

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*

ТУЖИЛИН МИХАИЛ АЛЕКСЕЕВИЧ

ИНВАРИАНТЫ 3-МЕРНЫХ И 4-МЕРНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ  
ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

01.01.04 геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:  
академик РАН А.Т.Фоменко  
д.ф.-м.н., профессор А.А.Ошемков

Москва – 2018

# Оглавление

Введение	4
<b>1 Основные определения.</b>	<b>26</b>
1.1 Интегрируемые гамильтоновы системы.	26
1.1.1 Понятие интегрируемой гамильтоновой системы.	26
1.1.2 Теорема Лиувилля.	26
1.1.3 Понятие эквивалентности слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем.	27
1.1.4 Отображение момента и бифуркационная диаграмма интегрируемой гамильтоновой системы.	28
1.2 Инварианты интегрируемых гамильтоновых систем с 1-ой степенью свободы.	28
1.2.1 Понятие 2-атома.	28
1.2.2 Понятие $f$ -графа.	29
1.2.3 Понятие молекулы.	30
1.3 Инварианты интегрируемых гамильтоновых систем с 2-мя степенями свободы.	32
1.3.1 3-атом.	32
1.3.2 Расслоение Зейферта и 2-атомы со звездочками.	32
1.3.3 Круговая молекула.	33
1.3.4 Метки круговой молекулы.	34
1.4 Инварианты интегрируемых гамильтоновых систем с $n$ степенями свободы.	35
1.4.1 Теорема Элиассона.	35
1.4.2 Типы особенностей в двумерном и четырехмерном случаях.	36
1.4.3 Представление $2n$ -мерных особенностей в виде почти-прямых произведений 2-атомов по Зунгу.	37
<b>2 Круговые меченые молекулы почти прямых произведений <math>(V_1 \times V_2)/G</math>.</b>	<b>39</b>
2.1 Атомы круговой молекулы, соответствующей 4-особенности $(V_1 \times V_2)/G$ .	39
2.1.1 Общий вид допустимых атомов для компоненты круговой молекулы, соответствующего типа.	39
2.1.2 Классификация допустимых атомов для круговых молекул особенностей типа седло-седло сложности 2.	41
2.2 Метки круговой молекулы, соответствующей 4-особенности $(V_1 \times V_2)/G$ .	43
2.2.1 Метки $r$ .	43
2.2.2 Матрица склейки торов в случае циклической группы.	47
2.3 Построение почти прямого произведения по симметричной круговой меченой молекуле.	49

2.3.1	Присоединение 2-атомов к себе. . . . .	49
2.3.2	Симметричная круговая меченая молекула с 2-атомами без звездочек. . .	50
2.3.3	Симметричная круговая меченая молекула с 2-атомами со звездочками. . .	51
<b>3</b>	<b>Почти прямые произведения <math>(V_1 \times V_2)/G</math> с одинаковыми круговыми мечеными молекулами.</b>	<b>54</b>
3.1	Пример А. Грабежного. . . . .	54
3.2	Бесконечная серия почти прямых произведений $(C_1^n \times C_1^n)/\mathbb{Z}_n$ с одинаковой круговой молекулой, но разными метками. . . . .	56
3.3	Бесконечная серия пар: почти прямые произведения $(A_{2n} \times A'_{2n})/\mathbb{Z}_{2n}$ и прямые произведения $A_{2n} \times A_{2n}$ — с одинаковыми круговыми мечеными молекулами. . .	57
<b>4</b>	<b>Расщепляемость почти прямых произведений <math>(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G</math>.</b>	<b>60</b>
4.1	Два определения расщепляемости/неустойчивости. . . . .	60
4.1.1	Определение расщепляемости в общем смысле. . . . .	60
4.1.2	Определение покомпонентной расщепляемости. . . . .	61
4.2	Расщепление почти прямых произведений $(V_1 \times V_2)/G$ сложности два. . . . .	62
4.2.1	Необходимые условия покомпонентной расщепляемости . . . . .	62
4.2.2	Классификация расщепленных особенностей типа седло-седло малой сложности. . . . .	66
4.2.3	Круговая молекула 4-особенности сложности два и расщепляемость этой 4-особенности. . . . .	70
4.3	Устойчивость почти прямых произведений $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$ . . . . .	73
4.3.1	Критерий устойчивости седловых особенностей. . . . .	73
4.3.2	Другое доказательство основной теоремы о расщепляемости почти прямых произведений $(V_1 \times V_2)/G$ сложности два. . . . .	74
<b>5</b>	<b>Приложение.</b>	<b>85</b>
5.1	Невырожденные особые точки ранга нуль системы волчка Лагранжа с помощью бигамильтонова подхода. . . . .	85
5.1.1	Волчок Лагранжа как система на $e(3)^*$ . . . . .	85
5.1.2	Согласованные скобки Пуассона. . . . .	85
5.1.3	Классификация особенностей отображения момента для волчка Лагранжа	88
<b>6</b>	<b>Заключение.</b>	<b>90</b>
6.1	Расщепление особенностей в различных системах. . . . .	90
	<b>Литература</b>	<b>92</b>

# Введение

## Актуальность темы

Диссертация посвящена изучению топологической структуры слоений Лиувилля в инвариантных окрестностях особых точек типа седло-седло. Большинство результатов, полученных в диссертации, описывают связи между слоением Лиувилля внутри и на границе этих окрестностей. Эта задача аналогична одному из важных вопросов теории бордизмов — описания нулевого класса бордизмов, то есть, класса таких многообразий, которые являются границами многообразий, на единицу большей размерности. Этот вопрос можно переформулировать другим способом: как связаны многообразия размерности  $n + 1$  с краем с их границами (многообразиями размерности  $n$ ) или какими свойствами будут обладать многообразия размерности  $n + 1$  с краем, если известны параметры их границы. В данной диссертации изучается класс расслоенных многообразий с особенностями с одинаковой (по отношению к послойной эквивалентности) границей.

В теории интегрируемых гамильтоновых систем поведение системы почти везде устроено достаточно просто: траектории являются обмотками торов Лиувилля (торов в два раза меньшей размерности по отношению к фазовому пространству). Интерес представляют особые слои (соответствующие бифуркациям торов Лиувилля), их окрестности и поведение слоения на этих окрестностях. В случае четырехмерного симплектического фазового пространства (интегрируемой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы) А. Т. Фоменко была выдвинута гипотеза: слоение инвариантной окрестности невырожденного особого слоя с точками ранга нуль полностью определяется (с точностью до послойной эквивалентности, называемой лиувиллевой эквивалентностью) слоением на границе этой окрестности. Гипотеза А. Т. Фоменко выполняется для случаев, когда особые точки имеют тип фокус-фокус, центр-центр или центр-седло, а также в случае седло-седло, если особый слой содержит одну или две точки ранга нуль.

В случае, когда прообраз особого значения состоит из более чем двух точек и имеет тип седло-седло, в работе [7] был построен контрпример: были приведены три попарно неэквивалентные четырехмерные особенности с одинаковыми слоениями Лиувилля на их границах. Таким образом, изучение особенностей седлового типа представляет наибольший интерес и поэтому именно этот случай рассматривается в данной диссертации. В данной работе приводятся две бесконечные серии пар примеров неэквивалентных четырехмерных особенностей с одинаковыми (во второй серии) и локально одинаковыми (в первой) слоениями Лиувилля на их границах.

Изучение топологической структуры седловых особенностей интегрируемых гамильтоновых систем ведется довольно давно, приведем краткий обзор наиболее важных результатов для данной диссертации по этой тематике. Л. М. Лерман и Я. Л. Уманский [2] построили классификацию особенностей типа седло-седло интегрируемых гамильтоновых систем сложности один.

Используя язык теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем (см. работы А. Т. Фоменко [11]–[16], а также книгу [5]), А. В. Болсинов [28] построил круговые молекулы для особенностей типа седло-седло сложности 1, а также в случае сложности 2 получил полный список, состоящий из 39 попарно неэквивалентных особенностей типа седло-седло. Далее В. С. Матвеев [22] построил меченые круговые молекулы (инварианты Фоменко–Цишанга лиувиллевой эквивалентности, соответствующих слоению границы) для всех этих 39 особенностей, а В. В. Корнеев [23] получил их представление в виде почти прямых произведений. Определение меченых круговых молекул можно найти в работах [17]–[21] (см. также книгу [5]). Общий подход к классификации многомерных седловых особенностей ранга 0 был предложен в работе А. А. Ошемкова [4] (см. также [3], [27]). В работе [6] были предприняты попытки классифицировать устойчивые особенности типа седло-седло.

Данная диссертационная работа посвящена изучению слоений Лиувилля для особенностей седлового типа, в частности особенностей типа седло-седло. Главный интерес представляет вопрос о связи слоения на границе этой особенности (меченой круговой молекулы) со слоением в самой окрестности. В случае особенности типа седло-седло удобно использовать представление 4-мерной особенности в виде почти прямого произведения 2-атомов (теорема Н. Т. Зунга [10]). Это представление является полным инвариантом слоения в смысле лиувиллевой эквивалентности. В первом разделе и втором разделах второй главы настоящей работы описывается структура круговой меченой молекулы для почти прямых произведений атомов  $(V_1 \times V_2)/G$  и вычисляются матрицы склейки и все метки, соответствующие ребрам круговой молекулы, для случая, когда группа  $G$  является циклической. В случае нециклической группы  $G$  при ее ограничении на граничный тор  $T$ , соответствующий ребру круговой молекулы, доказываем, что стабилизатор тора  $T$  раскладывается в сумму примарных циклических групп, для которых можно применять метод вычисления матрицы склейки и соответственно меток согласно случаю циклической группы  $G$ . В первом разделе второй главы диссертации также приводится метод определения, является ли данная круговая молекула круговой молекулой особенности седло-седло для фиксированной сложности, в случае, если известен полный список атомов, участвующих в почти прямых произведениях этих особенностей. Каждый такой атом отвечает различному типу “компоненты” круговой молекулы. Идея данного метода заключается в классификации “допустимых” атомов для каждой компоненты фиксированного типа. В данной работе также приводится классификация “допустимых” атомов для круговых молекул особенностей типа седло-седло сложности два. В третьем разделе второй главы диссертации приводится способ построения почти прямых произведений по круговым меченым молекулам симметричного вида. Для построения атомов в произведениях используется метод “присоединения” атомов. Также этот метод используется в третьей главе настоящей работы для построения бесконечных серий пар различных почти прямых произведений с лиувиллево эквивалентными слоениями на их границах. В четвертой главе диссертации классифицируются расщепляемые и нерасщепляемые особенности типа седло-седло сложности два и доказываем критерий покомпонентной устойчивости для седловых особенностей любой конечной размерности.

## Цель диссертации

Для 4-мерных особенностей типа почти прямого произведения  $(V_1 \times V_2)/G$

1. описать слоение их границ в терминах 3-атомов и найти матрицу склейки этих 3-атомов по граничным двумерным торами в случае циклической группы  $G = \mathbb{Z}_n$ ,

2. описать метод построения почти прямого произведения по круговой меченой молекуле симметричного вида,
3. привести примеры неэквивалентных особенностей с одинаковой круговой (меченой) молекулой,
4. исследовать 4-мерные особенности сложности два на устойчивость (нерасщепляемость).

## Методы исследования

В работе используется теория топологического анализа интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, построенная А. Т. Фоменко, Х. Цишангом, А. В. Болсиновым, А. А. Ошемковым и другими. Активно применяются методы топологии  $2n$ -мерных особенностей интегрируемых гамильтоновых систем, предложенные Н. Т. Зунгом.

## Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

Для 4-мерных особенностей типа почти прямого произведения  $(V_1 \times V_2)/G$

1. классифицированы все допустимые 3-атомы, соответствующие  $V_1$  и  $V_2$ , для 4-мерных особенностей сложности два и найдена матрица склейки этих 3-атомов по граничным двумерным торами в случае группы  $G = \mathbb{Z}_n$  (Теоремы 2.4 и 2.6),
2. предложен метод построения почти прямого произведения по круговой меченой молекуле для четырех различных типов круговых меченых молекул симметричного вида (Утверждения 2.3.1 – 2.3.3 и следствие 2.3.1),
3. приведены две бесконечные серии пар различных особенностей с одинаковой круговой (в первой серии), меченой круговой (во второй серии) молекулой (Теоремы 3.1 и 3.2),
4. для каждой 4-мерной особенности сложности два определено, устойчива она или нет (Теорема 4.2).

## Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер.

Полученные результаты могут быть использованы для установления изоморфизмов лиувилевых слоений различных интегрируемых систем, в том числе для моделирования сложных эффектов поведения решений для сложных и менее наглядных систем, к которым относятся, например, классические случаи динамики твердого тела.

Полученные результаты могут быть использованы для упрощения различных систем посредством построения расщепления соответствующих особенностей и сведения задачи к расщеплению.

## Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на следующих всероссийских и международных научных конференциях:

XXI международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов” (Москва, МГУ, 2014, 7 - 11 апреля);

Международная конференция “Воронежская зимняя математическая школа им. Крейна – 2014” (Воронеж, 2014);

XXII международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов” (Москва, МГУ, 2015, 13 - 17 апреля);

3-rd Conference on “Finite Dimensional Integrable Systems in Geometry and Mathematical Physics” (FDIS2015, Bedlewo, Poland, 2015, July 12 - 17);

3rd Workshop “Analysis, Geometry and Probability” (3WAGP, Ulm, Germany, 2015, September 28 - October 2);

XXIII международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов” (Москва, МГУ, 2016, 11 - 15 апреля);

International Topological Conference “Alexandroff Readings” Lomonosov Moscow State University (Moscow, 2016, May 23 - 25);

XIX GEOMETRICAL SEMINAR (Zlatibor, Serbia, 2016, August 28 - September 4);

International workshop “Probability, analysis and geometry” (Moscow, 2016, September 26 - October 1);

XXIV международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов” (Москва, 2017, МГУ, 10 - 14 апреля);

“Finite Dimensional Integrable Systems in Geometry and Mathematical Physics” (FDIS2017, Barcelona, Spain, 2017, July 3 - 7);

XXV международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов” (Москва, МГУ, 2018, 9 - 13 апреля);

International conference “Integrable systems and nonlinear dynamics” (Yaroslavl, 2018, October 1 - 5).

Результаты диссертации докладывались на заседании семинара “Динамические системы и дифференциальные уравнения” под рук. проф. А.А. Давыдова и проф. А.М. Степина (2017 г.), “Узлы и теория представлений” под рук. проф. В.О. Мантурова, доц. Д.П. Ильютко, доц. И.М. Никонова и асс. Д.А. Федосеева (2018 г.), а также неоднократно докладывались и обсуждались на заседаниях семинара “Современные геометрические методы” под руководством акад. А.Т. Фоменко, проф. А.С. Мищенко, проф. А.В. Болсинова, проф. А.А. Ошемкова, проф. Е.А. Кудрявцевой, доц. И.М. Никонова, доц. А.Ю. Коняева, асс. А.М. Изосимова (2013 – 2018 гг.).

## Публикации

Основные результаты диссертации представлены в четырех работах в журналах из списка ВАК, список работ приведен в конце диссертации.

## Структура и объём

Диссертация состоит из введения, трех глав основной части, приложения и заключения. Текст диссертации изложен на 94 страницах. Список литературы содержит 42 наименования.

## Содержание работы

Во **введении** формулируется цель работы, кратко излагаются её результаты и содержание, а также освещается место данных исследований в современной теории интегрируемых систем.

В **первой главе** приводятся основные определения и теоремы, используемые в данной диссертации.

В **разделе 1.1** приводятся основные сведения теории интегрируемых гамильтоновых систем. Вводится понятие эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем, по отношению к которому рассматриваются все слоения на соответствующих поверхностях. Вводится понятие эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем, по отношению к которому рассматриваются все слоения на соответствующих поверхностях.

**Определение.** Слоением Лиувилля, отвечающим интегрируемой гамильтоновой системе на симплектическом многообразии  $(M^{2n}, \omega)$  с интегралами  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , называется разбиение  $M^{2n}$  на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов  $f_1, f_2, \dots, f_n$ .

Слоение Лиувилля можно также рассматривать не на всем фазовом пространстве  $M^{2n}$ , а на любом его инвариантном подмножестве (т. е. таком, которое вместе с каждой точкой содержит весь ее слой), например, на изоэнергетической поверхности или на прообразе любой гладкой кривой в образе отображения момента.

**Определение.** Слоения Лиувилля на инвариантных подмножествах  $U_1$  и  $U_2$  многообразий  $M_1^{2n}$  и  $M_2^{2n}$  называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный гомеоморфизм  $U_1 \rightarrow U_2$  (т.е. переводящий каждый слой слоения Лиувилля на  $U_1$  в слой слоения Лиувилля на  $U_2$ ).

В **разделе 1.2** приводится описание особенностей гамильтоновых систем с одной степенью свободы. Для этого вводится понятие, предложенное А. Т. Фоменко, 2-атома.

**Определение.** Пусть  $f$  — функция Морса на компактной ориентированной поверхности  $M^2$ ,  $c$  — критическое значение функции  $f$ . *2-Атомом*  $(P^2, f)$  называется связная компонента  $P^2$  окрестности особого слоя функции  $f$ , задаваемая неравенством  $c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon$  для достаточно малого  $\varepsilon$ , расслоенная на линии уровня функции  $f$  и рассматриваемая с точностью до послойной эквивалентности.

Каждому такому 2-атому соответствует некоторый граф, который был предложен А. А. Ошемковым для описания 2-атомов.

**Определение.** Рассмотрим граничные отрицательные (т.е. докритические) окружности атома и все сепаратрисы поля  $\text{grad} f$ , идущие из точек на этих окружностях в критические точки функции  $f$ . Назовем вершинами  $f$ -графа точки на граничных окружностях, из которых идут сепаратрисы, и определим ребра  $f$ -графа двух типов: ориентированные (дуги окружностей, на которые вершины разбивают окружности, с ориентацией, индуцированной из  $P^2$ ) и неориентированные (образованные парами сепаратрис, входящих в одну и ту же критическую точку). Граф  $\Gamma$ , гомеоморфный полученному, назовем  $f$ -графом 2-атома  $(P^2, f)$ .

Строится инвариант Фоменко для описания слоения особенностей интегрируемых гамильтоновых систем с одной степенью свободы.

**Определение.** Молекулой интегрируемой гамильтоновой системы называется граф, ребрам которого соответствуют однопараметрические семейства окружностей, а вершинам — 2-атомы, отвечающие перестройкам этих окружностей через особый слой.

В разделе 1.3 приводится описание особенностей гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Аналогично случаю гамильтоновых систем с одной степенью свободы, вводится похожее определение 3-атома, предложенное А. Т. Фоменко.

Пусть  $L$  — особый слой слоения Лиувилля на  $Q_h^3$ . Рассмотрим окрестность  $U(L)$  этого слоя, инвариантную относительно гамильтонова потока. Как и в двумерном случае, в качестве  $U(L)$  возьмем связную компоненту множества  $f^{-1}(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ , содержащую особый слой  $L$  (здесь  $c = f(L)$  — критическое значение функции  $f$ ). Окрестность  $U(L)$  представляет собой трехмерное многообразие с естественной структурой слоения Лиувилля. Введем на классе таких многообразий отношение эквивалентности следующим образом: будем считать два таких трехмерных многообразия со структурой слоения Лиувилля лиувиллево эквивалентными, если

1. существует диффеоморфизм между ними, сохраняющий структуру слоения Лиувилля (послойный),
2. этот диффеоморфизм сохраняет ориентацию трехмерных многообразий и ориентацию на критических окружностях, которая задается гамильтоновым потоком.

**Определение.** 3-атомом назовем класс лиувиллевой эквивалентности трехмерного многообразия  $U(L)$ . Число критических окружностей в 3-атоме назовем его сложностью.

Для того, чтобы привести соответствие между 3-атомами и 2-атомами вводится определение 2-атомов со звездочками, предложенное А. Т. Фоменко.

**Определение.** Рассмотрим теперь 3-атом  $U(L)$  со структурой расслоения Зейферта на нем. Обозначим через  $\pi : U(L) \rightarrow P^2$  его проекцию на двумерную базу  $P^2$  с графом  $K$ , где  $K$  — образ  $\pi(L)$  особого слоя  $L$  при проекции  $\pi$ . Далее, отметим на базе  $P^2$  звездочками те точки, в которые проектируются особые слои расслоения Зейферта (т.е. слои типа  $(2,1)$ ). В результате получим 2-атом со звездочками  $(P^2, K')$ .

По теореме 1.3 существует взаимнооднозначное соответствие между 3-атомами и дополненным множеством 2-атомов (вместе с 2-атомами со звездочками): базой расслоения Зейферта 3-атома является либо 2-атом (если нет особых слоев), либо 2-атом со звездочками (если расслоение нетривиальное), и обратно, по базе  $P^2$  с отмеченными на ней звездочками однозначно с точностью до послойной эквивалентности восстанавливается 3-многообразие  $U(L)$  со структурой расслоения Зейферта.

Аналогично вводится определение круговой молекулы и ее меток.

**Определение.** *Круговой молекулой* называется граф, соответствующий допустимой кривой  $\gamma$ , ребра которого соответствуют однопараметрическим семействам торов Лиувилля, а вершины — 3-атомам, на которых происходят бифуркации.

При этом в вершинах графа помещают символы, которые обозначают типы бифуркаций (ввиду взаимоднозначного соответствия между 3-атомами и 2-атомами, эти перестройки обозначаются той же буквой, что и 2-атомы:  $A, B, C_1, A^*$  и т.д.). В отличие от случая интегрируемой гамильтоновой системы с одной степенью свободы, круговая молекула — это инвариант по отношению к Лиувиллевой эквивалентности, но не полный.

Рассмотрим произвольное ребро  $e_i$  молекулы и зададим на нем ориентацию. Разрежем это ребро и определим на торах Лиувилля, соответствующих концам разреза, допустимые системы координат  $(\lambda_i^-, \mu_i^-)$  — на начале ребра и  $(\lambda_i^+, \mu_i^+)$  — на конце ребра. Рассматривая эти пары циклов как базисы в группе одномерных гомологий тора, получаем матрицу склейки

$$\begin{pmatrix} \lambda_i^+ \\ \mu_i^+ \end{pmatrix} = C_i \begin{pmatrix} \lambda_i^- \\ \mu_i^- \end{pmatrix}, C_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}.$$

$C_i$  — целочисленная матрица с определителем равным -1. Эта матрица определена не однозначно, с точностью до допустимых замен координат (см. [5]).

**Определение.** *Числовой рациональной меткой  $r_i$  на ребре  $e_i$  круговой молекулы* называется:

$$r_i = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{\beta_i} \bmod 1 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, & \beta_i \neq 0, \\ \infty, & \beta_i = 0. \end{cases}$$

**Определение.** *Числовой рациональной меткой  $\varepsilon_i$  на ребре  $e_i$  круговой молекулы* называется:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \text{sign } \beta_i, & \beta_i \neq 0, \\ \text{sign } \alpha_i, & \beta_i = 0. \end{cases}$$

Несмотря на то, что матрица склейки  $C_i$  определена неоднозначно, метки  $r_i$  и  $\varepsilon_i$  являются инвариантами, т.е. не меняются при допустимых заменах координат.

Дадим определение метки  $n_k$ . Если разрезать молекулу по всем рёбрам с конечной  $r$ -меткой, то она распадется на несколько связных компонент. Эти связные компоненты назовем семьями. Рассмотрим теперь отдельную семью. Все рёбра, имеющие в ней хотя бы одну вершину, можно разделить на три класса (с учетом имеющейся на них ориентации): входящие, выходящие и внутренние.

**Определение.** *Метка  $n_k$ , отвечающая данной семье, определяется как сумма целых чисел  $\theta_i$  по всем ребрам этой семьи, где*

$$\theta_i = \begin{cases} \left\lfloor \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right\rfloor, & \text{если } e_i \text{ — выходящее ребро,} \\ \left\lfloor -\frac{\delta_i}{\beta_i} \right\rfloor, & \text{если } e_i \text{ — входящее ребро,} \\ \left\lfloor -\frac{\gamma_i}{\alpha_i} \right\rfloor, & \text{если } e_i \text{ — внутреннее ребро.} \end{cases}$$

Заметим, что метка  $n_k$  является характеристическим классом расслоения Зейферта.

