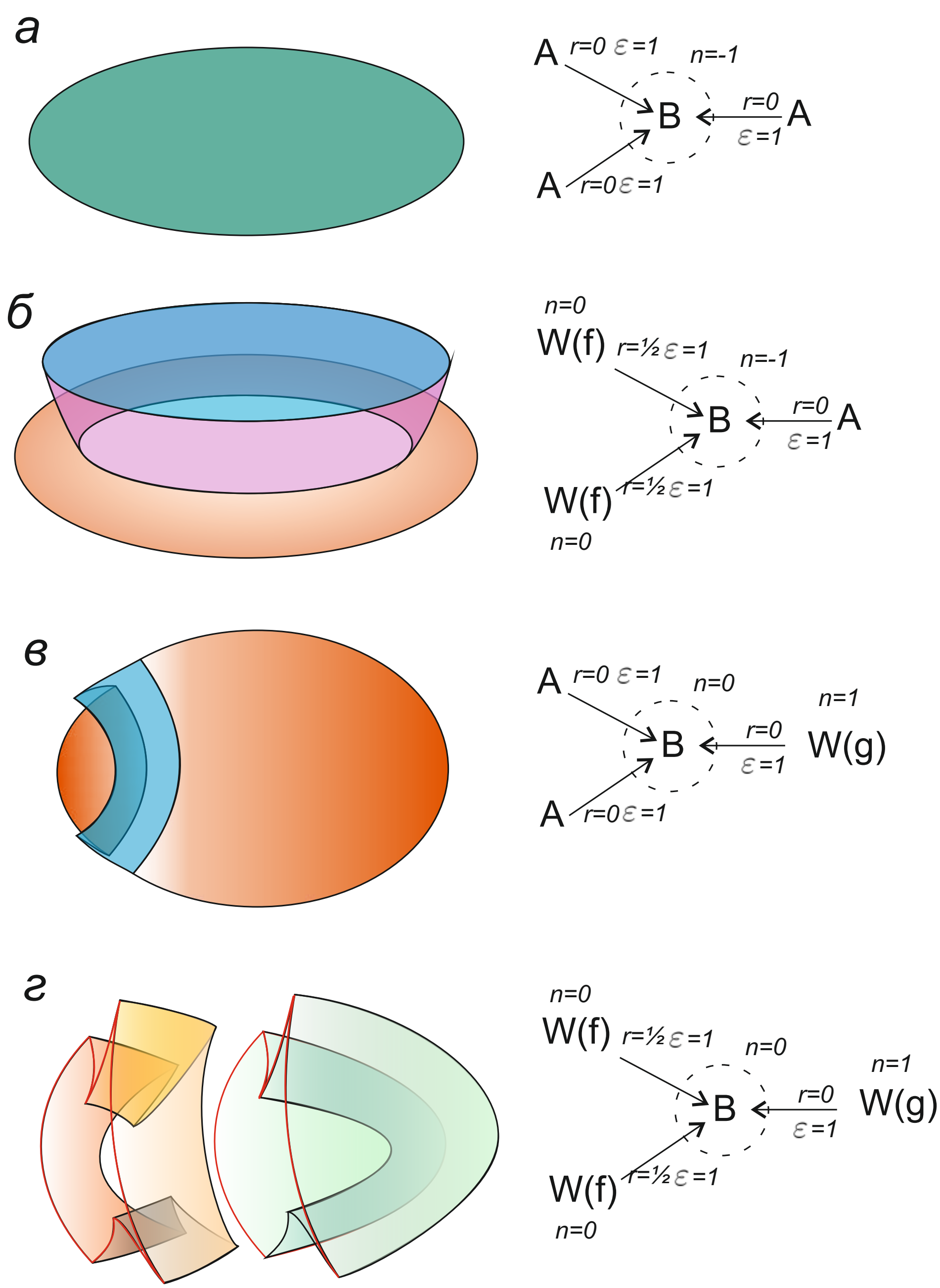


Рис. 2.17: Инварианты Фоменко-Цишанга топологических биллиардов, принадлежащих классу A_2, и содержащих серии $\Delta_\alpha(A_2 + nC_2)$ и $\Delta_\alpha((A_1 + nA_0 + A_1) + 2m(B_1 + nB_0))$: а) элементарный или выпуклый биллиард, б) биллиард содержит невыпуклые эллиптические склейки, в) биллиард содержит невыпуклые гиперболические склейки, г) биллиард содержит как эллиптические, так и гиперболические невыпуклые склейки (в приведенном примере биллиарды необходимо склеить вдоль красной линии).

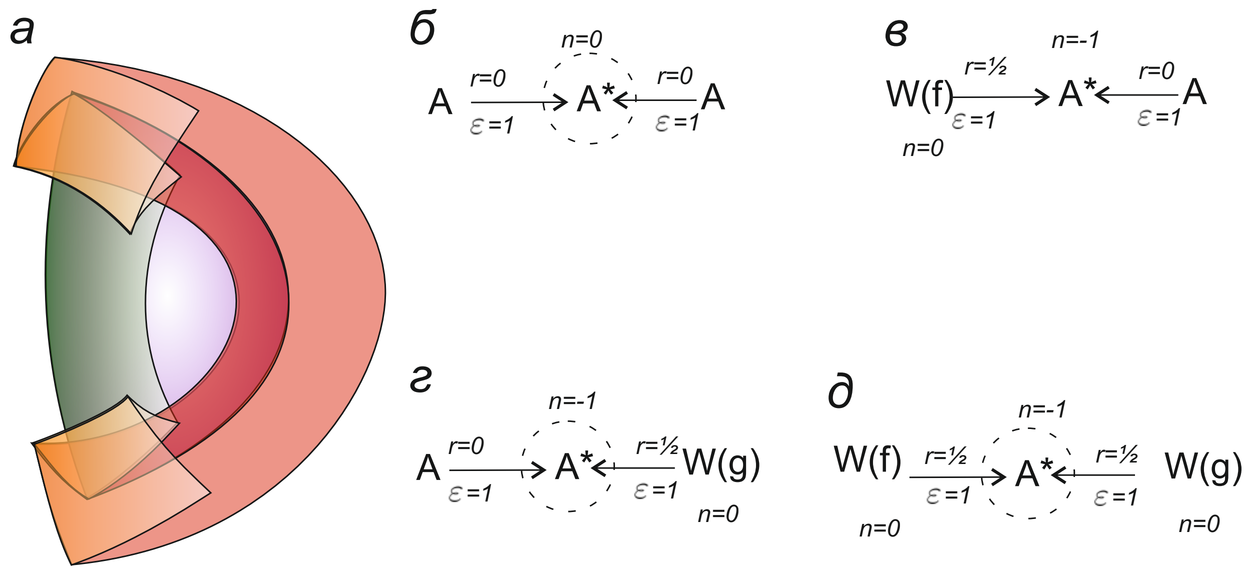


Рис. 2.18: Инварианты Фоменко-Цишанга топологических биллиардов, принадлежащих классу A_1, содержащему серию $\Delta_\alpha(A_1 + nA_0 + mB_1 + 2mnB_0)$: а) схема склейки такого биллиарда, б) элементарный или выпуклый биллиард, в) биллиард содержит невыпуклые эллиптические склейки, г) биллиард содержит невыпуклые гиперболические склейки, д) биллиард содержит как эллиптические, так и гиперболические невыпуклые склейки.

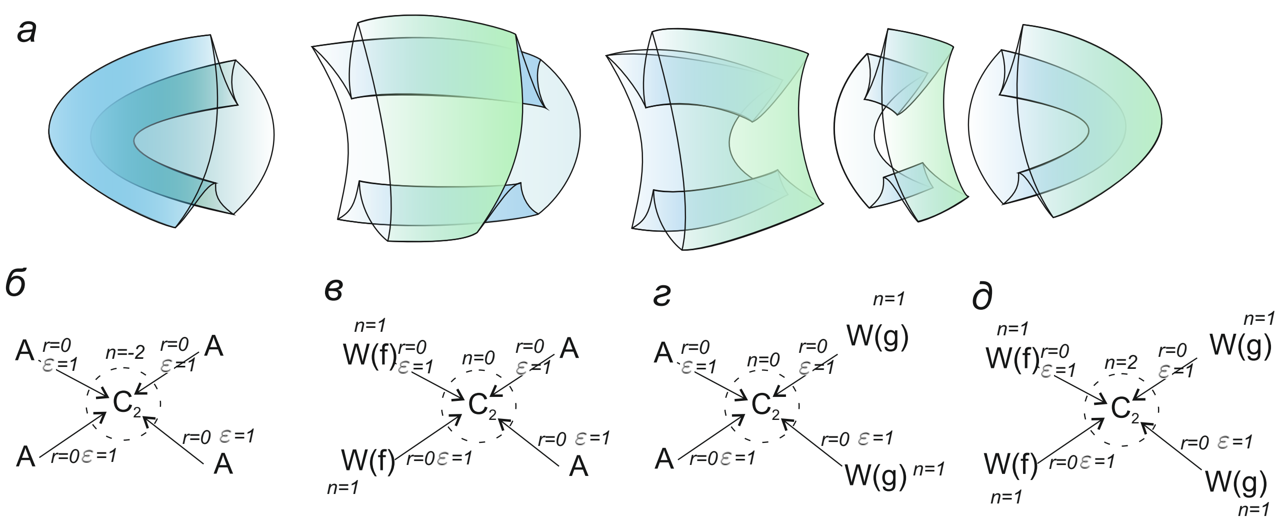


Рис. 2.19: Инварианты Фоменко-Цишанга топологических биллиардов, принадлежащих классу $\Delta_\alpha(2A_2)$, и содержащих серии $\Delta_\alpha(A_2 + 2nC_2 + A_2)$ и $\Delta_\alpha(2(A_1 + nA_0 + A_1 + 2mB_1 + 4mnB_0 + A_1))$: а) схема склейки такого биллиарда, б) элементарный или выпуклый биллиард, в) биллиард содержит невыпуклые эллиптические склейки, г) биллиард содержит невыпуклые гиперболические склейки, д) биллиард содержит как эллиптические, так и гиперболические невыпуклые склейки.

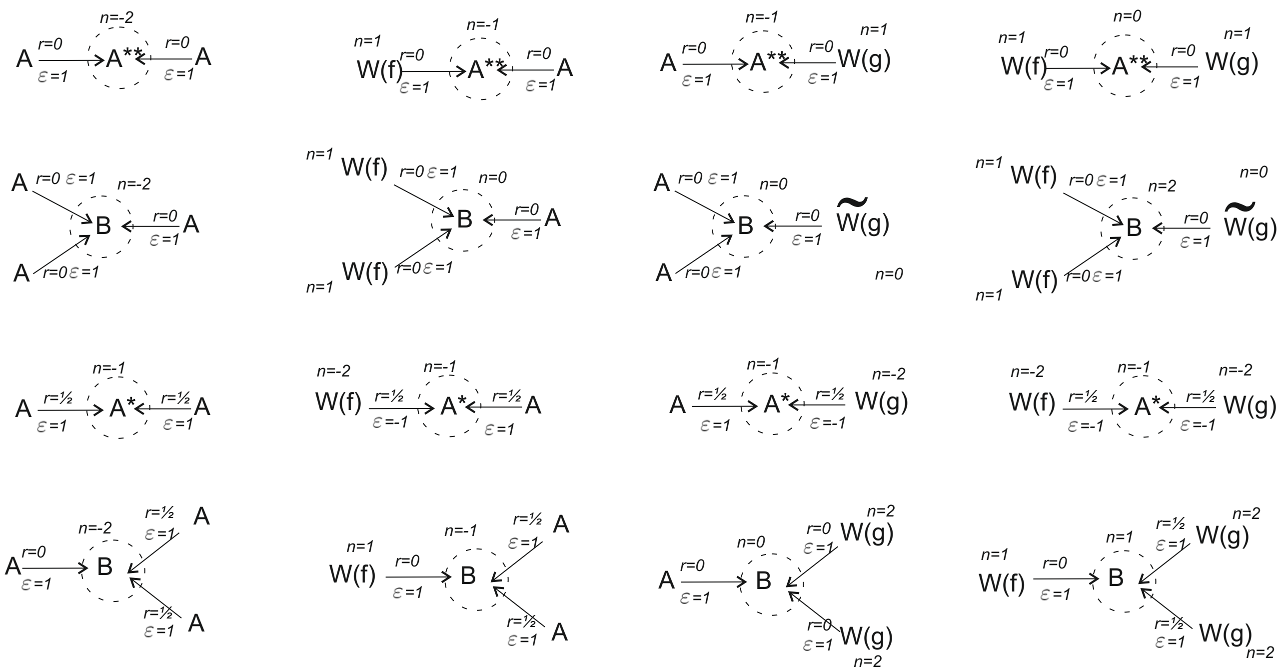


Рис. 2.20: Инварианты Фоменко-Цишанга содержащих фокусы топологических биллиардов с коническими точками. В первой строке инварианты биллиардов, принадлежащих классу $\Delta_\beta(2A_1)_{yy}$ (серия $\Delta_\beta(2(A_1+nA_0+mB_1+2mnB_0))_{yy}$), в во второй строке для биллиардов, принадлежащих классам $\Delta_\beta(2A_1')_x$ (серия $\Delta_\beta(2(A_1'+nA_0'+mB_1'+2mnB_0))_x$) и $\Delta_\beta(2A_1')_c$ (серии $\Delta_\beta(2(A_1'+nA_0'+mB_1'+2mnB_0))_c$ и $\Delta_\beta(2A_1'+nC_1)_c$), в третьей строке для биллиардов, принадлежащих классу $\Delta_\beta(2A_1')_{xyc}$ (серия $\Delta_\beta(2(A_1'+nA_0'+mB_1'+2mnB_0))_{xyc}$), в четвертой строке для биллиардов, принадлежащих классам $\Delta_\beta((2A_1')_c+(2A_1')_c)$ (серии $\Delta_\beta(2A_1'+2nC_1+2A_1')_{cc}$ и $\Delta_\beta(2((A_1'+2mB_1'+A_1')+2n(A_0'+2mB_0)))_{cc}$) и $\Delta_\beta(2A_2')_{xx}$ (серии $\Delta_\beta(2(A_2'+nB_2''))_{xx}$ и $\Delta_\beta(2(((A_1'+nA_0'+A_1')+2m(B_1'+nB_0))))_{xx}$).

вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, если биллиард содержит невыпуклые склейки только одного вида (т.е. только эллиптические или только гиперболические), и вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, если биллиард содержит невыпуклые склейки обоих видов.

Пусть биллиард, внутренность которого не содержит точек фокальной прямой, содержит одну коническую точку (типа y). Тогда любая матрица склейки, как видно из рисунка 2.21, имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

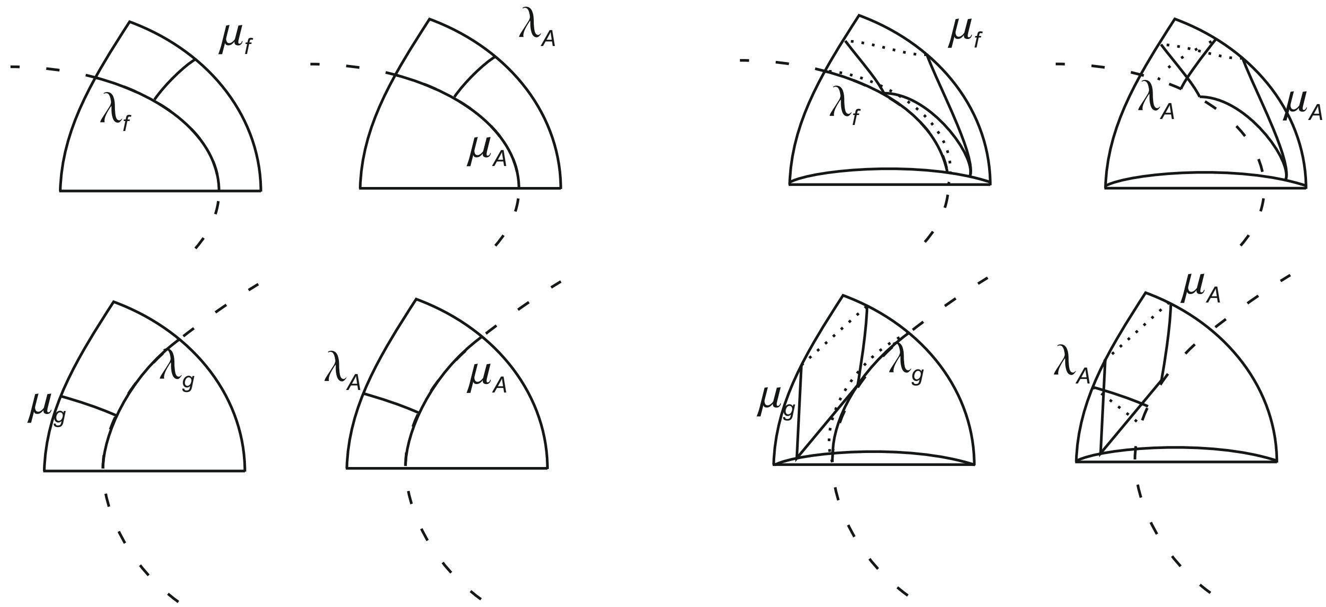


Рис. 2.21: Циклы для биллиардов классов A, внутренность которых не содержит фокусов.

Пусть теперь внутренность биллиарда содержит точки фокальной прямой. Ориентируем все ребра молекулы по направлению к седловому атому, отвечающему значению $\Lambda = b$. Базисные циклы, соответствующие этому атому на эллиптических торах, обозначим через (λ_s^-, μ_s^-), а на гиперболических через (λ_s^+, μ_s^+).

Для биллиардов класса A_2 имеем следующие соотношения циклов (см. рис. 2.22): $\lambda_s^- = \lambda_f + 2\mu_f = -2\lambda_A + \mu_A$; $\mu_s^- = -\mu_f = \lambda_A$; $\lambda_s^+ = \lambda_g + \mu_g = -\lambda_A + \mu_A$; $\mu_s^+ = \lambda_g = \mu_A$; Следовательно, на эллиптических ребрах матрицы склейки между седловыми атомами и семьей $W(f)$ имеют вид $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а между седловым атомом и атомами A вид $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. На гиперболическом ребре матрица склейки между седловым атомом и семьей $W(g)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, и между

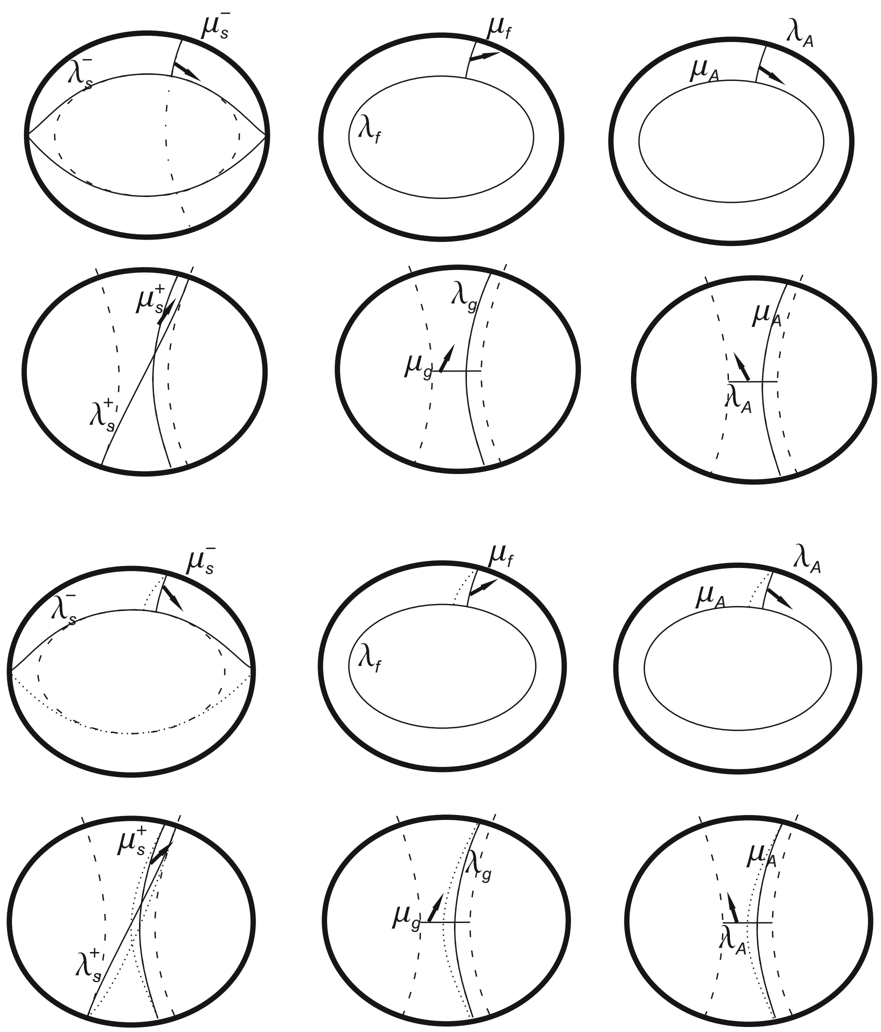


Рис. 2.22: Циклы для биллиардов классов A_2 (сверху) и $\Delta_\alpha(2A_2)$ (снизу).

седловым атомом и атомом A вид $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Для биллиардов класса $\Delta_\alpha(2A_2)$ имеем следующие соотношения циклов (см. рис. 2.22): $\lambda_s^- = \lambda_f + \mu_f = -\lambda_A + \mu_A$; $\mu_s^- = -\mu_f = \lambda_A$; $\lambda_s^+ = \lambda_g + \mu_g = -\lambda_A + \mu_A$; $\mu_s^+ = \lambda_g = \mu_A$; Следовательно, на эллиптических ребрах матрицы склейки между седловым атомом и семьями $W(f)$ имеют вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, и между седловым атомом и атомами A вид $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. На гиперболических ребрах матрицы склейки между седловым атомом и семьями $W(g)$ имеют вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, и между седловым атомом и атомом A вид $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Для биллиардов класса A_1 имеем следующие соотношения циклов (см. рис. 2.23): $\lambda_s^- = \lambda_f + 2\mu_f = -2\lambda_A + \mu_A$; $\mu_s^- = -\mu_f = \lambda_A$; $\lambda_s^+ = \lambda_g + 2\mu_g = -2\lambda_A + \mu_A$; $\mu_s^+ = \lambda_g + \mu_g = -\lambda_A + \mu_A$;

Следовательно, на эллиптических ребрах матрицы склейки между седловыми атомом и семьей $W(f)$ имеют вид $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а между седловым атомом и атомом A вид $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. На гиперболическом ребре матрица склейки между седловым атомом и семьей $W(g)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, и между седловым атомом и атомом A вид $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Для биллиардов класса $\Delta_\beta(2A_1)_{yy}$ имеем следующие соотношения циклов (см. рис. 2.23): $\lambda_s^- = \lambda_f + \mu_f = -\lambda_A + \mu_A$; $\mu_s^- = -\mu_f = \lambda_A$; $\lambda_s^+ = \lambda_g + \mu_g = -\lambda_A + \mu_A$; $\mu_s^+ = 2\lambda_g + \mu_g = -\lambda_A + 2\mu_A$;

Следовательно, на эллиптических ребрах матрицы склейки между седловыми атомом и семьей $W(f)$ имеют вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а между седловым атомом и атомом A вид $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. На гиперболическом ребре матрица склейки между седловым атомом и семьей $W(g)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, и между седловым атомом и атомом A вид $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

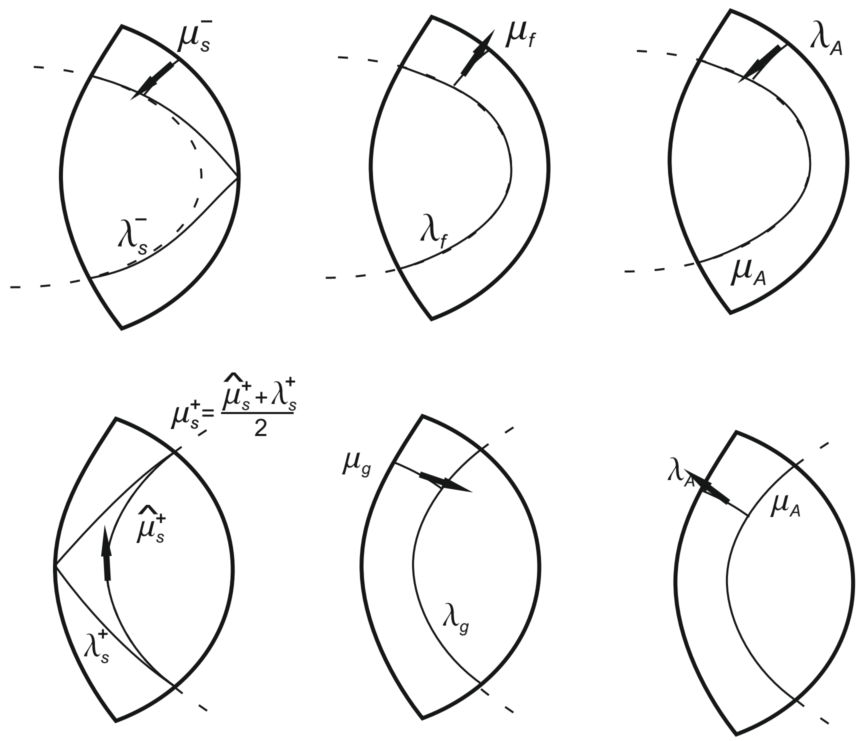
Пусть биллиард принадлежит классу $\Delta_\beta(2A_1')_c$. Тогда соотношения циклов имеют вид (см. рис. 2.24): $\lambda_s^- = \lambda_f + \mu_f = -\lambda_A + \mu_A$; $\mu_s^- = -\mu_f = \lambda_A$; $\lambda_s^+ = \mu_g = \mu_A$; $\mu_s^+ = \lambda_g = \lambda_A + 2\mu_A$;

Следовательно, на эллиптических ребрах матрицы склейки между седловыми атомом и семьей $W(f)$ имеют вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а между седловым атомом и атомами A вид $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. На гиперболическом ребре матрица склейки между седловым атомом и семьей $\widetilde{W(g)}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, и между седловым атомом и атомом A вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Пусть биллиард принадлежит классу $\Delta_\beta(2A_1')_{xyc}$. Тогда соотношения циклов имеют вид (см. рис. 2.24): $\lambda_s^- = 2\lambda_f - \mu_f = \lambda_A + 2\mu_A$; $\mu_s^- = \lambda_f - \mu_f = \lambda_A + \mu_A$; $\lambda_s^+ = 2\lambda_g - \mu_g = \lambda_A + 2\mu_A$; $\mu_s^+ = -\lambda_g = -\mu_A$;

Следовательно, на эллиптическом ребре матрица склейки между седловыми атомом и се-

а)



б)

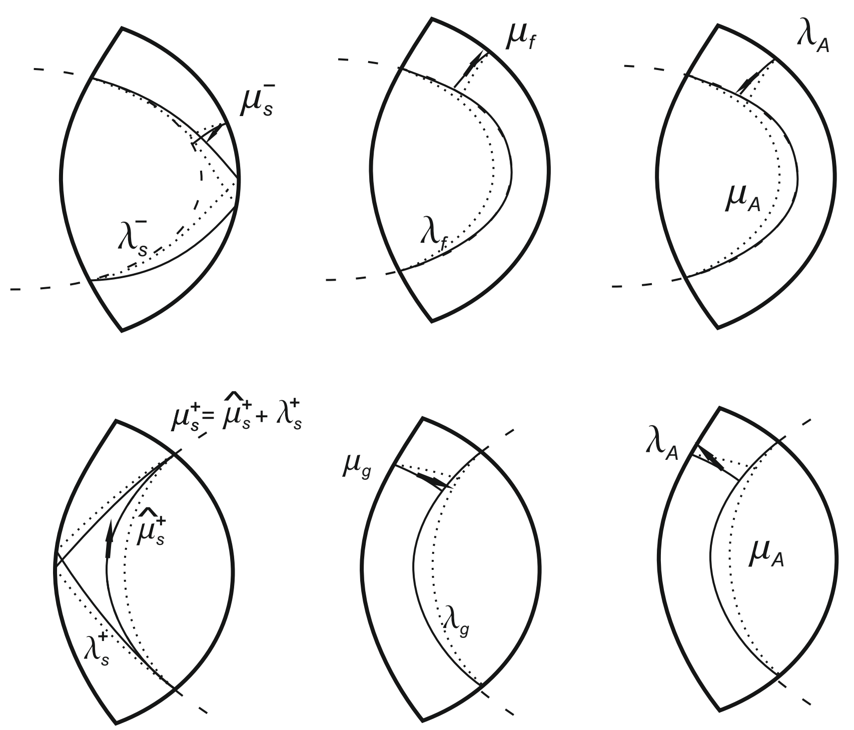


Рис. 2.23: Циклы для биллиардов классов A_1 (а) и $\Delta_\beta(2A_1)_{yy}$(б).

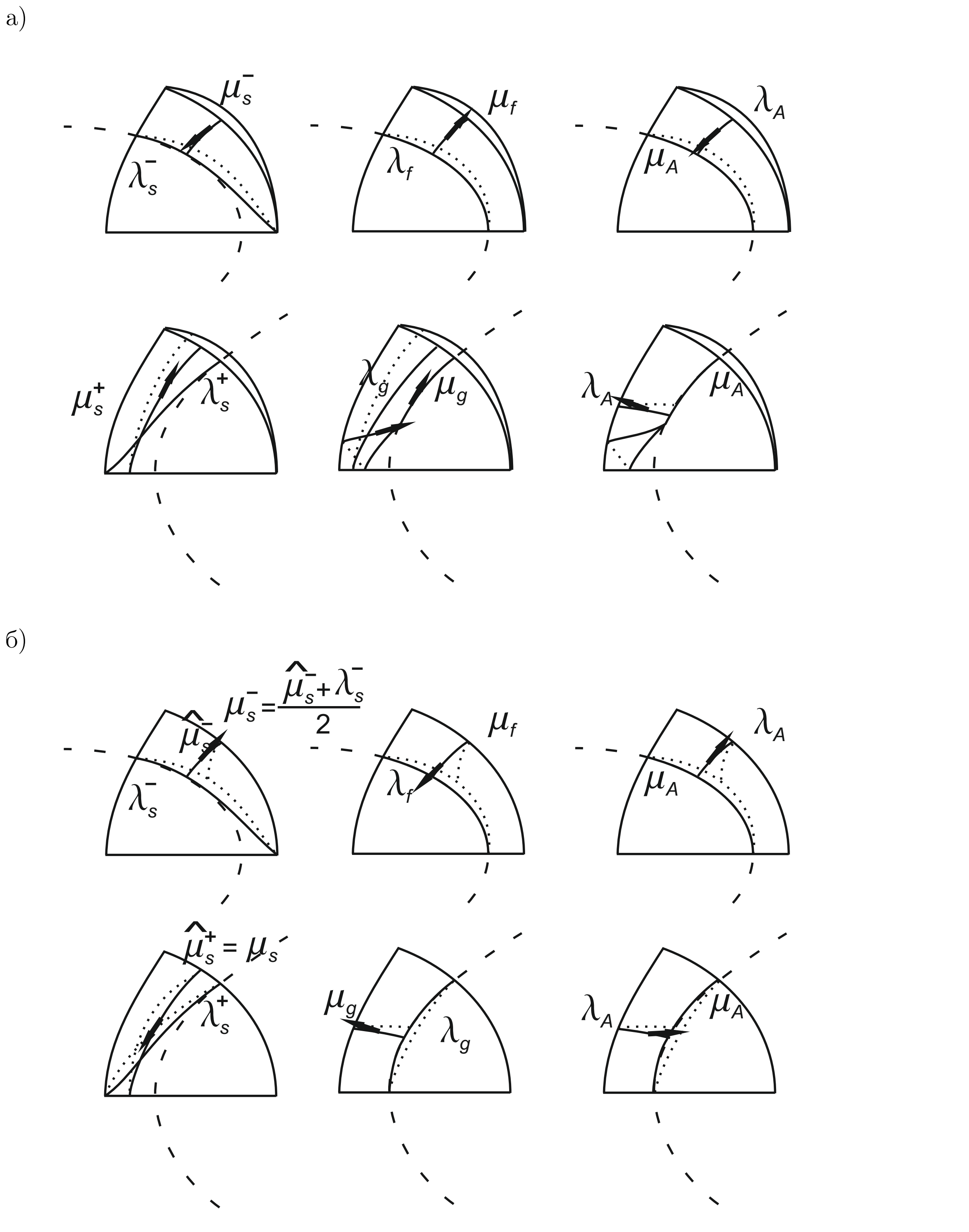


Рис. 2.24: Циклы для биллиардов классов $\Delta_\beta(2A_1')_c$ (а) и $\Delta_\beta(2A_1')_{xyc}$ (б).

мьей $W(f)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, а между седловым атомом и атомом A вид $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. На гиперболическом ребре матрица склейки между седловым атомом и семьей $W(g)$ имеет вид

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, и между седловым атомом и атомом A вид $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

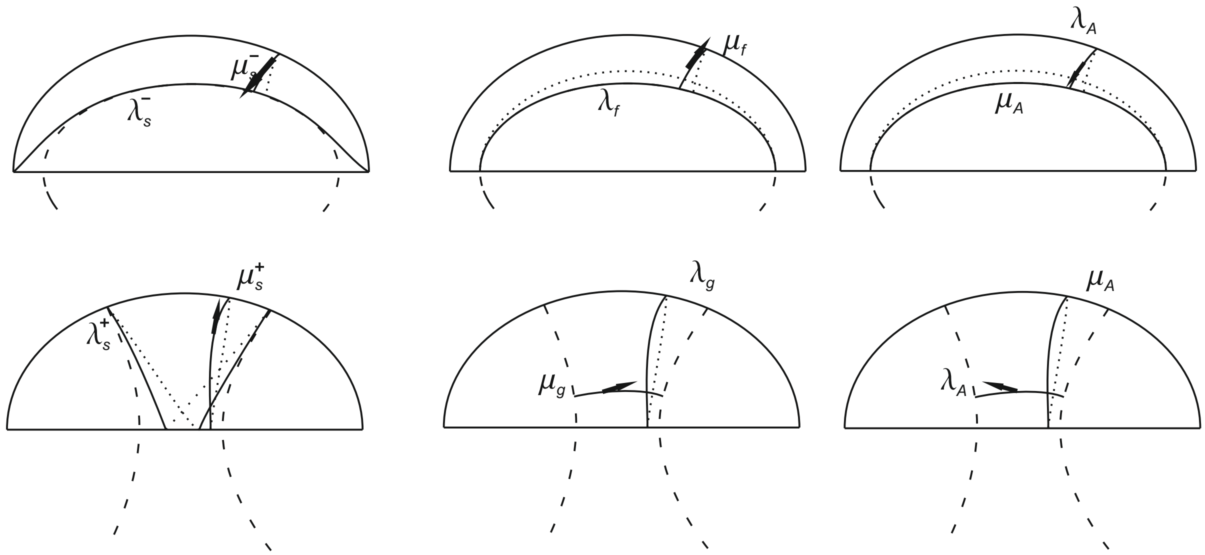


Рис. 2.25: Циклы для биллиарда класса $\Delta_\beta(2A_2')_{xx}$.

Пусть биллиард принадлежит классу $\Delta_\beta(2A_2')_{xx}$. Тогда соотношения циклов имеют вид (см. рис. 2.25): $\lambda_s^- = \lambda_f + \mu_f = -\lambda_A + \mu_A$; $\mu_s^- = -\mu_f = \lambda_A$; $\lambda_s^+ = 2\lambda_g + \mu_g = -\lambda_A + 2\mu_A$; $\mu_s^+ = \lambda_g = \mu_A$;

Следовательно, на эллиптическом ребре матрица склейки между седловыми атомом и семьей $W(f)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а между седловым атомом и атомом A вид $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. На гиперболическом ребре матрица склейки между седловым атомом и семьей $W(g)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, и между седловым атомом и атомом A вид $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

□

Теорема 2.3 ([87]). *Пусть внутренность интегрируемого топологического биллиарда (выпуклого или невыпуклого), ограниченного дугами софокусных квадрик, имеет пустое пересечение с фокальной прямой. Тогда инварианты Фоменко-Цишанга (меченые молекулы) W^*, описывающие топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3, имеют вид, изображенный на рисунке 2.26.*

Доказательство. Пусть биллиард гомеоморфен диску и не содержит конических точек. Тогда соотношения циклов имеют следующий вид:

$\lambda_g = -\mu_f = \lambda_A$; $\mu_g = -\lambda_f = -\mu_A$, где базисные циклы (λ_A, μ_A) лежат на эллиптическом торе, $\lambda_f = \lambda_A$; $\mu_f = -\mu_A$, где базисные циклы (λ_A, μ_A) лежат на гиперболическом торе. Тогда матрица склейки на ребре, соответствующем уровню $\Lambda = b$, имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, если биллиард не содер-

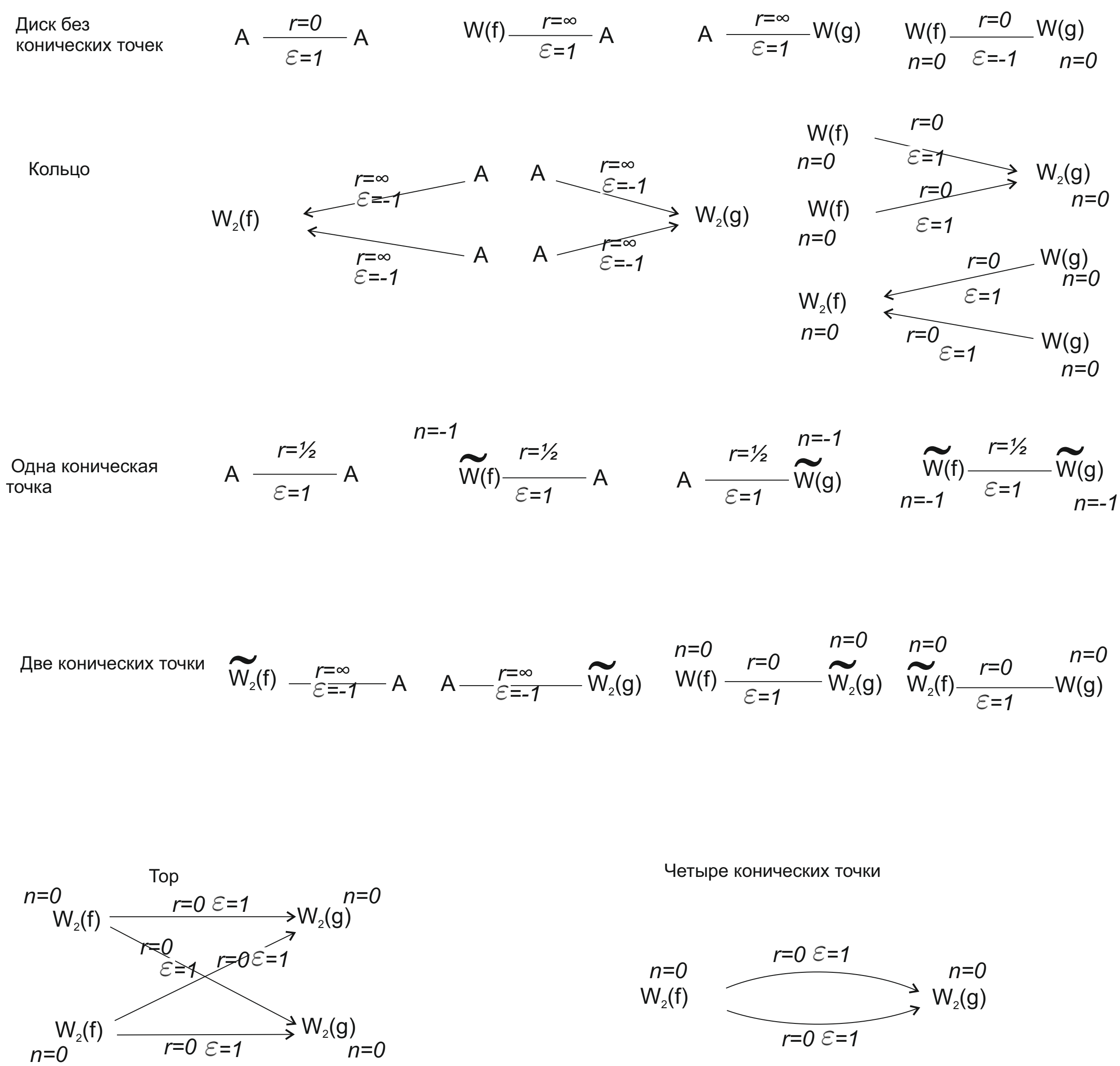


Рис. 2.26: Инварианты Фоменко-Цишанга топологических биллиардов, внутренность которых имеет пустое пересечение с фокальной прямой

жит невыпуклых склеек, вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, если биллиард содержит невыпуклые склейки только одного вида (т.е. только эллиптические или только гиперболические), и вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, если биллиард содержит невыпуклые склейки обоих видов.

Пусть биллиард содержит одну коническую точку (типа y). Тогда любая матрица склейки, как видно из рисунка, имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пусть биллиард гомеоморфен кольцу (серии $\Delta_{\alpha h}(n\tilde{(B)})$ или $\Delta_{\alpha e}(n\tilde{(B)}))$ или же содержит две конические точки (серии $\Delta_{\beta h}(n\tilde{(B)})$ или $\Delta_{\beta e}(n\tilde{(B)}))$.

Как видно из рисунка, для таких биллиардов соотношения циклов имеют вид: $\lambda_g = \mu_f = -\lambda_A$; $\mu_g = -\lambda_f = \mu_A$.

Матрицы склейки между семьями W_2 $(\widetilde{W_2})$ и атомами A имеют вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а между семьями W_2 $(\widetilde{W_2})$ и семьями W вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

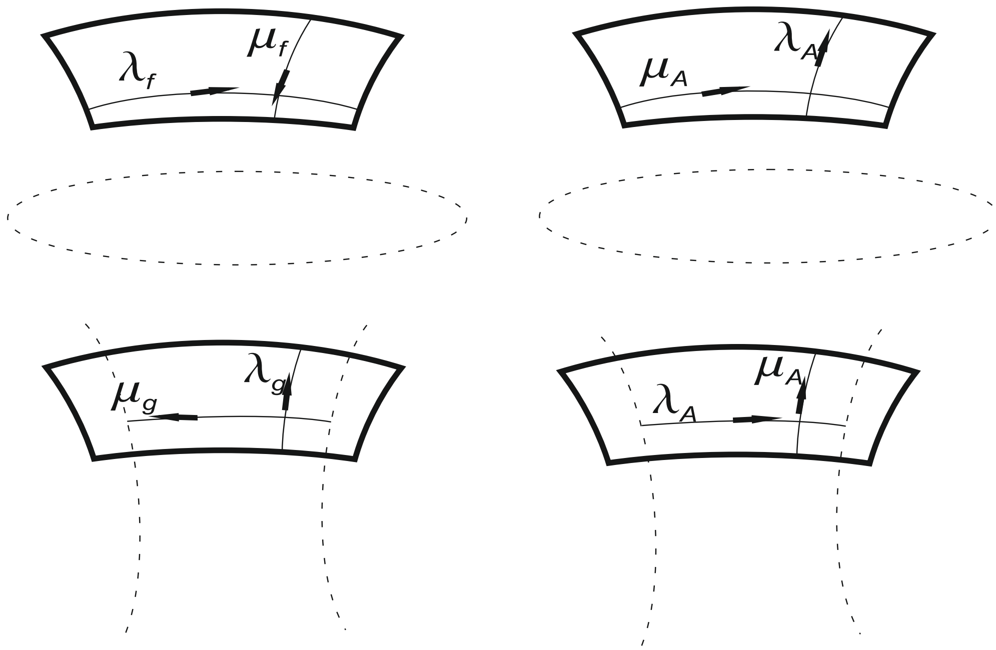
Пусть биллиард гомеоморфен тору $\Delta_{\alpha eh}(n\tilde{(B)})$ или содержит четыре конические точки $\Delta_{\beta}(n\tilde{(B)})_{yyy}$

Как видно из рисунка 2.2.4, для таких биллиардов соотношения циклов имеют вид: $\lambda_g = \mu_f$; $\mu_g = \lambda_f$.

Матрицы склейки принимают вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

□

а)



б)

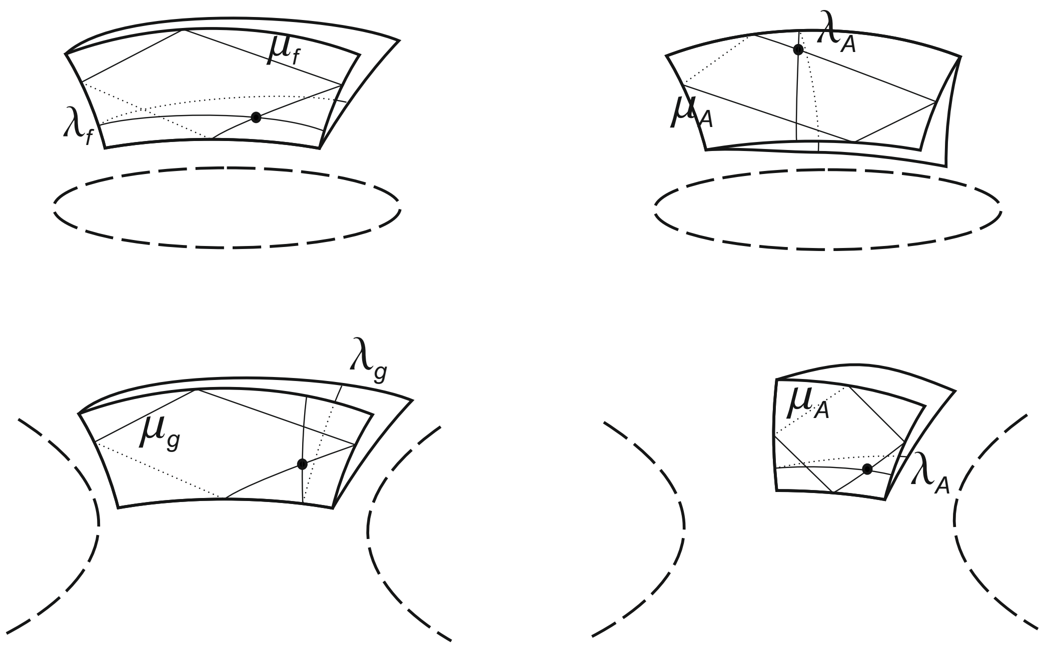


Рис. 2.27: Циклы для гомеоморфных дискам биллиардов, склеенных из биллиардов B_0.

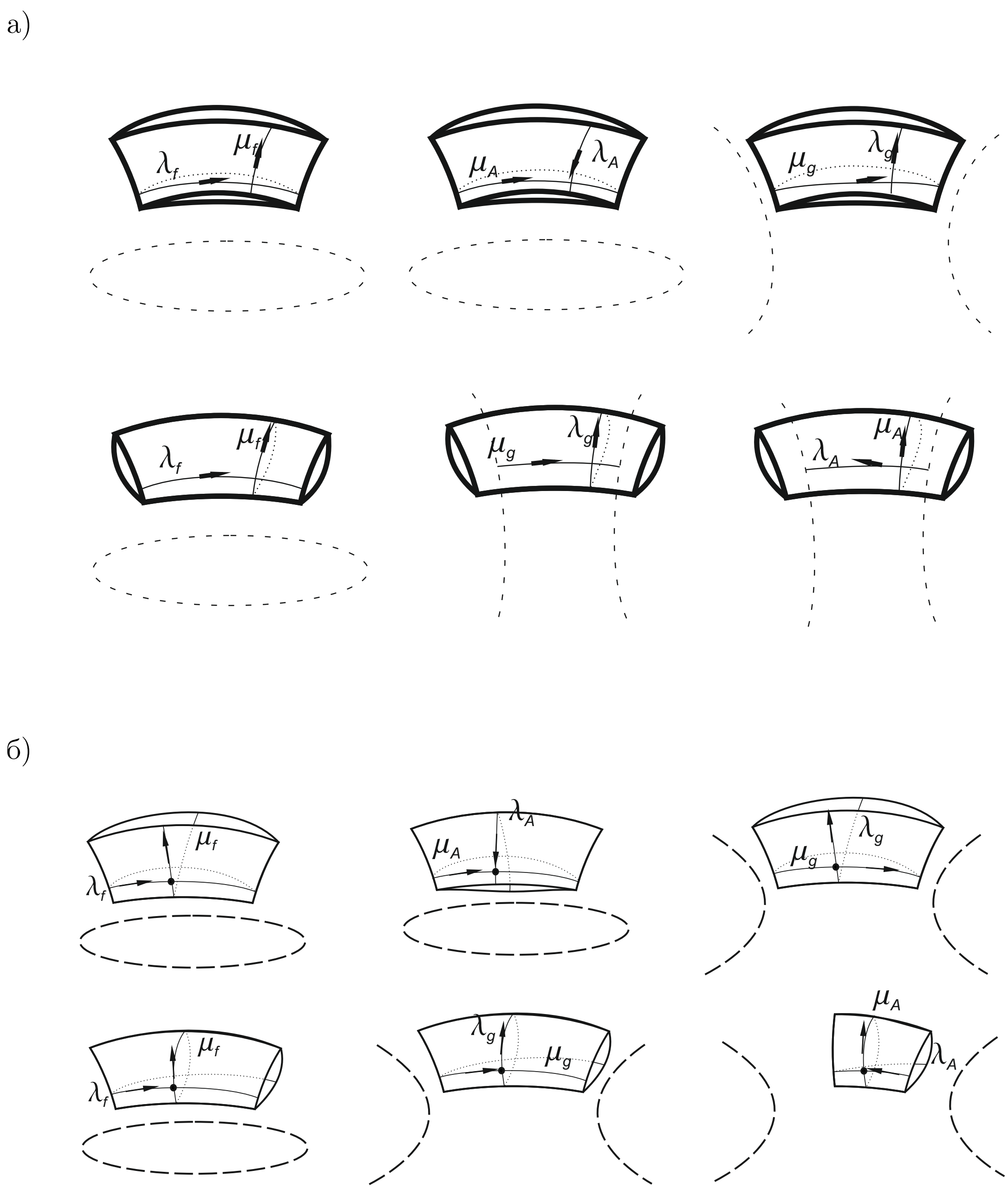


Рис. 2.28: Циклы для биллиардов, склеенных из биллиардов B_0, гомеоморфных кольцу (слева) и содержащих две конические точки (справа).

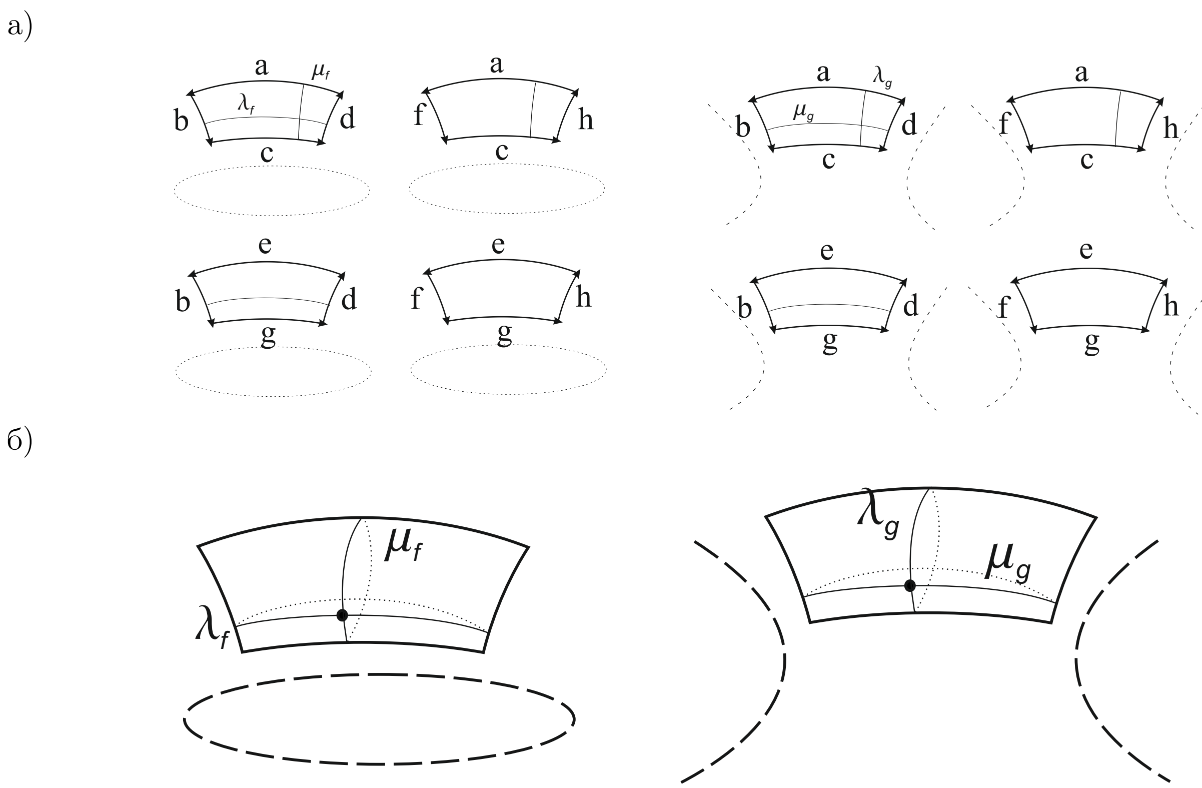


Рис. 2.29: Циклы для гомеоморфного тору биллиарда (а). Одинаковыми буквами со стрелками помечены эллиптические и гиперболические склейки. Циклы для биллиарда с четырьмя коническими точками (б).

Теорема 2.4 ([87]). *Инварианты Фоменко-Цишанга – меченые молекулы W^*, описывающие топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 ограниченных дугами софокусных квадрик интегрируемых топологических биллиардов (как выпуклых так и невыпуклых), склеенных из биллиардов серий B и C, внутренность которых имеет непустое пересечение с фокальной прямой, изображены на рисунках 2.30 (биллиард не содержит конических точек),2.31, 2.32,2.33. Молекулы двойственных классов (склеенных из биллиардов $\widetilde{A_0}$) получаются из этих молекул заменой функции Λ на $-\Lambda$, а также заменой в графах W функций f на функции g и наоборот.*

Замечание 25. Напомним определения чисел k_1, k_2 и k для таких биллиардов. Рассмотрим пересечение внутренности биллиарда Δ с фокальной прямой. Данное пересечение гомеоморфно несвязному объединению k_1 отрезков и k_2 окружностей. Положим число $k = k_1 + 2k_2$.

Доказательство. Для биллиардов, не содержащих конических точек, легко понять, что соотношения циклов на граничных торах имеют вид: $\lambda_s^- = \mu_f = -\lambda_A$; $\mu_s^- = \lambda_f = -\mu_A$; $\lambda_s^+ = \lambda_g = \mu_A$; $\mu_s^+ = -\mu_g = \lambda_A$.

Следовательно, на эллиптическом ребре матрица склейки между седловым атомом и семьёй $W(f)$ имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а между седловым атомом и атомом A вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. На гиперболическом ребре матрица склейки между седловым атомом и семьей $W(g)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, и между седловым атомом и атомом A вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Пусть биллиард содержит одну коническую точку. Выберем циклы, как показано на рис. 2.34.

Соотношения циклов для биллиарда с одной конической точкой имеют следующий вид:

$\lambda_s^- = -\lambda_f + 2\mu_f = -\lambda_A$; $\mu_s^- = \mu_f = \mu_A$; $\lambda_s^+ = \lambda_g = \mu_A$; $\mu_s^+ = -\mu_g = \lambda_A$;

Следовательно, на эллиптическом ребре матрица склейки между седловым атомом и семьёй $\widetilde{W(f)}$ имеют вид $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а между седловым атомом и атомом A вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. На гиперболическом ребре матрица склейки между седловым атомом и семьей $W(g)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, и между седловым атомом и атомом A вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Пусть биллиард содержит две конических точки.

В случае, когда эти конические точки расположены на одном эллипсе, циклы выбираются аналогично предыдущему случаю. Получаем, что если биллиард содержит две точки одного типа, то $\lambda_s^- = \mu_f = -\lambda_A$; $\mu_s^- = \lambda_f + \mu_f = \mu_A$; Это означает, что на эллиптическом ребре между семьёй $W(f)$ и седловым атомом матрица склейки принимает вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, а между атомом A и седловым атомом вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

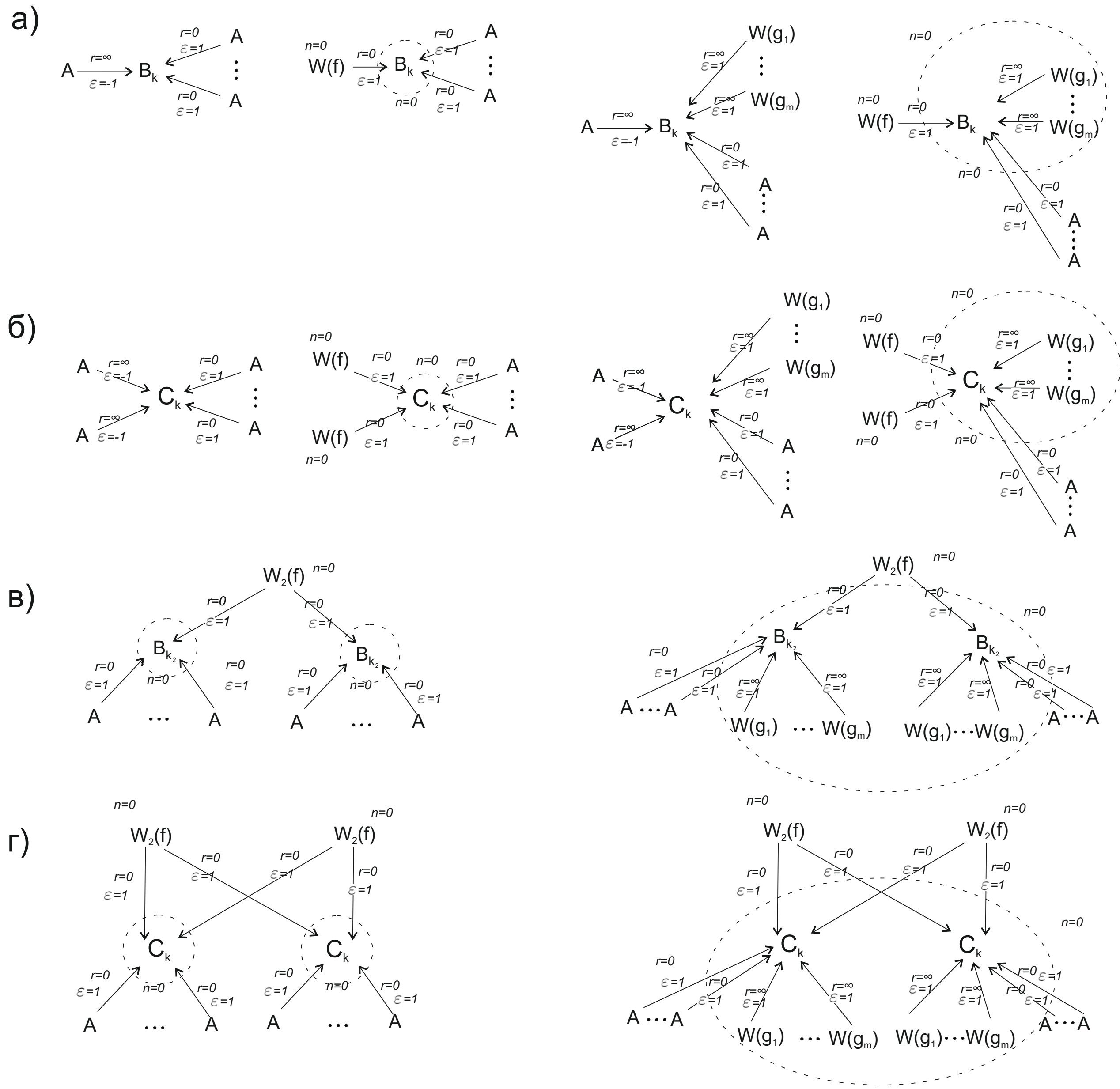


Рис. 2.30: Инварианты Фоменко-Цишанга топологических биллиардов, склеенных из биллиардов серии B и не содержащих конических точек. На рисунке а) изображены молекулы биллиарда, гомеоморфного диску, на рисунках б) и в) биллиардов, гомеоморфных кольцам с гиперболическими и невыпуклыми эллиптическими склейками соответственно, на рисунке г) биллиарда, гомеоморфного тору.

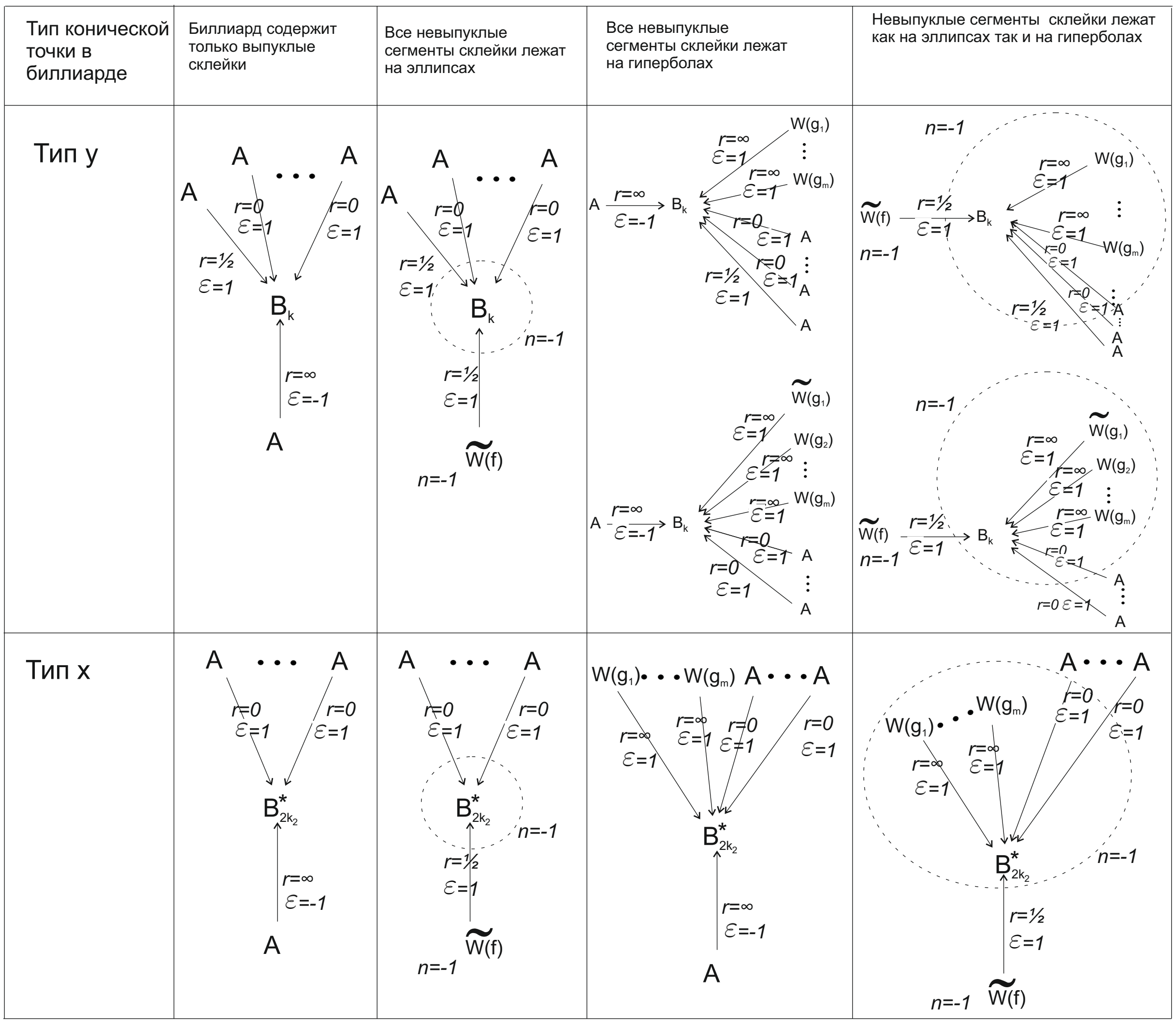


Рис. 2.31: Инварианты Фоменко-Цишанга топологических биллиардов, склеенных из биллиардов серии B и содержащих одну коническую точку.

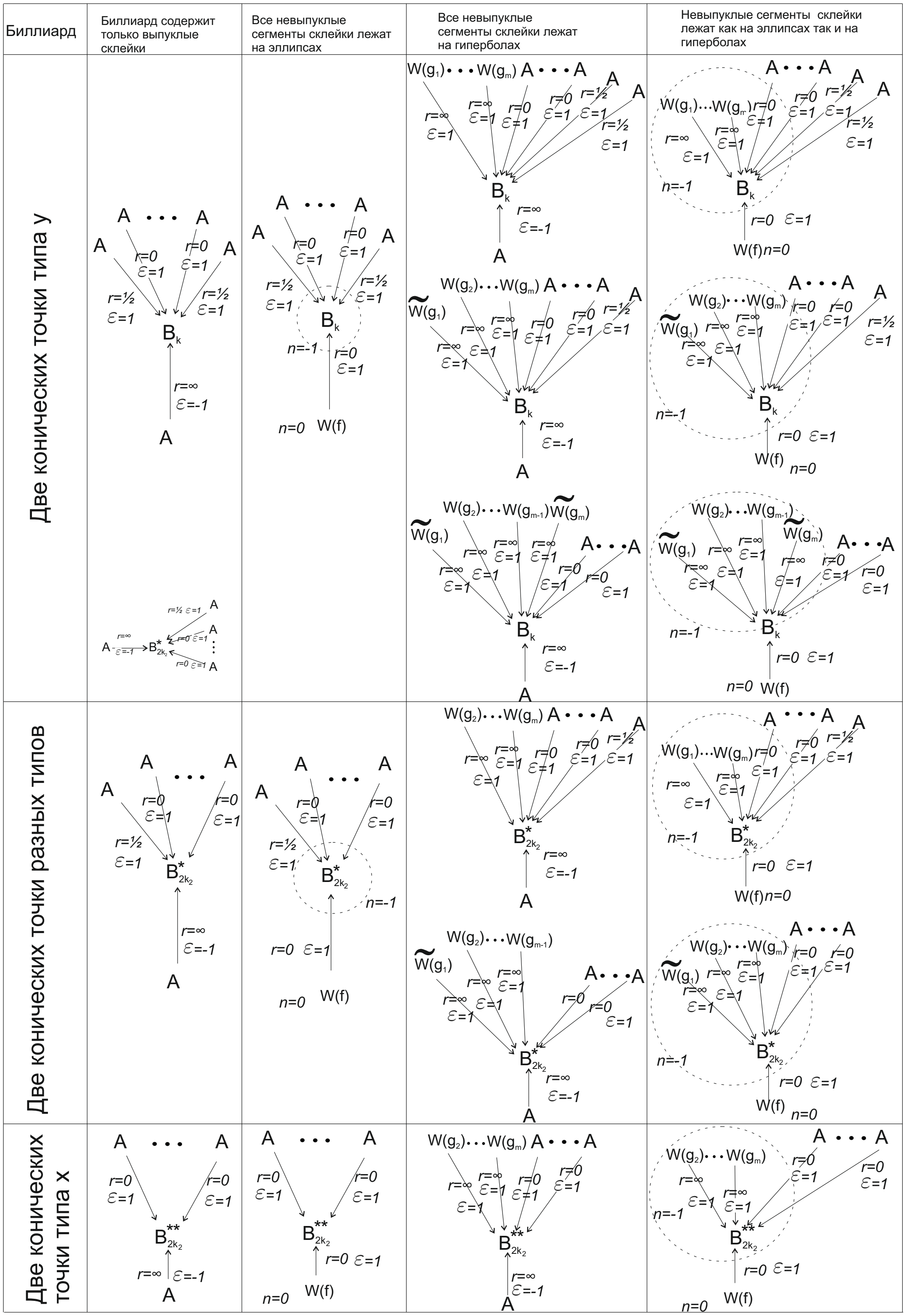


Рис. 2.32: Инварианты Фоменко-Цишанга топологических биллиардов, склеенных из биллиардов серии B и содержащих две конических точки, лежащих на одной дуге эллипса.

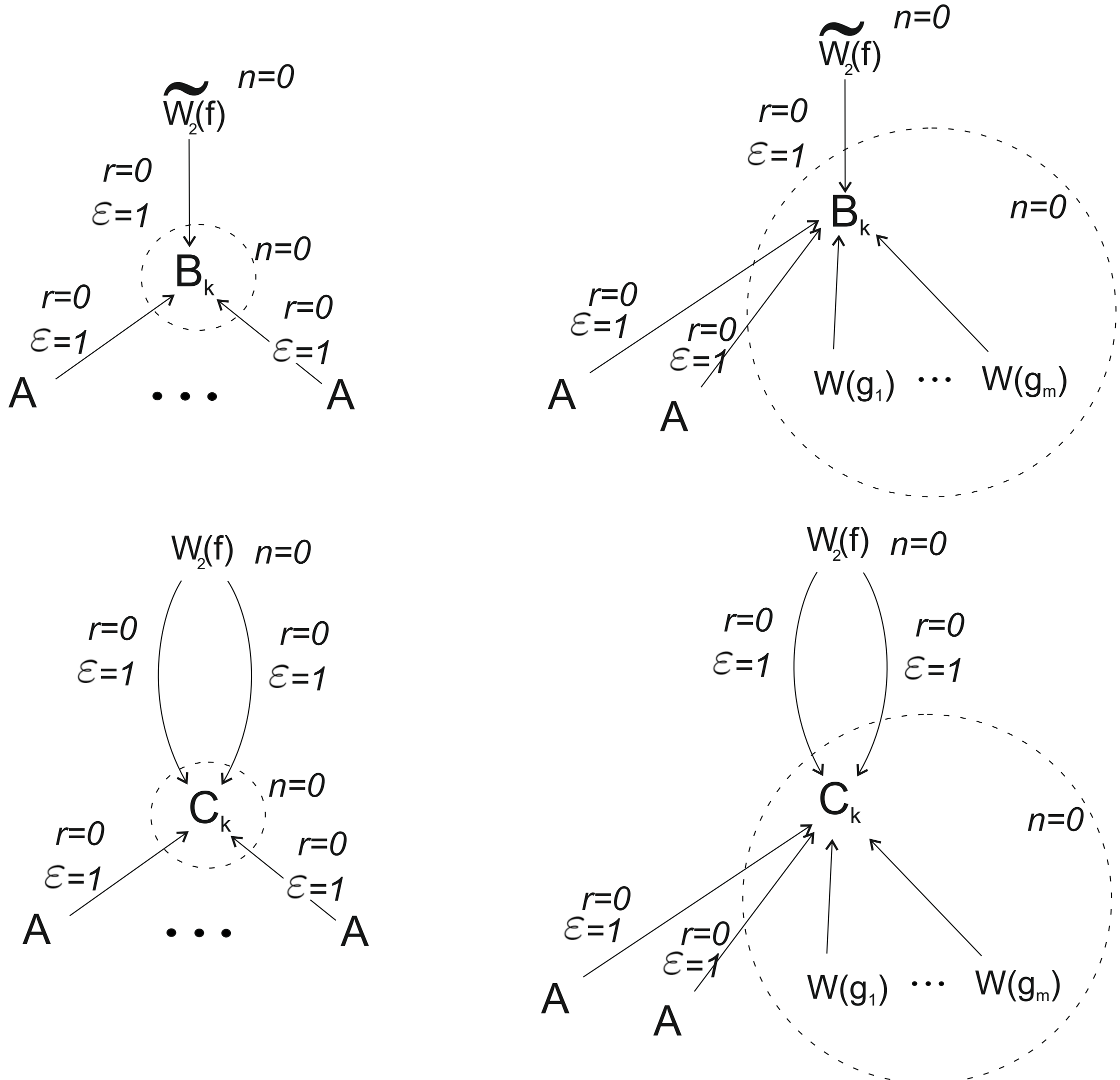
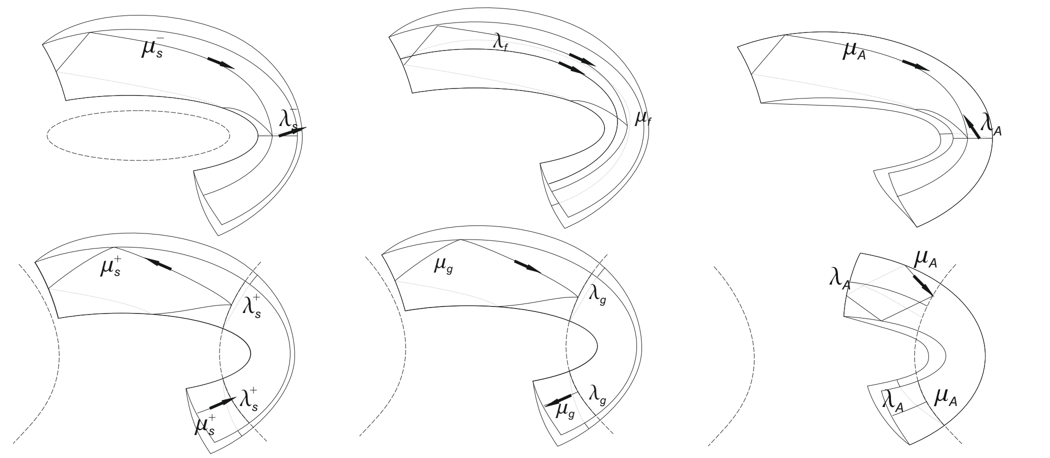


Рис. 2.33: Инварианты Фоменко-Цишанга топологических биллиардов, склеенных из биллиардов серии B и содержащих парные конические точки. Метки внутри семей равны $r = \infty$, $\varepsilon = 1$. Сверху изображены молекулы для биллиардов, содержащих две конические точки, снизу – для биллиардов с четырьмя коническими точками.