**Определение.** Круговая молекула, снабженная метками  $r_i$ ,  $\varepsilon_i$  и  $n_k$ , называется *круговой меченой молекулой*, или инвариантом Фоменко–Цишанга.

В разделе 1.4 приводится классификация типов особенностей в случае интегрируемых гамильтоновых систем с  $n$  степенями свободы.

**Теорема** (Элиассон). Пусть  $x_0$  - невырожденная особая точка ранга нуль интегрируемой гамильтоновой системы  $(f_1, f_2 \dots, f_n)$  на симплектическом многообразии  $(M^{2n}, \omega)$ . Тогда в некоторой окрестности точки  $x_0 \in M^{2n}$  существуют симплектические координаты  $q_1, q_2 \dots q_n, p_1, p_2 \dots p_n$  и интегралы  $f'_1, f'_2 \dots, f'_n$  (задающие то же слоение Лиувилля, что и интегралы  $f_1, f_2 \dots, f_n$ ) такие, что функции  $f'_i(q_1, q_2 \dots q_n, p_1, p_2 \dots p_n)$  задаются одной из формул

$$\begin{aligned} (1) \quad & f'_i = p_i^2 + q_i^2 && (\text{эллиптический случай}), \\ (2) \quad & f'_i = p_i q_i && (\text{гиперболический случай}), \\ (3) \quad & \begin{aligned} f'_i &= p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i \\ f'_{i+1} &= p_i q_i + p_{i+1} q_{i+1} \end{aligned} && (\text{случай фокус-фокус}). \end{aligned}$$

Приводится классификация типов особенностей в случае интегрируемых гамильтоновых систем в частных случаях одной и двух степеней свободы.

**Лемма** (Лемма Дарбу-Морса). Для любой невырожденной критической точки  $x_0$  функции  $H$  на двумерном симплектическом многообразии  $(M^2, \omega)$  существуют такие локальные симплектические координаты  $p, q$ , что функция  $H$  зависит либо только от  $p^2 + q^2$ , либо только от  $pq$ :

$$\begin{aligned} H &= H(p^2 + q^2) && (\text{эллиптический случай}), \\ H &= H(pq) && (\text{гиперболический случай}). \end{aligned}$$

В четырехмерном случае (для систем с двумя степенями свободы) существуют четыре типа невырожденных особенностей ранга нуль. Эта теорема является следствием теоремы 1.4.

**Теорема.** Пусть  $x_0$  - невырожденная особая точка ранга нуль интегрируемой гамильтоновой системы  $(M^4, \omega, H, f)$ . Пусть многообразие  $M^4$ , симплектическая структура  $\omega$  и обе функции  $H$  и  $f$  являются вещественно-аналитическими. Тогда в окрестности точки  $x_0 \in M^4$  существуют координаты  $(p_1, q_1, p_2, q_2)$ , в которых симплектическая структура имеет вид  $\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$ , а функции  $H$  и  $f$  одновременно приводятся к одному из следующих видов:

1. случай центр-центр:

$$\begin{aligned} H &= H(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2), \\ f &= f(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2); \end{aligned}$$

2. случай центр-седло:

$$\begin{aligned} H &= H(p_1 q_1, p_2^2 + q_2^2), \\ f &= f(p_1 q_1, p_2^2 + q_2^2); \end{aligned}$$

3. случай седло-седло:

$$\begin{aligned} H &= H(p_1 q_1, p_2 q_2), \\ f &= f(p_1 q_1, p_2 q_2); \end{aligned}$$

4. случай фокус-фокус:

$$\begin{aligned} H &= H(p_1 q_1 + p_2 q_2, p_1 q_2 - q_1 p_2), \\ f &= f(p_1 q_1 + p_2 q_2, p_1 q_2 - q_1 p_2). \end{aligned}$$

Типом особой точки называется количество соответствующих ей эллиптических, гиперболических и фокусных компонент. Теорема Элиассона показывает, что любые две особые точки одинакового типа *локально эквивалентны*, т.е. обладают сколь угодно малыми окрестностями, в которых слоения Лиувилля лиувиллево эквивалентны.

**Определение.** Две особые точки назовем *полулокально эквивалентными*, если у содержащих их особых слоев существуют сколь угодно малые инвариантные окрестности, в которых слоения Лиувилля лиувиллево эквивалентны. Класс полулокальной эквивалентности особой точки мы и будем называть *особенностью*.

Менее формально, особенность — это класс лиувиллевой эквивалентности некоторой достаточно малой инвариантной регулярной окрестности особой точки. Всюду далее будем предполагать, что все слои слоения Лиувилля компактны.

Приводится понятие, предложенное Н. Т. Зунгом для описания слоения седловых  $2n$ -мерных особенностей.

**Определение.** Рассмотрим набор седловых 2-атомов  $V_1, V_2, \dots, V_n$  со своими симплектическими структурами  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  и функциями Морса соответственно  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Пусть на каждом атоме  $V_i$  действует одна и та же конечная группа  $G$ , причем каждое из этих действий  $\phi_i$  сохраняет как симплектическую структуру  $\omega_i$ , так и функцию  $f_i$ . Тогда на прямом произведении  $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$  определена симплектическая структура как сумма форм  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , а также определена структура лиувиллева слоения, задаваемого коммутирующими функциями  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Пусть действие группы  $G$  на  $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ , заданное формулой  $\phi(g)(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\phi_1(g)x_1, \phi_2(g)x_2, \dots, \phi_n(g)x_n)$ , свободно. Тогда фактор-многообразие  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$  является  $2n$ -мерной окрестностью связного особого слоя  $L$  с невырожденными седловыми особыми точками ранга нуль. Такую особенность назовем *особенностью типа почти прямого произведения (или просто почти прямым произведением)*.

**Определение.** Будем говорить, что почти прямое произведение  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$  несократимо, если каждый элемент группы  $G$  (кроме единицы) действует нетривиально не менее чем на двух сомножителях прямого произведения  $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ .

Теорема Н. Т. Зунга описывает слоение  $2n$ -мерных седловых особенностей в терминах прямого произведения 2-атомов, факторизованного по действию конечной группы.

**Теорема (Н.Т. Зунг [10]).** *Любая нерасщепляемая по Зунгу невырожденная седловая особенность  $U(L)$  ранга нуль является особенностью типа почти прямого произведения. Причем если почти прямое произведение  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$  несократимо, то представление особенности  $U(L)$  в виде почти прямого произведения единственно.*

Во **второй главе** описывается структура круговой молекулы особенности типа седло-седло.

В **разделе 2.1** для круговых меченых молекул особенностей типа почти прямого произведения  $(V_1 \times V_2)/G$  описывается структура круговой молекулы в терминах 2-атомов.

По теореме 1.7 каждая такая 4-особенность представляется в виде несократимого почти прямого произведения  $(V_1 \times V_2)/G$ . Рассмотрим почти прямое произведение двух атомов  $(V_1 \times V_2)/G$  с соответствующими функциями Морса на них  $f_1$  и  $f_2$  и конечной группой  $G$ , действующей на прямом произведении  $V_1 \times V_2$  свободно и покомпонентно, сохраняющей эти функции. Рассмотрим функции  $f_1$  и  $f_2$  на прямом произведении  $V_1 \times V_2$  и предположим, что без ограничения общности бифуркационная диаграмма отображения момента  $(f_1, f_2)$  представляет собой координатный крест от  $-1$  до  $+1$ .

**Определение.** Каждая связная компонента множества  $\{x \in M^4 | f_i(x) = +1\}$  и  $\{x \in M^4 | f_i(x) = -1\}$  является 3-атомом. Каждому такому множеству  $\{x \in M^4 | f_i(x) = \pm 1, i = 1, 2\}$  сопоставим соответствующий набор 3-атомов, который назовем *компонентой круговой молекулы*. Скажем, что компонента круговой молекулы имеет *тип атома*  $V_i$ , если она соответствует множеству  $\{x \in M^4 | f_i(x) = \pm 1\}$  для заданного  $i$ .

Для удобства обозначим через  $kO$  несвязное объединение  $k$  окружностей. Пусть атом  $V_1$  является перестройкой  $i_2O$  в  $i_1O$  окружностей при  $f_1 = +1$  и  $f_1 = -1$  соответственно. Аналогично атом  $V_2$  является перестройкой  $j_2O$  в  $j_1O$  окружностей при  $f_2 = +1$  и  $f_2 = -1$ . Следующая теорема описывает структуру круговой молекулы особенности типа седло-седло в терминах компонент этой круговой молекулы и их типов.

**Теорема.** [40] *Всякая круговая молекула нерасщепляемой по Зунгу особенности типа седло-седло состоит из четырех компонент. Две компоненты вида  $(V_1 \times j_k O)/G, k = 1, 2$  имеют тип  $V_1$ , две оставшиеся вида  $(V_2 \times i_k O)/G, k = 1, 2$  — тип  $V_2$ . Ребрами соединены атомы только из соседних компонент молекулы (разного типа). Количество ребер, соединяющих компоненты разного типа, совпадает с числом связных компонент соответствующего фактора  $(i_k O \times j_l O)/G$ , где  $k = 1, 2; l = 1, 2$ . Соответствие показано на рисунке 2.1.*

**Утверждение.** [40] *Количество атомов в компоненте круговой молекулы, соответствующей множеству  $(V_i \times jO)/G$ , равно количеству связных компонент множества  $jO/G$ .*

**Теорема.** [40] *Если  $(V_1 \times kO)/G$  имеет одну компоненту связности и количество окружностей в  $(V_1 \times kO)/G$  совпадает с порядком группы, то есть  $k = |G|$ , то  $(V_1 \times kO)/G \cong V_1$ .*

Приводится метод определения, когда соответствующая круговая молекула является круговой молекулой некоторой 4-особенности фиксированной сложности.

Рассмотрим произвольную круговую молекулу, т. е. граф, состоящий из атомов (латинских букв с индексами и возможно звездочками), соединенных ребрами. Зададимся вопросом, когда соответствующая круговая молекула является круговой молекулой некоторой 4-особенности фиксированной сложности. Пусть также дан список всех типов компонент круговых молекул для данной сложности.

**Определение.** Атом  $W$  назовем *допустимым* атомом для данной компоненты круговой молекулы типа  $V$ , если существует круговая молекула 4-особенности данной сложности с компонентой типа  $V$ , в которую (компоненту) входит атом  $W$ .

Получаем соответствие между типами компонент и их допустимыми атомами. Рассмотрим на примере 4-особенностей сложности два, какие бывают допустимые атомы для каких типов компонент круговой молекулы.

Рассмотрим одну из таких компонент, т.е. набор 3-атомов, соответствующих множеству вида  $(V \times kO)/G$  для произвольного атома  $V$ , произвольной конечной группы  $G$  с условием, чтобы группа  $G$  действовала свободно на прямом произведении и сохраняла соответствующую функцию Морса на атоме (т. е. была подгруппой группы симметрий данного атома  $V$ ) и произвольного числа  $k$  не большего порядка группы симметрий атома  $V$ . Атом  $V$  — тип данной компоненты. Предположим, что рассматриваемая компонента состоит всего из одного атома, т. е. связна (будем рассматривать только такие компоненты). Получив список всех компонент с такими свойствами (он конечен из-за ограничений на  $k$  и группу  $G$ ) или список соответствующих им атомов для данного фиксированного типа компоненты  $V$ , можно ответить на вопрос,

может ли данная круговая молекула являться круговой молекулой почти прямого произведения  $(V \times W)/H$  для некоторого атома  $W$  и группы  $H$ : если в каждой паре противоположных компонент данной круговой молекулы присутствуют атомы не из списка, то данная круговая молекула не является круговой молекулой любого почти прямого произведения  $(V \times W)/H$  с данным фиксированным атомом  $V$ .

Этот метод демонстрируется в случае 4-особенностей сложности два. Для этого приводится классификация всех допустимых 2-атомов для компоненты круговой молекулы фиксированного типа.

**Теорема.** [40] *В таблице 2.1 для круговых молекул особенностей типа седло-седло сложности два приведен список всех допустимых атомов для соответствующих компонент данного типа.*

Приводится результат применения этого метода для 4-особенностей сложности два.

**Следствие.** *Рассмотрим какой-либо атом  $V_1$  из таблицы 2.1. Если в круговой молекуле нет атомов, перечисленных в этой таблице напротив атома  $V_1$ , то такая круговая молекула не является круговой молекулой почти прямого произведения  $(V_1 \times V_2)/G$  ни для какого  $V_2$  и любой группы  $G$ .*

В разделе 2.2 описываются некоторые свойства меток соответствующей круговой молекулы и приводится способ их вычисления.

**Теорема.** [40] *Все метки  $r$  круговой молекулы почти прямого произведения  $(V_1 \times V_2)/G$  конечны и имеют вид  $\frac{k}{|G|}$ .*

В доказательстве этой теоремы используется одна лемма (в которой описывается метод подсчета метки  $r$ ) и два утверждения.

**Лемма.** Пусть на торе с координатами  $x, y \pmod{1}$  задано действие циклической группы  $G$  с образующей  $g : (x, y) \mapsto (x + \frac{k}{n}, y + \frac{p}{q})$ , причем дроби  $\frac{k}{n}$  и  $\frac{p}{q}$  — несократимые.

1. Тогда количество пересечений образов циклов  $(x, 0)$  и  $(0, y)$  после факторизации равно  $\text{НОД}(n, q)$ .
2. Разделим первый цикл тора на  $n$  частей и пронумеруем точки, начиная от пересечения циклов от 0 до  $n-1$ . Номер первой точки пересечения циклов на торе после факторизации, следуя по второму циклу от нулевой точки пересечения, равен  $a$ . Число  $a$  находится из системы уравнений в целых числах:

$$\begin{cases} px \equiv 1 \pmod{q} \\ a \equiv -kx \pmod{n} \end{cases} \quad (1)$$

**Утверждение.** *Пусть на прямом произведении  $k_1$  окружностей на  $k_2$  окружностей задано свободное действие конечной группы  $G$  диффеоморфизмами. Тогда для любого тора из этого прямого произведения существует подгруппа  $H$  в группе  $G$ , такая что  $H$  действует диффеоморфно, оставляя тор на месте, причем для каждого тора эти группы изоморфны.*

**Утверждение.** *Если почти прямое произведение, получается как фактор прямого произведения атомов по группе  $\mathbb{Z}_n$ , то все  $r$  метки его круговой молекулы имеют вид  $\frac{k}{n}$ .*

Доказательство оканчивается описанием действия группы  $G$ , ограниченной на граничный тор  $T$ .

По утверждению 2.2.1 для тора  $T$  существует подгруппа  $H$  переводящая тор  $T$  в себя, причем каждый элемент группы  $H$  можно представить в виде композиции двух сдвигов: сдвиг вдоль первого базисного цикла тора, а потом вдоль второго. Представим тор  $T$ , как фактор  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . Тогда действие каждого элемента  $g$  подгруппы  $H$  является сдвигом на факторе  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  на некоторый вектор с координатами  $v_g = (\frac{k}{n}, \frac{p}{q})$ . Следовательно, группа  $H$  — абелева, а значит, раскладывается в прямую сумму примарных циклических групп  $H_{g_1} \oplus H_{g_2} \oplus \dots \oplus H_{g_k}$ . Из утверждения 2.2.2 следует, что знаменатель  $r$ -метки равен  $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ , где  $n_1, n_2, \dots, n_k$  — порядки соответствующих элементов  $g_1, g_2, \dots, g_k$ , а  $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k = |H|$ .

Приводятся замечания к теореме о виде меток  $r$ .

### Замечание.

1. Если циклическая группа  $G$  действует на торе (как в лемме), то метку  $r$  на соответствующем ребре круговой молекулы можно вычислить следующим способом: число  $a$  из системы (2.1) — числитель метки  $r$ ,  $\text{НОД}(n, q)$  — ее знаменатель.
2. В теореме 2.4 дробь  $\frac{k}{|G|}$  может быть сократимой. В теореме утверждается, что она должна иметь такой вид, но  $k$  может быть любым значением, включая нуль.
3. Из системы (2.1) значение  $a$  находится неоднозначно. Число  $a$  единственно по модулю  $\text{НОД}(n, q)$ , то есть метка  $r$  определяется однозначно. В случае, когда  $\text{НОД}(n, q)$  равен единице, легко видеть, что уравнение имеет нулевое решение, то есть метка  $r$  равна нулю.
4. Почти прямое произведение  $(V_1 \times V_2)/G$  является несократимым, т.е. все элементы в группе  $G$  (кроме единицы) действуют нетривиально на каждом из сомножителей прямого произведения  $V_1 \times V_2$ . Следовательно, действие порождающего элемента  $H_g$  является сдвигом на вектор, координатами которого являются несократимые дроби с одинаковыми знаменателями  $(\frac{k}{n}, \frac{p}{n})$  (иначе элемент  $(1, n\frac{p}{q})$  будет действовать тождественно на  $V_1$ ).
5. Лемма 2.5 дает простой способ вычислять метки  $r$  для круговой молекулы почти прямого произведения, зная только действие группы на граничных окружностях соответствующих атомов. Сама же структура атомов дает ограничения на группу.

Приводится способ подсчета матрицы склейки, соответствующей ребру круговой меченой молекулы в случае группы  $G = \mathbb{Z}_n$ .

Рассмотрим почти прямое произведение  $(V_1 \times V_2)/G$ . Обозначим за  $T$  тор, соответствующий одному из ребер круговой молекулы почти прямого произведения  $(V_1 \times V_2)/G$ . Как было показано в доказательстве теоремы 2.4, значение метки  $r$  вычисляется по действию подгруппы  $H$  группы  $G$ , которая переводит тор  $T$  в себя. Подгруппа  $H$  представляется в виде прямой суммы примарных циклических групп  $H_g$ , у которых порождающие элементы действуют на торе  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  сдвигами на векторы вида  $(\frac{k}{n}, \frac{p}{q})$  или с учетом замечания 1 на векторы вида  $(\frac{k}{n}, \frac{p}{n})$ . Предположим, что подгруппа  $H$  является циклической. Рассмотрим такое действие на торе  $T$ . Базисные циклы  $\lambda$  и  $\mu$  выбираются на торе  $T$  по следующим правилам (согласно книге [5]):

1. параллелограмм, натянутый на векторы, соответствующие циклам  $\lambda$  и  $\mu$  является фундаментальной областью действия группы  $H$  на торе  $T$ ,
2. цикл  $\lambda$  принадлежит координатной оси, что соответствует слою расслоения Зейферта,

3. ориентация циклов  $\lambda$  и  $\mu$  должна быть согласована с ориентацией тора  $T$ , которая зависит от ориентации соответствующего 3-атома, для которого тор  $T$  является граничным.

**Теорема.** Если на торе  $T$  действие циклической группы  $H$  порождено сдвигом на вектор  $(\frac{k}{n}, \frac{p}{q})$ , где  $\frac{k}{n}$  и  $\frac{p}{q}$  — несократимые дроби, то матрица склейки, соответствующая тору  $T/G$  имеет вид  $\begin{pmatrix} -\tilde{a} & (n, q) \\ \frac{1-\tilde{a}\tilde{b}}{(n, q)} & \tilde{b} \end{pmatrix}$ , где

1.  $\begin{cases} \tilde{a} = kx - nz_1, & \text{где } x \text{ — решение уравнения } px \equiv 1 \pmod{q}, \quad z_1 = [x \frac{k}{n}], \\ \tilde{b} = py - qz_2, & \text{где } y \text{ — решение уравнения } ky \equiv 1 \pmod{n}, \quad z_2 = [y \frac{p}{q}], \end{cases}$
2.  $(n, q) = \text{НОД}(n, q)$ ,  $[...] \text{ — целая часть.}$

Приводятся замечания к теореме о матрице склейки.

**Замечание.**

1. В теореме 2.6 матрица склейки состоит из целых чисел (легко видеть, что  $(n, q) | (\tilde{a}\tilde{b} - 1)$ ). Определитель матрицы склейки равен -1.
2. Из явного вида матрицы склейки находится метка  $r$ . Метка  $r$  равна  $-\frac{\tilde{a}}{(n, q)} \pmod{1}$ , где  $\tilde{a} = kx - nz_1$ , что соответствует значению  $\frac{a}{(n, q)} \pmod{1}$  из леммы 2.5.
3. Метка  $n$  является суммой меток  $\theta$ , равных  $[-n_1 \{x \frac{k}{n}\}]$  для выходящего ребра и  $[-q_1 \{y \frac{p}{q}\}]$  для входящего ребра круговой молекулы.
4. Метка  $\varepsilon$  в этом случае всегда равна 1.
5. Лемма 2.5 и теорема 2.6 дают разные подходы к вычислению меток на ребрах круговой молекулы.

В разделе 2.3 приводятся некоторые техники, с помощью которых можно по круговой молекуле строить почти прямое произведение. Основная техника состоит в “присоединении” одного 2-атома к себе.

**Определение.** Рассмотрим два экземпляра атома  $V = (P, f)$  и применим к ним следующие операции:

1. Разрежем одну из полос поверхности  $P$  первого атома (границей которой являются две граничные окружности, соответствующие разным значениям функции  $f$ ). Аналогичное сделаем со второй поверхностью  $P$ .
2. Склеим свободные концы одной разрезанной поверхности  $P$  со свободными концами другой поверхности, так чтобы слои, соответствующие одному и тому же значению функции на одном и на другом конце совпали.

Полученный 2-атом  $V \# V = (P \# P, f)$  назовем *присоединением 2-атома  $V = (P, f)$  к себе.*

С помощью техники “присоединения” строится почти прямое произведение с симметричной круговой меченой молекулой, в вершинах которой нет атомов со звездочками.

Построим почти прямое произведение, которое соответствует данной круговой меченой молекуле (рисунок 2.5 слева). Обозначим за  $V_1^n = V_1 \# V_1 \# \dots \# V_1$  и  $V_2^n = V_2 \# V_2 \# \dots \# V_2$  присоединения  $n$  раз 2-атомов  $V_1$  и соответственно  $V_2$  к себе как показано на рисунке 2.4 слева. Легко видеть, что 2-атомы  $V_1^n$  и  $V_2^n$  также являются перестройками одной окружности в одну через критический слой и имеют естественную группу симметрий  $\mathbb{Z}_n$ , образующая которой действует поворотом соответствующего 2-атома на угол  $\frac{2\pi}{n}$ .

**Утверждение.** *Данная круговая молекула (рисунок 2.5 слева) является круговой меченой молекулой почти прямых произведений  $(V_1^n \times V_2^n)/\mathbb{Z}_n$  для всех натуральных  $n$ .*

С помощью аналога “присоединения” строится почти прямое произведение с круговой симметричной круговой меченой молекулой для случай 2-атомов со звездочками.

Построим аналог присоединения в случае 2-атома со звездочками:

1. Разрежем  $f$ -граф 2-атома со звездочками  $V_1^{2k*}$  по некоторому ориентированному ребру. Разрезанный  $f$ -граф имеет вид направленного отрезка, на котором отмечено несколько точек, некоторые из которых помечены звездочками. Точки, которые не помечены звездочками, образуют пары, соединенные неориентированным ребром.
2. Пронумеруем точки, помеченные звездочками, от 1 до  $2k$  в соответствии с направлением отрезка.
3. Возьмем  $2n$  дублей такого отрезка и соединим их один за другим (с сохранением направления). В результате получится одна ориентированная окружность.
4. В противоположных дублях (с номерами  $l$  и  $l + n$ ) на этой окружности соединим точки, помеченные звездочками, с одинаковыми номерами.
5. В результате получим 2-атом  $V_1^{2n}$  без звездочек, изображенный на рисунке 2.4 справа.

В качестве  $V_2^{2n} = V_2 \# V_2 \# \dots \# V_2$  возьмем также присоединение  $2n$  раз 2-атома  $V_2$  к себе. Легко видеть, что в этом случае 2-атомы  $V_1^{2n}$  и  $V_2^{2n}$  также являются перестройкой одной окружности в одну через критический слой. Эти 2-атомы имеют естественную группу симметрий  $\mathbb{Z}_{2n}$ , действующую поворотом соответствующего 2-атома на угол  $\frac{\pi}{n}$ .