а)



б)

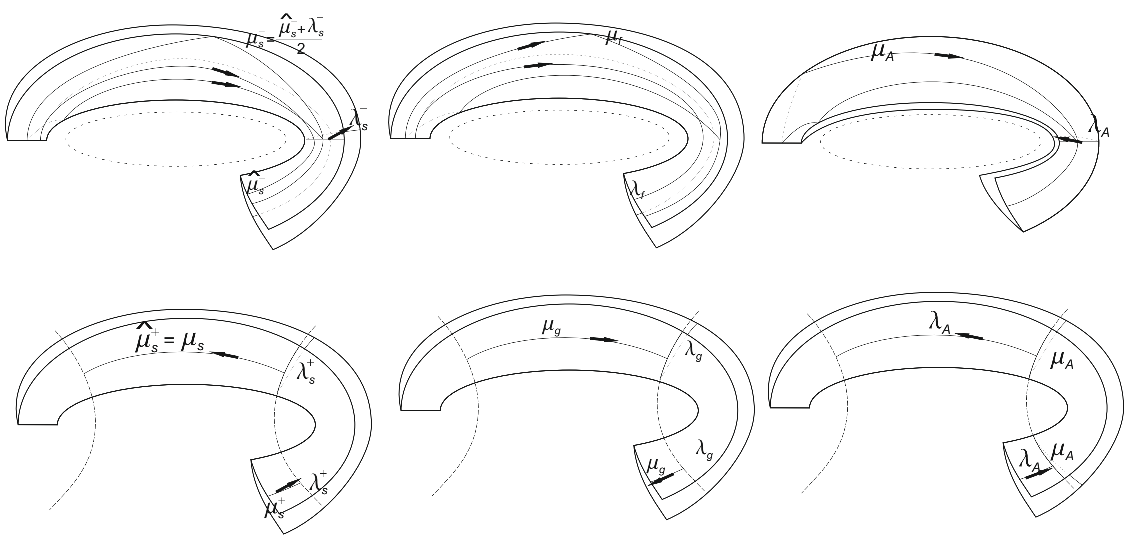


Рис. 2.34: Циклы для бесфокусных биллиардов с одной конической точкой, имеющих непустое пересечение с фокальной прямой. На рисунке а) показан выбор циклов для биллиарда с конической точкой типа y, на рисунке б) для биллиарда с конической точкой типа x.

Если биллиард содержит одну точку типа y и одну точку типа x, тогда $\lambda_s^- = \mu_f = -\lambda_A$; $\mu_s^- = \lambda_f + \mu_f = -\lambda_A + \mu_A$; Это означает, что на эллиптическом ребре между семьёй $W(f)$ и седловым атомом матрица склейки принимает вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, а между атомом A и седловым атомом вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Во всех трех случаях на гиперболическом ребре между семьей и седловым атомом соотношения принимают вид $\lambda_s^+ = \lambda_g$; $\mu_s^+ = -\mu_g$;т.е. матрица склейки $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Для области гиперболической проекции, содержащей только выпуклые гиперболические склейки, соотношения на гиперболическом ребре имеют вид $\lambda_s^+ = \mu_A$; $\mu_s^+ = \lambda_A$; – матрица склейки $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – в случае, если область гиперболической проекции не содержит коническую точку, и вид $\lambda_s^+ = \lambda_A + 2\mu_A$; $\mu_s^+ = -\lambda_A$; – матрица склейки $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ — если содержит.

Пусть биллиард содержит хотя бы одну пару конических точек, лежащих на одной гиперболе. Заметим, что в этом случае биллиард обязательно содержит невыпуклую эллиптическую склейку. Выберем циклы так, как показано на рисунках 2.35 и 2.36.

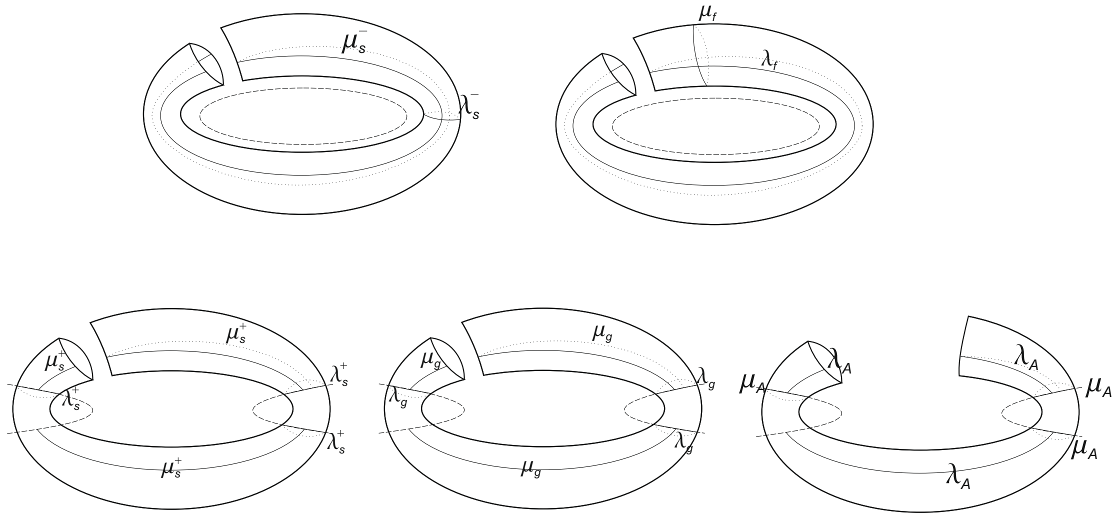
Соотношения циклов имеют вид $\lambda_s^- = \mu_f$; $\mu_s^- = \lambda_f$; $\lambda_s^+ = \lambda_g = \mu_A$; $\mu_s^+ = -\mu_g = \lambda_A$;

Следовательно, на эллиптическом ребре матрица склейки между седловым атомом и семьёй $W_2(f)$ (или $\widetilde{W_2(f)}$) имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. На гиперболическом ребре матрица склейки между седловым атомом и семьей $W(g)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, и между седловым атомом и атомом A вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Доказательство закончено.

$\square$

а)



б)

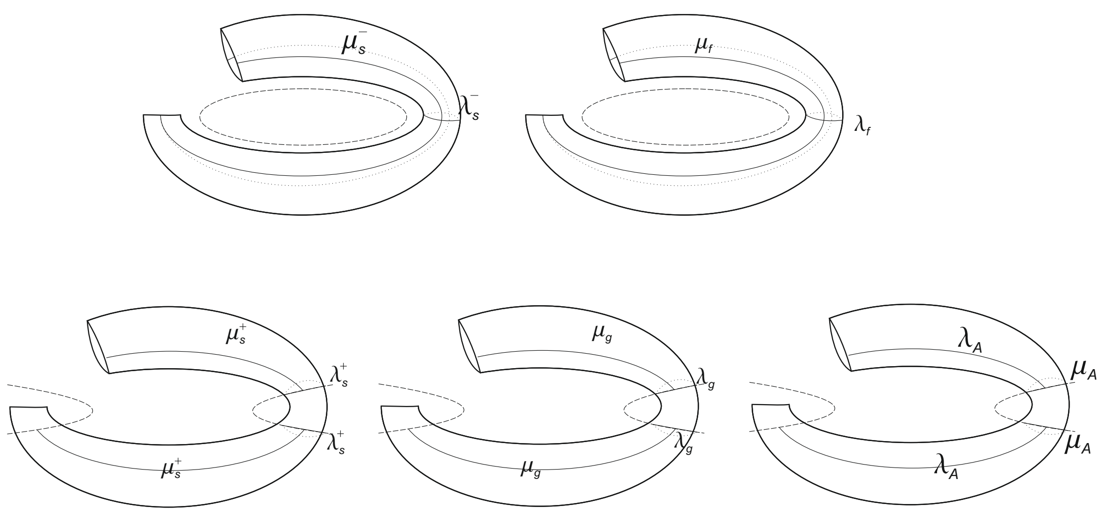


Рис. 2.35: На рисунках а) и б) изображены циклы для бесфокусных биллиардов, имеющих непустое пересечение с фокальной прямой и две конических точки, лежащих на одной гиперболе.

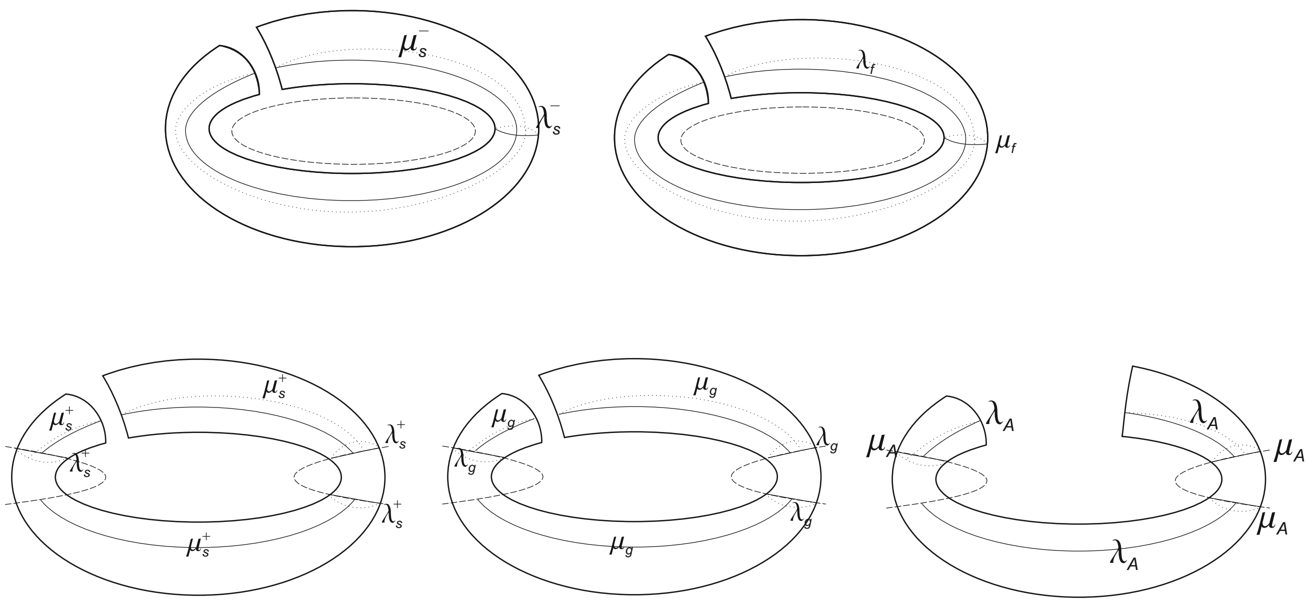


Рис. 2.36: На рисунке изображены циклы для биллиарда, содержащего четыре конических точки.

2.3 Топологическая классификация интегрируемых выпуклых топологических параболических биллиардов

Замечание 26. В данном разделе под терминами "биллиард" и "топологический биллиард" понимается биллиардный стол, или, иначе говоря биллиардная поверхность.

Определение 2.8. Пусть l_1 и l_2 — граничные сегменты двух элементарных параболических биллиардов Ω и Ω', содержащиеся в параболе семейства (1) с параметром $p_{l_1} = p_{l_2}$, при этом биллиарды Ω и Ω' расположены по одну сторону от общего сегмента.

Определим *склейку* биллиардов Ω_1 и Ω_2 вдоль сегментов l_1 и l_2 (образы которых после склейки будем называть *ребром склейки*) как склейку вдоль l_1 и l_2 с помощью изометрии между l_1 и l_2. Границы ребер склейки будем называть *вершинами склейки.*

Таким образом, мы можем определить склейку параболических элементарных биллиардов вдоль граничных сегментов. Аналогично определяется склейка одного экземпляра элементарного биллиарда вдоль двух своих параболических граничных сегментов в том случае, если эти сегменты различны и симметричны друг другу относительно прямой Ox, а склеивающий гомеоморфизм является ограничением симметрии относительно этой прямой на рассматриваемые сегменты.

Определение 2.9. *Параболическим топологическим биллиардом* Δ назовем двумерное ориентируемое многообразие с кусочно-гладкой римановой метрикой, которое получается в результате определенной выше склейки конечного числа элементарных биллиардов вдоль некоторых нестрого выпуклых граничных сегментов при выполнении следующих условий. Потребуем, чтобы в каждой вершине склейки сходились либо четыре ребра склейки (такие вершины склейки назовем *внутренними вершинами склейки*), либо одно ребро склейки и два свободных ребра (такие вершины склейки назовем *граничными вершинами склейки*), либо два ребра склейки, и при этом чтобы не было ни одного свободного ребра (такие вершины склейки назовем *коническими точками*). Обозначим связную компоненту объединения всех горизонтальных ребер склейки через $\bigcup_i m_i, \{i \in 1, ..., n\}$, где m_i последовательно соединены друг с другом. Потребуем, чтобы минимум одно из ребер склейки — m_1 или m_n — образовывало коническую точку.

Замечание 27. Последнее условие обосновывается так. Если разрешить склейки без образования конических точек вдоль горизонтальных сегментов, то полученный биллиард на самом деле ничем не будет отличаться от биллиарда, "сложенного пополам" вдоль горизонтальной прямой: пара склеенных так биллиардов ω_1 (соответственно ω_2) является биллиардом Ω_1 (соответственно Ω_2).

Определение 2.10. Два параболических топологических биллиарда называются *эквивалентными,* если они могут быть получены друг из друга заменой элементарных биллиардов в их составе на им эквивалентные.

Будем придерживаться обозначений топологических биллиардов, принятых в работе [54]. Топологические биллиарды без конических точек обозначим через Δ_α, а биллиарды с коническими точками через Δ_β. Пусть Δ — топологический биллиард. В скобках будем указывать элементарные биллиарды, его образующие, причем если эквивалентные элементарные биллиарды в его составе последовательно (через один и тот же тип сегментов) склеиваются друг с другом в некотором количестве экземпляров, то будем указывать это количество, например $\Delta_\alpha(k\Omega)$, а если нет, то будем указывать это отдельным суммированием, например $\Delta_\alpha(\Omega + k\Omega' + \Omega)$ — два биллиарда Ω склеены не друг с другом, а с биллиардом Ω'.

Как легко видеть из определения, конические точки делятся на два типа. Конические точки типа x — это конические точки, полученные склейкой вдоль угла, образованного выпуклым параболическим и горизонтальным сегментом. Конические точки типа y получены склейкой вдоль угла, образованного двумя выпуклыми параболическими сегментами.

Рассмотрим следующие серии параболических топологических биллиардов.

1: Конечная серия параболических биллиардов Ω_1 состоит из трех биллиардов без конических точек: $\Delta_\alpha(2\Omega_1)$ (склейка вдоль одного граничного сегмента), $\Delta_\alpha(4\Omega_1)$ (склейка четырех экземпляров элементарного биллиарда Ω_1 без свободной границы), $\Delta_\alpha(\Omega_1 + \Omega_2)$ и биллиарда $\Delta_\beta(2\Omega_1)_{yy}$ с двумя коническими точками.

2: Конечная серия параболических биллиардов ω_1, состоит из трех биллиардов без конических точек: $\Delta_\alpha(2\omega_1)$ (склейка вдоль одного граничного сегмента), $\Delta_\alpha(4\omega_1)$ (склейка четырех экземпляров элементарного биллиарда ω_1), $\Delta_\alpha(\omega_1 + \omega_2)$; трех биллиардов $\Delta_\beta(2\omega_1)_y$, $\Delta_\beta(2\omega_1)_x$ и $\Delta_\beta((2\omega_1)_x + 2\omega_2)$ с одной конической точкой, биллиарда $\Delta_\beta((2\omega_1)_x + (2\omega_1)_x)$ с двумя коническими точками и биллиарда $\Delta_\beta(2\omega_1)_{xxy}$ с тремя коническими точками.

3: Бесконечная серия бесфокусных параболических биллиардов Ω_2, состоит из следующих подсерий. Определим числа $n_1, n_2, n_3 \in \{0, 1\}$, $k \in \mathbb{N}, 0$, а элементарный биллиард Ω считаем эквивалентным биллиарду Ω_3 или ω_2. Подсерии биллиардов без конических точек имеют вид $\Delta_\alpha((1 + n_1)(n_2\Omega + k\Omega_2 + n_3\Omega))$ (гомеоморфны диску) и вид $\Delta_\alpha((1 + n_1)(k\Omega_2))^2$ (гомеоморфны цилиндру). Две подсерии биллиардов с одной конической точкой имеют вид $\Delta_\beta(2(n_1\Omega_3 + k\Omega_2 + n_2\Omega))_y$ (здесь $k + n_1 \neq 0$) и $\Delta_\beta(2(n_1\Omega_3 + k\Omega_2 + \omega_2))_x$. Две подсерии биллиардов с двумя коническими точками имеют вид $\Delta_\beta(2(n_1\Omega_3 + k\Omega_2 + n_2\Omega_3))_{yy}$ и $\Delta_\beta(2(\omega_2 + k\Omega_2 + \omega_2))_{xx}$.

Предложение 2.3.1 ([85]). *Любой параболический топологический биллиард Δ эквивалентен биллиарду, принадлежащему одной из трех серий Ω_1, ω_1 и Ω_2.*

Доказательство. Рассмотрим параболические топологические биллиарды, в составе которых содержатся элементарные параболические биллиарды Ω_1. С таким биллиардом общий сегмент границы может иметь только биллиард Ω_2. Перебирая все случаи склейки (напомним, что склейки происходят только вдоль выпуклых по отношению к биллиардам сегментам границы), получаем все четыре биллиарда серии Ω_1.

Аналогично получается серия параболических биллиардов ω_1 : к элементарному биллиарду ω_1 кроме ему эквивалентного можно приклеить только биллиард ω_2.

Рассмотрим серию параболических бесфокусных биллиардов. Для элементарного параболического биллиарда Ω_2 будем называть граничный сегмент, пересекающий вырожденную гиперболу, *длинным граничным сегментом,* а не пересекающий — *коротким граничным сегментом.* Заметим, что если пара биллиардов Ω_2 склеена вдоль длинного граничного сегмента, то вдоль других длинных сегментов (являющихся невыпуклыми) ничего больше приклеить нельзя. С другой стороны, для биллиардов Ω_2 оба коротких граничных сегмента являются выпуклыми. Это позволяет склеить их в произвольном числе экземпляров в длинную *ленту* . В свою очередь к такой ленте вдоль коротких сегментов границы можно приклеить биллиарды Ω_3 и ω_2, но на этом лента закончится и к ней без образования конических точек ничего больше приклеить нельзя. Склеивая такую ленту с себе эквивалентной, получаем серию биллиардов $\Delta_\alpha((1+n_1)(n_2\Omega+k\Omega_2+n_3\Omega))$. Однако если в состав топологического биллиарда не входят элементарные биллиарды Ω_3 и ω_2, то короткие сегменты свободной границы остаются выпуклыми, что позволяет склеить их друг с другом при подходящих значениях параметров парабол p, на которых они лежат. Это приводит к образованию биллиардов-колец вида $\Delta_\alpha((1+n_1)(k\Omega_2))^2$.

Параболические топологические биллиарды с коническими точками получаются из удвоенной ленты $\Delta_\alpha(2(n_1\Omega+k\Omega_2+n_2\Omega))$ выбором подходящих элементарных параболических биллиардов Ω. Утверждение доказано. □

Опишем траектории произвольного параболического топологического биллиарда. Обозначим через $p_{\min}$ и $p_{\max}$ минимальное и максимальное значения параметра p, соответствующие параболам, на которых лежат границы элементарных параболических биллиардов, образующий данный топологический биллиард. Значениям $p_{\min}$ и $p_{\max}$ отвечают криволинейные траектории-окружности, лежащие на параболах с этими параметрами. При $p=0$ траектории удовлетворяют оптическому свойству параболы: их звенья последовательно либо лежат на прямых, проходящих через фокус, либо параллельны оси Ox. При этом можно выделить особые траектории-окружности, лежащие на оси Ox. Все остальные уровни интеграла (т.е. не равные $p_{\min}$, $p_{\max}$ и нулю) являются неособыми в том смысле, что соответствующие двумерные поверхности в многообразии постоянной энергии Q^3 гомеоморфны несвязным объединениям двумерных торов.

Пусть Δ — биллиард (элементарный или топологический). Рассмотрим изоэнергетическое многообразие Q^3, которое получается при ограничении системы с фазового пространства M^4 биллиарда на уровень постоянного модуля скорости — первого интеграла системы. Оно расслоено уровнями функции p. Опишем слоение Лиувилля топологических параболических биллиардов, вычислив для каждого биллиарда его инвариант Фоменко–Цишанга. Для элементарных параболических биллиардов такое описание было выполнено автором в работе [54].

Теорема 2.5 ([85])**.** *Пусть внутренность параболического топологического биллиарда Δ содержит фокусы. Тогда инварианты Фоменко–Цишанга — меченые молекулы W^*, описывающие* *топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 таких топологических биллиардов Δ, разбиваются на семь неэквивалентных между собой типов, которые приведены на рис. 2.37.*

Если пересечение внутренности параболического топологического биллиарда Δ с фокальной прямой пусто, то инвариант Фоменко–Цишанга имеет вид $A \xrightarrow{r=0,\varepsilon=1} A$, когда биллиард Δ не содержит конических точек, и вид $A \xrightarrow{r=\frac{1}{2},\varepsilon=1} A$, когда биллиард Δ содержит конические точки.

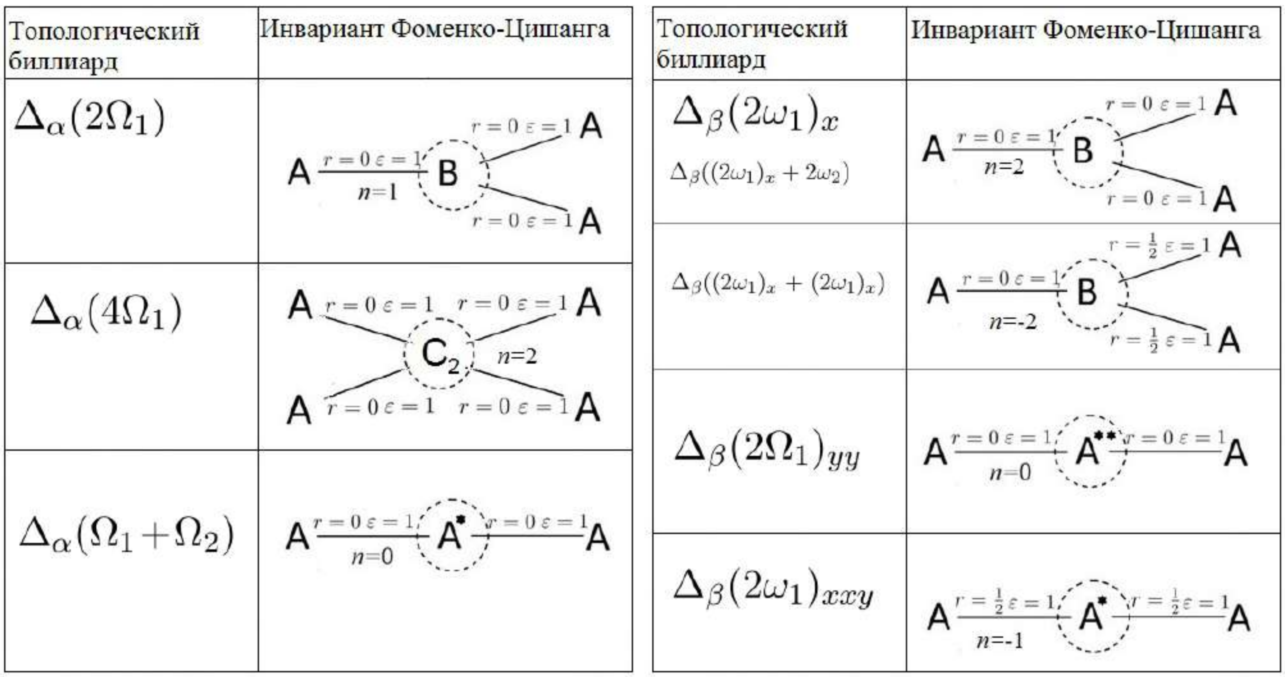


Рис. 2.37: Инварианты Фоменко—Цишанга параболических топологических биллиардов, содержащих фокусы .

Теорема 2.6 ([85])**.** *Пусть параболический топологический биллиард Δ принадлежит серии Ω_2 (т.е. не содержит фокусов). Тогда инвариант Фоменко–Цишанга — меченая молекула W^*, описывающая топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 биллиарда Δ, имеет следующий вид* (см. рис. 2.38):

1. *молекула содержит одно или два нижних ребра (два ребра, если только биллиард гомеоморфен кольцу), эти ребра бесконечны: $r = \infty$, $\varepsilon = \pm 1$;*

2. *если биллиард гомеоморфен кольцу, то бифуркация на уровне интеграла $p = 0$ описывается атомом C_n, где n — это количество отрезков фокальной прямой, лежащих внутри всех областей Ω;*

3. *если биллиард односвязен, то бифуркация на уровне интеграла $p = 0$ описывается атомом B_n, где n это количество отрезков фокальной прямой, лежащих внутри всех обла-*

стей Ω, причем атом имеет столько звездочек, сколько конических точек типа x имеет биллиард Δ;

4. *на верхних ребрах молекулы стоят метки $r = 0$, $\varepsilon = 1$ или $r = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = 1$, причем количество дробных меток в молекуле совпадает с количеством конических точек, имеющих тип y.*

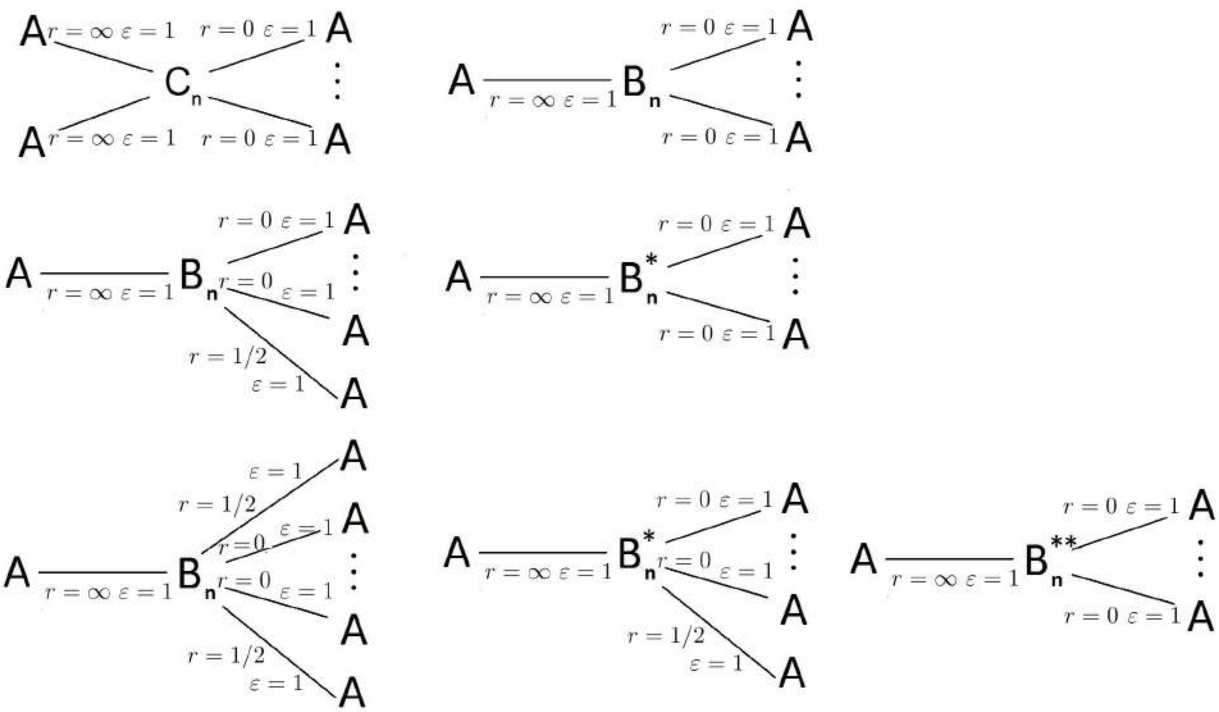


Рис. 2.38: Инварианты Фоменко—Цишанга параболических топологических биллиардов, не содержащих фокусов.

Замечание 28. Отметим, что число классов параболических топологических биллиардов меньше числа классов топологических биллиардов, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол. Однако список инвариантов Фоменко–Цишанга оказался не менее бедным. То есть для каждого слоения Лиувилля топологического биллиарда, ограниченного софокусными эллипсами и гиперболами, можно подобрать параболический топологический биллиард с тем же инвариантом — слоением Лиувилля.

Доказательство. Пусть Δ — параболический топологический биллиард. Все граничные дуги элементарных биллиардов в его составе разбиваются на дуги парабол с отрицательным параметром p, с положительным параметром p и отрезки вырожденной параболы (с параметром $p = 0$). Рассмотрим семейство парабол (1) как семейство софокусных эллипсов и гипербол, у которого левый фокус находится на бесконечности. Тогда дуги парабол с отрицательным значением параметра p (их ветви направлены вправо) являются дугами гипербол, а дуги парабол с положительными значением параметра p (их ветви направлены влево) — дугами эллипсов. Далее доказательство дословно повторяет доказательство для случая соответствующего топологического биллиарда, ограниченного дугами эллипсов и гипербол [55]. □

2.4 Некомпактные локально-плоские биллиарды, ограниченные софокусными квадриками

2.4.1 Элементарные некомпактные биллиарды.

Определение 2.11. Простейшим некомпактным элементарным (плоским) биллиардом Θ назовем связную некомпактную часть плоскости, такую что её граница $\partial\Theta$ состоит из дуг софокусных эллипсов и гипербол, принадлежащих семейству 1.1, причем углы границы биллиарда Θ составляют $\frac{\pi}{2}$.

Определение 2.12. Простейший некомпактный элементарный биллиард назовем неособым, если любая часть его границы не лежит на квадрике с параметром b, т.е. не является подмножеством фокальной прямой. Все остальные простейшие некомпактные элементарные биллиарды назовем особыми.

Определение 2.13. Простейший некомпактный элементарный биллиард Θ_1 назовем эквивалентным другому простейшему некомпактному элементарному биллиарду Θ_2, если биллиард Θ_2 может быть получен из биллиарда Θ_1 в результате композиции симметрий относительно осей семейства границы 1.1 (прямых Ox и Oy) и последовательных деформаций дуг границы, которые, во-первых, во все время деформации являются дугами квадрик семейства 1.1, а во-вторых, параметр квадрики, на которой лежит изменяемая граница не принимает значения b. Иначе говоря, никакая изменяемая граница ни в какой момент времени в процессе деформации не лежит на прямой Ox.

Замечание 29. Отношение эквивалентности, в частности, постулирует, что любой неособый биллиард не эквивалентен какому-либо особому биллиарду.

Предложение 2.4.1 ([82]). *Любой простейший неособый некомпактный элементарный биллиард эквивалентен одному из следующих семи биллиардов: биллиарды $A_0^{2\infty}$ и A_1^{∞}, ограниченные ветвями гипербол, биллиард C_2^{∞}, ограниченный эллипсом, и биллиарды A_0^{∞}, B_0^{∞}, B_1^{∞} и B_2^{∞}, ограниченные двумя дугами гипербол и одной дугой эллипса (см. рис. 2.39).*

Любой простейший особый элементарный биллиард эквивалентен одному из следующих шести биллиардов: биллиард $A_0'^{\infty}$, ограниченный фокальной прямой и двумя дугами гипербол, биллиарды $B_1'^{\infty}$, $B_2'^{\infty}$ и $B_2''^{\infty}$, ограниченные дугой эллипса и дугами гипербол, в том числе вырожденных, биллиард $A_1'^{\infty}$, ограниченный фокальной прямой и одной дугой гиперболы и биллиард в верхней полуплоскости $A_2'^{\infty}$ (см. рис. 2.39).

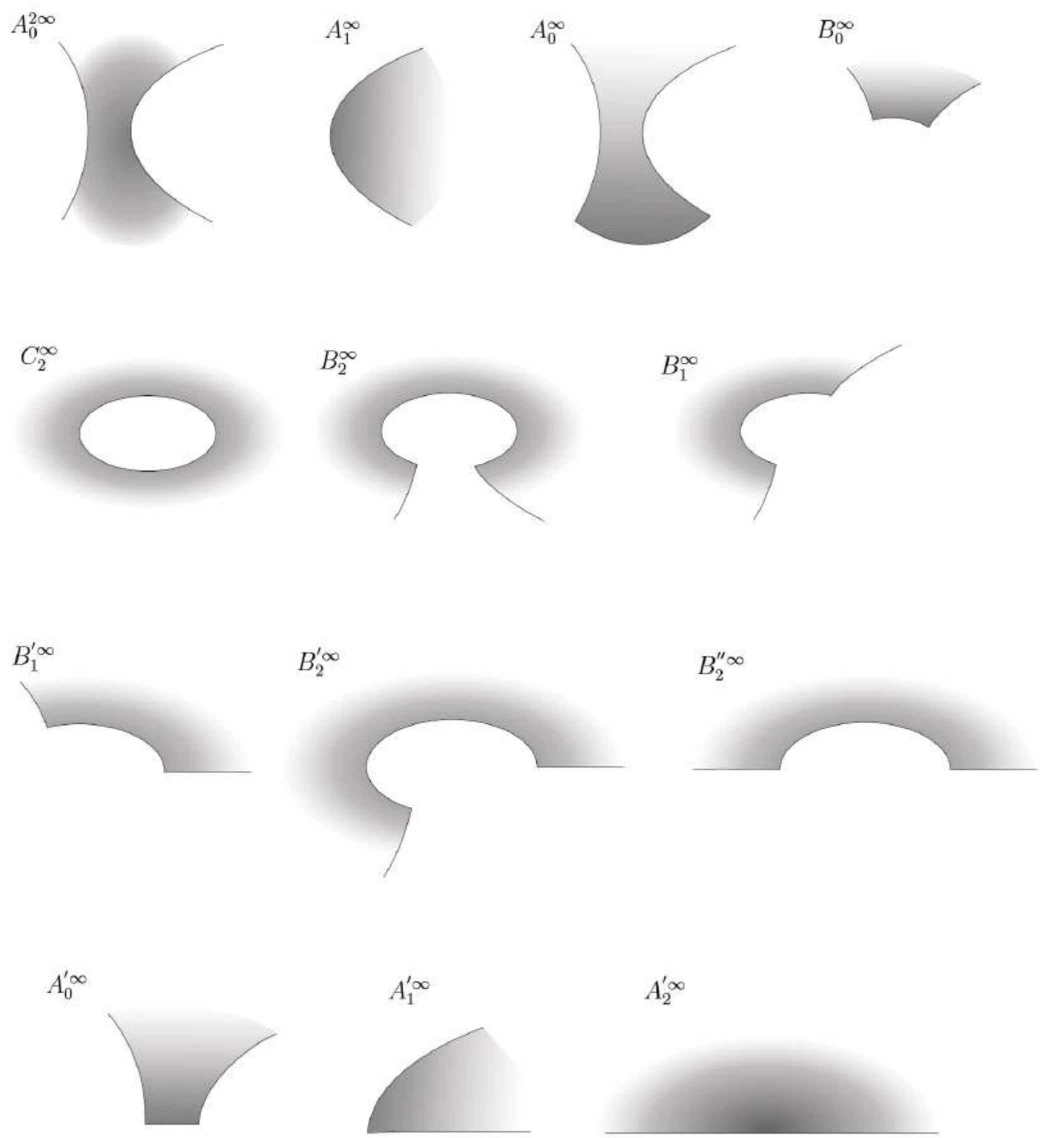


Рис. 2.39: Простейшие некомпактные элементарные биллиарды.

Доказательство. Пусть Θ простейший некомпактный биллиард. Обозначим через $\partial\Theta$ его границу.

Пусть объединение дуг $\partial\Theta$ содержит лишь дуги невырожденных гипербол. Тогда эти дуги являются ветвями гипербол, т.к. они не ограничены никакими дугами эллипсов. Получаем два возможных случая – либо $\partial\Theta$ состоит из одной ветви гиперболы – тогда биллиард Θ эквивалентен биллиарду A_1^{∞} – либо из двух (быть может, принадлежащих разным гиперболам) и тогда биллиард Θ эквивалентен $A_0^{2\infty}$.

Пусть объединение дуг $\partial\Theta$ содержит лишь дуги невырожденных эллипсов. В этом случае, очевидно, что $\partial\Theta$ состоит лишь из объединения эллипсов – любая другая эллиптическая дуга будет криволинейным отрезком, концы которого обязаны лежать на дугах граничных гипербол. Если эллипсов больше одного, то биллиард Θ становится либо компактным либо несвязным.

Следовательно, в этом случае $\partial\Theta$ состоит из лишь одного эллипса, а соответствующий биллиард Θ эквивалентен биллиарду C_2^∞.

Пусть объединение дуг $\partial\Theta$ содержит как эллиптические, так и гиперболические дуги. Выберем дугу e эллипса, принадлежащую $\partial\Theta$, быть может, вырожденного. Границы этой дуги лежат на некоторых граничных дугах гипербол h_1 и h_2 (быть может, также вырожденных). Докажем, что последовательное объединение дуг h_1, e, h_2 полностью исчерпывает границу $\partial\Theta$. Пусть это не так. Тогда в $\partial\Theta$ найдётся сегмент квадрики q, не совпадающий с h_1, e, h_2. Сразу отметим, что q не является эллипсом (не является ветвью гиперболы), так как в этом случае, он бы имел общие точки с дугами гипербол h_1 и h_2 (с дугой эллипса e соответственно). Пусть q является дугой эллипса. Если концы этой дуги лежат на дугах гипербол h_1 и h_2, то объединение дуг h_1, e, h_2, q ограничивает четырехугольник, откуда следует, что биллиард Θ либо компактна либо несвязна. Если хотя бы один конец эллиптического сегмента q не лежит на дугах гипербол h_1 и h_2, то существует гиперболический граничный сегмент q', имеющий общие точки с q. В этом случае угол, который в точке пересечения образуют сегменты q и q', будет больше π : так как биллиард Θ локально расположена между эллиптическими сегментами e и q. Пусть q является гиперболическим сегментом. В этом случае существует эллиптический сегмент $\tilde{q}$, граничная точка которого совпадает с граничной точкой гиперболического сегмента q. Но существование $\tilde{q}$ уже было опровергнуто.

Так как последовательное объединение дуг h_1, e, h_2 полностью исчерпывает $\partial\Theta$, то биллиард Θ описывается перебором возможных дуг e, h_1 и h_2 (см. рис. 2.39).

Предложение доказано.

□

Замечание 30. Заметим, что простейшие некомпактные элементарные биллиарды могут быть получены аналогично составным компактным элементарным биллиардам склейками бесконечного числа простейших элементарных компактных биллиардов .

Определение 2.14. Пусть биллиард Θ является простейшим некомпактным элементарным биллиардом. Рассмотрим минимальный набор дуг квадрик, которыми образована граница биллиарда при его изометричном вложении в плоскость. Эти дуги назовем *сегментами квадрик*, ограничивающих данный биллиард (или сегментами границы данной биллиарда). К компактным сегментам границы относятся эллипс, дуги эллипсов, заключенные между гиперболами, дуги гипербол, заключенные между эллипсами. К некомпактным сегментам границы относятся ветви гипербол, полуинтервалы, лежащие на ветвях невырожденных гипербол, луч, лежащий на прямой Ox, один конец которого лежит на невырожденной гиперболе, и сама прямая Ox.

Определение 2.15. Составным элементарным некомпактным биллиардом Θ назовем двумерное локально-плоское некомпактное многообразие с границей, которое не имеет изометричного погружения в плоскость и которое может быть получено из компактных элементарных биллиардов, а также простейших некомпактных элементарных биллиардов изометричными склейками вдоль их общих сегментов границы, если локально при изометричных вложениях простейших элементарных биллиардов в плоскость они будут расположены по разные стороны от общего сегмента склейки, что позволит ввести в окрестности этого сегмента плоскую метрику, согласованную с плоской метрикой на каждом из склеиваемых простейших элементарных биллиардов.

Потребуем, чтобы количество склеиваемых элементарных биллиардов было не более чем счетно.

Определение 2.16. Составной некомпактный элементарный биллиард Θ_1 назовем эквивалентным другому составному некомпактному элементарному биллиарду Θ_2, если биллиард Θ_2 может быть получен из биллиарда Θ_1 в результате композиции следующих преобразований:

- симметрии относительно оси семейства границы 1.1 (прямых Ox и Oy) во всех простейших биллиардах одновременно;
- замены одного из простейших элементарных биллиардов в его составе на другой, ему эквивалентный, в смысле определений 1.30 и 2.13;
- объединением нескольких простейших элементарных биллиардов в один или же путем разбиения одного элементарного биллиарда на более мелкие.

Предложение 2.4.2 ([82])**.** *Любой составной элементарный некомпактный биллиард принадлежит к одной из следующих пяти серий:*

- $(B_0')_\infty$ *и* $(B_0)_\infty$ *– биллиарды, полученные в результате бесконечного числа склеек компактных элементарных биллиардов типа* B*, при этом компактный граничный гиперболический сегмент является прямолинейным и криволинейным соответственно;*
- B_∞ *– биллиард, полученный в результате бесконечного числа склеек компактных элементарных биллиардов типа* B*, при этом у такого биллиарда отсутствуют гиперболические сегменты границы;*
- B_n^∞*,* $B_n'^\infty$ *и* $B_n''^\infty$*, а также биллиарды* C_1^∞ *и* $C_n^\infty, n > 2$ *– аналоги простейших некомпактных элементарных биллиардов;*
- $(B_0')_\infty^\infty$ *и* $(B_0)_\infty^\infty$ *– биллиарды, полученные в результате бесконечного числа склеек некомпактных простейших элементарных биллиардов типа* B^∞*, при этом некомпактный граничный гиперболический сегмент является прямолинейным и криволинейным соответственно;*
- B_∞^∞ *– биллиард , полученный в результате бесконечного числа склеек некомпактных элементарных биллиардов типа* B^∞*.*

Доказательство. Пусть Θ – составной некомпактный элементарный биллиард, являющийся результатом склеек набора биллиардов U_i. Покажем, что в качестве U_i можно рассматривать лишь компактные биллиарды серий B и $C(B_n, B'_n, B''_n$ и $C_n)$ а также некомпактные биллиарды серии B_n^∞ (B_0^∞, B_1^∞, B_2^∞, $B_1'^\infty$, $B_2'^\infty$ и $B_2''^\infty$). В самом деле, компактные биллиарды серии A при склейке с другими компактными биллиардами в конечном числе остаются в классе компактных биллиардов серии A. Если же число допустимых склеек счетно, то полученный биллиард будет принадлежать классу некомпактных биллиардов серии A. Некомпактные биллиарды серии A при допустимых склейках вдоль граничных сегментов с другими элементарными биллиардами остаются в том же классе (напомним, что результатом склейки обязано быть многообразие с границей). Биллиарды U_i не могут быть эквивалентны биллиардам C_2^∞ так как такие биллиарды могут быть склеены лишь с биллиардом A_2 при этом в результате склейки будет опять же многообразие без границы.

Опишем теперь всевозможные склейки компактных и некомпактных биллиардов-лент серии B и компактных биллиардов-колец серии C_n. Заметим что компактные и некомпактные биллиарды-ленты не могут быть склеены между собой (так как не существует общих граничных сегментов).

Для того чтобы склейка компактных биллиардов серии B была некомпактной, число склеек должно быть бесконечным. Заметим, что такие биллиарды мы можем склеивать как вдоль гиперболических сегментов, так и вдоль эллиптических. В случае последовательных эллиптических склеек, если число биллиардов конечно, склеиваемые биллиарды эквивалентны между собой и эквиваленты результату склейки. Если же мы склеиваем бесконечное число биллиардов-лент вдоль эллиптических сегментов, то результатом склейки будет соответствующций некомпактный биллиард (к примеру биллиард B_1^∞ может быть получен в результате склейки счетного числа компактных биллиардов B_1). Если же бесконечное число склеек происходит лишь вдоль гиперболических сегментов, то мы получаем биллиарда, принадлежащий к первым двум сериям.

Если хотя бы один биллиард U_i эквивалентен биллиарду C_n, то все остальные биллиарды U_i эквивалентны C_n. Требование некомпактности биллиарда Θ влечет за собой бесконечность числа допустимых склеек. В результате получаются биллиарды $C_n^{\infty.}$ Аналогично могут быть получены оставшиеся биллиарды третьей серии – они могут быть образованы путем бесконечного числа склеек вдоль эллиптических сегментов и конечного числа склеек вдоль гиперболических сегментов.

Если же допустить бесконечное число склеек как вдоль эллиптических, так и вдоль гиперболических сегментов то мы получим биллиарды, принадлежащие к последним двум сериям.

Заметим, что так как некомпактные биллиарды-ленты могут быть разбиты в бесконечное объединение компактных биллиардов, то заменив такие некомпактные биллиарды-ленты на объединение компактных биллиардов, мы приходим к предыдущему случаю. Предложение доказано.

□

Определение 2.17. Простейшие и составные некомпактные элементарные биллиарды, а также компактные элементарные биллиарды, если не оговорено иное в дальнейшем мы будем называть просто элементарными биллиардами и обозначать через Θ.

Заметим, что понятие граничного сегмента (см. определение 2.14) определено пока лишь для простейших некомпактных элементарных биллиардов, т.е. элементарных биллиардов, изометрично вложимых в плоскость. Распространим его на составные элементарные биллиарды.

Определение 2.18. Пусть дан некомпактный элементарный биллиард Θ, склеенный из биллиардов U_i. Рассмотрим склейку двух простейших элементарных биллиардов U_i и U_j в его составе, склеенных друг с другом вдоль общего граничного сегмента l. Тогда в число новых граничных сегментов результата склейки этих биллиардов войдут граничные сегменты биллиардов U_i и U_j, которые не пересекались с сегментом склейки l, а также новые граничные сегменты, которые получаются путем склейки сегментов, пересекающихся с l при ограничении склейки вдоль l на эти сегменты. *Граничным сегментом* составного элементарного биллиарда назовем граничные сегменты которые образовались после всех склеек элементарных биллиардов, входящих в его состав, друг с другом по этому правилу.

Для дальнейшего удобства введём следующую классификацию граничных сегментов.

Определение 2.19. Граничный сегмент элементарного биллиарда назовем *гиперболическим* (соотв. *вертикальным гиперболическим*, *эллиптическим*), если он образован склейками гиперболических (соотв. вертикальных, эллиптических) граничных сегментов простейших элементарных биллиардов. Граничный сегмент назовем *вырожденным или горизонтальным*, если он образован склейками граничных сегментов, лежащих на фокальной прямой (вырожденных или горизонтальных). Граничный сегмент элементарного биллиарда Ω назовем *выпуклым* (соотв. *нестрого выпуклым*), если любая его точка обладает окрестностью в Ω, изометричной строго выпуклому (соотв. нестрого выпуклому) подмножеству плоскости.

2.4.2 Топологические некомпактные биллиарды.

Определение 2.20. Пусть l_1 и l_2 — выпуклые эллиптические или горизонтальные граничные сегменты двух элементарных биллиардов Θ_1 и Θ_2 (компактных или некомпактных), причем образы этих сегментов при локальных изометричных вложениях биллиардов Θ_1 и Θ_2 (т.е. при вложениях соответствующих простейших элементарных биллиардов) в плоскость совпадают и содержатся в квадрике семейства (1.1) с параметром $\lambda_{l_1} = \lambda_{l_2}$. Определим *склейку* биллиардов Θ_1 и Θ_2 вдоль эллиптических сегментов l_1 и l_2 (образы которых после склейки будем называть *ребром склейки*) как склейку вдоль l_1 и l_2 по гомеоморфизму между l_1 и l_2, согласованному с данными локальными изометричными вложениями биллиардов Θ_1 и Θ_2 (т.е. при вложениях соответствующих простейших элементарных биллиардов) в плоскость. Границы ребер склейки будем называть *вершинами склейки*.

Определение 2.21. Пусть m_1 и m_2 — выпуклые гиперболические или горизонтальные граничные сегменты двух элементарных биллиардов Θ_1 и Θ_2 (компактных или некомпактных), причем образы этих сегментов при локальных изометричных вложениях биллиардов Θ_1 и Θ_2 (т.е. при вложениях соответствующих простейших элементарных биллиардов) в плоскость совпадают и содержатся в квадрике семейства (1.1) с параметром $\lambda_{m_1} = \lambda_{m_2}$. Определим *склейку* биллиардов Θ_1 и Θ_2 вдоль гиперболических или горизонтальных сегментов m_1 и m_2 (образы которых после склейки будем называть *ребром склейки*) как склейку вдоль m_1 и m_2 по гомеоморфизму между m_1 и m_2, согласованному с данными локальными изометричными вложениями биллиардов Θ_1 и Θ_2 (т.е. при вложениях соответствующих простейших элементарных биллиардов) в плоскость. Границы ребер склейки будем называть *вершинами склейки*.

Напомним, что т.к. элементарные биллиарды это многообразия с плоской гладкой римановой метрикой, то при их склейке полученное многообразие будет также локально плоским, но вообще говоря с кусочно-гладкой римановой метрикой.

Определение 2.22. *Топологическим (локально-плоским) некомпактным биллиардом Δ без конических точек* назовём двумерное ориентируемое некомпактное многообразие с границей с кусочно-гладкой римановой метрикой, которое получается в результате определённых выше склеек конечного числа компактных и некомпактных элементарных биллиардов вдоль некоторых эллиптических сегментов (определение 2.20). Заметим, что в этом случае в каждой вершине склейки сходится одно ребро склейки и два свободных ребра (такие вершины склейки назовем *граничными вершинами склейки*).

Топологическим (локально-плоским) некомпактным биллиардом Δ с коническими точками назовём двумерное ориентируемое некомпактное многообразие с границей с кусочно-гладкой римановой метрикой, которое получается в результате определённых выше склеек конечного числа элементарных биллиардов вдоль некоторых сегментов (опр. 2.20, 2.21, при выполнении следующих условий. Во-первых, потребуем, чтобы в каждой вершине склейки сходилось либо одно ребро склейки и два свободных ребра (такие вершины склейки назовем *граничными вершинами склейки*), либо два ребра склейки и ни одного свободного ребра (такие вершины склейки назовем *коническими точками*), либо четыре ребра склейки и ни одного свободного ребра (такие вершины склейки назовем *внутренними вершинами склейки*). Во внутренних вершинах склейки сходятся два гиперболических или горизонтальных ребра склейки m_{i_1}, m_{i_2} и два эллиптических или горизонтальных l_{j_1}, l_{j_2}. Обозначим связную компоненту объединения всех гиперболических (или горизонтальных) ребер склейки через $\bigcup_i m_i, \{i \in 1...n\}$, где m_i последовательно соединены друг с другом. Во-вторых, потребуем, чтобы минимум одно из ребер склейки m_1 или m_n образовывало коническую точку. В-третьих, потребуем, чтобы в обобщенном биллиарде Δ с коническими точками число конических точек было больше нуля.

Поясним, что для каждого такого биллиарда Δ фиксирован набор элементарных биллиардов Θ_i с набором ребер склейки f_{ij} между ними, которые будучи склеенными вдоль этих рёбер образуют биллиард Δ. Граничные сегменты биллиардов Θ_i, которые не являются ребрами склейки, мы называем *свободными ребрами*, а их объединение для фиксированного биллиарда Δ – *свободной границей*. Биллиарды, склеенные без образования конических точек будем обозначать через Δ_α, а биллиарды с коническими точками через Δ_β.

Определение 2.23. Топологический биллиард Δ называется **эквивалентным** другому топологическому биллиарду Δ', если Δ' можно получить из Δ путем замены элементарных биллиардов, входящих в его состав, на эквивалентные так, чтобы в результате набор элементарных биллиардов, составляющих биллиард Δ перешёл в набор элементарных биллиардов, составляющих биллиард Δ' и тождественно совпали бы все ребра склейки между ними.

Предложение 2.4.3. *Любой топологический некомпактный биллиард Δ эквивалентен биллиарду, принадлежащему к одному из следующих четырех классов:*

1. *топологические биллиарды, склеенные из эквивалентных друг другу элементарных биллиардов, и не содержащие конических точек*
   - $\Delta_\alpha(2B_\infty)$
   - $\Delta_\alpha(2(B_0)_\infty)$, $\Delta_\alpha(2(B_0')_\infty)$
   - $\Delta_\alpha(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_0)$ *и* $\Delta_\alpha(\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} A_0)$
2. *топологические биллиарды, склеенные из эквивалентных друг другу элементарных биллиардов с образованием конических точек*
   - $\Delta_\beta(\sum\limits_{i=1}^{\infty} 2A_0)_y$
   - $\Delta_\beta(2A_0^\infty)_y$
   - $\Delta_\beta(2(B_1)_\infty)_y$
   - $\Delta_\beta(2(B_0')_\infty)_x$
   - $\Delta_\beta(2A_1'^\infty)_c$
   - $\Delta_\beta(2A_0'^\infty)_c$
3. *топологические биллиарды, склеенные из элементарных биллиардов, принадлежащих более чем одному классу эквивалентности, и не содержащие конических точек*
   - $\Delta_\alpha(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_0 + A_0')$
   - $\Delta_\alpha(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_0 + B_0)$

- $\Delta_\alpha(A_0^\infty + \sum\limits_{i=1}^{k} A_0)$, $k \leq \infty$
- $\Delta_\alpha(A_0^\infty + \sum\limits_{i=1}^{k} A_0 + B_0)$, $k < \infty$
- $\Delta_\alpha(A_0^\infty + \sum\limits_{i=1}^{k} A_0 + A'_0)$, $k < \infty$
- $\Delta_\alpha(A_0^\infty + \sum\limits_{i=1}^{k} A_0 + A_0^\infty)$, $k < \infty$

4. *топологические биллиарды, склеенные из элементарных биллиардов, принадлежащих более чем одному классу эквивалентности, с образованием конических точек*

- $\Delta_\beta((2A'_0)_c + \sum\limits_{i=1}^{k} 2A_0 + 2A_0^\infty)$, $k < \infty$
- $\Delta_\beta((2A'_0)_c + \sum\limits_{i=1}^{\infty} 2A_0)$
- $\Delta_\beta((2A_0)_y + \sum\limits_{i=1}^{k} 2A_0 + 2A_0^\infty)$, $k < \infty$

Доказательство. Опишем класс биллиардов, из которых могут быть склеены топологические некомпактные биллиарды. Сразу исключим из него биллиарды, которые имеют лишь гиперболические сегменты границы – это биллиарды A_1^∞ и $A_0^{2\infty}$. Далее, исключим биллиард A_2^∞ – его можно склеить лишь с собой, при этом у полученного биллиарда будет отсутствовать граница. Биллиарды C_n^∞, B_∞^∞, B_k^∞ не имеют выпуклых эллиптических сегментов, поэтому также не входят в описываемый класс биллиардов. Биллиарды C_n, A_1, A'_1, A_2, A'_2, B'_k, B''_k, $k \geq 0$, $B_n, n > 0$ также не входят в этот класс, так как допустимые склейки вдоль эллиптических сегментов между ними позволяют образовывать лишь компактные биллиарды, а с другими элементарными областями склейки невозможны (нет общих сегментов).

Таким образом, к классу элементарных биллиардов, образующих топологические некомпактные биллиарды, относятся:

- компактные элементарные биллиарды A_0, A'_0 и B_0;
- простейшие некомпактные элементарные биллиарды $A_0^\infty, A_1'^\infty$ и $A_0'^\infty$;
- некомпактные элементарные биллиарды-ленты $(B'_0)_\infty$, $(B_0)_\infty$ и B_∞.

Для того чтобы топологический биллиард Δ была некомпактен в нем должен присутствовать либо некомпактный элементарный биллиард, либо бесконечное число компактных элементарных биллиардов. Таким образом, класс топологических биллиардов, склеенных из элементарных биллиардов одного класса эквивалентности без образования конических точек, состоит из простейших удвоенных биллиардов $\Delta_\alpha(2B_\infty)$, $\Delta_\alpha(2(B_0)_\infty)$, $\Delta_\alpha(2(B'_0)_\infty)$ и биллиардов $\Delta_\alpha(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_0)$ и $\Delta_\alpha(\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} A_0)$, склеенных из бесконечного числа компактных элементарных биллиардов A_0.

Заметим, что согласно классификации элементарных биллиардов два граничных сегмента элементарного биллиарда, имеющих общую точку, полностью определяют класс эквивалентности данного биллиарда. Следовательно, для образования конической точки необходимо склеить два экземпляра одного и того же биллиарда. Отсюда получаем, что биллиарды, склеенные из эквивалентных друг другу элементарных биллиардов с образованием конических точек образуются следующим образом – при склейке пары некомпактных элементарных биллиардов к результату склейки ничего нельзя добавить, в результате получаем биллиарды $\Delta_\beta(2A_0^\infty)_y$, $\Delta_\beta(2(B_0)_\infty)_y$, $\Delta_\beta(2(B_0')_\infty)_x$, $\Delta_\beta(2A_1'^\infty)_c$, $\Delta_\beta(2A_0'^\infty)_c$, а при склейке компактного биллиарда A_0 получаем биллиард $\Delta_\beta(\sum\limits_{i=1}^{\infty} 2A_0)_y$ с одной конической точкой.

Заметим, что в обоих классах отсутствовали биллиарды, склеенные из A_0' и B_0 – эти биллиарды имеют лишь один выпуклых эллиптический сегмент склейки и бесконечную склейку из таких биллиардов сделать нельзя.

Отметим теперь, что если топологический некомпактный биллиард склеен из элементарных биллиардов различных классов эквивалентности, то он склеен из набора элементарных биллиардов, состоящего из компактных элементарных биллиардов A_0, A_0', B_0 и некомпактного элементарного биллиарда A_0^∞. Мы исключили некомпактные биллиарды-ленты, а также биллиарды $A_0'^\infty$ и $A_1'^\infty$, так как они могут быть склеены лишь с себе эквивалентными, а к результату склейки ничего нельзя добавить.

Элементарные биллиарды A_0, A_0', B_0 и A_0^∞ могут быть склеены друг с другом вдоль выпуклых эллиптических сегментов. При этом лишь биллиард A_0 имеет два выпуклых эллиптических сегмента, что позволяет продолжать склейку неограниченное число раз, образуя компактные "куски" $\sum\limits_{i=1}^{k} A_0$ или некомпактные "хвосты" $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_0$ из A_0. Таким образом, некомпактность обобщенной некомпактного биллиарда возникает при наличии в его составе либо некомпактного "хвоста" из A_0 либо некомпактного биллиарда A_0^∞. Отсюда получаем, что биллиарды, склеенные из элементарных биллиардов, принадлежащих более чем одному классу эквивалентности, и не содержащие конических точек имеют либо вид $\Delta_\alpha(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_0 + A_0')$ и $\Delta_\alpha(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_0 + B_0)$ (некомпактный "хвост", склеенный с компактным биллиардом) либо вид $\Delta_\alpha(A_0^\infty + \sum\limits_{i=1}^{k} A_0)$, $k \leq \infty$ и (последовательная склейка некомпактного биллиарда и "куска" либо "хвоста" из A_0), либо вид $\Delta_\alpha(A_0^\infty + \sum\limits_{i=1}^{k} A_0 + A_0')$, $\Delta_\alpha(A_0^\infty + \sum\limits_{i=1}^{k} A_0 + B_0)$, $k < \infty$ $k < \infty$ (последовательная склейка некомпактного биллиарда, быть может пустого, "куска" из A_0 и компактного биллиарда), либо вид $\Delta_\alpha(A_0^\infty + \sum\limits_{i=1}^{k} A_0 + A_0^\infty)$, $k < \infty$ и (приклейка двух некомпактных биллиардов к "куску" из A_0).

Заметим, что при склейке из биллиардов A_0, A_0', B_0 и A_0^∞ составного биллиарда из элементарных биллиардов различных классов эквивалентности с образованием конических точек коническую точку могут образовывать либо два склеенных биллиарда A_0' (образующие коническую точку типа c) либо два склеенных биллиарда A_0 (образующие коническую точку типа y). Отсюда следует, что все такие биллиарды склеены из пары биллиардов A_0' либо A_0, образующих коническую точку, быть может пустого “куска” из A_0 и либо некомпактного биллиарда A_0^∞ либо бесконечного “хвоста” из A_0. Таким образом, биллиарды, склеенные из элементарных биллиардов, принадлежащих более чем одному классу эквивалентности, с образованием конических точек принадлежат к одной из трех серий биллиардов : $\Delta_\beta((2A_0')_c+\sum\limits_{i=1}^{\infty}2A_0)$, $\Delta_\beta((2A_0')_c+\sum\limits_{i=1}^{k}2A_0+2A_0^\infty)$,

$\Delta_\beta((2A_0)_y+\sum\limits_{i=1}^{k}2A_0+2A_0^\infty)$, $k<\infty$.

Предложение доказано.

□

2.4.3 Некомпактные атомы-бифуркации.

Для описания топологии некомпактных изоэнергетических поверхностей Q^3, описывающих перестройки торов, цилиндров и плоскостей необходимо ввести некомпактные атомы-бифуркации. Теория некомпактных атомов ещё не построена, поэтому ограничимся некоторыми примерами, позволяющими описать слоение Лиувилля некоторых интегрируемых некомпактных биллиардов. Отметим здесь, что в задачах физики, механики некомпактные бифуркации уже возникали, например в работе Л.Гаврилова [71]. Пусть дана трехмерная некомпактная изоэнергетическая поверхность Q^3, расслоенная линиями уровня интеграла f. Некомпактность Q^3 влечёт за собой два возможных эффекта. Во-первых, это возможная некомпактность слоёв интеграла f, в этом случае необходимо ввести новые, некомпактные, атомы, описывающие перестройки некомпактных слоёв. Во-вторых, возможна такая ситуация, при которой функция $f : Q^3 \to \mathbb{R}$ принимает бесконечные значения. Тогда окрестности прообразов бесконечных значений описываются так называемыми “пустыми атомами”, гомеоморфными прямым произведениям цилиндров (C_∞) и плоскостей (P_∞) на полуинтервал $[0, 1)$.

Замечание 31. Введение “пустых атомов” преследует две цели. С одной стороны, оно позволяет описывать Q^3 графом, т.е. не оставлять таких рёбер-полуинтервалов, только один конец которых инцидентен некоторой вершине графа. С другой стороны, такое обозначение позволяет показать топологию слоёв Q^3 на таких ребрах: если в компактном случае слои всегда торы, то в некомпактном случае они могут быть как цилиндрами, так и плоскостями. Обозначения позволяют не указывать на ребрах тип слоя (цилиндр или плоскость).

Опишем атомы, являющиеся некомпактными перестройками слоёв интеграла f друг в друга.

Для начала опишем некоторые двумерные некомпактные атомы, которые понадобятся в дальнейшем. Рассмотрим атом B и его особый слой. Он представляет собой восьмёрку. На одном “ушке” этой восьмёрки отметим точку. Рассмотрим отрезок, трансверсальный особому слою атома B и проходящий через эту точку. Такой отрезок пересекается с каждой окружностью – неособым слоем – ровно в одной точке. При удалении отрезка получится некоторый некомпактный атом, который обозначим через B' (см. рис. 2.40 ниже). Он описывает бифуркацию отрезка в отрезок и окружность. Если же в атоме B удалить два отрезка, пересекающихся с особым слоем по разные стороны от особой точки, то получим атом B'', изображённый на рисунке ниже. Этот атом описывает перестройку двух отрезков в два отрезка.

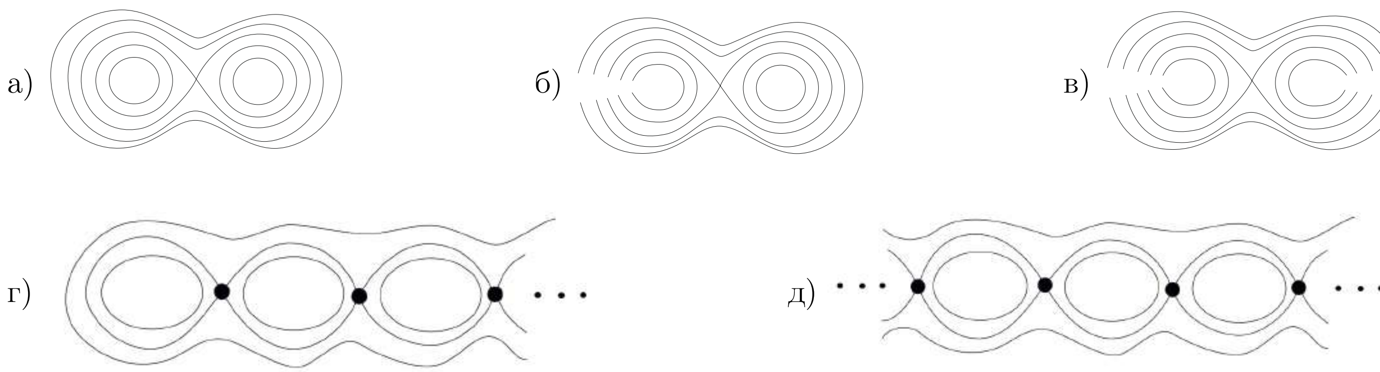


Рис. 2.40: В верхнем ряду показано, как двумерный компактный атом B (а) при удалении точки на особом слое и её окрестности на прилегающих окружностях переходит в некомпактный атом B'(б), а при удалении точек симметрично в некомпактный атом B'' (в). В нижнем ряду изображены двумерные некомпактные атомы B_∞ (г) и $B_{2\infty}$ (д). Жирным выделены особые точки.

Аналогично строятся некомпактные атомы серий B'_n и B''_n. Такие некомпактные атомы описывают перестройки отрезков и окружностей при котором особые слои содержат конечное число особых точек. Однако нам потребуются и атомы с бесконечным числом особых точек, а именно аналоги атомов серии B_n, обозначаемые через B_∞ и $B_{2\infty}$. Иначе говоря, это пределы атомов серий B_n при $n \to \infty$. Такие атомы описывают перестройки бесконечного числа окружностей в один (атом B_∞) или два (атом $B_{2\infty}$) отрезка.

Некомпактные 3-атомы определяются аналогично компактным 3-атомам рассмотрением прямого или косого произведения двумерного атома P (теперь уже некомпактного) и окружности S^1 (косого произведения, если атом имеет звёздочки). При этом атомы $(B'_n)^*$ и B^*_∞ со звездочками являются естественными аналогами атома B^*_n: дублями таких атомов являются атомы B''_{2n} и $B_{2\infty}$. Заметим, что сначала ставится "штрих,"который делает 2-атом некомпактным, а потом из некомпактного 2-атома с помощью косого домножения на окружность (операции “звездочка”, теперь уже со скобкой) образуется некомпактный 3-атом.

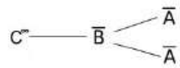
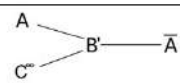
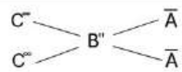
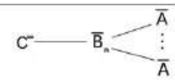
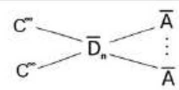
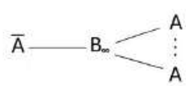
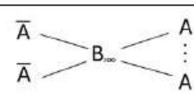
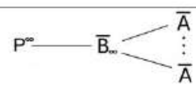
Также некомпактные 3-атомы получаются как прямые произведения двумерных компактных или некомпактных атомов на прямую $\mathbb{R}$. Такие некомпактные атомы мы будем обозначать через $\overline{P}$, где через P обозначен соответствующий компактный или некомпактный 2-атом.

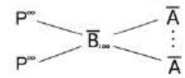
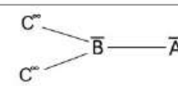
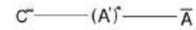
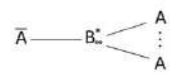
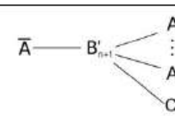
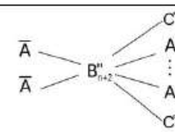
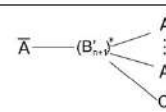
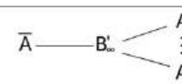
2.4.4 Топологическая классификация некомпактных биллиардов.

Теория инвариантов Лиувиллевой эквивалентности для некомпактных изоэнергетических поверхностей пока не построена. Поэтому ограничимся грубой Лиувиллевой эквивалентностью (без меток).

Теорема 2.7 ([82]). *Слоения Лиувилля и изоэнергетические поверхности*

$Q^3 := \{(x,v) \in M^4 : x \in \Theta, |v| = 1\}$ *некомпактных биллиардов* Θ *грубо классифицируются молекулами Фоменко, представленными в таблице ниже.*

Некомпактный биллиард	Молекула, описывающая топологию слоения Лиувилля некомпактного биллиарда
B_0^∞, $B_1'^\infty$, $B_2''^\infty$, $A_0'^\infty$, $A_1'^\infty$, $A_2'^\infty$	
A_1^∞, B_1^∞	
A_0^∞, $\Delta_\beta(2A_0^\infty)_y$, $\Delta_\alpha(A_0^\infty + B_0)$, $\Delta_\alpha(A_0^\infty + A_0')$	
$A_0^{2\infty}$	
B_n^∞,$B_n'^\infty$, $B_n''^\infty$	
C_n^∞	
$(B_0')_\infty$, $(B_0)_\infty$, $\Delta_\alpha(2(B_0')_\infty)$, $\Delta_\alpha(2(B_0')_\infty)$, $\Delta_\alpha(2(B_0)_\infty)$, $\Delta_\alpha(\sum_{i=1}^{\infty} A_0)$, $\Delta_\beta(\sum_{i=1}^{\infty} 2A_0)_y$, $\Delta_\beta(2(B_1)_\infty)_y$, $\Delta_\alpha(\sum_{i=1}^{\infty} A_0 + A_0')$, $\Delta_\alpha(\sum_{i=1}^{\infty} A_0 + B_0)$,	
B_∞, $\Delta_\alpha(2B_\infty)$, $\Delta_\alpha(\sum_{-\infty}^{+\infty} A_0)$	
$(B_0')_\infty^\infty$, $(B_0)_\infty^\infty$	

Некомпактный биллиард	Молекула, описывающая топологию слоения Лиувилля некомпактного биллиарда
B_∞^∞	
$\Delta_\beta(2A_1'^\infty)_e$	
$\Delta_\beta(2A_0'^\infty)_e$	
$\Delta_\beta(2(B_0')_\infty)_x$, $\Delta_\beta((2A_0')_e + \sum_{i=1}^{\infty} 2A_0)$	
$\Delta_\alpha(A_0^\infty + \sum_{i=1}^{n} A_0)$, $\Delta_\alpha(A_0^\infty + \sum_{i=1}^{n} A_0 + B_0)$, $\Delta_\alpha(A_0^\infty + \sum_{i=1}^{n} A_0 + A_0')$, $n < \infty$, $\Delta_\beta((2A_0)_y + \sum_{i=1}^{n-1} 2A_0 + 2A_0^\infty)$, $1 \le n < \infty$	
$\Delta_\alpha(A_0^\infty + \sum_{i=1}^{n} A_0 + A_0^\infty)$, $n < \infty$	
$\Delta_\beta((2A_0')_e + \sum_{i=1}^{n} 2A_0 + 2A_0^\infty)$, $n < \infty$	
$\Delta_\alpha(A_0^\infty + \sum_{i=1}^{\infty} A_0)$	

Лемма 2.8. *Пусть* Ω *– компактный биллиард. Прообраз каждого его граничного сегмента на слоях-торах изоэнергетической поверхности является объединением нестягиваемых окружностей – циклов.*

Доказательство леммы следует из доказательства теорем (см. [55], теоремы 4.1 и 4.2) о топологической классификации компактных выпуклых интегрируемых биллиардов.