**Утверждение.** *Данная круговая молекула (рисунок 2.6 слева) является круговой меченой молекулой почти прямых произведений  $(V_1^{2n} \times V_2^{2n})/\mathbb{Z}_{2n}$  для всех натуральных  $n$ .*

**Следствие.** *Данная круговая молекула (рисунок 2.6 в середине) является круговой меченой молекулой почти прямых произведений  $(V_1^{4n} \times V_2^{4n})/\mathbb{Z}_{4n}$  для всех натуральных  $n$ .*

В главе 3 представлены некоторые техники, с помощью которых можно строить серии почти прямых произведений с одинаковыми круговыми мечеными молекулами.

В данной главе приведены только некоторые из таких серий. Скомбинировав методы из прошлого раздела 2.3 и данного, можно построить дополнительно множество различных серий таких примеров. В данной главе также используется техника присоединения 2-атомов, перестраивающих одну окружность в одну.

В разделе 3.1 приводится пример А. Грабежного.

Пример А. Грабежного строится на основе двух 2-атомов  $C_1$ , которые являются перестройкой одной окружности в одну через критический слой с двумя особыми точками (см. рис. 1.1). Рассмотрим на этом 2-атоме действие группы его симметрий  $\mathbb{Z}_4$  и ее подгруппы, соответственно  $\mathbb{Z}_2$ . Действия этих групп на граничных окружностях атома  $C_1$  задаются поворотами на углы  $\frac{\pi}{2}(\mathbb{Z}_4)$  и  $\pi(\mathbb{Z}_2)$  соответственно. Пример Грабежного  $C_1 \times C_1$ ,  $(C_1 \times C'_1)/\mathbb{Z}_2$ ,  $(C_1 \times C''_1)/\mathbb{Z}_4$  получается при рассмотрении 2-листного и 4-листного накрытий атома  $C_1$ .

В разделе 3.2 приводится серия почти прямых произведений с одинаковой круговой молекулой и метками  $n$  и  $\varepsilon$  на ребрах, но разными метками  $r$ .

Развивая пример А. В. Грабежного (см. [7]), описанный в предыдущем разделе, построим бесконечную серию особенностей типа седло-седло, у которых совпадают круговые молекулы, однако метки на ребрах круговых молекул различаются. Этот пример строится также для той же круговой молекулы, что и круговая молекула прямого произведения атомов  $C_1 \times C_1$ .

Обозначим через  $C_1^n$  атом, у которого  $f$ -граф задается как на рисунке 1.4 слева. Пусть на нем действует группа  $\mathbb{Z}_n$  поворотом на  $\frac{2\pi}{n}$ . Заметим, что при  $n = 2$  атом  $C_1^n$  совпадает с  $M_2$ .

**Теорема.** [40] *Круговые молекулы почти прямых произведений  $(C_1^n \times C_1^n)/\mathbb{Z}_n$  и прямого произведения  $C_1 \times C_1$  совпадают. Однако их меченые молекулы различаются.*

В разделе 3.3 приводится серия пар почти прямых произведений и прямых произведений с одинаковой круговой меченой молекулой.

Чтобы расширить пример А. В. Грабежного, рассмотрим следующую конструкцию:

*Пусть дан атом  $X$ , который перестраивает одну окружность в одну, причем группа  $\mathbb{Z}_{2n}$  действует поворотами на угол  $\frac{2\pi}{n}$  и кратные ему углы на каждой из его граничных окружностей. Пусть также имеется его  $2n$ -листное связное регулярное накрытие  $X'$ , такое, что над каждой граничной окружностью атома  $X$  висит  $2n$  окружностей накрытия  $X'$  (регулярное накрытие задает действие группы  $\mathbb{Z}_{2n}$  на атоме  $X'$ ). Тогда можно доказать, что особенности  $X \times X$  и  $(X \times X')/\mathbb{Z}_{2n}$  будут не эквивалентны, а их круговые меченые молекулы будут совпадать.*

В работе [29] приведены примеры симметричных атомов  $A_{2n}$  (рис. 1.2 справа).  $f$ -граф атома  $A_{2n}$  изображен на рисунке 1.4 справа. Такие атомы подходят под описание, данное выше для любого  $n \in \mathbb{N}$  в качестве атома  $X$ . На атомах  $A_{2n}$  действуют группы  $\mathbb{Z}_{2n}$  описанным выше способом.

Проведем построение, обобщающее пример А. В. Грабежного. Возьмем атом  $A_{2n}$  и построим для него новый атом  $A'_{2n}$ . Для этого возьмем  $2n$  экземпляров атома  $A_{2n}$ , в каждом экземпляре удалим (точнее в соответствующем  $f$ -графе) одно внутреннее ребро и соединим получившиеся вершины, как показано на рис. 3.3 справа. Таким образом, группа  $\mathbb{Z}_{2n}$  будет действовать на полученном атоме  $A'_{2n}$  циклической перестановкой экземпляров атома  $A_{2n}$ , переводя каждое ребро, соединяющее экземпляры друг с другом, и каждый экземпляр в соседний. Получится  $2n$ -листное регулярное накрытие над атомом  $A_{2n}$ .

**Теорема.** [41] *Прямое произведение  $A_{2n} \times A_{2n}$  и почти прямое произведение  $(A_{2n} \times A'_{2n})/\mathbb{Z}_{2n}$  представляют собой различные классы особенностей по отношению к ливиллевой эквивалентности, но имеют совпадающие круговые меченые молекулы для каждого  $n$  соответственно, в частности слоения Ливилля на их 3-границах совпадают (ливиллево эквивалентны).*

В главе 4 исследуются седловые особенности ранга нуль на устойчивость (нерасщепляемость).

В разделе 4.1 приводятся два определения расщепляемости: более общее и более узкое, которое удобнее для использования в случае почти прямых произведений.

Сначала дадим общее определение устойчивости. Для интегрируемой гамильтоновой системы  $(M^{2n}, \omega, f_1, f_2, \dots, f_n)$  назовем ее *интегрируемым возмущением* семейство интегрируемых гамильтоновых систем  $(M^{2n}, \omega_\alpha, f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha}, \dots, f_{n,\alpha})$ , где симплектическая структура  $\omega_\alpha$  и интегралы  $f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha}, \dots, f_{n,\alpha}$  гладко зависят от координат и параметра возмущения  $\alpha$ , причем исходная система соответствует значению параметра  $\alpha = 0$ .

**Определение.** Интегрируемую гамильтонову систему  $(M^{2n}, \omega, f_1, f_2, \dots, f_n)$  будем называть *устойчивой*, если для любого ее интегрируемого возмущения  $(M^{2n}, \omega_\alpha, f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha}, \dots, f_{n,\alpha})$  с компактным носителем существует  $\varepsilon > 0$ , для которого исходная система лиувиллево эквивалентна возмущенной при всех  $\alpha \in [0, \varepsilon]$ .

Рассматривая в качестве  $M^{2n}$  инвариантную окрестность  $U(L)$  особого слоя  $L$ , мы приходим к определению полулокальной устойчивости (или нерасщепляемости) особенностей системы.

**Определение.** Пусть  $(M^{2n}, \omega, f_1, f_2, \dots, f_n)$  — интегрируемая гамильтонова система,  $L$  — особый слой соответствующего слоения Лиувилля, содержащий лишь невырожденные особые точки ранга нуль седлового типа, а  $U(L)$  — его малая инвариантная регулярная окрестность в  $M^{2n}$ . Седловую особенность  $U(L)$  назовем *нерасщепляемой*, если интегрируемая система  $(U(L), \omega, f_1, f_2, \dots, f_n)$  устойчива в смысле определения 4.1.1.

Другими словами, седловая особенность ранга нуль является *расщепляемой*, если существует малое интегрируемое возмущение, при котором ее особый слой  $L$  распадается на несколько особых слоев (с седловыми особыми точками ранга 0), а для нерасщепляемой особенности особый слой у возмущенной системы ровно один. Результат возмущения, соответствующего расщепляемой особенности  $U(L)$ , будем называть ее *расщеплением*.

Далее мы будем рассматривать только особенности типа почти прямого произведения. Для них удобно работать с другим более узким определением “покомпонентной” устойчивости (нерасщепляемости).

**Определение.** Назовем особенность типа почти прямого произведения  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$  *покомпонентно нерасщепляемой* (или *покомпонентно устойчивой*), если при любых возмущениях  $f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha}, \dots, f_{n,\alpha}$  функций  $f_1, f_2, \dots, f_n$  (заданных на  $V_1, V_2, \dots, V_n$  соответственно), инвариантных инвариантных относительно действий  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  группы  $G$  и постоянных на граничных окружностях, возмущенная система лиувиллево эквивалентна исходной при всех  $\alpha \in [0, \varepsilon]$  для некоторого  $\varepsilon > 0$ .

Наоборот, будем говорить, что седловая особенность  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$  является *покомпонентно расщепляемой*, если существуют  $G$ -инвариантные “покомпонентные” возмущения  $f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha}, \dots, f_{n,\alpha}$  функций  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , для которых у возмущенной системы число особых слоев, содержащих точки ранга нуль, больше одного. Соответствующее фактор-многообразие  $(P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n)/G$  со слоением, заданным функциями  $f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha}, \dots, f_{n,\alpha}$ , будем обозначать  $(V'_1 \times V'_2 \times \dots \times V'_n)/G$ .

Из покомпонентной расщепляемости следует расщепляемость в общем смысле (определение 4.1.2).

В разделе 4.2 приводится классификация особенностей типа седло-седло сложности два с точки зрения их расщепляемости или нерасщепляемости.

В разделе 4.2.1 обсуждаются некоторые свойства меченой круговой молекулы особенности типа седло-седло, связанные с устойчивостью (или возможностью расщепления) такой особенности.

Приводится определение круговой молекулы расщепления.

Как и выше, мы будем рассматривать особенности типа почти прямого произведения  $(V_1 \times V_2)/G$  и их покомпонентные возмущения.

**Определение.** Пусть  $(V'_1 \times V'_2)/G$  — покомпонентное расщепление особенности  $(V_1 \times V_2)/G$ , где  $V'_1 = (V_1, H_\varepsilon)$ ,  $V'_2 = (V_2, f_\varepsilon)$ . Рассмотрим простую замкнутую кривую на образе отображения момента  $(H_\varepsilon, f_\varepsilon)$ , ограничивающую область, в которой лежат все критические значения, имеющие в прообразе точки ранга нуль. Круговую молекулу, соответствующую такому пути, назовем *круговой молекулой покомпонентно расщепленной особенности* или для краткости *круговой молекулой расщепления*.

**Утверждение.** [42] Пусть  $B$  — круговая молекула особенности  $(W \times V)/G$ , а  $(W' \times V')/G$  — ее покомпонентное расщепление. Круговая молекула расщепления получается из  $B$  расщеплением некоторых 3-атомов, соответствующих компонентам молекулы  $B$ .

**Утверждение.** Все метки  $r$ , соответствующие ребрам между расщепленными 3-атомами, полученными расщеплением одного 3-атома круговой молекулы, равны  $\infty$ .

В доказательстве утверждения 4.2.1 строится соответствие между 3-атомами круговой молекулы до расщепления и наборами 3-атомов после расщепления. В смысле этого соответствия в дальнейшем будем говорить про *расщепленные 3-атомы круговой молекулы*. Круговая молекула расщепленной особенности связана с круговой молекулой особенности  $(V_1 \times V_2)/G$  необходимыми условиями расщепляемости. Некоторые из этих условий были сформулированы в работе [6].

**Теорема** (Необходимые условия покомпонентной расщепляемости [42]). Пусть задано покомпонентное расщепление особенности  $(V_1 \times V_2)/G$ .

1. Всякое ребро круговой молекулы 4-особенности является одним из ребер круговой молекулы расщепленной особенности.
2. Для каждого 3-атома со звездочками в круговой молекуле особенности  $(V_1 \times V_2)/G$  количество его звездочек (критических окружностей с неориентируемой сепаратрисной диаграммой) равно суммарному количеству звездочек в 3-атомах, соответствующих ему (в смысле утверждения 4.2.1) в круговой молекуле расщепления.

Приводится замечание к теореме о необходимых условиях расщепляемости.

**Замечание.** Необходимые условия расщепляемости сформулированы выше для случая покомпонентных возмущений, но, вероятно, они будут выполнены и для общего определения расщепляемости (см. определения 4.1.2 и 4.1.1).

Приводится утверждение о связи  $r$ -метки круговой молекулы до расщепления и после.

Рассмотрим бифуркационную диаграмму покомпонентно расщепленной особенности. По определению расщепления, особые точки типа седло-седло при расщеплении остаются особыми точками типа седло-седло, следовательно, на бифуркационной диаграмме в окрестности ее значения она имеет вид “креста”. Следовательно, бифуркационная диаграмма расщепления будет

состоять из склейки крестов (решетки), каждый из которых соответствуют особому слою возмущенного отображения момента. Рассмотрим для каждого такого креста его достаточно малую окрестность, которая содержит на бифуркационной диаграмме ровно одно особое значение ранга нуль. Для каждой такой окрестности (4-особенности) можно построить свою круговую молекулу, соответствующую ее границе. Такая круговая молекула будет *круговой молекулой особенности меньшей сложности* по отношению к круговой молекуле 4-особенности до расщепления. Назовем ребро круговой молекулы расщепления *особым*, если оно соответствует (при соответствии, указанном в утверждении 4.2.1) ребру (после расщепления) одной из круговых молекул 4-особенностей меньшей сложности. Уточним первое необходимое условие расщепляемости.

**Утверждение.** [42] *При расщеплении знаменатель метки  $r$  каждого ребра круговой молекулы сохраняется.*

В разделе 4.2.2 приводится классификация устойчивых особенностей сложности 2 типа седло-седло.

**Теорема** (О расщепляемости особенностей типа седло-седло сложности 2). [42] *Среди всех возможных особенностей сложности 2 типа седло-седло покомпонентно расщепляемыми являются 28 особенностей, остальные 11 являются покомпонентно нерасщепляемыми. Полный список особенностей вместе с их расщеплениями приведен в таблице 4.1.*

**Замечание.** Ключевым утверждением при доказательстве нерасщепляемости в теореме 4.2 была теорема 4.1 о необходимых условиях нерасщепляемости. Если доказать выполнение необходимых условий нерасщепляемости в случае общего определения расщепляемости, то все те же выкладки можно будет проделать и для теоремы 4.2.

**Замечание.** Также возможно ослабить условие покомпонентной расщепляемости: потребовать расщепляемость в общем смысле вместе с выполнением необходимых условий расщепляемости.

В разделе 4.2.3 описываются некоторые свойства меченых круговых молекул, которые позволяют установить расщепляемость или нерасщепляемость соответствующей особенности типа седло-седло сложности 2.

Рассмотрим, как расщепление особенности влияет на ее круговую молекулу на примере особенности  $(C_2 \times K_3)/\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  (номер 2 в таблице 4.1). Расщепление круговой молекулы этой особенности показано на рисунке 4.3. При этом расщеплении в прямом произведении  $C_2 \times K_3$  происходит возмущение слоения атома  $K_3$ , как показано на рисунке 4.6, затем происходит факторизация нового прямого произведения по действию группы  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ , продолженному на возмущение атома  $K_3$ . Атом  $K_3$  расщепляется на два атома  $C_2$ , соединенные двумя ребрами. Группа  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  становится группой симметрий соответствующих склеенных друг с другом атомов  $C_2$ . Круговая молекула этой особенности распадается на две круговые молекулы особенностей типа  $(C_2 \times C_2)/\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ , причем расщепление круговой молекулы происходит за счет расщеплений 3-атомов  $A^{***}$  и  $C_1$ . 3-Атом  $C_1$  распадается на два 3-атома  $B$  (в соответствии с рисунком 4.5. 3-Атом  $A^{***}$  можно представить, как фактор  $(K_3 \times O)/\mathbb{Z}_2(\alpha\beta, \alpha)$  (см. статью [40]), где  $O$  обозначает окружность. Возмутим в факторе  $(K_3 \times O)/\mathbb{Z}_2(\alpha\beta, \alpha)$  слоение атома  $K_3$ , как показано на рисунке 4.6. Как уже отмечено выше, атом  $K_3$  расщепится на два атома  $C_2$ , при этом действие группы продолжается на расщепление и таким образом получится два 3-атома

$(C_2 \times O)/\mathbb{Z}_2(\alpha\beta, \alpha)$ , которые и есть 3-атомы  $A^{**}$  (см. статью [40]). Таким образом, рисунки 4.5–4.8 дают нам информацию не только о расщеплении атомов почти прямого произведения, но и о расщеплении 3-атомов круговых молекул.

Вернемся к расщеплению круговой молекулы  $(C_2 \times K_3)/\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ . Как было показано выше, левая и правая части круговой молекулы расщепления соответствуют круговым молекулам сложности 1. Такое расщепление круговой молекулы назовем *внешним*. Внешнее расщепление происходит за счет расщепления всех 3-атомов в противоположных вершинах квадрата, соответствующего круговой молекуле (3-атомов  $A^{****}$  и  $C_1$ ).

**Утверждение.** [42] *Особенность типа седло-седло сложности 2, для круговой молекулы которой существует внешнее расщепление (см. пример на рисунке 4.3), является расщепляемой.*

Для расщепляемой особенности не всегда происходит внешнее расщепление ее круговой молекулы. Рассмотрим пример особенности  $(B \times L_2)/\mathbb{Z}_2$  (номер 26 в таблице 4.1). Расщепление ее круговой молекулы показано на рисунке 4.4.

Здесь расщепление почти прямого произведения происходит за счет возмущения слоения атома  $L_2$ , как показано на рисунке 4.7: атом  $L_2$  распадается на непересекающееся объединение двух окружностей и атома  $C_2$ , которые затем склеиваются с двумя атомами  $B$ . Расщепление почти прямого произведения при этом получается склеиванием двух особенностей типа  $(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$  и  $(B \times 2O)/\mathbb{Z}_2$  с особенностью  $(B \times 2B)/\mathbb{Z}_2$ , где  $2O$  и  $2B$  — непересекающееся объединение двух окружностей и соответственно двух атомов  $B$ , на котором группа  $\mathbb{Z}_2$  действует перестановкой. Эта склейка хорошо видна на круговой молекуле расщепления: левая часть круговой молекулы расщепления на рисунке 4.4 состоит из проекции на плоскость двух листов, на одном из которых расположена круговая молекула особенности  $(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$ , а на другом 3-атом  $B = (B \times 2O)/\mathbb{Z}_2$ , который является частью круговой молекулы особенности  $B \times B = (B \times 2B)/\mathbb{Z}_2$ .

Таким образом, расщепление также происходит за счет расщепления соответствующих 3-атомов в компонентах круговой молекулы, но сама круговая молекула расщепления является “сцепливанием” круговых молекул особенностей меньшей сложности. Такое расщепление назовем *внутренним*.

**Утверждение.** [42] *Особенность типа седло-седло сложности 2, для круговой молекулы которой существует внутреннее расщепление (см. пример на рисунке 4.4), является расщепляемой.*

Теперь можно сформулировать утверждение о связи круговой молекулы особенности типа седло-седло сложности 2 и возможности расщепления.

**Утверждение.** *Круговая меченая молекула особенности типа седло-седло сложности 2 определяет, существует ли покомпонентное расщепление этой особенности.*

Для круговых молекул особенностей сложности два существует обратная операция: операция склейки круговой молекулы особенности сложности 2 из двух круговых молекул особенностей сложности 1. Чтобы получить такую круговую молекулу, нужно взять две круговые молекулы сложности 1 (см. рис. 4.2), расположить их рядом или одну внутри другой, склеить их соответственно внешним или внутренним способом, указанным на рисунках 4.3 и 4.4 (склейке соответствуют стрелки снизу-вверх и справа-налево), и заменить 3-атомы в противоположных вершинах круговой молекулы согласно одной из перестроек на рисунках 4.5–4.8.

Если при такой операции получится круговая молекула особенности сложности 2, то по утверждению 4.2.4 соответствующая особенность сложности 2 является расщепляемой. Круговые молекулы особенностей, которые не получились указанным выше способом являются “претендентами на нерасщепляемость”. В случае особенностей типа седло-седло сложности 2 такие особенности являются нерасщепляемыми (утверждение 4.2.4). Такую операцию можно применить для проверки расщепляемости на компьютере.

В разделе 4.3 приводится критерий покомпонентной расщепляемости для седловых особенностей ранга нуль.

**Теорема** (А. А. Ошемков [42]). *Седловая особенность  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$  покомпонентно устойчива (не расщепляема) тогда и только тогда, когда группа  $G$  действует транзитивно на вершинах каждого из атомов  $V_1, V_2, \dots, V_n$  (т.е. на его седловых критических точках).*

С помощью этого критерия приводится другое доказательство теоремы о классификации особенностей типа седло-седло сложности два. В доказательстве используется лемма.

**Лемма.** [42] Для особенности типа седло-седло  $(V_1 \times V_2)/G$  группа  $G$  действует транзитивно на вершинах каждого из атомов  $V_1, V_2$  тогда и только тогда, когда  $l$ -тип этой особенности  $(W_1, W_2)$  состоит из пары атомов, т.е. поверхности  $S_1$  и  $S_2$ , соответствующие  $W_1$  и  $W_2$ , связны (см. определение  $l$ -типа в пункте 2 описания таблицы 4.1 перед теоремой 4.2).

Приводится несколько замечаний к теоремам о расщепляемости.

**Замечание.** Для каждой из 28 неустойчивых особенностей, представленной в виде почти прямого произведения  $(V_1 \times V_2)/G$ , можно также явно указать  $G$ -инвариантное возмущение слоения на одном из атомов  $V_1, V_2$ , расщепляющее его особый слой. Эти возмущения атомов представлены на рисунках 4.5–4.8. Тем самым эти рисунки дают другое доказательство неустойчивости этих 28 особенностей. Отметим, что, вообще говоря, для одного и того же атома могут потребоваться различные возмущения при доказательстве неустойчивости разных особенностей из таблицы 4.1. Например, на рисунке 4.8 приведены два возмущения атома  $P_4$ : при рассмотрении особенностей с номерами 12 и 20 необходимо первое, а для особенности с номером 23 — второе.

**Замечание.** Как показано выше, покомпонентная устойчивость особенности типа седло-седло эквивалентна связности обеих поверхностей ее  $l$ -типа. Несвязность этих поверхностей влечет полулокальную неустойчивость особенности в общем смысле. Если верно и обратное, то это давало бы критерий полулокальной устойчивости особенностей типа седло-седло в терминах ее  $l$ -типа.

**Замечание.** В работе Г. Х. Левина [6] тоже исследовался вопрос об устойчивости особенностей типа седло-седло. В частности, в ней сформулированы некоторые утверждения, аналогичные утверждениям настоящей работы, а также для некоторых из 39 особенностей типа седло-седло сложности 2 определено, являются ли они устойчивыми. Сделаем несколько комментариев по этому поводу.

1. В работе [6] рассмотрен некоторый “сценарий” расщепления круговой молекулы, после чего ошибочно сделано заключение о том, что особенности, молекулы которых не могут удовлетворять этому сценарию, являются устойчивыми. Основная ошибка заключалась в том, что на самом деле возможен второй сценарий расщепления круговой молекулы, который в работе [6] был пропущен (кроме того, при перечислении молекул, для которых

первый сценарий возможен, в работе [6] почему-то пропущены молекулы с номерами 13, 32, 33). Оба эти сценария описаны в (в разделе 4.2.3), где они названы соответственно “внешними” и “внутренним” расщеплением молекулы.