Доказательство. Из леммы следует, что если некомпактный биллиард можно представить как предел компактных, эквивалентных друг другу биллиардов, т.е. фактически устремить на бесконечность один или два граничных сегмента данного биллиарда, то это приведёт к тому что неособые слои-торы либо останутся торами (если в их проекции на область компактного биллиарда не было устремленных к бесконечности сегментов) либо станут цилиндрами (если в их проекции на область компактного биллиарда был ровно один устремленный к бесконечности сегмент), либо перейдут в плоскости (если в их проекции на область компактного биллиарда было три последовательных сегмента, устремленных к бесконечности)

Шаг первый. Биллиарды B_0^∞, $B_1'^\infty$, $B_2''^\infty$, $A_0'^\infty$, $A_1'^\infty$, $A_2'^\infty$. Каждый из этих некомпактных биллиардов может быть получен как предел эквивалентных друг другу компактных биллиардов при размещении на бесконечности граничного выпуклого эллиптического сегмента. Молекула, описывающая топологию слоения Лиувилля такого компактного биллиарда имеет вид $A-A$. Из леммы следует, что при переходе к пределу все торы перейдут в цилиндры (так как они будут разрезаны по циклам, соответствующим эллиптическому сегменту на бесконечности). При этом один из атомов A перейдёт в атом C^∞ (пустой предел цилиндров), так как его особая окружность представляла собой движение по выпуклому эллиптическому сегменту. Другой атом A перейдёт при этом в атом $\overline{A}$ – его особая прямая соответствует движению либо по выпуклой граничной гиперболической дуге, либо вдоль вертикальной прямой Oy.

Шаг второй. Бесфокусные биллиарды – аналоги компактных биллиардов, склеенных из биллиардов-лент серии B и биллиардов-колец серии C – B_n^∞,$B_n'^\infty$, $B_n''^\infty$ и C_n^∞.

Доказательство для таких биллиардов аналогично предыдущему шагу. Отметим, что в прообразе выпуклого эллиптического сегмента в изоэнергетической поверхности компактного биллиарда лежит особый слой двумерного атома B_n (или D_n для биллиарда C_n). Таким образом, переход к пределу равноценен разрезу компактного 3-атома трансверсально особой окружности, что приводит к образованию некомпактного 3-атома, полученного из той же базы домножением на прямую.

Шаг третий. Биллиарды, склеенные из биллиардов A_0^∞, $A_0^{2\infty}$ и конечного числа биллиардов A_0, A_0' и B_0. Пусть биллиард Θ не содержит конических точек и может быть получен как предел компактного биллиарда Ω либо вида $\Delta_\alpha(P+\sum\limits_{i=1}^{k} A_0+A_0)$ либо вида $\Delta_\alpha(A_0+\sum\limits_{i=1}^{k} A_0+A_0)$, где P – это либо пустой биллиард, либо эквивалентен A_0', либо B_0, а число $k\geq 0$, при котором свободный выпуклый сегмент крайних биллиардов A_0 (первой и последней в склейке) стремится к бесконечности.

Заметим, что 3-атом, описывающий бифуркацию на седловом уровне интеграла Λ изоэнергетической поверхности компактного биллиарда Ω имеет в этом случае вид 3-атома B_n, где n – число биллиардов A_0, входящих в биллиард Ω. Окружности седлового слоя – это движения вдоль фокальной прямой в каждой биллиарда A_0. Если рассмотреть объединение дуг некоторой гиперболы, лежащих в биллиардах, из которых склеен биллиард Ω и оснастить его единичными векторами скорости, то получим сечение 3-атома, которое будет соответствующим ему 2-атомом B_n. На рисунке 2.41 показано разбиение этого 2-атома на участки, точки которых лежат в соответствующих элементарных биллиардах, составляющих биллиард Ω.

При переходе к пределу дуги гипербол, лежащие в крайних биллиардах A_0, становятся

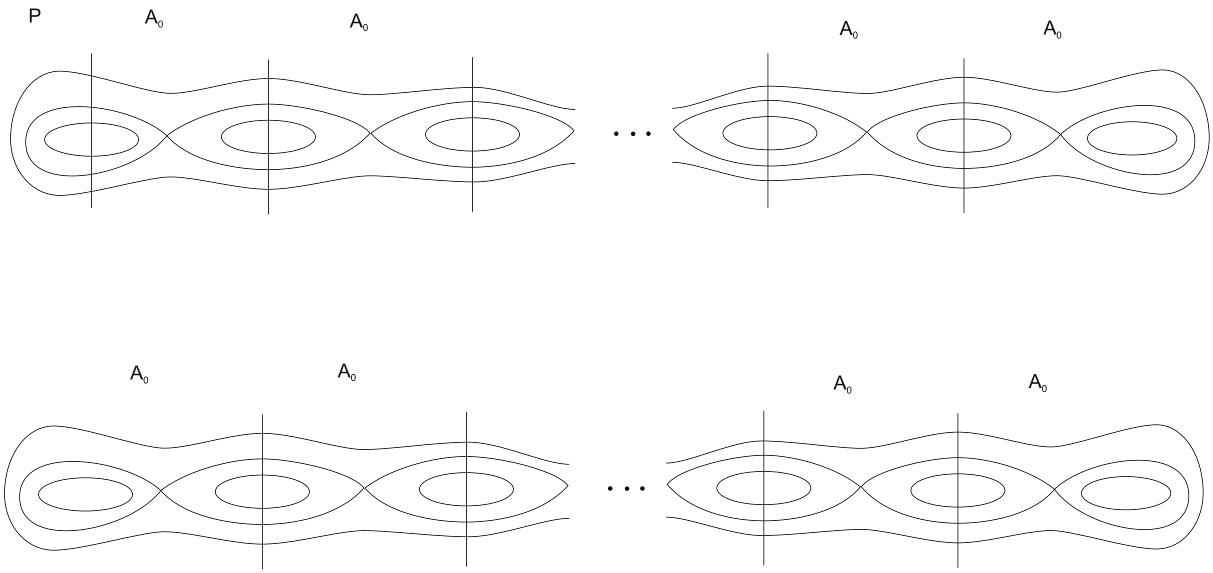


Рис. 2.41: На рисунке показано разбиение сечения 3-атома, описывающего бифуркацию на седловом уровне интеграла Λ изоэнергетической поверхности компактного биллиарда Ω, на участки, точки которых лежат в соответствующих элементарных биллиардах, составляющих биллиард Ω. Сверху показано разбиение для биллиарда $\Delta_\alpha(P + \sum\limits_{i=1}^{k} A_0 + A_0)$, а снизу – для биллиарда $\Delta_\alpha(A_0 + \sum\limits_{i=1}^{k} A_0 + A_0)$.

некомпактными, что приводит к разрыву в 2-атоме B_n, при котором он становится либо атомом B_n' (один разрыв, биллиард вида $\Delta_\alpha(P + \sum\limits_{i=1}^{k} A_0 + A_0)$), либо атомом B_n'' (два разрыва, биллиард вида $\Delta_\alpha(A_0 + \sum\limits_{i=1}^{k} A_0 + A_0)$).

В случае биллиарда $A_0^{2\infty}$ все утверждения можно провести аналогично, при этом разрывы происходят в 2-атоме B.

Пусть биллиард Θ эквивалентен биллиарду $\Delta_\beta(2A_0^\infty)_y$. Рассмотрим данный биллиард как предел биллиардов $\Delta_\beta(A_0)_y^2$. Заметим, что трансверсальное критической окружности сечение 3-атома B, описывающего бифуркацию на седловом уровне интеграла Λ изоэнергетической поверхности биллиарда $\Delta_\beta(A_0)_y^2$, нельзя построить аналогично случаям выше – этому мешает дополнительная склейка выпуклых эллиптических сегментов, которая образует коническую точку. Однако это сечение можно построить так, что оно совпадает с описанным выше (оснащенные дуги гипербол) на частях биллиардов A_0 находящихся по одну сторону от фокальной прямой, которые не склеены в коническую точку. При переходе к пределу именно их выпуклые граничные эллиптические сегменты стремятся к бесконечности, что приводит к разрыву в двумерных атомах B, которым гомеоморфны оснащенные дуги гипербол. Аналогичное построение проводится и в том случае, когда биллиард Θ эквивалентен биллиарду $\Delta_\beta((2A_0)_y + \sum\limits_{i=1}^{n} 2A_0 + 2A_0^\infty)$.

Пусть биллиард Θ эквивалентен биллиарду $\Delta_\beta(2A_0'^\infty)_c$. Рассмотрим данный биллиард как предел биллиардов $\Delta_\beta(A_0')_c^2$. Тогда 3-атом, описывающий бифуркацию на седловом уровне интеграла Λ изоэнергетической поверхности такого биллиарда является атомом A^*. Трансверсальное критической окружности сечение – 2-атом B также может быть получен как оснащенные дуги гипербол, заполняющих биллиарда A_0'. При переходе к пределу оба "ушка" этих атомов разрываются. При этом сохраняется структура косого домножения на окружность теперь уже некомпактного 2-атома, что приводит к образованию 3-атома $(A')^*$. Аналогично проводится построение для биллиарда $\Delta_\beta((2A_0'^\infty)_c + \sum\limits_{i=1}^{n} 2A_0 + 2A_0^\infty)$.

Шаг четвертый. Биллиарды A_1^∞ и $\Delta_\beta(2A_1'^\infty)_c$. Рассмотрим биллиард A_1^∞ как предел биллиардов A_1. Трансверсальное критической окружности расслоение 3-атома A^* на двумерные атомы B строится нетривиально, так как данный биллиард содержит фокусы семейства границы. Однако вблизи эллиптического граничного сегмента это сечение можно построить, взяв оснащенные векторами скорости дуги софокусных эллипсов. Зафиксируем эллипс с параметром $b/2$. Дуги эллипсов входят в область биллиарда A_1 при $\lambda \in [t; b/2]$, где t – параметр граничного эллиптического сегмента биллиарда A_1. При этом эти дуги, будучи оснащены единичными векторами скорости, гомеоморфны двум двумерным атомам B (двум по направлению векторов скорости – направо или налево) при $\lambda \neq t$ и одному атому B при $\lambda = t$. Оснащенное векторами скорости объединение этих дуг в изоэнергетическом многообразии Q^3 гомеоморфно прямому произведению 2-атома B на отрезок $[t; b/2]$. При переходе к пределу t стремится к $-\infty$, что приводит к тому что объединение дуг разрывается на два произведения "левых" и "правых" (по направлению векторов скорости) атомов B на интервал $(-\infty; b/2]$. Эти интервалы склеиваются с оставшейся компактной частью атома A^* – произведению отрезка и атома B, образуя некомпактный 3-атом $\overline{B}$. Аналогичное рассуждение можно провести для биллиарда $\Delta_\beta(2A_1'^\infty)_c$, рассмотрев его как предел биллиарда $\Delta_\beta(A_1')_c^2$.

Шаг пятый. Биллиарды с бесконечным числом отрезков фокальной прямой. Пусть биллиард Θ не содержит конических точек и может быть получен как предел компактных биллиардов Ω_k вида $\Delta_\alpha(\sum\limits_{i=1}^{k} A_0 + P)$ при $k \to \infty$. Здесь P это либо пустой биллиард, либо биллиард, эквивалентный A_0', B_0 либо A_0^∞. Заметим, что при конечных k атом, описывающий бифуркацию на седловом слое интеграла Λ, будет гомеоморфен либо компактному атому B_k (если биллиард Ω_k компактен) либо некомпактному атому B_k'. При стремлении k к бесконечности число критических окружностей этих атомов растет, в результате в пределе получается либо некомпактный 3-атом B_∞ (если область биллиард Θ не содержит в качестве подобласти область биллиарда A_0^∞) либо 3-атом B_∞'. Если биллиард Θ можно представить как предел биллиардов Ω_k вида $\Delta_\alpha(\sum\limits_{i=-k}^{k} A_0)$ при $k \to \infty$, то это приводит к тому что пределом 3-атомов B_k, описывающих бифуркацию на седловом слое интеграла Λ биллиарда Ω_k, будет некомпактный атом $B_{2\infty}$. Пусть биллиард Θ эквивалентен биллиарду $\Delta_\beta(\sum\limits_{i=1}^{\infty} 2A_0)_y$. Тогда его можно представить как предел биллиардов Ω_k вида $\Delta_\beta(\sum\limits_{i=1}^{k} 2A_0)_y$ при $k\to\infty$. При этом седловые компактные двумерные и трехмерные атомы B_k (как в сечениях, трансверсальных критической окружности, так в 3-атомы целиком) в пределе перейдут в некомпактные 2- и 3-атомы B_∞. Аналогичное рассуждение можно провести для биллиарда $\Delta_\beta((2A'_0)_c + \sum\limits_{i=1}^{\infty} 2A_0)$, представив его как предел биллиардов Ω_k вида $\Delta_\beta((2A'_0)_c + \sum\limits_{i=1}^{k} 2A_0)$ при $k\to\infty$.

Пусть биллиард Θ эквивалентен биллиарду $(B'_0)_\infty$ либо $(B_0)_\infty$. В этом случае он может быть разрезан вдоль дуг софокусных гипербол в бесконечное число биллиардов B_1 и B'_0, а именно $\sum\limits_{i=1}^{\infty} B_1 + B'_0$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} B_1$. В этом случае они могут быть рассмотрены как пределы компактных биллиардов Ω_k вида $\sum\limits_{i=1}^{k} B_1 + B'_0$, и $(B_0)_\infty = \sum\limits_{i=1}^{k} B_1$ при $k\to\infty$. При конечных k атом, описывающий бифуркацию на седловом слое интеграла Λ будет гомеоморфен компактному 3-атому B_k, который при стремлении k к бесконечности перейдёт в 3-атом B_∞. Данное рассуждение можно провести для биллиардов $\Delta_\beta((2B_0)_\infty)_y$ и $\Delta_\beta((2B'_0)_\infty)_x$ представив их как пределы компактных биллиардов Ω_k вида $\sum\limits_{i=1}^{k} 2B_1 + (B_0)_y^2$, и $\sum\limits_{i=1}^{k} B_1 + (B'_0)_x^2$ при $k\to\infty$ соответственно. Если биллиард Θ эквивалентен биллиарду B_∞, то его можно разрезать вдоль дуг софокусных гипербол в бесконечное число биллиардов B_1 таким образом что его можно рассмотреть как предел биллиардов Ω_k вида $\sum\limits_{i=-k}^{k} B_1$ при $k\to\infty$. Тогда 3-атом, описывающий бифуркацию на седловом слое интеграла Λ, будет гомеоморфен некомпактному атому $B_{2\infty}$.

Пусть биллиард Θ эквивалентен биллиарду $\Delta_\alpha(2(B'_0)_\infty)$, $\Delta_\alpha(2(B_0)_\infty)$ либо $\Delta_\alpha(2B_\infty)$, то есть может быть разбит в бесконечное объединение удвоенных биллиардов $\Delta_\alpha(2B_1)$ и $\Delta_\alpha(2B'_0)$. Заметим, что взятие “удвоенного” биллиарда в случае биллиарда-ленты серии B не меняет топологию слоения Лиувилля, следовательно, молекулы биллиардов $\Delta_\alpha(2(B'_0)_\infty)$, $\Delta_\alpha(2(B_0)_\infty)$ и $\Delta_\alpha(2B_\infty)$ совпадают с молекулами в биллиардах $(B'_0)_\infty$, $(B_0)_\infty$ и B_∞.

Пусть биллиард Θ эквивалентен биллиарду $(B'_0)_\infty^\infty$, $(B_0)_\infty^\infty$ либо B_∞^∞. В этом случае он может быть получен как предел биллиарда $\tilde{\Theta}$, эквивалентног биллиарду $(B'_0)_\infty$, $(B_0)_\infty$ и B_∞ соответственно. Покажем, как устроено слоение 3-атома, описывающего бифуркацию на седловом слое интеграла Λ изоэнергетической поверхности Q^3 биллиарда $\tilde{\Theta}$. Пусть эллиптические сегменты границы биллиарда $\tilde{\Theta}$ лежат на эллипсах с параметрами $\lambda_e > \lambda_E$. Фиксируем параметр $\lambda \in (\lambda_E, \lambda_e)$. Объединение (бесконечное) дуг эллипса с параметром λ, лежащих в биллиарде $\tilde{\Theta}$, будучи оснащено векторами скорости, гомеоморфно паре плоских атомов B_∞ (либо $B_{2\infty}$ в случае если биллиард $\tilde{\Theta}$ эквивалентен биллиарду B_∞). Бесконечное объединение дуг эллипса с параметром границы (т.е. либо с λ_e либо с λ_E) гомеоморфно одному плоскому атому B_∞ ($B_{2\infty}$ в случае если биллиард $\tilde{\Theta}$ эквивалентен биллиарду B_∞). Таким образом весь 3-атом целиком это прямое произведение окружности на соответствующий плоский седловой атом. При переходе к пределу при $E \to -\infty$ биллиард $\tilde{\Theta}$ перейдёт в биллиард Θ, а окружность, на которую раньше был домножен 2-атом перейдёт в прямую. Следовательно, 3-атом, описывающий бифуркацию на седловом слое интеграла Λ изоэнергетической поверхности Q^3 биллиардов $(B_0')^\infty_\infty$ и $(B_0)^\infty_\infty$ будет гомеоморфен атому $\overline{B_\infty}$, а для биллиарда B^∞_∞ – атому $\overline{B_{2\infty}}$.

Теорема доказана. □

Замечание 32. Заметим, что отношение эквивалентности на множестве некомпактных биллиардов позволяет перейти к некоторым биллиардам, содержащим только прямолинейные границы, а именно, к биллиарду в некомпактном углу $A_1'^\infty$ и биллиардам в полуплоскости $A_2'^\infty$ и A_1^∞. Заметим, что благодаря выбору интеграла мы получили два различных слоения Лиувилля, которые описываются разными молекулами Фоменко.

2.5 Слоения Лиувилля топологических круговых биллиардов

2.5.1 Выпуклые топологические круговые биллиарды, ограниченные окружностями.

Наряду с биллиардами D и C, ограниченных одной и двумя окружностями соответственно, рассмотрим гомеоморфный сфере топологический биллиард $\Delta(2D)$, полученный склейкой двух экземпляров биллиарда D вдоль граничной окружности.

Угол φ между звеном траектории частицы и границей биллиарда принимает значения в отрезке $[0, \pi]$. Для биллиарда значение $\varphi = 0$ соответствует движению по часовой стрелке вдоль граничной окружности (или окружности склейки в случае биллиарда $\Delta(2D)$). Значению $\varphi = \pi$ соответствует движение вдоль граничной окружности (или окружности склейки в случае биллиарда $\Delta(2D)$) против часовой стрелки. При $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ траектории частицы (или, возможно, их продолжения для биллиарда C) касаются некоторой фиксированной окружности меньшего радиуса с тем же центром что и граничная окружность. При этом все траектории частицы "закручиваются" по часовой стрелке. При $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ траектории также касаются некоторой фиксированной окружности меньшего радиуса с тем же центром что и граничная окружность. Эти траектории "закручиваются" против часовой стрелки (см. рис. 2.44). Значению $\varphi = \frac{\pi}{2}$ соответствуют траектории, каждая из которых проходит вдоль некоторой прямой, проходящей через центр граничной окружности.

Предложение 2.5.1 ([91]). *Рассмотрим слоения Лиувилля на изоэнергетических поверхностях $Q^3 = \{(x, v) \in M^4 : |v|^2 = 1\}$ для следующих биллиардов. Биллиард D (диск), ограниченный одной окружностью. Биллиард C (кольцо), ограниченный двумя концентрическими окружностями. Топологический биллиард $\Delta(2D)$, гомеоморфный сфере, получается склейкой двух* *экземпляров области D вдоль граничной окружности. Тогда инвариант Фоменко-Цишанга – меченая молекула, описывающая топологию слоения Лиувилля, имеет для перечисленных бильярдов вид $A - A$ со следующими метками:*

$r = 0$, $\varepsilon = 1$, *для биллиарда* D,

$r = \infty$, $\varepsilon = 1$, *для биллиарда* C,

$r = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = 1$, *для биллиарда* $\Delta(2D)$.

Доказательство. **Шаг 1. Аналог теоремы Лиувилля. Вычисление грубой молекулы.** Очевидно, что при $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, а также при $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ каждый уровень интеграла φ гомеоморфен тору. Особые уровни интеграла $\varphi = \{0, \pi\}$ — это окружности. Покажем, что уровень интеграла $\varphi = \frac{\pi}{2}$ также гомеоморфен тору.

Для биллиарда C это утверждение очевидно. В самом деле, из каждой точки внутренней граничной окружности может быть выпущена только одна траектория. Эта траектория гомеоморфна окружности. Таким образом, уровень интеграла гомеоморфен прямому произведению внутренней окружности на окружность, задаваемую траекторией частицы, т.е. гомеоморфен тору.

Рассмотрим биллиард D. Фиксируем горизонтальную прямую l, проходящую через центр окружности. Каждой траектории частицы (состоящей из двух диаметров, проходимых в прямом и обратном направлении) сопоставим точку граничной окружности, лежащую не ниже прямой l. В этом случае всем траекториям частицы (кроме одной) будет сопоставлена одна точка. Однако траектории частицы, движущейся по прямой l, будут сопоставлены две точки (а именно, точки пересечения прямой l и граничной окружности). При склейке этих двух точек верхняя половина окружности склеится в окружность. Таким образом, этот слой интеграла φ также гомеоморфен тору.

В гомеоморфном сфере биллиарде $\Delta(2D)$ каждая траектория однозначно задаётся единичным вектором в начале координат (центр диска). Множество таких векторов гомеоморфно окружности. Так как каждая траектория гомеоморфна окружности, то соответствующий слой гомеоморфен тору.

Тем самым бы доказали, что все уровни интеграла кроме двух гомеоморфны двумерным торам. При этом два особых слоя гомеоморфны окружностям. Следовательно, молекула Фоменко имеет вид $A - A$.

Шаг 2. Вычисление меток.

Напомним, что для вычисления меток нам потребуются допустимые базисы на граничных торах. Следуя стандартным обозначениям, пусть λ и μ – два базисных цикла на торе (см. [5]). Не нужно путать цикл λ с параметром софокусной квадрики.

Напомним, что цикл λ выбирается так, чтобы он стягивался в точку при приближении к атому A. Цикл μ при этом выбирается как цикл, дополняющий λ до базиса. На рисунке 2.42

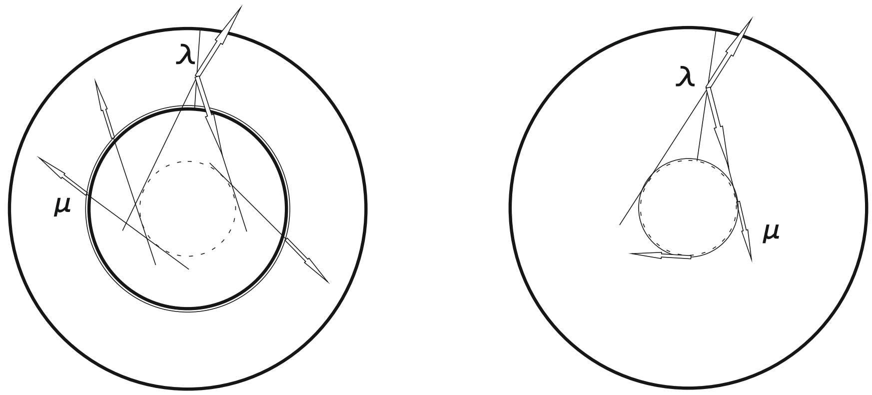


Рис. 2.42: Циклы λ и μ в биллиардах C (слева) и D (справа). Циклы на торах изображены кривыми на плоскости биллиарда, оснащенными стрелками – обозначающими вектора скорости биллиардной частицы.

изображены циклы λ и дополняющие их циклы μ для биллиардов D и C в случае торов Лиувилля, "близких" к атому A, отвечающему движению частиц по часовой стрелке. Для биллиарда $\Delta(2D)$ цикл μ выбирается так же, тогда как цикл λ проходит по обоим экземплярам биллиарда D. Отметим, что вблизи торов, "близких" к минимаксному атому A, отвечающему движению частицы против часовой стрелки, циклы λ и μ выбираются аналогично. При этом ориентация циклов μ совпадает с направлением движения частицы.

В биллиарде C для пограничного значения дополнительного интеграла $\varphi = \frac{\pi}{2}$ циклы на соответствующем торе связаны следующей матрицей склейки $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. В самом деле, знаки ± 1 возникают потому, что ориентации циклов μ противоположны, в то время как ориентации циклов λ должны быть выбраны так, чтобы матрица склейки имела определитель равный -1. Отметим, что ориентации циклов μ противоположны, так как движения частицы, соответствующие им, противоположны. Получаем метки $r = \infty$, $\varepsilon = 1$.

В биллиардах D и $\Delta(2D)$ преобразование циклов λ при переходе через уровень $\varphi = \frac{\pi}{2}$ устроено усложнее. Начнём с биллиарда D. Рассмотрим цикл $\gamma = 2\lambda + \mu$. При значении интеграла $\varphi = \frac{\pi}{2}$ такой цикл соответствует движению по диаметру окружности. Следовательно, $2\lambda^- + \mu^- = 2\lambda^+ + \mu^+$. Воспользовавшись тем, что $\mu^+ = -\mu^-$, получаем матрицу склейки $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, откуда метки $r = 0$, $\varepsilon = 1$.

В биллиарде $\Delta(2D)$ рассмотрим цикл $\gamma = \lambda + \mu$. Исходя из тех же соображений, получаем матрицу склейки $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, откуда метки $r = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = 1$. Утверждение доказано. $\square$

Замечание 33. Данные биллиарды выпуклые в смысле указанном выше.

2.5.2 Слоения Лиувилля круговых биллиардов в четверти и половине круга

В этом параграфе рассмотрим два примера интегрируемых круговых биллиардов, ограниченных не только дугами концентрических окружностей, но и прямыми, проходящими через общий центр окружностей. Оказывается, что в слоении Лиувилля таких биллиардов один из особых слоёв (а именно слой отвечающий траекториям, лежащим на радиусах окружностей) гомеоморфен кольцу или ленте Мёбиуса, а не особому слоя некоторого 3-атома, как для биллиардов, описанных ранее в этой главе. В этом заключается яркое отличие круговых биллиардов, граница которых содержит отрезки прямых, от интегрируемых биллиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик: эллипсами и гиперболами или софокусными параболами.

Обозначим через D_h (half) и D_q (quarter) биллиарды в половине и в четверти круга соответственно. Опишем их слоение Лиувилля.

Предложение 2.5.2. *Слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности биллиарда D_h в половине круга описывается следующим аналогом инварианта Фоменко-Цишанга $A - A_\mu$, где через A_μ обозначено полноторие, расслоенное на торы, которые стягиваются на лист Мёбиуса.*

Слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности биллиарда D_q в четверти круга описывается следующим аналогом инварианта Фоменко-Цишанга $A - A_a$, где через A_a обозначено полноторие, расслоенное на торы, которые стягиваются на кольцо.

Метка r на ребре между атомами в обоих случаях равна нулю.

Доказательство. Напомним, что мы обозначили через ϕ интеграл данного биллиарда – угол между траекторией и границей. При этом ϕ принимает значения в промежутке $[0, \frac{\pi}{2}]$. Легко показать, что при $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ слои являются торами (см. например, доказательство аналогичных утверждений для биллиардов, ограниченных эллипсами и гиперболами). При $\phi = 0$ движение вдоль дуги граничной окружности является критической траекторией, осью полнотория A. Обозначим через G уровень интеграла $\phi = \frac{\pi}{2}$ в изоэнергетической поверхности биллиарда.

Покажем, что G гомеоморфен листу Мёбиуса для биллиарда D_h. Представим уровень G как склейку двух частей (см. рис. 2.43). Первая часть состоит из точек биллиарда, оснащенных векторами в центр (в центре – векторами “наружу” области биллиарда), а вторая – векторами из центра (в центре – векторами “внутрь” области биллиарда). Каждая из этих частей гомеоморфна прямоугольнику, в вершинах которого расположены точки $Q^3 = (x, v)$, где вектор v направлен по касательной к прямолинейной границе биллиарда, а точки x лежат либо в центре либо в углах биллиардной области. Отождествляя края уровня этих частей, склеивая вектора по закону отражения, получаем лист Мёбиуса (см. рис. 2.43). Лист Мёбиуса может быть стянут на осевую окружность– траекторию (выделена красным). Покажем выбор цикла λ – стягиваемого внутри полнотория A_μ в точку. Рассмотрим дугу некоторой фиксированной окружности, и оснастим её векторами скорости, так чтобы соответствующие прямые касались окружности-каустики. В результате получим цикл λ_1 : при $\phi = \frac{\pi}{2}$ данный цикл превратится в отрезок. Вектора скорости на рис. 2.43 направлены из центра. Очевидно, что с циклом λ_2, стягивающегося в точку внутри полнотория A он пересекается в одной точке (соответствующий этой точке вектор скорости указан черным цветом), откуда следует, что метка $r = 0$. Аналогично можно показать, что для

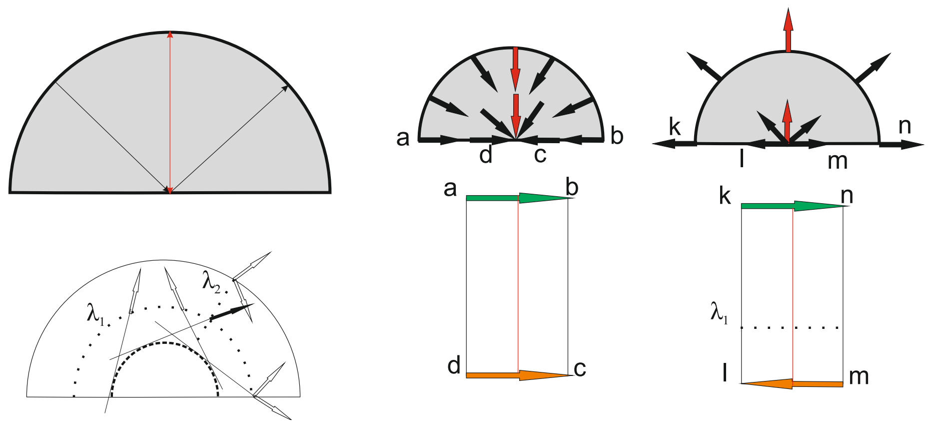


Рис. 2.43: Особый слой биллиарда D_h гомеоморфен листу Мёбиуса. Красным выделена траектория, соответствующая осевой окружности листа Мёбиуса.

биллиарда D_q особый слой гомеоморфен кольцу (см. рис. 2.44), а метка r между полноториями равна 0. □

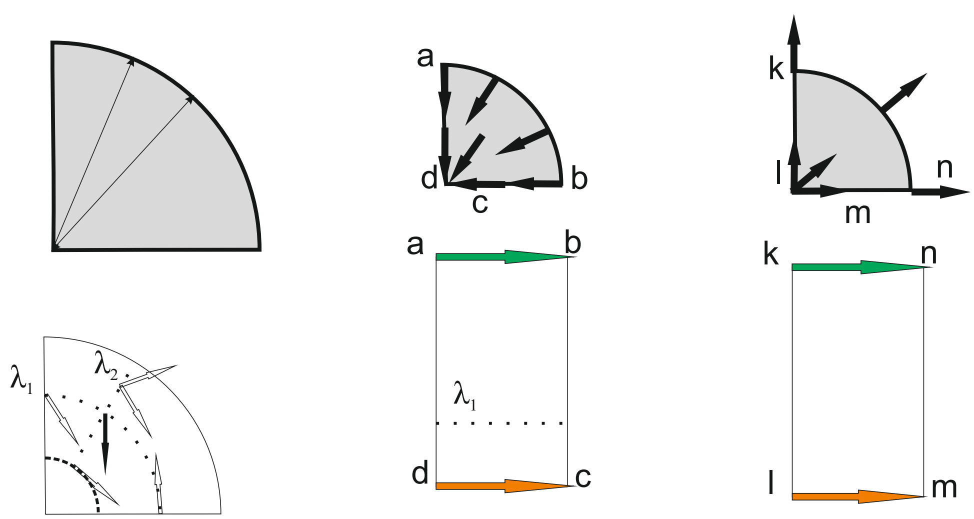


Рис. 2.44: Особый слой биллиарда D_q гомеоморфен кольцу.

Замечание 34. Напомним, что в случае данной молекулы значение метки ε зависит от ориентации многообразия, т.е. может принимать оба своих значения ± 1.

2.5.3 Слоения Лиувилля невыпуклых топологических круговых бильярдов

Начиная с этого момента, мы переходим к построению невыпуклых круговых биллиардов. Рассмотрим последовательную склейку нескольких областей C друг с другом в кольцо. Отметим, что при склейке двух областей C мы отождествляем только окружности-сегменты склейки одинакового радиуса, тогда как две другие граничные окружности могут иметь различные радиусы. Обозначим результат склейки через $\Delta(nC)$. Получается биллиард, похожий на "гармошку" или "китайский фонарик".

Обозначим через $\Delta(D + nC + D)$ гомеоморфный сфере биллиард, полученный заклейкой граничных окружностей цилиндра $\Delta(nC)$ двумя областями D, гомеоморфными диску. То есть заклеим дисками верхнюю и нижнюю "дырки" на "гармошке" (на "китайском фонарике"). В дальнейшем биллиард $\Delta(D+nC+D)$ будем называть "сферой-гармошкой". Теперь рассмотрим цилиндр $\Delta(nC)$, у которого радиусы граничных окружностей одинаковы. В этом случае построим биллиард $T(nC)$, гомеоморфный тору и получающийся отождествлением этих граничных окружностей. Иными словами, сворачиваем "китайский фонарик" в тор, отождествляя две его граничные окружности. В дальнейшем биллиард $T(nC)$ в будем называть "тором-гармошкой".

Построенные биллиарды – невыпуклые. Обозначим через Δ биллиард $\Delta(D + nC + D)$ или $T(nC)$. Построим по биллиарду Δ функцию $\tilde{f}$ следующим образом. Фиксируем окружность с центром в начале координат, радиус которой меньше радиусов всех граничных окружностей биллиардов D и C, входящих в состав биллиарда Δ. Фиксируем луч, исходящий из начала координат. Обозначим через P пересечение биллиарда Δ (т.е. всех элементарных биллиардов D и C, его составляющих) с этим лучом. Для биллиарда $\Delta(D+nC+D)$ пересечение P гомеоморфно отрезку, а для биллиарда $T(nC)$ — окружности. Определим на P функцию $\tilde{f}$ следующим образом. Значение $\tilde{f}(x)$ равно радиусу окружности с центром в начале координат, проходящей через точку $x \in P$.

Предложение 2.5.3 ([91]). *Инварианты Фоменко-Цишанга – меченые молекулы, описывающие топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности $Q^3 = \{(x, v) \in M^4 : |v|^2 = 1\}$ биллиардов $\Delta(D+nC+D)$ и $T(nC)$ имеют вид, показанный на рис. 2.45. Внутри графов $W(\tilde{f})$ и $W_2(\tilde{f})$ метки следующие. Между атомами A и седловыми атомами $r = 0,\ \varepsilon = 1$, а между седловыми атомами $r = \infty,\ \varepsilon = 1$.*

Доказательство. **Шаг 1. Построение грубой молекулы.** По аналогии с плоским или выпуклым топологическим биллиардом разобьём все траектории частицы на три типа. А именно, соответствующие движению частицы по часовой стрелке (значение интеграла $\varphi < \frac{\pi}{2}$), против часовой стрелки (значение интеграла $\varphi > \frac{\pi}{2}$) и по отрезкам прямых, проходящих через начало координат (значение интеграла $\varphi = \frac{\pi}{2}$).

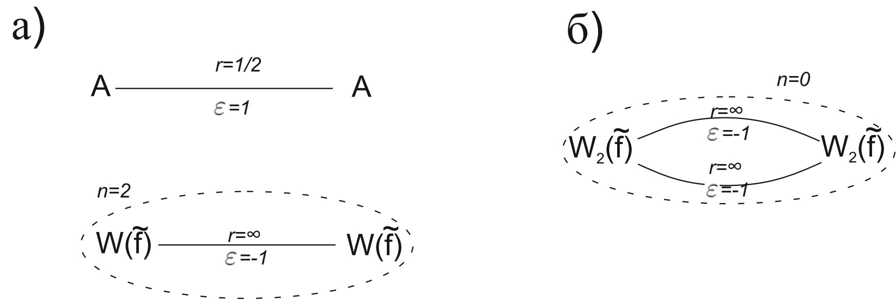


Рис. 2.45: Инвариант Фоменко-Цишанга для слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности биллиарда $\Delta(D + nC + D)$ (см. а) и $T(nC)$ (см. б).

Рассмотрим для достаточно малого $\delta > 0$ двумерный прообраз $W := \{(x, v)|x \in P, \varphi(x, v) \in [0, \frac{\pi}{2} - \delta]\}$, лежащий в изоэнергетическом 3-многообразии. Докажем, что множество W послойно гомеоморфно молекуле (вершины которой отвечают двумерным атомам), задающейся графом $W(\tilde{f}(\Delta))$ в случае, если P гомеоморфно отрезку, и графом $W_2(\tilde{f}(\Delta))$ в случае, если P гомеоморфно окружности.

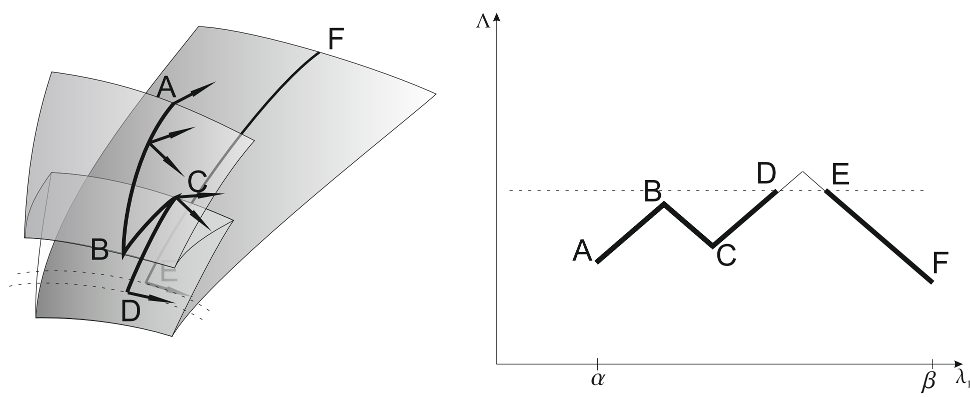


Рис. 2.46: Проекция уровня интеграла $\varphi = \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ на точки отрезка P, состоящего из отрезков, лежащих на радиусах окружностей. По оси x отложена координата точки отрезка P. Пунктиром выделена окружность, которой касаются траектории (или их продолжения) на данном уровне интеграла. Проекция уровня интеграла состоит из двух ломаных $ABCDE$ и FGH. Прообразы концов этих ломаных – точек A, E, F и H, состоят из одной точки, так как такие точки могут быть оснащены только одним подходящим вектором скорости (касательным к пунктирной окружности). Прообразы остальных точек ломаных состоят из двух точек. Поэтому, в прообразе каждой ломаной лежит одна окружность.

Фиксируем уровень интеграла $\varphi = \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим окружность, которой касаются траектории, лежащие на этом уровне интеграла. Её радиус обозначим через ρ.

Рассмотрим случай, когда множество P гомеоморфно отрезку. Пусть прямая $r = \rho$ трансверсально пересекает график построенной по области Δ функции $\tilde{f}$. То есть эта прямая не проходит ни через точки минимума ни через точки максимума. Тогда в области, расположенной под графиком функции $\tilde{f}$, она высекает некоторое количество горизонтальных отрезков, каждый из которых соответствует некоторой точке на ребре графа $W(\tilde{f}(\Delta))$. Пусть Y произвольный из этих горизонтальных отрезков. Рассмотрим ломаную L – часть графика функции $\tilde{f}$, расположенную не ниже этого отрезка (см. конкретный пример на рис. 2.46). Внутренние точки ломаной L соответствуют точкам P, в прообразе которых содержатся две точки. Концы ломаных могут быть оснащены лишь одним вектором скорости, поэтому их прообраз на уровне интеграла (т.е. в слое проекции) состоит ровно из одной точки. Поэтому каждой ломаной L, а значит и отрезку Y, соответствует окружность в W на уровне интеграла $\varphi = \varphi_0$.

В случае, когда множество P гомеоморфно окружности, необходимо выделить следующий случай. Областью определения функции $\tilde{f}$ является множество P. Оно получается путём склейки отрезка с концами α и β. Геометрический смысл α и β таков. Эти точки лежат на граничных окружностях цилиндра $\Delta(nC)$ одинакового радиуса. При склейке данного цилиндра в тор эти точки склеиваются между собой. В примере на рисунке 2.47 точки α и β это концы отрезка на оси x, являющегося областью определения функции $\tilde{f}$.

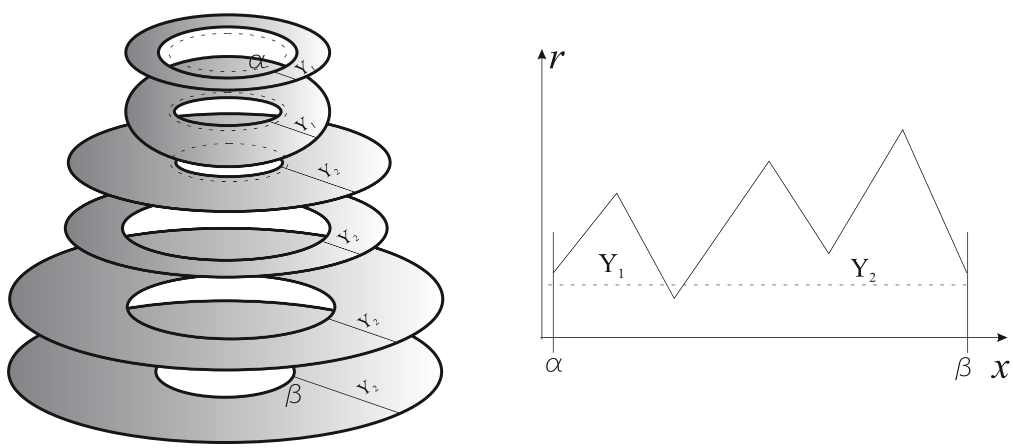


Рис. 2.47: Проекция уровня интеграла $\varphi = \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ на точки окружности P, состоящей из отрезков, лежащих на радиусах. По оси x отложена точка отрезка P. Пунктиром выделена окружность, которой касаются траектории (или их продолжения) на данном уровне интеграла. Прямая $r = \rho$, где через ρ обозначен радиус этой окружности, выделена пунктиром справа. Точки α и β лежат на граничных окружностях цилиндра $\Delta(nC)$ одинакового радиуса. При склейке данного цилиндра в тор эти точки склеиваются между собой. Это приводит к тому, что отрезки Y_1 и Y_2 склеены между собой. Их объединению в молекуле W соответствует одна окружность.

Пусть два высекаемых горизонтальных отрезка Y_1 и Y_2 имеют по одному концу на прямых $x = \alpha$ и $x = \beta$ соответственно. Рассмотрим точки множества P, соответствующие этим отрезкам.

Это две ломаные, концы которых лежат на прямых $x = \alpha$ и $x = \beta$ и которые расположены над отрезками Y_1 и Y_2. Эти две ломаные склеены между собой в точках α и β. Таким образом, в этом случае двум отрезкам Y_1 и Y_2 соответствует одна окружность (и одна точка на ребре графа $W_2(\tilde{f})$).

Пусть график функции $\tilde{f}$ расположен строго над прямой $r = \rho$. Каждая точка ломаной L, расположенной над отрезком Y, на биллиарде может быть оснащена двумя векторами скорости. Так как граничные точки α и β ломаной L на биллиарде склеены между собой, то такой ломаной соответствуют две окружности. Данные окружности описывают два противоположно направленных движения по окружности P.

Пусть прямая $r = \rho$ касается локального максимума функции x_0. Точка области Δ, соответствующая точке x_0, является либо граничной точкой, либо отвечает выпуклой склейке. На этом сегменте (граничном или склейки) значению интеграла $\varphi = \varphi_0$ отвечают криволинейные траектории – движения по этому сегменту. Точка x_0 является пределом стягивающихся в точку отрезков Y_ε, высекаемых под ней близкими прямыми $r = \rho + \varepsilon$ (где ε малое положительное число). Так как в прообразе каждого отрезка Y_ε лежит окружность, то каждому максимуму функции f отвечает атом A.

Пусть прямая $r = \rho$ касается нескольких (как минимум одного) локальных минимумов функции $\tilde{f}$. Рассмотрим некоторый фиксированный минимум. В нём сходятся концы двух ломаных, расположенных не ниже прямой $r = \rho$. При этом по-прежнему, граничные точки ломаных (точнее их прообразы в множестве P) могут быть оснащены лишь одним вектором скорости, что приводит к склейке окружности, соответствующей ломаной слева с окружностью, соответствующей ломаной справа от минимума функции. Такая перестройка окружностей, как известно, отвечает либо атому B_k (где k это количество минимумов, которых касается высекаемый отрезок по крайней мере с одним концом на графике функции $\tilde{f}$), либо атому C_k (если весь график функции $\tilde{f}$ расположен выше прямой $r = \rho$, а компонента P гомеоморфна окружности).

Рассмотрим трехмерное многообразие $U := \{(x, v) | x \in \Delta, \varphi(x, v) \in [0, \frac{\pi}{2} - \delta]\}$. Отметим, что здесь x принадлежит двумерному биллиарду. Покажем, что слоение Лиувилля 3-многообразия описывается соответствующей грубой молекулой (W или W_2). Заметим, что при ненулевом δ точки, лежащие в многообразии U, проектируются на биллиард Δ в область, гомеоморфную прямому произведению окружности на отрезок (т.к. кольцо) или окружность P. Поэтому трехмерное многообразие U восстанавливается как прямое произведение окружности на соответствующее двумерное многообразие W, которое описывается графом-молекулой, в вершинах которого расположены двумерные атомы. При таком прямом произведении двумерные атомы порождают трехмерные атомы в многообразии U.

При значениях интеграла $\varphi > \frac{\pi}{2}$ вследствие симметрии соответствующая часть молекулы совпадает с частью молекулы при $\varphi < \frac{\pi}{2}$, т.е. также описывается графом $W(\tilde{f})$ или $W_2(\tilde{f})$.

Осталось показать, что при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ двумерная поверхность уровня дополнительного интеграла гомеоморфна одному или двум торам. Это можно сделать аналогично случаю биллиардов

$\Delta_\alpha(2D)$ и C. Мы не будем повторять данную конструкцию, отметим, что наличие невыпуклых склеек по сути не меняет доказательство.

Шаг 2. Вычисление меток.

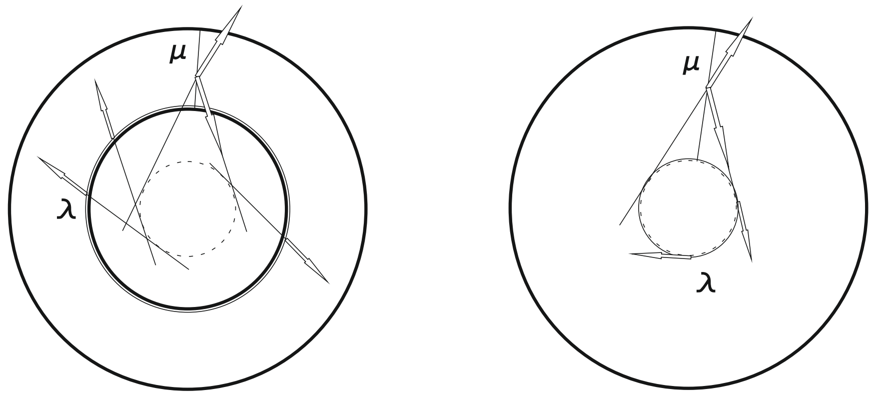


Рис. 2.48: Циклы в биллиардных областях C (слева) и D (справа), составляющих части биллиардов $\Delta(D + nC + D)$ и $T(nC)$, выбранные на граничных торах седловых атомов в графах W.

Напомним выбор циклов вблизи седловых атомов. Здесь цикл λ должен быть выбран так чтобы при критическом значении интеграла перейти в ось седлового атома. Циклы μ выбираются как дополняющие его до базиса. При этом, они обязаны быть граничными окружностями соответствующего двумерного атома – сечения 3-атома трансверсально критической окружности. Здесь мы пользуемся тем, что все седловые атомы являются прямыми произведениями двумерных атомов на окружность.

Очевидно, что циклы, соответствующие точкам множества P, можно взять в качестве циклов μ (см. рис. 2.48). Вблизи атомов A циклы выбираются аналогично случаям плоских биллиардов D и C. То есть в качестве циклов μ берём одну из следующих окружностей. Эти окружности проектируются в окружность на биллиарде, которой касаются траектории на данном уровне интеграла (см. рис. 2.42).

В качестве циклов λ берём стягивающиеся в точку циклы, проекции которых на биллиард лежат на множестве P, являющемся либо отрезком либо окружностью. Отметим, что на торах, соответствующих точкам внутри графов W, циклы μ, относящиеся к минимаксным атомам A и циклы λ, относящиеся к седловым атомам, совпадают и имеют одинаковую ориентацию (при совмещении вдоль ребра молекулы). Таким образом, матрицы склейки между минимаксными и седловыми атомами имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, откуда метки $r = 0$, $\varepsilon = 1$.

Между седловыми атомами внутри графов W матрицы склейки имеют вид вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, откуда метки $r = \infty$, $\varepsilon = 1$. Дело в том, что все циклы λ выбираются одинаково (связная компонента прообраза окружности, которой касаются траектории). Все они одинаково ориентированы направлением траекторий на биллиарде. Циклы μ это прообраз точек множества P. Отметим, что циклы μ на граничных торах седловых атомов, расположенных ближе к корню дерева W (или атому C_k графа W_2), т.е. торах с бо́льшим значением дополнительного интеграла, имеют ту же ориентацию, что и циклы λ на граничных торах минимаксных атомов A.

Если биллиард $\Delta(D+nC+D)$ не содержит невыпуклых склеек, то он совпадает с биллиардом $\Delta(2D)$, меченая молекула уже была вычислена ранее. Поэтому для биллиарда $\Delta(D+nC+D)$ осталось разобрать случай, когда граф W нетривиальный, т.е. не совпадает с одним атомом A. Повторим приведенное доказательство, поменяв циклы λ и μ местами. А именно, рассмотрим цикл $\eta = \lambda+\mu$, совпадающий на обоих свободных концах графов W. Так как теперь $\lambda^+ = -\lambda^-$, то матрица склейки примет вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, откуда метки $r = \infty$, $\varepsilon = -1$. Ребро с такой матрицей склейки – единственное, дающее ненулевой вклад в метку n в единственной семье. Этот вклад равен $[-\frac{\gamma}{\alpha}] = [-\frac{2}{-1}] = 2$. Т.е. $n = 2$.

Биллиард $T(nC)$ обязан иметь невыпуклые склейки. Следовательно, число локальных минимумов функции $\tilde{f}$ больше нуля. При этом локальные минимумы отвечают седловым атомам, поэтому граф W_2 нетривиален, т.е. не совпадает с атомом A. Так как $\lambda^+ = -\lambda^-$, $\mu^+ = \mu^-$ то матрицы склейки на ребрах между графами W_2 имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, откуда метки $r = \infty$, $\varepsilon = -1$. Вклад в метку n нулевой. Утверждение доказано.

$\square$

Глава 3

Биллиардная книжка – биллиардная система на клеточном комплексе.

В главе введен новый класс объектов – биллиардные книжки. Дадим наглядное описание таких объектов, а более подробное определение см. ниже в разделе 3.1. Биллиардные книжки естественно обобщают топологические биллиарды: теперь вдоль ребра склейки может быть склеено больше двух плоских биллиардных листов. Если в топологических биллиардах результатом склейки была двумерная поверхность, то теперь в результате склейки получается клеточный комплекс. Замыкание любой двумерной клетки — это плоский гомеоморфный диску элементарный биллиард. Замыкание любой одномерной клетки — это гомеоморфный отрезку сегмент границы биллиарда (участок границы “от угла до угла”). Занумеруем все двумерные клетки. Если приписать любому “корешку книжки” т.е. одномерной клетке, вдоль которой склеены более двух двумерных клеток, некоторую перестановку, то на полученном комплексе можно определить биллиардное движение. Материальная точка при движении по биллиарду с номером i при ударе о корешок l с перестановкой σ продолжает движение по листу с номером $\sigma(i)$ (более подробно см. ниже, раздел 3.1). На полученном комплексе также существует локально-плоская метрика. Т.е. под биллиардной книжкой понимается не просто клеточный комплекс, а клеточный комплекс “с оснащением”.

3.1 Определение биллиардной книжки.

Определение 3.1. Пусть $l_i,\ i \in \{1..n\}$ — одинаковые граничные сегменты элементарных биллиардов Ω_i, содержащиеся в квадрике семейства (1.1) с параметром $\lambda = \lambda_i$.

Определим *склейку* биллиардов Ω_i вдоль сегментов l_i как склейку вдоль l_i по гомеоморфизму, согласованному с изометричными вложениями простейших элементарных биллиардов, составляющих биллиарды Ω_i, в плоскость.

Определение 3.2. Биллиардной книжкой называется двумерное топологическое пространство, полученное склейками 3.1 элементарных биллиардов вдоль некоторых граничных сегментов (одномерных клеток), к которым приписаны фиксированные перестановки. Если вдоль сегмента границы не происходит склейки, то такой сегмент назовем свободным ребром. Если вдоль сегмента границы склеено только два элементарных биллиарда, то такой сегмент назовем ребром склейки. Если вдоль сегмента границы склеено больше двух элементарных биллиардов, то этот сегмент назовем корешком книжки.

Элементарные биллиарды, составляющие биллиардную книжку, занумеруем числами $1..n$. Каждому свободному ребру, являющемуся границей биллиарда Ω_i, припишем тождественный цикл (i). Каждому ребру склейки между биллиардами Ω_i и Ω_j припишем транспозицию $(i,\ j)$. Каждому корешку книжки припишем некоторый фиксированный цикл, в который входят все номера биллиардов, склеенных вдоль этого ребра.

Во-первых, потребуем, чтобы локально в каждой вершине склейки (нульмерной клетке) элементарные биллиарды, составляющие биллиардную книжку, при одновременном изометричном вложении в плоскость проектировались либо в угол равный $\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 3.1 а), либо в угол равный π (см. рис. 3.1 б). При проекции припишем образу сегментов границы перестановку, составленную из циклов, приписанных свободным ребрам, ребрам склейки и корешкам книжки в прообразе данного сегмента.

В-вторых, потребуем, что если локально в вершине склейки образ проекции на плоскость всех элементарных биллиардов составляет угол, равный $\frac{\pi}{2}$, то перестановки, приписанные сторонам этого угла, коммутируют (см. рис. 3.1 а).

В-третьих, потребуем, что если локально в вершине склейки образ проекции на плоскость всех элементарных биллиардов составляет угол, равный π, то перестановки, приписанные сторонам этого угла, тождественны (см. рис. 3.1 б).

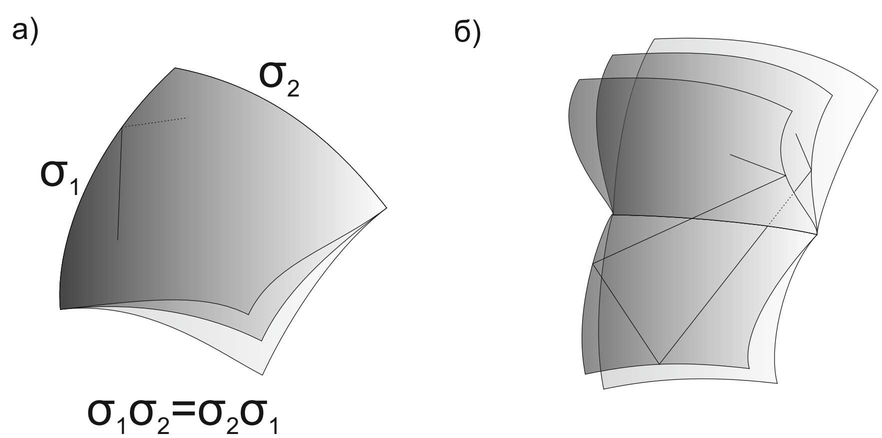


Рис. 3.1: Локальная структура биллиардной книжки. Примеры.

Замечание 35. В том случае, если элементарные биллиарды, составляющие биллиардную книжку имеют углы на границах (то есть являются дисками, согласно теореме классификации элементарных биллиардов), то на биллиардной книжке можно ввести естественную структуру клеточного комплекса. Двумерные клетки при этом — это внутренности элементарных биллиардов, одномерные — сегменты границ без вершин–углов, а нульмерные — вершины–углы. Если в состав биллиардной книжки входят неодносвязные биллиарды и биллиард, ограниченный эллипсом, то можно подразбить их на более мелкие, простейшие элементарные биллиарды склеенные вдоль ребер склейки по транспозициям. Это, конечно, может привести к запрещенным ситуациям, при которых локально в вершине склейки при проекции всех элементарных биллиардов на плоскость угол будет равен 2π. Тем не менее, это не помешает корректно определить биллиардное движение (см. далее), если объединить ранее разбитые простейшие элементарные биллиарды обратно. Таким образом, учитывая предыдущие замечания, биллиардную книжку можно всегда представить в виде клеточного комплекса.

Определение 3.3. Определим *биллиардное движение по книжке*, как движение материальной точки (см. рис. 3.1,3.2) такое, что:

1. внутри всех листов, из которых состоит биллиардная книжка, материальная точка движется прямолинейно;

2. при попадании на свободные ребра отражается, оставаясь на том же листе.

3. при попадании на корешок l, переходя с листа i на лист $\sigma(i)$, где σ - перестановка, приписанная этому сегменту, либо абсолютно-упруго отражается (в том случае если листы с номерами i и $\sigma(i)$ расположены по одну сторону от корешка l, см. рис. 3.1 а) либо продолжает движение без отражения (см. рис. 3.1 б);

4. в вершине угла, которая является общей точкой двух дуг с приписанными перестановками σ_1 и σ_2, траектория переходит с листа i на лист $(\sigma_1 \circ \sigma_2)(i)$ и идет в обратном направлении (см. рис. 3.1 а).

5. каждая выпуклая граничная дуга области является траекторией биллиардного движения. Такая траектория отвечает движению, начавшемуся в точке на границе и направленному по касательной к ней. После попадания в вершину биллиарда вектор скорости v остается касательным к этой границе, заменяясь на $-v$ (см. рис. 3.4).

Замечание 36. Ограничения на перестановки в определении 3.2 склейки являются естественными. В самом деле.

Пусть перестановки σ_1, σ_2, приписанные к соседним корешкам биллиардной книжки (первой и второй дуге соответственно), не коммутируют. То есть существует такой лист i, что $\sigma_1 \circ \sigma_2(i) \neq \sigma_2 \circ \sigma_1(i)$. Тогда в любой окрестности траектории, идущей по листу i в направлении угла,

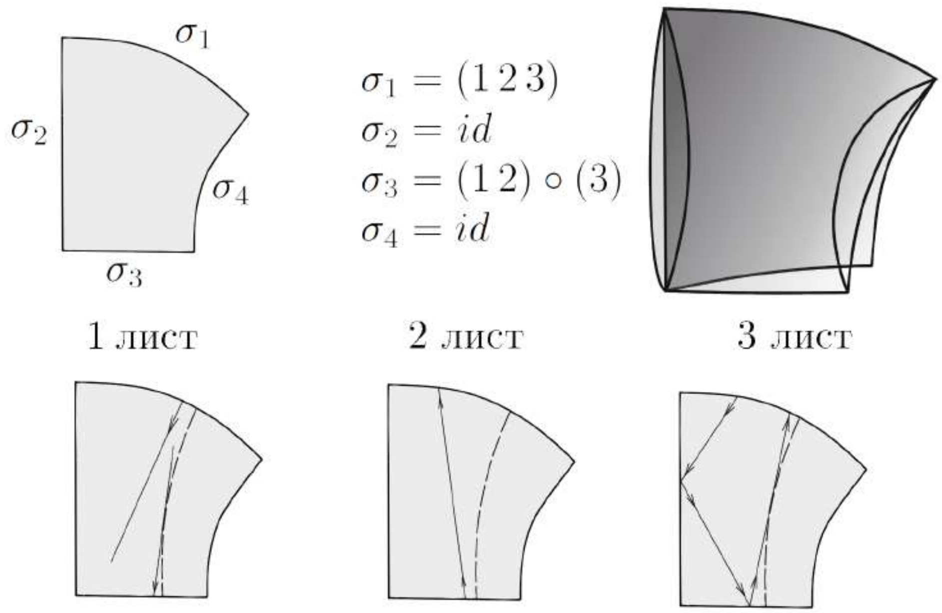


Рис. 3.2: Пример биллиардной книжки и одной из траекторий на ней.

образованного этими дугами, есть два вида траекторий (см. рис. 3.3). Это траектории, которые сначала ударяются о первую дугу переходят по перестановке на лист $\sigma_1(i)$, потом ударяются о вторую и переходят на лист $\sigma_2 \circ \sigma_1(i)$, продолжая на нем путь. И траектории, которые ударяются сперва о вторую дугу переходят по перестановке на лист $\sigma_2(i)$, а потом ударяются о первую и переходят на лист $\sigma_1 \circ \sigma_2(i)$, продолжая на нем путь. Таким образом, в любой окрестности вершины угла есть неблизкие друг к другу траектории, которые продолжают свое движение на разных листах и однозначно определить траекторию, попавшую в вершину угла на i-ом листе мы не можем.

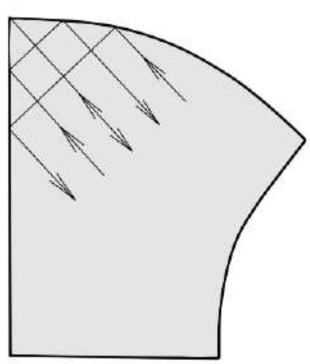


Рис. 3.3: Невозможно однозначно определить траекторию в угле, если соседним дугам приписаны некоммутирующие перестановки.

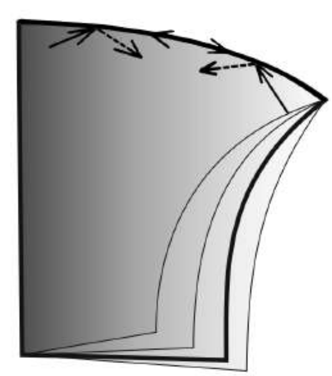


Рис. 3.4: Предельная траектория на выпуклом корешке.

Введем фазовое пространство M^4 динамики биллиардной книжки $\mathbb{B}$. Состояние системы описывается точкой на биллиардной книжке $\mathbb{B}$ и вектором скорости. Поэтому определим M^4 следующим образом.

Определение 3.4. Фиксируем биллиардную книжку $\mathbb{B}$, склеенную из элементарных биллиардов $\Omega_i,\ i \in \{1..n\}$. Рассмотрим несвязное объединение n элементарных биллиардов Ω_i, из которых склеена биллиардная книжка. Снабдим каждую точку биллиарда Ω_i вектором скорости, т.е. возьмем прямое произведение этого несвязного объединения на $\mathbb{R}^2$. При этом определены проекции

$$\begin{gathered} P' : (\bigsqcup_{i=1}^{n} \Omega_i) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \bigsqcup_{i=1}^{n} \Omega_i, \\ P : (\bigsqcup_{i=1}^{n} \Omega_i) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{B}, \\ \pi : (\bigsqcup_{i=1}^{n} \Omega_i) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Проекция P' задается забыванием координат из $\mathbb{R}^2$, то есть компоненты, отвечающей вектору скорости. Проекция P является композицией P' и характеристического отображения элементарного биллиарда — замыкания двумерной клетки — в биллиардную книжку $\mathbb{B}$ — комплекс. Проекция π, которую назовем *канонической*, задается забыванием координат из $\mathbb{R}^2$ и каноническим отождествлением каждого Ω_i со своим образом в биллиардой книжке.

Профакторизуем $(\bigsqcup_{i=1}^{n} \Omega_i) \times \mathbb{R}^2$ по отношению эквивалентности, указанному ниже. Эквивалентность описывает движение материальной точки по биллиардной книжке с учетом переходов с листа на лист (см. рис. 3.5). Опишем эту эквивалентность. Точки (x_1, v_1) и (x_2, v_2) из $(\bigsqcup_{i=1}^{n} \Omega_i) \times \mathbb{R}^2$, где $x_1 \in \Omega_1 \subset (\bigsqcup_{i=1}^{n} \Omega_i)$, $x_2 \in \Omega_2 \subset (\bigsqcup_{i=1}^{n} \Omega_i)$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$, считаем эквивалентными, если выполнены следующие условия (возможно, после перенумерации (x_1, v_1) и (x_2, v_2)):

1. $\pi(x_1, v_1) = \pi(x_2, v_2) = x \in l$, где l — достаточно малая часть общей границы элементарных биллиардов Ω_j и Ω_k, содержащая точку $\pi(x_1, v_1) = \pi(x_2, v_2)$; при этом вектор v_1 направлен наружу биллиарда Ω_j, а вектор v_2 внутрь биллиарда Ω_k;

2. если точка x не является вершиной угла границы элементарных биллиардов Ω_1 и Ω_2, которые расположены по одну сторону от дуги l, то v_1 и v_2 симметричны относительно касательной к дуге l;

3. если точка x не является вершиной угла границы элементарных биллиардов Ω_1 и Ω_2, которые расположены по разные стороны от дуги l, то вектора совпадают: $v_1 = v_2$;

4. если точка x является вершиной угла границы элементарных биллиардов Ω_1 и Ω_2, которые расположены по одну сторону от дуги l, то вектора противоположны $v_1 = -v_2$;

5. если точка x является вершиной угла границы элементарных биллиардов Ω_1 и Ω_2, которые расположены по разные стороны от дуги l (но тогда по одну сторону от некоторой дуги

m, образующей угол, равный π) то v_1 и v_2 симметричны относительно касательной к дуге m;

6. если точка x не является вершиной угла, то $k = \sigma(j)$ (где σ — перестановка, приписанная сегменту границы, содержащей дугу l);

7. если точка x является вершиной угла, то $k = \sigma_1 \circ \sigma_2(i)$, где σ_1 и σ_2 – перестановки, приписанные к дугам границы области, образующей угол с вершиной x.

Полученное после факторизации топологическое пространство называется фазовым для биллиардной книжки $\mathbb{B}$ и обозначается $M^4(\mathbb{B})$ или просто M^4.

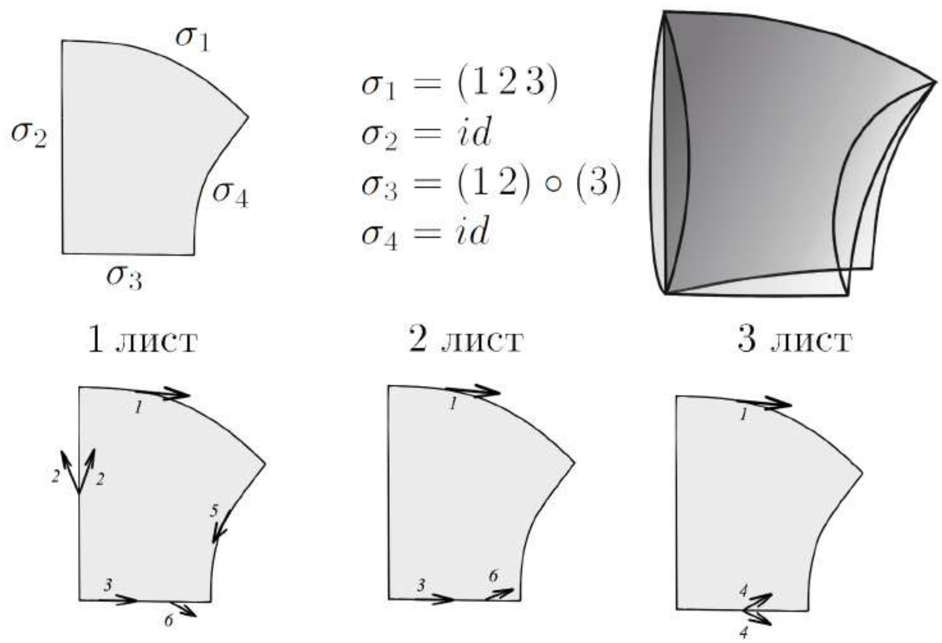


Рис. 3.5: Снизу на рисунке одинаковыми номерами обозначены векторы, которые мы считаем эквивалентными по определению 3.4 фазового пространства M^4.

Рассмотрим $Q^3 = \{x \in M^4 : \ H(x) = h > 0\}$ — изоэнергетическую поверхность в топологическом пространстве M^4. Оказывается, на такой поверхности можно ввести структуру топологического многообразия.

Теорема 3.1 (И.С.Харчева [65]). *Для любой биллиардной книжки топологическое пространство $Q^3 = \{x \in M^4 : \ H(x) = h\}$, называемое изоэнергетическим многообразием, для фиксированного $h > 0$ является трехмерным топологическим (и даже кусочно-гладким) многообразием.*

Приведенное ниже доказательство принадлежит автору диссертации.

Доказательство. Необходимо показать, что окрестность каждой точки $x \in Q^3$ гомеоморфна открытом диску D^3. Фиксируем проекцию $\pi : Q^3 \to \mathbb{B}$ изоэнергетического уровня на биллиардную книжку. Заметим, что если точка проектируется во внутренность листов книжки, то это утверждение очевидно. Отметим, что при гладком изменении границ биллиардов (фиксирующем вектора скорости кривых–границ в углах), структура фазового пространства, а значит и поверхности Q^3 не меняется. В этом случае можно считать, что если биллиардная книжка содержит корешки, относительно которых элементарные биллиарды расположены по разные стороны от неё, то её можно "перегнуть" вдоль этого корешка, сведя к ситуации где локально биллиарды при проекции на плоскость расположены в одном углу, равном $\frac{\pi}{2}$. Поэтому необходимо рассмотреть лишь два случая: когда точка проектируется на корешок книжки, и когда она проектируется в угол какой-либо элементарной области.

Точки строго внутри корешка. Покажем, как устроена окрестность точек, проектирующихся в корешок l, которому приписана перестановка σ. Без ограничения общности можно считать, что σ — циклическая перестановка длины k. Отступим от корешка l на некоторое $\varepsilon > 0$, рассмотрев в каждом листе с номером i книжки внутреннюю "воротниковую" окрестность $B^i_\varepsilon(l)$. Фиксируем номер i. Расслоим эту окрестность гомотопными отрезку кривыми γ^i_x, трансверсальными к корешку l (здесь x параметризует точку корешка l, через которую проходит кривая γ^i_x). Прообразом каждой кривой γ^i_x в поверхности Q^3 будет кольцо, внутренняя окружность которого соответствует точке x. Вектора скорости по отношению к биллиарду–листу Ω_i разделяются на три класса: два вектора, касательных к корешку l, отрезок векторов внутрь биллиарда и отрезок векторов наружу. На рисунке 3.7 все три типа векторов выделены различными цветами. Склейка по всем биллиардам прообразов согласно биллиардному закону происходит так. Касательные вектора тождественно склеиваются, вектора наружу листа с номером i склеиваются с векторами внутрь листа с номером $(i+1) mod k$. В результате в прообразе объединения всех кривых γ^i_x будет сфера с k дырками. Таким образом, локально прообраз окрестности корешка это трехмерное многообразие с краем, гомеоморфное прямому произведению этой сферы с k дырками на отрезок.

Прообраз конических точек. Без ограничения общности можно считать, что точка X является точкой пространства Q^3, вектор скорости v_0 которой направлен строго наружу листа с номером 1 (то есть не является касательным к корешку с перестановкой σ_2), причем её образ $\pi(X) = x_0$ является общей точкой двух корешков. Докажем, что окрестность точки y в Q^3 гомеоморфна трехмерному диску.

Прежде чем описывать структуру поверхности Q^3 в таких точках отметим следующий факт.

Лемма 3.2. *Пусть σ_1 и σ_2 коммутирующие перестановки, причем перестановка σ_1 содержит цикл $(1\ 2\ \dots\ k)$. Пусть $i_1 = \sigma_2(1),\ \dots\ i_k = \sigma_2(k)$. Тогда или $(i_1,\ \dots\ i_k)$ — цикл перестановки σ_1, или $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{smallmatrix}\right)$ является некоторой степенью цикла $(1\ 2\ \dots\ k)$.*

Докажем этот чисто технический результат.

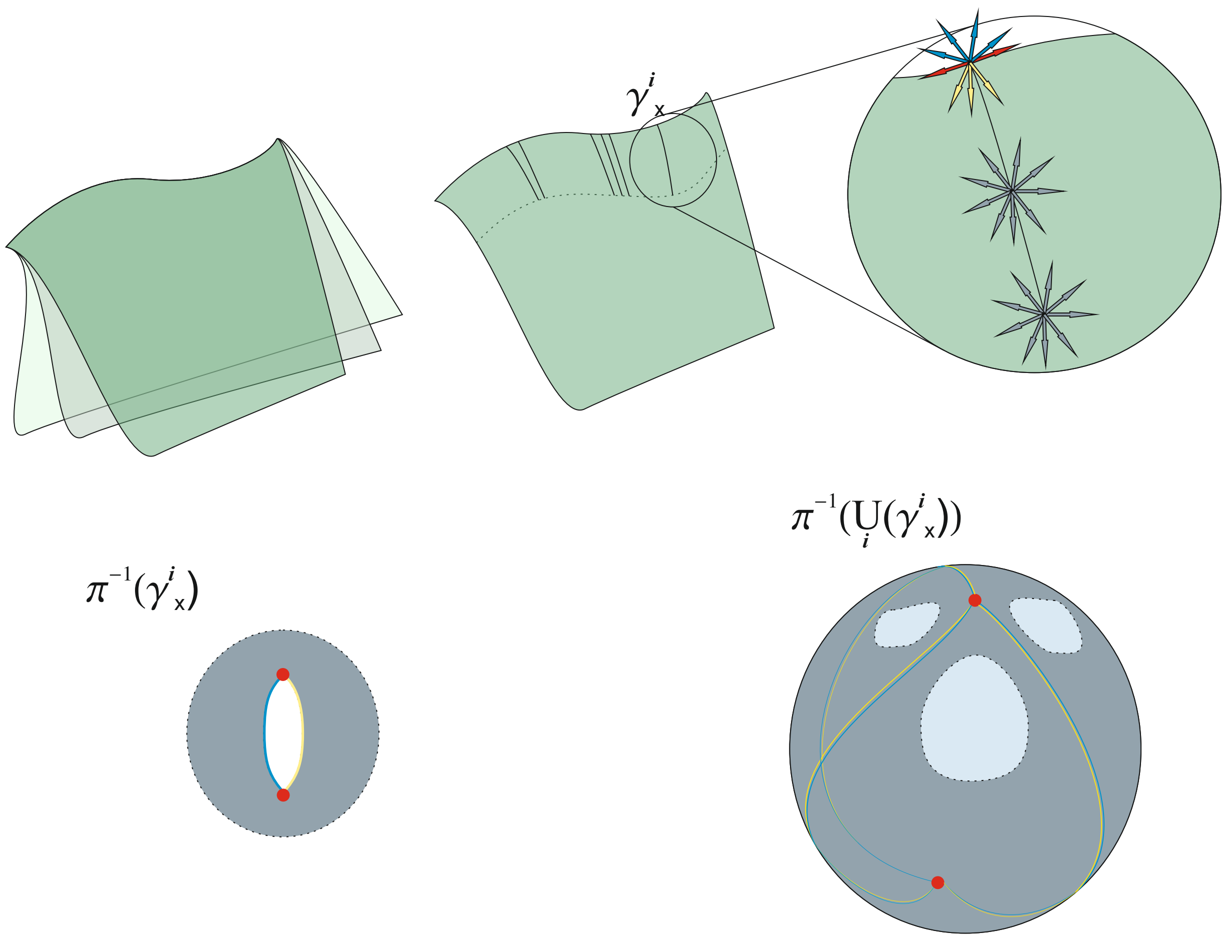


Рис. 3.6: Прообраз в изоэнергетической поверхности объединения трансверсальных к корешку кривых γ_x : сфера с k дырками, где k это порядок циклической перестановки σ, приписанной данному корешку.

Доказательство. Перемножим коммутирующие перестановки σ_1 и σ_2. Получаем

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ i_2 & i_3 & \dots & i_1 & \dots \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ \sigma_1(i_1) & \sigma_1(i_2) & \dots & \sigma_1(i_k) & \dots \end{smallmatrix}\right) = \sigma_1 \circ \sigma_2$$

Получаем, что $\sigma_1(i_j) = i_{(j+1) \bmod k}$, откуда следует искомое утверждение. Лемма доказана. □

Прообраз в изоэнергетической поверхности объединения трансверсальных к корешку объединения кривых γ_{x_0} — сфера с k дырками — естественно делится на две части. Верхняя часть соответствует векторам, направленным наружу, а нижняя – внутрь по отношению к корешку, к которому приписана перестановка σ_2. Пусть (в обозначениях леммы) $(i_1, \dots i_k)$ является отдельным циклом перестановки σ_1. Это означает, что верхняя половина сферы с дырками, соответствующая циклу $(1\ 2\ \dots\ k)$ тождественно склеивается с нижней половиной сферы, соответствующей циклу $(i_1,\ \ldots\ i_k)$. Очевидно, что при этом окрестность точки X состоит из двух трехмерных полудисков, склеенных по двумерному диску. Пусть теперь в перестановку σ_2 входит некоторая степень m цикла $(1\ 2\ \ldots\ k)$. Рассмотрим прямое произведение сферы на отрезок, которая лежит в прообразе воротниковой окрестности корешка l. Рассмотрим его граничную сферу с дырками. Перестановка σ_2 действует на этой полусфере следующим образом. Необходимо отождествить нижнюю и верхнюю границы полусферы с дырками добавив поворот на m. Это широко известная конструкция построения линзового пространства [32]. В результате получим, что прообраз окрестности конической точки гомеоморфен линзовому пространству $L(k/d, m/d)$ без трехмерного диска. Здесь через d обозначен НОД(m, k). Теорема доказана. □

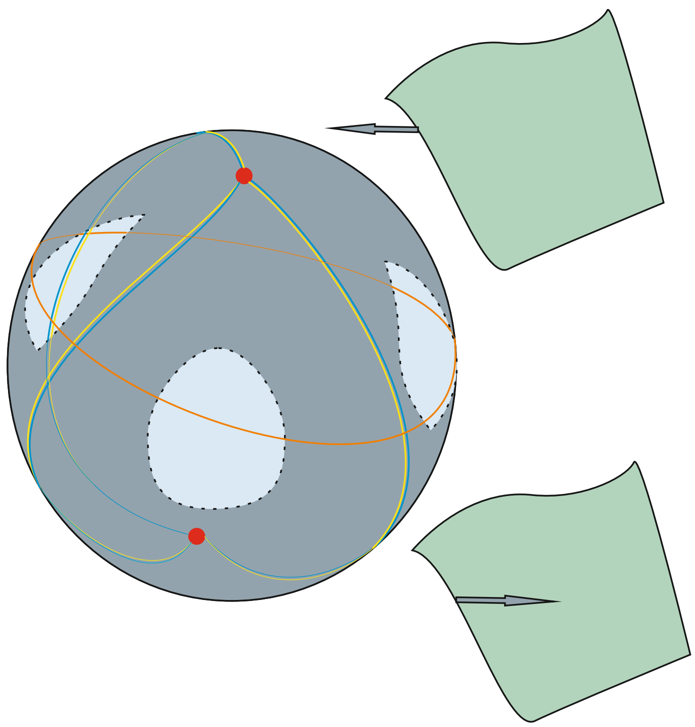


Рис. 3.7: Прообраз в изоэнергетической поверхности объединения трансверсальных к корешку объединения кривых γ_{x_0} — сфера с k дырками — естественно делится на две части (оранжевая кривая). Верхняя часть соответствует векторам, направленным наружу, а нижняя – внутрь по отношению к корешку, к которому приписана перестановка σ_2.

Перейдем к изучению слоений Лиувилля некоторых конкретных серий биллиардных книжек и вычислению их инвариантов Фоменко–Цишанга. Выбор и конкретное конструирование этих серий объясняется тем, что они, как оказалось (это будет показано в последующей главе 4), требуются для реализации важных интегрируемых систем с помощью биллиардных книжек. В частности, найденные автором биллиардные книжки реализуют все линейно и квадратично интегрируемые геодезические потоки на двумерных ориентируемых поверхностях.

3.2 Слоение Лиувилля биллиардной книжки, моделирующей случай Горячева–Чаплыгина.

Напомним, что мы фиксировали на плоскости семейство софокусных квадрик соотношением

$$(b-\lambda)x^2 + (a-\lambda)y^2 = (a-\lambda)(b-\lambda), \quad 0 \leq \lambda \leq a,$$

где $\infty > a > b > 0$. Фиксируем в этом семействе два эллипса e_2 и e_1 и гиперболу h. Предположим, что эллипс e_2 лежит внутри эллипса e_1. Рассмотрим три биллиарда, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами: биллиард A_1, ограниченный дугой эллипса e_2 и выпуклой по отношению к области дугой гиперболы h и два экземпляра биллиарда A_0, ограниченных этой же дугой гиперболы h и двумя дугами эллипсов e_2 и e_1. Занумеруем эти биллиарды и склеим их в комплекс вдоль дуг эллипсов e_1 и e_2 так как показано на рис. 3.8. На ребре склейки, соответствующем эллипсу e_1 поставим перестановку $(1,3)$, а на ребре, соответствующем эллипсу e_2 – перестановку $(1,2,3)$. На получившемся комплексе $\mathbb{B}(2A_0, A_1)$ (см. рис. 3.8) можно рассмотреть систему биллиардной книжки. Отметим, что так как биллиарды A_0 и A_1 интегрируемы, то полученная биллиардная книжка интегрируема с тем же интегралом.

Опишем поведение траекторий системы. Пусть параметры эллипсов e_1 и e_2 равны λ_1 и λ_2 соответственно, а параметр гиперболы h равен λ_3. Отметим, что в этом случае $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. При значениях интеграла $\Lambda < \lambda_1$ движения системы не происходит. При $\Lambda = \lambda_1$ существует только одна криволинейная траектория системы, описывающая движение по дуге эллипса e_1. Такая траектория гомеоморфна окружности. При $\lambda_1 < \Lambda < \lambda_2$ траектории системы лежат на торе. Далее при $\Lambda = \lambda_2$ происходит перестройка. Отметим, что на данном уровне интеграла, траектории на невыпуклом ребре склейки не определены. Тем не менее, можно рассмотреть уровень интеграла. Как будет показано ниже он будет гомеоморфен особому слою атома B. При $\lambda_2 < \Lambda < b$ траектории разбиваются на два класса. Первый тип траекторий характеризуется движением по биллиарду A_0 с номером 3 в направлении к эллипсу e_2. Такие траектории после склейки на ребре e_2 переходят на биллиард A_0 с номером 1. При этом они уже направлены от эллипса e_2. После отражения от эллипса e_1 они снова оказываются на листе с номером 3 и по-прежнему направлены к эллипсу e_2. Другой тип траекторий на биллиарде A_0 с номером 3 направлен от эллипса e_2. Такие траектории неизбежно отразятся от эллипса e_1 и после отражения окажутся на листе под номером 1. После отражения от эллипса e_2 они с биллиарда под номером 1 согласно перестановке переходят на биллиард A_1 под номером 2. После неизбежного отражения от ребра e_2 такие траектории опять переходят на лист A_0 под номером 3 и по-прежнему направлены от ребра e_2. При $\Lambda = b$ выделяются две особых траектории, лежащих на фокальной прямой. При дальнейшем увеличении $\Lambda < \lambda_3$ траектории касаются гиперболы с соответствующим параметром. Для того чтобы получить область, которую траектории заметают на биллиарде необходимо из биллиардов удалить внутренность гиперболы с параметром

Λ. Здесь под внутренностью гиперболы понимается область, ограниченная гиперболой и содержащая фокусы. В результате траектории первого типа разбиваются на два подтипа. Так как траектории первого типа были расположены только на цилиндре из двух биллиардов A_0, то после вырезания внутренности гиперболы такой цилиндр разбивается на два. Траектории же второго типа по-прежнему лежат на односвязной поверхности уровня. При $\Lambda = \lambda_3$ на биллиарде есть всего три криволинейных траектории, лежащих на гиперболе h.

Предложение 3.2.1 ([94])**.** *Инвариант Фоменко-Цишанга, классифицирующий слоение Лиувилля биллиардной книжки* $\mathbb{B}(2A_0, A_1)$ *изображен на рисунке 3.8.*

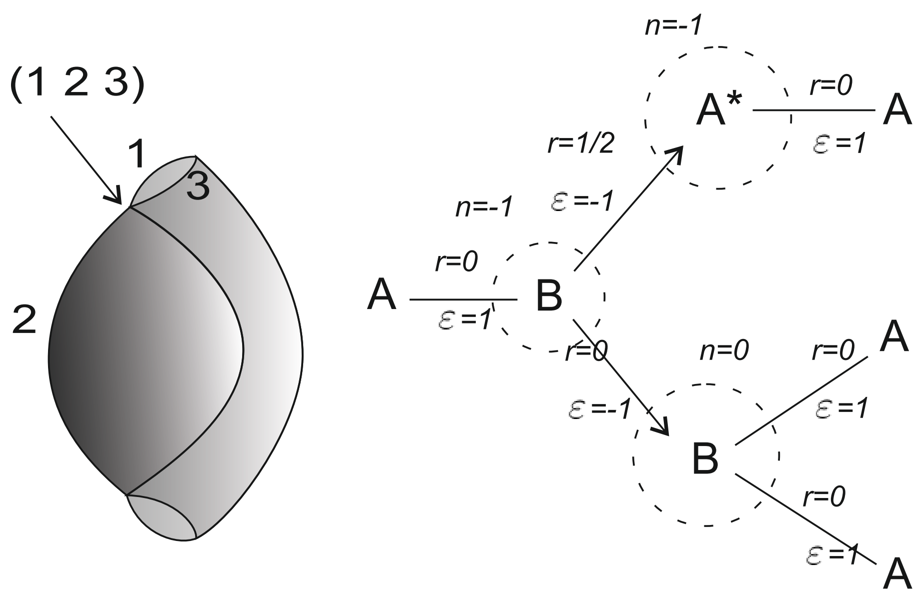


Рис. 3.8: Биллиардная книжка $\mathbb{B}(2A_0,\ A_1)$ и соответствующий ей инвариант Фоменко-Цишанга.

Доказательство. Пусть $\pi : Q^3 \to \mathbb{B}(2A_0, A_1)$ каноническая проекция изоэнергетической поверхности на биллиардный стол, определенная формулой $\pi(x, v) = x$, где x – точка биллиардного стола, v – вектор скорости.

Рассмотрим в Q^3 поверхность уровня $\Lambda = \lambda_2$. Обозначим ее через P_B. Рассмотрим дугу эллипса e_2. Фиксируем на ней точку. Такая точка будучи оснащена касательным вектором скорости лежит на P_B. Таких векторов скорости во внутренних точках дуги ровно два, а на границе один так как они должны быть отождествлены по закону отражения. Получаем, что прообраз $\pi^{-1}(e_2)$ всех точек дуги эллипса e_2 на P_B гомеоморфен окружности. Возьмем точку (x_0, v_0) этой окружности. Через точку x_0 дуги эллипса e_2 проведём дугу гиперболы из нашего софокусного семейства. Такая дуга пересекает цилиндр из двух биллиардов A_0 по окружности s. Рассмотрим прообраз точки $x \in s,\ x \neq x_0$ в P_B. Таких точек ровно четыре так как через точку x проходит ровно две касательных эллипсу e_2. При этом при приближении точки x к точке x_0 четыре касательных вектора переходят в два. Таким образом, прообразом окружности s в поверхности P_B являются две восьмерки – нам необходимо отождествить две пары окружностей по двум точкам (образы которых это точка x_0). На границе склейка восьмерок происходит одинаково, что приводит к тому что P_B гомеоморфна особому слою атома B.

При увеличении параметра Λ каждая восьмерка распадается на две окружности: точки эллипса e_2 могут быть оснащены четырьмя векторами скорости. В результате бифуркация на уровне интеграла $\Lambda = \lambda_2$ описывается 3-атомом B. Дальнейшие бифуркации полностью аналогичны бифуркациям топологических биллиардов. Доказательство см. например в работе [55]. Кратко поясним схему доказательства. Рассмотрим заполнение биллиарда дугами l софокусных эллипсов. Оказывается, что множество точек (x, v), таких что $\pi(x, v) \in l,\ \Lambda(x, v) \in [b - \delta, b + \delta]$ гомеоморфен несвязному объединению двух экземпляров двумерного атома B. Для дуг гипербол, лежащих в объединении биллиардов A_0 один экземпляр соответствует траекториям первого типа, а второй – второго. В результате, торы соответствующие траекториям первого типа перестраиваются через атом B. Торы соответствующие траекториям второго типа перестраиваются через атом A^*. Это связано с тем, что вырожденному эллипсу – отрезку фокальной прямой соответствует не двумерный атом B а сложный комплекс. Однако, тем не менее если мы рассмотрим объединение близких к нему эллипсов, то в многообразии Q^3 эти точки будут описывать так называемую "перекрутку" (см. подробнее [55]), приводящую к образованию атома A^*.

Опишем вычисление меток.

Напомним, что согласно правилам, указанным в книге [5] на граничных торах атомов выбираются циклы по правилам, соответствующим данным атомам. Напомним эти правила для атомов A, B и A^*, фигурирующих в нашей молекуле. В качестве циклов λ на торах, соответствующих атомам A, выбираются циклы, стягивающиеся в данном полнотории в точку. В качестве циклов λ на граничных торах седловых атомов выбираются слои расслоения Зейферта. Такие циклы должны переходить в циклы, гомологичные особой окружности, в том случае если седловой атом не имеет звездочек и наматываться на неё дважды в том случае если звездочки есть. При этом циклы λ выбираются однозначно, а в случае седлового атома на таком цикле задана естественная ориентация потоком гамильтонового векторного поля. Говоря проще, ориентация на таких циклах должна совпадать с ориентацией критической траектории, которой эти циклы гомологичны. Дополняющие их циклы μ уже не определены однозначно. При этом на граничном торе атома A можно фиксировать ориентацию μ тем же потоком векторного поля. В случае седлового атома B циклы μ на различных торах граничных атомов должны выбираться согласовано. А именно, они должны быть связаны условием существования трансверсального сечения к критической окружности – то есть лежать на граничных окружностях двумерного атома B. В случае атома A^* циклы $\hat{\mu}$, лежащие на граничных окружностях трансверсального сечения – также атома B – плохи тем, что один их них пересекает цикл λ дважды. На другом торе при этом таких циклов две штуки. В качестве настоящих циклов μ на таком торе выбирается один из них, а на торе, где $\hat{\mu}$ пересекает λ дважды – цикл $\mu = \frac{\lambda+\hat{\mu}}{2}$. Далее фиксируем направление роста дополнительного интеграла и ориентацию Q^3 : это позволяет фиксировать ориентацию дополнительных циклов μ на седловых атомах и цикла λ на атоме A. В этом случае матрицы перехода на торах от одного базиса к другому – матрицы склейки имеют определитель -1. Однако, при подсчете можно поступить так – фиксировать ориентацию цикла λ на каком-то атоме A. Это фиксирует ориентацию Q^3. А дальше выбирать ориентации циклов таким образом, чтобы определители матриц склейки равнялись -1. При этом циклы μ и $\hat{\mu}$ должны задавать единую ориентацию два-атома B – трансверсального сечения 3-атома B и 3-атома A^*.

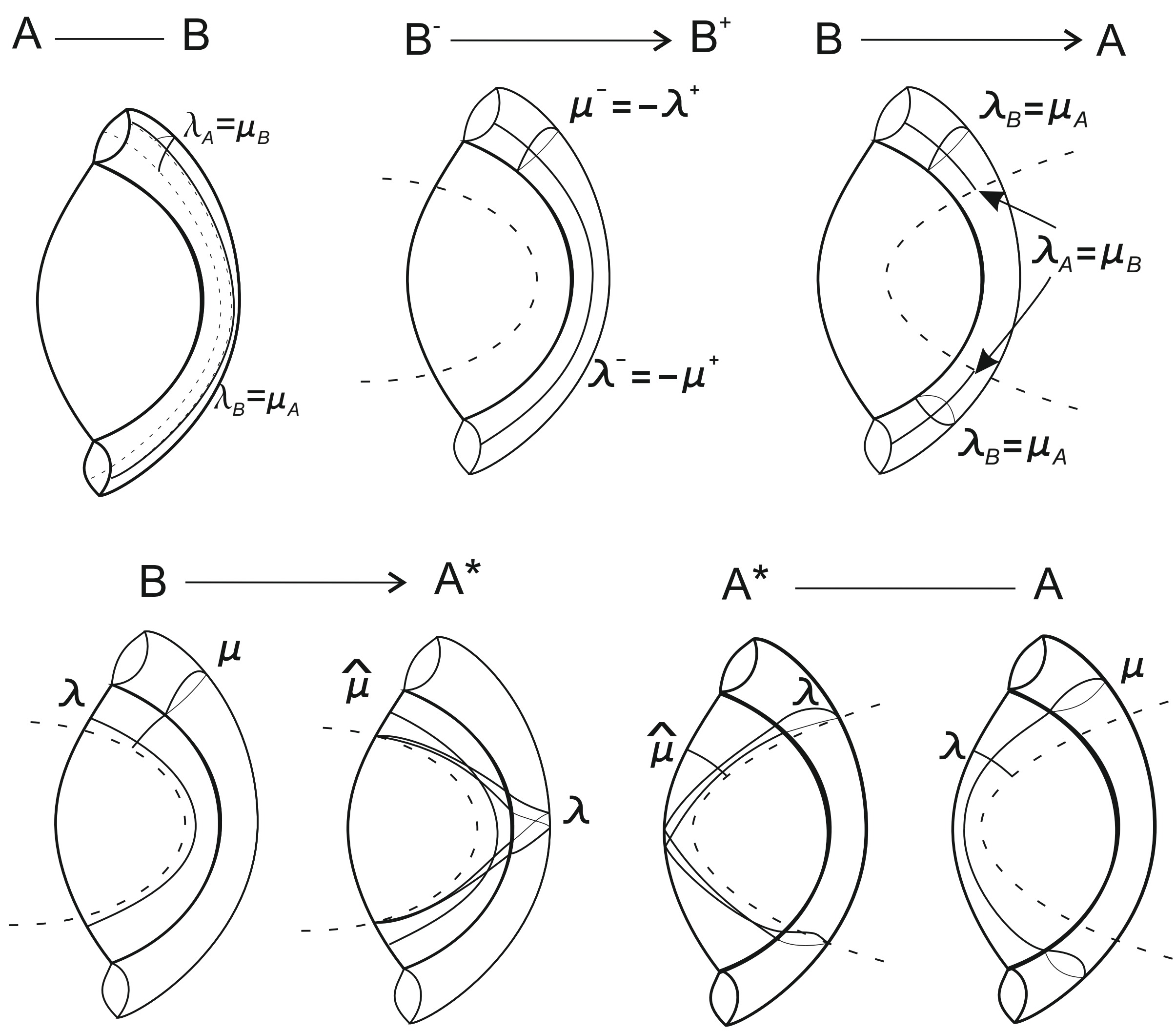


Рис. 3.9: Проекции циклов на граничных торах атомов на биллиардную книжку $\mathbb{B}(2A_0,\ A_1)$.

Проекции циклов на биллиардный стол изображены на рисунке 3.9. Поясним, что циклы μ на торах, соответствующих атому B, описывающему перестройку на уровне $\Lambda = \lambda_2$ выбраны как точки окружности s (см. выше построение бифуркации). Циклы μ и $\hat{\mu}$ на торах оставшихся седловых атомов выбраны как точки некоторого эллипса l. Выше было упомянуто, что такие точки задают граничные окружности некоторого двумерного атома B – трансверсального сечения к критической окружности (проекция которой лежит на фокальной прямой).

Отметим, что при любом выборе ориентации на торе при $\lambda_1 < \Lambda < \lambda_2$ и на торах, соответствующем траекториям первого типа (на цилиндре из двух A_0) между атомами B и и A при $b < \Lambda < \lambda_3$ ориентации циклов λ_B и μ_A обязаны совпадать. Тогда получим, что $\lambda_B = \mu_A,\ \mu_B = \lambda_A$, а матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно на ребрах молекулы, соответствующих этим торам получаем, что $r = 0,\ \varepsilon = 1$. Вклада в метку n такие матрицы склейки по определению не дают.

На торе, соответствующем траекториям первого типа (на цилиндре из двух A_0) между атомами B при $\lambda_2 < \Lambda < b$ выберем ориентации циклов μ так чтобы выполнялось $\lambda_+ = -\mu_-,\ \mu_+ = \lambda_-$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Это соотношение далее полностью фиксирует нам ориентацию Q^3. В этом случае ориентации циклов μ_-, расположенных на граничных торах атома B на ребрах между седловыми атомами, совпадают. Отсюда получаем что на торе, соответствующем траекториям второго типа (расположенных на цилиндре из двух A_0 и на A_1) между атомами B и A^* при $\lambda_2 < \Lambda < b$ имеем $\lambda_+ = \lambda_- - 2\mu_-,\ \hat{\mu_+} = \pm\lambda_-$. Так как ориентация μ_- фиксирована, то необходимо выбрать ориентацию $\hat{\mu}$ так чтобы определитель матрицы склейки был равен -1. , В результате получаем, что $\mu_+ = \frac{\lambda_+ + \hat{\mu}}{2} = \frac{\lambda_- - 2\mu_- + \hat{\mu}}{2} = \frac{\lambda_- - 2\mu_- \pm \lambda_-}{2} = -\mu_-$. В последнем равенстве использовано то, что если выбрано $\hat{\mu} = \lambda_-$, то определитель матрицы склейки будет равен 1. В итоге получаем $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

На торе, соответствующем траекториям второго типа (расположенных на цилиндре из двух A_0 и на A_1) между атомами A^* и A при $b < \Lambda < \lambda_3$ имеем $\lambda_+ = \lambda_- + \mu_-,\ \mu_+ = \hat{\mu} = \lambda_-$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Из матриц склейки метки теперь восстанавливаются полностью. $\square$

Следствие 3.2.2 ([94])**.** *Интегрируемая система Горячева–Чаплыгина–Сретенского [5] дополнительный интеграл которой имеет степень 3 кусочно-гладко лиувиллево эквивалентна в зоне энергии 6 (см. обозначения книги [5]) интегрируемой биллиардной книжке* $\mathbb{B}(2A_0, A_1)$, *дополнительный интеграл которой имеет степень 2.*

Доказательство. Доказательство сразу следует из сравнения меченых молекул и теоремы Фоменко-Цишанга (см. [5]) – слоения Лиувилля двух интегрируемых систем лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда когда их инварианты Фоменко-Цишанга (меченые молекулы) совпадают. $\square$

3.3 Реализация слоения линзового пространства $L(n, k)$.

Предложение 3.3.1 ([95])**.** *Пусть B_0 элементарный биллиард, имеющий пустое пересечение с фокальной прямой и ограниченный двумя дугами гипербол (выпуклой и невыпуклой) и двумя ду-*

гами эллипсов. Рассмотрим $\mathbb{B}$ – биллиардную книжку, склеенную из n экземпляров биллиардов B_0, причём на выпуклом гиперболическом корешке книжки задана перестановка $\sigma = (1\ 2\ ...\ n)$, а на выпуклом эллиптическом корешке – перестановка σ^k. Перестановки, соответствующие невыпуклым дугам биллиарда B_0 тождественные. Тогда инвариант Фоменко-Цишанга, классифицирующий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 для данного биллиарда, имеет вид $A - A$, где метка $r = \frac{k}{n}$, $\varepsilon = 1$.

Замечание 37. Заметим, что в этом случае изоэнергетическая поверхность Q^3 гомеоморфна линзовому пространству $L(n, k)$.

Доказательство. Разобьём доказательство на два шага. Вначале докажем, что грубая молекула имеет вид $A - A$, затем вычислим циклы на граничных торах атомов A.

Шаг 1.

Будем считать, что листы B_0 лежат в первом квадранте нашей системы координат. При этом невыпуклые эллиптический и гиперболический сегменты границ лежат на эллипсе и гиперболе с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Фиксируем значение дополнительного интеграла $\lambda = \Lambda$. Рассмотрим соответствующий слой T в изоэнергетической поверхности Q^3. Траектории при этом лежат на прямых, касательных к квадрике с параметром Λ. Если $\Lambda < b$ то это эллипс, если $\Lambda > b$, то это гипербола. В случае если $\Lambda = b$ то траектории лежат на прямых, проходящих через фокусы. Каждая точка траектории может быть описана парой (x, v) так что прямая, проходящая через точку x в направлении вектора v касается квадрики с параметром Λ.

Обозначим через $p : T \to \mathbb{B}$ проекцию слоя T на книжку $\mathbb{B}$. Фиксируем лист B_0 книжки $\mathbb{B}$ и точки слоя T, проекции которых лежат во внутренности этого листа.

Тогда каждая точка слоя T проектирующаяся во внутренность листа B_0 может быть оснащена четырьмя векторами скорости, лежащих на прямых, касательных к квадрике с параметром Λ. По отношению к внутреннему граничному эллипсу занумеруем их следующим образом v_1 – от эллипса вправо, v_2 – к эллипсу по вправо, v_3 – к эллипсу влево, v_4 – от эллипса влево, см. рис. 3.10. На невыпуклых эллиптических границах листа B_0 согласно закону отражения отождествляются друг с другом точки (x, v_1) и (x, v_2), а также (x, v_3) и (x, v_4). На невыпуклых гиперболических границах листа B_0 согласно закону отражения отождествляются друг с другом точки (x, v_1) и (x, v_4), а также (x, v_2) и (x, v_3). В результате получится четырехугольник, обозначаемый через (B_0, v), границы которого соответствуют выпуклым эллиптическим и гиперболическим границам листа B_0. На рисунке 3.10 стрелками показано какие вектора (внутрь или наружу по отношению листу B_0) приписываются каждой границе. Теперь склеим все четырехугольники, соответствующие всем листам книжки. Если гиперболической (вертикальной) стороне четырехугольника $(B_0, v)_i$, соответствующего листу с номером i, приписан исходящий вектор, то эта сторона склеивается с гиперболической стороной четырехугольника $(B_0, v)_{i+1}$, которой приписан входящий вектор. Если эллиптической (горизонтальной) стороне четырехугольника $(B_0, v)_i$, соответствующего листу с номером i, приписан исходящий вектор,

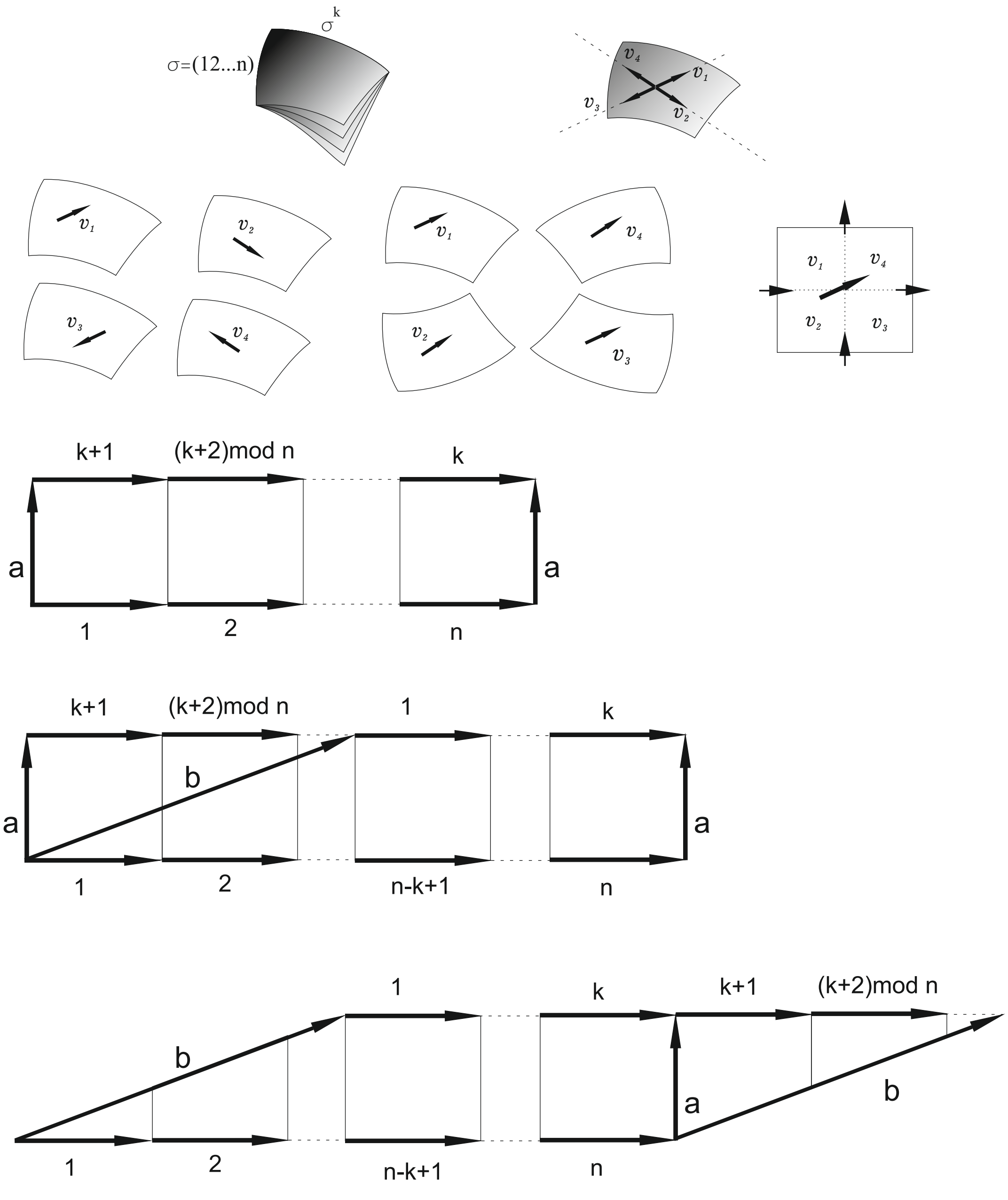


Рис. 3.10: Неособый слой дополнительного интеграла λ биллиардной книжки, склеенной из B_0 (на рисунке сверху слева) гомеоморфен двумерному тору. На каждый лист такой книжки проектируется четырехугольник, каждая четверть которого соответствует одному из четырех векторов v_i. В нижней части рисунка показано, как склеены четырехугольники, соответствующие разным листам. Легко видеть, что в результате получается двумерный тор.

то эта сторона склеивается с эллиптической стороной четырехугольника (B_0, v) под номером $\sigma^k(i) = (i + k) \bmod n$, которой приписан входящий вектор. Занумеруем числами $i \in \{1..n\}$ эллиптические границы четырёхугольников (B_0, v), оснащенные входящими векторами. Тогда слой T может быть представлен в виде многоугольника, стороны которого отождествлены так, как показано на рисунке 3.10. Разрезая его по линии b и переклеивая части (см. рис. 3.10) получаем четырехугольник с отождествленными противоположными сторонами. Следовательно, он гомеоморфен тору.

Обозначим через $\lambda_{\min}$ значение параметра эллипса, на котором лежит выпуклый эллиптический корешок книжки, а через $\lambda_{\max}$ значение параметра гиперболы, на которой лежит выпуклый гиперболический корешок книжки. При приближении параметра интеграла λ к значению $\lambda_{\min}$ (соотв. $\lambda_{\max}$) каждый четырехугольник (B_0, v) стягивается на горизонтальный (вертикальный) отрезок, соответствующий склейке на границе. Тор при этом стягивается на окружность, соответствующую движению вдоль выпуклого корешка книжки.

Шаг 2.

Для атома A, соответствующего значению интеграла $\lambda_{\max}$ (движению по выпуклой гиперболе), выбор циклов изображен на рисунке 3.11. Очевидно, что при стремлении значения интеграла λ к $\lambda_{\max}$ цикл λ_h стягивается в точку, а дополняющий его до базиса μ_h переходит в окружность, соответствующую предельному движению по гиперболическому корешку книжки.

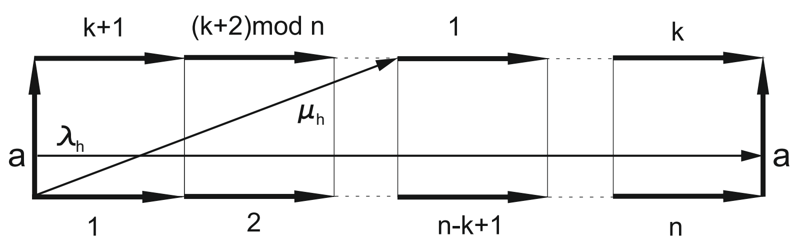


Рис. 3.11: Выбор циклов на граничном торе атома A, относящемуся к гиперболическому движению.

Для атома A, соответствующего значению интеграла $\lambda_{\min}$ циклы выбираются следующим образом. Пусть d – наибольший общий делитель чисел k и n. Введём натуральные числа t, s такие что $k = ts,\ n = sd$.

Разобьём полосу, склеенную из четырехугольников (B_0, v), на s равных "кусков" (B_0, v, d), каждый из которых склеен из d четырехугольников (B_0, v) (см. рис. 3.12). Границы разреза обозначим через a_j, где $j < s$. Переклеим эти s "кусков" вдоль номеров $d + 1, ..., n$. Вертикальные стороны полученного четырёхугольника образованы отрезками a_j. На таком четырёхугольнике уже легко увидеть нужные циклы (см. рис. 3.12). Цикл λ_e, стягивающийся в точку, в каждом куске (B_0, v, d) проходит по первым четырёхугольникам (B_0, v). Для того чтобы явно написать матрицу склейки осталось понять, сколько кусков (B_0, v, d) пересекает цикл μ_e. Для этого необходимо понять в каком по счету снизу куске (B_0, v, d) справа откажется четырехугольник (B_0, v) с правой границей a_0. У такого четырехугольника нижняя граница имеет номер n. Правые четырехугольники (B_0, v) в кусках $(B_0, v, d)_z$ на своих горизонтальных нижних границах либо имеют номера $d + zk \mod n < n$ либо номер n. Таким образом, необходимо понять при каком минимальном z число $d + zk$ делится на n. Заметим, что всегда можно единственным образом выбрать два минимальных натуральных числа r и l таких, что $d = rn - lk$ (коэффициенты Безу). Откуда $d + lk = rn$. Следовательно, $z = l$.

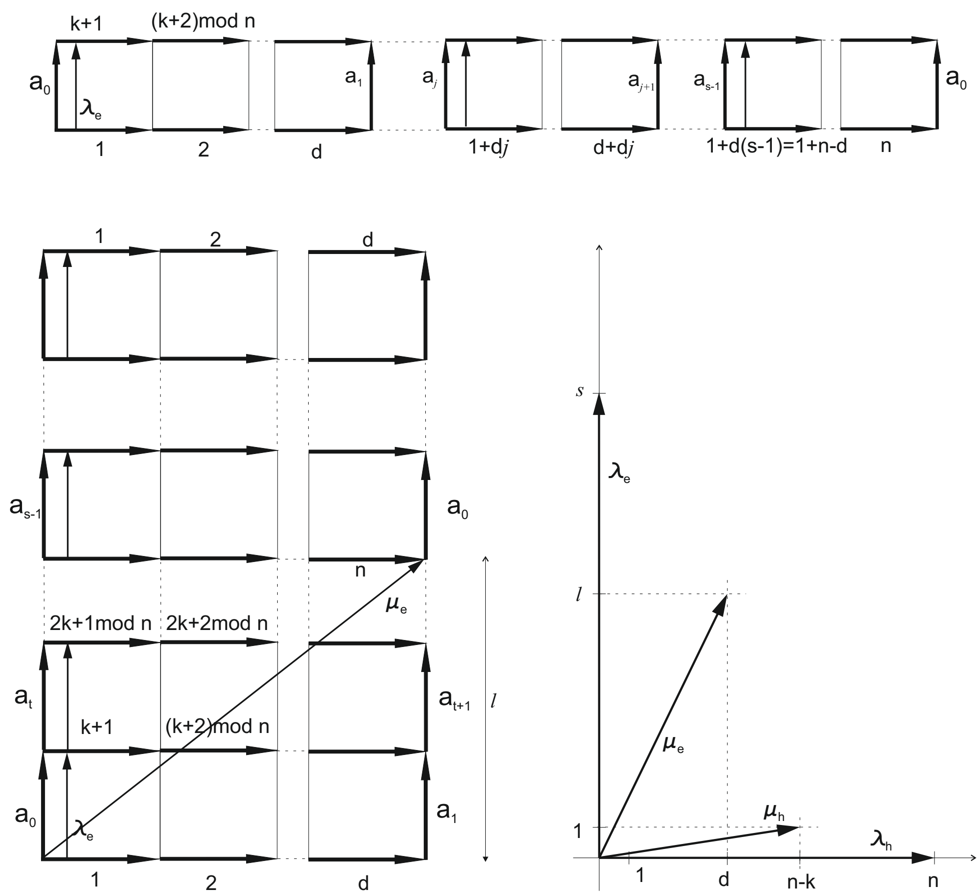


Рис. 3.12: Выбор циклов на граничном торе атома A, относящемуся к эллиптическому движению.

Рассмотрим тор Лиувилля как фактор плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y по некоторой решётке так чтобы границы четырехугольников (B_0, v) лежали на целочисленных координатных линиях. Тогда базисные циклы будут иметь следующее представление (см. рис. 3.12):

$$\vec{\lambda_e} = s\vec{y},\ \vec{\mu_e} = d\vec{x} + l\vec{y};$$

$$\vec{\lambda_h} = n\vec{x},\ \vec{\mu_h} = (n-k)\vec{x} + \vec{y} = (s-t)d\vec{x} + \vec{y}.$$

Заметим, что базисы (λ_e, μ_e) и (λ_h, μ_h) противоположно ориентированы, следовательно, ориентация циклов λ выбрана правильно.

Выражая (λ_e, μ_e) через (λ_h, μ_h) получаем следующее

$$\begin{pmatrix} \lambda_e \\ \mu_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-s & s \\ \frac{1+l(t-s)}{s} & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_h \\ \mu_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-s & s \\ r-l & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_h \\ \mu_h \end{pmatrix}.$$

Последнее следует из цепочки очевидных равенств $\frac{1+l(t-s)}{s} = \frac{1+lt-sl}{s} = \frac{rs-ls}{s} = r-l$.

Находим метки $r = \frac{t-s}{s} \mod 1 = \frac{t}{s} = \frac{td}{sd} = \frac{k}{n}$, $\varepsilon = \operatorname{sign} s = 1$.

Утверждение доказано.

□

Замечание 38. Отметим, что можно было не выбирать цикл μ_e, так как для определения меток в молекуле $A - A$ достаточно знать только первую строчку матрицы склейки.

3.4 Нетривиальное слоение 3-тора

Определение 3.5. Рассмотрим четыре экземпляра биллиарда B_0, обозначенных через α, β, γ, δ, склеенных в тор так, как это показано на рис 3.13. Поясним обозначение границ биллиарда. Через c и d обозначены выпуклая и невыпуклая границы, лежащие на эллипсах, а через a и b обозначены выпуклая и невыпуклая границы, лежащие на гиперболах. Биллиардное движение на полученном торе определим так. Внутри листов B_0 материальная точка движется прямолинейно. Если два листа были склеены вдоль некоторой границы, то точка, двигаясь по одному из них, после удара о границу продолжает движение по второму. Данный биллиард назовем *торическим биллиардом* и обозначим через $T(B_0)$.

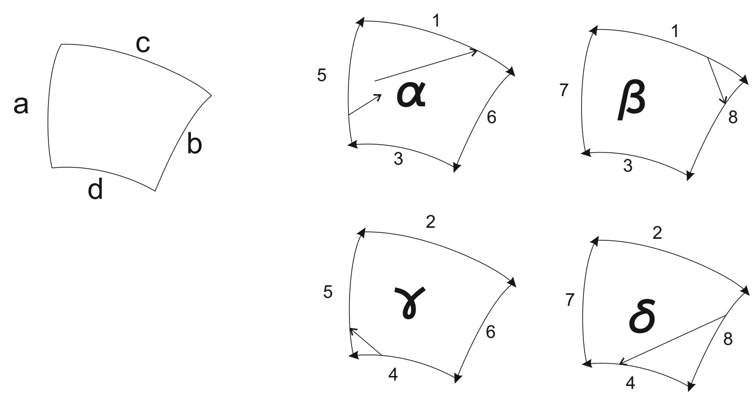


Рис. 3.13: Склейка четырех экземпляров биллиарда B_0, обозначенных через α, β, γ, δ, в тор. Одинаковыми цифрами обозначены склеиваемые границы.

Определение 3.6. Пусть n и k – взаимно простые натуральные числа, причем $k < n$. Напомним, что через σ была обозначена перестановка $(1\ 2\ \ldots\ n)$. Рассмотрим n экземпляров биллиарда $T(B_0)$. Занумеруем биллиарды числами от 1 до n и продолжим нумерацию на их листы

$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$. На объединении этих биллиардов зададим следующее движение. На выпуклой гиперболической границе a материальная точка при движении по листу α_i (соотв. β_i) после удара переходит на лист $\gamma_{\sigma(i)}$ (соотв. $\delta_{\sigma(i)}$), а при движении по листу γ_i (соотв. δ_i) после удара переходит на лист $\alpha_{\sigma^{-1}(i)}$ (соотв. $\beta_{\sigma^{-1}(i)}$).

На выпуклой эллиптической границе c материальная точка при движении по листу α_i (соотв. γ_i) после удара переходит на лист $\beta_{\sigma^k(i)}$ (соотв. $\delta_{\sigma^k(i)}$), а при движении по листу β_i (соотв. δ_i) после удара переходит на лист $\alpha_{\sigma^{-k}(i)}$ (соотв. $\gamma_{\sigma^{-k}(i)}$).

На невыпуклых границах b и d движение задаётся как обычно, то есть без смены биллиарда $T(B_0)$ и симметрично. Данный биллиард (биллиардную книжку) обозначим через $T(B_0, n, k)$.

Предложение 3.4.1. *[95] Инвариант Фоменко-Цишанга, классифицирующий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 для биллиардной книжки $T(B_0, n, k)$ имеет вид, представленный на рисунке 3.14.*

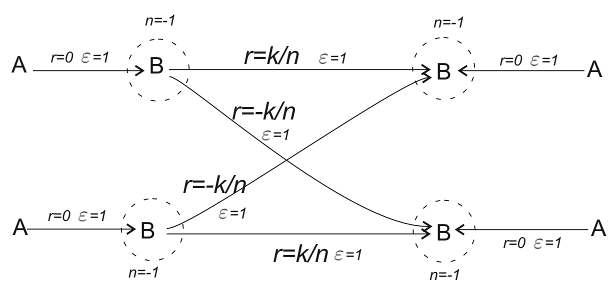


Рис. 3.14: Инвариант Фоменко-Цишанга, классифицирующий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 для биллиардной книжки $T(B_0, n, k)$.

Доказательство. Обозначим через $\lambda_{Ae} < \lambda_{Be} < \lambda_{Bh} < \lambda_{Ah}$ параметры квадрик на которых лежат соответственно выпуклый эллиптический, невыпуклый эллиптический, невыпуклый гиперболический и выпуклый гиперболический граничные сегменты биллиарда B_0. Эти четыре значения назовем *особыми.* Отметим, что все параметры квадрик, к которым траектории биллиарда являются касательными, заключены в отрезке $[\lambda_{Ae}, \lambda_{Ah}]$.

Покажем, что грубая молекула имеет структуру графа, изображенного на рис. 3.14, а именно: при неособых значениях дополнительного интеграла двумерная поверхность уровня состоит из объединения нескольких торов, при минимаксных значениях $\lambda_{Ae},\ \lambda_{Ah}$ окрестность особого слоя послойно гомеоморфна 3-атому A, при седловых значениях $\lambda_{Be},\ \lambda_{Bh}$ окрестность особого слоя послойно гомеоморфна 3-атому B.

Будем считать, что листы B_0 лежат в первом квадранте нашей системы координат.

Фиксируем значение дополнительного интеграла $\lambda = \Lambda$. Рассмотрим соответствующий слой F в изоэнергетической поверхности Q^3. Траектории при этом лежат на прямых, касательных к квадрике с параметром Λ. Если $\Lambda < b$ то это эллипс, если $\Lambda > b$, то это гипербола. В случае если $\Lambda = b$ то траектории лежат на прямых, проходящих через фокусы. Каждая точка траектории может быть описана парой (x, v) так что прямая, проходящая через точку x в направлении вектора v касается квадрики с параметром Λ.

Обозначим через $p : F \to T(B_0, n, k)$ проекцию слоя F на книжку $T(B_0, n, k)$. В книжке $T(B_0, n, k)$ рассмотрим тор $T(B_0)$ под номером i, фиксируем в нём лист (в дальнейшем считаем без ограничения общности, что это лист α_i) и точки слоя F, проекции которых лежат во внутренности этого листа. Для этого надо вырезать из листа α_i внутренность квадрики с параметром Λ (под внутренностью квадрики понимается часть плоскости, ограниченная квадрикой и содержащая фокусы). Полученную область, эквивалентную B_0, будет по-прежнему называть листом.

Тогда каждая точка слоя F, проектирующаяся во внутренность листа α_i, может быть оснащена четырьмя векторами скорости, лежащих на прямых, касательных к квадрике с параметром Λ. По отношению к внутреннему граничному эллипсу занумеруем их следующим образом: v_1 – от эллипса вправо, v_2 – к эллипсу по вправо, v_3 – к эллипсу влево, v_4 – от эллипса влево, см. рис. 3.10.

На выпуклом граничном гиперболическом сегменте a происходит склейка листов α_i, оснащенных векторами v_3 и v_4 с листами $\gamma_{\sigma(i)}$, оснащенных векторами v_2 и v_1 соответственно; оснащенных векторами v_2 и v_1 с листами $\gamma_{\sigma^{-1}(i)}$, оснащенных векторами v_3 и v_4 соответственно. На выпуклом граничном эллиптическом сегменте c происходит склейка листов α_i, оснащенных векторами v_1 и v_4 с листами $\beta_{\sigma^k(i)}$, оснащенных векторами v_2 и v_3 соответственно; оснащенных векторами v_2 и v_3 с листами $\beta_{\sigma^{-k}(i)}$, оснащенных векторами v_1 и v_4 соответственно.

На невыпуклых границах склейка зависит от уровня Λ. Если $\Lambda < \lambda_{Be}$, то на невыпуклой эллиптической границе d происходит склейка точек листа α_i оснащенных векторами v_1 (соответственно, v_3) с точками того же самого листа α_i, оснащенных векторами v_2 (соответственно, v_4). Если $\Lambda > \lambda_{Be}$, то склейка происходит между листами α_i и β_i. Если $\Lambda > \lambda_{Bh}$, то на невыпуклой гиперболической границе b происходит склейка точек листа α_i оснащенных векторами v_1 (соответственно, v_2) с точками того же самого листа α_i, оснащенных векторами v_4 (соответственно, v_3). Если $\Lambda < \lambda_{Bh}$, то склейка происходит между листами α_i и γ_i.

На рисунках 3.15,3.16 изображены получающиеся слои F. Пунктиром отмечены граничные точки листов, которые соответствуют невыпуклому граничному эллипсу, т.е. либо границе d либо дуге интегрального эллипса. Штрих-пунктиром отмечены граничные точки листов, которые соответствуют невыпуклой граничной гиперболе, т.е. либо границе b либо дуге интегральной гиперболы. Листы повернуты так, чтобы движение по ним происходило по направлению вправо и вверх. Одинаковыми цифрами с жирными стрелками на границе многоугольников отмечены стороны, которые отождествляются по закону отражения. Очевидно, что все слои гомеоморфны объединению торов.

Пусть $\Lambda_{Ae} < \Lambda < \Lambda_{Be}$. Тогда движения по книжке разбиваются на два семейства. Их можно

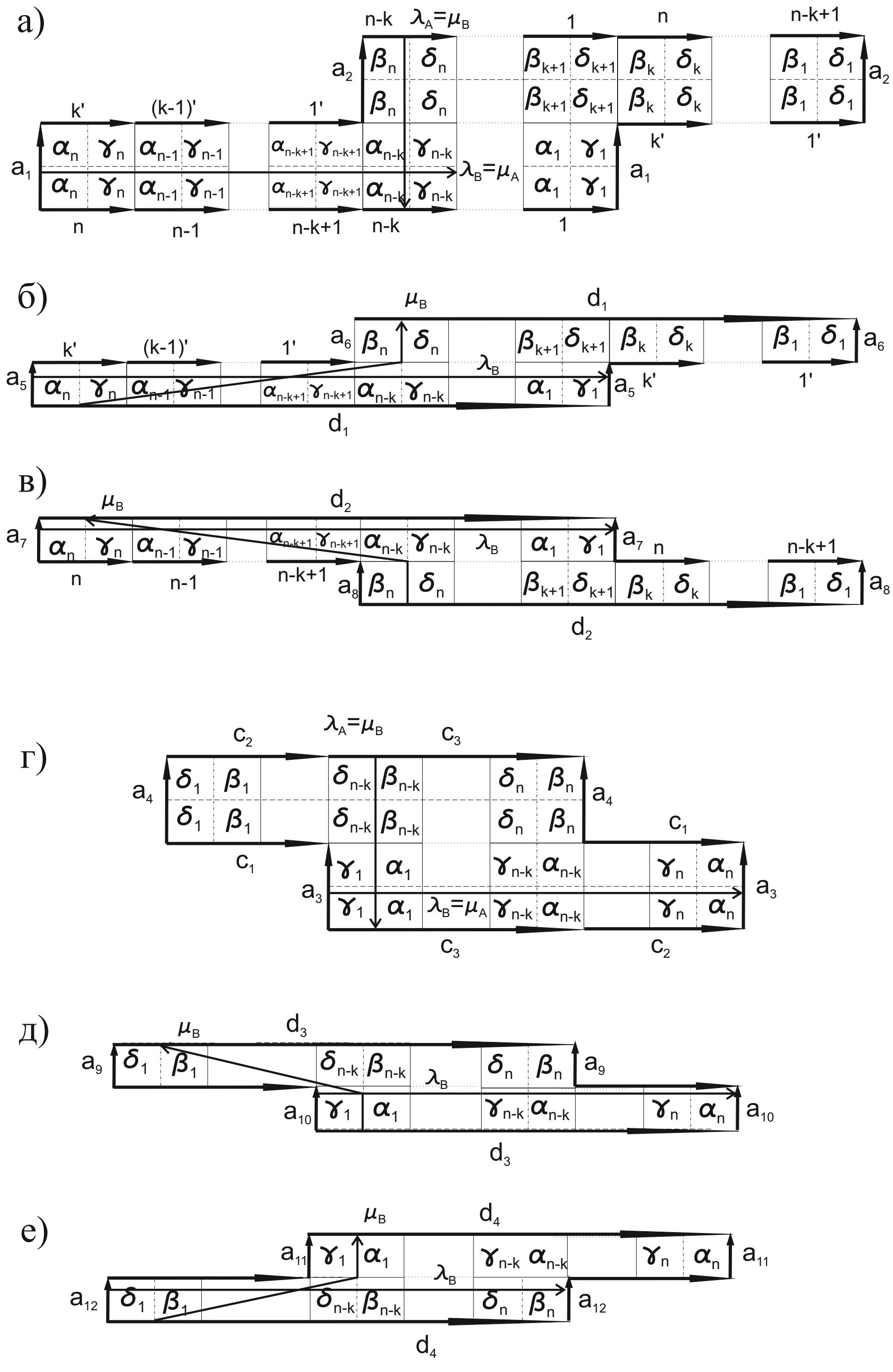


Рис. 3.15: Циклы для торов, лежащих на уровне $\Lambda < b$.

охарактеризовать, к примеру, направлением движения по листам α – справа налево и слева направо. Два соответствующих тора изображены на рисунках 3.15 а) и г). Если $\Lambda > \Lambda_{Be}$ то каждый тор распадается на два – в результате изменения биллиардного закона на границе d. На рисунках 3.15 б) и в) показаны два тора, на которые распался тор, изображенный на рисунке 3.15 а), соответствующий движению направо на листах α. На рисунках 3.15 д) и е) показаны два тора, на которые распался тор, изображенный на рисунке 3.15 г), соответствующий движению налево на листах α. Это изменение соответствует разрезам вдоль двух пунктирных линий и последующему их отождествлению в каждом полученном многоугольнике (стороны d_i). Бифуркация торов, при этом, имеет вид атома B. Особый слой состоит из двух колец, отождествленных по границам (выделенных пунктиром на торе при $\Lambda < \Lambda_{Be}$ и соответствующих сторонам d_i на торах при $\Lambda_{Bh} > \Lambda > \Lambda_{Be}$). При стремлении Λ к Λ_{Ae} границы a_i уменьшаются и переходят в точку, что отражается на торе стягиванием его в окружность.

На рисунке 3.15 стрелками отмечены циклы на граничных торов атомов A и B. Напомним, что цикл λ_A выбирается так, чтобы стягиваться в точку внутри полнотория (на рисунках он выбран параллельным стягиваемым границам a), цикл μ_A должен дополнять его до базиса. Цикл λ_B должен быть гомотопен циклу, переходящему в особый слой атома B. На рисунках он выбран вдоль пунктирной линии. Циклы μ_B, выбранные на трех граничных торах этого атома, выбираются как граничные окружности 2-атома B – трансверсального сечения к критической окружности. При этом их ориентация на уровнях, находящихся по разные стороны от критического значения, должна быть противоположной. Это объясняет направление стрелок на соответствующих циклах. Циклы μ_A и λ_B имеют ориентацию, заданную потоком. Поток на данных многоугольниках течет по направлению вверх и вправо (мы так расположили листы), поэтому их ориентация, заданная стрелкой, выбрана корректно.

Пусть $\Lambda > \Lambda_{Bh}$. В этом случае движения по книжке также разбивается на два семейства по направлению на листах α – вверх и вниз. Соответствующие торы, склеенные из листов, изображены на рисунках 3.16 а) и г). При $\Lambda_{Be} < \Lambda < \Lambda_{Bh}$ каждый тор распадается на два (3.16 пары торов б),в) и д)е)) вдоль штрих-пунктирных линий, проекции которых лежат на интегральной гиперболе с параметром Λ. Мы имеем те же четыре тора, изображенных на рисунках 3.15 б),в) и д), е), но склеенных по-другому (см. рис. 3.16 справа). Отметим, что направление движения по данным многоугольникам, однако, по-прежнему выбрано вверх и вправо. Соответствия между рисунками при этом выглядит так.

Рассмотрим два многоугольника, соответствующие движению вверх по листам α (правый и средний многоугольника на рисунке 3.16 сверху). Уточним склейку вдоль невыпуклых дуг гипербол (штрих-пунктирные линии). Разобьём каждый многоугольник на квадраты, состоящие из двух пар листов α_i и β_i и $\gamma_{(i+1) \mod n}$ и $\delta_{(i+1) \mod n}$, склеенных по невыпуклым эллиптическим границам (отмечена пунктиром), которые склеены друг с другом вдоль выпуклой гиперболической границы (сплошная линия). Считаем, что остатки по модулю n принимают значения от 1 до n. Так как n и k взаимно-просты, то можно однозначно определить пару минимальных натуральных чисел r и l таких что $1 + kl = rn$ (коэффициенты Безу). Квадрат с листом α_i вдоль выпуклой эллиптической границы склеивается с квадратом содержащим лист $\alpha_{i+k \mod n}$. Биллиардный закон на невыпуклой гиперболической границе (левая и правая границы многоугольника) отождествляет пары листов с одинаковыми индексами. Лист α_1 должен быть склеен

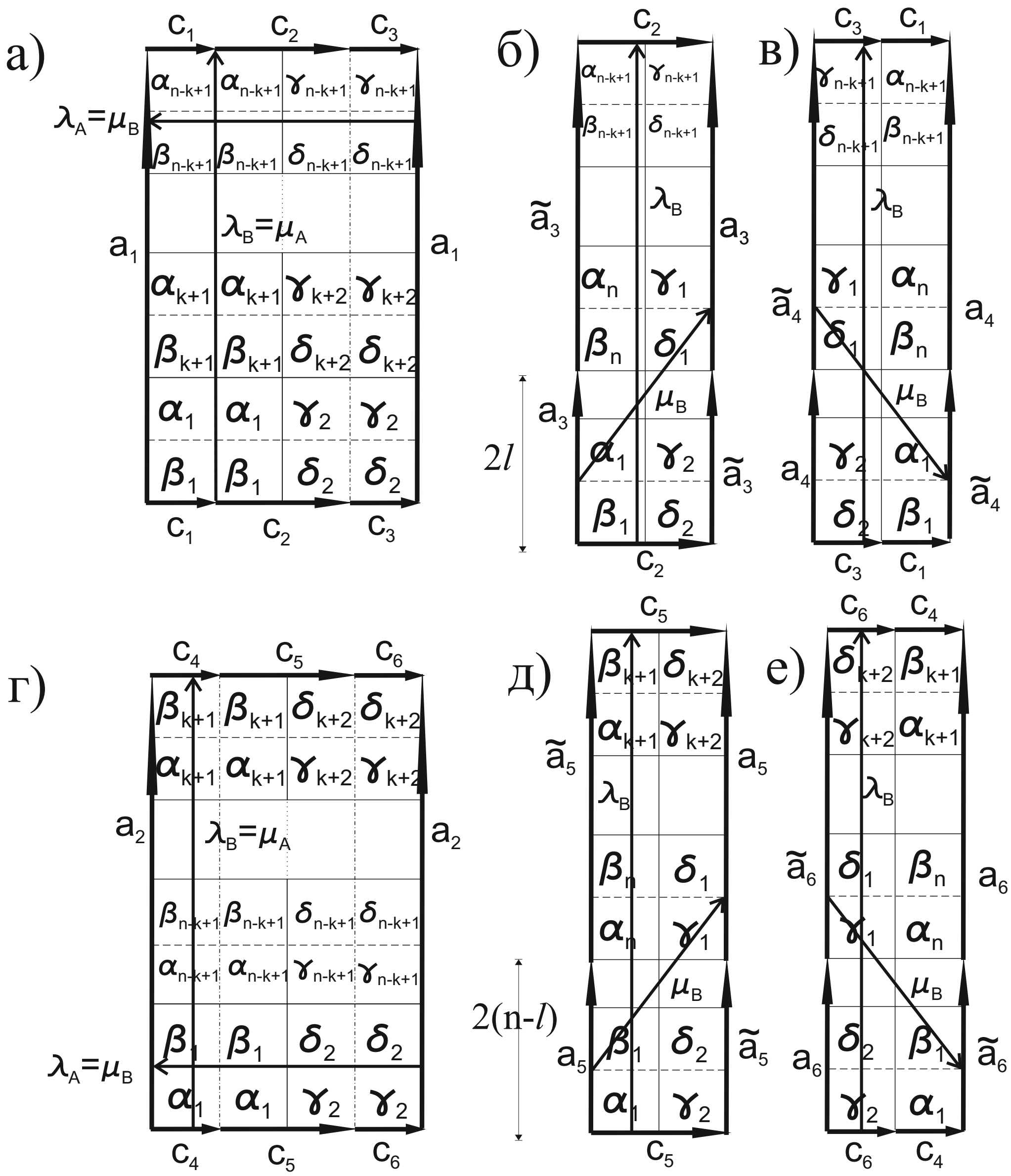


Рис. 3.16: Циклы для торов, лежащих на уровне $\Lambda > b$.

вдоль невыпуклой гиперболической границы с листом γ_1. В этом квадрате находится лист γ_2. Номер листа γ в квадрате с номером j равен $2 + jk \mod n$. Если $j = l$, то это номер равен $2 + lk = 1 + rn = 1 \mod n$. Таким образом, лист α_1 находящийся в самом первом квадрате снизу будет склеен с листом γ_1, находящимся в квадрате с номером l. Аналогичная склейка происходит и с остальными квадратами. Для торов, соответствующих движению по листам α вниз, ситуация аналогична. Склейка квадратов друг с другом происходит по обратной перестановке, т.е. квадрат с листом α_i вдоль выпуклой эллиптической границы склеивается с квадратом содержащим лист $\alpha_{i-k+n \mod n}$. Это приводит к тому что лист α_1, находящийся в самом первом квадрате снизу будет склеен с листом γ_1, находящимся в квадрате с номером $n-l$. Выбор циклов на граничных торах изображён на рисунке и сделан аналогично предыдущему случаю.

Выпишем матрицы склейки между полученными циклами. Назовем тор верхним, если он относится к атому, в который входит стрелка на ребре. Все остальные торы назовём нижними.

На ребре, отвечающем тору, изображенному на рисунках 3.15б) и 3.16в) матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -k & n \\ r & -l \end{pmatrix}$, откуда метки $r = -\frac{k}{n},\ \varepsilon = 1$, вклад в метку n равен $[\dfrac{-k}{n}] = -1$ на нижнем торе и $[\dfrac{l}{n}] = 0$ на верхнем.

На ребре, отвечающем тору, изображенному на рисунках 3.15в) и 3.16е) матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} k & n \\ r-k & l-n \end{pmatrix}$, откуда метки $r = \frac{k}{n},\ \varepsilon = 1$, вклад в метку n равен $[\dfrac{k}{n}] = 0$ на нижнем торе и $[\dfrac{-l+n}{n}] = 0$ на верхнем.

На ребре, отвечающем тору, изображенному на рисунках 3.15д) и 3.16б) матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} k & n \\ r & l \end{pmatrix}$, откуда метки $r = \frac{k}{n},\ \varepsilon = 1$, вклад в метку n равен $[\dfrac{k}{n}] = 0$ на нижнем торе и $[\dfrac{-l}{n}] = -1$ на верхнем.

На ребре, отвечающем тору, изображенному на рисунках 3.15е) и 3.16д) матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -k & n \\ -k+r & -l+n \end{pmatrix}$, откуда метки $r = -\frac{k}{n},\ \varepsilon = 1$, вклад в метку n равен $[\dfrac{-k}{n}] = -1$ на нижнем торе и $[\dfrac{l-n}{n}] = -1$ на верхнем.

На остальных рёбрах матрицы склейки имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, откуда метки $r = 0,\ \varepsilon = 1$, а вклад в метки n нулевой.

Утверждение доказано. □

3.5 Биллиард, моделирующий квадратично-интегрируемый геодезический поток на торе с конечнолистно-лиувиллевой метрикой

Рассмотрим гомеоморфный тору топологический биллиард $\Delta_{\alpha eh}(2nB_0)$, склеенный из более чем четырех биллиардов B_0. Такие биллиарды были изучены во втором параграфе второй главы. В этом случае в молекуле, классифицирующей изоэнергетическую поверхность, модифицируются минимаксные атомы A. А именно, отметим, что добавляются особые слои, соответствующие параметрам квадрик на которых лежат невыпуклые сегменты склейки данного биллиарда. Окрестности таких особых слоёв описываются атомами серии B. Напомним следующее утверждение.

Предложение 3.5.1 ([55]). *Пусть $\Delta_{\alpha eh}(2nB_0)$ – гомеоморфный тору топологический биллиард, состоящий из элементарных биллиардов B_0. Обозначим через $W_2(f)$ и $W_2(g)$ графы*

W_2, построенные по кусочно-линейным функциям f и g этого биллиарда соответственно. Тогда инварианты Фоменко-Цишанга – меченые молекулы W^*, описывающие топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 интегрируемого топологического биллиарда $\Delta_{\alpha eh}(2nB_0)$, ограниченного дугами софокусных квадрик, изображены на рис. 3.17а.

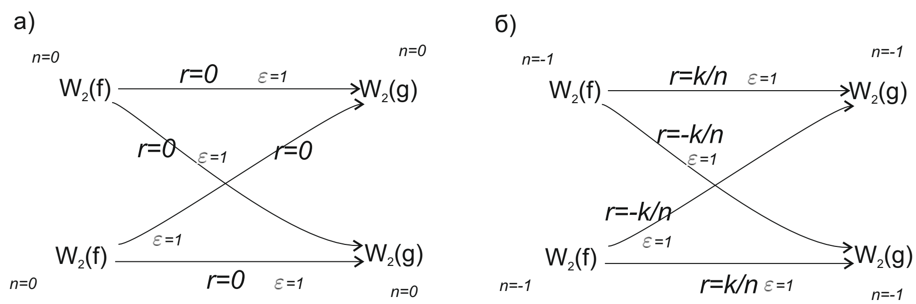


Рис. 3.17: Инварианты Фоменко-Цишанга серии топологических биллиардов $\Delta_{\alpha eh}(2nB_0)$ (см. случай а) и топологического биллиарда-книжки (см. случай б).

Определение 3.7. Фиксируем биллиард, принадлежащий бесконечной серии гомеоморфных тору биллиардов $\Delta_{\alpha eh}(2nB_0)$, склеенных из областей B_0 вдоль выпуклых и невыпуклых границ. Фиксируем некоторый биллиард из этой серии. Произвольно выделим на нём выпуклые параллель и меридиан – объединение выпуклых рёбер склейки, лежащих на эллиптических и гиперболических сегментах соответственно. Выделим невыпуклую параллель, которая состоит из невыпуклых сегментов склейки, лежащих на эллипсах с максимальным значением параметра λ из всех рёбер склейки. Аналогично выделим невыпуклый меридиан, состоящий из невыпуклых сегментов склейки, лежащих на гиперболах с минимальным значением параметра λ из всех рёбер склейки. Эти две параллели и два меридиана разбивают тор $\Delta T(B_0)$ на четыре области-листа. Обозначим их через α, β, γ и δ. При этом пары листов α, γ и β, δ склеены вдоль гиперболических границ, обозначаемых через a (выпуклая) и b (невыпуклая). Пары листов α, β и γ, δ склеены вдоль эллиптических границ, обозначаемых через c (выпуклая) и d (невыпуклая).

Пусть n и k – взаимно простые натуральные числа, причем $k < n$. Напомним, что через σ была обозначена перестановка $(1\ 2\ \ldots\ n)$. Рассмотрим n экземпляров биллиарда $\Delta_{\alpha eh}(2nB_0)$. Занумеруем биллиарды числами от 1 до n и продолжим нумерацию на их листы α, β, γ, δ. На объединении этих биллиардов движение зададим также как и на биллиардной книжке $T(\Delta_{\alpha eh}(2nB_0), n, k)$. То есть на невыпуклых границах движение происходит без смены биллиарда, а на выпуклых – со сменой и листа и биллиарда по тем же перестановкам. Данный биллиард (биллиардную книжку) обозначим через $T(\Delta_{\alpha eh}(2nB_0), n, k)$.

Заметим, что биллиард $\Delta_{\alpha eh}(2nB_0)$ и биллиардная книжка $T(B_0, n, k)$ принадлежат к описанной серии $T(\Delta_{\alpha eh}(2nB_0), n, k)$, являющейся их естественным обобщением.

Предложение 3.5.2 ([95]). *Инвариант Фоменко-Цишанга, классифицирующий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 для биллиардной книжки $T(\Delta_{\alpha eh}(2nB_0), n, k)$ имеет вид, представленный на рисунке 3.17б.*

Доказательство. Рассмотрим слой интеграла $\Lambda = b$. Дословно повторяя рассуждения утверждения 3.4.1 получаем, что данный слой гомеоморфнен несвязному объединению четырёх торов (см. рис. 3.15 и 3.16 б), в), д), е)).

Опишем слои интеграла при $\Lambda < b$. Обобщенным эллиптическим сегментом назовём минимальное объединение невыпуклых эллиптических границ биллиардов B_0, каждый из которых имеет непустое пересечение с какими-либо двумя сегментами из данного множества. Данное множество образует некоторую параллель тора $\Delta_{\alpha eh}(2nB_0)$ Рассмотрим на торах, соответствующих уровню интеграла $\Lambda = b$ точки, проекции которых на биллиардный стол расположены на невыпуклых обобщённых эллиптических сегментах. Все такие точки на развертке торов, изображенных на рисунке 3.15 изображаются отрезками горизонтальных прямых – каждый обобщенный эллиптический сегмент соответствует одному отрезку на развертке каждого тора. Фиксируем максимальное значение $\lambda_{\max}$ дополнительного интеграла, совпадающее со значением некоторого эллипса, на котором лежат невыпуклые ребра склейки. При $\lambda_{\max} < \Lambda < b$ проекция совместной поверхности уровня интегралов покрывает весь биллиард. При этом развертка торов и сами торы не меняются при таком увеличении значения дополнительного интеграла. Двумерная поверхность уровня интеграла $\Lambda = \lambda_{\max}$ получается в результате отождествления пар торов вдоль точек, лежащих в прообразе обобщенных эллиптических сегментов. Во-первых, она происходит вдоль рёбер склейки, разделяющих различные листы, т.е. отождествляя d_1 и d_2, а также d_3 и d_4 как на рисунке 3.15. Во-вторых, необходимо отождествить пары окружностей, лежащих в проекции других невыпуклых рёбер клейки, лежащих на эллипсах с параметром $\lambda_{\max}$. Так как все эти окружности на торах гомологичны, то полученная поверхность уровня имеет вид особого слоя некоторого атома, принадлежащего к серии атомов C_n, где n – это число обобщенных невыпуклых эллиптических сегментов, лежащих на данном уровне интеграла. Напомним, что под атомом C_1 мы понимаем атом B.