2. В работе [6] было сформулировано еще одно препятствие к существованию расщепления особенности, а именно, наличие 3-атомов сложности 1 (т.е.  $B$  или  $A^*$ ) в каждой из двух пар “противоположных” перестроек в круговой молекуле, из чего сделан вывод об устойчивости соответствующих особенностей. Отметим, что этому условию удовлетворяют лишь 9 особенностей из 39. Для двух особенностей (с номерами 18 и 38) таких 3-атомов в круговой молекуле нет, хотя они не являются покомпонентно расщепляемыми (см. таблицу 4.1). Отметим также, что рассуждения в работе [6] ведутся для устойчивости в смысле общего определения, но при таком определении устойчивость особенностей с номерами 18 и 38 там не доказана.
3. Неустойчивость особенностей доказана в работе [6] только для прямых произведений (четыре особенности с номерами 4, 11, 22, 30) с помощью возмущения слоения на одном из атомов-сомножителей. Рассмотрение  $G$ -инвариантных возмущений для почти прямых произведений позволило нам доказать неустойчивость 28 особенностей из всех 39 особенностей типа седло-седло сложности 2 (см. теорему 4.2 и утверждение 4.2.4), про большую часть из которых в работе [6] утверждалось, что они устойчивы.

В **приложении** приводится бигамильтонов формализм и применение его к интегрируемой гамильтоновой системе “волчок Лагранжа”.

Пусть  $e(3)$  — алгебра Ли группы движений трехмерного пространства, тогда на  $e(3)^*$  можно ввести такие координаты  $J = (J_1, J_2, J_3)$  и  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , что в этих координатах скобка Ли-Пуассона имеет вид

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = 0. \quad (2)$$

Назовем эту скобку  $P$ . Она имеет две функции Казимира

$$C_1 = |x| = \sum_{k=1}^3 x_k^2, \quad C_2 = \langle x, J \rangle = \sum_{k=1}^3 x_k J_k. \quad (3)$$

Зафиксируем симплектический лист  $e(3)^*$ :  $O_{\alpha\beta} = \{x, J : C_1 = \alpha^2, C_2 = \beta\}$ , он является четырехмерным симплектическим многообразием, т. е. многообразием с невырожденной симплектической формой на нем.

Волчок Лагранжа — это интегрируемая гамильтонова система со скобкой  $P$  и гамильтонианом

$$H_2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + ax_3, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (4)$$

тогда имеется дополнительный интеграл  $H_1 = J_3$ .

В этом случае легко описывается множество особых точек отображения момента.

**Следствие.** Ранг  $P_\lambda$  заданной формулой (5.6) падает тогда и только тогда, когда выполнено

одно из соотношений

$$\begin{cases} x_1 = \lambda J_1, \\ x_2 = \lambda J_2, \\ x_3 = \lambda J_3 - \lambda^2 \frac{a}{2} \end{cases} \quad \text{при } \lambda \in \mathbb{R}; \quad (5)$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = J_1 = J_2 = 0, \\ x_3 = \lambda J_3 - \lambda^2 \frac{a}{2}, \\ J_3^2 - 2ax_3 > 0 \end{cases} \quad \text{при } \lambda = \frac{J_3 \pm \sqrt{J_3^2 - 2ax_3}}{a} \in \mathbb{R}; \quad (6)$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = J_1 = J_2 = 0, \\ x_3 = \lambda J_3 - \lambda^2 \frac{a}{2}, \\ J_3^2 - 2ax_3 < 0 \end{cases} \quad \text{при } \lambda = \frac{J_3 \pm \sqrt{J_3^2 - 2ax_3}}{a} \in \mathbb{C}; \quad (7)$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = J_1 = J_2 = 0, \\ x_3 = \lambda J_3 - \lambda^2 \frac{a}{2}, \\ J_3^2 - 2ax_3 = 0 \end{cases} \quad \text{при } \lambda = \frac{J_3}{a} \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

**Теорема.** [39] Пусть дана интегрируемая система, задаваемая функциями Казимира (5.2), скобкой  $P$  (5.1), гамильтонианом  $H_2$  и дополнительным интегралом  $H_1$  (5.3). Тогда особыми точками отображения момента являются точки, перечисленные в формулах (5.7)-(5.10) причем в случае (5.7) они имеют эллиптический тип, в случае (5.8) — тип центр-центр, в случае (5.9) — тип фокус-фокус, в случае (5.10) — вырожденный тип.

В **заключении** исследуется расщепляемость седловых особенностей для интегрируемых случаев Эйлера, Лагранжа, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, Ковалевской, Клебша, Стеклова, Соколова, Чаплыгина-Горячева-Яхьи, Ковалевской в двойном поле сил, Ковалевской-Соколова и Ковалевской-Яхьи. Результаты представлены в таблице 6.1.

## Благодарность

Автор выражает свою глубокую благодарность своим научным руководителям академику РАН А.Т. Фоменко и профессору А. А. Ошемкову за постановку задачи, научные идеи, постоянное внимание к работе и поддержку, а также профессору Е. А. Кудрявцевой за очень важные замечания и плодотворные дискуссии. Автор благодарен всему коллективу кафедры Дифференциальной геометрии и приложений за творческую атмосферу и научную поддержку в процессе написания диссертации.

# Глава 1

## Основные определения.

### 1.1 Интегрируемые гамильтоновы системы.

#### 1.1.1 Понятие интегрируемой гамильтоновой системы.

**Определение 1.1.1.** Четномерное гладкое многообразие  $M^{2n}$  называется *симплектическим*, если на нём можно ввести симплектическую структуру, то есть определить невырожденную, замкнутую кососимметричную форму на касательных векторах к  $M^{2n}$ .

**Определение 1.1.2.** Пусть  $(M^{2n}, \omega)$  — симплектическое многообразие с некоторой гладкой функцией  $H$ . Тогда определим векторное поле  $\text{sgrad}H$ , по следующему правилу  $\text{sgrad}H = \omega^{-1}dH$ .

**Определение 1.1.3.** Динамическая система на гладком многообразии  $M^{2n}$  называется *гамильтоновой*, если на многообразии  $M^{2n}$  можно выбрать симплектическую структуру и функцию  $H$  таким образом, что динамическая система запишется в виде  $\dot{x} = \text{sgrad}H$ . В этом случае функцию  $H$  называют гамильтонианом.

**Определение 1.1.4.** Определим на симплектическом многообразии  $(M^{2n}, \omega)$  *скобку Пуассона* по следующему правилу:  $\{f, g\} = -\text{sgrad}f(g)$ . Если скобка Пуассона двух функций  $\{f, g\}$  равняется нулю, то говорят, что *функции  $f$  и  $g$  находятся в инволюции*.

#### 1.1.2 Теорема Лиувилля.

Пусть  $M^{2n}$  — симплектическое многообразие и  $\dot{x} = \text{sgrad}H$  — гамильтонова система с гладким гамильтонианом  $H$ .

**Определение 1.1.5.** Гамильтонова система называется *вполне интегрируемая по Лиувиллю*, если  $f_1, f_2, \dots, f_n$  — независимые, попарно коммутирующие интегралы этой системы относительно скобки Пуассона  $\{f, g\} = -\text{sgrad}f(g)$  и векторные поля  $\text{sgrad}f_i$  полны для всех  $i$  (то есть естественный параметр на их интегральных траекториях определен на всей числовой прямой).

**Определение 1.1.6.** *Гамильтоновым действием (поток)* на симплектическом многообразии  $M^{2n}$  с интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системой  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  называется отображение  $g^{t_1, t_2, \dots, t_n} : M^{2n} \rightarrow M^{2n}$ , являющееся сдвигом вдоль интегральных траекторий:  $g^{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_0) = g^{t_1} \circ g^{t_2} \circ \dots \circ g^{t_n}(x_0)$ , где  $g^{t_i}(x_0) = \{l_i(t_i) | l_i(0) = x_0, \dot{l}_i(t) = \text{sgrad}(f_i)|_{l_i(t)}\}$ .

**Определение 1.1.7.** Слоением Лиувилля, отвечающим интегрируемой гамильтоновой системе, называется разбиение многообразия  $M^{2n}$  на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов  $f_1, f_2, \dots, f_n$ .

**Определение 1.1.8.** Лагранжесвым подмногообразием  $2n$ -мерного симплектического многообразия  $(M^{2n}, \omega)$  называется такое  $n$ -мерное подмногообразие  $L^n \subset M^{2n}$ , что симплектическая структура  $\omega$  обращается в нуль тождественно на  $L^n$ .

**Теорема 1.1** (Лиувилля). Пусть на  $M^{2n}$  задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система  $v = \text{sgrad}H$  и  $T_\xi$  – регулярная поверхность уровня интегралов  $f_1, \dots, f_n$ . Тогда

1.  $T_\xi$  – гладкое лагранжесво подмногообразие, инвариантное относительно потоков  $v = \text{sgrad}H$  и  $\text{sgrad}f_1, \dots, \text{sgrad}f_n$ .
2. Если подмногообразие  $T_\xi$  связно и компактно, то  $T_\xi$  диффеоморфно  $n$ -мерному тору  $T^n$ . Этот тор называется тором Лиувилля.
3. Слоение Лиувилля в некоторой окрестности  $U$  тора Лиувилля  $T_\xi$  тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению тора  $T^n$  на диск  $D^n$ .
4. В окрестности  $U = T^n \times D^n$  существует система координат  $s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ , называемых переменными действие-угол, со следующими свойствами:

- $s_1, \dots, s_n$  – координаты на диске  $D^n$ ,  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  – стандартные угловые координаты на торе  $T^n$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$
- $\omega = \sum d\varphi_i \wedge ds_i$ .
- Переменные действия  $s_i$  являются функциями от интегралов  $f_1, \dots, f_n$ .
- В переменных действие-угол гамильтонов поток  $v$  выпрямляется на каждом торе Лиувилля из окрестности  $U$ , т.е. гамильтоновы уравнения принимают вид

$$\dot{s}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \dots, s_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Это означает, что на каждом торе поток  $v$  задаёт условно-периодическое движение, а траектории являются прямолинейными обмотками тора (рациональными или иррациональными).

### 1.1.3 Понятие эквивалентности слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем.

**Определение 1.1.9.** Слоением Лиувилля, отвечающим интегрируемой гамильтоновой системе на симплектическом многообразии  $(M^{2n}, \omega)$  с интегралами  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , называется разбиение  $M^{2n}$  на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов  $f_1, f_2, \dots, f_n$ .

Слоение Лиувилля можно также рассматривать не на всем фазовом пространстве  $M^{2n}$ , а на любом его инвариантном подмножестве (т. е. таком, которое вместе с каждой точкой содержит весь ее слой), например, на изоэнергетической поверхности или на прообразе любой гладкой кривой в образе отображения момента.

**Определение 1.1.10.** Слоения Лиувилля на инвариантных подмножествах  $U_1$  и  $U_2$  многообразий  $M_1^{2n}$  и  $M_2^{2n}$  называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный гомеоморфизм  $U_1 \rightarrow U_2$  (т.е. переводящий каждый слой слоения Лиувилля на  $U_1$  в слой слоения Лиувилля на  $U_2$ ).

Во многих задачах механики твердого тела соответствующую систему на шестимерном фазовом многообразии часто можно ограничить на четырехмерное симплектическое многообразие  $M^4$ . Таким образом, важным случаем являются интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. В этом случае мы будем использовать немного “усиленное” определение лиувиллевой эквивалентности.

**Определение 1.1.11.** Рассмотрим две интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы  $(M_1^4, \omega_1, f_1, f_2)$  и  $(M_2^4, \omega_2, g_1, g_2)$  на симплектических многообразиях  $M_1^4$  и  $M_2^4$ . Пусть  $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$  и  $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : g_1(x) = c_2\}$  — соответствующие изоэнергетические поверхности. Слоения Лиувилля  $(Q_1^3, \omega_1, f_2)$  и  $(Q_2^3, \omega_2, g_2)$  называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный диффеоморфизм  $Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$ , который, кроме того, сохраняет ориентацию 3-многообразий  $Q_1^3$  и  $Q_2^3$  и ориентации всех критических окружностей.

#### 1.1.4 Отображение момента и бифуркационная диаграмма интегрируемой гамильтоновой системы.

**Определение 1.1.12.** Пусть  $M^{2n}$  — симплектическое многообразие с интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системой  $v = \text{sgrad} f_1$ , и  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  — ее независимые интегралы в инволюции. Гладкое отображение  $\mathcal{F} : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , где  $\mathcal{F}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$  называется *отображением момента*.

**Определение 1.1.13.** Точка  $x_0 \in M^{2n}$  является *критической (особой) точкой отображения момента  $\mathcal{F}$* , если ранг  $d\mathcal{F}$  меньше  $n$ . Образ  $\mathcal{F}(x_0) \in \mathbb{R}^n$  называется *особым значением отображения момента  $\mathcal{F}$* .

**Определение 1.1.14.** Слои слоения Лиувилля, не содержащие критических точек отображения момента, называются *регулярными*. Все остальные слои называются *особыми*.

**Определение 1.1.15.** Множество  $\Sigma$  всех особых значений отображения момента  $\mathcal{F} : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется *бифуркационной диаграммой отображения момента  $\mathcal{F}$* .

Мера множества  $\Sigma$  равна нулю в  $\mathbb{R}^n$ . В большинстве примеров интегрируемых систем, встречающихся в физике и механике, множество  $\Sigma$  является многообразием с особенностями.

## 1.2 Инварианты интегрируемых гамильтоновых систем с 1-ой степенью свободы.

### 1.2.1 Понятие 2-атома.

Рассмотрим на симплектическом многообразии  $M^2$  гладкую функцию  $f$ .

**Определение 1.2.1.** Гладкая функция  $f$  на  $M^2$  называется *функцией Морса*, если ее Гессиан во всех критических точках невырожден.

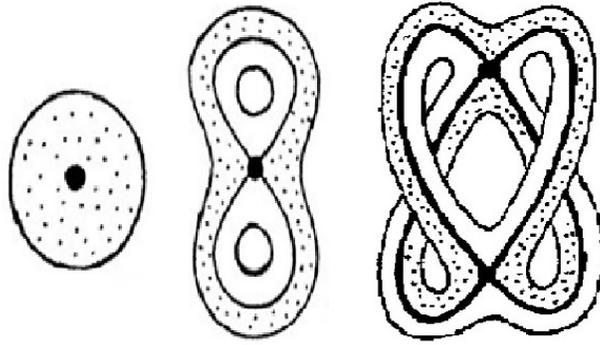


Рис. 1.1: Атом  $B$  слева и  $C_1$  справа соответственно.

**Определение 1.2.2.** Пусть  $f$  — функция Морса на компактной ориентированной поверхности  $M^2$ ,  $c$  — критическое значение функции  $f$ . *2-Атомом*  $(P^2, f)$  называется связная компонента  $P^2$  окрестности особого слоя функции  $f$ , задаваемая неравенством  $c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon$  для достаточно малого  $\varepsilon$ , расслоенная на линии уровня функции  $f$  и рассматриваемая с точностью до послойной эквивалентности.

Рассмотрим примеры часто встречающихся 2-атомов. Двумерный атом  $A$  гомеоморфен диску — он расслоен на концентрические окружности, стягивающиеся на особый слой — центральную точку. Двумерный атом  $B$  представляет собой перестройку одной окружности в две, особым слоем этого атома является “восьмерка”. Двумерный атом  $C_1$  представляет собой перестройку одной окружности в одну. Примеры этих атомов представлены на рисунке 1.1. Также нам понадобятся две серии атомов  $C_1^n$  и  $A^n$ . Двумерный атом  $C_1^n$  представляет собой склейку  $n$  атомов  $C_1$ , следовательно, перестраивает одну окружность в одну. Двумерный атом  $A^n$  при  $n = 2k$  представляет собой перестройку одну окружность в одну, а при  $n = 2k + 1$  представляет собой перестройку двух окружностей в одну. Примеры этих атомов представлены на рисунке 1.2.

### 1.2.2 Понятие $f$ -графа.

**Определение 1.2.3.** Рассмотрим граничные отрицательные (т.е. докритические) окружности атома и все сепаратрисы поля  $\text{grad} f$ , идущие из точек на этих окружностях в критические точки функции  $f$ . Назовем вершинами  $f$ -графа точки на граничных окружностях, из которых идут сепаратрисы, и определим ребра  $f$ -графа двух типов: ориентированные (дуги окружностей, на которые вершины разбивают окружности, с ориентацией, индуцированной из  $P^2$ ) и неориентированные (образованные парами сепаратрис, входящих в одну и ту же критическую точку). Граф  $\Gamma$ , гомеоморфный полученному, назовем  $f$ -графом 2-атома  $(P^2, f)$ .

Все вершины построенного  $f$ -графа имеют степень три, причем в каждую вершину одно ребро входит, одно выходит и одно не имеет ориентации. В описанном построении  $f$ -графа имеется произвол в выборе ориентации на  $P^2$  и направления роста функции  $f$ . С точностью до замены ориентации на  $P^2$  и замены функции  $f$  на  $-f$  соответствие между ориентируемыми 2-атомами и  $f$ -графами взаимно однозначное (см. [26]).

Приведем примеры  $f$ -графов, соответствующих некоторым 2-атомам. На рисунке 1.3 представлены  $f$ -графы 2-атомов  $B$  (два двойственных  $f$ -графа) и  $C_1$ , а также  $f$ -графы атомов  $C_1^n$

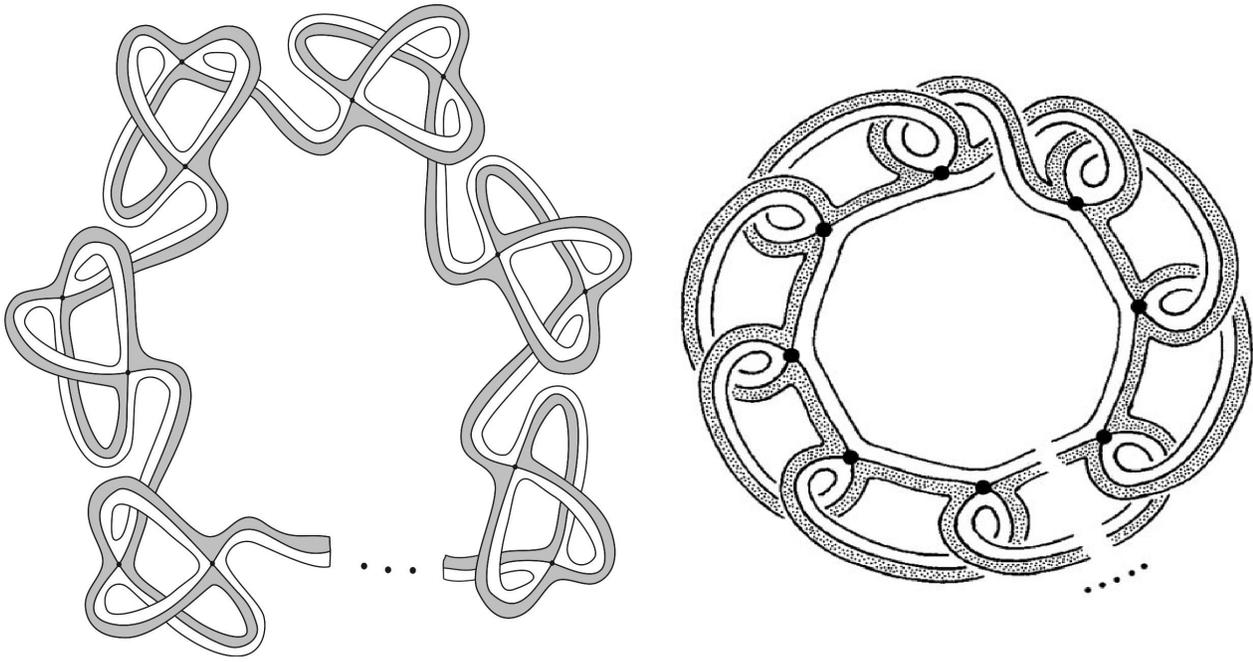


Рис. 1.2: Атом  $C_1^n$  слева и  $A^n$  справа соответственно.

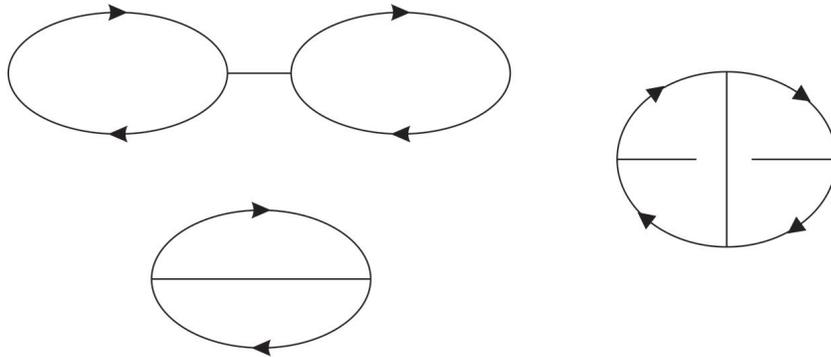


Рис. 1.3: Два двойственных  $f$ -графа атома  $B$  (слева вверху и внизу) и  $f$ -граф атома  $C_1$  справа.

и  $A_n$  на рисунке 1.4.

### 1.2.3 Понятие молекулы.

Каждой вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системе с одной степенью свободы  $(M^2, \omega, H)$  можно сопоставить инвариант Лиувиллевой эквивалентности — молекулу.

Рассмотрим вполне интегрируемую по Лиувиллю гамильтонову систему с одной степенью свободы на симплектическом связном компактном многообразии  $(M^2, \omega)$  и гладким гамильтонианом  $H$ . Пусть также  $H$  является функцией Морса. Тогда на  $M^2$  существует лишь конечное число особых точек функции  $H$ . Слоению на линии функции  $H$  в малой окрестности каждой особой значения функции  $H$  сопоставим 2-атом. Каждая такой 2-атом соединяется некоторым другим 2-атомом по однопараметрическому (возможно нескольким) семейству окружностей,

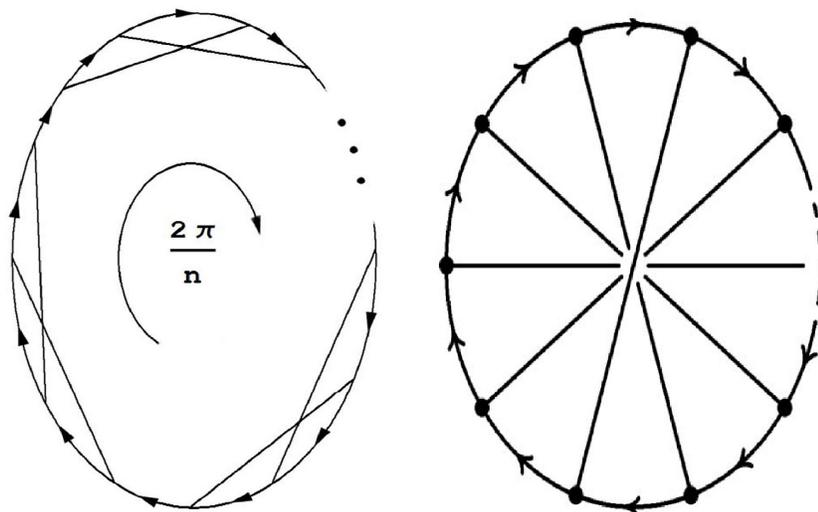


Рис. 1.4:  $f$ -графы атомов  $C_1^n$  слева и  $A_n$  справа.

соответствующих регулярным значениям функции  $H$ .

**Определение 1.2.4.** Молекулой интегрируемой гамильтоновой системы называется граф, ребрам которого соответствуют однопараметрические семейства окружностей, а вершинам — 2-атомы, отвечающие перестройкам этих окружностей через особый слой.

Пример молекулы интегрируемой гамильтоновой системы на двумерном торе изображен на рисунке 1.5.

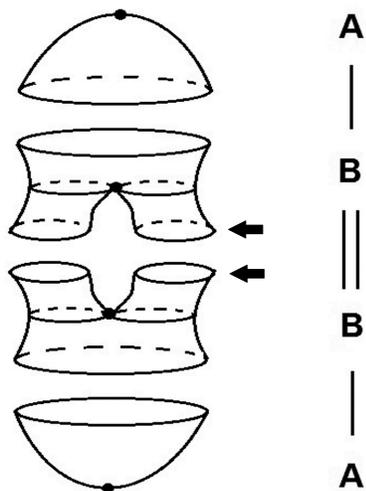


Рис. 1.5: Молекула интегрируемой гамильтоновой системы на двумерном торе.