Отметим, что на развертках торов, изображенных на рисунках 3.15 а) и г) внутренние точки, лежащие на эллипсах с параметром $\lambda_{\max}$ изображаются двумя горизонтальными отрезками, лежащим либо на листах α и γ либо на листах β и δ. Рассмотрим поверхность уровня дополнительного интеграла $\Lambda = \lambda_{\max} - \varepsilon$ для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$. Проекция данной поверхности не покрывает весь биллиард. Вырежем из развертки торов, изображенных на рисунках 3.15 а) и г) полосы, являющиеся прообразами окрестностей обобщенных эллиптических сегментов, соответствующих параметру $\lambda_{\max}$. Фиксируем обобщенный эллиптический сегмент. Ему соответсвуют два горизонтальных отрезка и две полосы – их окрестности. Границы полос образуют точки, лежащие на эллипсах с параметром $\lambda_{\max} - \varepsilon$. Согласно биллиардному закону, необходимо отождествить верхнюю границу каждой полосы с нижней границей другой. В результате совместная поверхность уровня гомеоморфна объединению нескольких торов.

При дальнейшем уменьшении значения интеграла Λ бифуркация, соответствующая каждому невыпуклому эллиптическому сегменту выглядит как склейка (и последующее вырезание из развертки тора двух окрестностей-полос) горизонтальных отрезков, лежащих в прообразе данного сегмента. Такая перестройка описывается подходящим атомом B_n где n – число обобщенных невыпуклых эллиптических сегментов, лежащих на эллипсе с параметром равным значению интеграла.

Для выбора циклов на граничных торах можно воспользоваться циклами, изображенными на рисунках 3.15 б), в), д), е). Для четырех торов на уровне интеграла $\Lambda = b$ циклы выбираются также. Рассмотрим развертки торов, изображенные на рисунках 3.15 а) и г). Циклы на частях этой развертки, оставшихся после вырезания окрестностей невыпуклых сегментов можно взять как части тех циклов, что изображены на рисунке. При этом, все циклы λ на граничных торах седловых атомов – слои расслоения Зейферта – выбираются как горизонтальные отрезки. Дополняющие их циклы μ – вертикальные отрезки. На граничных торах атомов A циклы меняются местами, так как вертикальные отрезки стягиваются в точку, а следовательно, определяют цикл λ а горизонтальный отрезок дополняет его до базиса. Это означает, что внутри графа W_2 между седловыми атомами метки $r = \infty,\ \varepsilon = 1$, а на ребрах с атомами A – $r = 0,\ \varepsilon = 1$. При этом вклады в метки n данные склейки торов не дают.

Для гиперболических невыпуклых ребер доказательство аналогично. Утверждение доказано. $\square$

Глава 4

Реализация биллиардами интегрируемых систем физики и механики.

4.1 Лиувиллева эквивалентность биллиардов случаям динамики твердого тела.

Вычисление инвариантов Фоменко-Цишанга элементарных и топологических биллиардов позволило обнаружить их совпадение в большом числе случаев с инвариантами, вычисленными ранее в случаях интегрируемости в динамике твердого тела (Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, Ковалевской-Яхьи, Клебша и Соколова). Это позволило доказать лиувиллеву эквивалентность случаев интегрируемости в динамике твердого тела элементарным и обобщенным биллиардам. В работах [55, 56] приведён список ранее обнаруженных лиувиллево эквивалентных слоений и указаны области на бифуркационных диаграммах случаев Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, соответствующие этим изоэнергетическим 3-поверхностям. Для каждого инварианта указан биллиард моделирующий поведение решений на данных изоэнергетических поверхностях.

Теорема 4.1 (В.В.Ведюшкина, А.Т.Фоменко [56, 81, 80]). *Следующие случаи динамики твердого тела моделируются (лиувиллево эквивалентны) следующим топологическим биллиардам:*

- *случай Эйлера, см. [5], полностью реализуется (лиувиллево эквивалентен) топологическими биллиардами, указанными на рисунках 4.1а,з,и, соответствующих зонам I, II, III энергии H, соответственно;*
- *случай Лагранжа, см. [5, 40], реализуется (лиувиллево эквивалентен) топологическими биллиардами, указанными на рисунке 4.1в – зона энергии 5;*
- *случай Ковалевской, см. [5], реализуется (лиувиллево эквивалентен) топологическими биллиардами, указанными на рисунке 4.1в – зона энергии 5;*

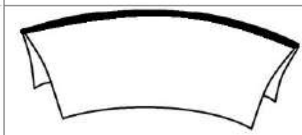
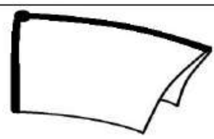
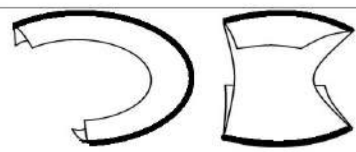
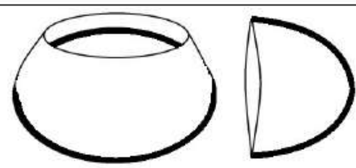
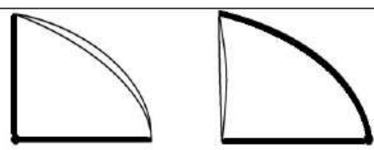
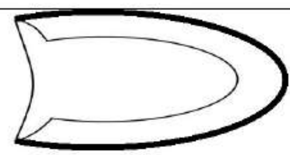
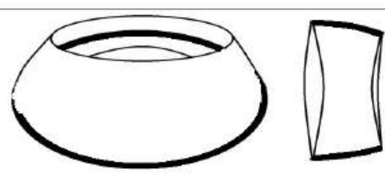
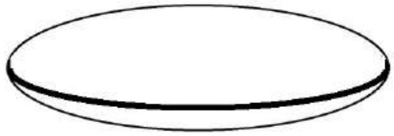
	Обобщенный биллиард	Инвариант Фоменко-Цишанга, описывающий обобщенный биллиард	Эквивалентные известные случаи интегрируемости для твердого тела
а		$A \,\frac{\qquad\qquad}{r=0\ \ \varepsilon=1}\, A$	Лагранж, Эйлер
б		$A \,\frac{\qquad\qquad}{r=1/2\ \ \varepsilon=1}\, A$	Лагранж, Жуковский,
в		$A \,\frac{\qquad\qquad}{r=0\ \ \varepsilon=1}\, B$ $B \,\frac{\qquad}{r=\infty \varepsilon=1}\, A$ $B \,\frac{\qquad}{r=\infty \varepsilon=1}\, A$	Ковалевская, Горячев-Чаплыгин-Сретенский, Жуковский, Ковалевская-Яхья
г		$A \,\frac{\qquad\qquad}{r=\infty\ \varepsilon=1}\, B$ $B \,\frac{\qquad}{r=0\ \varepsilon=1}\, A$ $B \,\frac{\qquad}{r=0\ \varepsilon=1}\, A$	Жуковский
д		$A \,\frac{\qquad\qquad}{r=0\ \varepsilon=1}\, B$, $n=1$ $B \,\frac{\qquad}{r=0\ \varepsilon=1}\, A$ $B \,\frac{\qquad}{r=0\ \varepsilon=1}\, A$	Клебш, Соколов, Ковалевская-Яхья
е		$A \,\frac{\qquad\qquad}{r=0\ \varepsilon=1}\, B$, $n=2$ $B \,\frac{\qquad}{r=0\ \varepsilon=1}\, A$ $B \,\frac{\qquad}{r=0\ \varepsilon=1}\, A$	Жуковский
ж		$A \,\frac{\qquad\qquad}{r=0 \varepsilon=1}\, A^* \,\frac{\qquad\qquad}{r=0 \varepsilon=1}\, A$ $n=0$	Горячев-Чаплыгин-Сретенский
з		$A \,\frac{\qquad}{r=\infty\ \varepsilon=1}\, C_2 \,\frac{\qquad}{r=0\ \varepsilon=1}\, A$ $A \,\frac{\qquad}{r=\infty\ \varepsilon=1}\, C_2 \,\frac{\qquad}{r=0\ \varepsilon=1}\, A$	Эйлер, Клебш
и		$A \,\frac{\qquad}{r=0\ \varepsilon=1}\, C_2 \,\frac{\qquad}{r=0\ \varepsilon=1}\, A$ $A \,\frac{\qquad}{r=0\ \varepsilon=1}\, C_2 \,\frac{\qquad}{r=0\ \varepsilon=1}\, A$ $n=2$	Эйлер, Клебш, Соколов

Рис. 4.1:

- *случай Горячева-Чаплыгина-Сретенского, см. [5, 39, 40] реализуется (лиувиллево эквивалентен) топологическими биллиардами, указанными на рисунках 4.1в– зона энергии 4, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^1 \times S^2$,*

  4.1 ж – зона энергии 2, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^3$;

- *случай Жуковского, см. [5, 42, 79] реализуется (лиувиллево эквивалентен) топологическими биллиардами, указанными на рисунках 4.1б – зона энергии 11, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq RP^3$, 4.1в – зона энергии 2, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^1 \times S^2$, 4.1г – зона энергии 8, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^3$, 4.1е – зона энергии 12, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq RP^3$;*

- *случай Ковалевской-Яхьи, см. [47], реализуется (лиувиллево эквивалентен) топологическими биллиардами, указанными на рисунках 4.1в – зона энергии h_{16}, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^1 \times S^2$, 4.1д – зона энергии h_{18}, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^3$;*

- *случай Клебша, см. [33], реализуется (лиувиллево эквивалентен) топологическими биллиардами, указанными на рисунках 4.1д – зона энергии 2, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^3$, 4.1з – зоны энергии 10,12, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^1 \times S^2$, 4.1и – зона энергии 5, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq RP^3$;*

- *случай Соколова, см. [34], реализуется (лиувиллево эквивалентен) топологическими биллиардами, указанными на рисунках 4.1д –зона энергии B, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq S^3$, 4.1и –зона энергии I, изоэнергетическая поверхность $Q^3 \simeq RP^3$.*

Вычисление инварианта Фоменко-Цишанга для геодезического потока на эллипсоиде (задачи Якоби) и случая Эйлера (движение твердого тела, закрепленного в центре масс) позволило установить их лиувиллеву и даже непрерывную траекторную эквивалентность (теорема А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко [7]): молекула Фоменко-Цишанга при нулевой постоянной площадей в случае Эйлера совпадает с инвариантом Фоменко-Цишанга для задачи Якоби. Этот инвариант встречается и в обобщенных биллиардах, а именно в случае биллиарда $\Delta_\alpha(2A_2)$, склеенного из двух эллипсов (см. рис. 4.1и). В самом деле – биллиард, склеенный из двух плоских эллипсов, может быть получен как предел движения по геодезическим на эллипсоиде, при стремлении малой полуоси эллипсоида к нулю (заметим, что Биркгоф [4] именно так показал интегрируемость классического биллиарда в эллипсе).

В случае Эйлера топология слоения изоэнергетической поверхности Q^3 при нулевой постоянной площадей позволяет наглядно продемонстрировать поведение периодических решений. Напомним следующий известный эксперимент. Рассмотрим обычную книгу (вместо книги можно взять деревянный брусок в форме книги). Ориентируем её в горизонтальной плоскости, как показано на рис. 4.2 и подбросим вверх, закрутив книгу вокруг ее горизонтальной оси симметрии, проходящей через центр книги. Затем поймаем книгу и посмотрим, в каком положении она вернулась к нам. Оказывается, результат существенно зависит от того, как мы ориентировали книгу перед началом броска. У книги есть три взаимно перпендикулярных оси симметрии. Если подбросить книгу, закрутив ее вокруг оси, отвечающей наименьшему моменту инерции, то книга вернется назад в том же положении, какое она занимала до броска. Если книга подброшена и закручена вокруг оси, отвечающей максимальному моменту инерции, то эффект будет тот же. Совсем другая картина возникнет, когда мы подбросим книгу, закрутив ее вокруг оси, отвечающей среднему моменту инерции. Если в начале корешок книги был в левой руке, то поймав книгу в воздухе, вы обнаружите, что корешок оказался в вашей правой руке.

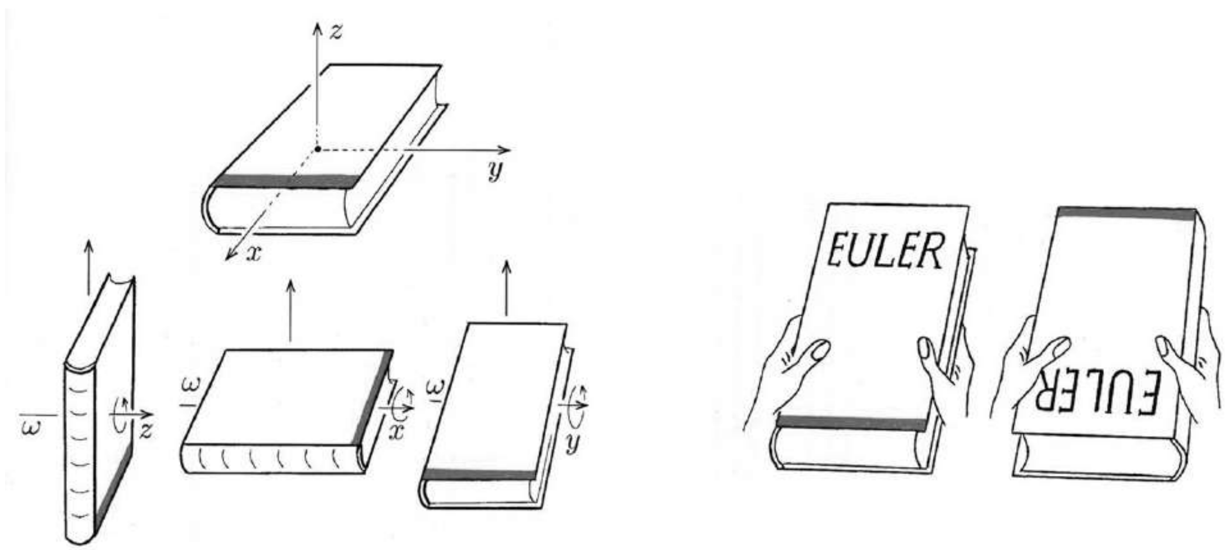


Рис. 4.2:

Это любопытное обстоятельство объясняется так. Полет книги хорошо моделирует случай Эйлера в динамике тяжелого твердого тела. Достаточно забыть о движении центра масс книги, т. е. рассматривать только ее “чистое вращение” вокруг центра масс. Кроме того, можно считать, что постоянная площадей здесь равняется нулю. Дело в том, что при каждом из бросков мы закручиваем книгу вокруг горизонтальной оси, идущей по одному из собственных направлений тензора инерции. Следовательно, вектор кинетического момента пропорционален вектору угловой скорости. Сила тяжести направлена вертикально вниз, то есть ортогональна кинетическому моменту книги. Поскольку постоянная площадей получается как скалярное произведение кинетического момента на вектор силы тяжести, следовательно, в данном эксперименте эта постоянная равна нулю. Поэтому мы попадаем в ситуацию случая Эйлера с нулевой постоянной площадей. Полет книги можно интерпретировать как движение по интегральной траектории динамической системы случая Эйлера на изоэнергетической трехмерной поверхности. Качественный характер движения определяется топологией слоения Лиувилля. Три движения книги в пространстве отвечают трем типам интегральных траекторий.

Первый тип – это устойчивые периодические траектории двух “верхних атомов” A на молекуле. Механически — это вращение книги вокруг минимальной оси ее эллипсоида инерции. Движение устойчиво, и книга возвращается в прежнее положение.

Второй тип — это устойчивые периодические траектории двух “нижних атомов” A на молекуле. Это – вращение книги вокруг максимальной оси эллипсоида инерции. Такое движение также устойчиво, что мы и видим.

Третий тип определяется двумя гиперболическими периодическими траекториями, отвечающими седловому атому C_2. Это — две траектории, проходящие через его вершины. Полет книги в данном случае задается интегральной траекторией, начинающейся вблизи первого седлового периодического решения. Теоретически можно было бы закрутить книгу так, чтобы соответствующая точка все время двигалась бы по седловой периодической траектории. Но на практике этого сделать нельзя. Неизбежно присутствующее малое возмущение заставит книгу двигаться по интегральной траектории, которая лишь сначала близка к седловому периодическому решению. Но затем траектория быстро удаляется от него и через некоторое время начинает приближаться ко второму седловому периодическому решению. Интегральная траектория в действительности движется по плоскому кольцу (на особом слое 3-атома C_2), “сматываясь” с его наружной границы и “наматываясь” на внутреннюю границу кольца. Таким образом, в тот момент, когда вы ловите книгу, интегральная траектория уже почти достигла второго периодического решения. А это и есть в точности эффект “переворачивания корешка книги”. Закрутив книгу вокруг ее средней оси инерции, вы заставляете интегральную траекторию двигаться от одной седловой вершины атома C_2 к другой его седловой вершине.

Эту картину можно более наглядно смоделировать на локально-плоском топологическом биллиарде $\Delta_\alpha(2A_2)$. Рассмотрим малую окрестность $B_\varepsilon(x_0)$ точки x_0, лежащей на фиксированной критической траектории 3-атома C_2, описывающего бифуркацию линий уровня функции Λ в изоэнергетической поверхности биллиарда $\Delta_\alpha(2A_2)$, склеенного из двух эллипсов.

Пусть точка $x \in B_\varepsilon(x_0)$ также лежит на особом слое, но уже не принадлежит критической траектории. В этом случае, она лежит на одном из четырех колец – траектории на двух из них бесконечно приближаются к фиксированной критической окружности, а на двух других – “разматываются” с неё, бесконечно приближаясь к другой критической окружности. Это поведение траекторий изображено на верхних рисунках 4.3 ниже.

Пусть точка $x \in B_\varepsilon(x_0)$ не лежит на особом слое. В этом случае она лежит на эллиптическом или гиперболическом торе, в зависимости от того квадрики какого типа касаются её касательные. В обоих случаях (см. нижние рисунки 4.3 ниже) видно, что траектория, проходящая через точку x, через короткое время будет приближаться к другой критической окружности.

Заметим, что в случае с книгой мы не могли попасть из-за неточности начальных данных строго на особый слой, что приводило к тому что корешок книги при вращении вокруг средней оси переворачивался. Так и траектория биллиарда $\Delta_\alpha(2A_2)$, будучи изначально близка к одной

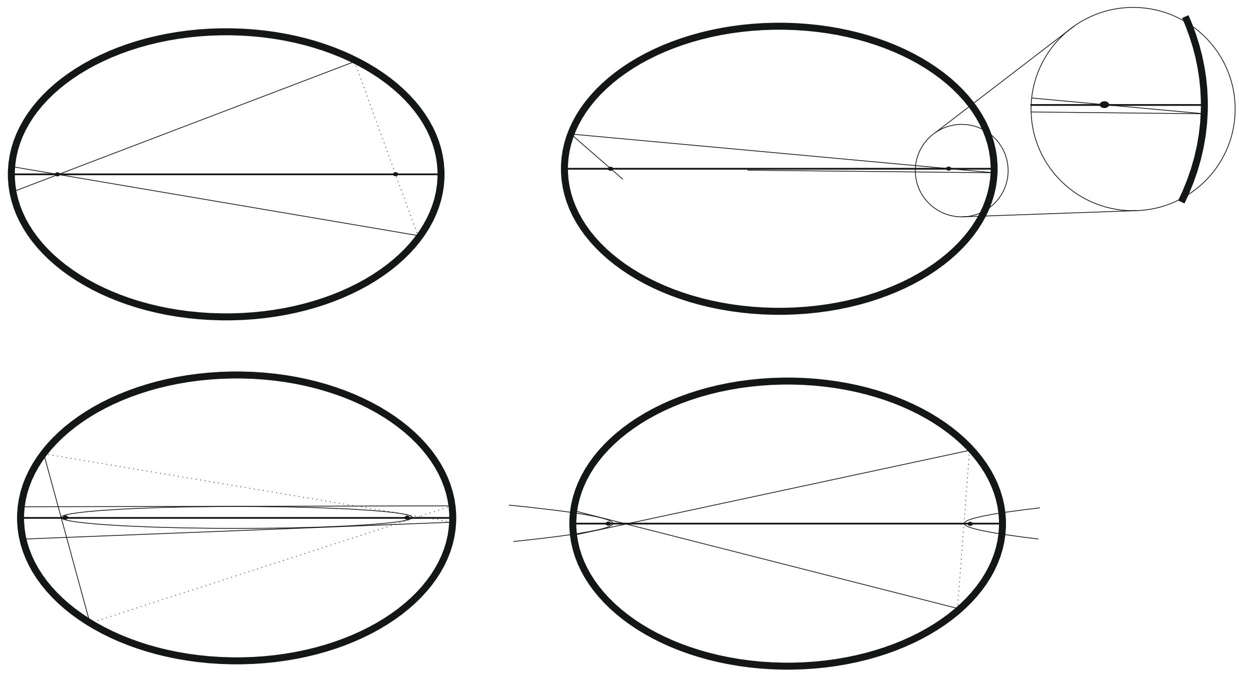


Рис. 4.3: На верхних рисунках изображены траектории, лежащие на особом слое атома C_2, описывающего бифуркацию линий уровня функции Λ в изоэнергетической поверхности топологического биллиарда $\Delta_\alpha(2A_2)$, склеенного из двух эллипсов. На нижних – траектории, лежащие на эллиптическом (слева) и гиперболическом (справа) торах. Траектория выделена сплошной линией при прохождении по вехнему экземпляру биллиарда A_2 и пунктиром – по нижнему. Жирными точками выделены фокусы.

критической окружности, через короткое время будет "закручиваться" в другую сторону.

В настоящее время школой А.Т.Фоменко вычислены новые инварианты лиувиллевой эквивалентности. В частности, С.С.Николаенко в работе [37] полностью классифицировал изоэнергетические 3-многообразия системы Чаплыгина в динамике твердого тела в жидкости, а в работе [38] им были вычислены инварианты Фоменко-Цишанга для интегрируемых систем типа Горячева. В результате удалось доказать следующее утверждение.

Предложение 4.1.1. *Следующие случаи динамики твердого тела моделируются (лиувиллево эквивалентны) следующим обобщенным биллиардам:*

- *случай Чаплыгина в динамике твердого тела в жидкости, см. [37], реализуется (лиувиллево эквивалентен) топологическими биллиардами, указанными в 4.4 а,г,д, отвечающих зонам энергии (1), (2) и (3) соответственно;*

- *случай Горячева, см. [38], реализуется (лиувиллево эквивалентен) топологическими биллиардами, указанными указанными в таблице 4.4 а, – зоны энергии (1) и (3), 4.4 б – зона энергии (2), 4.4 в – зона энергии (4).*

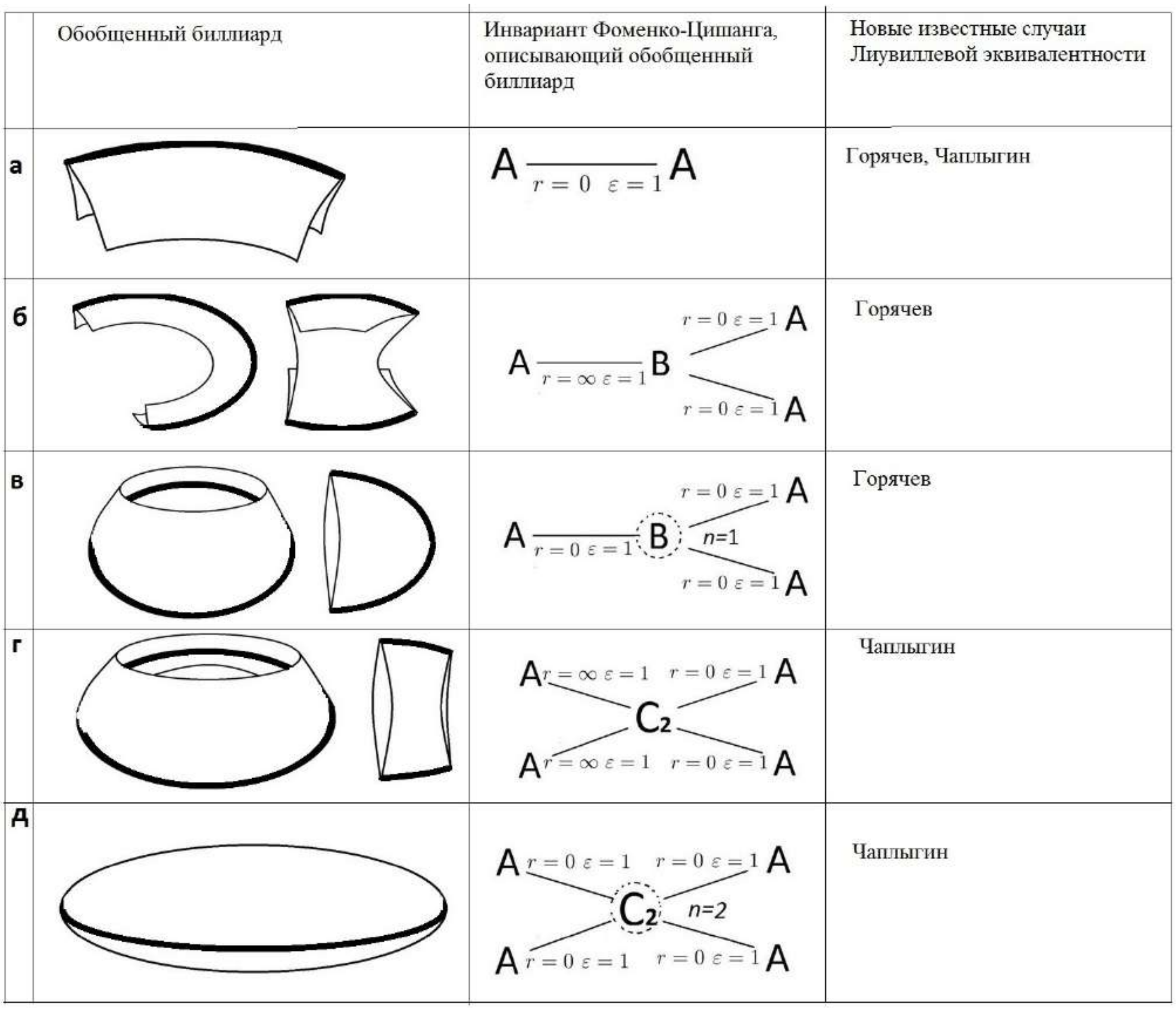


Рис. 4.4:

4.2 Понижение степени интегралов гамильтоновых систем на некоторых изоэнергетических 3-поверхностях при помощи биллиардов

В теории интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы широко известны системы, интегрируемые при помощи интегралов больших степеней, например 3 и 4 (см. [5]). К таким системам относятся, например знаменитые системы Ковалевской, а также её обобщения — системы Ковалевской–Яхьи и аналог системы Ковалевской на алгебре Ли so(4) (здесь дополнительный интеграл имеет степень 4), Горячева–Чаплыгина–Сретенского (степень дополнительного интеграла равна 3), Дуллина–Матвеева (степень 3), а также сравнительно недавно открытый случай интегрируемости Соколова (интеграл степени 4). Эти системы характеризуются достаточно сложным поведением интегральных траекторий. Отметим, что во многих классических случаях интегрируемости дополнительный интеграл квадратичен (системы Эйлера, Якоби, Лагранжа, Жуковского, Клебша и др.). Изучение систем с интегралами степеней 3, 4 и выше обычно существенно сложнее по сравнению с интегралами степени 2 Поэтому широко известна проблема возможного понижения степеней интегралов 3 и 4. А именно, можно ли подобрать для данной системы интеграл степени 1 или 2? Оказывается, в общем случае к этому есть топологические препятствия. Опираясь на принцип Мопертюи, А.В. Болсинов и А.Т. Фоменко доказали, что, например, интеграл степени 4 случая Ковалевской и интеграл степени 3 случая Горячева–Чаплыгина не сводятся к линейным и квадратичным интегралам.

Предложение 4.2.1 (А.В.Болсинов, А.Т.Фоменко [8, 9]). *а) Интегрируемый случай Ковалевской порождает (по принципу Мопертюи) на двумерной сфере риманову метрику, геодезический поток которой интегрируем при помощи интеграла степени 4 Этот интеграл не сводится к линейному или квадратичному.*

б) Интегрируемый случай Горячева–Чаплыгина порождает (по принципу Мопертюи) на двумерной сфере риманову метрику, геодезический поток которой интегрируем при помощи интеграла степени 3 Этот интеграл не сводится к линейному или квадратичному.

Этот факт был доказан в результате анализа топологии слоения Лиувилля этих интегрируемых систем на базе теории Фоменко–Цишанга [60]. Укажем вкратце схему рассуждений на примере системы Горячева–Чаплыгина. Рассматривается так называемая грубая молекула W геодезического потока метрики на сфере, порождённой данной системой по принципу Мопертюи. Этот поток траекторно эквивалентен случаю Горячева–Чаплыгина и, следовательно, имеет то же самое слоение Лиувилля на изоэнергетическом 3-многообразии. Поэтому эта молекула W совпадает с молекулой случая Горячева–Чаплыгина, вычисленной А.А. Ошемковым см. [79]. Предположим далее, что интеграл Горячева–Чаплыгина сводится к квадратичному. В таком случае, можно воспользоваться результатами изложенными в [5][т. 2, глава 3]. Там полностью вычислены так называемые меченые молекулы W^* всех геодезических потоков на сфере, интегрируемых при помощи квадратичных и линейных интегралов. Мы видим, что интересующая нас молекула потока Горячева–Чаплыгина на сфере не совпадает ни с одной из молекул этой классификации (для степеней 1 и 2). Поскольку граф W — это лиувиллев инвариант интегрируемой системы, мы получили противоречие. Важно подчеркнуть, что указанная теория имеет дело с гладкими слоения Лиувилля и их гладкими послойными отображениями. Недавно был открыт новый класс интегрируемых топологических биллиардов. Такие системы реализуются как динамика материальной точки на двумерных локально-евклидовых клеточных комплексах, рёбра которых являются дугами софокусных квадрик. Соответствующая гамильтонова система реализуется на четырёхмерном кусочно-гладком многообразии и на трёхмерных кусочно-гладких изоэнергетических поверхностях. Соответствующее слоение Лиувилля состоит из “регулярных” кусочно-гладких двумерных торов и особых слоёв — “3-атомов”. Здесь лиувиллева эквивалентность биллиардов задаётся кусочно-гладкими послойными отображениями слоений Лиувилля.

Как обнаружено в работе В.В.Ведюшкиной и А.Т.Фоменко [56, 81, 80], топологические биллиарды во многих случаях моделируют (т.е. кусочно-гладко лиувиллево эквивалентны) важные интегрируемые системы с двумя степенями свободы. Неожиданно оказывается, что при помощи интегрируемых биллиардов можно понижать степень интегралов 3 и 4 некоторых известных систем на ряде изоэнергетических 3-поверхностей. Более того, при этом интегралы степени 3 и 4 сводятся к одному и тому же каноническому квадратичному интегралу на биллиарде. Такая каноническая редукция (к одному и тому же интегралу) стала возможной благодаря переходу к, вообще говоря, кусочно-гладким лиувиллевым эквивалентностям.

Поясним, что понижение степени дополнительного интеграла понимается в следующем смысле. Найдены биллиарды, лиувиллевы слоения которых с одним и тем же каноническим интегралом степени два (на их изоэнергетической поверхности) оказываются лиувиллево эквивалентными лиувиллевым слоениям на некоторых изоэнергетических трехмерных поверхностях для ряда классических интегрируемых систем, обладающих интегралами степеней больше двух.

Теорема 4.2 (А.Т.Фоменко, В.В.Ведюшкина [90])**.** *Интегрируемые системы Ковалевской [5], Ковалевской–Яхьи [47], Ковалевской на алгебре Ли so(4) [20], Горячева–Чаплыгина–Сретенского [5], Соколова [33], Дуллина-Матвеева [35] с интегралами степеней 3 и 4 моделируются (т.е. кусочно-гладко лиувиллево эквивалентны) в подходящих зонах энергии (т.е. на подходящих изоэнергетических 3-многообразиях) интегрируемыми биллиардами, обладающими каноническим интегралом степени 2. Другими словами, интегралы больших степеней сводятся к одному и тому же квадратичному интегралу*

$$\Lambda = -\left(x_1 v_2 - x_2 v_1\right)^2 + v_1^2 b + v_2^2 a$$

на соответствующем биллиарде. Этот интеграл на изоэнергетической поверхности, заданной уравнением $v_1^2 + v_2^2 = 1$, является параметром каустики, которой касаются траектории биллиарда.

Результаты представлены на рис. 4.5 В первой колонке указаны моделирующие биллиарды, во второй колонке — соответствующие инварианты Фоменко-Цишанга, задаваемые данными системами, в третьей колонке указаны соответствующие случаи интегрируемости (в скобках указаны номера инвариантов или изоэнергетических зон, используя обозначения работ [5, 47, 20, 33, 35], в четвертой — топологический тип изоэнергетического 3-многообразия.

Надо отметить, что в некоторых зонах энергии перечисленные системы иногда гладко лиувиллево эквивалентны другим системам с квадратичными интегралами. Однако эти гладкие редукции сводят интегралы больших степеней к, вообще говоря, разным интегралам степени 2 Важное отличие теоремы 4.2 в том, что кусочно-гладкие редукции позволяют понизить степень интегралов и свести их к одному и тому же каноническому квадратичному интегралу на биллиарде. А именно, к параметру софокусных квадрик, образующих границу соответствующего

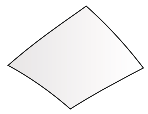
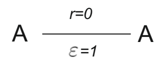
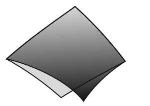
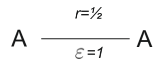
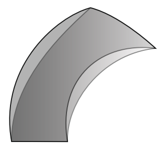
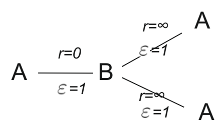
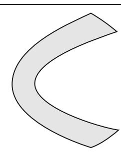
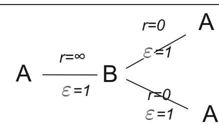
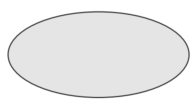
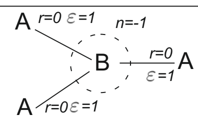
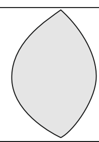
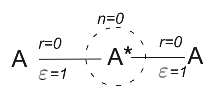
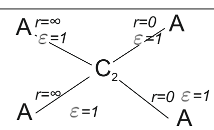
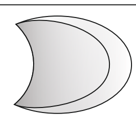
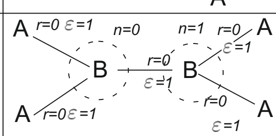
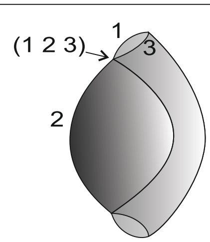
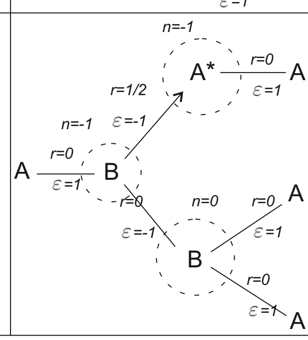
Интегрируемый биллиард	Инвариант Фоменко-Цишанга	Известные случаи интегрируемости	Тип Q^3
		Ковалевская (1), Ковалевская-Яхья (h_1), Ковалевская на so(4) (1,7,11), Дуллин-Матвеев (1), Горячев-Чаплыгин-Сретенский (1), Соколов (A)	S^3
		Дуллин-Матвеев (2)	RP^3
		Ковалевская (5), Ковалевская-Яхья (h_{16},h_{28}), Ковалевская на so(4) (32), Горячев-Чаплыгин-Сретенский (4)	$S^1 \times S^2$
		Ковалевская на so(4) (10)	S^3
		Ковалевская-Яхья (h_{18}), Ковалевская на so(4) (2,9), Соколов (B)	S^3
		Ковалевская на so(4) (6), Горячев-Чаплыгин-Сретенский (2)	S^3
		Соколов (I)	$S^1 \times S^2$
		Ковалевская на so(4) (8)	S^3
		Горячев-Чаплыгин-Сретенский (6)	$S^1 \times S^2$

Рис. 4.5: Случаи понижения степени.

биллиардного стола. Иначе говоря, отличие предъявленной кусочно-гладкой редукции от гладкой редукции состоит в том, что вместо набора разных дополнительных интегралов меньшей степени мы получаем набор биллиардов с одним и тем же дополнительным интегралом степени два.

4.3 Интегрируемые геодезические потоки на двумерных поверхностях.

Пусть M — гладкое риманово многообразие. Напомним, что геодезическими данной метрики называются гладкие параметризованные натуральным параметром кривые локально-минимальной длины. Известно, что геодезический поток данной метрики является гамильтоновой динамической системой на кокасательном расслоении T^*M к данному многообразию M.

Теорема 4.3 (В.В.Козлов [23, 24])**.** *Пусть двумерное компактное связное замкнутое аналитическое многообразие с отрицательной эйлеровой характеристикой снабжено аналитической римановой метрикой. Тогда геодезический поток этой метрики неинтегрируем в классе аналитических интегралов.*

Замечание 39. Любое двумерное компактное связное замкнутое многообразие является сферой с ручками (в ориентируемом случае), либо сферой с плёнками Мебиуса (в неориентируемом случае). Эйлерова характеристика в ориентируемом случае равна $2 - 2g$, где g — число ручек, а в неориентируемом – $2 - m$, где m — число пленок Мебиуса. Неотрицательность эйлеровой характеристики означает в ориентируемом случае, что M – либо сфера, либо тор, а в неориентируемом случае – либо проективная плоскость, либо бутылка Клейна.

Следовательно, аналитические римановы метрики с интегрируемыми (в классе аналитических интегралов) геодезическими потоками существуют только на сфере, торе, проективной плоскости и бутылке Клейна.

4.3.1 Вид метрик с линейно и квадратично интегрируемыми потоками на ориентируемых поверхностях

Классификации линейно и квадратично интегрируемых геодезических потоков на двумерных замкнутых поверхностях посвящено много работ разных авторов. Иногда для краткости будем говорить о линейно и квадратично интегрируемых метриках. Первые результаты по их полному описанию были получены В.Н. Колокольцовым [26]. Затем эти результаты были развиты и дополнены в работах К.Киохары, И.К.Бабенко, Н.Н.Нехорошева, В.С.Матвеева. Укажем явный вид линейно и квадратично интегрируемых метрик в ориентируемом случае – на торе и на сфере.

Пусть задана произвольная тройка (q, t, L), где $t \in [0, 1)$, $L > 0$, $q(v)$ – функция с периодом L. Тогда по ней можно построить риманову метрику на торе. Для этого на плоскости с декартовыми координатами (u, v) рассмотрим метрику $ds^2 = q(v)(du^2 + dv^2)$, а затем возьмем фактор плоскости $\mathbb{R}^2$ по решетке, порожденной векторами $f_1 = (1, 0)$ и $f_2 = (t, L)$. Такие метрики назовём (q, t, L)– метриками. Они допускают линейный интеграл. Более того, верен следующий факт.

Предложение 4.3.1 (Матвеев В.С. [30]). *Пусть геодезический поток метрики на торе допускает линейный интеграл. Тогда метрика либо плоская либо изометрична* $(q, t, L)-$ *метрике. Две метрики, отвечающие тройкам* (q, t, L) *и* $(\hat{q}, \hat{t}, \hat{L})$ *изометричны тогда и только тогда когда их параметры удовлетворяют соотношениям, указанным в [30].*

Определение 4.1. Риманова метрика на торе называется глобально лиувиллевой, если на торе существуют глобальные периодические координаты x и y, в которых метрика имеет вид

$$ds^2 = (f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2),$$

где $f(x)$ и $g(y)$ – некоторые гладкие положительные функции, с периодами T_x и T_y соответственно, отличные от констант.

Предложение 4.3.2 (И.К.Бабенко, Н.Н.Нехорошев [3]).

1. *Геодезический поток римановой метрики* ds^2 *на торе* T^2 *интегрируем при помощи квадратичного интеграла (не сводящегося к линейному) тогда и только тогда, когда над этим тором существует конечнолистное накрытие другим тором* $\tilde{T}^2$

$$\pi : \tilde{T}^2 \to T^2$$

такое, что поднятая с тора T^2 *на тор* $\tilde{T}^2$ *метрика* $d\tilde{s}^2 = \pi^* ds^2$ *является глобально лиувиллевой.*

2. *При этом на торе действительно существуют метрики с квадратично интегрируемыми геодезическими потоками, не являющиеся глобально лиувиллевыми. Их описание см. ниже.*

Пусть задана четверка $(L, f, g, \frac{k}{m})$, где f и g – периодические функции с периодами 1 и L соответственно, $\frac{k}{m}$ – рациональное число из полуинтервала $[0, 1)$. Тогда по этой четверке тор T^2 с квадратично интегрируемым геодезическим потоком строится так. Рассмотрим на евклидовой плоскости x, y глобально лиувиллеву метрику вида

$$(f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2),$$

а затем профакторизуем плоскость по решётке Γ, базисом которой являются два вектора $f_1 = (m, 0), f_2 = (k, L)$. Такие метрики на торе назовём конечнолистно лиувиллевыми.

Предложение 4.3.3 (Матвеев В.С. [30]). *Каждая метрика на торе, обладающая квадратично интегрируемым геодезическим потоком, допускает представление в виде* $(L, f, g, \frac{k}{m})$, *где* f *и* g *– периодические функции с периодами* 1 *и* L *соответственно, а* $\frac{k}{m}$ *– рациональное число из полуинтервала* $[0, 1)$.

При этом глобально лиувиллева метрика является $(L, f, g, 0)$−метрикой.

Перейдём к случаю сферы. Пусть тор T^2 задан как фактор плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами (x, y) по ортогональной решетке Γ, базисом которой являются два ортогональных вектора $f_1 = (1, 0)$ и $f_2 = (0, L)$, где L — любое положительное число. Рассмотрим инволюцию σ тора на себя, задаваемую на накрывающей плоскости симметрией: $\sigma(x, y) = (-x, -y)$, т.е. симметрией относительно начала координат. Ясно, что решетка Γ выдерживает эту симметрию, поэтому σ действительно является инволюцией на торе. Рассмотрим естественную проекцию $\xi : T^2 \to T^2/\sigma$.

Предложение 4.3.4. *Фактор-пространство T^2/σ тора по действию инволюции σ гомеоморфно двумерной сфере S^2. Проекция $\xi : T^2 \to S^2 = T^2/\sigma$ является двулистным разветвленным накрытием над сферой с четырьмя точками ветвления, каждая из них которых имеет ровно один прообраз на торе.*

Опишем класс метрик с квадратично интегрируемыми геодезическими потоками на сфере. Воспользуемся отображением ξ, т.е. вместо описания метрики в терминах сферы, мы опишем метрику, являющуюся ее прообразом на торе. Ясно, что метрика на сфере однозначно восстанавливается по ее прообразу на накрывающем торе. Зададим на накрывающей плоскости тора две периодические гладкие функции $f(x)$ и $g(y)$, удовлетворяющие следующим условиям.

а) Функция $f(x)$ неотрицательная, гладкая, четная, периодическая с периодом 1.

б) Функция $g(y)$ неотрицательная, гладкая, четная, периодическая с периодом L.

в) Это условие описывает асимптотическое поведение функций $f(x)$ и $g(y)$ вблизи их нулей. Функция $f(x)$ обращается в ноль в точках вида $x = \frac{m}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Функция $g(y)$ обращается в ноль в точках вида $y = \frac{kL}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Для любой точки вида $(\frac{m}{2}, \frac{kL}{2})$ существует гладкая в окрестности нуля функция $h(t)$ такая, что $h(0) = 0, h'(0) \neq 0$ и

$$f(\frac{m}{2} + t) = h(t^2), \quad f(\frac{kL}{2} + t) = -h(-t^2).$$

Следующее предложение описывает все квадратично интегрируемые геодезические потоки на двумерной сфере.

Предложение 4.3.5 (Т.З.Нгуен, Л.С.Полякова, Е.Н. Селиванова [78]). *1) Пусть $(f(x)+g(y))(dx^2+dy^2)$ — метрика на торе T^2, удовлетворяющая свойствам (а), (б), (в), и $\xi : T^2 \to T^2/\sigma$ — описанное выше двулистное накрытие. Тогда на сфере S^2 существует, и притом единственная, гладкая риманова метрика ds^2 такая, что $\xi^*(ds^2) = (f(x) + g(y))(dx^2 + dy^2)$. Если функции f и g при этом вещественно-аналитические, то метрика ds^2 тоже будет вещественно аналитической.*

2) Обратно, рассмотрим метрику $\xi^*(ds^2)$ на торе T^2, где ds^2 — некоторая гладкая метрика на сфере S^2. Если эта метрика имеет вид $(f(x)+g(y))(dx^2+dy^2)$, то функции f и g автоматически удовлетворяют условиям (a), (б), (в).

Определение 4.2. По аналогии с тором назовем эту метрику (L, f, g)-метрикой на сфере.

Метрика на сфере имеет линейно интегрируемый геодезический поток в том и только в том случае, когда существуют глобальные конформные координаты x, y, относительно которых накрывающая метрика на торе принимает вид

$$ds^2 = f(x^2+y^2)(dx^2+dy^2),$$

где $f(t)$ положительная гладкая функция на полуоси $[0, +\infty)$ и такая, что $\frac{f(1/t)}{t^2}$– положительная гладкая функция на всей полуоси $[0, +\infty)$ (т.е. включая ноль).

Удобно переформулировать эту теорему так.

Предложение 4.3.6. *Метрика ds^2 на сфере обладает линейно интегрируемым геодезическим потоком в том и только в том случае, когда на сфере существуют гладкие глобальные координаты (θ, φ) с двумя особыми точками (это аналоги полюсов для обычных сферических координат), причем θ меняется от 0 до некоторого θ_0, а φ — периодическая координата $0 \le \varphi \le 2\pi$, причем в этих координатах метрика имеет вид*

$$ds^2 = d\theta^2 + f(\theta)d\varphi^2.$$

Отметим, что гамильтониан H геодезического потока имеет вид

$$H = p_\theta^2 + f(\theta)^{-1}p_\varphi^2,$$

а интеграл F выглядит так: $F = p_\varphi$.

Описанные выше гладкие функции, задающие интегрируемые геодезические потоки, вообще говоря не обязаны быть функциями Морса. Однако, поскольку в теории интегрируемых гамильтоновых систем обычно рассматриваются невырожденные (боттовские) системы, то в нашей работе мы также будем считать, что эти функции являются функциями Морса. То есть они имеют только локальные минимумы и максимумы, и у них нет точек перегиба. В частности, нет отрезков, на которых функция является константой. Впрочем отметим, что все полученные нами результаты могут быть легко перенесены на общий случай.

Итак, не оговаривая этого каждый раз, будем считать функции f, g и q функциями Морса. При анализе лиувиллевой эквивалентности интегрируемых систем с двумя степенями свободы мы, как обычно, ограничиваем систему на трехмерный уровень энергии. Однако для геодезических потоков все ненулевые уровни энергии послойно диффеоморфны. При этом важно отметить, что для биллиарда это тоже выполняется. Поэтому предъявленные ниже в теоремах 4.4 и 4.5 (и в более подробных теоремах 4.10, 4.11, 4.12) лиувиллевые эквивалентности верны не только для трехмерных изоэнергетических поверхностей но и для слоений всего четырёхмерного кокасательного расслоения T^*M. Как и выше мы считаем, что нулевое сечение удалено.

Теорема 4.4 (В.В.Ведюшкина, А.Т.Фоменко [91])**. Моделирование линейно интегрируемых геодезических потоков на торе и сфере с помощью топологических биллиардов, ограниченных окружностями.**

1) Любой геодезический поток на двумерной ориентируемой поверхности (тор и сфера), допускающий линейный интеграл, лиувиллево эквивалентен топологическому биллиарду, состоящему из плоских биллиардов, ограниченных концентрическими окружностями. При этом линейный интеграл любого такого геодезического потока сводится к одному и тому же каноническому линейному интегралу на топологическом биллиарде.

2) Этот интеграл является углом между траекторией частицы и границей (т.е. окружностью) любого элементарного биллиарда в составе данного топологического биллиарда. Вообще говоря, обнаруженная лиувиллева эквивалентность является кусочно-гладкой.

3) Указанный топологический биллиард алгоритмически и в явном виде строится исходя из параметров интегрируемой метрики (см. теорему 4.10).

Важно что биллиард, указанный в пункте 3) этой теоремы предъявляется эффективно и наглядно. Этот биллиард мы условно назовем “тор-гармошка” (соотв. “сфера-гармошка”).

Теорема 4.5 (В.В.Ведюшкина, А.Т.Фоменко [91])**. Моделирование квадратично интегрируемых геодезических потоков на торе и сфере с помощью топологических биллиардов, ограниченных софокусными квадриками.**

1) Любой геодезический поток на двумерной ориентируемой поверхности (тор и сфера), допускающий квадратичный интеграл (не сводящийся к линейному), лиувиллево эквивалентен топологическому биллиарду, состоящему из плоских биллиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик. При этом квадратичный интеграл любого такого геодезического потока сводится к одному и тому же каноническому квадратичному интегралу на топологическом биллиарде.

2) Этот интеграл является (на изоэнергетической поверхности $v^2 + w^2 = 1$) параметром квадрики (эллипса или гиперболы), которой касаются прямые, содержащие звенья биллиардной траектории. Этот квадратичный интеграл Λ задаётся простой формулой (см.4.1). Вообще говоря, обнаруженная лиувиллева эквивалентность является кусочно-гладкой.

3) Указанный топологический биллиард алгоритмически и в явном виде строится исходя из параметров интегрируемой метрики (см. теоремы 4.11,4.12).

Канонический интеграл Λ в теореме 4 задаётся на кокасательном расслоении к биллиарду следующей простой явной формулой

$$\Lambda = \frac{-(xw - yv)^2 + v^2 b + w^2 a}{v^2 + w^2}, \qquad (4.1)$$

где через a и b обозначены параметры семейства софокусных квадрик, пара (x, y) задаёт положение материальной частицы внутри биллиарда, а пара (v, w) определяет вектор скорости частицы. При фиксировании энергии уравнением $v^2 + w^2 = 1$ данный интеграл становится квадратичным. Более того, так как квадрат длины вектора скорости v^2+w^2 является интегралом системы, то в качестве глобального квадратичного интеграла на кокасательном расслоении к биллиарду можно взять функцию $-(xw - yv)^2 + v^2 b + w^2 a$, которая, однако, уже не всегда будет иметь смысл параметра каустики.

Важно что биллиард, указанный в пункте 3) теоремы 4.5 может предъявляется эффективно и наглядно. Этот биллиард мы условно назовем "двойная тор-гармошка" (соотв. "двойная сфера-гармошка").

Замечание 40. Подчеркнём что предъявленная редукция всех указанных выше квадратичных интегралов геодезических потоков к одному и тому же каноническому квадратичному интегралу на биллиардах является "кусочно-гладким диффеоморфизмом" между слоениями Лиувилля соответствующих изоэнергетических 3-поверхностей. В классе гладких диффеоморфизмов эти интегрируемые геодезические потоки неэквивалентны между собой. Это следует из теории инвариантов Фоменко-Цишанга. Дело в том что, интегрируемые метрики с разными параметрами соответствуют разным меченым молекулам. Поясним, что, по сути, моделируя интегрируемую метрику, мы каждый раз подбираем подходящую "форму биллиарда", сохраняя при этом один и тот же вид дополнительного интеграла. Грубя говоря, один и тот же канонический интеграл "порождает" все другие известные интегралы метрик путём подбора биллиарда нужной формы. Тем самым "сложность" разнообразных интегралов указанных метрик моделируется "сложностью" соответствующих топологических биллиардов. Разнообразие интегрируемых метрик с разными интегралами превращается (при кусочно-гладкой эквивалентности) в разнообразие форм биллиардов в одним и тем же квадратичным интегралом. Иначе говоря, "сложность" интегрируемых метрик никуда не исчезает, а превращается в "сложность" моделирующих их биллиардов. Преимущество обнаруженной эквивалентности в том, что "сложность" геодезического потока наглядно отражается в форме биллиарда. В каком-то смысле обнаруженная нами "перекачка сложности" аналогична идее принципа Мопертюи, когда добавление потенциала к натуральной системе "перекачивается" в сложность римановой метрики.

Доказательство этих теорем см. в параграфах 4.3.3 и 4.3.4.

4.3.2 Инварианты Фоменко-Цишанга линейно и квадратично интегрируемых геодезических потоков на торе и сфере.

Пусть f непрерывная положительная функция на отрезке. Построим по ней граф, который назовём $W(f)$. Рассмотрим область, лежащую под графиком функции, и ограниченную снизу прямой $y = 0$. Расслоим её на отрезки горизонтальными линиями, то есть линиями $y = const$. Стянем каждый отрезок в точку. В результате область, расположенная между графиком и прямой $y = 0$, превратится в граф, являющийся деревом. Заменим концевые вершины получившегося графа, соответствующие максимумам функции f, атомами A. Вершину, соответствующую отрезку, лежащему на прямой $y = 0$, оставим свободной. Во всех остальных вершинах поместим атомы B_k, где k – это количество локальных минимумов, которых касается соответствующий горизонтальный отрезок.

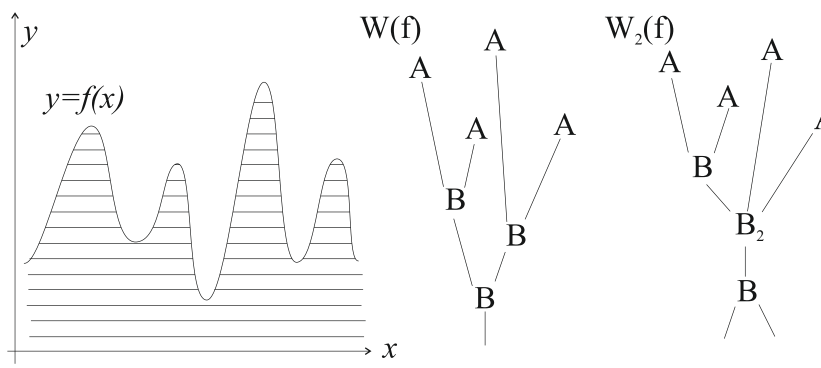


Рис. 4.6: Пример построения по графику непрерывной, положительной функции f графов $W(f)$ и $W_2(f)$. В графе $W_2(f)$ нижний атом B, на самом деле принадлежит серии атомов C_n при $n = 1$.

В случае, если значения функции f в концах области определения совпадают, то по её графику построим другой граф, обозначаемый $W_2(f)$, следующим образом. Склеим область под графиком функции в цилиндр. Если исходная область была расслоена отрезками горизонтальных прямых $y = const$, то полученный цилиндр будет расслоен линиями уровня $y = const$ на отрезки и окружности. Отрезки получаются из окружностей, пересекающихся с графиком функции f. Стянем каждый отрезок и каждую окружность в точку. В вершину, соответствующую перестройке окружности в несколько отрезков, поместим атом C_k, из которого вниз выходят два, а не одно ребро как в атоме B выше.

Как будет показано в дальнейшем, отрезкам всегда соответствует одно семейство движений, тогда как окружности – два. Эти два движения ассоциированы с движением по окружности в противоположных направлениях. Подробнее, см. книгу [5].

Здесь число k это число минимумов функции f, которых касается соответствующая окружность. Как и выше, заменим концевые вершины получившегося графа, соответствующие максимумам функции f атомами A. Во все остальные вершины поместим атомы B_k, где k – количество локальных минимумов, которых касается соответствующая окружность.

Пример построения графов $W(f)$ и $W_2(f)$ по графику функции f см. на рис. 4.6.

Теорема 4.6 (Е.Н. Селиванова [46]). *а) Пусть метрика ds^2 на торе T^2 является глобально лиувиллевой $(L, f, g, 0)-$метрикой. Построим по функциям f и g графы $W_2(f)$ и $W_2(g)$. Тогда соответствующая ее геодезическому потоку меченая молекула W^* имеет вид, показанный на рис. 4.7а. Метки задаются следующим образом. Все четыре ребра a, b, c, d, а также все ребра, содержащие атом A, несут на себе метку r, равную нулю. Все остальные ребра имеют метку $r = \infty$. Все метки n равны нулю, а все метки ε равны 1.*

б) Пусть геодезический поток метрики ds^2 на торе T^2 линейно интегрируем (т.е. ds^2 представляет собой $(g, t, L)-$метрику). Построим по функции g граф $W_2(g)$. Тогда соответствующая ее геодезическому потоку меченая молекула W^* имеет вид, показанный на рис. 4.7 б. Метки задаются следующим образом. Все ребра, не содержащие атома A, несут на себе метку $r = \infty$. Ребра же, содержащие атом A, несут на себе метку $r = 0$. Единственная имеющаяся семья имеет метку n равную нулю. Метки ε на ребрах a и b равны -1, а на всех остальных ребрах $\varepsilon = +1$.

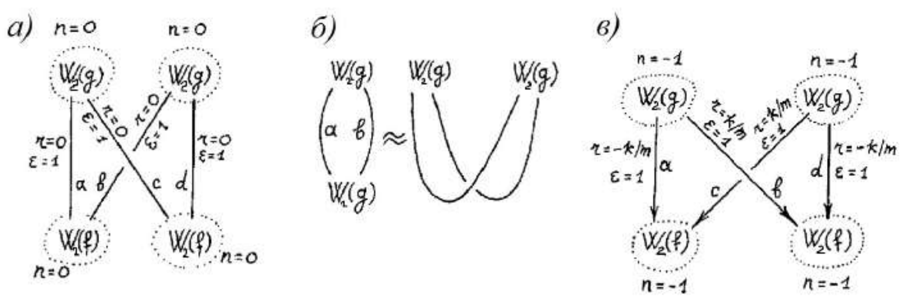


Рис. 4.7: Молекулы геодезического потока на торе.

Теорема 4.7 (В.В.Калашников (мл.) [15]). *Пусть ds^2 - конечнолистно лиувиллева метрика на торе, т.е. $(L, f, g, \frac{k}{m})-$ метрика ($k \neq 0$). Построим по функциям f и g графы $W_2(f)$ и $W_2(g)$. Тогда соответствующая ее геодезическому потоку меченая молекула W^* имеет вид, показанный на рис. 4.7 в. Метки задаются следующим образом. Все ребра, содержащие атом A, несут на себе метку r, равную нулю. Ребра b и c снабжены $r-$ меткой, равной $\frac{k}{m}$, а ребра a, d снабжены $r-$ меткой, равной $-\frac{k}{m}$. Все остальные ребра имеют метку $r = \infty$. Все метки n равны -1, а все метки ε равны 1.*

Теоремы 4.6 и 4.7 дают полную лиувиллеву классификацию всех квадратично и линейно интегрируемых геодезических потоков на двумерном торе.

Теорема 4.8 (Т.З. Нгуен, Л.С. Полякова [78]). *Рассмотрим на сфере геодезический поток римановой метрики вида*

$$ds^2 = d\theta^2 + f(\theta)d\varphi^2.$$

а) Тогда отвечающая этому геодезическому потоку молекула W имеет вид, показанный на рис.4.8, где молекула $W(f)$ построена по функции f указанным выше способом. Числовые метки внутри каждой молекулы $W(f)$ устроены так. На ребрах между седловыми атомами r-метки равны ∞, на ребрах между седловыми атомами и атомами A метки r равны нулю, все ε-метки равны +1.

б) Предположим, что молекула $W(f)$ отлична от атома A (то есть содержит хотя бы один седловой атом). Тогда на единственном центральном ребре, соединяющем два экземпляра молекулы $W(f)$, метка r равна бесконечности, а метка ε равна -1. Здесь имеется ровно одна семья. Она совпадает со всей молекулой W, из которой выброшены все концевые атомы A. Метка n на этой семье равна 2.

в) Если же молекула $W(f)$ сводится к одному атому A, то вся молекула W имеет простейший вид $A - A$. В этом случае мы имеем: $r = \frac{1}{2}, \varepsilon = 1$. Семей здесь нет.

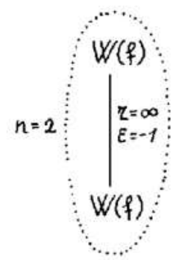


Рис. 4.8: Молекула геодезического потока на сфере с линейным интегралом.

Теорема 4.9 (Т.З. Нгуен, Л.С. Полякова, В.С. Матвеев [31, 78]). *Пусть на 2-сфере задана (L, F, G)-метрика. Графики функций F и G симметричны относительно точек $\frac{1}{2}$ и $\frac{L}{2}$. Обозначим через f (соотв. g) ограничение функции F (соотв. G) на отрезок $[0, \frac{1}{2}]$ (соотв. $[0, \frac{L}{2}]$). Слоение Лиувилля геодезического потока этой метрики на изоэнергетической поверхности $Q^3 = RP^3$ задается молекулами W^*, изображенными на рисунке 4.9. Метки внутри каждого из деревьев $W(f)$ и $W(g)$ устроены так: все метки r между седловыми атомами равны ∞, а между седловыми атомами и атомами A метки r равны нулю. Все метки типа ε равны +1 (внутри $W(f)$ и $W(g)$).*

Отметим, что топология интегрируемых геодезических потоков двумерных ориентируемых поверхностей такова что задающие их меченые молекулы не содержат так называемых атомов со звёздочками. Это означает, что все встречающиеся здесь трехмерные атомы (бифуркации торов Лиувилля) являются прямыми произведениями двумерных атомов на окружность. Этим обстоятельством мы будем неоднократно пользоваться в дальнейшем.

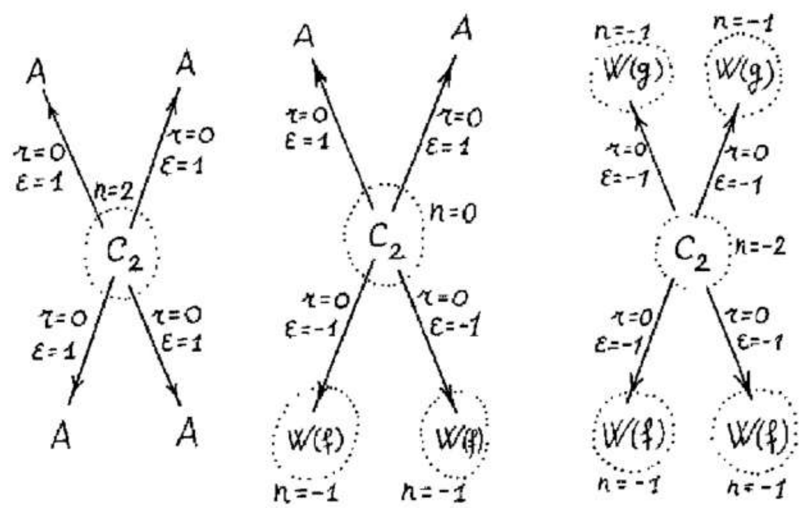


Рис. 4.9: Молекулы геодезического потока на сфере с квадратичным интегралом.

4.3.3 Моделирование биллиардами линейных геодезических потоков на торе и сфере.

Теперь можем перейти к доказательству теоремы о моделировании линейно интегрируемых геодезических потоков на торе и сфере. Приведём более подробную её формулировку.

Теорема 4.10 (В.В.Ведюшкина, А.Т.Фоменко, [91])**.** *1) Пусть на сфере задан геодезический поток, обладающий линейным интегралом. Тогда по нему алгоритмически и явно строится интегрируемый биллиард $\Delta(D + nC + D)$, склеенный из биллиардов D и C, ограниченных семейством концентрических окружностей, лиувиллево эквивалентный данному геодезическому потоку.*

2) Пусть на торе задан геодезический поток, обладающий линейным интегралом. Тогда по нему алгоритмически и явно строится интегрируемый биллиард $T(nC)$, склеенный из биллиардов-колец C, ограниченных семейством концентрических окружностей, лиувиллево эквивалентный данному геодезическому потоку.

3) При этом линейный интеграл любого такого геодезического потока на сфере или на торе сводится к одному и тому же каноническому линейному интегралу на топологическом биллиарде. Этот интеграл является углом между траекторией частицы и границей (т.е. окружностью) любого элементарного биллиарда в составе данного топологического биллиарда. Вообще говоря, обнаруженная лиувиллева эквивалентность является кусочно-гладкой.

Доказательство. Отметим, что согласно предложению 4.3.6, метрика ds^2 на сфере обладает линейно интегрируемым геодезическим потоком в том и только в том случае, когда на сфере существуют гладкие глобальные координаты (θ, φ) с двумя особыми точками. Это аналоги полюсов для обычных сферических координат. Здесь θ меняется от 0 до некоторого θ_0, а φ —

периодическая координата $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, причем в этих координатах метрика имеет вид

$$ds^2 = d\theta^2 + f(\theta)d\varphi^2.$$

При этом функция $f(\theta)$ гладко зависит от натурального параметра θ на отрезке $[0, \theta_0]$, положительна внутри интервала $(0, \theta_0)$, обращается в нуль на его концах и удовлетворяет в окрестности точек 0 и θ_0 некоторым дополнительным условиям гладкости [5], [16].

Рассмотрим точки $x_0 = 0, x_1, x_2, ..x_n = \theta_0$, в которых функция f имеет экстремумы. Сопоставим каждому промежутку $[x_i, x_{i+1}]$ монотонности функции f биллиард D или C, ограниченный окружностями с радиусами $f(x_i)$ и $f(x_{i+1})$. В случае, если одно из значений функции f нулевое – как для крайних промежутков монотонности – биллиард имеет вид D, в других случаях – вид C. Склеим из полученных элементарных биллиардов топологический биллиард, склеивая биллиарды в последовательности, в которой расположены промежутки монотонности функции f. Обозначим через $\tilde{f}$ кусочно-линейную функцию, построенную по полученному биллиарду согласно правилам параграфа 2 второй главы. При этом отметим, что функция $\tilde{f}$ имеет то же взаимное расположение локальных минимумов и максимумов (на оси ординат), что и функция $f(\theta)$, и, как следствие, их графы $W(f)$ и $W(\tilde{f})$ одинаковы. Следовательно, меченые молекулы геодезического потока и построенного нами биллиарда $\Delta(D + nC + D)$ совпадают. То есть эти интегрируемые системы лиувиллево эквиваленты. В случае сферы теорема доказана.

Перейдём к случаю тора. Пусть геодезический поток метрики ds^2 на торе T^2 линейно интегрируем. Тогда метрика на торе является $(g, t, L)-$метрикой. При этом функция g периодична с периодом L. Заметим, что значения функции g совпадают в концевых точках области определения. Сопоставим каждому промежутку монотонности данной функции на интервале длины L биллиард C, ограниченный окружностями, радиусы которых совпадают со значениями функции g в концах этого промежутка. Склеим из полученных биллиардов новый топологический биллиард, гомеоморфный тору. Это можно сделать поскольку периодичность функции g означает, что радиусы окружностей, соответствующие первому и последнему биллиардам C, совпадают. Напомним, что образно говоря мы "сворачиваем китайский фонарик" в тор.

Кусочно-линейная функция $\tilde{g}$, построенная по данному топологическому биллиарду, имеет такое же взаимное расположение локальных минимумов и максимумов (на оси ординат), что и функция g. Согласно утверждению 2.5.3, полученный биллиард имеет ту же меченую молекулу Фоменко-Цишанга, что и исходный геодезический поток. Следовательно, они лиувиллево эквиваленты. Теорема для случая тора доказана.

$\square$

Топологические биллиарды, описанные в теореме 4.10, можно предъявить явно и наглядно. Начнем со случая сферы. Линейно-интегрируемая метрика на сфере полностью определяется одной неотрицательной гладкой функцией f, заданной на отрезке $[0, L]$, и обращающейся в ноль только в концах отрезка. Отметим, что в этих точках функция f удовлетворяет некоторым условиям, обеспечивающим гладкость метрики в полюсах сферы [5], [16], [17].

Употребляемый здесь иногда термин “многообразие вращения” отнюдь не означает, что поверхность M с метрикой $ds^2 = d\theta^2 + f(\theta)d\varphi^2$ обязательно должна вкладываться в евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ в виде поверхности вращения, где ds^2 индуцируется объемлющей евклидовой метрикой. Более того, известны примеры, когда это не так. Например, целый класс “многообразий вращения”, не вкладывающихся в $\mathbb{R}^3$, являющихся многообразиями Бертрана. В случае если многообразие M вкладывается в $\mathbb{R}^3$ функция $f(\theta)$ имеет смысл расстояния до оси вращения. Критерий вложимости данной метрики в $\mathbb{R}^3$ получен М.Энгманом. Более подробно см. в работе Е.О.Кантонистовой [17].

Теперь мы построим кусочно-гладкую локально-плоскую поверхность, гомеоморфную сфере, используя функцию f. Эту поверхность мы уже реализуем как поверхность вращения вокруг некоторой оси в $\mathbb{R}^3$.

Построим вспомогательную кусочно-линейную функцию h, совпадающую с f в точках минимума и максимума и показанную на рис. 4.10. Далее, изменим график функции h, не меняя ординаты её экстремумов. А именно, последовательно изменим абсциссы экстремумов так, чтобы все звенья ломаной (или их продолжения) пересекали бы ось Ox под одним и тем же углом. При этом мы считаем, что угол между двумя прямыми всегда острый, т.е. не превосходит $\pi/2$ (см. рис. 4.10). Полученную кусочно-линейную функцию обозначим $\tilde{f}$.

Важно что значения функций f и $\tilde{f}$ совпадают во всех точках их локальных экстремумов. Причем функция $\tilde{f}$ имеет то же взаимное расположение значений локальных минимумов и максимумов (на оси Oy), что и функция f. Следовательно, их графы $W(f)$ и $W(\tilde{f})$ одинаковы.

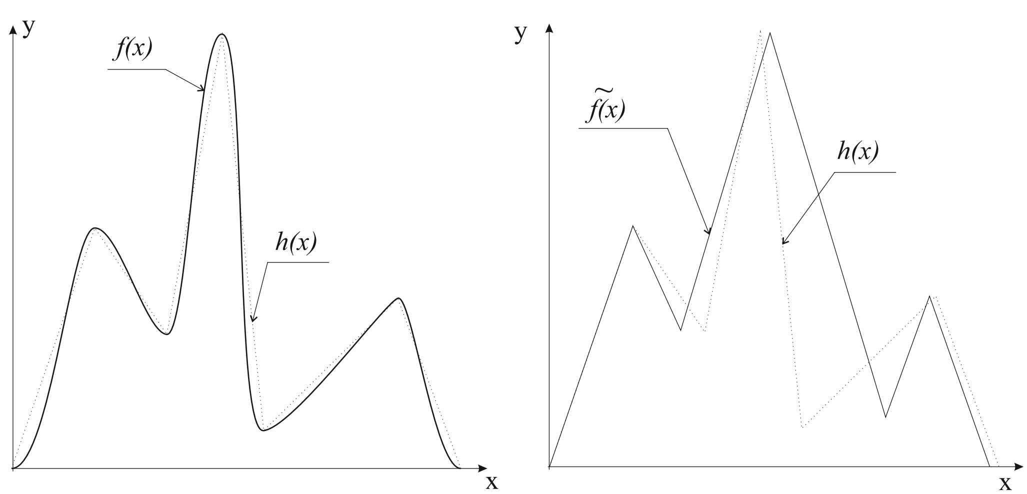


Рис. 4.10: Построение по функции $f(x)$ кусочно-линейных функций h (пунктирная) и $\tilde{f}$, имеющих то же взаимное расположение значений в точках экстремума.

Построим кусочно-гладкую сферу в $\mathbb{R}^3$, вращая график функции $\tilde{f}$ вокруг оси Ox. Полученную поверхность назовём "растянутой сферой-гармошкой". Она состоит из набора колец, являющихся частями конусов. Каждое кольцо ограничено двумя окружностями. Рассмотрим проекцию каждого кольца на плоское кольцо, ограниченное концентрическими окружностями с теми же радиусами. В результате получится биллиард, названный выше "сферой-гармошкой". То есть, сожмём "растянутую сферу-гармошку" вдоль её оси. Таким образом, построенный нами в теореме 4.10 биллиард можно условно изобразить в $\mathbb{R}^3$ поверхностью вращения – "растянутой сферой-гармошкой".

Совершенно аналогично строится в $\mathbb{R}^3$ "растянутый тор-гармошка" для случая линейно интегрируемой метрики на торе. Искомый биллиард, построенный в теореме 4.10, получается сжатием "растянутого тора-гармошки".

4.3.4 Моделирование биллиардами квадратичных геодезических потоков на торе и сфере.

Случай квадратичного интеграла геодезического потока на сфере

В данном разделе мы пользуемся некоторыми обозначениями топологических биллиардов, принятыми во втором параграфе второй главы, где дана классификация невыпуклых топологических биллиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик.

Рассмотрим гомеоморфный сфере топологический биллиард $\Delta_\alpha(2(A_1+mA_0+nB_1+2mnB_0+A_1))$ склеенный из элементарных биллиардов как показано на рис. 4.11. Во втором параграфе второй главы был вычислен инвариант лиувиллевой эквивалентности изоэнергетической поверхности данного биллиарда.

Предложение 4.3.7 (В.В.Ведюшкина [87]). *Пусть* $\Delta_\alpha(2(A_1+mA_0+nB_1+2mnB_0+A_1))$ *– гомеоморфный сфере топологический биллиард. Тогда инварианты Фоменко-Цишанга – меченые молекулы* W^*, *описывающие топологию слоения Лиувилля изоэнергетической поверхности* Q^3 *интегрируемого топологического биллиарда* $\Delta_\alpha(2(A_1+mA_0+nB_1+2mnB_0+A_1))$, *ограниченного дугами софокусных квадрик, изображены на рис. 4.12.*

Теперь перейдём к доказательству теоремы о моделировании квадратично интегрируемых потоков на сфере.

Теорема 4.11 (В.В.Ведюшкина, А.Т.Фоменко, [91]). *1) Пусть на 2-сфере задана гладкая (или вещественно-аналитическая) риманова метрика, геодезический поток которой квадратично интегрируем. Тогда алгоритмически и явно строится интегрируемый биллиард, принадлежащий серии биллиардов* $\Delta_\alpha(2(A_1+mA_0+nB_1+2mnB_0+A_1))$, *лиувиллево эквивалентный данному геодезическому потоку. Этот биллиард можно наглядно гомеоморфно изобразить в*

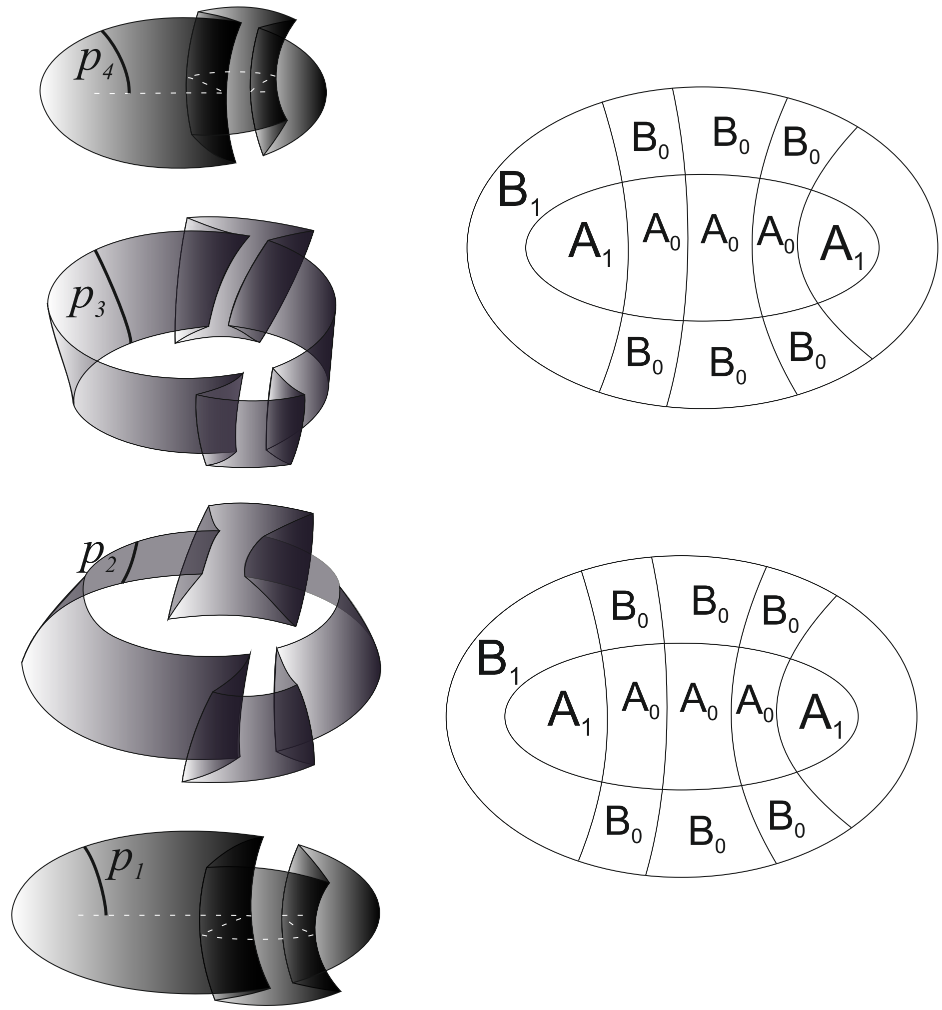


Рис. 4.11: Топологический биллиард $\Delta_\alpha(2(A_1 + mA_0 + nB_1 + 2mnB_0 + A_1))$, гомеоморфный сфере. Сфера получается в результате склейки четырёх биллиардов. Справа указана схема склейки. Белым пуктиром выделены два разреза вдоль вырожденного эллипса с параметром b – отрезка между фокусами. Выделенные жирным отрезки p_i обозначают части образующей P получившегося цилиндра.

$\mathbb{R}^3$ двумерной кусочно-гладкой локально-плоской поверхностью, условно называемой "растянутой двойной сферой-гармошкой". Такой биллиард (как и его изображение в $\mathbb{R}^3$) гомеоморфен сфере.

2) При этом квадратичный интеграл любого такого геодезического потока на сфере сводится к одному и тому же каноническому квадратичному интегралу на топологическом биллиарде. Этот интеграл на изоэнергетической поверхности $v^2 + w^2 = 1$ является параметром квадрики (эллипса или гиперболы), которой касаются прямые, содержащие звенья биллиардной траектории и задаётся формулой $-(xw - yv)^2 + v^2b + w^2a$. Вообще говоря, обнаруженная

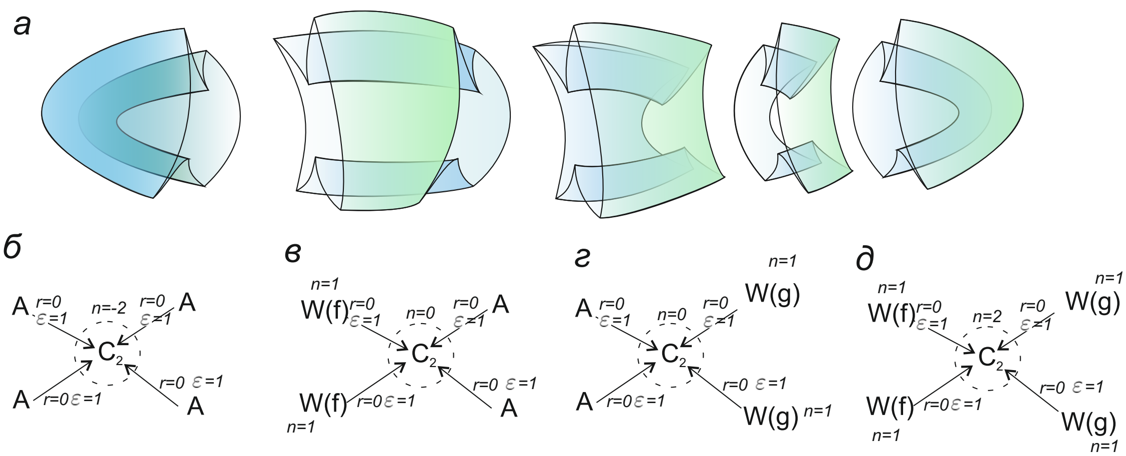


Рис. 4.12: На рисунке а) изображен биллиард, принадлежащий к серии топологических биллиардов $\Delta_\alpha(2(A_1 + mA_0 + nB_1 + 2mnB_0 + A_1))$, гомеоморфных сфере, иначе говоря, “двойная сфера-гармошка”. На рисунке изображены левый и правый диски, а также “кольца”, из которых склеен такой биллиард. Инварианты Фоменко-Цишанга для биллиардов этой серии изображены на рисунках б)-д).

лиувиллева эквивалентность является кусочно-гладкой.

Доказательство. Гладкая (или вещественно-аналитическая) риманова метрика на сфере обладает квадратично интегрируемым геодезическим потоком в том и только в том случае, когда она изометрична некоторой (L, F, G)- метрике при подходящих параметрах L, F, G. Гладкие функции F (определена на отрезке $[0, 1]$) и G (определена на отрезке $[0, L]$) симметричны относительно точек $\frac{1}{2}$ и $\frac{L}{2}$ соответственно (см. [5]). В этих точках, а также в концах области определения эти функции равны нулю, в остальных точках – строго положительны.

Напомним, что через f (соотв. g) обозначено ограничение функции F (соотв. G) на отрезок $[0, \frac{1}{2}]$ (соотв. $[0, \frac{L}{2}]$).

Рассмотрим гладкие функции $f_1(x) = f(x)\frac{b}{\max f}$ и $g_1 = g(x)\frac{a-b}{\max g}$. Напомним, что параметры семейства связаны неравенством $0 < b < a$. Тогда значения функции $f_1(x) \in [0, b]$, а значения функции $g_1(x) \in [0, a - b]$. Графы W, построенные по ним, совпадают с графами для изначальных гладких функций f и g. Рассмотрим экстремумы функций f_1 и g_1. Пусть $\{x_0 = 0,\ x_1,\ x_2,\ ..\ x_{n+2} = 1\}$ – точки экстремума функции f_1, а $\{y_0 = 0,\ y_1,\ y_2,\ ..\ y_{m+2} = L\}$ – точки экстремума функции g_1. Рассмотрим биллиард A_1, ограниченный эллипсом с параметром $f_1(x_1)$ и гиперболой с параметром $b + g_1(y_1)$. Сопоставим каждому промежутку $[x_i, x_{i+1}]$, $0 < i < n+1$ монотонности функции f_1 биллиард B_1, ограниченный эллипсами с параметрами $f(x_i)$ и $f(x_{i+1})$ и гиперболой с параметром $b+g_1(x_1)$. Биллиарды, которые сопоставлены каждым двум последовательным промежуткам монотонности $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$ функции f_1 можно склеить между собой вдоль граничного эллипса с параметром $f_1(x_i)$. В результате получится гомеоморфная диску “полоса”, склеенная из n биллиардов B_1. Последнему промежутку монотонности функции f_1 сопоставим биллиард A_1, ограниченный эллипсом с параметром $f_1(x_{n+1})$ и гиперболой с параметром $b+g_1(y_1)$. Склеим два биллиарда A_1 и полосу из n биллиардов B_1 друг с другом вдоль граничных эллипсов. Назовем полученный биллиард "левым диском". Назовем "правым диском" аналогично построенный биллиард, ограниченный теми же эллипсами и гиперболой с параметром $b+g_1(y_{m+1})$.

Сопоставим каждому промежутку $[y_j, y_{j+1}]$, $0<j<m+1$ монотонности функции g_1 следующие биллиарды, ограниченные гиперболами с параметрами $b+g_1(y_j)$ и $b+g_1(y_{j+1})$. А именно, два биллиарда A_0, ограниченных эллипсами с параметрами $f(x_1)$ и $f_1(x_{n+1})$, и $2n$ биллиардов B_0, ограниченных эллипсами с параметрами $f(x_i)$ и $f(x_{i+1})$, где $0<i<n+1$. Их можно склеить друг с другом вдоль граничных эллиптических сегментов в "кольцо" в том же порядке, в котором склеены друг с другом промежутки монотонности функции f_1.

Последовательно склеим m таких колец согласно порядку промежутков монотонности функции g_1. Напомним, что m это число промежутков монотонности функции g_1 за вычетом начального и последнего. Получившийся биллиард можно теперь склеить с левым и правым дисками вдоль сегментов гипербол с параметрами $b+g_1(y_1)$ и $b+g_1(y_{m+1})$. В результате получится гомеоморфный сфере биллиард $\Delta_\alpha(2(A_1+mA_0+nB_1+2mnB_0+A_1))$ (см. рис. 4.12). Кусочно-линейные функции $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$, построенные по нему (в соответствии с описанным выше алгоритмом) имеют то же взаимное расположение минимумов и максимумов, что и функции f и g, а значит, ту же структуру графов W.

Сравним меченые молекулы, вычисленные для геодезического потока на сфере см. рис.4.9 и для соответствующего биллиарда см. рис. 4.12. Мы видим, что их метки отличаются. Однако при замене ориентации изоэнергетического многообразия Q^3 некоторые метки могут поменяться. Оказывается в нашем случае это поможет нам "уравнять метки". А именно, при замене ориентации в указанных молекулах одновременно меняются знаки меток n, а также знаки меток ε, расположенных на ребрах с конечной меткой r, соединяющих седловые атомы друг с другом (подробнее см.[5]). Таким образом, после замены ориентации эти меченые молекулы совпадут. Мы получили лиувиллеву эквивалентность данных систем. Теорема доказана. □

Замечание 41. Из этого доказательства видна роль замены ориентации на многообразии Q^3. Как оказывается, в некоторых случаях это позволяет менять некоторые метки и обнаруживать эквивалентности интегрируемых систем.

Аналогично описанным выше линейно-интегрируемым метрикам на сфере, для квадратично-интегрируемых метрик на сфере строится так называемая двойная "сфера-гармошка". Её наглядной моделью в $\mathbb{R}^3$ является "двойная растянутая сфера-гармошка". Она "растянута" по двум ортогональным направлениям, соответствующим функциям $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ (см. подробнее рис. 4.12).

Перейдём к случаю тора.

Случай квадратичного интеграла геодезического потока на торе

Для моделирования квадратично интегрируемых геодезических потоков на торе нам потребуются не содержащий фокусов гомеоморфный тору топологический биллиард $\Delta_{\alpha eh}(2nB_0)$ и биллиардная книжка, построенная в третьей главе, четвертом параграфе. Напомним её построение.

Фиксируем некоторый биллиард $\Delta_{\alpha eh}(2nB_0)$. Выберем на нём выпуклые цикл-параллель и цикл-меридиан, являющиеся объединением выпуклых рёбер склейки, лежащих на эллиптических и гиперболических сегментах соответственно. Таких циклов может быть несколько. Берём любые из них. Далее выделим невыпуклый цикл-параллель, состоящий из невыпуклых сегментов склейки, лежащих на эллипсах с максимальным значением параметра λ из всех рёбер склейки. Аналогично выделим невыпуклый цикл-меридиан, состоящий из невыпуклых сегментов склейки, лежащих на гиперболах с максимальным значением параметра λ из всех рёбер склейки. Эти две параллели и два меридиана разбивают тор $\Delta_{\alpha eh}(2nB_0)$ на четыре области-листа. Обозначим их через α, β, γ и δ.

При этом пары листов $\alpha,\ \gamma$ и $\beta,\ \delta$ склеены вдоль гиперболических границ, обозначаемых через a (выпуклая) и b (невыпуклая).

Пары листов $\alpha,\ \beta$ и $\gamma,\ \delta$ склеены вдоль эллиптических границ, обозначаемых через c (выпуклая) и d (невыпуклая). Пусть n и k – взаимно простые натуральные числа, причем $k < n$. Обозначим через σ перестановку, состоящую из одного цикла $(1\ 2\ \ldots\ n)$. Рассмотрим n экземпляров биллиарда $\Delta_{\alpha eh}(2nB_0)$. Занумеруем биллиарды числами от 1 до n и продолжим нумерацию на их листы $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$. Склеим из этих биллиардов комплекс-книжку, используя перестановку σ. Более подробно см. работы В.В.Ведюшкиной, А.Т.Фоменко и И.С.Харчевой [84], [86]. На объединении биллиардов, составляющих книжку, зададим следующее движение биллиардной частицы. На выпуклой эллиптической границе a материальная точка при движении по листу α_i (соотв. β_i) после удара переходит на лист $\gamma_{\sigma(i)}$ (соотв. $\delta_{\sigma(i)}$). При движении по листу γ_i (соотв. δ_i) после удара частица переходит на лист $\alpha_{\sigma^{-1}(i)}$ (соотв. $\beta_{\sigma^{-1}(i)}$). На выпуклой гиперболической границе c материальная точка при движении по листу α_i (соотв. γ_i) после удара переходит на лист $\beta_{\sigma^k(i)}$ (соотв. $\delta_{\sigma^k(i)}$) При движении по листу β_i (соотв. δ_i) частицы после удара переходит на лист $\alpha_{\sigma^{-k}(i)}$ (соотв. $\gamma_{\sigma^{-k}(i)}$). Отметим, что при таких движениях происходит смена номера листа и следовательно, номера топологического биллиарда $\Delta_{\alpha eh}(2nB_0)$. На невыпуклых границах b и c движение частицы задаётся стандартно, то есть без смены номера биллиарда $\Delta_{\alpha eh}(2nB_0)$. То есть в данном случае перейдя через ребро невыпуклой склейки и направив частицу обратно, мы вернёмся на тот же лист.

Построенную биллиардную книжку обозначим через $T(\Delta_{\alpha eh}(2nB_0), n, k)$.

Предложение 4.3.8 ([95]). *Инвариант Фоменко-Цишанга, задающий слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности Q^3 для построенной биллиардной книжки $T(\Delta_{\alpha eh}(2nB_0), n, k)$ имеет вид, представленный на рисунке 3.17б.*

Доказательство данного утверждения изложено в четвертом параграфе третьей главы.

Теорема 4.12 (В.В.Ведюшкина, А.Т.Фоменко, [91]). *1) Пусть на 2-торе задана гладкая (или вещественно-аналитическая) риманова метрика, геодезический поток которой квадратично интегрируем. Тогда алгоритмически и явно строится интегрируемый биллиард, ограниченный дугами софокусных квадрик, лиувиллево эквивалентный данному геодезическому потоку.*

2) А именно, для случая глобально-лиувиллевой метрики на торе моделирующий биллиард имеет вид $\Delta_{\alpha eh}(2nB_0)$. Этот биллиард можно наглядно гомеоморфно изобразить в $\mathbb{R}^3$ двумерной кусочно-гладкой локально-плоской поверхностью, условно называемой "растянутым двойным тором-гармошкой". Такой биллиард (как и его изображение в $\mathbb{R}^3$) гомеоморфен тору.

Для случая конечнолистно лиувиллевой метрики на торе моделирующий биллиард имеет вид $T(\Delta_{\alpha eh}(2nB_0), n, k)$. Это так называемая биллиардная книжка. Она является двумерным клеточным комплексом, гомотопически эквивалентным букету двух окружностей S^1 и $n-1$ двумерных сфер S^2.

3) При этом квадратичный интеграл любого такого геодезического потока на торе сводится к одному и тому же каноническому квадратичному интегралу на топологическом биллиарде. Этот интеграл на изоэнергетической поверхности $v^2+w^2=1$ является параметром квадрики (эллипса или гиперболы), которой касаются прямые, содержащие звенья биллиардной траектории и задаётся формулой $-(xw-yv)^2+v^2b+w^2a$. Вообще говоря, обнаруженная лиувиллева эквивалентность является кусочно-гладкой.

Доказательство. Любая метрика на торе, обладающая квадратично интегрируемым геодезическим потоком, допускает представление в виде $(L, f, g, \frac{k}{m})$−метрики.

Если метрика является глобально лиувиллевой (т.е. при $k=0$) то подходящим биллиардом является биллиард $\Delta_{\alpha eh}(2nB_0)$. Выше были предъявлены меченые молекулы см. рис. 4.7 для геодезического потока на торе и 3.17 а для топологического биллиарда. Совпадение молекул означает лиувиллеву эквивалентность данных систем. Если же метрика конечнолистно лиувиллева (т.е. при $k \neq 0$) то её моделирует биллиардная книжка $T(\Delta_{\alpha eh}(2nB_0), n, n-k)$. Меченые молекулы изображены на рис. 4.7 для геодезического потока на торе и 3.17 б для биллиардной книжки. Так как представленные молекулы совпали, это означает лиувиллеву эквивалентность данных систем. Построение подходящих биллиардов B_0 по функциям f и g осуществляется аналогично случаю сферы.

Теперь опишем топологию биллиарда-книжки $T(\Delta_{\alpha eh}(2nB_0), n, k)$. Он получается склейкой n квадратов, каждый из которых склеивается в тор. Этот тор зададим стандартным словом-коммутатором $aba^{-1}b^{-1}$, где a и b — стороны квадрата. Далее рассмотрим n экземпляров этого квадрата и склеим их, отождествив соответствующие буквы на границах. В результате получится двумерный клеточный комплекс, гомотопически эквивалентный букету из $n-1$ сферы. Теперь осталось отождествить на этом комплексе две пары отрезков a, a^{-1} и b, b^{-1}. Легко видеть что полученный комплекс гомотопически эквивалентен букету двух окружностей и $n-1$

экземпляров сферы.

Теорема доказана.

$\square$

Глава 5

Гипотеза А.Т. Фоменко.

5.1 Формулировка. Восемь классов биллиардов.

Оказалось, как показано в предыдущей главе, что среди интегрируемых топологических биллиардов и биллиардных книжек найдено множество лиувиллево эквивалентных им известных интегрируемых систем гамильтоновой механики, например классические случаи интегрируемости (Эйлера, Ковалевской, Горячева-Чаплыгина и другие), их обобщения — случай Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ — и квадратично интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых поверхностях (сфере и торе). Опираясь на эти результаты, А.Т.Фоменко сформулировал гипотезу [88] о реализуемости произвольных слоений Лиувилля (т.е. меченых молекул) интегрируемых систем с двумя степенями свободы (в классе лиувиллевой эквивалентности). Приведем первые четыре пункта.

Гипотеза A (атомы). Любые бифуркации двумерных торов Лиувилля в изоэнергетическом многообразии любой интегрируемой невырожденной системы с двумя степенями свободы моделируются при помощи интегрируемых биллиардов. Иными словами, любые ориентируемые 3-атомы реализуются подходящими биллиардами. Это означает, что сравниваемые слоения Лиувилля на трехмерных многообразиях послойно гомеоморфны (т.е. кусочно-гладко лиувиллево эквивалентны).

Гипотеза B (грубые молекулы). Любые грубые молекулы — инварианты Фоменко, задающие множество всех интегрируемых систем с точностью до грубой эквивалентности (см. определение 1.20) — моделируются интегрируемыми биллиардами.

Гипотеза C (меченые молекулы). Любые меченые молекулы — инварианты Фоменко-Цишанга, задающие множество всех интегрируемых систем с точностью до лиувиллевой эквивалентности – моделируются интегрируемыми биллиардами. Иными словами, все слоения Лиувилля невырожденных интегрируемых систем на изоэнергетических 3-поверхностях послойно гомеоморфны соответствующим слоениям некоторого интегрируемого биллиарда.

Гипотеза D (изоэнергетические 3-многообразия). Любая трехмерная замкнутая изоэнергетическая поверхность любой интегрируемой невырожденной системы с двумя степенями свободы реализуется как изоэнергетическая поверхность некоторого интегрируемого биллиарда. Эту гипотезу можно считать частным случаем гипотезы С. Если гипотеза С верна, то справедлива и гипотеза D. Напомним, что класс изоэнергетических 3-многообразий невырожденных интегрируемых систем совпадает, согласно теореме А.Т.Фоменко, с классом граф-многообразий (многообразий Вальдхаузена).

Любой ответ на эту гипотезу Фоменко интересен. Например, если выяснится, что не все "меченые молекулы" (то есть инварианты Фоменко-Цишанга) реализуются биллиардами, то полезно описать класс реализуемых молекул. При этом обнаружатся топологические препятствия, различающие реализуемые и нереализуемые слоения Лиувилля. То есть станет ясно — какие невырожденные интегрируемые системы лиувиллево эквивалентны интегрируемым биллиардам, а какие — нет.

Опишем те классы интегрируемых биллиардов (как классические так и обнаруженные недавно), в которых А.Т.Фоменко [88] предполагает решать эту задачу. Мы будем рассматривать компактные биллиарды, описывающие движение материальной точки в компактных областях.

Класс I. Элементарные биллиарды — области на евклидовой плоскости, ограниченные дугами софокусных квадрик с углами $\frac{\pi}{2}$ (см [22]). Их классификация сделана автором [53], а топологическая классификация соответствующих слоений Лиувилля получена в работах М.Раднович, В.Драговича [70, 12] и В.В.Ведюшкиной [52, 53]. Здесь и в дальнейшем биллиарды рассматриваются с точностью до естественной эквивалентности (см. подробнее определение 1.30).

Класс II. Топологические биллиарды — двумерные ориентируемые поверхности (возможно с краем), полученные изометричными склейками элементарных биллиардов вдоль сегментов границ. При этом в каждой вершине склейки суммарный угол всех элементарных биллиардов равен $\frac{\pi}{2}$, π или 2π. Такие биллиарды классифицированы во второй главе, см. например, теорему 2.1, в которой классифицированы топологические биллиарды, склеенные из плоских биллиардов, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол. Заметим, что топологические биллиарды уже не обязаны изометрично вкладываться в плоскость.

Класс III. Биллиардные книжки – двумерные клеточные комплексы, клетками которых являются элементарные биллиарды, а ребрами – их границы (см. подробнее [86] и третью главу, определение 3.2). При этом каждой одномерной клетке – корешку книжки – приписана перестановка $\sigma \in S_n$, где n это число двумерных клеток (листов), склеенных по данному ребру. Прямолинейно двигаясь по биллиарду с номером i точка, попадая на корешок l продолжает движение по биллиарду с номером $\sigma(i)$, где σ — перестановка, приписанная корешку l.

Класс IV. Биллиарды на плоскости Минковского, ограниченные дугами софокусных квадрик. Топологию таких биллиардов впервые начали изучать В.Драгович и М.Раднович [13]. Затем полная классификация элементарных биллиардов в метрике Минковского была получена Е.Е.Каргиновой [18]. Оказалось, что топология возникающих здесь слоений Лиувилля отличается от слоений Лиувилля элементарных биллиардов в евклидовой метрике (класс I). Это указывает на глубокие различия законов отражения в метриках Евклида и Минковского.

Класс V. Рассмотрим двумерную гладкую замкнутую риманову поверхность (компактную или некомпактную), а на ней компактную область, ограниченную кусочно-гладкой кривой. Рассмотрим биллиард в этой области – точка движется по отрезкам геодезических в заданной метрике, отражаясь от границ по стандартному закону. Назовем эту динамическую гамильтонову систему геодезическим биллиардом. Естественным вопросом в такой задаче является вопрос об интегрируемости такого биллиарда в зависимости от метрики и от граничной кривой. Ярким примером является геодезический биллиард в областях на квадриках в трехмерном пространстве, ограниченных кривыми, являющимися пересечениями конфокальных квадрик с данной квадрикой. Полная классификация таких биллиардов получена Г.В.Белозеровым [10]. В этой классификации встречаются как слоения Лиувилля, которые были в плоском случае, так и (что особенно интересно) появляются новые слоения Лиувилля, ранее не возникавшие в теории плоских элементарных биллиардов.

Также в классе геодезических биллиардов лежат биллиарды на поверхностях вращения. Биллиарды, ограниченные параллелями, будут интегрируемы как следствие теоремы Клеро об интегрируемости геодезического потока на поверхности вращения. Данный интеграл линеен по импульсам.

Расширяя класс биллиардов, мы таким образом, расширяем запас слоений Лиувилля (инвариантов Фоменко-Цишанга), реализуемых биллиардами.

Класс VI. Биллиарды с потенциалом. Оказывается, во многих случаях биллиарды из перечисленных выше классов I-V можно снабдить потенциалом, так, чтобы возникающая динамическая система была интегрируема. Например, для биллиарда в эллипсе с центральным потенциалом специального вида это было показано В.В.Козловым [25]. Тем не менее, биллиарды с такими потенциалами останутся интегрируемыми если рассмотреть класс элементарных биллиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик. Анализу топологии слоения Лиувилля изоэнергетических поверхностей таких биллиардов посвящены работы И.Ф.Кобцева и С.Е.Пустовойтова [44, 44], которые полностью классифицировали возникающие слоения Лиувилля в терминах инвариантов Фоменко-Цишанга. Отметим, что на поверхностях вращения введение инвариантного потенциала также сохраняет интегрируемость. Анализу слоения Лиувилля геодезических потоков с инвариантными потенциалами на поверхностях вращения посвящены работы Е.Е.Кантонистовой [16, 17] и Д.С.Тимониной [49].

Класс VII. Магнитные биллиарды (биллиарды в магнитном поле). Рассмотрим плоскую область, ограниченную гладкой связной кривой и биллиард в ней под действием магнитного поля. В работах М.Бялого и А.Е.Миронова (см. например, [66, 11]) получены существенные продвижения в вопросах интегрируемости магнитного биллиарда в зависимости от границы. В настоящее время неизвестны односвязные интегрируемые магнитные биллиарды, которые ограничены кривой, отличной от окружности. Отметим, что биллиард в магнитном поле (так называемый магнитный биллиард), ограниченный двумя концентрическими окружностями, также интегрируем. Автором совместно с С.Е.Пустовойтовым [93] было показано, что набор слоений Лиувилля такого биллиарда содержит слоения, не реализуемые биллиардами без магнитного поля.

Замечание 42. Естественно объединить все перечисленные выше классы в один общий класс и рассматривать задачу о реализации слоений Лиувилля гамильтоновых систем в этом “объемлющем” классе. Не исключено, что будут обнаружены другие интересные классы интегрируемых биллиардов.

Как уже было сказано выше, расширение класса интегрируемых биллиардов позволяет на каждом этапе реализовывать при помощи биллиардов новые интегрируемые гамильтоновы системы физики, механики, геометрии. Таким образом, гипотезу А.Т. Фоменко С естественно сначала изучать в каждом из перечисленных выше классов I-VII. Оказывается, для разных классов, получаются, вообще говоря, разные ответы. А именно, в некоторых из этих классов реализация слоений Лиувилля наталкивается на топологические препятствия. Например, это происходит в классе биллиардных книжек (см. ниже 5.6). Однако, оказывается, что в классе магнитных биллиардов некоторые из этих препятствий исчезают.

Приведем ниже результаты, полученные при доказательстве различных пунктов гипотезы А.Т. Фоменко.

5.2 Доказательство гипотезы А. Моделирование 3-атомов при помощи биллиардных книжек

Теорема 5.1 (В.В.Ведюшкина, И.С. Харчёва [86]). [1] *Для любого ориентируемого 3-атома (со звездочками или без) алгоритмически строится биллиардная книжка, склеенная из простейших биллиардов A'_0, такая что слоение Лиувилля прообраза окрестности особого значения интеграла $\Lambda = b$ (в случае атома A особого значения $\lambda = 0$) в её изоэнергетической поверхности Q^3 послойно гомеоморфно данному атому.*

Замечание 43. Напомним, что биллиард A'_0 ограничен эллипсом, вогнутой гиперболой и двумя прямыми $x = 0$ и $y = 0$ (см. рис. 5.1). Кроме того, вместо прямой $x = 0$ можно взять дугу гиперболы, являющуюся выпуклой границей области (см. рис. 5.1).

Особому уровню $\Lambda = b$ соответствуют траектории, лежащие на прямых, которые проходят через фокусы.

Определение 5.1. *Крестом* называется прообраз ε-окрестности точки 0 функции $x^2 - y^2$, заданной в некоторой δ-окрестности точки $(0, 0)$ вместе со структурой слоения, необходимой для того, чтобы говорить о послойном гомеоморфизме (см. рис. 5.2). Здесь уровень 0 – критический.

[1] Следующая теорема будет иметь номер 5.3

Рис. 5.1: Простейшие биллиарды A_0'.

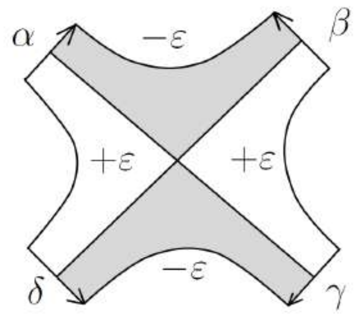


Рис. 5.2: Крест. Закрашены уровни $c \in (-\varepsilon, 0)$, не закрашены уровни $c \in (0, +\varepsilon)$.

Определение 5.2. *Ребро креста* – это компонента связности пересечения креста с границей δ-окрестности точки $(0,\,0)$, то есть $(|x^2 - y^2| < \varepsilon) \cap (x^2 + y^2 = \delta)$, где $\varepsilon < \delta$.

Рёбрам креста на рис. 5.2 приписаны стрелки и буквы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Любой седловой 2-атом P можно склеить из $k \in \mathbb{N}$ крестов вдоль их ребер так, чтобы каждый уровень $(x^2 - y^2 = c)$, $c \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ на одном кресте склеивался соответствующим уровнем $(x^2 - y^2 = c)$ на другом (или на том же самом) кресте (см. рис. 5.3). Число k называется *сложностью атома P*.

Могут получиться, как ориентируемые (как самостоятельное многообразие) 2-атомы, так и неориентируемые. Ориентируемые 2-атомы могут быть погружены в плоскость (см. теорему 2.9 в книге А.В. Болсинова, А.Т. Фоменко [5]).

Естественно связывать с 2-атомом граф Γ, являющийся прообразом критического уровня, вершины которого могут иметь только кратности 0 или 4. 2-атом содержит несколько колец, являющихся прообразом $(-\varepsilon, 0)$ и несколько колец, являющихся прообразом $(0, +\varepsilon)$.

Замечание 44. 3-атомы бывают, как ориентируемыми, так и неориентируемыми. Если на каком-то критическом уровне возникает неориентируемый атом, то изоэнергетическое 3-многообразие в целом получается неориентируемым. В теории интегрируемых гамильтоновых систем встречаются только ориентируемые многообразия, поэтому вопрос о представлении неориентируемых 3-атомов мы здесь обсуждать не будем.

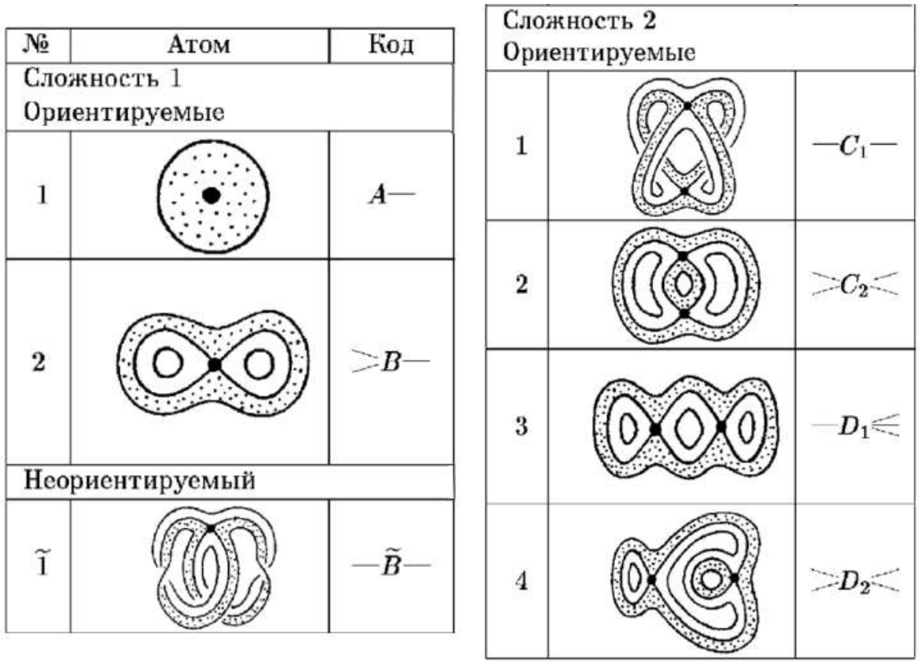


Рис. 5.3: Таблица некоторых 2-атомов. Тут можно явно увидеть, как нужно склеивать кресты, чтобы получить атом.

Для доказательства введем следующие обозначения.

Пусть дан простейший биллиард A_0'. Здесь и далее будем считать, что область A_0' ориентирована, как на рисунке 5.5, то есть мы можем говорить о направлениях вверх, вниз, влево, вправо. Кроме того, без ограничения общности положим параметры квадрик следующими: у эллипса (верхняя граница) параметр квадрики 0, у гиперболы (правая граница) параметр квадрики – λ'. Левая граница отвечает вертикальной прямой (паре совпадающих прямых), у которой параметр квадрики a, нижняя граница отвечает горизонтальной прямой (паре совпадающих прямых) и имеет параметр квадрики b. Итак, $0 < b < \lambda' < a$.

Определение 5.3. *Эллиптическим кольцом* $[\lambda_1, \lambda_2]$ будем называть часть области A_0', которая ограничена сверху эллипсом с параметром квадрики λ_1, снизу эллипсом с параметром квадрики λ_2. Иными словами, это множество точек $A_0' \cap \{\lambda_1 < x_1 < \lambda_2\}$, где (x_1, x_2) – координаты точек в эллиптической системе координат.

Определение 5.4. Аналогично *гиперболическим кольцом* $[\lambda_1, \lambda_2]$ будем называть часть области A_0', которая ограничена справа гиперболой с параметром квадрики λ_1, слева гиперболой с параметром квадрики λ_2. Иными словами, это множество точек $A_0' \cap \{\lambda_1 < x_2 < \lambda_2\}$, где (x_1, x_2) – координаты точек в эллиптической системе координат.

Доказательство. Начнем с построения алгоритма, сопоставляющего каждому атому биллиардную книжку, в которой возникает этот атом. Потом мы докажем, что биллиардная книжка, построенная по этому алгоритму, действительно моделирует исходный атом. Начнем с построения биллиардной книжки для ориентируемого седлового 3-атома U без звездочек.

Алгоритм 1 (Атом без звездочек).

Пусть дан произвольный ориентируемый седловой 3-атом U без звездочек. Тогда существует ориентируемый седловой 2-атом P, такой что $U = P \times S^1$ (см. раздел 1.1.3 подраздел "атомы–бифуркации"). Двумерный атом P можно погрузить в плоскость с сохранением ориентации (см. [5, теорема 2.9.]). Тогда на каждом из ребер графа Γ, соответствующего атому P можно задать направление так, чтобы отрицательный уровень оставался слева. Это направление можно распространить по непрерывности на близкие регулярные уровни. Кроме того, 2-атом P представляется в виде склейки из k крестов, где $k \in \mathbb{N}$ – сложность атома. Напомним, что крестом называется прообраз ε-окрестности точки 0 функции $x^2 - y^2$, заданной в некоторой окрестности точки (0, 0) вместе со структурой слоения (см. рис. 5.2). В разделе 1.1.3 говорилось, что любой 2-атом содержит граф K – критический уровень функции. У седловых 2-атомов все вершины графа Γ имеют степень 4. Разделим каждый крест “пополам по положительному уровню”, как показано на рис. 5.4 (на данном рисунке это деление происходит по горизонтальной прямой). Кресты разбились на верхнюю и нижнюю половины. Зафиксируем положение ориентируемых крестов в плоскости, как показано на рисунке 5.4. Теперь мы можем называть получившиеся половины крестов верхними и нижними. Занумеруем кресты индексом i. Затем на i-м кресте отметим его верхнюю половину индексом $2i-1$, его нижнюю половину индексом $2i$. Сопоставим каждой половине креста – простейший биллиард A'_0, из которого склеена книжка. Нумерация на полукрестах совпадает с нумерацией листов. В дальнейшем будет видно, что направление на ребрах графа K указывает направление траектории материальной точки на биллиарде.

Теперь укажем тройку $\mu = (A'_0, 2k, \Sigma)$, где A'_0 – простейший биллиард, указанный на рис. 5.5, $2k$ – число листов биллиардной книжки, Σ – набор перестановок $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, приписанных границе биллиарда. Задав эти перестановки, мы полностью определим склейку и тем самым биллиардную книжку. Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ – перестановки из $2k$ элементов. Три перестановки из четырех зададим по определению следующим образом:

$$\sigma_1 = (1\ \ 2)(3\ \ 4)\dots(2k-1\ \ 2k), \ \ \sigma_3 = \sigma_4 = id \tag{5.1}$$

Осталось указать перестановку σ_2. Она строится явным образом по заданному атому. Берем любую половину любого креста. Пусть у нее индекс l. Смотрим на исходящее направление l-ой половины креста. Ему соответствует некоторое ребро. Это ребро склеено с другим ребром, которому соответствует входящее направление j-ой половины какого-то из этих крестов. В том числе эта половина может склеиться сама с собой. Положим $\sigma_2(l) = j$. Проделав такую операцию для всех половин крестов, получим перестановку σ_2 из $2k$ элементов. Эта перестановка однозначно определяется атомом с фиксированной нумерацией полукрестов.

Также заметим, что перестановки строились, основываясь не на нумерации полукрестов, а на склейке полукрестов в атом. Перестановка σ_1 отвечает склейке полукрестов в кресты, σ_2 - крестов в атом. Нумерация полукрестов вводилась, чтобы упростить обозначения. Таким образом, получившаяся биллиардная книжка не зависит от нумерации полукрестов и по алгоритму строится однозначно с точностью до изменения нумерации листов.

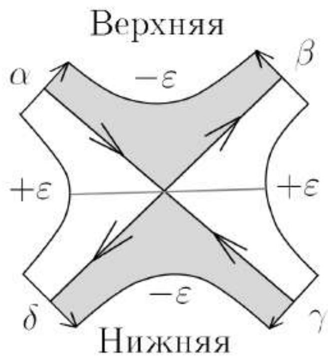


Рис. 5.4: Крест, разделенный на верхние и нижние половины и с указанным направлением. Закрашены уровни $c \in (-\varepsilon, 0)$, не закрашены уровни $c \in (0, +\varepsilon)$.

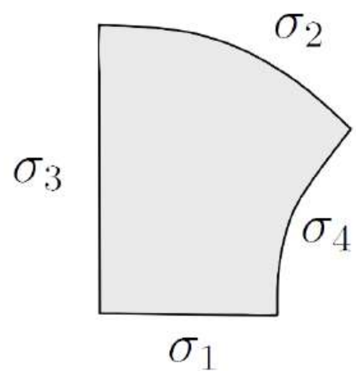


Рис. 5.5: A'_0 с перестановками.

В итоге мы сопоставили атому биллиардную книжку, которая склеена из $2k$ экземпляров A'_0, и оснащена набором перестановок Σ.

Перейдем к построению биллиардной книжки для ориентируемого седлового 3-атома U со звёздочками.

Алгоритм 2 (Атом со звёздочками).

Пусть дан 3-атом U сложности $k + l$. 3-атому U соответствует ориентируемый 2-атом P сложности k (сложность 0 в данном случае означает, что атом – это кольцо, расслоеное на окружности), на котором на критическом уровне стоит l звёздочек (см. раздел 1.1.3, подраздел атомы-бифуркации). Поставим на ребрах графа Γ 2-атома P стрелки (укажем направление), как и в случае атома без звёздочек, то есть указываем направление так, чтобы отрицательный уровень оставался слева. Распространим направление по непрерывности на близкие уровни функции.

Теперь сконструируем для 2-атома P дубль и укажем на нем инволюцию, задающую все звездочки на данном атоме. Фиксируем некоторую звёздочку. Разрежем 2-атом P по положительному кольцу до звёздочки (см. рис. 5.6). Проделаем эту операцию для каждой звёздочки. Берем второй такой же разрезанный 2-атом P. Определим инволюцию τ: она отображает точки из разрезанного 2-атома P в соответствующие точки на его копии. Склеиваем разрезанный 2-атом P с его копией по разрезанным ребрам при звёздочках так, чтобы на месте каждой звёздочки появилась вершина графа атома и в окрестности её получился крест вместе со стрелками как на рис. 5.4. Получили дубль. А именно седловой 2-атом $\hat{P}$ без звездочек сложности $2k + l$. Заметим, что если 2-атом $\hat{P}$ профакторизовать по инволюции τ и склеить разрезанные кольца при звёздочках, то получим обратно 2-атом P (см. рис. 5.6).

Теперь мы можем воспользоваться предыдущим алгоритмом 1 и построить биллиардную книжку из $4k+2l$ листов для седлового 2-атома $\hat{P}$, умноженного на окружность. Зададим перестановки $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4$, как в алгоритме 1, а перестановку σ_3, которая указана на левой границе элементарного биллиарда на рис. 5.5, зададим по-другому. А именно, если инволюция τ переводит i-ую половину креста в j-ую, то задаем $\sigma_3(i) = j$.

Заметим, что перестановки строились, основываясь не на нумерации полукрестов, а на склейке полукрестов в дубль и инволюции τ. Перестановка σ_1 отвечает склейке полукрестов в кресты, σ_2 - крестов в атом, σ_3 - инволюции τ. Нумерация полукрестов вводилась, чтобы упростить обозначения. Таким образом, получившаяся биллиардная книжка не зависит от нумерации полукрестов и по алгоритму строится однозначно с точностью до изменения нумерации листов.

В итоге мы сопоставили атому биллиардную книжку, которая склеена из $2k$ экземпляров A'_0, и оснащена набором перестановок Σ.

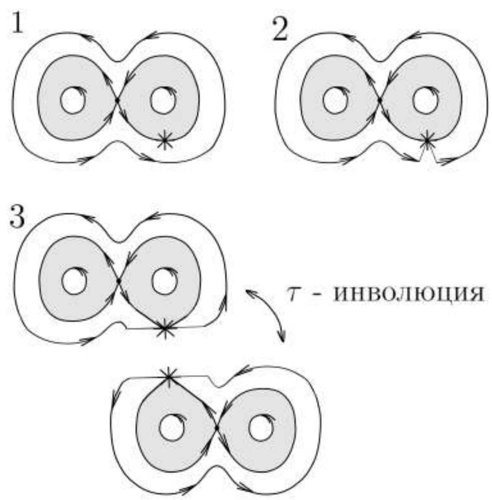


Рис. 5.6: Пример построения дубля. 1) Атом B^*. 2) Разрезаем атом B^* по положительному кольцу до звёздочки. 3) Склеиваем разрезанный атом с его копией.

Алгоритм 3 (атом A). В алгоритмах 1, 2 говорилось только о седловых атомах. Неседловым атомом является только атом A, отвечающий минимуму или максимуму функции. 3-атом A являются полноторием, расслоенным на торы и окружность. Предъявим алгоритм, сопоставляющий атому A биллиардную книжку. Случай атома A проще, чем случай седловых атомов. Мы просто предъявим одну конкретную биллиардную книжку, реализующую атом A. Рассмотрим биллиардную книжку, состоящую из одного листа A'_0 (см. рис. 5.5). Зададим на четырех границах этого биллиарда тождественные перестановки из одного элемента.

Так мы определили алгоритм построения биллиардной книжки для любого атома, как седлового, так и минимаксного. Докажем утверждение теоремы 5.1, а именно, что эти биллиардные книжки моделируют эти атомы. Доказательство проведем в несколько шагов.

Случай атома A. Напомним, что без ограничения общности мы положили параметр эллипса на границе A'_0 равным 0.

Доказательство в случае атома A очевидно, как видно из вычисленного автором ранее [53] инварианта Фоменко-Цишанга для биллиарда A_0'. Грубая молекула Фоменко-Цишанга имеет вид $A - A$.

Доказательство для случая атома A закончено. Перейдем к случаю седловых атомов. Начнем с атомов без звездочек.

Рассмотрим каноническую проекцию $\pi : M^4 \longrightarrow \Omega(:= A_0')$ из определения 3.4, которая, по сути, от пары "точка-вектор" оставляет только "точку". Ограничим эту проекцию на подмногообразие Q^3, вложенное в M^4. Это сужение будем дальше также называть канонической проекцией $\pi : Q^3 \longrightarrow \Omega$.

Шаг 2.

Пусть дан 3-атом U без звездочек сложности k. Строим по вышеописанному алгоритму биллиардную книжку B из $2k$ листов A_0'. Рассмотрим проекцию $P : M^4 \to B$ из определения 3.4, которая от пары "точка-вектор" оставляет только "точку", помнящую, на каком листе она находится. Ограничим эту проекцию на точки из Q^3 и это сужение будем дальше также обозначать $\pi : Q^3 \longrightarrow \Omega$. Рассмотрим окрестность V критического слоя слоения Лиувилля, отвечающего особому значению интеграла $\Lambda = b$. Рассмотрим в этой окрестности меньшую окрестность W_j, которая задается следующим образом. Фиксируем произвольный лист Ω_j из биллиардной книжки B. Исключим из этого листа верхнюю границу. Получившуюся область обозначим L_j. Рассмотрим ее прообраз $P^{-1}(L_j)$ в Q^3. На нем также определена функция Λ. Тогда положим $W_j = V \cap P^{-1}(L_j)$. Таким образом, W_j - это точки из Q^3 в окрестности критического уровня $\Lambda = b$, которые соответствуют j-му листу.

Лемма 5.2. *Слоение Лиувилля на трехмерном многообразии W_j, лежащем в Q^3, послойно гомеоморфно естественному 2-слоению, возникающему на прямом произведении половины креста на окружность.*

Доказательство. Напомним, что половина креста – это прообраз ε-окрестности точки 0 функции $x^2 - y^2$, заданной в некоторой окрестности точки $(0, 0)$, пересеченный с верхней полуплоскостью $y \geqslant 0$. Эта половина креста естественно «помнит» структуру слоения (см. рис. 5.4).

Как уже упоминалось, на простейшем биллиарде Ω можно ввести эллиптические координаты. Фиксируем гиперболу – координатную линию, пересекающую область Ω. Пересечение ее с Ω обозначим Γ. Далее будем называть эту дугу Γ просто "гиперболой". Изучим прообраз гиперболы в W_j при отображении π, то есть $\pi^{-1}(\Gamma) \cap W_j$. Это точки из Q^3. У каждой точки из Q^3 есть компонента вектора скорости. Покажем, что прообраз $\pi^{-1}(\Gamma) \cap W_j$ эквивалентен двум половинам креста (теперь уже без умножения на окружность): одна половина отвечает векторам, направленным вправо, другая – влево.

Фиксируем уровень интеграла $(\Lambda = b)$. В этом случае траектории лежат на прямых, которые проходят через фокусы. Значит, для каждой внутренней точки $x \in \Omega$ ее прообраз $\pi^{-1}(x) \cap (\Lambda = b) \cap W_j$ состоит из четырёх точек, которые соответствуют векторам единичной длины, направленным от или к одному из двух фокусов. Тогда $\pi^{-1}(\Gamma)\cap(\Lambda=b)\cap W_j$ – это четыре отрезка (см. рис. 5.7), которые соответствуют векторам, смотрящим вправо-вверх, вправо-вниз, влево-вверх и влево-вниз. Приближаясь к фокальной оси, векторы, направленные вниз и соответствующие им векторы, направленные вверх, становятся ближе, и на фокальной оси уже совпадают. То есть, говоря в терминах точек из Q^3, отрезки там соединяются. Получаются критические уровни двух половин крестов. Одна половина состоит из векторов, направленных влево, другая – из направленных вправо. Укажем на получившемся критическом уровне полукреста направление: если вектор направлен вверх, то он соответствует исходящему направлению на ребре графа полукреста, вниз – входящему.

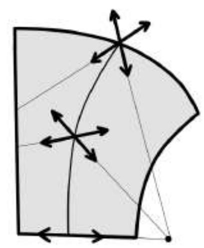


Рис. 5.7: Прообраз гиперболы на уровне $\Lambda=b$.

Таким образом, на j-ом листе $\pi^{-1}(\Gamma)\cap(\Lambda=b)\cap W_j$ – это критический уровень двух полукрестов с фиксированным направлением. Одному из полукрестов соответствуют векторы, направленные влево, другому – вправо.

Рассмотрим близкие регулярные уровни к критическому все также в прообразе гиперболы $\pi^{-1}(\Gamma)$ на j-ом листе.

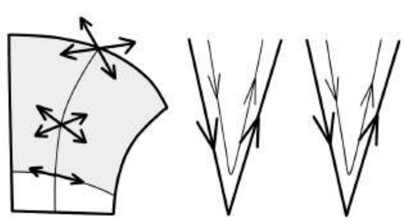


Рис. 5.8: Прообраз гиперболы на уровне $\Lambda=b-\varepsilon$.

Рис. 5.9: Прообраз гиперболы на уровне $\Lambda=b+\varepsilon$.

Уровню $\Lambda=b-\varepsilon$ отвечают траектории, которые касаются эллипса, близкого к фокальному отрезку. Поэтому траектории, принадлежащие этому уровню могут лежать только на точках из Ω, которые находятся внутри эллиптического кольца $[0,b-\varepsilon]$ (см. рис. 5.8). Действительно, точки внутри эллипса не могут лежать на прямых, касающихся его, а значит и траектория не может касаться эллипса. Значит, проекция π всех точек из Q^3, лежащих на этом уровне, есть эллиптическое кольцо $[0,b-\varepsilon]$. Обозначим эту часть Ω через $\Omega_{b-\varepsilon}$. Тогда для каждой внутренней точки $x\in\Omega_{b-\varepsilon}$ ее прообраз $\pi^{-1}(x)\cap(\Lambda=b-\varepsilon)\cap W_j$ – это четыре вектора единичной длины, то есть 4 точки из Q^3. А $\pi^{-1}(\Gamma) \cap (\Lambda = b - \varepsilon) \cap W_j$ – это четыре отрезка, которые соответствуют векторам, смотрящим вправо-вверх, вправо-вниз, влево-вверх и влево-вниз (см. рис. 5.8). Векторы направленные вниз и соответствующие им векторы, направленные вверх так же, как и на критическом уровне $\Lambda = b$, склеиваются, приближаясь к границе эллипса. Заметим, что здесь эти векторы склеиваются уже не по закону отражения, а по непрерывности. Если говорить в терминах точек из Q^3, здесь четыре отрезка склеиваются в два. Поэтому прообраз $\pi^{-1}(\Gamma) \cap (\Lambda = b - \varepsilon) \cap W_j$ также состоит из двух склеенных отрезков, отвечающих левым векторам, и двух склеенных отрезков, отвечающих правым векторам. Однако, тут они не доходят до фокальной прямой и находятся выше критического уровня. На этом уровне можно по непрерывности распространить направление: если вектор направлен вверх, то он соответствует исходящему направлению на ребре графа полукреста, вниз – входящему (см. рис. 5.8).

Уровню $\Lambda = b + \varepsilon$ отвечают траектории, которые касаются гиперболы, близкой к лучам на фокальной прямой, выходящим из фокусов в бесконечность. Поэтому траектории, принадлежащие этому уровню могут лежать на всем Ω (см. рис. 5.8). Действительно, поскольку гипербола с параметром квадрики $b+\varepsilon$ лежит вне Ω при достаточно малом $\varepsilon < \lambda'$, то из любой точки Ω можно провести касательную к этой гиперболе. Значит, проекция π всех точек из L_j, лежащих на этом уровне, есть Ω. Тогда для каждой внутренней точки $x \in \Omega$ ее прообраз $\pi^{-1}(x) \cap (\Lambda = b + \varepsilon) \cap W_j$ состоит из четырёх векторов единичной длины, то есть это четыре точки из Q^3. А прообраз гиперболы $\pi^{-1}(\Gamma) \cap (\Lambda = b + \varepsilon) \cap W_j$ на уровне $\Lambda = b + \varepsilon$ есть четыре отрезка, которые соответствуют векторам, смотрящим вправо-вверх, вправо-вниз, влево-вверх и влево-вниз (см. рис. 5.9). На фокальной прямой они не склеиваются. В итоге получается, что критический уровень при малом смещении уровня интеграла на $+\varepsilon$ на каждой половине креста распадается на две связные компоненты: отрезки, соответствующие векторам, идущим наверх и вниз. На них в связи с этим также можно по непрерывности распространить направление: направление вверх соответствует векторам, смотрящим наверх, направление вниз соответствует векторам, смотрящим вниз (см. рис. 5.9).

Таким образом, на каждом листе прообраз гиперболы $\pi^{-1}(\Gamma) \cap W_j$ есть два полукреста, на которых можно естественным образом фиксировать направление. Одному из полукрестов соответствуют векторы, направленные влево, другому – вправо.

Теперь нужно показать, что $\pi^{-1}(\Omega) \cap W_j$ – это произведение таких полукрестов на окружность.

Выше мы рассматривали прообраз гиперболы — части области Ω. Каждой гиперболе можно сопоставить точку на фокальной прямой. Таким образом, все гиперболы параметризуются отрезком на фокальной прямой.

В прообразе каждой внутренней гиперболы находится два полукреста, отвечающих правым и левым векторам. На правой и левой границе полукресты совпадают, поскольку этим границам приписаны тождественные перестановки. Это означает, что отражаясь о правую границу правый вектор становится левым (мы их отождествили в определении 3.4 фазового пространства

M^4). Аналогично на левой границе. Склейка двух отрезков тем самым дает окружность (см. рис. 5.10). Получили окружность полукрестов.

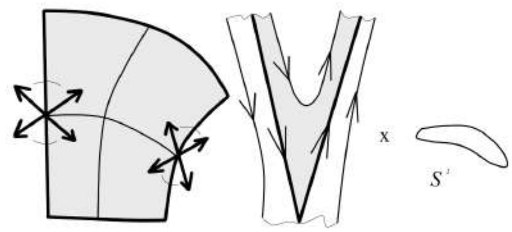


Рис. 5.10: Склейка точек из Q^3, отвечающих левым векторам, с точками, отвечающими правым векторам, дает окружность полукрестов .

Таким образом, слоение Лиувилля на трехмерном многообразии W_j, лежащем в Q^3, послойно гомеоморфно естественному 2-слоению, возникающему на прямом произведении половины креста на окружность. Лемма доказана. □

Шаг 3.

Доказательство для седлового атома без звездочек.

Пусть дан 3-атом U без звездочек сложности k. Строим по вышеописанному алгоритму биллиардную книжку B из $2k$ листов A_0'.

Нужно доказать, что слоение Лиувилля прообраза окрестности особого значения интеграла $\Lambda = b$ изоэнергетической поверхности Q^3 послойно гомеоморфно 3-атому U.

Из раздела 1.1.3 “Общий вид 3-атомов” мы знаем, что существует такой ориентируемый седловой 2-атом P, что $U = P \times S^1$, который, в свою очередь, можно представить в виде склейки из крестов.

Кроме того, из шага 2 мы знаем, что для любого j-го листа слоение Лиувилля на трехмерном многообразии W_j, лежащем в Q^3, послойно гомеоморфно естественному 2-слоению, возникающему на прямом произведении полукреста на окружность, то есть каждый лист в окрестности критического уровня $\lambda = b$ дает произведение полукреста на окружность.

Поскольку в обоих случаях есть умножение на окружность, то нам нужно доказать, что переход с одного листа на другой (то есть склейка) в биллиардной книжке B, полученной в ходе алгоритма, задает склейку полукрестов в кресты и крестов уже в нужный нам 2-атом P.

На нижней границе области согласно алгоритму приписана перестановка $\sigma_1 = (1\ \ 2)(3\ \ 4)\dots(2k-1\ \ 2k)$. Это означает, что на нижней границе векторы, направленные вниз на $(2i-1)$-ом листе, склеиваются с векторами, направленными вверх на $2i$-ом листе, и векторы, направленные вниз на $2i$-ом листе склеиваются с векторами, направленными вверх на $(2i-1)$-ом листе, для любого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Причем уровень интеграла сохраняется и вектор как касался квадрики с фиксированным параметром на протяжении траектории, так и после отражения и перехода на другой лист будет касаться той же квадрики. Это означает, что два полукреста склеиваются по перестановке σ_1 в крест так, что слои склеиваются с соответствующими.

Верхней границе Ω приписана перестановка σ_2, которая строилась в соответствии с тем, как склеиваются кресты в атом. То есть, если взять полукресты и склеить ребро, соответствующее исходящему направлению l-го полукреста (исходящее ребро l-го полукреста), с ребром, соответствующим входящему направлению $\sigma_2(l)$-го полукреста (входящим ребром l-го полукреста) для каждого $l \in \{1, 2, \ldots, 2k\}$, то получим 2-атом P.

Склейка исходящего ребра l-го полукреста со входящим ребром $\sigma_2(l)$-го полукреста означает, что векторы направленные из l-го листа склеенны на верхней границе с векторами, направленными внутрь $\sigma_2(l)$-го листа (см. шаг 2). А это верно по определению 3.4. Причем уровень интеграла Λ снова, как и на нижней границе, остается тем же после перехода на другой лист, то есть слоение сохраняется, что и требовалось доказать.

Замечание 45. В биллиардной книжке, моделирующей 3-атом A, один лист. Согласно шагу 2 в окрестности уровня $\Lambda = b$ (если не считать точки из Q^3, соответствующие верхней границе области) лежит произведение одного полукреста на окружность. Поскольку на верхней и нижней границе области переходов на другой лист нет, то получаем склейку полукреста в окружность. То есть в таком случае уровень $\Lambda = b$ будет регулярным и в окрестности этого уровня слои – торы $(S^1 \times S^1)$. Это и есть то кольцо, умноженное на окружность, на основе которого строятся атомы A со звездочками.

Теперь перейдем к доказательству утверждения для атомов со звёздочками. Пусть дан 3-атом U сложности $k+l$ с l звёздочками. 3-атому U соответствует ориентируемый 2-атом P сложности k, на котором на критическом уровне стоит l звёздочек. Строим по алгоритму дубль $\hat{P}$ и биллиардную книжку B, склеенную из $2k+2l$ экземпляров A'_0 и оснащенную набором перестановокΣ.

Шаг 4.

Докажем что в случае атома со звездочками построенная книжка построена корректно, т.е. удовлетворяет условиям определения 3.2.

Проверим, что перестановки из Σ, приписанные соседним дугам, коммутируют (это условие есть в опр. 3.2 склейки), то есть $\sigma_1 \circ \sigma_3 = \sigma_3 \circ \sigma_1$ и $\sigma_2 \circ \sigma_3 = \sigma_3 \circ \sigma_2$ (см. рис. 5.11).

Выполним действия алгоритма 1: разделим 2-атом $\hat{P}$ на полукресты и напишем в зависимости от того, как склеены полукресты, перестановки σ_1 и σ_2. Дубль $\hat{P}$ состоит из двух разрезанных 2-атомов P. И i-му полукресту на одном 2-атоме P соответствует $\sigma_3(i)$-ый полукрест на другом 2-атоме P (по опр. σ_3). Поскольку эти 2-атомы одинаковы, то и разбиение на полукресты одинаково. А значит, если один полукрест был соединен с другим на одном атоме P, т.е. $\sigma_2(i) = j$ для некоторого $j \in \{1, 2, \ldots, 4k+2l\}$, то и соответствующий полукрест на другом атоме P соединен с соответствующим, т.е. $\sigma_2(\sigma_3(i)) = \sigma_3(j)$. Это как раз и означает, что перестановки σ_2 и σ_3 коммутируют.

Аналогично доказывается для перестановок σ_1 и σ_3

Шаг 5.

Доказательство реализуемости случая седлового атома со звездочками.

Пусть Q^3 – это изоэнергетическое многообразие построенной по алгоритму 2 биллиардной книжки B для 3-атома U со звездочками. А $\hat{Q}^3$ – это изоэнергетическое многообразие построенной по алгоритму 1 биллиардной книжки $\hat{B}$ для дубля $\hat{P}$ (2-атома U), умноженного на окружность. Заметим, что биллиардные книжки B и $\hat{B}$ отличаются только перестановкой на левой границе.

Можно рассмотреть две канонические проекции – связанную с Q^3 и связанную с $\hat{Q}^3$, то есть $\pi : Q^3 \longrightarrow \Omega$ и $\hat{\pi} : \hat{Q}^3 \longrightarrow \Omega$. Обозначим простейший биллиард $\Omega(= A'_0)$ без левой границы через $\tilde{\Omega}$ (см. рис. 5.11). Тогда $\pi^{-1}(\tilde{\Omega}) = \hat{\pi}^{-1}(\tilde{\Omega})$.

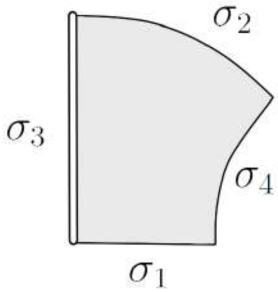


Рис. 5.11: $\tilde{\Omega}$ – простейший биллиард Ω $(= A'_0)$ без левой границы.

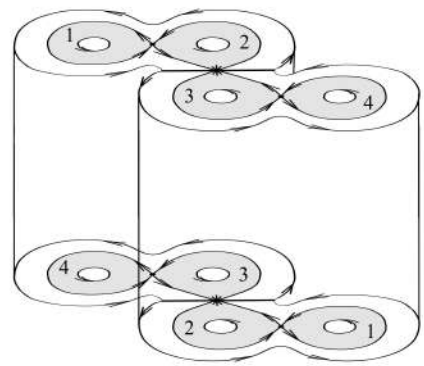


Рис. 5.12: Пример склейки B^* из цилиндра, надстроенного над дублем G_1. Два основания цилиндра склеиваются по инволюции τ: одинаковыми цифрами обозначены части, которые склеиваются.

Изоэнергетическая поверхность $\hat{Q}^3$ в окрестности уровня интеграла $\Lambda = b$ есть 3-атом $\hat{P} \times S^1$ (см. шаги 2 и 3). А поскольку умножение на окружность этого атома получалось благодаря тождественным перестановкам на левой и правой границе (см. шаг 2), то если убрать точки из левой границы, получим умножение на отрезок, т.е. $\pi^{-1}(\tilde{\Omega}) = \hat{\pi}^{-1}(\tilde{\Omega})$ в окрестности уровня интеграла $\Lambda = b$ есть цилиндр $\hat{P} \times I$, где $I = [0, 2\pi]$.

Осталось показать, что перестановка на левой границе склеивает основания цилиндра $\hat{P} \times I$ по инволюции τ (см. явную конструкцию в разделе 1.1.3). Рассмотрим i-ый лист без левой границы, где $i \in \{1, 2, \ldots, 4k + 2l\}$. Ему соответствует цилиндр над i-ым полукрестом. Точки из левой границы i-ого листа соответствуют двум основаниям. Одно соответствует векторам, смотрящим влево, другое – вправо. Векторы, смотрящие влево, направлены из i-ого листа и склеиваются с векторами, смотрящими вправо на $\sigma_3(i)$-ом листе, согласно закону отражения на биллиардной книжке. Получается, одно основание цилиндра (пусть без ограничения общности верхнее) i-ого полукреста склеивается с нижним на $\sigma_3(i)$-ом полукресте. А поскольку σ_3 описывает иволюцию τ (см. алгоритм 2), то любая точка из верхнего основания i-ого полукреста склеивается с точкой из нижнего основания $\sigma_3(i)$-го полукреста по инволюции τ. Аналогично проводим рассуждение для векторов, смотрящих вправо на левой границе i-го листа, которым соответствует нижнее основание i-ого полукреста, и для других листов. Таким образом, для каждого полукреста склейка происходит по инволюции τ. Значит и весь цилиндр, надстроенный над 2-атомом $\hat{P}$ склеивается по инволюции τ (см. рис. 5.12).

Также стоит заметить, что слоение сохраняется. Для точек из области $\tilde{\Omega}$ это верно в силу шагов 2 и 3. Для точек из левой границы это тоже верно, поскольку после отражения на левой границе (как и на любой другой) параметр квадрики, которой касалась траектория, сохраняется.

Таким образом, получаем, что Q^3 в окрестности уровня интеграла $\Lambda = b$ – это атом U, что и требовалось доказать. $\square$

5.2.1 Примеры построения биллиардных книжек, реализующих некоторые 3-атомы.

Пример 1. Построим биллиардную книжку по алгоритму, реализующую 3-атом D_2. Отметим, что 3-атом D_2 – ориентируемый седловой атом без звездочек сложности 2. Тогда 3-атом D_2 является прямым произведением 2-атома D_2 (см. рис. 5.13) и окружности. Перечислим шаги первого алгоритма.

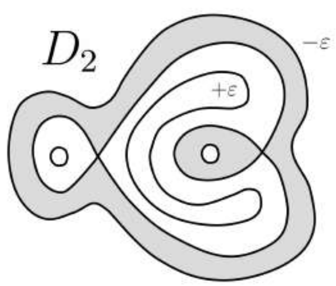


Рис. 5.13: 2-атом D_2.

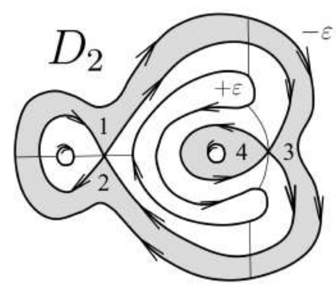


Рис. 5.14: Иллюстрация шагов 1-2 алгоритма.

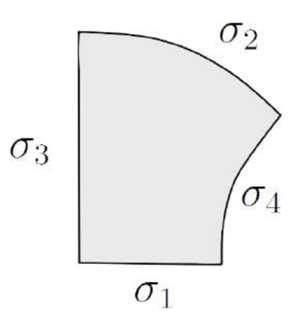


Рис. 5.15: Простейший биллиард A_0' с перестановками на границах.

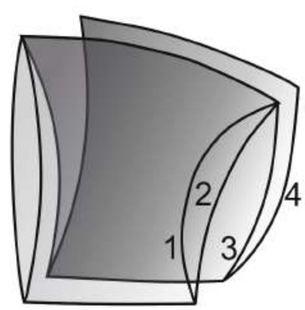


Рис. 5.16: Биллиардная книжка, соответствующая 3-атому D_2.

1. Указываем направление на критическом уровне так, чтобы отрицательный уровень (закрашенное кольцо на рис. 5.14) оставался слева. Распространяем направление на близкие уровни.

2. Разрежем 2-атом D_2 на полукресты. Занумеруем их, как показано на рис. 5.14.

3. В результате из 2-атома D_2 получается 4 полукреста. Значит, у биллиардной книжки, соответствующей этому атому, будет 4 листа A_0'.

4. Перестановки $\sigma_3 = \sigma_4 = id$ – тождественные.

5. Пары полукрестов 1 и 2, 3 и 4 образуют кресты. Поэтому перестановка $\sigma_1 = (1\ 2)(3\ 4)$.

6. Исходящая стрелка 1-го полукреста соединяется со входящей стрелкой 3-го полукреста. Поэтому положим $\sigma_2(1) = 3$. Аналогично получаем: $\sigma_2(3) = 2$, $\sigma_2(2) = 1$, $\sigma_2(4) = 4$. Таким образом, $\sigma_2 = (1\ 3\ 2)(4)$.

7. Обозначим через Σ набор перестановок $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. Таким образом, склейка $\mu = (A_0', 4, \Sigma)$ задает искомую биллиардную книжку (см. рис. 5.16), реализующую 3-атом D_2, и движение материальной точки на ней.

Пример 2. Построим биллиардную книжку по алгоритму 2, реализующую 3-атом A^*. Напомним, что 3-атом A^* – кольцо, расслоенное на окружности с одной звёздочкой (см. рис. 5.17). Перечислим шаги второго алгоритма.

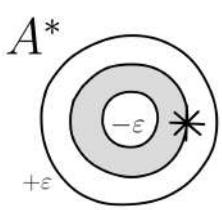


Рис. 5.17: Атом A^*.

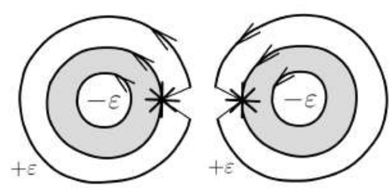


Рис. 5.18: Иллюстрация шагов 1-2 алгоритма.

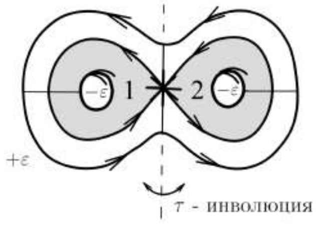


Рис. 5.19: Иллюстрация шагов 3-5 алгоритма.

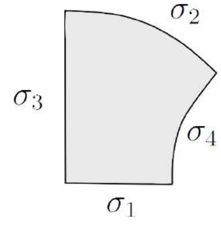


Рис. 5.20: Простейший биллиард A_0' с перестановками на границах.

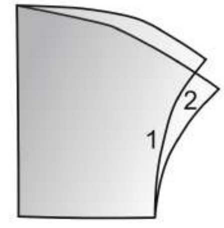


Рис. 5.21: Биллиардная книжка, соответствующая 3-атому A^*.