Молекула в случае одной степени свободы — это полный инвариант по отношению к Лиувиллевой эквивалентности. Если на рисунке 1.5 окружности, помеченные стрелками, склеить

с противоположной ориентацией, тогда вместо тора получится бутылка Клейна, но так как мы рассматриваем интегрируемую гамильтонову систему на симплектическом многообразии, то ориентация на нем определена однозначно.

**Теорема 1.2** (А. Т. Фоменко [5]). Пусть  $W(X^2, f)$  и  $W(Y^2, g)$  — молекулы двух функций Морса на ориентированных поверхностях  $X$  и  $Y$ . Если молекулы совпадают, то поверхности  $X$  и  $Y$  диффеоморфны, а слоения на них, порождаемые функциями  $f$  и  $g$  лиувиллево эквивалентны.

### 1.3 Инварианты интегрируемых гамильтоновых систем с 2-мя степенями свободы.

#### 1.3.1 3-атом.

Пусть на симплектическом многообразии  $M^4$  задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система  $v = \text{sgrad}H$  с интегралами в инволюции  $H$  и  $f$ . Рассмотрим изоэнергетическую поверхность  $Q_h^3 = \{x \in M^4 | H(x) = h\}$ . Будем рассматривать только такие поверхности  $Q_h^3$ , что  $dH|_{Q_h^3} \neq 0$ .

**Определение 1.3.1.** Функция  $f$  на изоэнергетической поверхности  $Q_h^3$  называется *функцией Ботта*, если ядро Гесса функции  $f$  в каждой критической точке  $x_0$  совпадает с касательным пространством к критическому подмногообразию.

Пусть  $L$  — особый слой слоения Лиувилля на  $Q_h^3$ . Рассмотрим окрестность  $U(L)$  этого слоя, инвариантную относительно гамильтонова потока. Как и в двумерном случае, в качестве  $U(L)$  возьмем связную компоненту множества  $f^{-1}(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ , содержащую особый слой  $L$  (здесь  $c = f(L)$  — критическое значение функции  $f$ ). Окрестность  $U(L)$  представляет собой трехмерное многообразие с естественной структурой слоения Лиувилля. Введем на классе таких многообразий отношение эквивалентности следующим образом: будем считать два таких трехмерных многообразия со структурой слоения Лиувилля лиувиллево эквивалентными, если

1. существует диффеоморфизм между ними, сохраняющий структуру слоения Лиувилля (послойный),
2. этот диффеоморфизм сохраняет ориентацию трехмерных многообразий и ориентацию на критических окружностях, которая задается гамильтоновым потоком.

**Определение 1.3.2.** 3-атомом назовем класс лиувиллевой эквивалентности трехмерного многообразия  $U(L)$ . Число критических окружностей в 3-атоме назовем его *сложностью*.

#### 1.3.2 Расслоение Зейферта и 2-атомы со звездочками.

**Определение 1.3.3.** Компактное ориентируемое трехмерное многообразие (с краем или без края), разбитое на непересекающиеся простые замкнутые кривые (слои), называется *многообразием Зейферта*, если каждый слой имеет целиком состоящую из слоев окрестность, послойно гомеоморфную расслоенному полноторию. Многообразие Зейферта с заданной на нем структурой слоев называется *расслоением Зейферта*.

Рассмотрим некоторый 3-атом  $U(L)$ . Имеет место теорема (см. подробнее [12]–[14]).

**Теорема 1.3** (А. Т. Фоменко [5]).

1. Трёхмерное многообразие  $U(L)$  является многообразием Зейферта, особые слои которого (если они существуют) имеют один и тот же тип  $(2, 1)$ .
2. Эти особые слои являются в точности критическими окружностями интеграла  $f$ .
3. Если особых слоев у этого расслоения Зейферта нет, то многообразие  $U(L)$  является прямым произведением  $P(L) \times S^1$ , где  $P(L)$  — двумерная ориентируемая поверхность с краем, а  $S^1$  — окружность.

**Определение 1.3.4.** Рассмотрим теперь 3-атом  $U(L)$  со структурой расслоения Зейферта на нём. Обозначим через  $\pi : U(L) \rightarrow P^2$  его проекцию на двумерную базу  $P^2$  с графом  $K$ , где  $K$  — образ  $\pi(L)$  особого слоя  $L$  при проекции  $\pi$ . Далее, отметим на базе  $P^2$  звездочками те точки, в которые проектируются особые слои расслоения Зейферта (т.е. слои типа  $(2,1)$ ). В результате получим 2-атом со звездочками  $(P^2, K')$ .

По теореме 1.3 существует взаимнооднозначное соответствие между 3-атомами и дополненным множеством 2-атомов (вместе с 2-атомами со звездочками): базой расслоения Зейферта 3-атома является либо 2-атом (если нет особых слоев), либо 2-атом со звездочками (если расслоение нетривиальное), и обратно, по базе  $P^2$  с отмеченными на ней звездочками однозначно с точностью до послышной эквивалентности восстанавливается 3-многообразие  $U(L)$  со структурой расслоения Зейферта.

### 1.3.3 Круговая молекула.

Пусть на симплектическом многообразии  $M^4$  задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система  $v = \text{sgrad}H$  с интегралами в инволюции  $H$  и  $f$ . Рассмотрим бифуркационную диаграмму  $\Sigma$  отображения момента  $(H, f)$ .

**Определение 1.3.5.** Назовем особыми точками бифуркационной диаграммы  $\Sigma$  образы особых точек ранга нуль и вырожденных точек ранга один, а также точки пересечения (или самопересечения) гладких дуг, из которых состоит бифуркационная диаграмма  $\Sigma$ .

**Определение 1.3.6.** Гладкая параметризованная кривая  $\gamma$  без самопересечений в плоскости  $\mathbb{R}^2(H, f)$  называется допустимой, если она пересекает бифуркационную диаграмму  $\Sigma$  трансверсально и не проходит через особые точки бифуркационной диаграммы  $\Sigma$ .

Прообраз любой допустимой кривой — это трёхмерное многообразие с заданным на нём слоением Лиувилля. Аналогично случаю интегрируемой гамильтоновой системы с одной степенью свободы, возникает естественный инвариант этого слоения — круговая молекула.

**Определение 1.3.7.** Круговой молекулой называется граф, соответствующий допустимой кривой  $\gamma$ , ребра которого соответствуют однопараметрическим семействам торов Лиувилля, а вершины — 3-атомам, на которых происходят бифуркации.

При этом в вершинах графа помещают символы, которые обозначают типы бифуркаций (ввиду взаимнооднозначного соответствия между 3-атомами и 2-атомами, эти перестройки обозначаются той же буквой, что и 2-атомы:  $A, B, C_1, A^*$  и т.д.). В отличие от случая интегрируемой гамильтоновой системы с одной степенью свободы, круговая молекула — это не полный инвариант по отношению к Лиувиллевой эквивалентности.

### 1.3.4 Метки круговой молекулы.

Для чтобы круговая молекула стала полным инвариантом по отношению к Лиувиллевой эквивалентности необходимо задать способ склейки граничных торов, соответствующих 3-атомам, соединенным одним ребром.

Разрежем каждое ребро круговой молекулы посередине. Круговая молекула распадется на отдельные 3-атомы. Это означает, что мы разрежали многообразие по некоторым торам Лиувилля на отдельные атомы. Пусть мы хотим произвести обратную склейку. Круговая молекула сообщает, какие пары граничных торов мы должны склеивать между собой. Чтобы определить способ склейки этих торов, каждому разрезанному ребру сопоставим матрицу склейки, определяющую изоморфизм фундаментальных групп склеивающихся торов. Для того, чтобы задать эту матрицу, фиксируем на торах системы координат — пары независимых ориентированных циклов  $(\lambda, \mu)$ , образующие фундаментальной группы  $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  (подробнее см. [5]).

Рассмотрим произвольное ребро  $e_i$  молекулы и зададим на нем ориентацию. Разрежем это ребро и определим на торах Лиувилля, соответствующих концам разреза, допустимые системы координат  $(\lambda_i^-, \mu_i^-)$  — на начале ребра и  $(\lambda_i^+, \mu_i^+)$  — на конце ребра. Рассматривая эти пары циклов как базисы в группе одномерных гомологий тора, получаем матрицу склейки

$$\begin{pmatrix} \lambda_i^+ \\ \mu_i^+ \end{pmatrix} = C_i \begin{pmatrix} \lambda_i^- \\ \mu_i^- \end{pmatrix}, C_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}.$$

$C_i$  — целочисленная матрица с определителем равным -1. Эта матрица определена не однозначно, с точностью до допустимых замен координат (см. [5]).

**Определение 1.3.8.** Числовой рациональной меткой  $r_i$  на ребре  $e_i$  круговой молекулы называется:

$$r_i = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{\beta_i} \bmod 1 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, & \beta_i \neq 0, \\ \infty, & \beta_i = 0. \end{cases}$$

**Определение 1.3.9.** Числовой рациональной меткой  $\varepsilon_i$  на ребре  $e_i$  круговой молекулы называется:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \text{sign } \beta_i, & \beta_i \neq 0, \\ \text{sign } \alpha_i, & \beta_i = 0. \end{cases}$$

Несмотря на то, что матрица склейки  $C_i$  определена неоднозначно, метки  $r_i$  и  $\varepsilon_i$  являются инвариантами, т.е. не меняются при допустимых заменах координат.

Дадим определение метки  $n_k$ . Если разрезать молекулу по всем рёбрам с конечной  $r$ -меткой, то она распадется на несколько связных компонент. Эти связные компоненты назовем семьями. Рассмотрим теперь отдельную семью. Все рёбра, имеющие в ней хотя бы одну вершину, можно разделить на три класса (с учетом имеющейся на них ориентации): входящие, выходящие и внутренние.

**Определение 1.3.10.** Метка  $n_k$ , отвечающая данной семье, определяется как сумма целых чисел  $\theta_i$  по всем ребрам этой семьи, где

$$\theta_i = \begin{cases} \left[ \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right], & \text{если } e_i \text{ — выходящее ребро,} \\ \left[ -\frac{\delta_i}{\beta_i} \right], & \text{если } e_i \text{ — входящее ребро,} \\ \left[ -\frac{\gamma_i}{\alpha_i} \right], & \text{если } e_i \text{ — внутреннее ребро.} \end{cases}$$

Заметим, что метка  $n_k$  является характеристическим классом расслоения Зейферта.

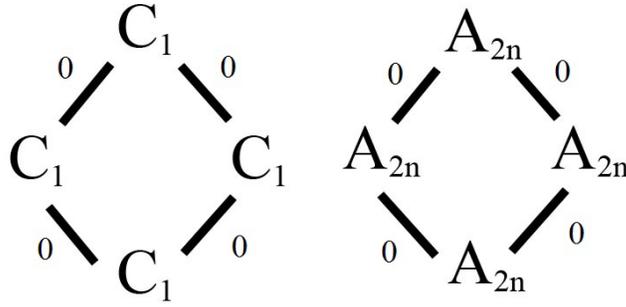


Рис. 1.6: Круговые меченые молекула прямых произведений атомов  $C_1 \times C_1$  слева и  $A_{2n} \times A_{2n}$  справа.

**Определение 1.3.11.** Круговая молекула, снабженная метками  $r_i$ ,  $\varepsilon_i$  и  $n_k$ , называется *круговой меченой молекулой*, или инвариантом Фоменко–Цишанга.

Пример круговой меченой молекулы показан на рисунке 1.6.

**Гипотеза 1.1** (А. Т. Фоменко [5]). *Если на особом слое все особые точки являются невырожденными, то круговая меченая молекула является полным инвариантом четырехмерной особенности в смысле Лиувиллевой эквивалентности.*

Гипотеза 1.1 А. Т. Фоменко верна если особые все точки имеют тип центр–центр, либо центр–седло, либо фокус–фокус. В случае типа седло–седло это гипотеза не верна (см. подробнее раздел 2.3).

## 1.4 Инварианты интегрируемых гамильтоновых систем с $n$ степенями свободы.

### 1.4.1 Теорема Элиассона.

Пусть  $M^{2n}$  — симплектическое многообразие с интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системой  $v = \text{sgrad} f_1$ , и  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  — ее независимые интегралы в инволюции. Пусть  $x_0 \in M^{2n}$  — особая точка ранга нуль отображения момента  $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ . Определим для каждой функции  $f_i$  линейный оператор  $A_{f_i} : T_{x_0}M \rightarrow T_{x_0}M$  по формуле  $A_{f_i} = \omega^{-1}d^2 f_i(x_0)$ . Этот оператор является линеаризацией векторного поля  $\text{sgrad} f_i$  в точке  $x_0$  и может быть интерпретирован как элемент алгебры Ли  $\text{sp}(T_{x_0}M)$  (т. е. алгебры Ли группы линейных симплектических преобразований касательного пространства  $T_{x_0}M$ ). Поскольку интегралы  $f_1, f_2, \dots, f_n$  попарно коммутируют, следовательно, особая точка  $x_0$  ранга нуль задает коммутативную подалгебру  $h_{x_0}$  в  $\text{sp}(T_{x_0}M)$  порожденную операторами  $A_{f_1}, A_{f_2}, \dots, A_{f_n}$ .

**Определение 1.4.1.** Особая точка  $x_0 \in M^{2n}$  ранга нуль называется *невырожденной*, если алгебра  $h_{x_0}$ , порожденная операторами  $A_{f_1}, A_{f_2}, \dots, A_{f_n}$  ( $A_{f_i} = \omega^{-1}d^2 f_i(x_0)$ ), является подалгеброй Картана в алгебре Ли  $\text{sp}(T_{x_0}M)$ .

**Теорема 1.4** (Элиассон). Пусть  $x_0$  - невырожденная особая точка ранга нуль интегрируемой гамильтоновой системы  $(f_1, f_2 \dots, f_n)$  на симплектическом многообразии  $(M^{2n}, \omega)$ . Тогда в некоторой окрестности точки  $x_0 \in M^{2n}$  существуют симплектические координаты  $q_1, q_2 \dots q_n, p_1, p_2 \dots p_n$  и интегралы  $f'_1, f'_2 \dots, f'_n$  (задающие то же слоение Лиувилля, что и интегралы  $f_1, f_2 \dots, f_n$ ) такие, что функции  $f'_i(q_1, q_2 \dots q_n, p_1, p_2 \dots p_n)$  задаются одной из формул

$$\begin{aligned} (1) \quad & f'_i = p_i^2 + q_i^2 && (\text{эллиптический случай}), \\ (2) \quad & f'_i = p_i q_i && (\text{гиперболический случай}), \\ (3) \quad & \begin{aligned} f'_i &= p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i \\ f'_{i+1} &= p_i q_i + p_{i+1} q_{i+1} \end{aligned} && (\text{случай фокус-фокус}). \end{aligned}$$

### 1.4.2 Типы особенностей в двумерном и четырехмерном случаях.

В двумерном и четырехмерном случаях ситуация значительно упрощается. В двумерном случае (для систем с одной степенью свободы) существуют только две невырожденные особенности. Невырожденные особенности в этом случае в точности совпадают с невырожденными особенностями функции  $H$  в смысле теории Морса.

**Лемма 1.5** (Лемма Дарбу-Морса). Для любой невырожденной критической точки  $x_0$  функции  $H$  на двумерном симплектическом многообразии  $(M^2, \omega)$  существуют такие локальные симплектические координаты  $p, q$ , что функция  $H$  зависит либо только от  $p^2 + q^2$ , либо только от  $pq$ :

$$\begin{aligned} H &= H(p^2 + q^2) && (\text{эллиптический случай}), \\ H &= H(pq) && (\text{гиперболический случай}). \end{aligned}$$

В четырехмерном случае (для систем с двумя степенями свободы) существуют четыре типа невырожденных особенностей ранга нуль. Эта теорема является следствием теоремы 1.4.

**Теорема 1.6.** Пусть  $x_0$  — невырожденная особая точка ранга нуль интегрируемой гамильтоновой системы  $(M^4, \omega, H, f)$ . Пусть многообразие  $M^4$ , симплектическая структура  $\omega$  и обе функции  $H$  и  $f$  являются вещественно-аналитическими. Тогда в окрестности точки  $x_0 \in M^4$  существуют координаты  $(p_1, q_1, p_2, q_2)$ , в которых симплектическая структура имеет вид  $\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$ , а функции  $H$  и  $f$  одновременно приводятся к одному из следующих видов:

1. случай центр-центр:

$$\begin{aligned} H &= H(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2), \\ f &= f(p_1^2 + q_1^2, p_2^2 + q_2^2); \end{aligned}$$

2. случай центр-седло:

$$\begin{aligned} H &= H(p_1 q_1, p_2^2 + q_2^2), \\ f &= f(p_1 q_1, p_2^2 + q_2^2); \end{aligned}$$

3. случай седло-седло:

$$\begin{aligned} H &= H(p_1 q_1, p_2 q_2), \\ f &= f(p_1 q_1, p_2 q_2); \end{aligned}$$

4. случай фокус-фокус:

$$\begin{aligned} H &= H(p_1 q_1 + p_2 q_2, p_1 q_2 - q_1 p_2), \\ f &= f(p_1 q_1 + p_2 q_2, p_1 q_2 - q_1 p_2). \end{aligned}$$

Типом особой точки называется количество соответствующих ей эллиптических, гиперболических и фокусных компонент. Теорема Элиассона показывает, что любые две особые точки одинакового типа *локально эквивалентны*, т.е. обладают сколь угодно малыми окрестностями, в которых слоения Лиувилля лиувиллево эквивалентны.

**Определение.** Две особые точки назовем *полулокально эквивалентными*, если у содержащих их особых слоев существуют сколь угодно малые инвариантные окрестности, в которых слоения Лиувилля лиувиллево эквивалентны. Класс полулокальной эквивалентности особой точки мы и будем называть *особенностью*.

Менее формально, особенность — это класс лиувиллевой эквивалентности некоторой достаточно малой инвариантной регулярной окрестности особой точки. Всюду далее будем предполагать, что все слои слоения Лиувилля компактны.

### 1.4.3 Представление $2n$ -мерных особенностей в виде почти-прямых произведений 2-атомов по Зунгу.

Пусть  $\mathcal{F} : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  — отображение момента для интегрируемой гамильтоновой системы с первыми интегралами  $f_1, f_2, \dots, f_n$  на компактном симплектическом многообразии  $(M^{2n}, \omega)$ .

**Определение 1.4.2.** Рассмотрим особый слой  $L$  слоения Лиувилля с невырожденными седловыми особыми точками ранга нуль и его малую инвариантную окрестность  $U(L)$  в  $M^{2n}$  (т.е. окрестность, содержащую целиком все слои слоения Лиувилля, пересекающиеся с ней). Инвариантная окрестность  $U(L)$  с соответствующим слоением Лиувилля на ней (рассматриваемым с точностью до лиувиллевой эквивалентности) называется  *$2n$ -мерной невырожденной седловой особенностью ранга нуль*.

**Определение 1.4.3.** Скажем, что для невырожденной седловой  $2n$ -особенности  $U(L)$  ранга нуль выполняется условие *нерасщепляемости по Зунгу*, если в некоторой окрестности  $W$  критического значения  $y_0 = \mathcal{F}(L)$  существует диффеоморфизм (замена координат), приводящий бифуркационную диаграмму отображения момента  $\mathcal{F} : U(L) \rightarrow \mathbb{R}^n$  к каноническому виду, т.е. набору из  $n$  гиперплоскостей общего положения, проходящих через точку  $y_0$  (см. работы Н.Т. Зунга [9], [10], а также [5] и [1]).

**Определение 1.4.4.** Рассмотрим набор седловых 2-атомов  $V_1, V_2, \dots, V_n$  со своими симплектическими структурами  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  и функциями Морса соответственно  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Пусть на каждом атоме  $V_i$  действует одна и та же конечная группа  $G$ , причем каждое из этих действий  $\phi_i$  сохраняет как симплектическую структуру  $\omega_i$ , так и функцию  $f_i$ . Тогда на прямом произведении  $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$  определена симплектическая структура как сумма форм  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , а также определена структура лиувиллева слоения, задаваемого коммутирующими функциями  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Пусть действие группы  $G$  на  $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ , заданное формулой  $\phi(g)(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\phi_1(g)x_1, \phi_2(g)x_2, \dots, \phi_n(g)x_n)$ , свободно. Тогда фактор-многообразию  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$  является  $2n$ -мерной окрестностью связного особого слоя  $L$  с невырожденными седловыми особыми точками ранга нуль. Такую особенность назовем *особенностью типа почти прямого произведения (или просто почти прямым произведением)*.

**Определение 1.4.5.** Будем говорить, что почти прямое произведение  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$  несократимо, если каждый элемент группы  $G$  (кроме единицы) действует нетривиально не менее чем на двух сомножителях прямого произведения  $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ .

**Теорема 1.7** (Н.Т. Зунг [10]). *Любая нерасщепляемая по Зунгу невырожденная седловая особенность  $U(L)$  ранга нуль является особенностью типа почти прямого произведения. Причем если почти прямое произведение  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$  несократимо, то представление особенности  $U(L)$  в виде почти прямого произведения единственно.*

# Глава 2

## Круговые меченые молекулы почти прямых произведений $(V_1 \times V_2)/G$ .

### 2.1 Атомы круговой молекулы, соответствующей 4-особенности $(V_1 \times V_2)/G$ .

#### 2.1.1 Общий вид допустимых атомов для компоненты круговой молекулы, соответствующего типа.

Интегрируемая гамильтонова система с двумя степенями свободы на четырехмерном компактном симплектическом многообразии  $(M^4, \omega)$  задается гамильтонианом  $H$  и дополнительным интегралом  $f$ . В случае двух степеней свободы седловые 4-особенности ранга нуль называются также особенностями типа седло-седло. Для таких особенностей имеется инвариант, называемый меченой круговой молекулой. Для точки типа седло-седло бифуркационную диаграмму в окрестности ее образа можно представлять как пару прямых (горизонтальная и вертикальная), пересекающихся в критическом значении отображения момента, соответствующем этой точке. Таким образом, для точки типа седло-седло кривая, обходящая вокруг ее образа, четыре раза пересекает дуги бифуркационной диаграммы, которым соответствуют перестройки торов Лиувилля, описываемые 3-атомами в вершинах соответствующей меченой круговой молекулы.

В этом разделе описывается структура круговой молекулы особенности типа седло-седло (для краткости будем называть ее также просто круговой молекулой). По теореме 1.7 каждая такая 4-особенность представляется в виде несократимого почти прямого произведения  $(V_1 \times V_2)/G$ . Здесь и дальше мы будем рассматривать 4-особенности типа почти прямого произведения  $(V_1 \times V_2)/G$ . Также будем предполагать, что представление  $(V_1 \times V_2)/G$  несократимо.

Рассмотрим почти прямое произведение двух атомов  $(V_1 \times V_2)/G$  с соответствующими функциями Морса на них  $f_1$  и  $f_2$  и конечной группой  $G$ , действующей на прямом произведении  $V_1 \times V_2$  свободно и покомпонентно, сохраняющей эти функции. Рассмотрим функции  $f_1$  и  $f_2$  на прямом произведении  $V_1 \times V_2$  и предположим, что без ограничения общности бифуркационная диаграмма отображения момента  $(f_1, f_2)$  представляет собой координатный крест от  $-1$  до  $+1$ .

**Определение 2.1.1.** Каждая связная компонента множества  $\{x \in M^4 | f_i(x) = +1\}$  и  $\{x \in M^4 | f_i(x) = -1\}$  является 3-атомом. Каждому такому множеству  $\{x \in M^4 | f_i(x) = \pm 1, i = 1, 2\}$

сопоставим соответствующий набор 3-атомов, который назовем *компонентой круговой молекулы*. Скажем, что компонента круговой молекулы имеет *тип атома*  $V_i$ , если она соответствует множеству  $\{x \in M^4 | f_i(x) = \pm 1\}$  для заданного  $i$ .