1. Указываем направление на критическом уровне так, чтобы отрицательный уровень (закрашенное кольцо на рис. 5.18) оставался слева. Распространяем это направление на близкие уровни.

2. Разрезаем кольцо по положительному (незакрашенному) уровню до звёздочки и берём копию кольца.

3. Склеиваем эти два кольца по разрезанной части. Получаем атом B – дубль для атома A^*.

4. Инволюция τ на дубле отображает одно разрезанное кольцо на другое.

5. Режем дубль на полукресты. Нумеруем их (см. рис. 5.19).

6. Из дубля B получается 2 полукреста. Значит, у биллиардной книжки, соответствующей атому A^* будет два листа A_0'.

7. Перестановка $\sigma_4 = id$ – тождественная.

8. Полукресты 1 и 2 образуют крест. Поэтому перестановка $\sigma_1 = (1\ 2)$.

9. Исходящая стрелка первого полукреста соединяется со своей же входящей стрелкой. Поэтому пишем $\sigma_2(1) = 1$. Аналогично получаем: $\sigma_2(2) = 2$. Таким образом, $\sigma_2 = id$.

10. Инволюция τ отображает первый полукрест на второй и второй на первый. Значит, $\sigma_3(1) = 2$ и $\sigma_3(2) = 1$, т. е. $\sigma_3 = (1\ 2)$.

11. Обозначим через Σ набор $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. Таким образом, склейка $\mu = (A_0', 2, \Sigma)$ задает искомую биллиардную книжку (см. рис. 5.21), реализующую 3-атом A^*, и движение материальной точки на ней.

Пример 3.

Построим биллиардную книжку по второму алгоритму для 3-атома A^{***}. Напомним, что 3-атом A^{***} – это кольцо, расслоенное на окружности, на одной из которых – три звёздочки (см. рис. 5.22). Перечислим шаги второго алгоритма.

1. Указываем направление на критическом уровне так, чтобы отрицательный уровень (закрашенное кольцо на рис. 5.23) оставался слева. Распространяем это направление на близкие уровни.

2. Разрезаем кольцо по положительному (незакрашенному) уровню до каждой звёздочки и берём копию кольца.

3. Склеиваем эти два кольца по разрезанной части. Получаем атом E_1 – дубль для атома A^{***}.

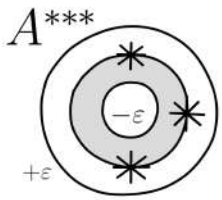


Рис. 5.22: Атом A^{***}.

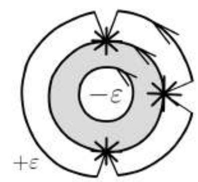


Рис. 5.23: Иллюстрация шагов 1-2 алгоритма.

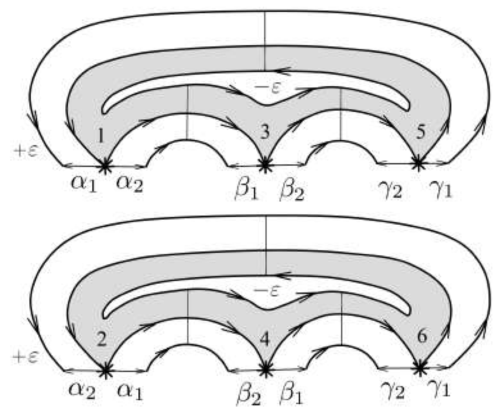


Рис. 5.24: Иллюстрация шагов 3-5 алгоритма. $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ – обозначают склейки, из которых мы получаем дубль E_1.

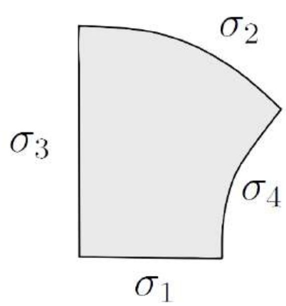


Рис. 5.25: Простейший биллиард A'_0 с перестановками на границах.

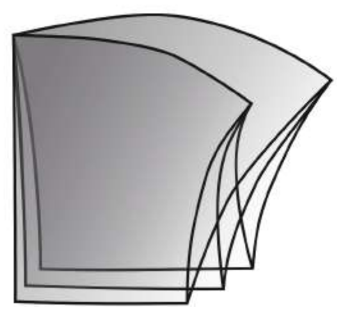


Рис. 5.26: Биллиардная книжка, соответствующая 3-атому A^{***}.

4. Инволюция τ на дубле отображает одно разрезанное кольцо на другое.

5. Разрежем дубль на полукресты. Занумеруем их (см. рис. 5.24).

6. У дубля E_1 получается 6 полукрестов. Значит, у биллиардной книжки, соответствующей атому A^{***}, будет 6 листов A'_0.

7. Перестановка $\sigma_4 = id$ – тождественная.

8. Пары полукрестов 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6 образуют крест. Поэтому перестановка $\sigma_1 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$.

9. Исходящая стрелка первого полукреста соединяется со входящей стрелкой третьего полукреста. Поэтому пишем $\sigma_2(1) = 3$. Аналогично получаем: $\sigma_2(3) = 5$, $\sigma_2(5) = 1$, $\sigma_2(2) = 4$,

$\sigma_2(4) = 6$, $\sigma_2(6) = 2$. Таким образом, $\sigma_2 = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$.

10. Инволюция τ отображает 1-ый полукрест на 2-ой, 2-ой на 1-ый, 3-ий на 4-ый, 4-ый на 3-ий, 5-ый на 6-ой, 6-ой на 5-ый. Значит, $\sigma_3(1) = 2$, $\sigma_3(2) = 1$, $\sigma_3(3) = 4$, $\sigma_3(4) = 3$, $\sigma_3(5) = 6$, $\sigma_3(6) = 5$, т. е. $\sigma_3 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$.

11. Обозначим через Σ набор $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. Таким образом, склейка $\mu = (A'_0, 6, \Sigma)$ задает искомую биллиардную книжку (см. рис. 5.26), реализующую 3-атом A^{***}, и движение материальной точки на ней.

5.3 Гипотеза B.

Теорема 5.3 (В.В.Ведюшкина, И.С.Харчёва [88])**.** *Гипотеза B Фоменко верна для грубых молекул, не содержащих атомов со звездочками. А именно для любой грубой молекулы, содержащей атомы, слоение Зейферта которых не содержит особых слоев (т.е. содержит только атомы без звездочек) алгоритмически построена биллиардная книжка, склеенная из простейших бильярдов B_0, такая, что ее инвариант Фоменко–Цишанга имеет структуру графа, совпадающего с данной грубой молекулой. Более точно: изоэнергетическая поверхность такой биллиардной книжки склеена из кусков наперед заданных атомов в порядке, задаваемом грубой молекулой.*

Схема доказательства.

Покажем, как реализовать одно ребро.

Пусть P и Q – два седловых атома без звездочек, при этом атом P соответствует большему значению дополнительного интеграла. Ориентируем все ребра по направлению роста дополнительного интеграла. Построим биллиардные книжки $\mathbb{B}(P)$ и $\mathbb{B}(Q)$ из биллиардов B_0 по алгоритму Ведюшкиной-Харчёвой для реализации 3-атомов (заменив биллиарды A'_0 на биллиарды B_0). Аналогично доказательству для топологических биллиардов (глава 2) можно показать, что в этом случае слоение Лиувилля не изменится. Обозначим через λ_1 и λ_P параметры соответственно выпуклого и невыпуклого граничных эллипсов биллиардов B_0, образующих книжку $\mathbb{B}(P)$. Обозначим через λ_2 и λ_Q параметры соответственно выпуклого и невыпуклого граничных эллипсов биллиардов B_0, образующих книжку $\mathbb{B}(Q)$. Атомы P и Q будут реализованы в соответствующих изоэнергетических поверхностях на уровнях λ_P и λ_Q, соответствующих параметрам эллипсов, образующих невыпуклые части границ. Будем считать, что $\lambda_P > \lambda_1 > \lambda_Q > \lambda_2$, а все биллиарды B_0 расположены в первой четверти. Если это не так, то перейдем к эквивалентным биллиардам.

Рассмотрим книжку $\mathbb{B}(Q)$ и атом Q. Фиксируем в этом атоме семейство торов, которые соответствуют ребру, которое мы хотим соединить с ребром атома P. Этим торам в книжке

$\mathbb{B}(Q)$ соответствует некоторое движение, при котором точка попеременно пересекает дуги граничных эллипсов биллиардов B_0, составляющих данную книжку. Пусть эллипсу с параметром λ_Q приписана перестановка σ_1, а выпуклому граничному эллипсу – перестановка σ_2. Тогда перестановка $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$ разбивается в произведение независимых циклов, каждый из которых соответствует тору, лежащему на уровне $\Lambda > \lambda_Q$. Выберем среди этих циклов тот, который соответствует выбранному ребру. Обозначим его через s_1. Фиксируем в этом цикле произвольным образом элемент i соответствующий номеру листа, на котором траектории на торах направлены по направлению к отрезку между фокусами.

Рассмотрим книжку $\mathbb{B}(P)$ и атом P. Фиксируем в этом атоме семейство торов, которые соответствуют ребру, которое мы хотим соединить с ребром атома Q. Пусть выпуклому граничному эллипсу, соответствует перестановка ρ. Каждый цикл этой перестановки соответствует некоторому тору, входящему в атом P. Найдем необходимый цикл s_2 и фиксируем нём произвольный номер j, соответствующий номеру листа, на котором траектории на торах направлены по направлению от отрезка между фокусами.

Заменим книжку $\mathbb{B}(Q)$ на новую книжку, добавив новый лист Ω, ограниченный эллипсами с параметрами λ_1 и λ_Q. Присвоим новому листу номер k. Заменим перестановку на сегменте, соответствующем параметру λ_Q, расположив в её разбиении в независимые циклы после номера i номер k дополнительного листа Ω. Это не повлияет на структуру слоения Лиувилля. Дополнительный лист иначе говоря "растягивает" нужный тор. Траектория прежде чем вернуться на немодифицированную книжку $\mathbb{B}(Q)$ уйдя с неё вниз с листа i отражается от невыпуклой дуги эллипса листа с номером k, а затем продолжает движение по листу $\sigma_1(i)$.

Теперь приклеим к "удлиненной" книжке $\mathbb{B}(Q)$ книжку $\mathbb{B}(P)$ вдоль выпуклого корешка. В перестановку ρ, а точнее в её цикл s_2 после номера j поставим новый номер k. В результате траектории на торе, соответствующем соединенным ребрам проходя по книжке $\mathbb{B}(P)$ после листа j будут продолжать движение вверх по листу Ω. Далее они переходят в движение по немодифицированной книжке $\mathbb{B}(Q)$ по отрезкам траекторий, лежащим на листах из цикла s_1. После попадания на лист с номером i и движения по листу вниз вновь произойдет попадание на лист Ω с номером k. Однако теперь движение будет происходить по направлению к отрезку между фокусами. После отражения от сегмента границы с параметром λ_1 траектории вновь попадут в цикл s_2 движения по книжке $\mathbb{B}(P)$.

Заметим, что выбранная конструкция не затрагивает траектории, лежащие на торах, соответствующим другим ребрам. Повторяя эту конструкцию столько раз сколько это необходимо, получаем требуемое утверждение.

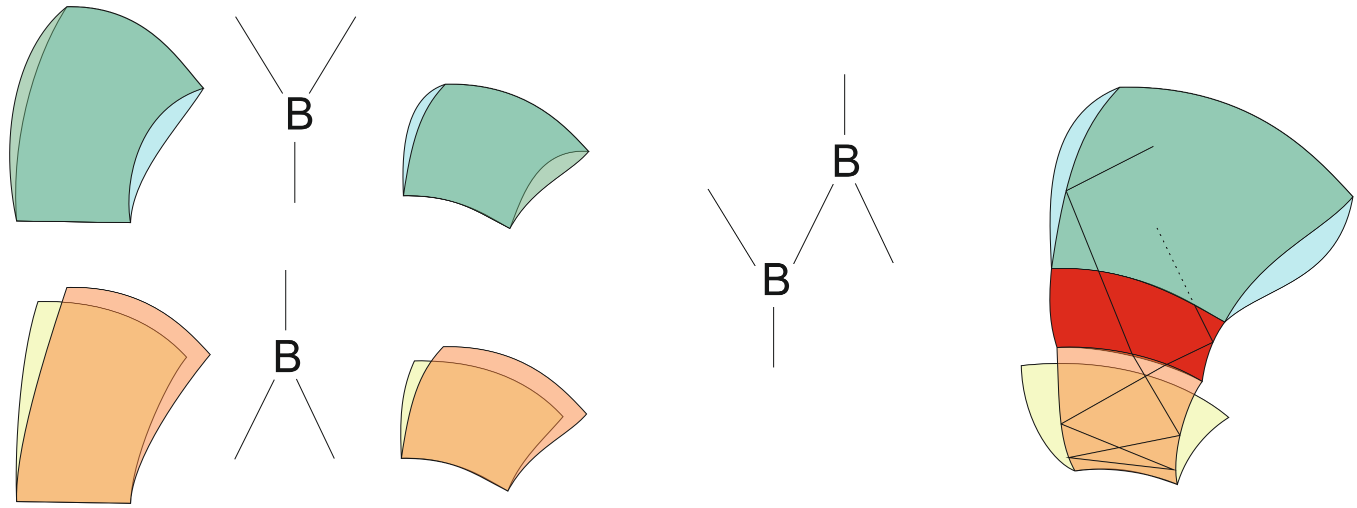


Рис. 5.27: Пример соединения двух седловых атомов алгоритмом Ведюшкиной-Харчевой для грубых молекул без звездочек.

5.4 Гипотеза C.

5.4.1 Реализация биллиардами слоений Лиувилля круговых молекул.

Рассмотрим отображение момента для интегрируемой системы с двумя степенями свободы $F : M^4 \to \mathbb{R}^2(H, f)$, где M^4 – симплектическое многообразие, H — гамильтониан, f — дополнительный интеграл, независимый с H. Точки, в которых интегралы f и H функционально зависимы, образуют подмножество в $F(M^4)$, обычно обозначаемое $\Sigma(F)$ и называющемся бифуркационной диаграммой отображения момента. В гамильтоновых системах, возникающих в физике, механике, геометрии, гамильтониан H играет роль полной энергии системы. В этом смысле функция H выделена в классе всех возможных интегралов данной системы. Поэтому традиционно изоэнергетической поверхностью называется трехмерный уровень интеграла $H = h$ на многообразии M^4. В регулярном случае он называется изоэнергетическим 3-многообразием Q^3_h. Геометрически Q^3_h является полным прообразом пересечения прямой $H = h$ с образом отображения момента $F(M^4)$ (см. рис. 5.28 а). Здесь также условно изображена бифуркационная диаграмма, т.е. множество особых значений отображения момента. Если изоэнергетическое 3-многообразие компактно, то соответствующее слоение Лиувилля обязательно содержит “атомы”, т.е. бифуркации торов Лиувилля, по крайней мере, минимаксные (а часто и седловые).

Однако с точки зрения интегрируемости данной системы конкретный выбор интегралов H и f неважен в том смысле, что H и f можно заменить на любую независимую пару интегралов $\tilde{H}$, $\tilde{f}$, функционально выражающихся через H и f. Дело в том, что интегрируемость по Лиувиллю означает на самом деле наличие пуассонова действия абелевой группы $\mathbb{R}^2$ на M^4. При этом выбор образующих в этой группе не принципиален.

Более того, для изучения топологии слоения Лиувилля на M^4 во многих задачах важно

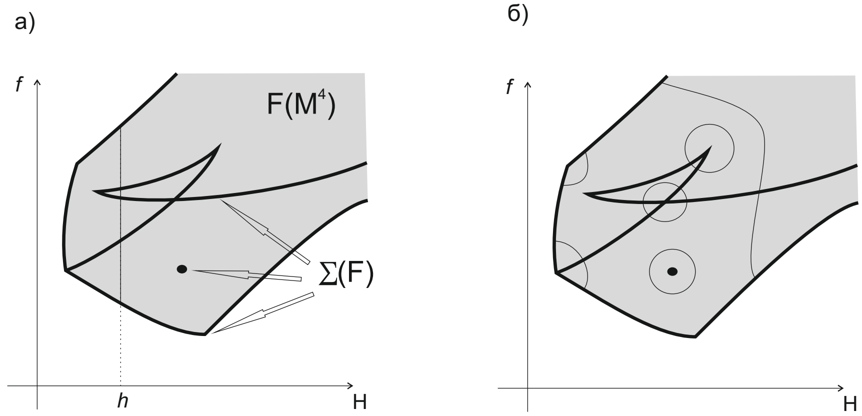


Рис. 5.28: Образ отображения момента и бифуркационная диаграмма – образ точек падения ранга этого отображения. Слева изображена "классическая" прямая, задающая изоэнергетическую поверхность системы. Справа показаны различные кривые γ, прообразы которых задают важные слоения Лиувилля в том числе в окрестности точек нулевого ранга.

рассматривать в M^4 трехмерные полные прообразы $f^{-1}(\gamma)$ разнообразных кривых γ в образе отображения момента M^4. Разные типы таких кривых γ показаны на рис. 5.28 б тонкими линиями. Особый интерес представляют окружности, охватывающие особые точки бифуркационной диаграммы, например, отвечающие невырожденным особенностям ранга ноль в M^4 : седло-седло, центр-седло, центр-центр, фокус-фокус (см. рис. 5.28 б).

Слоения Лиувилля, возникающие на трехмерных прообразах таких окружностей задаются круговыми молекулами, представляющими значительный интерес с точки зрения теории особенностей. Например, в случае четырехмерного симплектического фазового пространства (интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы) А.Т.Фоменко была выдвинута гипотеза: слоение инвариантной четырехмерной окрестности невырожденного особого слоя с точками ранга ноль полностью определяется (с точностью до лиувиллевой эквивалентности) слоением Лиувилля на трехмерной границе этой окрестности, т.е. соответствующей круговой молекулой. Оказалось, что эта гипотеза верна для случаев, когда особые точки имеют тип фокус-фокус, центр-центр, центр-седло, а также в случае седло-седло, когда особый слой содержит одну или две точки ранга ноль. В случае же, когда особенность седло-седло содержит более двух особых точек, был обнаружен контрпример, а следовательно, новые инварианты особенностей. Подробно эта тема рассматривается в работах М.А. Тужилина [51] и М.А.Тужилина и А.А.Ошемкова [43].

Отметим, что в случае особенностей центр-центр, центр-седло, седло-седло окружность γ пересекает дуги бифуркационной диаграммы, а следовательно на круговой молекуле появляются атомы. В случае же особенности фокус-фокус, малая окружность γ не пересекается с дугами бифуркационной диаграммы $\Sigma(F)$. Поэтому соответствующая круговая молекула вообще не содержит бифуркаций торов Лиувилля, т.е. атомов. При этом соответствующее слоение Лиувилля является расслоением со слоем тор над окружностью, которое, вообще говоря, нетривиально. В то же время, в случае компактного биллиарда дополнительный интеграл на изоэнергетической поверхности всегда имеет по крайней мере минимум и максимум. Следовательно, в классе изоэнергетических поверхностей круговые молекулы особенностей фокус-фокус не моделируются биллиардами.

Конечно, можно пытаться исправить ситуацию, задав на такой круговой молекуле например, функцию $\sin(\varphi)$, где φ – полярный угол точки окружности $\gamma \in F(M^4)$. Эта функция гладкая, имеет один минимум и один максимум. Минимум и максимум достигаются на двух критических торах Лиувилля этого слоения. Соответствующая молекула имеет вид окружности с двумя "вершинами", отвечающих критическим торам. Тем не менее, такая молекула никаким биллиардом из нашего класса не реализуется. Отметим, что извлекая квадратный корень из этой функции локально в окрестности критических торов, мы превращаем эти торы в регулярные, то есть не критические.

Тем не менее, введя в рассмотрение биллиарды с потенциалами (см. выше класс VI), нам удаётся реализовать важное свойство круговых молекул особенностей фокус-фокус. Напомним, что топологическим инвариантом, характеризующим круговую молекулу фокус-фокус, является матрица монодромии.

Рассмотрим биллиард в диске, ограниченном окружностью, обладающим отталкивающим центральным потенциалом гуковского типа. С.Е.Пустовойтов вычислил бифуркационную диаграмму этого биллиарда и показал, что она состоит из параболы, ограничивающей область отображения момента, и точки фокус-фокус, расположенной внутри, на оси параболы (см. рис. 5.29). Это утверждение продолжает исследование Е.Е.Кантонистовой геодезических потоков

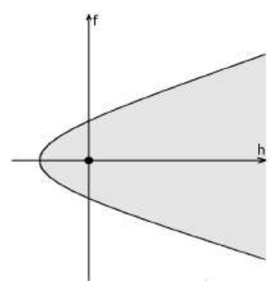


Рис. 5.29: Бифуркационная диаграмма для динамической системы биллиарда с центральным отталкивающим потенциалом в диске, ограниченном окружностью.

на поверхности вращения с потенциалом [17]. Прямая, проходящая через фокус-фокус и параллельная директрисе параболы, разграничивает два типа изоэнергетических многообразий, а именно прямое произведение $S^1 \times S^2$ и трехмерную сферу S^3. Матрица монодромии при обходе точки фокус-фокус имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Построим теперь биллиардную книжку, склеенную из n кругов по их общей границе, оснащенной циклической перестановкой $(1\ 2\ \ldots\ n)$. Оказывается, бифуркационная диаграмма сохраняется. Можно показать, что матрица монодромии теперь равна $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Прямая, проходящая через точку фокус-фокус, разграничивает изоэнергетические многообразия $S^1 \times S^2$ и линзовое пространство $L(n,1)$. Таким образом могут быть получены два интересных слоения Лиувилля с молекулами вида $A \longrightarrow A$, $r = \infty$, $\varepsilon = 1$ и $A \longrightarrow A$, $r = \frac{1}{n}$, $\varepsilon = 1$, которые реализуются указанной биллиардной книжкой (на уровне $H = const$).

Вернемся к проблеме реализации биллиардами интегрируемых систем. Сейчас мы предъявим слоение Лиувилля, не реализуемое биллиардными книжками (класс биллиардов III, см. главу 3), но реализуемое подходящим магнитным биллиардом (см. класс биллиардов VII).

5.4.2 Важный пример. Модификация известного волчка Лагранжа для одной из зон энергии не реализуется топологическими биллиардами, однако реализуется магнитным биллиардом.

Лиувиллева классификация систем случая Лагранжа

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^6$ с евклидовыми координатами $S_1,\ S_2,\ S_3,\ R_1,\ R_2,\ R_3$ на котором зададим скобку Пуассона следующим образом:

$$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k,\ \{R_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} R_k,\ \{R_i, R_j\} = 0, \tag{5.2}$$

где $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$, а $\varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$.

Гамильтонова система на пространстве $\mathbb{R}^6$ со скобкой (5.2), т.е. уравнения Эйлера, по определению имеют вид:

$$\dot{S}_i = \{S_i, H\},\ \dot{R}_i = \{R_i, H\},$$

где H – функция на $\mathbb{R}^6$, называемая гамильтонианом. Вводя векторы

$$S = (S_1, S_2, S_3) \text{ и } R = (R_1, R_2, R_3),$$

эти уравнения можно переписать в виде обобщённых уравнений Кирхгофа:

$$\dot{S} = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right) \times S + \left(\frac{\partial H}{\partial R}\right) \times R,\ \dot{R} = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right) \times R. \tag{5.3}$$

Классические уравнения динамики тяжелого твердого тела в $\mathbb{R}^3$ являются гамильтоновыми на совместных четырёхмерных поверхностях уровня двух гладких функций, т.е. интегралов f_1 и f_2:

$$M^4_{c,g} = \{f_1 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = c,\ f_2 = S_1R_1 + S_2R_2 + S_3R_3 = g\}, \tag{5.4}$$

называемых соответственно геометрическим интегралом и интегралом площадей. Для почти всех значений c и g эти совместные уровни являются неособыми гладкими подмногообразиями в $\mathbb{R}^6$. В дальнейшем будем считать, что c и g являются именно такими регулярными значениями.

Случай Лагранжа (1788 год). Эта система описывает движение тяжелого твердого тела с закреплённой точкой и указанным ниже условием симметрии твёрдого тела.

$$H = \frac{S_1^2}{2A} + \frac{S_2^2}{2A} + \frac{S_3^2}{2B} + aR_3, \ K = S_3. \tag{5.5}$$

Здесь дополнительный интеграл K—линейный. В этом случае твердое тело имеет ось симметрии, поскольку $A_1 = A_2 = A$. При этом закреплённая точка тела находится как раз на этой оси.

Примеры бифуркационных диаграмм (в зависимости от значений c и g) изображены на рис. 5.30.

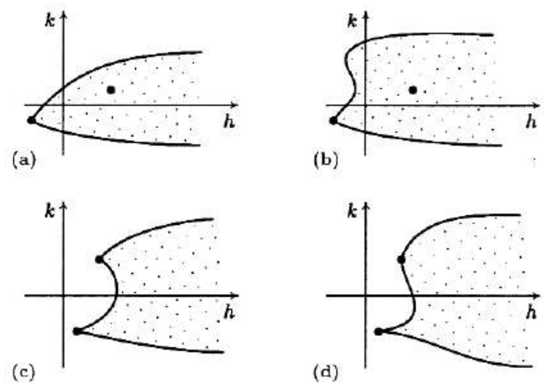


Рис. 5.30: Бифуркационные диаграммы волчка Лагранжа.

Напомним теорему, классифицирующую слоения Лиувилля регулярных изоэнергетических поверхностей.

Теорема 5.4 (А.В.Болсинов, А.Т.Фоменко [5]). *В классическом случае Лагранжа меченая молекула W^* имеет вид $A{-}A$ для любой связной компоненты Q_h^3. Изоэнергетические 3-поверхности Q имеют здесь следующие типы: сфера S^3, проективное пространство $\mathbb{R}P^3$ и прямое произведение $S^1 \times S^2$. Метка r на ребре молекулы W^* зависит от топологического типа Q. Меченые молекулы имеют вид:*

а) $A - A$, *где* $r = 0$ *для* S^3.

б) $A - A$, *где* $r = \frac{1}{2}$ *для* $\mathbb{R}P^3$.

в) $A - A$, *где* $r = \infty$ *для* $S^1 \times S^2$.

В случае S^3 и $\mathbb{R}P^3$ метка ε зависит от выбора ориентации Q, поэтому без ограничения общности можно считать, что здесь $\varepsilon = +1$. В случае $S^1 \times S^2$ метка ε тоже равна $+1$. Отметим, что метки n здесь нет. Тем самым, это – полная лиувиллева классификация интегрируемых систем классического случая Лагранжа.

Замечание 46. Отметим, что в книге [5] при описании инвариантов волчка Лагранжа допущена опечатка, исправленная в английском издании этой книги. А именно, в [5] для зоны энергии, отвечающей $S^1 \times S^2$ указана метка $\varepsilon = -1$, хотя на самом деле здесь $\varepsilon = +1$.

Перейдём к вопросу реализации биллиардами системы Лагранжа и введенного нами модифицированного ("скрученного") волчка Лагранжа.

Модифицированный ("скрученный") волчок Лагранжа в зоне энергии с изоэнергетической поверхностью $S^1 \times S^2$ не реализуется биллиардами классов I, II, III

Оказывается, что инварианты Фоменко-Цишанга для классического волчка Лагранжа во всех трех зонах энергии реализуются подходящими биллиардами (см. работу В.В.Ведюшкиной и А.Т.Фоменко [91]). А именно, биллиарды для случаев S^3 и $S^1 \times S^2$ — это плоские биллиарды, ограниченные одной и двумя концентрическими окружностями соответственно. Биллиард для случая $\mathbb{R}P^3$ — это топологический биллиард, получающийся склейкой двух таких евклидовых дисков по их общей границе. Также такой биллиард реализуется топологическим биллиардом, склеенным из двух биллиардов типа A_0' склейками по фокальной прямой и выпуклой дуге гиперболы см. [91].

Таким образом, имеет место следующая теорема реализации.

Теорема 5.5 (В.В.Ведюшкина, А.Т.Фоменко [93])**.** *Все три вида слоений Лиувилля, отвечающие классическому интегрируемому случаю волчка Лагранжа реализуются интегрируемыми топологическими биллиардами.*

Изменим слоение Лиувилля, отвечающее $S^1 \times S^2$ следующим образом. Оставим в реализующей его молекуле метку $r = \infty$, и заменим знак метки ε на противоположный.

Согласно теореме Болсинова-Фоменко (см. [5]), такое слоение (как и любое слоение, задаваемое инвариантами Фоменко-Цишанга) порождается некоторой гамильтоновой, гладкой, невырожденной, интегрируемой системой с двумя степенями свободы. Эту конкретную систему мы условно назовем модифицированным (или "скрученным") волчком Лагранжа. Ее физический смысл пока неясен, поэтому мы рассматриваем эту систему как гамильтоново векторное поле, обладающее гладким вторым интегралом. Термин "скрученный волчок Лагранжа" объясняется тем, что поток $\mathrm{sgrad} H$ (где H — соответствующий гамильтониан) индуцирует на критических окружностях, являющихся осями полноторий A, склеиваемых по своим граничным торам, противоположные ориентации (что и дает метку $\varepsilon = -1$). В этом принципиальное отличие от классического волчка Лагранжа, где в этой зоне энергии ориентации осей склеиваемых полноторий одинаковы (что и дает метку $\varepsilon = +1$). Это "скручивание" или "переворачивание" гамильтонова потока происходит на срединном торе Лиувилля, по которому склеены границы двух полноторий A.

Оказывается, такое изменение топологии слоения Лиувилля порождает интересное препятствие для реализации при помощи биллиардов-книжек. А именно, верна следующая теорема.

Теорема 5.6 (В.В.Ведюшкина [92]). *Рассмотрим слоение Лиувилля на $S^1 \times S^2$, заданное молекулой $A \longrightarrow A$, $r = \infty$, $\varepsilon = -1$, то есть отвечающее модифицированному ("скрученному") волчку Лагранжа. Рассмотрим класс биллиардных книжек, состоящих из элементарных биллиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик. Тогда не существует интегрируемой биллиардной книжки, ограниченной дугами софокусных квадрик, реализующей это слоение Лиувилля. Иначе говоря, такое слоение не может быть реализовано интегрируемыми биллиардами, принадлежащими классам I—III.*

Доказательство. **Шаг 1.**

Пусть такая биллиардная книжка существует. Тогда она состоит из элементарных биллиардов, которые либо ограничены концентрическими окружностями, либо ограничены дугами софокусных эллипсов и гипербол (случай парабол полностью аналогичен случаю эллипсов и гипербол). Предположим, что биллиард содержит невыпуклые склейки. Тогда каждая невыпуклая склейка даёт в молекуле некоторый седловой атом (см., например, утверждения 2.2.2, 2.2.2, 2.5.3). Молекула $A - A$ не содержит седловых атомов. Поэтому если существует моделирующий её биллиард, то он не содержит невыпуклых склеек.

Шаг 2.

Пусть все элементарные биллиарды ограничены окружностями. Пусть биллиардная книжка, склеенна только из биллиардов-дисков (биллиарды D) и нескольких колец (биллиарды C). Циклы λ, которые выбираются как стягиваемые в полноториях A могут быть выбраны следующим образом. Рассмотрим циклы λ для каждого из биллиардов C и D, составляющих биллиардную книжку. Склейка биллиардов в биллиардную книжку разрывает эти циклы и склеивает их в единый цикл для новой книжки. Тогда, если биллиардная книжка содержит хотя бы один биллиард D то циклы λ будут иметь общую точку (см. подробнее рис.2.42 и доказательство утверждения 2.5.1), что означает конечность r метки.

Если же биллиардная книжка состоит только из биллиардов–колец C, то r метка между атомами A бесконечна. Отметим, что траектории такого биллиарда разбиваются на два класса – закручивающиеся относительно центра окружностей по и против часовой стрелки. Переход от одного типа траекторий к другому происходит через резонансный тор, отвечающий траекториям, лежащим на прямых, проходящих через центр окружностей. На отрезки этих прямых проектируются циклы λ, стягивающиеся в точку внутри полноторий A, соответствующих описанным двум классам траекторий. Дополнительные к ним циклы μ на торах Лиувилля могут быть выбраны проектирующимися в граничную окружность биллиарда. При этом каждый цикл естественно ориентирован потоком гамильтонового векторного поля по направлению векторов скоростей на оси полнотория. Очевидно, что для таких циклов μ эти ориентации противоположны. Таким образом, на резонансном торе полнотория A склеиваются по матрице $\begin{pmatrix}\lambda_+\\ \mu_+\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_-\\ \mu_-\end{pmatrix}$.

По определению инварианта Фоменко-Цишанга, это означает, что метка $r = \infty$, а метка $\varepsilon = 1$. Знаки в матрице обусловлены тем, что ориентация циклов μ фиксирована, следовательно, $\mu_+ = -\mu_-$, а так как определитель матрицы склейки обязан равняться -1, то однозначно определяется что $\lambda_+ = \lambda_-$.

Пусть биллиардная книжка состоит из круговых биллиардов, имеющих прямолинейные отрезки границы. Рассмотрим объединение U корешков книжки, лежащих на дугах больших окружностей, ограничивающих элементарные биллиарды в её составе. Это некоторое одномерное множество.

Рассмотрим случай, когда это множество стягиваемо. Тогда существует ровно одна траектория, касающаяся этих корешков. В этом случае другими критическими траекториями являются траектории, проходящие через центр. Торы в этом случае стягиваются не на окружность, а на некоторый комплекс, гомотопически эквивалентный окружности (как, например, в случаях биллиардов D_h и D_q). Рассмотрим в этом комплексе множество точек M, лежащих на объединении корешков U, таких, что вектора скорости в этих точках направлены от центра окружностей. Отметим, что так как U стягиваемо, то и M также стягиваемо на особом слое. Следовательно, точки корешков U, оснащенные векторами "наружу" биллиардной книжки образуют цикл λ. Второй цикл λ, стягиваемый при $\varphi \to 0$ проектируется на некоторый фиксированный радиус. Эти циклы пересекаются, следовательно, r метка не может быть равна ∞.

Пусть множество U нестягиваемо, то есть содержит "петлю". Движение по петле в различных направлениях отвечает различным полноториям A. В этом случае движения на них противоположны, что означает, что ориентация циклов μ противоположна. Так как мы предположили, что метка $r = \infty$, то метка $\varepsilon = 1$ (см. выше).

Шаг 3.

Далее, предположим, что искомая книжка, моделирующая заданное слоение, состоит из биллиардов, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол. Если внутренность хотя бы одного элементарного биллиарда имеет непустое пересечение с фокальной прямой, то в результате в молекуле будут седловые атомы. Далее воспользуемся ранее полученной (см. главы 1 и 2) классификацией элементарных и топологических биллиардов. Все биллиарды, внутренность которых не содержит точек фокальной прямой, изображены на рис. 5.31

При этом любая склейка вдоль фокальной прямой приведет к появлению седловой особенности. Далее рассмотрим биллиардную книжку, склеенную из биллиардов, изображенных на рис. 5.31, так что все склейки являются выпуклыми. В такой биллиардной книжке есть две особых траектории. Первая траектория соответствует движению вдоль дуг граничного эллип-

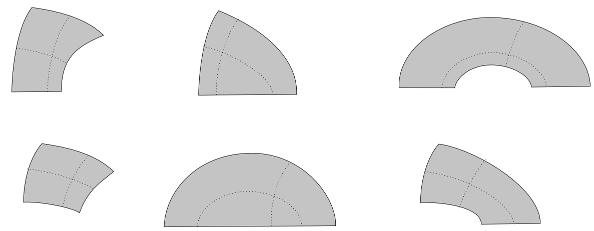


Рис. 5.31: Элементарные биллиарды, ограниченные дугами софокусных эллипсов и гипербол, внутренность которых не пересекается с фокальной прямой. Штрихованными линиями показаны проекции циклов λ на биллиарды.

са с наименьшим значением параметра софокусной квадрики. Вторая — вдоль дуг гипербол с наибольшим значением параметра софокусной квадрики.

Конечность r метки следует из следующего соображения. Рассмотрим циклы λ, стягивающиеся в точку внутри полноторий A. Если эти циклы гомологичны на граничном торе, то метка $r = \infty$, в противном случае эта метка конечна и её знаменатель зависит от числа пересечения этих циклов. Отметим, что стягивающиеся в точку циклы λ на полнотории, соответствующем траекториям, касающихся софокусных эллипсов, могут быть выбраны как прообраз дуг некоторой фиксированной гиперболы при естественной проекции торов Лиувилля на биллиард. Аналогично циклы λ на другом полнотории проектируются в дуги эллипсов. Очевидно что любой эллипс и дуга любой гиперболы имеют точку пересечения в биллиардах на рис.5.31. Покажем теперь, что связные компоненты прообразов этих дуг (то есть циклы λ) также пересекаются на торе. Фиксируем тор Лиувилля. Пусть этот тор соответствует траекториям, касающихся эллипсов. Тогда одна связная компонента в прообразе дуги гиперболы соответствует векторам, направленным по часовой стрелке относительно семейства софокусных эллипсов, а другая – векторам, направленным в противоположную сторону. Вектора скорости точек одной связной компоненты в прообразе дуги эллипса направлены к внешней границе (от фокусов), а на другой — внутрь. Очевидно, что точки дуги эллипсов и гипербол, оснащенные таким образом, пересекаются. Откуда следует конечность r метки.

В результате искомого слоения при помощи таких биллиардов получить не удается. Теорема доказана. □

Замечание 47. На самом деле в данном случае это связано с тем, что изоэнергетическая поверхность искомого слоения гомеоморфна $S^1 \times S^2$. А для биллиардных книжек, полученных склейками элементарных биллиардов, изображенных на рис. 5.31 изоэнергетическая поверхность гомеоморфна сфере S^3 или линзовому пространству. Таким образом, предложение доказано.

Реализация слоения Лиувилля модифицированного ("скрученного") волчка Лагранжа на изоэнергетической поверхности $S^1 \times S^2$ магнитным биллиардом

Как было сказано выше, введение класса биллиардов в магнитном поле позволяет реализовать "скрученный" волчок Лагранжа для той зоны энергии, где многообразие Q диффеоморфно $S^1 \times S^2$. Этот факт был обнаружен С.Е.Пустовойтовым и сейчас мы вкратце приведём это доказательство.

Динамика и интегралы

Рассмотрим плоский биллиард в кольце, т.е. ограниченный двумя концентрическими окружностями, в однородном магнитном поле. Вектор магнитной индукции (он же вектор магнитной напряженности для вакуума) перпендикулярен плоскости биллиарда и имеет длину B. Биллиардная частица обладает массой m и зарядом q. Уравнения динамики таковы

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} \end{cases}$$

Перепишем их как

$$\begin{cases} \ddot{x} = k\dot{y} \\ \ddot{y} = -k\dot{x} \end{cases} \tag{$*$}$$

$k(q, B, m) = \frac{qB}{m} \neq 0$ – постоянный коэффициент для заданной системы (больше или меньше 0). Решая эту систему, получим следующие уравнения движения заряженной биллиардной частицы

$$\begin{cases} x = Asin(kt + t_0) + x_0 \\ y = Acos(kt + t_0) + y_0 \end{cases} \tag{$**$}$$

где значения констант x_0, y_0, A, и t_0 определяются начальными данными. Как видно, траектории движения частицы между ударами о стенки биллиарда – это дуги окружностей. Заметим, что движение по дугам этих окружностей всегда происходит в одну и ту же сторону (по или против часовой стрелки в зависимости от знака заряда q). Квадрат скорости частицы на протяжении всего движения сохраняется, так как магнитное поле работы не совершает, а все удары о стенки предполагаются абсолютно упругими. В результате имеем следующее соотношение.

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (kA)^2 \tag{5.6}$$

Следовательно, параметр A, являющийся радиусом окружностей, по дугам которых движется частица, не меняется вдоль траектории биллиарда, то есть является интегралом динамической системы. Таким образом, частица движется по траектории, составленной из дуг окружностей одинакового радиуса, как показано на рис. 5.32.

Рассмотрим функцию

$$H = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + k(x\dot{y} - y\dot{x}) \tag{5.7}$$

Заметим, что в силу уравнений движения $\dot{H} = 0$. Следовательно, H не меняется между ударами. Но и во время удара H тоже не меняется. В самом деле. Первое слагаемое — это квадрат длины вектора скорости, сохраняющийся при ударе. Второе слагаемое зависит только от координат точки удара. Третье слагаемое является скалярным произведением касательного вектора к граничной окружности в точке удара на вектор скорости частицы при этом ударе. Эта величина сохраняется при классическом биллиардном отражении (по закону отражения Ферма). Следовательно, функция H также является интегралом данной системы. Подставив в это выражение значения x и y из выражений выше, получим

$$H = k^2(x_0^2 + y_0^2) = (kR)^2. \tag{5.8}$$

Следовательно, величина R также является интегралом. Таким образом, найдены два функционально независимых интеграла: A – радиус дуг окружностей, составляющих траекторию (они называются окружностями Лармора), и R – расстояние от центров этих дуг до начала координат (рис. 5.32).

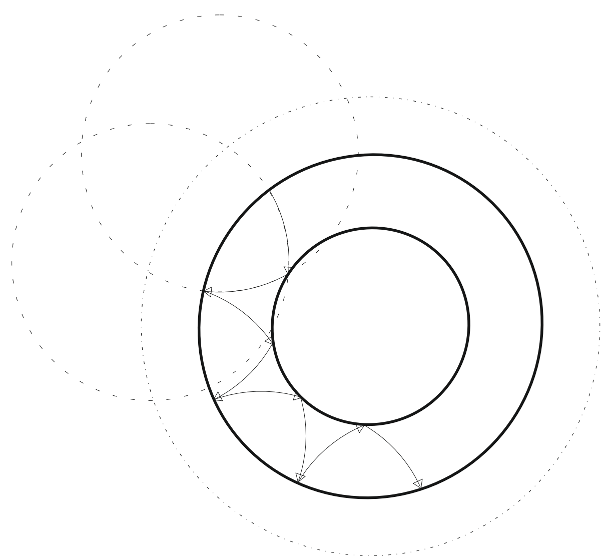


Рис. 5.32: Движение заряженной частицы в магнитном биллиарде, ограниченном двумя концентрическими окружностями происходит по дугам окружностей Лармора радиуса A (изображены пунктирной линией), центры которых расположены на окружности радиуса R (изображена штрих-пунктирной линией).

Бифуркационная диаграмма

Теперь можно вычислить бифуркационную диаграмму данной системы.

Пусть радиус внутренней стенки биллиарда равен r_0, а внешнего R_0. Рассмотрим три случая

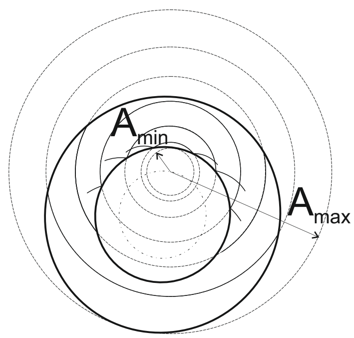


Рис. 5.33: Движение при $0 < R < r_0$.

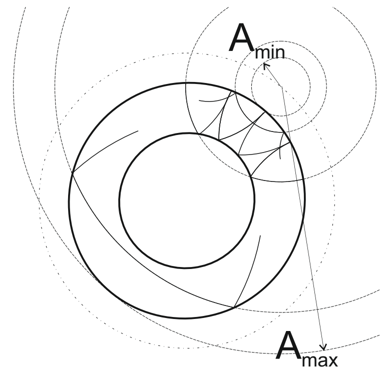


Рис. 5.34: Движение при $R > R_0$.

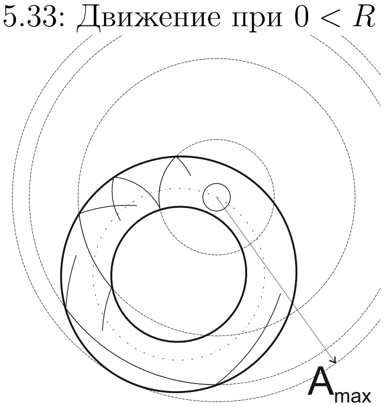


Рис. 5.35: Движение при $r_0 < R < R_0$.

Первый случай. Пусть $0 < R < r_0$. То есть центры окружностей, дуги которых составляют траектории частицы, расположены внутри меньшей концентрической окружности, образующей границу биллиарда. В этом случае, их радиусы A должны удовлетворять неравенству $r_0 - R \leq A \leq R + r_0$. В противном случае такие окружности не имеют общих точек с биллиардом (рис. 5.33).

Второй случай. Пусть $R > R_0$. Тогда полученное аналогично предыдущему пункту неравенство на радиусы A окружностей имеет вид $R - R_0 \leq A \leq R + R_0$ (рис. 5.34).

Третий случай. Пусть $r_0 < R < R_0$. Тогда $0 \leq A \leq R + R_0$ (рис. 5.35).

Объединяя эти случаи, получаем образ отображения момента (рис. 5.36).

Предложение 5.4.1 (С.Е.Пустовойтов)**.** *Бифуркационная диаграмма магнитного биллиарда в кольце имеет вид, показанный на рис. 5.36. То есть она является границей образа отображения момента. В прообразе каждой граничной точки отображения момента лежит ровно одна критическая окружность, а в прообразе остальных точек — ровно один тор.*

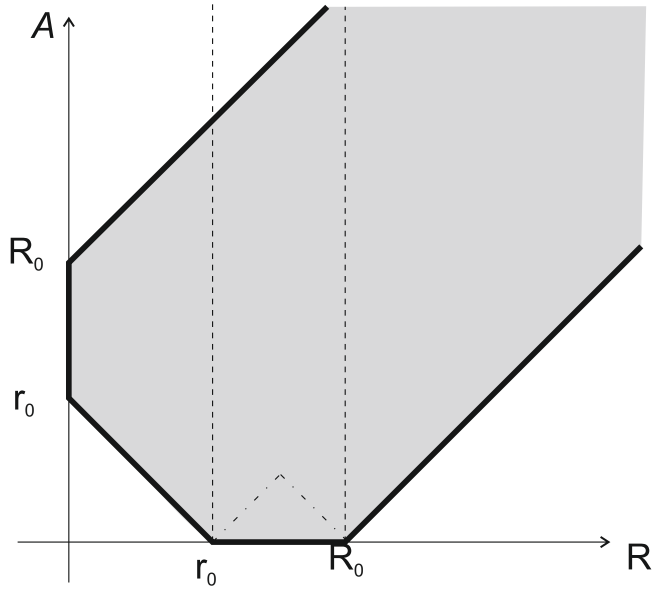


Рис. 5.36: Образ отображения момента и бифуркационная диаграмма для динамической системы магнитного биллиарда в кольце. Штрихованные линии отделяют различные типы слоений Лиувилля в прообразе кривых $R = const$. Штрих-пунктиром выделена треугольная область, точки внутри которой соответствуют резонансным торам. Она ограничена осью абсцисс и кривой $A = min\{R - r_0, R_0 - R\}$.

Траектории. Молекулы

Теорема 5.7 (В.В.Ведюшкина, А.Т.Фоменко [93]). *Слоение Лиувилля "скрученного" волчка Лагранжа в зоне энергии, соответствующей изоэнергетическому многообразию $S^1 \times S^2$ и с молекулой $A - A$ снабженной метками $r = \infty$, $\varepsilon = -1$, реализуется слоением Лиувилля изоинтегральной поверхности $R = const < r_0$ магнитного биллиарда в кольце.*

Докажем более сильное утверждение.

Предложение 5.4.2 (С.Е.Пустовойтов, В.В.Ведюшкина [93]). *Все неособые изоинтегральные поверхности $R = const$ для магнитного биллиарда в кольце гомеоморфны $S^1 \times S^2$ и описываются молекулой $A - A$, где метка $r = \infty$. При $R < r_0$ метка $\varepsilon = -1$, а при $R > R_0$ метка $\varepsilon = 1$.*

Замечание 48. Отметим, что смысл интеграла A — это энергия системы, а интеграл R — это дополнительный интеграл. Обычно рассматриваются трехмерные поверхности постоянной энергии, однако, как было сказано выше, для изучения слоения Лиувилля аналогичным образом можно рассматривать другой интеграл. В данном случае, как оказалось, удобно воспользоваться интегралом R.

Доказательство. Зафиксируем значение интеграла $R > R_0$ и будем менять энергию A, что и задает нам слоение Лиувилля на трехмерном многообразии $R = const$. Проследим, как меняются траектории и области возможного движения (т.е. проекции торов Лиувилля на биллиард) при увеличении интеграла A (рис. 5.37). На рис. 5.37 показана бифуркация областей возможного движения. Значению $A = R - R_0$ (крайний левый рисунок) соответствует траектория по граничной окружности, закручивающаяся по часовой стрелке относительно центра биллиарда. Далее при $R - R_0 < A < \sqrt{R^2 - r_0R_0}$ проекция тора Лиувилля — это кольцо, в котором лежат траектории, закручивающиеся по часовой стрелке относительно начала координат. При $A = \sqrt{R^2 - r_0R_0}$ все траектории состоят из двух звеньев, концы которых лежат на прямых, проходящих через начало координат (центр биллиарда). Таким образом, значению $A = \sqrt{R^2 - r_0R_0}$ отвечает резонансный тор, состоящий из замкнутых траекторий. При $\sqrt{R^2 - r_0R_0} < A < R_0 + R$ тору Лиувилля отвечают траектории, которые закручиваются против часовой стрелки. Таким образом, при переходе через резонансный тор при изменении A поток меняет направление. Наконец, значению $A = R + R_0$ соответствует траектория, проходящая по большей граничной окружности и закручивающаяся против часовой стрелки. Как можно видеть, каждой области

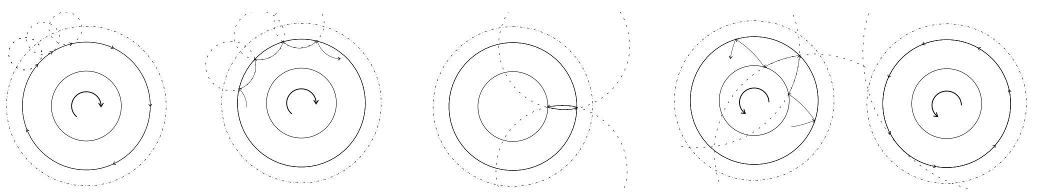


Рис. 5.37:

возможного движения соответствует ровно один тор Лиувилля. Дело в том, что направление движения частицы по дугам окружностей полностью определяется знаком k. Такому значению $R = const > R_0$ соответствует молекула $A - A$. Аналогично рассуждению выше для безмагнитного биллиарда (теорема 5.6) получаем, что циклы μ отличаются знаком (движение заряженной частицы в области меняется на противоположное). Следовательно, матрица склейки имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

метки $r = \infty$, $\varepsilon = 1$.

Пусть теперь $R < r_0$. В результате анализа траекторий (см. рис. 5.38) видим, что при изменении параметра A направление закручивания траекторий относительно центра биллиарда не меняется (т.е. например, при $k > 0$ движение происходит против часовой стрелки). Критическая траектория, соответствующая минимальному значению параметра $A = r_0 - R$ это траектория по внутренней граничной окружности биллиарда. При этом её направление совпадает с направлением траектории, соответствующей максимальному значению параметра $A = R_0 + R$, и отвечающей движению по большей граничной окружности биллиарда. Таким образом ориента-

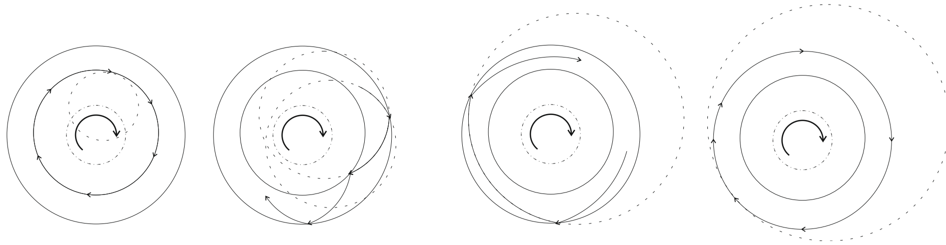


Рис. 5.38:

ции циклов μ — осей полноторий A — совпадают. А так как циклы λ также гомологичны, то их ориентации должны быть противоположны. Таким образом матрица склейки имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

метки $r = \infty$, $\varepsilon = -1$

Принципиальное различие в двух разобранных случаях в том, что траектории с изменением параметра A ведут себя по-разному: при изменении параметра в первом случае траектории меняют направление относительно центра биллиарда, а во втором случае – не меняют. Это влияет на изменение знака метки ε.

Случай $r_0 < R < R_0$ принципиально отличается от рассмотренных. Рассмотрим слоение Лиувилля соответствующей изоинтегральной поверхности линиями уровня $A = const$. При $A = 0$ слой — это окружность, состоящая из неподвижных точек системы. При достаточно малых значениях A траектории на соответствующем торе будут ортогональны оси полнотория. Все траектории системы — это окружности малого радиуса $A < \{R - r_0, R_0 - R\}$ с центрами на окружности радиуса R. Следовательно, все такие торы Лиувилля резонансны. Получается, что задать корректно направление потока $sgradR$ на оси этого полнотория (то есть на цикле μ) нельзя. Дело в том, что этот поток обращается в ноль на оси полнотория. При увеличении A до значения $A = min\{R - r_0, R_0 - R\}$ торы Лиувилля остаются резонансными. При $A = min\{R - r_0, R_0 - R\}$ траектория коснётся границы биллиарда. При дальнейшем увеличении параметра A траектории уже не будут ортогональны оси полнотория и будут закручиваться в некоторую сторону относительно центра биллиарда. Следовательно, начиная с этого момента почти все торы Лиувилля становятся нерезонансными. Однако можно показать, что соответствующее многообразие Q^3 по-прежнему гомеоморфно $S^1 \times S^2$.

В самом деле, разобьем многообразие Q^3 на два полнотория. Одно — для значений $A \leq min\{R - r_0, R_0 - r\}$, соответствует траекториям, которые являются окружностями, стягиваемыми в точку. Это полноторие расслоено на резонансные торы. Другое полноторие соответствует значениям $A > min\{R - r_0, R_0 - r\}$. Здесь траектории уже не стягиваются в точку. Заметим, что на граничном торе, отделяющим друг от друга эти два полнотория, циклы, гомологичные осям этих полноторий гомологичны, также как гомологичны циклы, стягивающиеся внутри

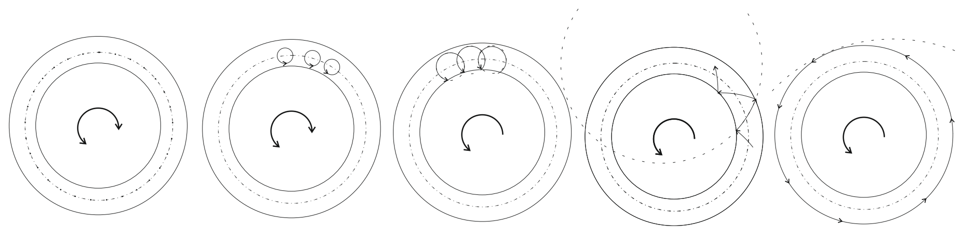


Рис. 5.39:

этих полноторий в точку. Следовательно получаем, что поверхность Q^3 гомеоморфна $S^1 \times S^2$. Доказательство закончено.

$\square$

Замечание 49. Пунктирные вертикальные линии на рис. 5.36 разграничивают типы слоений Лиувилля. Слева при $R < r_0$ слоение Лиувилля описывается молекулой $A - A$ с метками $r = \infty,\ \varepsilon = -1$. Справа при $R > R_0$ слоение Лиувилля описывается молекулой $A - A$ с метками $r = \infty,\ \varepsilon = 1$. В области посередине, как было показано, знак метки ε не определен, так как поток $sgradR$ обнуляется на оси одного из полноторий, описываемого атомом A. На рисунке штрих-пунктиром показана треугольная область, в прообразе которой лежат резонансные торы. Траектории на таких торах – это окружности, с центрами на окружности радиуса R и радиусами $A < min\{R - r_0, R_0 - R\}$.

Замечание 50. Отметим, что в классических задачах динамики твердого тела анализ слоений Лиувилля как правило ограничен анализом слоений изоэнергетических поверхностей. Однако так как мы вольны в выборе интегралов рассмотрение не изоэнергетической, но изоинтегральных поверхностый тоже представляет интерес. При этом для магнитного биллиарда в кольце слоение Лиувилля изоэнергетической поверхности $A = const$ будет задаваться молекулой $A - A$ с метками $r = \infty,\ \varepsilon = 1$.

Замечание 51. А.В.Болсиновым было отмечено что подобный эффект может наблюдаться и в других системах. Пусть локально бифуркационная диаграмма устроена так (см. рис. 5.40). Рассмотрим гладкий участок бифуркационной диаграммы, отвечающий атому A и ограничивающий (локально) выпуклую область, являющуюся образом отображения момента. Пусть никаких других бифуркаций на этой дуге нет. Рассмотрим молекулу, отвечающую произвольной хорде (отрезку, соединяющему пару точек на бифуркационной диаграмме). Соответствующая молекула имеет вид $A - A$, где метка $r = \infty$. Знак метки ε зависит от хорды. Рассмотрим дуг бифуркационной диаграммы, ограниченную этой хордой. Если в каждой точке этой дуги прямая $\{H = const\}$ ей трансверсальна, то критические окружности ориентированы гамильтоновым потоком sgrad$H$ одинаково, что приводит к тому, что метка $\varepsilon = -1$. Если же есть точка в которой прямая $\{H = const\}$ является касательной, то в этот момент поток “переворачивается” и метка $\varepsilon = 1$.

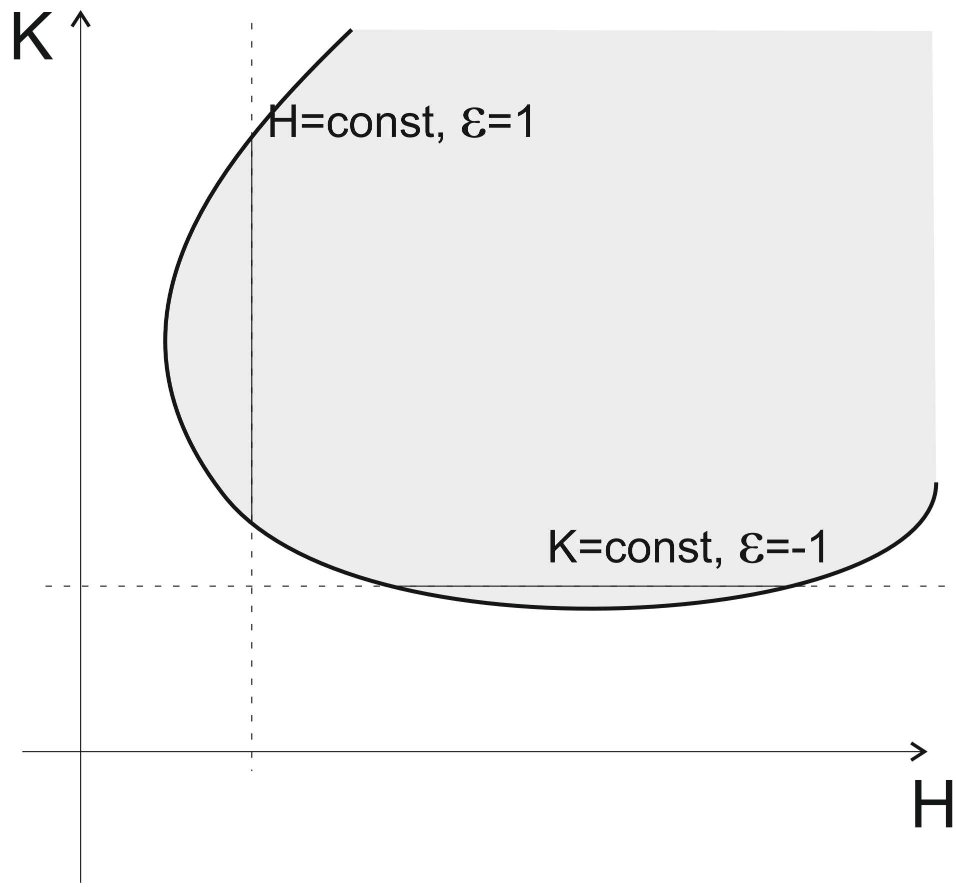


Рис. 5.40: Замена интеграла H на K может привести к изменению знака метки ε в молекуле $A \xrightarrow{r=\infty} A$.

Замечание 52. Как было сказано выше, появление в молекуле $A - A$ с меткой $r = \infty$ метки $\varepsilon = -1$ обусловлено тем фактом, что мы поменяли гамильтониан и дополнительный интеграл местами. При этом мы сохранили ориентацию критических окружностей потоком гамильтониана H. Однако если подобную процедуру сделать в рассмотренных классах биллиардов без внешних сил (т.е. без потенциала, магнитного поля и т.д.), то это не приведет к такому же эффекту. Некомпактные изоинтегральные поверхности будут одинаково расслоены (за исключением нулевого сечения, где $|v| = 0$), где слои будут отличаться только длиной вектора v.

Приложение 1. Локальная гипотеза C.

Вопрос о справедливости гипотезы Фоменко C в полном объеме пока неясен. В связи с этим А.Т. Фоменко сформулировал “локальный” вариант гипотезы C, являющийся “максимальным упрощением” общей гипотезы C. Напомним, что инварианты Фоменко–Цишанга, классифицирующие невырожденные интегрируемые системы на трехмерных инвариантных многообразиях — это одномерные графы с вершинами-атомами и некоторыми числовыми метками. Атомы кодируют бифуркации торов Лиувилля вблизи особых слоев слоений Лиувилля.

Локальная гипотеза А.Т. Фоменко C (реализация числовых инвариантов интегрируемых систем).

1. Пусть γ — произвольное ребро с метками r, ε некоторой меченой молекулы W^*. Тогда существует биллиард из указанных выше классов I-VIII, реализующий такую комбинацию чисел r, ε на одном из ребер своей меченой молекулы.

Отметим, что имеются следующие четыре варианта: метка $r = p/q$ конечна, и $\varepsilon = \pm 1$; метка $r = \infty$, и $\varepsilon = \pm 1$.

2. (усиление пункта **1**) В условиях пункта **1** существует подходящий биллиард, реализующий произвольную пару меток r и ε на ребре между любыми, наперед заданными атомами.

3. Пусть S — семья с целочисленной меткой n в некоторой меченой молекуле W^* интегрируемой системы. Тогда существует биллиард из указанных выше классов I-VIII, реализующий некоторую семью с точно такой же целочисленной меткой n.

4. (усиление пункта **3**) В условиях пункта **2** существует подходящий биллиард, реализующий не только данную метку n, но и саму семью, т.е. граф с нужными атомами и нужным набором ребер.

5. (реализация меченой окрестности любой семьи) Пусть S — семья с целочисленной меткой n в некоторой меченой молекуле, причем внешние ребра γ_i семьи оснащены произвольными метками r_i, ε_i. Тогда существует подходящий биллиард, реализующий такой меченый подграф в своей меченой молекуле.

5.5 Реализация реберных инвариантов r, ε.

Теорема 5.8 (В.В.Ведюшкина). *Гипотеза А.Т. Фоменко C_1 для любой пары числовых инвариантов r, ε верна, а именно, для любого ребра меченой молекулы W^* с такой парой меток существует биллиард, меченая молекула которого содержит ребро с этой же парой меток.*

Замечание 53. При изменении ориентации изоэнергетической поверхности Q^3 меняются допустимые системы координат. В результате метки, стоящие на ребрах, изменятся по описанным ниже правилам (см. [5]).

1) Ребро соединяет атомы одного типа, т. е. либо A с A, либо седло с седлом. Здесь в случае конечного ребра, т.е. когда $\beta \neq 0$ метки r и ε меняют знаки. В случае же бесконечного ребра, т. е. когда $\beta = 0$, метки r и ε не меняются.

2) Ребро соединяет атомы разных типов, т.е. атом A с седлом. Здесь в случае конечного ребра метка r меняет знак, а метка ε не меняется. В случае бесконечного ребра наоборот: метка r не меняется (равна бесконечности), а метка ε меняет знак.

Теорема 5.9 (В.В.Ведюшкина). *Гипотеза А.Т. Фоменко C_2 верна для случаев, указанных в таблице 5.1. Более точно, в семи случаях подходящими биллиардами удается реализовать все пары r, ε числовых меток для ребер, на концах которых находятся любые наперед заданные атомы. В четырех оставшихся случаях удалось пока реализовать любые комбинации меток для ребер, соединяющих лишь конкретные атомы из серий B и C.*

метки	$A-A$	$A-V$	V_1-V_2
$r=p/q$, $\varepsilon=1$	+	$V=B$	$V_1=C_k,\ V_2=C_n$
$r=p/q$, $\varepsilon=-1$	+	—	$V_1=C_k,\ V_2=C_n$
$r=\infty$, $\varepsilon=1$	+	алгоритм Ведюшкиной-Харчёвой	алгоритм Ведюшкиной-Харчёвой для грубых молекул
$r=\infty$, $\varepsilon=-1$	+	+	$V_1=V_2=B_n$

Таблица 5.1: Случаи реализации комбинаций меток r и ε в молекулах Фоменко–Цишанга интегрируемых биллиардов.

Доказательство. Случай $P_1\dfrac{r=p/q}{\varepsilon=\pm1}P_2$, где метки стоят на ребре, соединяющие атомы одного типа. Если эти атомы имеют тип A, то для реализации подойдет биллиардная книжка, одинаковые листы которой ограничены дугами эллипсов и гипербол и не пересекаются с фокальной прямой (см. рис. 5.41, a). На выпуклом гиперболическом ребре при этом стоит перестановка

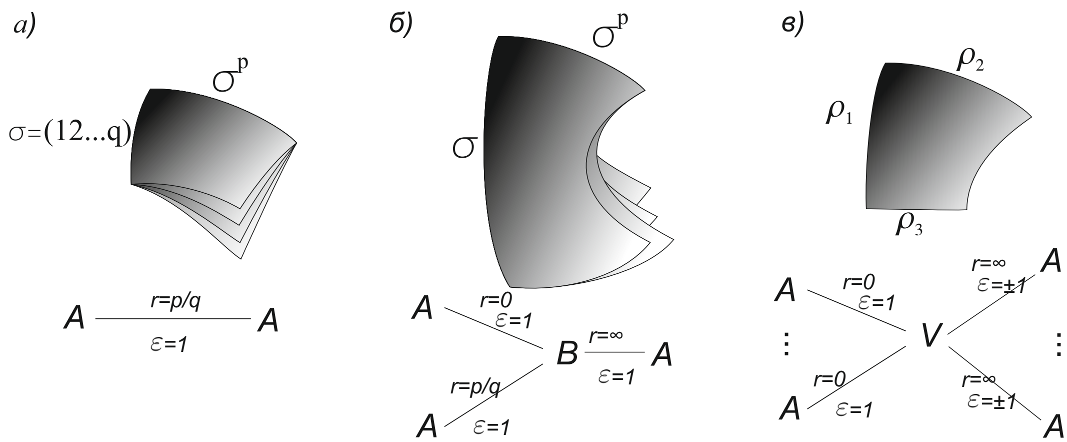


Рис. 5.41: Случаи реализации комбинаций меток $A\frac{r=p/q}{\varepsilon=\pm1}A(a)$, $A\frac{r=p/q}{\varepsilon=+1}B(б)$ и $V\frac{r=\infty}{\varepsilon=\pm1}A(в)$, в молекулах Фоменко–Цишанга интегрируемых биллиардов.

$\sigma = (1\ 2\ \ldots\ q)$, а на выпуклом эллиптическом — перестановка σ^p. В случае двух седловых атомов, такая метка была реализована биллиардной книжкой, моделирующей слоение Лиувилля интегрируемого геодезического потока на торе с квадратичным интегралом, не сводящимся к линейному (см. работу В.В. Ведюшкиной, А.Т. Фоменко [91]). В этом случае атомы P_1 и P_2 это атомы серии C_n. Отметим, что так как слоения этих биллиардов реализуют любую метку r, то для получения другого знака метки ε при данной r необходимо реализовать метку $\tilde{r} = 1 - r$, а затем изменить ориентацию Q^3.

Случай $A\frac{r=p/q}{\varepsilon=+1}V$. Для реализации рассмотрим биллиардную книжку, одинаковые листы которой ограничены дугами эллипсов и гипербол и содержат часть отрезка фокальной прямой между фокусами (см. рис. 5.41, *б*). Здесь, как и выше, гиперболическому выпуклому ребру необходимо сопоставить перестановку σ, и эллиптическому — перестановку σ^p. В этом случае ребро будет соединять атомы A и B. Остается открытым вопрос, может ли вместо атома B быть другой седловой атом. В случае положительного ответа интересно было бы описать класс всех таких атомов.

Случай $A\frac{r=\infty}{\varepsilon=+1}A$ реализуется элементарным биллиардом, ограниченным двумя концентрическими окружностями. Случай $A\frac{r=\infty}{\varepsilon=-1}A$ реализуется этим же биллиардом в присутствии магнитного поля. Любая траектория такого биллиарда состоит из дуг окружностей, центры которых лежат на другой, фиксированной окружности. При этом радиус окружностей, дуги которых составляют траекторию играет роль энергии системы, а радиус окружности центров — дополнительного интеграла. При этом окружности центров и окружностей, образующих границу биллиарда совпадают. Согласно результату В.В. Ведюшкиной и С.С. Пустовойтова если окружность центров целиком лежит в области, ограниченной меньшей граничной окружностью биллиарда, то тогда поверхность уровня дополнительного интеграла классифицируется слоением Лиувилля с молекулой $A\frac{r=\infty}{\varepsilon=-1}A$.

Случаи $A\frac{r=\infty}{\varepsilon=\pm 1}V$ могут быть реализованы для любого атома V. Рассмотрим биллиардную книжку, слоение Лиувилля которой реализует атом V, построенную по алгоритму В.В. Ведюшкиной и И.С. Харчёвой [86]. Эта биллиардная книжка склеена из биллиардов, ограниченных двумя дугами гипербол (одна из них выпуклая), эллипсом и фокальной прямой (см. рис. 5.41, *в*). На всех нестрого выпуклых границах при этом стоят некоторые перестановки ρ, определяемые по атому V однозначно. Торы, соответствующие траекториям, лежащим на прямых, касательных к гиперболам, в молекуле Фоменко–Цишанга, классифицирующей слоение Лиувилля этого биллиарда, расположены между атомом V и атомами A. При этом на таких ребрах метка $r=\infty$, а метка ε зависит от ориентации и может принимать как положительные так и отрицательные значения (на всех бесконечных ребрах при этом один и тот знак).

Случай $V_1\frac{r=\infty}{\varepsilon=1}V_2$ реализуется для любых седловых атомов. Возьмем интегрируемую биллиардную книжку сопоставленную инварианту Фоменко (грубой молекуле) по алгоритму В.В. Ведюшкиной и И.С. Харчевой для грубых молекул. Тогда все седловые атомы образуют одну большую семью, где метки $\varepsilon=1$ на всех ребрах внутри этой семьи.

Случай $V_1\frac{r=\infty}{\varepsilon=-1}V_2$ реализуется для двух одинаковых седловых атомов, принадлежащих серии B_n, например в молекуле, описывающей топологию слоения Лиувилля интегрируемого геодезического потока на двумерной сфере с линейным интегралом. Такая система лиувиллево эквивалентна подходящему биллиарду, склеенному из областей, ограниченных концентрическими окружностями см. [91]. Следовательно, этот биллиард позволяет реализовать случай ребра с такими метками. Теорема доказана. $\square$

Замечание 54. Отметим, что пока неясен вопрос о возможности реализации случаев $V\frac{r=\infty}{\varepsilon=-1}V$ и $A\frac{r=p/q}{\varepsilon=1}V$ для любых седловых атомов. При этом случай $A\frac{r=p/q}{\varepsilon=-1}V$ до сих пор не встречался в интегрируемых биллиардах, хотя он встречается в динамике твердого тела (например, случай Жуковского о движении гиростата в поле силы тяжести). Дело в том, что для него характерно противоположное направление критических траекторий на седловом атоме V и минимаксном атоме A, что в классах I-VIII пока не встречалось.

5.6 Реализация биллиардами числового инварианта расслоения Зейферта интегрируемых систем.

Теорема 5.10 (В.В. Ведюшкина, В.А. Кибкало)**.** *Для каждого $k\in\mathbb{Z}$ алгоритмически построен биллиард Ω_k, слоение Лиувилля которого на неособой изоэнергетической поверхности* *содержит некоторую семью с заданной меткой $n = k$.*

Описание построения столов Ω_k. Возьмем n экземпляров $S_1, \ldots, S_n$ стола типа A_2, ограниченного эллипсом $\lambda = 0$ семейства 1.1. Разрежем стол S_1 по ветвям гиперболы $\lambda = \lambda_1$, стол S_n (при $n > 1$) по ветвям гиперболы $\lambda = \lambda_{n-1}$, а остальные столы S_i, $2 \le i \le n-1$, (если $n > 2$) — по ветвям двух гипербол $\lambda = \lambda_{i-1}$ и $\lambda = \lambda_i$. Здесь $b < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n-1} < a$. Обозначения полученных областей приведем в таблице 5.2. Отметим, что стол S_i разрезан или на набор листов $(a_i, x_i, b_i, y_i, c_i)$, или на набор (a_i, b_i, c_i).