Для удобства обозначим через  $kO$  несвязное объединение  $k$  окружностей. Пусть атом  $V_1$  является перестройкой  $i_2O$  в  $i_1O$  окружностей при  $f_1 = +1$  и  $f_1 = -1$  соответственно. Аналогично атом  $V_2$  является перестройкой  $j_2O$  в  $j_1O$  окружностей при  $f_2 = +1$  и  $f_2 = -1$ . Следующая теорема описывает структуру круговой молекулы особенности типа седло-седло в терминах компонент этой круговой молекулы и их типов.

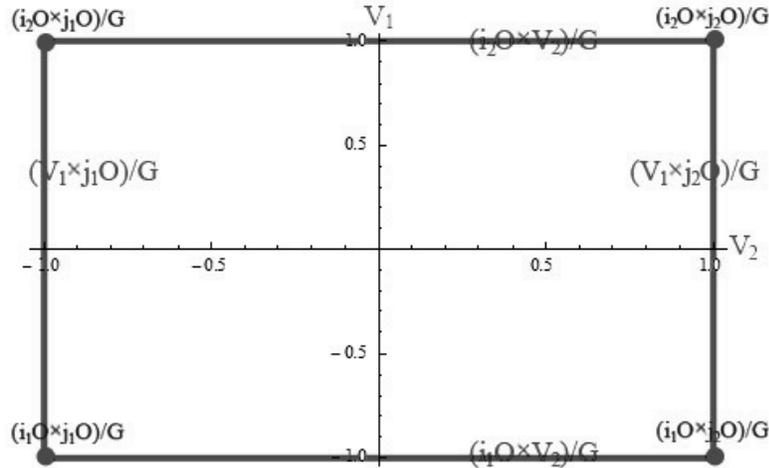


Рис. 2.1: Бифуркационная диаграмма, соответствующая функциям Морса  $f_1$  и  $f_2$  на атомах  $V_1$  и  $V_2$ . На ребрах и рядом с жирными точками обозначены их прообразы (факторы) при отображении момента  $(f_1, f_2)$ .

**Теорема 2.1.** [40] *Всякая круговая молекула нерасщепляемой по Зунгу особенности типа седло-седло состоит из четырех компонент. Две компоненты вида  $(V_1 \times j_k O)/G, k = 1, 2$  имеют тип  $V_1$ , две оставшиеся вида  $(V_2 \times i_k O)/G, k = 1, 2$  — тип  $V_2$ . Ребрами соединены атомы только из соседних компонент молекулы (разного типа). Количество ребер, соединяющих компоненты разного типа, совпадает с числом связанных компонент соответствующего фактора  $(i_k O \times j_l O)/G$ , где  $k = 1, 2; l = 1, 2$ . Соответствие показано на рисунке 2.1.*

*Доказательство.* Доказательство следует из теоремы 1.1 и факта, что бифуркационная диаграмма отображения момента 4-особенности типа седло-седло имеет вид креста, см. рисунок 2.1. □

Рассмотрим компоненту круговой молекулы, соответствующую, например,  $(V_1 \times j_1 O)/G$ . Количество атомов в этой компоненте не зависит от атома  $V_2$ , а зависит только от действия группы  $G$  на его границе (соответственно  $j_1 O$ ).

**Утверждение 2.1.1.** [40] *Количество атомов в компоненте круговой молекулы, соответствующей множеству  $(V_i \times j O)/G$ , равно количеству связанных компонент множества  $j O/G$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим компоненту круговой молекулы, соответствующую  $(V_1 \times jO)/G$ . Обозначим через  $O_1$  и  $O_2$  какие-либо две окружности из непересекающегося объединения окружностей  $j_1O \subset V_2$ . Два прямых произведения  $V_1 \times O_1, V_1 \times O_2 \subset V_1 \times V_2$ , склеиваются при факторизации относительно группы  $G$  в одну связную компоненту, тогда и только тогда, когда существует элемент  $g \in G$ , который переводит граничную окружность  $O_1 \subset V_2$  в граничную окружность  $O_2 \subset V_2$ . Следовательно, количество связных компонент  $jO/G$  равно количеству связных компонент  $(V_1 \times jO)/G$ , а количество связных компонент  $(V_1 \times jO)/G$  — число атомов в рассматриваемой компоненте круговой молекулы.  $\square$

В некоторых простых случаях, чтобы определить, какой атом стоит в компоненте круговой молекулы, не нужно знать действие группы  $G$ , об этом говорится в следующей теореме.

**Теорема 2.2.** [40] *Если  $(V_1 \times kO)/G$  имеет одну компоненту связности и количество окружностей в  $(V_1 \times kO)/G$  совпадает с порядком группы, то есть  $k = |G|$ , то  $(V_1 \times kO)/G \cong V_1$ .*

### 2.1.2 Классификация допустимых атомов для круговых молекул особенностей типа седло-седло сложности 2.

Рассмотрим произвольную круговую молекулу, т. е. граф, состоящий из атомов (латинских букв с индексами и возможно звездочками), соединенных ребрами. Зададимся вопросом, когда соответствующая круговая молекула является круговой молекулой некоторой 4-особенности фиксированной сложности. Пусть также дан список всех типов компонент круговых молекул для данной сложности.

Рассмотрим одну из таких компонент, т.е. набор 3-атомов, соответствующих множеству вида  $(V \times kO)/G$  для произвольного атома  $V$ , произвольной конечной группы  $G$  с условием, чтобы группа  $G$  действовала свободно на прямом произведении и сохраняла соответствующую функцию Морса на атоме (т. е. была подгруппой группы симметрий данного атома  $V$ ) и произвольного числа  $k$  не большего порядка группы симметрий атома  $V$ . Атом  $V$  — тип данной компоненты. Предположим, что рассматриваемая компонента состоит всего из одного атома, т. е. связна (будем рассматривать только такие компоненты). Получив список всех компонент с такими свойствами (он конечен из-за ограничений на  $k$  и группу  $G$ ) или список соответствующих им атомов для данного фиксированного типа компоненты  $V$ , можно ответить на вопрос, может ли данная круговая молекула являться круговой молекулой почти прямого произведения  $(V \times W)/H$  для некоторого атома  $W$  и группы  $H$ : если в каждой паре противоположных компонент данной круговой молекулы присутствуют атомы не из списка, то данная круговая молекула не является круговой молекулой любого почти прямого произведения  $(V \times W)/H$  с данным фиксированным атомом  $V$ .

Как уже было сказано выше, каждая связная компонента множества  $(V \times kO)/G$  является 3-атомом. Для того, чтобы помнить, какой 3-атом принадлежит какой компоненте круговой молекулы введем еще одно определение:

**Определение 2.1.2.** Атом  $W$  назовем *допустимым* атомом для данной компоненты круговой молекулы типа  $V$ , если существует круговая молекула 4-особенности данной сложности с компонентой типа  $V$ , в которую (компоненту) входит атом  $W$ .

Получаем соответствие между типами компонент и их допустимыми атомами. Рассмотрим на примере 4-особенностей сложности два, какие бывают допустимые атомы для каких типов компонент круговой молекулы.

Список седловых невырожденных особенностей ранга нуль сложности два был получен А.В. Болсиновым (см. [28]). Он состоит из 39 особенностей. Информация и классификация особенностей сложности два, приведенная в этой таблице взята из таблиц 9.1 и 9.3 книги [5] (таблицы 9.1 и 9.2 в переводном издании книги [5]). Отметим, что в таблице 9.1 книги [5] для каждой из особенностей приведена также ее меченая круговая молекула. Список всех различных атомов, которые участвуют в почти прямых произведениях (для седловых невырожденных особенностей ранга нуль сложности два) является списком всевозможных типов компонент круговых молекул седловых особенностей сложности два. Для каждого такого типа приведем список допустимых атомов.

**Теорема 2.3.** [40] *В таблице 2.1 для круговых молекул особенностей типа седло-седло сложности два приведен список всех допустимых атомов для соответствующих компонент данного типа.*

*Доказательство.* Поясним обозначения, используемые в таблицах 2.1, 2.2. Латинские буквы (с индексами) — это стандартные обозначения атомов из книги [5]. Изображения всех атомов, встречающихся в таблицах 2.1, 2.2, приведены на рисунках 4.5–4.8. Поскольку в группе симметрий атомов обычно есть несколько элементов порядка два, после обозначения группы  $\mathbb{Z}_2$  в столбце таблицы 2.2, в соответствующей строке в скобках указано покомпонентное действие ее образующей на прямом произведении атомов, т.е. обозначение  $(\sigma_1, \sigma_2)$  означает, что образующая группы  $\mathbb{Z}_2$  действует на первом сомножителе инволюцией  $\sigma_1$ , а на втором — инволюцией  $\sigma_2$ . Обозначения симметрий атомов  $\alpha, \beta, \gamma$  взяты из книги [5] (см. там список атомов с симметриями после таблицы 9.1). При этом изображения атомов (в книге [5], а также на рисунках 4.5–4.8) выбраны так, что  $\alpha$  — это центральная симметрия,  $\gamma$  — поворот на  $\frac{\pi}{2}$  (относительно “центра” атома при данном его изображении), а  $\beta$  — некоторая дополнительная симметрия, которая для разных атомов имеет разный смысл (см. ее описание, а также описание действия группы  $D_4$ , диэдра порядка 8, для особенности с номером 16 в книге [5] на рисунках после таблицы 9.1).

Пусть теперь атом  $V$  является типом компоненты круговой молекулы. Если дискретная группа  $G$  сохраняет функцию Морса на атоме  $V$ , то  $G$  является подгруппой полной группы симметрий атома  $V$ . Рассмотрим фактор-многообразие  $(V \times kO)/G$  для всех  $k$  и всех таких дискретных групп  $G$ . Из утверждения 2.1.1 следует, что если после факторизации этого множества получилась одна компонента связности, то  $k \leq |G|$ . Таким образом, можно перебором получить список всех допустимых атомов. В таблице 2.2 описаны атомы, выступающие в качестве типов вершин круговых молекул, соответственно полная группа их симметрий и порождающий элемент подгруппы  $G$ , которая для этих случаев оказывается циклической. Также приведены атомы, получающиеся после факторизации.  $\square$

**Следствие 2.1.1.** *Рассмотрим какой-либо атом  $V_1$  из таблицы 2.1. Если в круговой молекуле нет атомов, перечисленных в этой таблице напротив атома  $V_1$ , то такая круговая молекула не является круговой молекулой почти прямого произведения  $(V_1 \times V_2)/G$  ни для какого  $V_2$  и любой группы  $G$ .*

Тип комп. Доп. атомы	$B$ $A^*, B$	$C_2$ $B, A^{**}, C_2$	$D_1$ $B, D_1$	$C_1$ $A^*, A^{**}, C_1$	$I_1$ $B, D_1, I_1$	$I_2$ $D_2, I_2$
Тип комп. Доп. атомы	$V_4$ $D_1, V_4$	$K_1$ $D_2, K_1$	$K_2$ $C_1, B_1^{**}, K_2$	$K_3$ $B, C_1, C_2, A^{****}, K_3$	$J_1$ $B, D_1, J_1$	$J_2$ $D_2, J_2$
Тип комп. Доп. атомы	$L_1$ $D_2, L_1$	$L_2$ $D_1, L_2$	$M_1$ $C_2, M_1$	$M_2$ $C_1, M_2$	$V_4'$ $D_2, V_4'$	$P_4$ $B, A^{**}, C_2, D_1, B_1^{**}, P_4$

Таблица 2.1: В таблице приведен полный список типов компонент и их допустимых атомов для всех круговых молекул особенностей седло-седло сложности не более двух в соответствии с обозначениями из [5], стр. 406–409.

## 2.2 Метки круговой молекулы, соответствующей 4-особенности $(V_1 \times V_2)/G$ .

### 2.2.1 Метки $r$ .

В предыдущем разделе была описана структура круговой молекулы почти прямого произведения  $(V_1 \times V_2)/G$ . В этом разделе будут описаны некоторые свойства меток соответствующей круговой молекулы и представлен способ их вычисления.

**Теорема 2.4.** [40] *Все метки  $r$  круговой молекулы почти прямого произведения  $(V_1 \times V_2)/G$  конечны и имеют вид  $\frac{k}{|G|}$ .*

*Доказательство.* Сначала докажем, что все метки круговой молекулы конечны. Пусть дано почти прямое произведение  $(V_1 \times V_2)/G$ . Рассмотрим вершину бифуркационной диаграммы (жирную точку на рисунке 2.1). Она соответствует несвязному объединению торов Лиувилля для  $\{f_1 = 1, f_2 = 1\} = (i_2O \times j_2O)/G$ . Каждому из таких торов соответствует ребро круговой молекулы. Обозначим выбранный тор  $T$ , а соответствующее ему ребро за  $a$ .

Пусть матрица склейки, соответствующая ребру  $a$  равна:  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ .

*Предположим противное:* пусть метка  $r$  на ребре  $a$ , равна  $\infty$ . Это выполнено тогда и только тогда, когда число  $\beta$  равно нулю. Обозначим за  $\lambda_1$  слой расслоения Зейферта атома  $(V_1 \times j_2O)/G$ . Цикл  $\lambda_1$  является одной из окружностей множества  $(j_2O)/G$ . Аналогично рассмотрим цикл  $\lambda_2$ , который является одной из окружностей множества  $(i_2O)/G$ . Если число  $\beta$  равно нулю, то для циклов  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  выполнено соотношение  $\lambda_1 = \alpha\lambda_2$ . Так как тор  $T$  — элемент несвязного объединения торов  $(i_2O \times j_2O)/G$ , то циклы  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются для него образующими, но  $\lambda_1 = \alpha\lambda_2$ , противоречие. Следовательно все метки  $r$  круговой молекулы конечны.

Для того, чтобы подсчитать  $r$ -метки круговой молекулы докажем следующую лемму.

**Лемма 2.5.** Пусть на торе с координатами  $x, y \pmod{1}$  задано действие циклической группы  $G$  с образующей  $g : (x, y) \mapsto (x + \frac{k}{n}, y + \frac{p}{q})$ , причем дроби  $\frac{k}{n}$  и  $\frac{p}{q}$  — несократимые.

1. Тогда количество пересечений образов циклов  $(x, 0)$  и  $(0, y)$  после факторизации равно  $\text{НОД}(n, q)$ .
2. Разделим первый цикл тора на  $n$  частей и пронумеруем точки, начиная от пересечения циклов от 0 до  $n-1$ . Номер первой точки пересечения циклов на торе после факторизации,

$B, \mathbb{Z}_2$	$(B \times O)/(\alpha, \alpha) \cong A^*$		
$C_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$(C_2 \times O)/(\alpha, \alpha) \cong B$	$(C_2 \times O)/(\beta, \alpha) \cong B$	$(C_2 \times O)/(\alpha\beta, \alpha) \cong A^{**}$
$D_1, \mathbb{Z}_2$	$(D_1 \times O)/(\alpha, \alpha) \cong B$		
$C_1, \mathbb{Z}_4$	$(C_1 \times O)/(\alpha, \alpha) \cong A^{**}$	$(C_1 \times O)/(\gamma, \gamma) \cong A^*$	
$I_1, \mathbb{Z}_4$	$(I_1 \times O)/(\gamma, \gamma) \cong B$	$(I_1 \times O)/(\alpha, \alpha) \cong D_1$	
$I_2, \mathbb{Z}_2$	$(I_2 \times O)/(\alpha, \alpha) \cong D_2$		
$V_4, \mathbb{Z}_2$	$(V_4 \times O)/(\alpha, \alpha) \cong D_1$		
$K_1, \mathbb{Z}_2$	$(K_1 \times O)/(\alpha, \alpha) \cong D_2$		
$K_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$(K_2 \times O)/(\alpha, \alpha) \cong C_1$	$(K_2 \times O)/(\beta, \alpha) \cong B_1^{**}$	$(K_2 \times O)/(\alpha\beta, \alpha) \cong B_1^{**}$
$K_3, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$	$(K_3 \times O)/(\alpha, \alpha) \cong C_2$	$(K_3 \times O)/(\beta, \alpha) \cong C_1$	$(K_3 \times O)/(\alpha\beta, \alpha) \cong A^{****}$
	$(K_3 \times O)/(\gamma, \gamma) \cong B$	$(K_3 \times O)/(\beta\gamma, \gamma) \cong B$	
$J_1, \mathbb{Z}_4$	$(J_1 \times O)/(\alpha, \alpha) \cong D_1$	$(J_1 \times O)/(\gamma, \gamma) \cong B$	
$J_2, \mathbb{Z}_2$	$(J_2 \times O)/(\alpha, \alpha) \cong D_2$		
$L_1, \mathbb{Z}_2$	$(L_1 \times O)/(\alpha, \alpha) \cong D_2$		
$L_2, \mathbb{Z}_2$	$(L_2 \times O)/(\alpha, \alpha) \cong D_1$		
$M_1, \mathbb{Z}_2$	$(M_1 \times O)/(\alpha, \alpha) \cong C_2$		
$M_2, \mathbb{Z}_2$	$(M_2 \times O)/(\alpha, \alpha) \cong C_1$		
$V'_4, \mathbb{Z}_2$	$(V'_4 \times O)/(\alpha, \alpha) \cong D_2$		
$P_4, D_4$	$(P_4 \times O)/(\alpha, \alpha) \cong C_2$	$(P_4 \times O)/(\beta, \alpha) \cong D_1$	$(P_4 \times O)/(\alpha\beta, \alpha) \cong D_1$
	$(P_4 \times O)/(\gamma, \gamma) \cong B$	$(P_4 \times O)/(\beta\gamma, \gamma) \cong A^{**}$	$(P_4 \times O)/(\gamma\beta, \gamma) \cong B_1^{**}$

Таблица 2.2: Группа  $G$  задана действием (в скобках) ее порождающего элемента на соответствующем атоме. Пояснения к обозначениям приведены в доказательстве теоремы 2.3. В таблице пропущены варианты с более, чем одной окружностью, так как эти случаи не дают новых атомов.

следуя по второму циклу от нулевой точки пересечения, равен  $a$ . Число  $a$  находится из системы уравнений в целых числах:

$$\begin{cases} px \equiv 1 \pmod{q} \\ a \equiv -kx \pmod{n} \end{cases}. \quad (2.1)$$

*Доказательство.* Представим тор, как фактор  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . Рассмотрим единичный квадрат в первой четверти координатной плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Рассмотрим на нем прямоугольную сетку с шагом по одной оси  $\frac{1}{n}$ , по другой  $\frac{1}{q}$ . Подсчитаем из скольких прямоугольников будет состоять фундаментальная область фактора этого тора по действию циклической группы  $G$ . Количество прямоугольников, которые получаются друг из друга действием группы  $G$  равно НОК( $n, q$ ). Всего прямоугольников —  $n \cdot q$ . Орбиты действия группы не пересекаются. Значит, фундаментальная область состоит из  $\frac{n \cdot q}{\text{НОК}(n, q)} = \text{НОД}(n, q)$  прямоугольников. Представим фундаментальную область из  $\text{НОД}(n, q)$  прямоугольников, стоящих рядом: в виде прямоугольника  $1 \times \text{НОД}(n, q)$ . Этот прямоугольник представляет собой тор после факторизации. Один цикл нового тора идет по длинной стороне, а другой делит этот прямоугольник на маленькие прямоугольники со сторонами  $\frac{1}{n} \times \frac{1}{q}$ . Количество маленьких прямоугольников равно количеству пересечений этих циклов в факторе и, следовательно, равно  $\text{НОД}(n, q)$ .

Действие группы  $G$  можно представить, как сдвиг на вектор  $(\frac{k}{n}, \frac{p}{q})$  фактора плоскости по

целочисленной решетки, то есть тора. Пронумеруем вершины одной стороны нашего квадрата от 0 до  $n - 1$  с координатами соответственно от  $(0, 0)$  до  $(\frac{n-1}{n}, 0)$ . Пусть искомая вершина имеет координаты  $(\frac{a}{n}, 0)$ . Условие, сформулированное в лемме, аналогично условию нахождения номера вершины, которая под действием группы переходит в вершину с координатами  $(0, \frac{1}{q})$ , точнее, с координатами  $(c_1, \frac{1}{q} + c_2)$ , где  $c_i$  — это целые числа. Получаем уравнение для  $a$ :  $(\frac{a}{n}, 0) + x(\frac{k}{n}, \frac{p}{q}) = (c_1, \frac{1}{q} + c_2)$ . Отсюда получается искомая система уравнений.  $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Рассмотрим множество  $(i_2O \times j_2O)$  как регулярное накрытие над тором  $T$ . Предположим, что  $T = (i_2O \times j_2O)/G$ , иначе возьмем в качестве окружностей  $i_2O$  и  $j_2O$  только те окружности, которые лежат в прообразе тора  $T$ . Прообразы циклов  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — это образующие циклы тором прямого произведения  $(i_2O \times j_2O)$ . Докажем следующие утверждения.

**Утверждение 2.2.1.** *Пусть на прямом произведении  $k_1$  окружностей на  $k_2$  окружностей задано свободное действие конечной группы  $G$  диффеоморфизмами. Тогда для любого тора из этого прямого произведения существует подгруппа  $H$  в группе  $G$ , такая что  $H$  действует диффеоморфно, оставляя тор на месте, причем для каждого тора эти группы изоморфны.*

*Доказательство.* Рассмотрим действие группы  $G$  на прямом произведении  $k_1$  окружностей на  $k_2$  окружностей. Возьмем произвольный тор  $T$  и рассмотрим действие группы на его образующие окружности. Выберем из группы  $G$  те элементы, которые переводят образующие тора  $T$  в себя. Так как действие  $G$  свободно, каждый выбранный элемент отображает каждую из образующих в себя. Так как любой такой элемент — это диффеоморфизм окружности на себя, группа  $G$  — конечна и действие  $G$  свободно, то действие соответствующего элемента является поворотом окружности на угол, кратный  $2\pi$ . Следовательно, множество из таких элементов образует подгруппу в группе  $G$ . Рассмотрим на  $T$  два его главных цикла и подействуем на них группой  $H$ . Таким образом построим на торе сетку. Совпадение таких сеток у двух тором соответствует изоморфизму их групп  $H$ . Докажем, что на всех торах будут одинаковые сетки. *Предположим противное:* на разных торах  $T_1$  и  $T_2$  получились разные сетки. Так как фактор связан, значит существует элемент из группы  $G$ , который переводит  $T_1$  в  $T_2$ . Тогда действием этого элемента можно перевести сетку с одного тора на другой и наоборот. При этом действии образы сеток должны совпадать, так как выбранная группа  $H$  на торах — это группа, состоящая из всех элементов, переводящих тор в себя. А так как это диффеоморфизм, то у каждого элемента есть обратный в подгруппе  $H$ .  $\square$

**Утверждение 2.2.2.** *Если почти прямое произведение, получается как фактор прямого произведения атомов по группе  $\mathbb{Z}_n$ , то все  $r$  метки его круговой молекулы имеют вид  $\frac{k}{n}$ .*

*Доказательство.* Аналогично началу доказательства теоремы 2.4, рассмотрим жирную точку на рисунке 2.1. Она соответствует несвязному объединению тором  $(i_2O \times j_2O)/G$ . Рассмотрим один из тором этого несвязного объединения. Обозначим его  $T$ . *Без ограничения общности* предположим, что он один. Иначе в качестве множества  $(i_2O \times j_2O)$  будем рассматривать его подмножество, после факторизации которого будет получаться одна связная компонента. Тор  $T$  образован двумя циклами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , полученными, как слои расслоения Зейферта, соответствующие атомам  $(i_2O \times V_2)/G$  и  $(V_1 \times j_2O)/G$ . Цикл  $\lambda_1$  — это окружность, получающаяся после факторизации множества  $i_2O$  по группе  $G$ . Аналогично,  $\lambda_2$  — окружность, получающаяся после факторизации множества  $j_2O$  по группе  $G$ . Рассмотрим множество  $(i_2O \times j_2O)$  — это некоторое

накрытие над тором  $T$ . Прообразы циклов  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — это образующие циклы торов прямого произведения  $(i_2O \times j_2O)$ .

Предположим, что  $i_2$  или  $j_2$  больше единицы. Без ограничения общности  $i_2$  больше единицы. В этом случае действие группы будет просто переставлять окружности  $i_2O$ . Следовательно, после факторизации циклы  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  будут пересекаться только по одной точке на торе  $T$ , а следовательно, метка  $r$  равна нулю.