область	тип	уровень	граница	Oxy
a_i	A_1	$S_i, 1 \le i \le n$	λ_1: при $i = 1$; λ_{i-1}: при $2 \le i \le n$.	$x < 0$
x_i	A_0	$S_i, 2 \le i \le n-1$	λ_{i-1} и λ_i: при $2 \le i \le n-1$.	$x < 0$
b_i	A_0	$S_i, 1 \le i \le n$	λ_1 : при $i = 1$; λ_{i-1}: при $2 \le i \le n$.	$Oy \subset b_i$
y_i	A_0	$S_i, 2 \le i \le n-1$	λ_{i-1} и λ_i: при $2 \le i \le n-1$.	$x > 0$
c_i	A_1	$S_i, 1 \le i \le n$	λ_1: при $i = 1$; λ_{i-1}: при $2 \le i \le n$.	$x > 0$

Таблица 5.2: Обозначения листов биллиардных столов

Биллиардный стол Ω_k построим из описанных выше листов путем их склейки по отрицательным и положительным (т.е. лежащим в полуплоскостях $x < 0$ и $x > 0$) ветвям граничных гипербол с перестановками σ_i и ρ_i соответственно. В таблице 5.3 записаны эти перестановки, а на рисунке 5.42 изображен стол Ω_3.

гипербола	ρ_i	σ_i
$i = 1$	(b_1, c_1, y_2, c_2)	(a_2, x_2, a_1, b_1)
$2 \le i \le n-1$	$(b_i, y_i, y_{i+1}, c_{i+1})$	$(a_{i+1}, x_{i+1}, x_i, b_i)$
$i = n-1$	$(b_{n-1}, y_{n-1}, b_n, c_n)$	$(a_n, b_n, x_{n-1}, b_{n-1})$

Таблица 5.3: Перестановки на корешках склейки столов Ω_k

Рассмотрим столы типа $\Omega_{k,k-s}$, получаемые как результат удаления s пар листов a_i, c_i из клеточного комплекса Ω_k. На дуге склейки, инцидентной удаляемому листу, новая перестановка должна сохранить циклический порядок на множестве остальных листов, инцидентных этой дуге. Например, при $1 < j < k-1$ перестановка σ_j станет равна (x_{j+1}, x_j, b_j), а при $j = n-1$ — (b_k, x_{k-1}, b_{k-1}). Удаление обоих листов a_1 и a_2 сделает перестановку σ_1 равной (b_1, b_2) при $k = 2$ или (x_2, b_1) при $k > 2$. Стол Ω_{k-s} остается, как и Ω_k, симметричен относительно оси Oy.

Теорема 5.11 (В.В. Ведюшкина, В.В.Кибкало)**.** *При любых целых $k, s : 0 \le s \le k$, слоение Лиувилля биллиардов $\Omega_{k,k-s}$ содержит семью с $2k$ инцидентными ей ребрами молекулы (т.е. с валентностью $2k$) и меткой $n = k - s$.*

Теорема 5.12 (В.В. Ведюшкина, В.В.Кибкало)**.** *Для биллиарда на столе $\Omega_{k,k-s}$ при $0 \le s \le k$ инвариант Фоменко–Цишанга слоения Лиувилля на произвольной неособой изоэнергетической поверхности имеет вид, показанный на рисунке 5.43.*

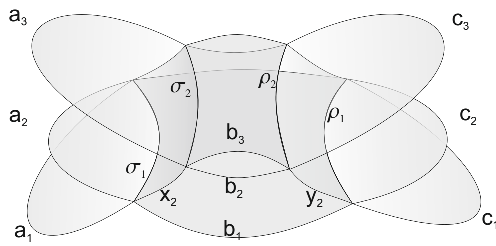


Рис. 5.42: Стол Ω_k при $k=3$. Стол $\Omega_{k,k-s}$ получается из стола Ω_k удалением s пар листов вида a_i, c_i.

Докажем две приведенные теоремы, вычислив инварианты Фоменко–Цишанга для столов типа $\Omega_{k,k-s}$.

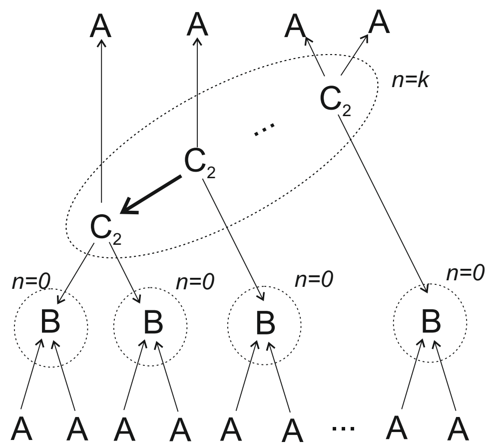


Рис. 5.43: Инвариант Фоменко–Цишанга биллиарда на столе $\Omega_{k,k-s}$. Метки (r,ε) равны $(\infty,1)$ на выделенных ребрах и $(0,1)$ на остальных.

Доказательство. Вычисление грубой молекулы: эллиптические торы. Для биллиарда на произвольном столе Ω определим для поверхности Q^3_Ω подмножества $Q_{\Omega,b+\varepsilon}$ (где $0\le\Lambda\le b+\varepsilon$) и $\bar{Q}_{\Omega,b+\varepsilon}$ (где $a\ge\Lambda>b+\varepsilon$) и обозначим так естественные проекции:

$$\pi:\quad Q^3_h\longrightarrow\Omega,\qquad\quad \pi_0:\quad \Omega\longrightarrow Oxy,\qquad\quad \pi':=\pi_0\circ\pi:\quad Q^3_h\longrightarrow Oxy.$$

Предложение 5.6.1. *Подмножество $Q_{\Omega_k,b+\varepsilon}$ для биллиарда на столе Ω_k послойно гомеоморфно k экземплярам подмножества $Q_{A_2,b+\varepsilon}$ для биллиарда в эллипсе (стол A_2).*

Доказательство. 1. Обозначим через $\tilde{\alpha}$ лист $\alpha\in\{a_i,c_i,x_i,b_i,y_i\}$ стола Ω_k за вычетом гиперболической границы этого листа. Ограниченная на $\tilde{\alpha}$ проекция $\pi_0:\Omega_k\longrightarrow Oxy$ индуцирует послойный гомеоморфизм между множествами $Q^3_{\tilde{\alpha},b+\varepsilon}\subset Q^3_{\Omega_k,b+\varepsilon}$ и $Q^3_{\tilde{\alpha},b+\varepsilon}\subset Q^3_{A_2\subset Oxy,b+\varepsilon}$ в касательных пространствах.

Для плоских биллиардов Ω в областях A_0, A_1 и A_2 рассмотрим любую неособую гиперболу, чья ветвь пересекает внутренность области. Ее π-прообраз в слое $\Lambda = b$ гомеоморфен двум восьмеркам состоящим из пар точка-вектор. Выбор одной из компонент однозначно задается выбором одной из двух пар точка-вектор, где точка лежит на пересечении гиперболы и оси Ox, а параллельный ей вектор направлен либо "вправо" (по оси Ox), либо "влево" (в противоположную сторону).

Так определим выбор одной из двух компонент связности $Q^3_{\tilde{\alpha},b+\varepsilon}$ для листов $\alpha \in \{x_i, b_i, y_i\}$, и обозначим символами $x_i^+ b_i^+, y_i^+$ компоненты с векторами "вправо", а символами $x_i^- b_i^-, y_i^-$ компоненты с векторами влево.

2. Рассмотрим слой $\Lambda = 0$ слоения Лиувилля биллиарда, являющийся несвязным объединением одной или нескольких минимальных окружностей. Его проекция π' содержится в эллипсе $\lambda = 0$. Покажем, что для стола Ω_k проекция π' каждой такой окружности является биекцией на эллипс, как и в случае биллиарда в A_2. Тогда отобразим в $Q^3_{A_2,b+\varepsilon}$ те компоненты связности листов стола Ω, по которым пройдет данная траектория. Далее проверим непрерывность в прообразе дуг склейки листов.

Обозначим дуги эллипса, попадающие в один из листов $\tilde{a}_i, \tilde{c}_i, \tilde{x}_i, \tilde{b}_i, \tilde{y}_i$ стола Ω_k той же буквой, что и лист. Для листов $\{x_i, b_i, y_i\}$ добавим знак ординаты y в качестве индекса. Получим те же обозначения, что ранее для компонент связности $Q^3_{\tilde{\alpha},b+\varepsilon}$.

В каждую точку дуги $a_i, x_i^\pm, b_i^\pm, y_i^\pm, c_i$ проецируется две пары точка-вектор из слоя $\Lambda = 0$ (вектор направлен по часовой стрелке или наоборот). Перестановки σ_i, ρ_i задают биекцию на множестве таких пар для всех областей, инцидентных этому ребру склейки, т.е. корректно определяют продолжение любой из траекторий слоя $\Lambda = 0$.

Закодируем эти траектории последовательностью, состоящей из дуг $a_i, x_i^\pm, b_i^\pm, y_i^\pm, c_i$, с указанием перестановки при переходе с листа на лист или отражении от границы. В силу конечности комплекса каждая траектория обязана замкнуться. Код μ_j окружности, проходящей по дуге a_j, имеет следующий вид при $k > 2$ (μ_1 при $k = 2$ получим из μ_1 для $k > 2$ с учетом $\rho_1(c_1) = b_2$ и $\sigma_1(b_2) = a_1$):

$$\mu_1 : \quad a_1 \xrightarrow{\sigma_1} b_1^+ \xrightarrow{\rho_1} c_1 \xrightarrow{\rho_1} y_2^- \xrightarrow{\rho_2} \dots \xrightarrow{\rho_{n-2}} y_{n-1}^- \xrightarrow{\rho_{n-1}} b_n^- \xrightarrow{\sigma_{n-1}} x_{n-1}^- \xrightarrow{\sigma_{n-2}} \dots \xrightarrow{\sigma_2} x_2^- \xrightarrow{\sigma_1} a_1.$$

$$\mu_i,\ 1 < i < k : \qquad a_i \xrightarrow{\sigma_{i-1}} x_i^+ \xrightarrow{\sigma_i} b_i^+ \xrightarrow{\rho_i} y_i^+ \xrightarrow{\rho_{i-1}} c_i \xrightarrow{\rho_{i-1}} b_{i-1}^- \xrightarrow{\sigma_{i-1}} a_i,$$

$$\mu_k,\ k \geq 2 : \qquad a_k \xrightarrow{\sigma_{k-1}} b_k^+ \xrightarrow{\rho_{k-1}} c_k \xrightarrow{\rho_{k-1}} b_{k-1}^- \xrightarrow{\sigma_{k-1}} a_k.$$

Для обеих траекторий, проходящих a_i в противоположных направлениях, код одинаков: биллиардный стол (комплекс, оснащенный перестановками) обладает симметрией отражения относительно оси Ox. Следовательно, поднятие такого отражения стола переводит минимальные траектории в минимальные траектории. Других траекторий, кроме $2k$ таких пар, нет: каждая дуга $a_i, c_i, x_i^{\pm} b_i^{\pm}, y_i^{\pm}$ встретилась в кодах μ_j ровно раз.

Замечание 55. Для стола Ω_k все траектории на уровне $\Lambda = 0$ направлены либо по, либо против часовой стрелки, и проходят ровно по одной паре листов a_i, c_i.

3. Выберем i и отобразим в $Q^3_{A_2,b+\varepsilon}$ объединение множеств $Q^3_{\tilde{\alpha},b+\varepsilon}$ для всех компонент $\alpha \in \{\tilde{a}_i, \tilde{c}_i, \tilde{x}_i^{\pm}, \tilde{b}_i^{\pm}, \tilde{y}_i^{\pm}\}$, входящих в код μ_i. Это мономорфизм, т.е. остается проверить корректность склейки.

Достаточно проверить, что склейка вдоль частей особых траекторий уровня $\Lambda = b$, попадающих на интервал между фокусами, задается тем же кодом, что и склейка вдоль особых минимальных траекторий. Действительно, в одну и ту же связную компоненту $Q^3_{\Omega_k,b+\varepsilon}$ попадут пары: точка фокального отрезка и вектор "вправо" , точка граничной дуги с координатой $y > 0$ и вектор по часовой стрелке, точка граничной дуги с координатой $y < 0$ и вектор против часовой стрелки.

Тем самым, для стола Ω_k перестановки σ_i и ρ_i отождествляют связные компоненты прообраза гиперболических границ областей a_i, x_i, b_i, y_i, c_i, т.е. код μ_i задает послойный гомеоморфизм с множеством уровня $Q^3_{A_2,b+\varepsilon}$ для биллиарда в эллипсе. Предложение доказано. $\square$

Следствие 5.6.1. *После удаления пары листов a_i, c_i листов из Ω_k получим на связной компоненте, содержавшей μ_i, слоение, эквивалентное $Q_{A_0,b+\varepsilon}$ для биллиарда на столе A_0. Остальные компоненты $Q_{\Omega,b+\varepsilon}$ не меняются.*

Вычисление грубой молекулы: гиперболические торы. Опишем слоение Лиувилля на множестве $\bar{Q}^3_{k,b+\varepsilon}$ уровня $H = 1, b+\varepsilon \leq \Lambda \leq a$ для биллиарда на столе Ω_k. В случае $k = 2$ стол склеен из шести листов a_i, b_i, c_i, где $i = 1, 2$, по перестановкам $\sigma = (a_1, b_1, a_2, b_2), \rho = (b_1, c_1, b_2, c_2)$ на левой и правой дугах гиперболы с параметром λ_1.

Предложение 5.6.2 (В.В. Ведюшкина, В.А. Кибкало)**.** *Класс лиувиллевой эквивалентности слоения на множестве $\bar{Q}^3_{\Omega_{k,k-s},b+\varepsilon}$ уровня $\Lambda > b+\varepsilon$ для столов $\Omega_{k,k-s}$ не зависит от s. Он совпадает с классом прямого произведения окружности на M^2 — сферу S^2 с k дырками, расслоенную на $k-1$ атом C_2 и k атомов A. Седловые атомы образуют граф-дерево без разветвлений, см. рис. 5.43.*

Доказательство. 1. Наличие у множества $\bar{Q}^3_{\Omega_{k,k-s},b+\varepsilon}$ структуры прямого произведения окружности на двумерное расслоенное M^2 следует из односвязности $\pi'(\bar{Q}^3_{k,b+\varepsilon}) \subset Oxy$ и тождественности всех перестановок на эллиптических дугах множества $\pi(\bar{Q}^3_{k,b+\varepsilon}) \subset \Omega_k$.

Указанное M^2 является связной компонентой π-прообраза произвольной $(0 < \lambda < b)$ эллиптической дуги или отрезка Ω^1 фокальной прямой $y = 0$, ограниченных ветвями гиперболы $\lambda = b + \varepsilon$. Множество M^2 расслоено на одномерные кривые постоянного уровня интеграла Λ.

Слой уровня $\Lambda = \lambda_0$ в π'-прообразе дуги опишем кодом, аналогичным коду для слоев на уровне $\Lambda = 0$. Вместо a_i и c_i будем, как и для областей x_i, b_i, y_i, писать символ со знаком, определяемым вектором: проекция π' множества $\bar{Q}^3_{\Omega_{k,k-s},b+\varepsilon}$ на лист a_i или c_i тоже имеет тип A_0 (т.е. ограничена двумя гиперболическими дугами). При этом, смена направления вектора в коде может происходить не только на дугах σ_i и ρ_i, но и на границе π'-проекции слоя $\Lambda = \lambda_0$, т.е. левой ветви λ_0^l и правой ветви λ_0^r гиперболы с параметром λ_0. В простейшем случае $k = 2$ на уровне $b < \lambda_0 < \lambda_1$ имеем коды

$$a_1^r \overset{\sigma}{—} b_1^r \overset{\rho}{—} c_1^r \overset{\lambda_0^r}{—} c_1^l \overset{\rho}{—} b_2^l \overset{\sigma}{—} a_1^l \overset{\lambda_0^l}{—} a_1^r, \qquad a_2^r \overset{\sigma}{—} b_2^r \overset{\rho}{—} c_2^r \overset{\lambda_0^r}{—} c_2^l \overset{\rho}{—} b_1^l \overset{\sigma}{—} a_2^l \overset{\lambda_0^l}{—} a_2^r.$$

3. Для всех биллиардов вида $\Omega_{2,2-i}$ при $i = 0, 1, 2$ множества $\bar{Q}^3_{\Omega_{2,2-i},\lambda_1}$ послойно гомеоморфны путем отождествления пар (x_i, v) точка-вектор при проекции π.

При каждом $i = 0, 1, 2$ множества $Q^3_{\Omega_{2,2-i},[b+\varepsilon,\lambda_1]} = \{H = h, b + \varepsilon \le \Lambda \le \lambda_1\}$ реализуют гомотопию (с параметром λ) от принадлежащих им слоев уровня $\Lambda = b + \varepsilon$ к одинаковому для трех столов слою уровня $\Lambda = \lambda_1$.

Гомотопией является стягивание связных компонент прообраза листа a_i в особое множество уровня λ_1. В прообразе отрезка $\Omega_1 \subset Ox$ это есть стягивание интервалов a_i или c_i граничной окружности седлового 2-атома в его особую точку, а для в прообразе всего стола — это стягивание колец регулярного граничного тора седлового 3-атома на гомологичную им особую окружность этого 3-атома.

Тем самым, π-прообраз листа $a_i \in \Omega_{2,2-i}$ в $Q^3_{b+\varepsilon,\lambda_1}$ имеет вид прямого произведения окружности на на треугольник. Особая точка 2-атома является вершиной треугольника, а две другие его вершины лежат на слое $\lambda = b + \varepsilon$. При этом гомотопия треугольника на отрезок указанного вида не меняет структуру слоения, т.е является послойным гомеоморфизмом. Если же лист a_i не входит в комплекс $\Omega_{2,2-i}$, то прообраз является произведенем окружности на отрезок, и проецируется на дугу склейки с параметром λ_1.

4. Перестройка вблизи уровня $\lambda = \lambda_1$ является атомом C_2 как перестройка двух торов в два через две критические окружности, имеющая необходимые симметрии. Проекция $\pi(\bar{Q}^3_{\lambda_1+\varepsilon})$ на стол $\Omega_{k,k-s}$ несвязна, и одна ее компонента состоит из части листа b_1 т.е. атом C_2 инцидентен максимальному атому A (двум атомам A, если обе компоненты состоят из частей области b_i). Это так же следует из результата, полученного в [87], для слоения Лиувилля топологического биллиарда, склеенного из двух областей A_0 по обеим гиперболическим границам.

5. Заметим, что проекция $\pi(\bar{Q}^3_{\Omega_{k-1,k-s-1},b+\varepsilon})$ на стол $\Omega_{k-1,k-s-1}$ и проекция $\pi(\bar{Q}^3_{\Omega_{k,k-s},\lambda_1+\varepsilon})$ на подходящий стол $\Omega_{k,k-s}$ устроена одинаково с точностью до непрерывного изменения набора λ_i (остающихся при этом попарно различными). Тем самым, по индукции имеем вид грубой молекулы. Так, грубая молекула слоения на множестве $\Lambda > b + \varepsilon$ для стола $\Omega_{k,k-s}$ не зависит от s. Предложение доказано. □

Допустимые базисы и матрицы склейки, вычисление меток. На минимальном и фокальном уровне выберем допустимые базисы так же, как для биллиарда в эллипсе (см. рис. 5.44). Матрица склейки на эллиптических ребрах имеют вид $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Отметим, что здесь мы фиксируем ориентацию изоэнергетической поверхности так чтобы в цикл λ_B цикл λ_A входил с противоположной ориентацией. Это означает, что так как цикл μ_A и λ_B по определению системы сонаправлены (отвечают траекториям, закручивающимся в одну сторону), что цикл $\mu_B = \lambda_A$ (то есть имеет ту же ориентацию, не согласованную с ориентацией λ_B).

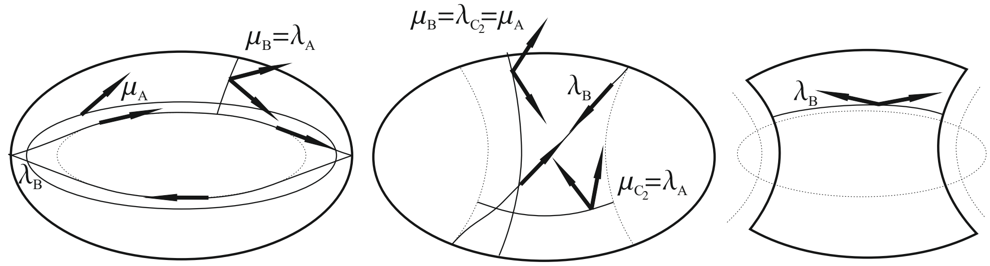


Рис. 5.44: Проекции на стол вида A_2 и A_0 циклов на граничных торах атомов.

Запишем матрицу склейки между фокальными атомами B и атомами C_2, отвечающими невыпуклым склейкам. Для этого изобразим допустимые базисы, как показано на рисунке 5.44. Циклы λ_{C_2} гомологичны циклам, проекции которых лежат на дуге интегральной гипербол, оснащенной касательными векторами скорости. Очевидно, что циклы μ_{C_2}, изображенные на рисунке, дополняют данные циклы λ до базиса на торах и при этом образуют 2-атом C_2, т.е. они связаны условие существования глобального сечения (см. [5]). Поэтому на ребрах между атомами B и C_2 матрицы склейки имеют вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Подчеркнем, что так как на торах, соответсвующих $\lambda < b$ ориентация циклов μ_B была противоположна ориентации циклов λ_B то для торов при $\lambda > b$ эти циклы уже сонаправлены. Это объясняет выбор знаков в соотношении $\mu_B = \lambda_{C_2}$.

Осталось отметить, что все λ-циклы седловых атомов, соответствующих невыпуклым склейкам λ_i, гомологичны и одинаково ориентированы друг другу и особому слою максимальных атомов A, но не гомологичны λ-циклу любого из атомов B, лежащих на уровне $\lambda = b$. Тем самым, указанные атомы C_2 образуют семью, а матрицы склейки между этими атомами имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. При этом очевидно, что циклы μ_{C_2} стягиваются в точку внутри полноторий A, т.е. они гомологичны циклам λ_A. В результате, на верхних торах матрицы склейки имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. После вычисления матриц склейки метки получаются прямым подсчетом по определению (см. [5]).

В случае удаления пары областей A_1 движение внутри эллипса A_2 переходит в движение по биллиарду A_0. Это сохраняет вид бифуркации – атом B на фокальном уровне, однако циклы λ_B изменятся (см. рис. 5.44). Матрицы склейки на всех ребрах, исходящих из этого атома примут вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Это повлечет за собой уменьшение метки $n = k$ в семье, состоящей из атомов C_2. $\square$

Приложение 2. Изоэнергетические многообразия.

5.7 Изоэнергетические поверхности плоских биллиардов

Докажем несколько элементарных фактов о топологическом типе изоэнергетических биллиардных поверхностей.

Предложение 5.7.1. *Изоэнергетическое многообразие Q^3 биллиарда в биллиардной области Ω, ограниченной двумя гладкими замкнутыми кривыми, гомеоморфно прямому произведению $S^1 \times S^2$.*

Доказательство. Рассмотрим естественную проекцию $h : Q^3 \to \Omega$ изоэнергетической 3-поверхности на биллиардную область.

Пусть плоская область Ω ограничена двумя гладкими кривыми l_1 и l_2. Очевидно, что между кривыми l_1 и l_2 существует регулярная гомотопия ϕ, следовательно, область между ними можно заполнить непересекающимися кривыми вида $\phi(x,t), t \in [0;1]$ – здесь $\phi(x,t)$ это точка кривой l_1 при $t = 0$ и кривой l_2 при $t = 1$. При $0 < t < 1$ точка $\phi(x,t)$ может быть оснащена целой окружностью векторов скорости, поэтому прообраз $h^{-1}(\phi(x,t))$, $t \in (0,1)$ в Q^3 гомеоморфен открытому цилиндру. Если точка $\phi(x,t)$ лежит на кривых l_1 и l_2, т.е. при $t = 0$ и $t = 1$ то, вследствие закона отражения, она может быть оснащена векторами скорости, множество которых в этой точке гомеоморфно отрезку. Поэтому прообраз любой кривой $\phi(x,t), x \in l, t \in [0;1]$, оснащенный векторами скорости, гомеоморфен цилиндру, у которого две граничные окружности заклеены в отрезки, т.е. двумерной сфере S^2. Так как кривые l_1 и l_2 гомеоморфны окружности S^1, то многообразие Q^3 будет гомеоморфно прямому произведению $S^1 \times S^2$. Предложение доказано. □

В статье Е.Гуткина [73] упомянут следующий факт — если плоская односвязная область Ω ограничена некоторой гладкой кривой, то изоэнергетическое многообразие Q^3 биллиардной системы, определённой на такой области гомеорморфно трёхмерной сфере S^3. Ниже мы доказываем этот факт, а также обобщаем его на случай неплоской односвязной области.

Предложение 5.7.2. *Изоэнергетическое многообразие Q^3 биллиарда в любой плоской односвязной области Ω, ограниченной гладкой или кусочно-гладкой кривой, углы излома которой составляют $\frac{\pi}{2}$, гомеоморфно сфере S^3.*

Доказательство. Докажем утверждение в случае, когда кривая γ, ограничивающая область Ω является гладкой. Рассмотрим естественную проекцию $h : Q^3 \to \Omega$. Разрежем многообразие Q^3 на два куска следующим образом. Рассмотрим гладкую связную несамопересекающуюся кривую l строго внутри области Ω. Очевидно, что такая кривая гомотопна кривой γ. Прообраз $h^{-1}(l)$ кривой l в 3-поверхности Q^3 гомеоморфен тору. Разрежем изоэнергетическое многообразие Q^3 по этому тору. Оно распадётся на два куска. Докажем, что каждый из них гомеоморфен полноторию.

"Внешний" кусок многообразия Q^3 образован прообразами точек, расположенными между кривыми l и γ. Напомним, что между кривыми l и γ существует регулярная гомотопия ϕ, следовательно, область между ними можно заполнить непересекающимися кривыми вида $\phi(x,t), x \in l, t \in [0;1]$. При $0 \leq t < 1$ точка $\phi(x,t)$ может быть оснащена целой окружностью векторов скорости, поэтому прообразом всех таких точек в изоэнергетическом многообразии Q^3 будет цилиндр. При $t = 1$, т.е. когда точка $\phi(x,t)$ лежит на границе области Ω она может быть оснащена только отрезком точек, вследствие закона отражения. Поэтому прообразом любой кривой $\phi(x,t), x \in l, t \in [0;1]$ будет диск. Таким образом, "внешний" кусок многообразия Q^3 гомеоморфен полноторию, образованному прямым произведением кривой l и прообраза одной из гомотопных друг другу кривых $\phi(x,t), x \in l, t \in [0;1]$. В качестве стягивающегося цикла может быть выбран прообраз точки некоторой фиксированной кривой $\phi(x,t), x \in l, t \in [0;1]$. На границе полнотория этот цикл будет соответствовать некоторой точке кривой l, оснащенной единичными векторами скорости. При этом сама кривая l, оснащенная в каждой точке некоторым вектором (например, вектором $(1,0)$), будет являться осью этого полнотория.

"Внутренний" кусок многообразия Q^3 образован прообразами точек, расположенными внутри кривой l. Его можно описать следующим образом — каждую точку области Ω, расположенную внутри кривой l можно оснастить окружностью точек. Так как область внутри l, очевидно, связна, то "внутренний" кусок многообразия Q^3 гомеоморфен прямому произведению диска (области внутри кривой l) на окружность единичных векторов скорости. При этом стягивающимся циклом является сама кривая l, будучи оснащенной в каждой точке вектором скорости $(1,0)$. Единичная окружность векторов, которым оснащена произвольная точка кривой l, очевидно, не может быть стянута по "внутреннему" куску многообразия Q^3.

Таким образом, склейка на граничном торе T^2 склеивает исчезающий цикл одного полнотория с осью другого полнотория. Результатом этой склейки, как хорошо известно, является многообразие, гомеоморфное трехмерной сфере S^3.

Пусть теперь кривая γ не гладкая, а имеет n углов $A_i = \frac{\pi}{2},\ i \in \{1..n\}$. Фиксируем некоторое достаточно малое $\varepsilon > 0$. Гладко аппроксимируем кусочно-гладкую кривую γ гладкой кривой

$\widetilde{\gamma}$ такой что, она совпадает с кривой γ всюду, кроме ε-окрестностей углов A_i кривой γ. Плоскую область, ограниченную кривой $\widetilde{\gamma}$ обозначим через $\widetilde{\Omega}$. Изоэнергетическая поверхность $\widetilde{Q}^3$ для биллиарда в области, ограниченной кривой $\widetilde{\gamma}$ гомеоморфна, как уже было доказано, S^3. Рассмотрим достаточно малую ε-окрестность угла A_i кривой γ. Граница этой ε окрестности – это кривая m_i, концы которой лежат на различных сторонах угла A_i. Кривая m_i лежит как в области Ω, так и в области $\widetilde{\Omega}$. Прообраз кривой m_i при отображении h в изоэнергетических многообразиях Q^3 и $\widetilde{Q}^3$ гомеоморфна сфере, а прообраз части области $\widetilde{\Omega}$, находящейся по ту же сторону от кривой m_i, что и угол A_i области Ω, гомеоморфен трехмерному диску.

Рассмотрим прообраз области Ω_{A_i} — части области Ω, ограниченной кривой m_i и содержащей угол A_i. Покажем, что и он также гомеоморфен трехмерному диску. Рассмотрим стягивание $f_{A_i}(m_i,t), t \in [0,1], f_{A_i}(m_i,0) = m_i$ кривой m_i в вершину угла A_i. Причем в любой момент времени $t < 1$ концы кривой $f_{A_i}(m_i,t)$ лежат на различных сторонах угла A_i. Тогда прообразы $h^{-1}(f_{A_i}(m_i,t))$ гомеоморфны сферам, стягивающимся в отрезок – прообраз вершины угла при отображении h. Таким образом, весь прообраз $h^{-1}(\Omega_{A_i})$ гомеоморфен диску.

Заменим в изоэнергетической поверхности $\widetilde{Q}^3$ все прообразы частей области $\widetilde{\Omega}$, каждая из которых находится по ту же сторону от кривой m_i, что и угол A_i области Ω на трехмерные диски $h^{-1}(\Omega_{A_i})$. С одной стороны, такая замена не меняет топологию многообразия – трехмерной сферы S^3. С другой стороны, в результате было получено изоэнергетическое многообразие Q^3 биллиарда в области Ω.

Предложение доказано. □

Замечание 56. Заметим, что точки кривой γ, будучи оснащены единичными векторами скорости, будут гомеоморфны кольцу, только если кривая γ является гладкой. Пусть кривая γ имеет точку излома, образуя угол равный $\frac{\pi}{2}$. Разобьём локально окрестность точки излома A на две подкривые γ_1 и γ_2. Будем считать, что кривая γ_1 расположена вертикально, а кривая γ_2 горизонтально. Оснастим каждую точку этих кривых векторами скорости. При этом кривую γ_1 оснастим векторами, направленными не левее касательной к кривой γ_1, а кривую γ_2 векторами, направленными не ниже касательной к кривой γ_2. Остальные вектора, которыми могут быть оснащены кривые γ_1 и γ_2, мы не принимаем во внимание вследствие закона отражения. В точке излома A происходит "двойное отражение", а именно, точка может быть оснащена векторами, направленными не левее касательной в точке A к кривой γ_1 и не ниже касательной к кривой γ_2. Таким образом, отрезок, лежащий в прообразе любой неугловой точки кривых γ_1 и γ_2 "складывается пополам". Однако, как легко понять, сам прообраз точек кривой γ гомотопически эквивалентен окружности, которая получается в результате стягивания любого отрезка в прообразе каждой точки.

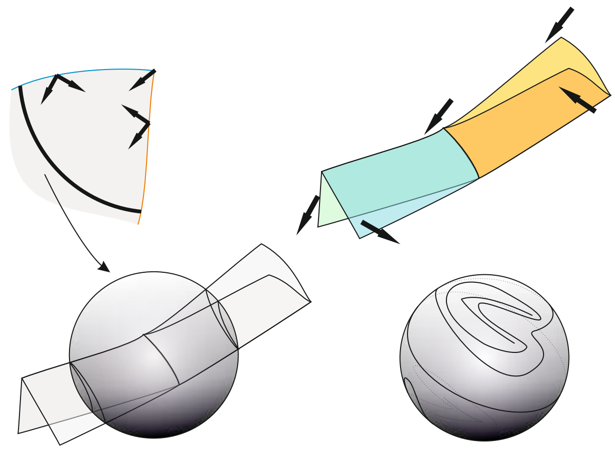


Рис. 5.45: Прообраз окрестности прямого угла в изоэнергетической 3-поверхности. на рисунках снизу показано слоение 2-сферы, лежащей в прообразе круговой дуги на рисунке выше.

5.8 Изоэнергетические поверхности биллиардов с коническими точками и биллиардных книжек

Рассмотрим динамическую систему биллиардной книжки. Пусть даны n плоских областей, ограниченных кусочно-гладкими кривыми с углами в точках излома равными $\frac{\pi}{2}$. Пусть все эти кривые имеют одинаковый сегмент – часть кривой между углами. Определим динамическую систему биллиардной книжки следующим образом. Занумеруем листы – плоские области — числами от 1 до n. Фиксируем перестановку $\sigma \in S_n$. Изометрично склеим листы вдоль общего сегмента, если их номера лежат в одном цикле перестановки σ. Такое ребро склейки назовем корешком книжки. Динамическую систему определим так – при попадании на ребро склейки материальна точка меняет номер биллиарда-листа по перестановке σ. Аналогично можно определить биллиардную книжку со многими корешками. При этом необходимо потребовать, что если два корешка имеют общую вершину, то приписанные им перестановки коммутируют. Вообще говоря, в результате всех отождествлений полученный комплекс не обязан быть связным. Ограничимся рассмотрением связных биллиардных книжек.

Предложение 5.8.1. *Рассмотрим n плоских областей Ω_i, $i \in \{1 .. n\}$, имеющих общий сегмент s. Склеим из них биллиардную книжку, приписав сегменту s циклическую перестановку $\sigma = (1\ 2\ ...\ n)$. Тогда изоэнергетическая поверхность полученной биллиардной книжки гомеоморфна трехмерной сфере S^3.*

Доказательство. Докажем утверждение по индукции. При $n = 1$ оно было доказано ранее (см. предложение 2). Пусть утверждение верно при $n \leq k$, докажем его при $n = k + 1$. Рассмотрим биллиардную книжку, склеенную по указанному выше правилу из k листов. В прообразе каждой внутренней точки сегмента s находится одномерный комплекс, получающийся отождествлением

k отрезков, соответствующих векторам, направленных внутрь областей Ω_i, вдоль граничных точек, соответствующих двум касательным к сегменту s векторам.

Отменим биллиардный закон, отождествляющий исходящие вектора скорости из листа с номером k и входящие в лист с номером 1. После отмены биллиардного закона отрезок, соответ-

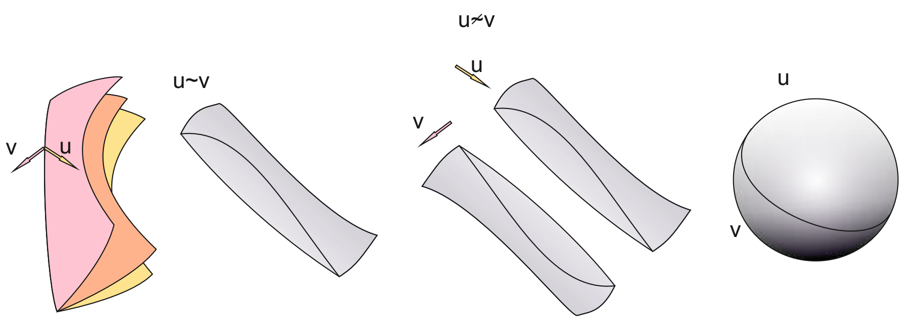


Рис. 5.46: Часть прообраза вертикального корешка: до отмены биллиардного закона гомеоморфна диску, после – двумерной сфере.

ствующий векторам, направленным внутрь области Ω_1, распадется на два отрезка (соответствующих векторам внутрь области Ω_1 и наружу области Ω_k), по-прежнему склеенных вдоль граничных точек. Концам отрезка s в прообразе соответствуют одномерные комплексы, склеенные из отрезков, направленных внутрь областей Ω_i и отождествленные уже вдоль одной граничной точки (так как касательные к сегменту s вектора должны быть отождествлены друг с другом по закону отражения в угле). После отмены биллиардного закона отрезок, соответствующий векторам, направленным внутрь области Ω_1 останется отрезком: два отрезка, соответствующие векторам направленным внутрь области Ω_1 и наружу области Ω_k склеены вдоль касательного вектора к сегменту s. В результате до отмены биллиардного закона векторам, направленным внутрь области Ω_1 соответствовал диск, а после – сфера (каждая внутренняя точка сегмента s соответствует окружности, которые склеиваются в отрезки, лежащие в прообразах граничных точек сегмента s). В результате получается что необходимо сделать разрез трехмерной сферы вдоль двумерного диска так чтобы граница оказалась двумерной сферой. Очевидно, что результатом такой операции будет трехмерный диск. В свою очередь путем аналогичной операции получим в разрезанной трехмерной поверхности биллиарда, соответствующего области Ω_{k+1} трехмерный диск. Изоэнергетическая поверхность биллиардной книжки на $k+1$ листе получается отождествлением граничных двумерных сфер трехмерных дисков, в результате чего опять получается трехмерная сфера.

$\square$

Предложение 5.8.2. *Рассмотрим следующую биллиардную книжку. Пусть n – произвольное натуральное число. Фиксируем односвязную биллиардную область Ω, граница которой содер-*

жит три последовательных сегмента, обозначенных через AB, AD, DC (см. рис. 5.47). Рассмотрим $2n$ экземпляров области Ω и определим биллиардную книжку, сопоставив сегменту AB перестановку $\sigma_1 = (1\ n+1)(2\ n+2)...(i\ n+i)...(n\ 2n)$, $i \in \{1..n\}$, сегменту AD перестановку $\sigma_2 = (1...n)(n+1...2n)$, сегменту DC перестановку $\sigma_3 = \sigma_1^{-1}$. Тогда изоэнергетическая поверхность такой биллиардной книжки гомеоморфна $S^1 \times S^2$.

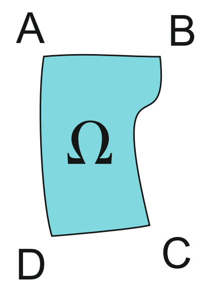


Рис. 5.47: Биллиардная область Ω, граница которой содержит три последовательных сегмента, обозначенных через AB, AD, DC.

Доказательство. Рассмотренную биллиардную книжку удобно представить как склейку двух книжек, определенных на n листах с циклическими перестановками на корешке AD, склеенных вдоль сегментов AB и DC. Отмена биллиардного закона на сегментах AB и DC этих книжек является разрезом двух трехмерных сфер (изоэнергетических поверхностей) по двум дискам. В результате разрезанные поверхности станут гомеоморфны $S^2 \times I$, где I – отрезок. Склейка двух таких многообразий по граничным сферам очевидно приводит к образованию декартового произведения $S^1 \times S^2$. □

Предложение 5.8.3. *Рассмотрим n плоских областей, имеющих одинаковые углы – пары сегментов s_1 и s_2, имеющих общую вершину. Склеим из них биллиардную книжку следующим образом. Сегменту s_1 припишем циклическую перестановку $\sigma = (1\ 2\ ...\ n)$, а сегменту s_2 — перестановку σ^k. Тогда изоэнергетическая поверхность такой биллиардной книжки гомеоморфна линзовому пространству $L(\frac{n}{d}, \frac{k}{d})$, где d — наибольший общий делитель чисел n и k.*

Доказательство. Воспользуемся следующей конструкцией линзового пространства. Рассмотрим $n-$угольную бипирамиду, т.е. объединение двух конусов над правильным $n-$угольником. Обозначим через $F_0,\ F_1, ..., F_{n-1}$ вершины $n-$угольника, через S_+, S_- — вершины конусов. Для каждого iсклеим грань $F_iS_+F_{i+1}$ с гранью $F_{i+k}S_-F_{i+k+1}$ (индексы берутся по модулю n и вершины склеиваются в том порядке, в котором они написаны). Получившееся пространство и есть линзовое пространство $L(n, k)$ (см. подробнее [32]).

Обозначим через A угол – общую точку сегментов s_1 и s_2.

Рассмотрим прообраз сегмента s_2. Покажем что отмена биллиардного закона на этом сегменте соответствует разрезу изоэнергетической поверхности по двумерному диску, т.е. что после разреза изоэнергетическая поверхность станет гомеоморфна трехмерному шару.

Для начала покажем, что в прообразе сегмента s_2 лежит двумерный диск. В каждой области Ω_i прообраз всех его точек, кроме точки, лежащей в угле A есть двумерный диск. В самом деле, в прообразе внутренних точек лежит отрезок l_i. Этот отрезок при приближении к углу A разбивается на два подотрезка, имеющих общую точку: один отрезок l_i^-соответствует векторам направленным внутрь области Ω_i относительно сегмента s_1, а другой l_i^+ — наружу. При этом в угле A необходимо отождествить отрезки l_i^+ и l_{i+1}^-, $i \in \{1, ..., n-1\}$, а также l_n^+ и l_1^-. В результате такой склейки границ двумерных дисков получается двумерный диск.

Отменим биллиардный закон на сегменте s_2. При этом каждый отрезок l_i, кроме тех что лежат в прообразе угла A, преобразуется в два отрезка, склеенных точкам соответствующим касательным векторам к сегменту s_2. Прообраз угла это одномерный комплекс получающийся склейкой отрезков вдоль их граничных точек, соответствующих касательным векторам к сегменту s_1. Приклеивая к таком комплексу диски в прообразах сегментов s_2 после отмены биллиардного закона получим двумерную сферу.

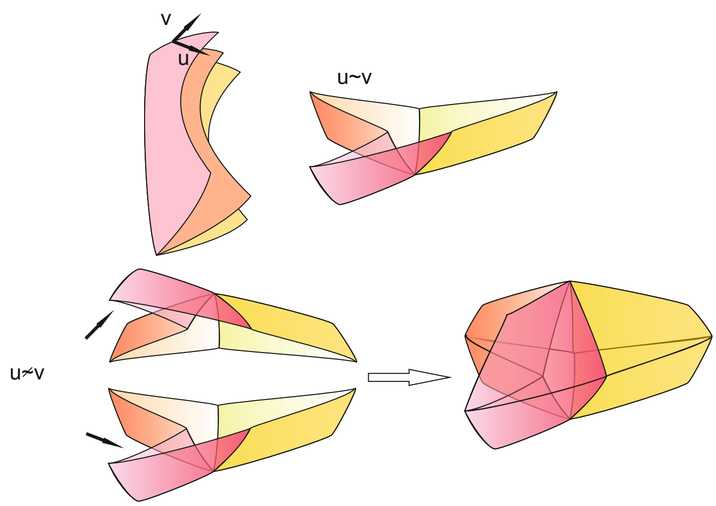


Рис. 5.48: Граничная сфера трехмерного диска, описывающую изоэнергетическую поверхность биллиарда после отмены биллиардного закона вдоль верхнего сегмента.

Таким образом, после отмены биллиардного закона на сегментах s_2 изоэнергетическая поверхность Q^3 представляет собой трехмерный диск, граничная сфера которого имеет структуру представленную на рисунке. Отметим, что на данной сфере можно ввести естественную структуру бипирамиды, грани которой соответствуют векторам скорости направленными либо наружу листа Ω_i (верхние без ограничения общности), либо внутрь листов Ω_i.

Для начала докажем утверждение в случае, когда числа n и k взаимно просты. Заметим, что определение биллиардного закона на ребре s_2 по перестановке σ^k склеивает вектора, направленные наружу листа Ω_i с векторами, направленными внутрь листа Ω_{i+k} (где индексы берутся по модулю n). Эта склейка на бипирамиде по определению является склейкой, задающей линзовое пространство $L(n,k)$.

Пусть теперь числа n и k не взаимно-просты. Обозначим через d наибольший общий делитель чисел n и k. Введем числа $t = \frac{n}{d}$ и $r = \frac{k}{d}$. Перестановка σ^k разлагается в объединение d циклов по t элементов в каждом. Значит, в комплексе биллиардной книжки сегменту s_2 будет соответствовать d корешков (так как мы отождествляем границы, если их номера содержатся в одном цикле приписанной перестановки).

□

5.9 Реализация связных сумм обобщенных линз.

Теорема 5.13. *Рассмотрим многообразие M являющееся связной суммой линзовых пространств $L(n_1,k_1)$, ... $L(n_m,k_m)$ и l прямых произведений $S^1 \times S^2$. Тогда алгоритмически строится биллиард, изоэнергетическая поверхность которого гомеоморфна многообразию M.*

Доказательство. Рассмотрим целые числа $N = \text{НОК}(n_1\ ..n_m)$ и $g_i = \frac{Nk_i}{n_i}$. Фиксируем односвязную биллиардную область Ω, граница которой содержит три последовательных сегмента, обозначенных через $AB,\ AD,\ DC$ (см. рис. 5.47).

Рассмотрим $N(m+2l)$ экземпляров области Ω и определим на выделенных сегментах следующие перестановки.

На сегменте AD перестановка $(1..N)(N+1..2N)..(N(m+2l-1)+1..N(m+2l))$,

на сегменте AB перестановка состоит из циклов двух типов: циклов $(N(i-1)+1..Ni)^{g_i},\ i \in \{1..m\}$ и транспозиций $(N(m+2p)+j\ N(m+2p+1)+j)$, $p \in \{0, l-1\},\ j \in \{1..N\}$,

на сегменте DC перестановка состоит из циклов $(i\ N+i\ ..N(m+2l-1)+i,)\ i \in \{1..N\}$.

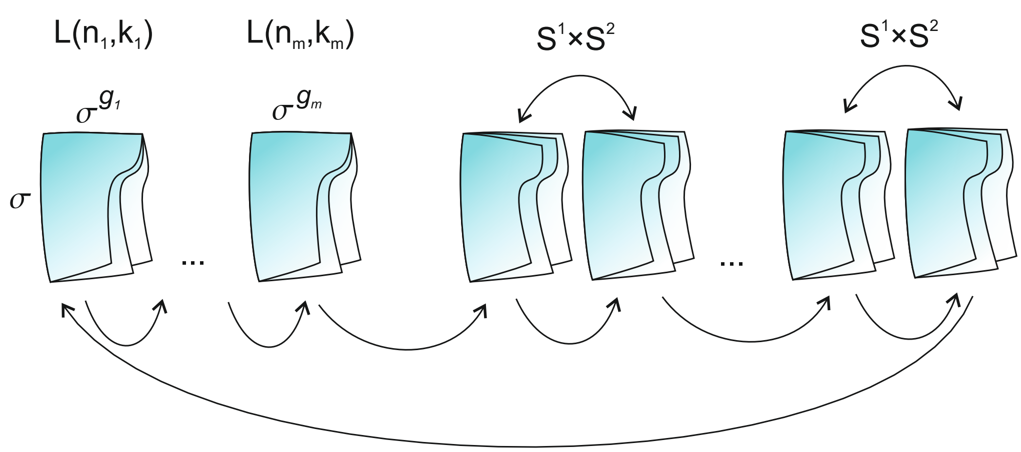


Рис. 5.49: Схематичное описание конструкции биллиарда изоэнергетическая поверхность которого представляет из себя связную сумму произвольных линз и $S^1 \times S^2$

Опишем полученную книжку другими словами. Рассмотрим $m+2l$ биллиардных книжек, склеенных из N листов вдоль сегментов AD, на котором задана циклическая перестановка $\sigma = (1..N)$. Далее на первых m экземплярах на корешках AB определим перестановки σ^{g_i}. В результате для первых m биллиардных книжек изоэнергетические поверхности согласно утверждению 5.8.3 гомеоморфны линзам $L(n_i, k_i.)$ Оставшиеся книжки разобьем на l пар. Склеим книжки каждой пары одинаковыми, состоящими из транспозиций, перестановками на корешках AB и DC. Каждая транспозиция состоит из номера листа одной книжки и соответствующего номера листа другой книжки. В результате, согласно утверждению 5.8.2 каждая из пар даст в изоэнергетической поверхности $S^1 \times S^2$.

Склеим теперь все книжки друг с другом. Зададим движение следующим образом – при попадании на сегмент DC книжки материальная точка не меняет листа книжки, по которому проходит, но циклически меняет номер книжки (см. рис. 5.49). Доказательство того, что полученное определение дает связную сумму, практически дословно повторяет доказательства утверждения 5.8.1.

□

Замечание 57. В доказательстве выше приведен только один пример интегрируемой биллиардной книжки, задающей искомое многообразие. Отметим здесь также, что от порядка склейки линз и связных сумм результат не зависит – то есть итоговая склейка в связную сумму может происходить в произвольном порядке. Это приведет к перенумерации и изменению перестановок.

Замечание 58. Как оказалось, для многих биллиардов, даже не обязательно интегрируемых, трехмерное изоэнергетическое многообразие Q^3 является многообразием Зейферта. Однако, полученная в теореме 5.13 изоэнергетическая 3-поверхность не является многообразием Зейферта, а является многообразием Вальдхаузена (граф-многообразием). Отметим, эти многообразия являются связной суммое линзовых пространств и $S^1 \times S^2$. В некоторых случаях такие связные суммы являются многообразиями Зейферта (например, в случае $RP^3 \# RP^3$). Однако в общем случае многообразие являющееся связной суммой линзовых пространств многообразием Зейферта не является и попадает в класс граф-многообразий (более подробно см. книгу С.В.Матвеева и А.Т.Фоменко [32] параграф 10, п. 10.6).

Заключение

В диссертации создано и развито новое научное направление: теория топологических биллиардов и её приложений к теории интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. В частности, построен новый класс интегрируемых биллиардов на клеточных комплексах, названных биллиардными книжками.

В диссертации получена полная классификация топологических биллиардов, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол. Далее разобраны важные специальные серии — выпуклые топологические биллиарды, ограниченные дугами софокусных парабол, а также некомпактные выпуклые биллиарды. Для каждого из этих биллиардов описана топология слоения Лиувилля в терминах грубых молекул (для некомпактных биллиардов) или же в терминах инвариантов Фоменко-Цишанга лиувиллевой эквивалентности. Отметим, что регулярными слоями слоения Лиувилля являются (в случае общего положения) замыкания решений (интегральных траекторий) интегрируемой системы.

Построен новый класс интегрируемых биллиардов — биллиардные книжки, склеенные из плоских элементарных биллиардов вдоль сегментов их границ. Каждому корешку книжки — одномерной клетке, приписана перестановка, которая задает закон отражения и определяет динамику системы вблизи корешка. Для важных случаев биллиардных книжек (имеющих, как выяснилось, приложения к гамильтоновой механике) вычислены инварианты Фоменко–Цишанга, кодирующие соответствующие слоения Лиувилля.

Как оказалось далее, некоторые возникающие слоения Лиувилля для таких биллиардов эквивалентны ряду ранее известных слоений Лиувилля, возникающих в следующих случаях интегрируемости: Эйлера (все слоения реализованы), Лагранжа (все слоения реализованы), Ковалевской (и её обобщений — случаев Ковалевской-Яхьи и Ковалевской на $so(4)$), Жуковского, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, Клебша, Соколова, Чаплыгина, Горячева, Дуллина-Матвеева, что означает лиувиллеву эквивалентность вышеперечисленных систем системам биллиарда при подходящем выборе зон энергии и биллиардных областей. Отметим, что в ряде этих случаев (Горячева-Чаплыгина-Сретенского, Ковалевской и её обобщений, Дуллина-Матвеева) классический дополнительный интеграл имеет степень 3 и 4, что позволяет говорить о понижении степени этих интегралов до одного и того же канонического квадратичного интеграла соответствующего биллиарда.

Далее оказалось, что интегрируемые биллиарды позволяют реализовывать классические интегрируемые геодезические потоки малых степеней (линейные и квадратичные) на двумерных ориентируемых римановых многообразиях (торе и сфере).

Получено существенное продвижение в доказательстве гипотезы А.Т.Фоменко о реализации слоений Лиувилля интегрируемых гамильновых систем интегрируемыми биллиардами. В частности, удалось реализовать биллиардами любой 3-атом — трехмерную бифуркацию торов Лиувилля (в случае общего положения замыканий решений интегрируемых систем). Удалось реализовать базу любого слоения Лиувилля (грубую молекулу), в том случае, когда особые слои не являются особыми слоями расслоения Зейферта. В доказательстве общей гипотезы о реализации биллиарда слоения Лиувилля произвольного инварианта Фоменко-Цишанга сделаны следующие шаги. Во-первых, найдено препятствие ("скрученный волчок Лагранжа"), который нельзя реализовать биллиардными книжками, ограниченными дугами софокусных квадрик. Однако, показано, что данное препятствие исчезает в классе магнитных биллиардов, ограниченных концентрическими окружностями.

В качестве новых направлений исследования интегрируемых биллиардов стоит отметить следующие.

- Изучение траекторной эквивалентности интегрируемых биллиардов системам динамики твердого тела. Для этого необходимо вычислить функцию вращения на ребрах молекул, вычисленных в настоящей диссертации. В случаях, где лиувиллева эквивалентность уже уставлена, сравнить полученные результаты с функциями вращения соответствующих задач динамики твердого тела.

- Завершить исследование полной гипотезы А.Т.Фоменко

- Исследовать вопрос о полной реализации биллиардами всех известных на сегодняшний день интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. А именно, построить для каждого инварианта Фоменко-Цишанга соответствующую биллиардную книжку, или другой интегрируемый биллиард (магнитный, с потенциалом, с проскальзыванием и т.д.).

Литература

[1] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики,* М.:Наука, 1989

[2] Ю. А. Архангельский, *Аналитическая динамика твердого тела.* М.: Наука, 1977.

[3] И. К. Бабенко, Н. Н. Нехорошев, *О комплексных структурах на двумерных торах, допускающих метрики и нетривиальным квадратичным интегралом* Математические заметки, т.58, № 5, с. 643–652

[4] Дж. Д. Биркгоф, *Динамические системы,* Издательский дом «Удмуртский университет», 1999

[5] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация,* Т.1,2, Ижевск НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999

[6] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко,*Геодезический поток эллипсоида траекторно эквивалентен интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела.* // Доклады РАН, 339:3(1994), 293-296.

[7] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко,*Траекторная классификация геодезических потоков на двумерных эллипсоидах. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела.* // Функциональный анализ и его приложения, 29:3(1995), 1-15.

[8] А.В.Болсинов, А.Т.Фоменко, *Геодезические потоки на сфере, порожденные системами Горячева-Чаплыгина и Ковалевской в динамике твердого тела.*// Матем. Заметки, 1994, т.56, №2, с.139–142.

[9] А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, В.В. Козлов, *Принцип Мопертюи и геодезические потоки на сфере, возникающие из интегрируемых случаев динамики твердого тела.*//УМН, 1995, т. 50, вып. 3, с.3–32.

[10] Г.В. Белозеров, *Топологическая классификация интегрируемых геодезических биллиардов на квадриках в трехмерном простpнастве*, Мат. Сб., в печати

[11] М. Бялый, А. Е. Миронов, *Полиномиальная неинтегрируемость магнитных бильярдов на сфере и гиперболической плоскости*, УМН, 74:2(446) (2019), 3–26

[12] В. Драгович, М. Раднович, *Интегрируемые биллиарды, квадрики и многомерные поризмы Понселе,* М.; Ижевск НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2010

[13] В. Драгович, М. Раднович *Топологические инварианты эллиптических биллиардов и геодезических потоков эллипсоидов в пространстве Минковского* // Фунд. и прикл. матем. 2015. **20**, №2. 51–64.

[14] Я. Е. Жуковский,*О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью.* В томе 1 «Собрания сочинений». Т. 1,2. Москва, 1949.

[15] В.В.Калашников (мл.), *Топологическая классификация квадратично интегрируемых геодезических потоков на двумерном торе*, // УМН, 50:1(1995), 201-202

[16] Е. О. Кантонистова, *Лиуивллева классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения,* Вестник Московского университета, Сер. 1, Матема. Мех., 2015, №5, с. 41-44

[17] Е. О. Кантонистова, *Топологическая классификая интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле,* Мат.Сборник 207:3 (216), с. 47–92

[18] Е. Е. Каргинова, *Биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского*, Матем. сб., 211:1 (2020), 3–31

[19] В. А. Кибкало, *Топология аналога случая интегрируемости Ковалевской на алгебре Ли* $so(4)$ *при нулевой постоянной площадей*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2016, № 3, 46–50; Moscow University Mathematics Bulletin, Moscow University Mechanics Bulletin, 71:3 (2016), 119–123

[20] В.А.Кибкало, *Топологическая классификация слоений Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли* $so(4)$// Матем. сборник, 2019

[21] В. В. Козлов, *Методы качественного анализа в динамике твердого тела.* Изд-во МГУ, 1980.

[22] В. В. Козлов, Д. В. Трещёв, *Генетическое введение в динамику систем с ударами*, М.: Изд-во МГУ, 1991

[23] В. В. Козлов, *Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем*, ДАН СССР, 249:6 (1979), 1299-1302

[24] В. В. Козлов, *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике*, Ижевск: изд-во УдГУ, 1995

[25] В. В. Козлов, *Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде*, Прикладная математика и механика, том 59 (1995).

[26] В. Н. Колокольцов, *Геоедзические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом* Известия АН СССР. Сер.матем. 1982,т. 46, №5, с. 994-1010

[27] Е. А. Кудрявцева, *Интегрируемые по Лиувиллю обобщённые биллиардные потоки и теоремы типа Понселе*, Фундамент. и прикл. матем., 20:3 (2015), 113–152; J. Math. Sci., 225:4 (2017), 611–638

[28] Е. А. Кудрявцева, И. М. Никонов, А. Т. Фоменко, *Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия,* Математический Сборник, 199:9(2008), 3–96

[29] Е. А. Кудрявцева, А. Т. Фоменко, *Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях,* Доклады РАН, серия: математика, 446:6(2012), 615–617

[30] В. С. Матвеев, *Квадратично интегрируемые геодезические потоки на торе и бутылке Клейна* Регулярная и хаотическая динамика, 1997, т.2, №1, с. 96–102

[31] В. С. Матвеев, *Особенности отображения момента и топологическое строение интегрируемых геодезических потоков. Диссертация на осискание ученой степени к.ф.-м.н.*, Москва, МГУ, мех-матем. ф-т, 1996

[32] С.В. Матвеев, А.Т.Фоменко, *Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии.* Изд-во МГУ, М., 1991 , 303 с.

[33] П. В. Морозов,*Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша*, Матем. сб., **193**:10 (2002), 113–138

[34] П. В. Морозов,*Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа*, Матем. сб., **195**:3 (2004), 69–114

[35] А. Ю. Москвин, “Топология слоения Лиувилля интегрируемого случая Дуллина–Матвеева на двумерной сфере”, Матем. сб., 199:3 (2008), 95–132; A. Yu. Moskvin, “Topology of the Liouville foliation on a 2-sphere in the Dullin-Matveev integrable case”, Sb. Math., 199:3 (2008), 411–448

[36] Т. З. Нгуен, Л. С. Полякова, Е. Н. Селиванова *Топологическая классификация интегрируемых геодезических потоков с дополнительным квадратичным или линейным по импульсам интегралом на двумерных ориентируемых римановых многообразиях*, Функциональный анализ, 27:3 (1993), 42-56

[37] С. С. Николаенко, "Топологическая классификация интегрируемого случая Горячева в динамике твердого тела", Матем. сб., 207:1 (2016), 123–150; S. S. Nikolaenko, "Topological classification of the Goryachev integrable case in rigid body dynamics", Sb. Math., 207:1 (2016), 113–139

[38] С. С. Николаенко, "Топологическая классификация систем Чаплыгина в динамике твердого тела в жидкости", Матем. сб., 205:2 (2014), 75–122; S. S. Nikolaenko, "A topological classification of the Chaplygin systems in the dynamics of a rigid body in a fluid", Sb. Math., 205:2 (2014), 224–268

[39] О. Е. Орел,*Функция вращения для интегрируемых задач, сводящихся к уравнениям Абеля. Траекторная классификация систем Горячева-Чаплыгина.* // Матем. сборник, 186:2(1995), 105-128.

[40] О. Е. Орел, Ш. Такахаши, *Траекторная классификация интегрируемых задач Лагранжа и Горячева-Чаплыгина методами компьютерного анализа.* // Матем. сборник, 187:1(1996), 95-112.

[41] А. А. Ошемков, *Топология изоэнергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твердого тела на* $SO(4)$. // УМН, 42:2(1990), 199-200.

[42] А. А. Ошемков, *Описание изоэнергетических поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.* // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Вып. 23, Москва, изд-во МГУ, 1988, 122-132.

[43] А. А. Ошемков, М. А. Тужилин, *Интегрируемые возмущения седловых особенностей ранга 0 интегрируемых гамильтоновых систем*, Матем. сб., 209:9 (2018), 102–127

[44] Пустовойтов С.Е., *Топологический анализ биллиарда в эллиптическом кольце в потенциальном поле* // Фундаментальная и прикладная математика, том 22, выпуск 6, стр. 201-225, 2019

[45] Пустовойтов С.Е., *Топологический анализ биллиарда, ограниченного софокусными квадриками, в потенциальном поле* // Матем. Сб., в печати

[46] Е. Н. Селиванова, *Классификация геодезических потоков лиувиллевых метрик на двумерном торе с точностью до топологической эквивалентности*, Матем. сб., 183:4 (1992), 69-86

[47] Н. С. Славина, *Классификация системы Ковалевской-Яхьи с точностью до лиувиллевой эквивалентности* Доклады РАН, серия: математика 452:3(2013), 252-255

[48] С. Л. Табачников, *Геометрия и биллиарды,* М.-Ижевск:НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2011

[49] Д. С. Тимонина, “Лиувиллева классификация интегрируемых геодезических потоков на торе вращения в потенциальном поле”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2017, № 3, 35–43; Moscow University Mathematics Bulletin, Moscow University Mechanics Bulletin, 72:3 (2017), 121–128

[50] П. Й. Топалов, *Вычисление тонкого инварианта Фоменко-Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела.* // Матем. сборник, 187:3(1996), 143-160.

[51] М. А. Тужилин, *Особенности интегрируемых гамильтоновых систем с одинаковым слоением на границе. Бесконечная серия*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2016, 5, 14–20

[52] В. В. Фокичева, *Описание особенностей системы “биллиард в эллипсе”,* Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., М.: Издательство Московского университета, №5(2012), 31–34

[53] В. В. Фокичева, *Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами,* Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех., 2014, №4, 18—27; англ. пер.: V. V. Fokicheva, "Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas Moscow Univ. Math. Bull, 69:4 (2014), 148-158.

[54] В. В. Фокичева, *Классификация биллиардных движений в областях, ограниченных софокусными параболами,* Матем. сб., 205:8 (2014), 139-160; англ. пер.: V. V. Fokicheva, "Classification of billiard motions in domains bounded by confocal parabolas Sb. Math., 205:8 (2014), 1201-1221.

[55] В. В. Фокичева, *Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик*, Матем. сб., 206:10 (2015), 127-176

[56] В. В. Фокичева, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые биллиарды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твёрдого тела*, ДАН,465:2(2015), 1-4

[57] В. В. Фокичева, *Топологическая классификация интегрируемых биллиардов*, диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 2016, 129 с.

[58] А. Т. Фоменко, *Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем*, Доклады АН СССР, 287:5(1986), с. 1071–1075

[59] А. Т. Фоменко, *Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости* Изв. АН СССР. Серия матем. 50:6 (1986), 1276–1307

[60] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, *О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем,* Изв. АН СССР 52:2(1988), 378–407

[61] А. Т. Фоменко, *Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем,* Успехи матем. наук, **44** №1(265), 1989, 145–173

[62] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, *Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы* Изв. АН СССР, 54:3(1990), 546–575

[63] М. П. Харламов, *Топологический анализ интегрируемых задач в динамике твердого тела.* Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1988.

[64] М. П. Харламов, *Лекции по динамике твердого тела.* Л.: Изд-во НГУ, 1965.

[65] И.С. Харчева, *Изоэнергетические многообразия бильярдных книжек.* Вестн. Московского Университета, Серия 1, Матем., механика. В печати

[66] M. Bialy, A. E. Mironov, *Algebraic Birkhoff conjecture for billiards on Sphere and Hyperbolic plane*, Journal of Geometry and Physics, 115 (2017), 150–156

[67] M. Bialy, A. E. Mironov, *A survey on polynomial in momenta integrals for billiard ploblems*, Philosophical Transactions of the royal society A. Math., phys. and engineering sciences, 376:2131 (2018), 20170418

[68] Bolotin,S.V. Integrable Birkhoff billiards. Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 1990, no. 2, 33–36

[69] A. V. Bolsinov, *Methods of calculation of the Fomenko-Zieschang invariant.* // In: Advances in Soviet Mathematics, v. 6, AMS, 147-183.

[70] V. Dragovic, M. Radnovic, *Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards*, Regul. Chaotic Dyn., Математический ин-т им.В.А.Стеклова РАН, 2009, 14, 4-5, 479–494

[71] Gavrilov, L. Bifurcations of the Invariant Manifolds in the Generalised Henon-Heils System. Physical, 1989, D34, 223-239

[72] Glutsyuk A. On polynomially integrable Birkhoff billiards on surfaces of constant curvature //arXiv:1706.04030

[73] Gutkin E.,*Billiard dynamics: a survey with the emphasis on open problems* // Regul. and Chaotic Dyn., **8**:1(2003), 1–13.

[74] A. T. Fomenko, A. Yu. Konyaev, *New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems,* Topology and its Applications, 159(2012), 1964–1975

[75] A. T. Fomenko, A. Yu. Konyaev, *Algebra and Geometry Through Hamiltonian Systems*, Continuous and Distributed Systems. Theory and Applications Solid Mechanics and Its Applications, 211(2014), 3–21

[76] V. Lazutkin, *KAM theory and semiclassical approximations to eigenfunctions,* Springer-Verlag. Berlin, 1993

[77] Liouville J. Note sur l'integration des equations differentiellcs de la dynamique, presentee an bureau des longitudes le 29 juin 1853. // Journal de Mathematiques pures et appliquees, 1855, v. 20, pp. 137–138.

[78] Nguen Tien Zung, *Decomposition of nondegenerate singularities if integrable Hamiltonian systems*// Letters in Mathematical Physics. 1995, V. 33, pp. 187–193

[79] A. A. Oshemkov *Invariants for the Main Integrable Cases of the Rigid Body Motion Equations.* // Advances in Soviet Mathematics, AMS, v. 6, 1991, 67-146.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

[80] V. V. Fokicheva, A. T. Fomenko, *Billiard systems as the models for the rigid body dynamics*, Studies in Systems, Decision and Control, Advances in Dynamical Systems and Control, 69, eds. V. A. Sadovnichiy, M. Z. Zgurovsky, Springer International Publishing, 2016, 13–32

[81] В. Ведюшкина (Фокичева), А. Иванов, А. Тужилин, А. Фоменко, *Компьютерные модели в геометрии и динамике*, Интеллектуальные системы. Теория и приложения, 21:1 (2017), 164–191

[82] В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, *Интегрируемые топологические биллиарды и эквивалентные динамические системы*, Известия РАН. Серия математическая, 81:4(2017), 20–67.

[83] В.В.Ведюшкина, *Слоение Лиувилля невыпуклых топологических биллиардов*, Доклады Академии наук, 478:1(2018), 7–11.

[84] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, И. С. Харчева, *Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими биллиардами*, Докл. РАН, 479:6 (2018), 607—610

[85] В. В. Ведюшкина, *Инварианты Фоменко–Цишанга топологических бильярдов, ограниченных софокусными параболами*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2018, 4, 22–28

[86] В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева, *Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем*, Матем. сб., 209:12 (2018), 17–56

[87] В. В. Ведюшкина, *Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических биллиардов*, Матем. сб., 210:3 (2019), 17–74

[88] А. Т. Фоменко, В. В. Ведюшкина, *Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2019, 3, 15–25

[89] A. T. Fomenko and V. V. Vedyushkina, *Singularities of integrable Liouville systems, reduction of integrals to lower degree and topological billiards: recent results*. Theoretical and Applied Mechanics.Publisher: Serbian Society of Mechanics and Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts, Beograd. 2019. Issue 46:1, pp.47–63

[90] А. Т. Фоменко, В. В. Ведюшкина, *Понижение степени интегралов гамильтоновых систем с помощью биллиардов*, ДАН, 2019, 486:2, 15–19.

[91] В. В. Ведюшкина (Фокичева), А. Т. Фоменко, *Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические биллиарды*, Изв. РАН. Сер. матем., 83:6 (2019), 63–103

[92] А. Т. Фоменко, В. В. Ведюшкина, *Топологические препятствия к реализуемости биллиардами интегрируемых гамильтоновых систем*, ДАН, 2019, 488:5, 103–107

[93] A. T. Fomenko and V. V. Vedyushkina, *Implementation of integrable systems by topological, geodesic billiards with potential and magnetic field*, Russian Journal of mathematical physics, 2019, 26:3, 320–333

[94] В. В. Ведюшкина, *Слоение Лиувилля биллиардной книжки, моделирующей случай Горячева-Чаплыгина*, Вестн. МГУ, 2020:1, 64–68.

[95] В. В. Ведюшкина, *Интегрируемые биллиарды реализуют торические слоения на линзовых пространствах и 3-торе*. Математический сборник, 211:2 (2020), 3–30.

[96] A. T. Fomenko, V.V.Vedyushkina, *Topological billiards, conservation laws and classification of trajectories.* – Functional Analysis and Geometry: Selim Grigorievich Krein Centennial. Edited by Peter Kuchment and Evgeny Semenov. American Mathematical Society. Series: Contemporary Mathematics. Volume 733; 2019; pp.129-148

Тезисы докладов

[97] Ведюшкина В.В., *Инварианты Фоменко-Цишанга невыпуклых топологических биллиардов*, материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна", Воронеж: изд.-полигр. центр "Научная книга", 2018, с. 169–171.

[98] Vedyushkina Victoria, *Simulation of any nondegenerate integrable system of general form with two degrees of freedom by the integrable topological billiard*, Book of Abstracts of the XX Geometrical Seminar, University of Belgrade, Serbia, 2018, p. 118.

[99] Vediushkina Victoria, *The Liouville foliation of nonconvex topological billiards bounded by arcs of confocal conics*, The Seventh International Conference "Geometry, Dynamics, Integrable Systems - GDIS 2018": Book of Abstracts, Publishing Center "Institute of Computer Science" Moscow-Izhevsk, 2018, pp. 105–107.

[100] Vediushkina Victoria, *The Fomenko-Zieshang invariants of the nonconvex topological billiards bounded by arcs of confocal conics*, Abstracts of the International Conference on Topology and its Applications, University of Patras, Greece, 2018, pp. 210–213.

[101] Vedyushkina V., *The topology of the Liouville foliation of the isoenergy surface of the simple billiard book*, Book of Abstracts of the International Conference Integrable Systems and Nonlinear Dynamics, 2018, pp. 86-88

[102] Vedyushkina V.V., *The non-trivial Liouville foliation of a three-dimensional torus*, Abstarcts, International Conference on Partial Differential Equations and Applications in Memory of Professor B.Yu. Sternin, RUDN University Moscow, Russia, 2018, pp. 76–77.

[103] Ведюшкина В.В., *Интегрируемые биллиарды и торические слоения на линзовых пространствах и 3-торев*, материалы международной конференции международной молодежной научной школы «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы», Воронеж: изд.-полигр. центр "Научная книга", 2018, с. 66–67.

[104] Vedyushkina Victoria V., *Classification of the Liouville foliations for integrable topological billiards*, International Conference on Finite Dimensional Integrable systems in Geometry and Mathematical Physics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China, 2019, pp. 33–35.

[105] Ведюшкина В.В., *Моделирование слоений интегрируемых систем биллиардами на клеточных комплексах*, материалы международной конференции “Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна–2020”, Воронеж: изд.-полигр. центр “Научная книга”, 2020, с. 98–101.