Пусть теперь каждое из множеств  $i_2O$  и  $j_2O$  состоит ровно из одной окружности. Рассмотрим ограничение действия группы  $G$  на окружности  $i_2O$  и  $j_2O$ . На каждой из этих окружностей действие группы  $\mathbb{Z}_n$  является поворотом на некоторый угол  $\frac{2\pi k}{n}$ . Способом, указанным в лемме 2.5, в находится  $r$  метка на ребре, соответствующему нашему тору: знаменатель метки — это количество пересечений циклов  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , а числитель — это число  $a$  в лемме 2.5. Указанным способом находится  $r$  метка на ребре, соответствующему нашему тору. Если ограничить действие группы  $\mathbb{Z}_n$  на граничные окружности, то для некоторой подгруппы  $\mathbb{Z}_n$  нужно применить лемму 2.5, порядок подгруппы делит число  $n$ , а значит, метка  $r$  будет иметь вид  $\frac{k}{n}$ .  $\square$

По утверждению 2.2.1 для тора  $T$  существует подгруппа  $H$  переводящая тор  $T$  в себя, причем каждый элемент группы  $H$  можно представить в виде композиции двух сдвигов: сдвиг вдоль первого базисного цикла тора, а потом вдоль второго. Представим тор  $T$ , как фактор  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . Тогда действие каждого элемента  $g$  подгруппы  $H$  является сдвигом на факторе  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  на некоторый вектор с координатами  $v_g = (\frac{k}{n}, \frac{p}{q})$ . Следовательно, группа  $H$  — абелева, а значит, раскладывается в прямую сумму примарных циклических групп  $H_{g_1} \oplus H_{g_2} \oplus \dots \oplus H_{g_k}$ . Из утверждения 2.2.2 следует, что знаменатель  $r$ -метки равен  $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ , где  $n_1, n_2, \dots, n_k$  — порядки соответствующих элементов  $g_1, g_2, \dots, g_k$ , а  $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k = |H|$ .  $\square$

### Замечание 1.

1. Если циклическая группа  $G$  действует на торе (как в лемме), то метку  $r$  на соответствующем ребре круговой молекулы можно вычислить следующим способом: число  $a$  из системы (2.1) — числитель метки  $r$ ,  $\text{НОД}(n, q)$  — ее знаменатель.
2. В теореме 2.4 дробь  $\frac{k}{|G|}$  может быть сократимой. В теореме утверждается, что она должна иметь такой вид, но  $k$  может быть любым значением, включая нуль.
3. Из системы (2.1) значение  $a$  находится неоднозначно. Число  $a$  единственно по модулю  $\text{НОД}(n, q)$ , то есть метка  $r$  определяется однозначно. В случае, когда  $\text{НОД}(n, q)$  равен единице, легко видеть, что уравнение имеет нулевое решение, то есть метка  $r$  равна нулю.
4. Почти прямое произведение  $(V_1 \times V_2)/G$  является несократимым, т.е. все элементы в группе  $G$  (кроме единицы) действуют нетривиально на каждом из сомножителей прямого произведения  $V_1 \times V_2$ . Следовательно, действие порождающего элемента  $H_g$  является сдвигом на вектор, координатами которого являются несократимые дроби с одинаковыми знаменателями  $(\frac{k}{n}, \frac{p}{n})$  (иначе элемент  $(1, n\frac{p}{q})$  будет действовать тождественно на  $V_1$ ).
5. Лемма 2.5 дает простой способ вычислять метки  $r$  для круговой молекулы почти прямого произведения, зная только действие группы на граничных окружностях соответствующих атомов. Сама же структура атомов дает ограничения на группу.

## 2.2.2 Матрица склейки торов в случае циклической группы.

Рассмотрим почти прямое произведение  $(V_1 \times V_2)/G$ . Обозначим за  $T$  тор, соответствующий одному из ребер круговой молекулы почти прямого произведения  $(V_1 \times V_2)/G$ . Как было показано в доказательстве теоремы 2.4, значение метки  $r$  вычисляется по действию подгруппы  $H$  группы  $G$ , которая переводит тор  $T$  в себя. Подгруппа  $H$  представляется в виде прямой суммы примарных циклических групп  $H_g$ , у которых порождающие элементы действуют на торе  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  сдвигами на векторы вида  $(\frac{k}{n}, \frac{p}{q})$  или с учетом замечания 1 на векторы вида  $(\frac{k}{n}, \frac{p}{n})$ . Предположим, что подгруппа  $H$  является циклической. Рассмотрим такое действие на торе  $T$ . Базисные циклы  $\lambda$  и  $\mu$  выбираются на торе  $T$  по следующим правилам (согласно книге [5]):

1. параллелограмм, натянутый на векторы, соответствующие циклам  $\lambda$  и  $\mu$  является фундаментальной областью действия группы  $H$  на торе  $T$ ,
2. цикл  $\lambda$  принадлежит координатной оси, что соответствует слою расслоения Зейферта,
3. ориентация циклов  $\lambda$  и  $\mu$  должна быть согласована с ориентацией тора  $T$ , которая зависит от ориентации соответствующего 3-атома, для которого тор  $T$  является граничным.

**Теорема 2.6.** *Если на торе  $T$  действие циклической группы  $H$  порождено сдвигом на вектор  $(\frac{k}{n}, \frac{p}{q})$ , где  $\frac{k}{n}$  и  $\frac{p}{q}$  — несократимые дроби, то матрица склейки, соответствующая тору  $T/G$  имеет вид  $\begin{pmatrix} -\tilde{a} & (n, q) \\ \frac{1-\tilde{a}\tilde{b}}{(n, q)} & \tilde{b} \end{pmatrix}$ , где*

1.  $\begin{cases} \tilde{a} = kx - nz_1, & \text{где } x \text{ — решение уравнения } px \equiv 1 \pmod{q}, \quad z_1 = [x\frac{k}{n}], \\ \tilde{b} = py - qz_2, & \text{где } y \text{ — решение уравнения } ky \equiv 1 \pmod{n}, \quad z_2 = [y\frac{p}{q}], \end{cases}$
2.  $(n, q) = \text{НОД}(n, q)$ ,  $[...] \text{ — целая часть.}$

*Доказательство.* Пусть  $(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2)$  — две допустимые системы координат, соответствующие слоениям на двух атомах, которые склеиваются по тору  $T$ . Обозначим через  $n_1 = n/(n, q), q_1 = q/(n, q)$ . Циклы  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , как слои Зейферта на торе  $T$  принадлежат соответственно разным осям. Пусть  $\lambda_1$  принадлежит соответственно оси  $OX$ , а  $\lambda_2$  оси  $OY$ . Рассмотрим орбиту точки  $O(0, 0)$  под действием группы  $H$  на торе  $T$ . Координаты вектора, соответствующего циклу  $\lambda_1$  равны  $(0, m)$ , где  $m$  — это минимальное число не равное нулю, такое, что точка с координатами  $(0, m)$  принадлежит орбите  $HO$ . Такая точка существует, так как точка  $(0, 1)$  — вершина тора — принадлежит орбите  $HO$ . Найдем значение  $m$ . Орбита  $HO$  состоит из точек с координатами  $(c\frac{k}{n}, c\frac{p}{q})$ . Так как дробь  $\frac{p}{q}$  несократимая, чтобы точка орбиты лежала на оси  $OX$ , число  $c = qc_1$ . Так как дробь  $\frac{k}{n}$  несократимая, то существует такое  $c_1$ , что  $q_1 c_1 k \equiv 1 \pmod{n_1}$ . Следовательно,  $m = \frac{1}{n_1}$ . Вектор с координатами  $(\frac{1}{n_1}, 0)$  соответствует циклу  $\lambda_1$ , аналогично, циклу  $\lambda_2$  соответствует вектор  $(0, \frac{1}{q_1})$ .

Теперь рассмотрим циклы  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Цикл  $\mu_1$  выбирается так, чтобы вместе с циклом  $\lambda_1$  затягивать фундаментальную область при действии группы  $H$ , причем ориентация пары  $(\lambda, \mu)$  должна быть согласована с ориентацией тора  $T$  и соответственно с 2-атомом, границей которого является тор  $T$ . Чтобы область была фундаментальной, треугольник, с вершинами  $O, O + \lambda$  и  $O + \mu$ , см. рисунок 2.2 должен иметь минимальную площадь, а значит, минимальную высоту, опущенную на ось  $OX$ . Высота такого треугольника равна  $x\frac{p}{q} \pmod{1}$ . Следовательно,  $px \equiv 1 \pmod{q}$ . Вектор с координатами  $(\{x\frac{k}{n}\}, \frac{1}{q})$  соответствует циклу  $\mu_1$ , где  $\{\dots\}$  — дробная часть.

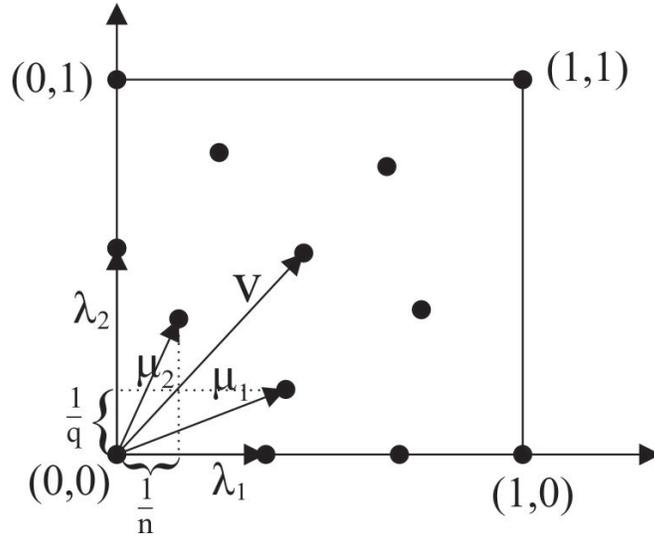


Рис. 2.2: Тор  $T$ , как фактор  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . Вектор  $v$  — действие порождающего элемента группы  $H$ . Жирными точками схематически обозначена орбита  $HO$  начала координат  $O(0,0)$ . Стрелками обозначены допустимые системы координат  $(\lambda_1, \mu_1)$  и  $(\lambda_2, \mu_2)$ .

Обозначим  $z_1 = [x \frac{k}{n}]$ . Тогда  $\{x \frac{k}{n}\} = x \frac{k}{n} - z_1 = \frac{kx - nz_1}{n}$ . Через  $\tilde{a}$  обозначим выражение  $kx - nz_1$ . Следовательно, циклу  $\mu_1$  соответствует вектор с координатами  $(\frac{\tilde{a}}{n}, \frac{1}{q})$ . Аналогично для  $\lambda_2$  можно получить вектор с координатами  $(\frac{1}{n}, \frac{\tilde{b}}{q})$ , соответствующий циклу  $\mu_2$ . Отсюда легко получаются соотношения  $(n, q)\mu_1 = \tilde{a}\lambda_1 + \lambda_2$ ,  $(n, q)\mu_2 = \lambda_1 + \tilde{b}\lambda_2$ . Выразив  $(\lambda_2, \mu_2)$  через  $(\lambda_1, \mu_1)$ , получается искомая матрица склейки.  $\square$

Учитывая замечание 1. Получаем уточнение теоремы 2.6.

**Следствие 2.2.1.** Если на торе  $T$  действие циклической группы  $H$  порождено сдвигами на вектор  $(\frac{k}{n}, \frac{p}{n})$ , где  $\frac{k}{n}$  и  $\frac{p}{n}$  — несократимые дроби, то матрица склейки, соответствующая тору  $T$  имеет вид  $\begin{pmatrix} -\tilde{a} & n \\ \frac{1-\tilde{a}\tilde{b}}{n} & \tilde{b} \end{pmatrix}$ , где

$$1. \begin{cases} \tilde{a} = kx - nz_1, & \text{где } x \text{ — решение уравнения } px \equiv 1 \pmod{n}, \quad z_1 = [x \frac{k}{n}], \\ \tilde{b} = py - nz_2, & \text{где } y \text{ — решение уравнения } ky \equiv 1 \pmod{n}, \quad z_2 = [y \frac{p}{n}], \end{cases}$$

**Замечание 2.**

1. В теореме 2.6 матрица склейки состоит из целых чисел (легко видеть, что  $(n, q) | (\tilde{a}\tilde{b} - 1)$ ). Определитель матрицы склейки равен -1.
2. Из явного вида матрицы склейки находится метка  $r$ . Метка  $r$  равна  $-\frac{\tilde{a}}{(n, q)} \pmod{1}$ , где  $\tilde{a} = kx - nz_1$ , что соответствует значению  $\frac{a}{(n, q)} \pmod{1}$  из леммы 2.5.
3. Метка  $n$  является суммой меток  $\theta$ , равных  $[-n_1 \{x \frac{k}{n}\}]$  для выходящего ребра и  $[-q_1 \{y \frac{p}{n}\}]$  для входящего ребра круговой молекулы.
4. Метка  $\varepsilon$  в этом случае всегда равна 1.

5. Лемма 2.5 и теорема 2.6 дают разные подходы к вычислению меток на ребрах круговой молекулы.

## 2.3 Построение почти прямого произведения по симметричной круговой меченой молекуле.

### 2.3.1 Присоединение 2-атомов к себе.

В этом разделе будут представлены некоторые техники, с помощью которых можно по круговой молекуле строить почти прямое произведение. Основная техника состоит в “присоединении” одного 2-атома к себе.

**Определение 2.3.1.** Рассмотрим два экземпляра атома  $V = (P, f)$  и применим к ним следующие операции:

1. Разрежем одну из полос поверхности  $P$  первого атома (границей которой являются две граничные окружности, соответствующие разным значениям функции  $f$ ). Аналогичное сделаем со второй поверхностью  $P$ .
2. Склеим свободные концы одной разрезанной поверхности  $P$  со свободными концами другой поверхности, так чтобы слои, соответствующие одному и тому же значению функции на одном и на другом конце совпали.

Полученный 2-атом  $V \# V = (P \# P, f)$  назовем *присоединением 2-атома  $V = (P, f)$  к себе*.

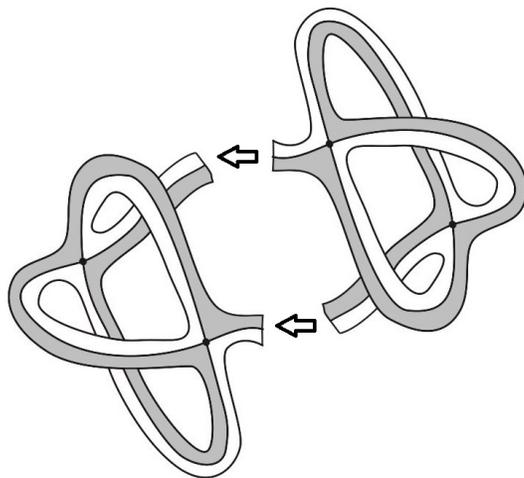


Рис. 2.3: Присоединение 2-атома  $C_1$  к себе.

Рассмотрим примеры 2-атомов, которые получаются присоединением. Заметим, что 2-атом  $M_2$  (см. рис 3.2) является присоединением атома  $C_1$  к себе, т. е.  $M_2 = C_1 \# C_1$ , присоединение показано на рисунке 2.3. Атом  $C_1^n$  (см. рис. 1.2 слева) является присоединением атома  $C_1$  к себе  $n$  раз, т.е.  $C_1^n = C_1 \# C_1 \# \dots \# C_1$ .

Присоединении 2-атома к себе можно также описать в терминах его  $f$ -графа. Разрезанию (1) соответствует разрезание  $f$ -графа по ориентированному ребру, а склейки (2), соответствует соединению этого ребра с разрезанным ребром дубликата этого  $f$ -графа. Легко видеть, что  $f$ -граф атома  $C_1^n$  (см. рис. 1.4 слева) получается перечисленными операциями из  $f$ -графа  $C_1$  (см. рис. 1.3 справа).

### 2.3.2 Симметричная круговая меченая молекула с 2-атомами без звездочек.

Пусть дана симметричная круговая молекула, как на рисунке 2.5 слева. Некоторый 2-атом  $V_1$  перестраивает одну окружность в одну и аналогично 2-атом  $V_2$ . Следовательно,  $f$ -графы 2-атомов  $V_1$  и  $V_2$  представляют собой ориентированный многоугольник (окружность) с некоторыми проведенными неориентированными диагоналями, причем в каждую вершину этого многоугольника входит ровно одно неориентированное ребро (см. определение 1.2.3  $f$ -графа).

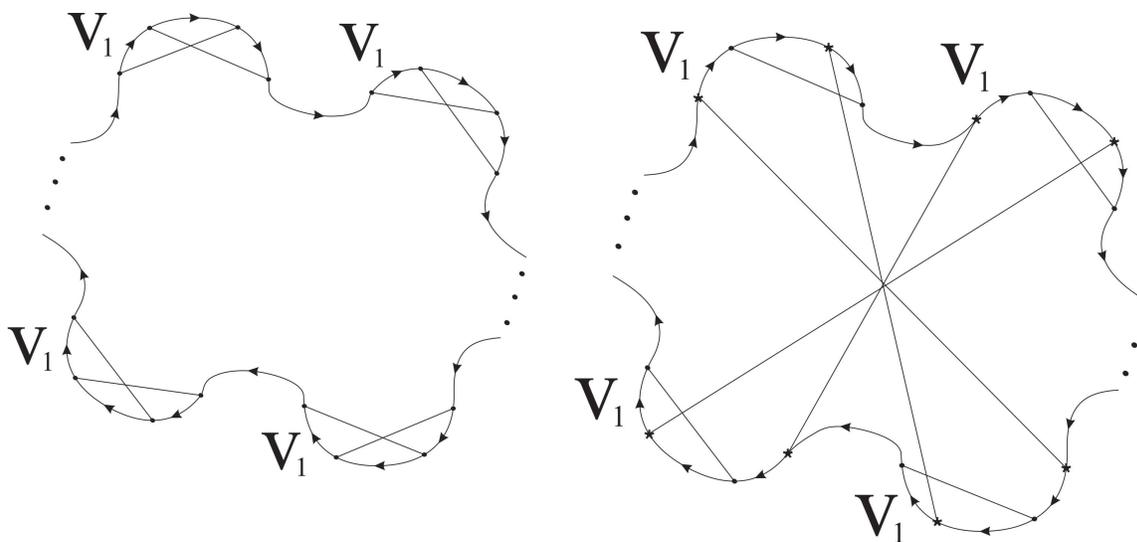


Рис. 2.4:  $f$ -граф атома  $V_1^n$  в случае без звездочек — слева, со звездочками — справа. Звездочки обозначены на  $f$ -графе “\*”.

Построим почти прямое произведение, которое соответствует данной круговой меченой молекуле. Обозначим за  $V_1^n = V_1 \# V_1 \# \dots \# V_1$  и  $V_2^n = V_2 \# V_2 \# \dots \# V_2$  присоединения  $n$  раз 2-атомов  $V_1$  и соответственно  $V_2$  к себе как показано на рисунке 2.4 слева. Легко видеть, что 2-атомы  $V_1^n$  и  $V_2^n$  также являются перестройками одной окружности в одну через критический слой и имеют естественную группу симметрий  $\mathbb{Z}_n$ , образующая которой действует поворотом соответствующего 2-атома на угол  $\frac{2\pi}{n}$ .

**Утверждение 2.3.1.** *Данная круговая молекула (рисунок 2.5 слева) является круговой меченой молекулой почти прямых произведений  $(V_1^n \times V_2^n)/\mathbb{Z}_n$  для всех натуральных  $n$ .*

*Доказательство.* Так как  $V_1^n$  и  $V_2^n$  являются перестройкой одной окружности в одну через критический слой, то круговая меченой молекула почти прямого произведения  $(V_1^n \times V_2^n)/\mathbb{Z}_n$  состоит из четырех компонент, каждая из которых соединяется с соседней ровно одним ребром.

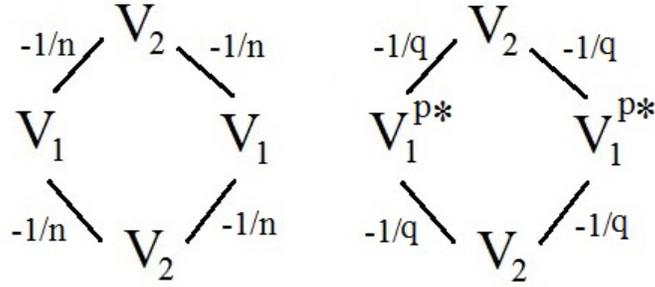


Рис. 2.5: Симметричные круговые молекулы.  $V_1^{p*}$  — 2-атом  $V_1$  с  $p$  звездочками.

Соответствующие компоненты являются 3-атомами вида  $(V_1^n \times O)/\mathbb{Z}_n \cong V_1$  и  $(V_2^n \times O)/\mathbb{Z}_n \cong V_2$ . Группа  $\mathbb{Z}_n$  действует на граничных торах (в представлении  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ) этих 3-атомов сдвигом на вектор  $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ , следовательно, по теореме 2.6 матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , соответственно метка  $r$  равна  $-\frac{1}{n}$ , метка  $\varepsilon = 1$ , метка  $n = 0$ .  $\square$

### 2.3.3 Симметричная круговая меченая молекула с 2-атомами со звездочками.

Пусть дана симметричная круговая молекула, общий вид которой изображен на рисунке 2.5 справа. Уточним вид такой круговой молекулы: так как 2-атом со звездочками представляет собой 2-атом, у которого в окрестности критических окружностей, соответствующих звездочкам, слои имеют тип  $(2, 1)$ , то метки  $r$  на ребрах круговой молекулы, соответствующих этому 2-атому со звездочками, должны быть четными, т.е.  $q = 2n$ . Также рассмотрим два случая  $p = 2k$  и  $p = 2k + 1$ . Получим круговую меченую молекулу, изображенную на рисунке 2.6 слева.

2-атом со звездочками  $V_1^{2k*}$  перестраивает одну окружность в одну и аналогично 2-атом  $V_2$ . Напомним, что 2-атом со звездочками получается из 2-атома добавлением на критический слой звездочек. Также, как и в предыдущем разделе  $f$ -граф 2-атома  $V_2$  представляет собой ориентированный многоугольник (окружность) с проведенными некоторыми неориентированными диагоналями, причем в каждую вершину этого многоугольника входит ровно одно неориентированное ребро (см. определение 1.2.3  $f$ -графа).  $f$ -граф 2-атома со звездочками  $V_1^{k*}$  представляет собой ориентированный многоугольник (окружность) с проведенными некоторыми неориентированными диагоналями, однако не в каждую вершину этого многоугольника входит ровно одно неориентированное ребро. Ровно  $2k$  вершин этого многоугольника имеют степень два, что соответствует звездочкам атома  $V_1^{2k*}$ .

Построим аналог присоединения в случае 2-атома со звездочками:

1. Разрежем  $f$ -граф 2-атома со звездочками  $V_1^{2k*}$  по некоторому ориентированному ребру. Разрезанный  $f$ -граф имеет вид направленного отрезка, на котором отмечено несколько точек, некоторые из которых помечены звездочками. Точки, которые не помечены звездочками, образуют пары, соединенные неориентированным ребром.
2. Пронумеруем точки, помеченные звездочками, от 1 до  $2k$  в соответствии с направлением отрезка.

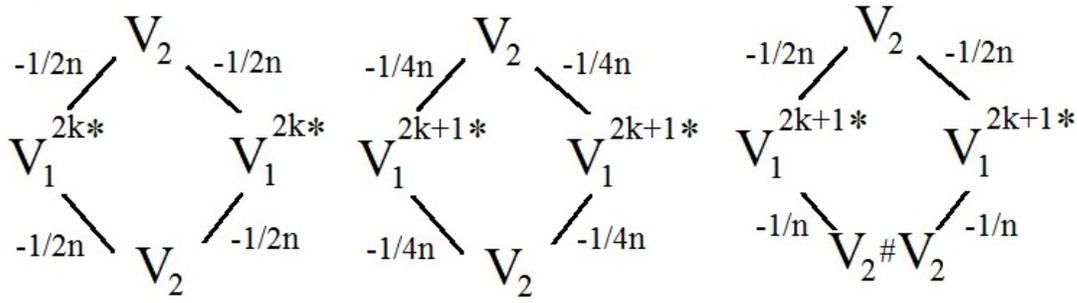


Рис. 2.6: Симметричные круговые молекулы в случае 2-атома со звездочками.  $V_1^{2k+1*}$  — 2-атом  $V_1$  с  $2k + 1$  звездочкой.  $V_2\#V_2$  — присоединение 2-атома  $V_2$  к себе.

3. Возьмем  $2n$  дублей такого отрезка и соединим их один за другим (с сохранением направления). В результате получится одна ориентированная окружность.
4. В противоположных дублях (с номерами  $l$  и  $l + n$ ) на этой окружности соединим точки, помеченные звездочками, с одинаковыми номерами.
5. В результате получим 2-атом  $V_1^{2n}$  без звездочек, изображенный на рисунке 2.4 справа.

В качестве  $V_2^{2n} = V_2\#V_2\#\dots\#V_2$  возьмем также присоединение  $2n$  раз 2-атома  $V_2$  к себе. Легко видеть, что в этом случае 2-атомы  $V_1^{2n}$  и  $V_2^{2n}$  также являются перестройкой одной окружности в одну через критический слой. Эти 2-атомы имеют естественную группу симметрий  $\mathbb{Z}_{2n}$ , действующую поворотом соответствующего 2-атома на угол  $\frac{\pi}{n}$ .

**Утверждение 2.3.2.** *Данная круговая молекула (рисунок 2.6 слева) является круговой меченой молекулой почти прямых произведений  $(V_1^{2n} \times V_2^{2n})/\mathbb{Z}_{2n}$  для всех натуральных  $n$ .*

*Доказательство.* Так как  $V_1^{2n}$  и  $V_2^{2n}$  являются перестройкой одной окружности в одну через критический слой, то круговая меченой молекула почти прямого произведения  $(V_1^{2n} \times V_2^{2n})/\mathbb{Z}_{2n}$  состоит из четырех компонент, каждая из которых соединяется с соседней ровно одним ребром. Соответствующие компоненты являются 3-атомами вида  $(V_1^{2n} \times O)/\mathbb{Z}_{2n} \cong V_1^{2k*}$  и  $(V_2^{2n} \times O)/\mathbb{Z}_{2n} \cong V_2$ . Группа  $\mathbb{Z}_{2n}$  действует на граничных торах (в представлении  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ) этих 3-атомов сдвигом на вектор  $(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n})$ , следовательно, по теореме 2.6 матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} -1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Следовательно, метка  $r$  равна  $-\frac{1}{2n}$ , метка  $\varepsilon = 1$ , метка  $n = 0$ .  $\square$

Рассмотрим случай  $p = 2k + 1$ . Атом  $V_1^{2n}$ , построенный описанным выше способом, является перестройкой одной окружности в две при нечетном  $n$  и одной окружности в одну при четном  $n$ . Следовательно, аналогично случаю  $p = 2k$ , почти прямое произведение  $(V_1^{4n} \times V_2^{4n})/\mathbb{Z}_{4n}$  имеет круговую меченую молекулу, как на рисунке 2.6 в середине.

**Следствие 2.3.1.** *Данная круговая молекула (рисунок 2.6 в середине) является круговой меченой молекулой почти прямых произведений  $(V_1^{4n} \times V_2^{4n})/\mathbb{Z}_{4n}$  для всех натуральных  $n$ .*

При нечетном  $n$  рассмотрим на  $V_1^{2n}$  группу  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n$ . Пусть группа  $\mathbb{Z}_2$  действует центральной симметрией на атомах  $V_1^{2n}$  и  $V_2^{2n}$ , а  $\mathbb{Z}_n$  действует поворотом на  $\frac{2\pi}{n}$ .

**Утверждение 2.3.3.** *Данная круговая молекула (рисунок 2.6 справа) является круговой меченой молекулой почти прямых произведений  $(V_1^{2n} \times V_2^{2n})/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n$  при нечетном  $n$ .*

*Доказательство.* Аналогично утверждению 2.3.2, круговая молекула почти прямого произведения  $(V_1^{2n} \times V_2^{2n})/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n$  состоит из четырех компонент, каждая из которых соединяется с соседней ровно одним ребром. Соответствующие компоненты являются 3-атомами вида  $(V_1^{2n} \times O)/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n \cong V_1^{2k+1*}$ ,  $(V_2^{2n} \times 2O)/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n \cong V_2 \# V_2$  и  $(V_2^{2n} \times O)/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n \cong V_2$ .

Найдем матрицы склейки, соответствующие ребрам этой круговой молекулы. Рассмотрим два случая:

1. Ребро круговой молекулы соответствует фактору  $(O \times O)/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n$ . Рассмотрим ограничение группы  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n$  на первый сомножитель (на первую окружность) этого прямого произведения. На этой окружности группа  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{2n}$  (в качестве порождающего элемента группы  $\mathbb{Z}_{2n}$  можно взять произведение порождающих элементов групп  $\mathbb{Z}_2$  и  $\mathbb{Z}_n$ ). Аналогично на втором сомножителе. Следовательно, группа  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n$  действует на граничных торах (в представлении  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ) этих 3-атомов сдвигом на вектор  $(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n})$ . По теореме 2.6 матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} -1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , соответственно метка  $r$  равна  $-\frac{1}{2n}$ , метка  $\varepsilon = 1$ , метка  $n = 0$ .
2. Ребро круговой молекулы соответствует фактору  $(2O \times O)/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n$ . На первом сомножителе группа  $\mathbb{Z}_2$  действует перестановкой окружностей, а группа  $\mathbb{Z}_n$  — поворотом каждой из окружностей на угол  $\frac{2\pi}{n}$ . Следовательно, на месте оставляет один из торов прямого произведения  $2O \times O$  подгруппа  $\mathbb{Z}_n$  в группе  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n$ . Она действует на этом торе (в представлении  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ) сдвигом на вектор  $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ , следовательно, по теореме 2.6 матрица склейки имеет вид  $\begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Метка  $r$  равна  $-\frac{1}{n}$ , метка  $\varepsilon = 1$ , метка  $n = 0$ .

Следовательно, искомая круговая меченая молекула является круговой меченой молекулой почти прямого произведения  $(V_1^{2n} \times V_2^{2n})/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n$  при нечетном  $n$ .  $\square$

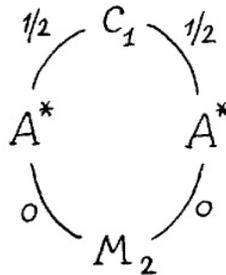


Рис. 2.7: Круговая меченая молекула почти прямого произведения  $(B \times M_2)/\mathbb{Z}_2$ , номер 6 из таблицы 4.1.

Примером круговой меченой молекулы, описанной в предыдущем утверждении 2.3.3, при  $n = 1$  и  $k = 0$  является круговая меченая молекула почти прямого произведения  $(B \times M_2)/\mathbb{Z}_2$  (см. рис. 2.7), номер 6 из таблицы 4.1. Как было отмечено выше, 2-атом  $M_2$  является присоединением 2-атома  $C_1$  к себе, т.е.  $M_2 = C_1 \# C_1$ . Атом  $V_1^2$ , построенный способом, описанным в утверждении 2.3.3, для 2-атома со звездочками  $A^*$ , является 2-атомом  $B$ .

# Глава 3

## Почти прямые произведения $(V_1 \times V_2)/G$ с одинаковыми круговыми мечеными молекулами.

В данном разделе будут представлены некоторые техники, с помощью которых можно строить серии почти прямых произведений с одинаковыми круговыми мечеными молекулами. В данной главе приведены только некоторые из таких серий. Скомбинировав методы из прошлого раздела 2.3 и данного, можно построить дополнительно множество различных серий таких примеров. В данной главе также используется техника присоединения 2-атомов, перестраивающих одну окружность в одну.

### 3.1 Пример А. Грабежного.

Идея построения различных 4-особенностей с одинаковыми слоениями на 3-границе состоит в рассмотрении накрытий одних 2-атомов над другими (или что то же самое одних  $f$ -графов над другими). А. В. Грабежной построил пример трех особенностей типа седло-седло с одинаковыми слоениями на границе, это был единственный известный пример таких особенностей. На основе идей, использованных в этом примере, будут построены в данной диссертации две бесконечные серии особенностей типа седло-седло с одинаковыми слоениями на границе.

Пример А. Грабежного строится на основе двух 2-атомов  $C_1$ , которые являются перестройкой одной окружности в одну через критический слой с двумя особыми точками (см. рис. 1.1). Рассмотрим на этом 2-атоме действие группы его симметрий  $\mathbb{Z}_4$  и ее подгруппы, соответственно  $\mathbb{Z}_2$ . Действия этих групп на граничных окружностях атома  $C_1$  задаются поворотами на углы  $\frac{\pi}{2}(\mathbb{Z}_4)$  и  $\pi(\mathbb{Z}_2)$  соответственно. Пример Грабежного  $C_1 \times C_1$ ,  $(C_1 \times C'_1)/\mathbb{Z}_2$ ,  $(C_1 \times C''_1)/\mathbb{Z}_4$  получается при рассмотрении 2-листного и 4-листного накрытий атома  $C_1$ .

Рассмотрим прямое произведение атомов  $C_1 \times C_1$  с функциями на соответствующих множителях  $f_1$  и  $f_2$ . На прямом произведении  $C_1 \times C_1$  определим функцию  $f_1$  по следующей формуле:  $f_1(x, y) = f_1(x)$ , аналогично зададим функцию  $f_2$ . Функции  $f_1$  и  $f_2$  задают отображение момента на прямом произведении  $(f_1, f_2) : C_1 \times C_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Прообраз  $\{(x, y) | f_1(x, y) = 1\}$  является прямым произведением  $O \times C_1(f_1(O) = 1)$  на 2-атоме  $(C_1, f_1)$ , что соответствует 3-атому  $C_1$ . Аналогично при рассмотрении прообразов  $f_1 = -1$ ,  $f_2 = 1$ ,  $f_2 = -1$ . Следовательно, круговая молекула такой особенности будет состоять из четырех компонент, каждая из которых

соответствует 3-атому  $C_1$ . Для каждого такого 3-атома слоение Зейферта устроено как прямое произведение слоя (окружности) на 2-атом  $C_1$ . Для того чтобы посчитать матрицу склейки на каждом из так, выберем допустимую систему координат: следует взять в качестве первого образующего цикла  $\lambda$  слой расслоения Зейферта, а в качестве второго цикла  $\mu$  — граничную окружность атома  $C_1$ . В результате на одном граничном торе будут циклы  $\lambda$  и  $\mu$  в одном порядке, а на соответствующем (при соответствии посредством склейки) другом граничном торе — в обратном. Следовательно, круговая молекула такой особенности имеет вид, показанный на рис. 1.6, а матрица склейки на ребрах — вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

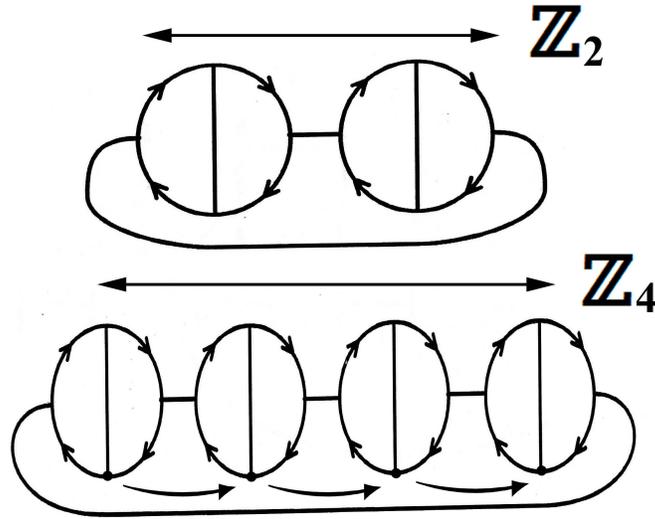


Рис. 3.1: Атомы  $C'_1$  сверху и  $C''_1$  снизу с действиями соответствующих групп

Рассмотрим двулистное и четырехлистное накрытия над атомом  $C_1$ . Обозначим такие 2-атомы  $C'_1$  и  $C''_1$  с соответствующими группами  $\mathbb{Z}_2$  и  $\mathbb{Z}_4$  на них (рис. 3.1). Группы  $\mathbb{Z}_2$  и  $\mathbb{Z}_4$  действуют на атомах  $C'_1$  и  $C''_1$  соответственно циклической перестановкой “компонент”  $f$ -графа, переводя каждую ориентированную окружность в соседнюю. Почти прямые произведения  $(C_1 \times C_1)/\{id\}$ ,  $(C_1 \times C'_1)/\mathbb{Z}_2$  и  $(C_1 \times C''_1)/\mathbb{Z}_4$  несократимы, так как в их группах нет элементов, действующих нетривиально только на одном из сомножителей соответствующего прямого произведения. Следовательно, по теореме 1.7 соответствующие им особенности различаются, так как различаются почти прямые произведения.

Легко убедиться, что их слоения на 3-границах совпадают. Для этого рассмотрим соответствующие им круговые меченые молекулы. Атомы в компонентах этих круговых молекул бывают следующего вида:  $(C'_1 \times O)/\mathbb{Z}_2$ ,  $(C''_1 \times O)/\mathbb{Z}_4$  и  $(C_1 \times 2O)/\mathbb{Z}_2$ ,  $(C_1 \times 4O)/\mathbb{Z}_4$ , где в последних двух факторах действие групп  $\mathbb{Z}_2$  и  $\mathbb{Z}_4$  покомпонентное: на атоме  $C_1$  тривиальное, а на окружностях циклической перестановкой, порядок которой совпадает с количеством окружностей во втором сомножителе прямого произведения. Следовательно по теореме 2.2, все эти факторы равны  $C_1 \times O$ , т.е. соответствуют 3-атому  $C_1$ . Так как действие группы на граничных торах покомпонентное, то склейка двух граничных торов на ребре круговой молекулы устроена так: допустимый цикл  $\lambda$  выбирается как слой расслоения Зейферта, который является факторизацией соответствующего непересекающегося объединения окружностей, а допустимый цикл  $\mu$  как граничная окружность атома  $C_1$ . Следовательно, на всех граничных торах, соответству-

ющих ребрам круговой молекулы, матрица склейки такая же, как и у прямого произведения атомов  $C_1 \times C_1$ , т.е.  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Следовательно, почти прямые произведения  $C_1 \times C_1$ ,  $(C_1 \times C'_1)/\mathbb{Z}_2$  и  $(C_1 \times C''_1)/\mathbb{Z}_4$  являются различными 4-особенностями по отношению к Лиувиллеву эквивалентности, у которых совпадают круговые меченые молекулы, т.е. слоения Лиувилля на их 3-границах эквивалентны.

### 3.2 Бесконечная серия почти прямых произведений $(C_1^n \times C_1^n)/\mathbb{Z}_n$ с одинаковой круговой молекулой, но разными метками.

Развивая пример А. В. Грабежного (см. [7]), описанный в предыдущем разделе, построим бесконечную серию особенностей типа седло-седло, у которых совпадают круговые молекулы, однако метки на ребрах круговых молекул различаются. Этот пример строится также для круговой молекулы прямого произведения атомов  $C_1 \times C_1$ . Докажем утверждение.

**Утверждение 3.2.1.** [40] *Круговые молекулы почти прямых произведений  $(M_2 \times M_2)/\mathbb{Z}_2$  и прямого произведения  $C_1 \times C_1$  совпадают, однако меченые молекулы не совпадают. Группа  $\mathbb{Z}_2$  действует на  $M_2$  инволюцией. Атом  $M_2$  изображен на рисунке 3.2.*

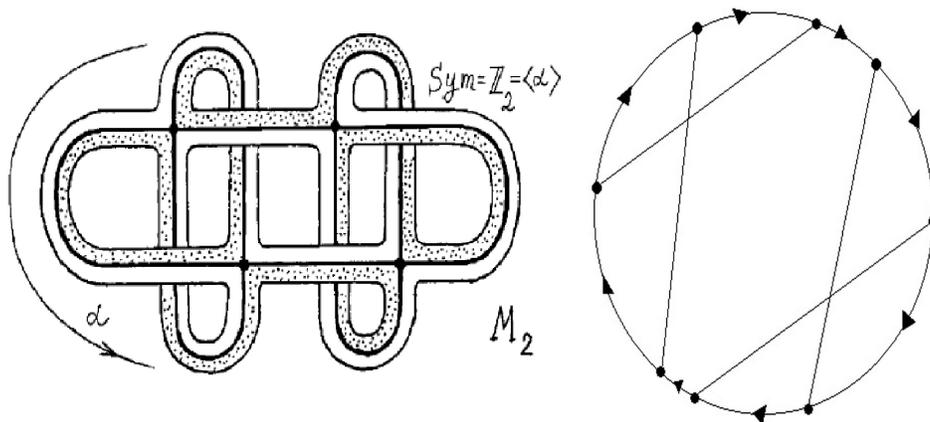


Рис. 3.2: Атом  $M_2$  с действием группы  $\mathbb{Z}_2$  слева и его  $f$ -граф справа.

*Доказательство.* Рассмотрим  $f$ -граф атома  $M_2$ . На самом атоме  $M_2$  группа  $\mathbb{Z}_2$  действует инволюцией, а на его граничных окружностях поворотом на угол  $\pi$ . Заметим, что  $M_2/\mathbb{Z}_2 = C_1$ , следовательно, все компоненты круговой молекулы почти прямого произведения  $(M_2 \times M_2)/\mathbb{Z}_2$  состоят из одного атома  $C_1$ . Следовательно, круговые молекулы почти прямого произведения  $(M_2 \times M_2)/\mathbb{Z}_2$  и прямого произведения  $C_1 \times C_1$  совпадают. Из леммы 2.5 получаем, что метки  $r$  на всех ребрах круговой молекулы почти прямого произведения  $(M_2 \times M_2)/\mathbb{Z}_2$  равны  $\frac{1}{2}$ .  $\square$

Из утверждения 3.2.1 возникает идея построения целой серии почти прямых произведений с одной и той же круговой молекулой.

Обозначим через  $C_1^n$  атом, у которого  $f$ -граф задается как на рисунке 1.4 слева. Пусть на нем действует группа  $\mathbb{Z}_n$  поворотом на  $\frac{2\pi}{n}$  и кратные ему углы. Заметим, что при  $n = 2$  атом  $C_1^n$  совпадает с  $M_2$ .

**Теорема 3.1.** [40] *Круговые молекулы почти прямых произведений  $(C_1^n \times C_1^n)/\mathbb{Z}_n$  и прямого произведения  $C_1 \times C_1$  совпадают. Однако их меченые молекулы различаются.*

*Доказательство.* Доказательство получается аналогично утверждению 3.2.1. Рассмотрим  $f$ -граф атома  $C_1^n$ . На атоме  $C_1^n$  группа  $\mathbb{Z}_n$  действует поворотом на угол  $\frac{2\pi}{n}$ , на его граничных окружностях аналогично. Заметим, что  $C_1^n/\mathbb{Z}_n = C_1$ , следовательно, все компоненты круговой молекулы почти прямого произведения  $(C_1^n \times C_1^n)/\mathbb{Z}_n$  состоят из одного атома  $C_1$ . Следовательно, круговые молекулы почти прямого произведения  $(C_1^n \times C_1^n)/\mathbb{Z}_n$  и прямого произведения  $C_1 \times C_1$  совпадают. Из теоремы 2.6 получаем, что метки  $r$  на всех ребрах круговой молекулы почти прямого произведения  $(C_1^n \times C_1^n)/\mathbb{Z}_n$  равны  $\frac{n-1}{n}$ . Следовательно, круговые молекулы почти прямых произведений  $(C_1^n \times C_1^n)/\mathbb{Z}_n$  и прямого произведения  $C_1 \times C_1$  совпадают, однако метки  $r$  различаются. Заметим, что их метки  $\varepsilon = 1$  и  $n = 0$  также совпадают.  $\square$

### 3.3 Бесконечная серия пар: почти прямые произведения $(A_{2n} \times A'_{2n})/\mathbb{Z}_{2n}$ и прямые произведения $A_{2n} \times A_{2n}$ — с одинаковыми круговыми мечеными молекулами.

Чтобы расширить пример А. В. Грабежного, рассмотрим следующую конструкцию:

*Пусть дан атом  $X$ , который перестраивает одну окружность в одну, причем группа  $\mathbb{Z}_{2n}$  действует поворотами на угол  $\frac{2\pi}{n}$  и кратные ему углы на каждой из его граничных окружностей. Пусть также имеется его  $2n$ -листное связное регулярное накрытие  $X'$ , такое, что над каждой граничной окружностью атома  $X$  висит  $2n$  окружностей накрытия  $X'$  (регулярное накрытие задает действие группы  $\mathbb{Z}_{2n}$  на атоме  $X'$ ). Тогда можно доказать, что особенности  $X \times X$  и  $(X \times X')/\mathbb{Z}_{2n}$  будут не эквивалентны, а их круговые меченые молекулы будут совпадать.*

В работе [29] приведены примеры симметричных атомов  $A_{2n}$  (рис. 1.2 справа).  $f$ -граф атома  $A_{2n}$  изображен на рисунке 1.4 справа. Такие атомы подходят под описание, данное выше для любого  $n \in \mathbb{N}$  в качестве атома  $X$ . На атомах  $A_{2n}$  действуют группы  $\mathbb{Z}_{2n}$  описанным выше способом.

Проведем построение, обобщающее пример А. В. Грабежного. Возьмем атом  $A_{2n}$  и построим для него новый атом  $A'_{2n}$ . Для этого возьмем  $2n$  экземпляров атома  $A_{2n}$ , в каждом экземпляре (точнее в соответствующем  $f$ -графе) удалим одно внутреннее (неориентированное) ребро и соединим получившиеся вершины, как показано на рис. 3.3 справа. Таким образом, группа  $\mathbb{Z}_{2n}$  будет действовать на полученном атоме  $A'_{2n}$  циклической перестановкой экземпляров атома  $A_{2n}$ , переводя каждое ребро, соединяющее экземпляры друг с другом, и каждый экземпляр в соседний. Получится  $2n$ -листное регулярное накрытие над атомом  $A_{2n}$ .

**Теорема 3.2.** [41] *Прямое произведение  $A_{2n} \times A_{2n}$  и почти прямое произведение  $(A_{2n} \times A'_{2n})/\mathbb{Z}_{2n}$  представляют собой различные классы особенностей по отношению к лиувиллевой эквивалентности, но имеют совпадающие круговые меченые молекулы для каждого  $n$  соответственно, в частности слоения Лиувилля на их 3-границах совпадают (лиувиллево эквивалентны).*

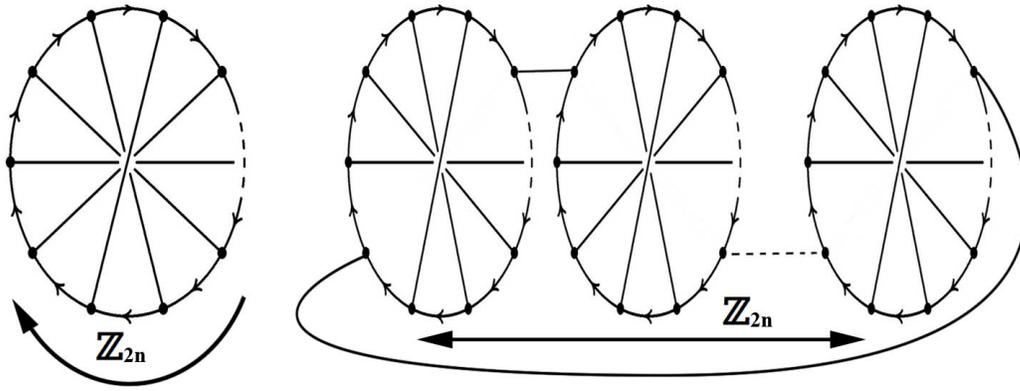


Рис. 3.3:  $f$ -граф атома  $A'_{2n}$  (справа) получается из  $2n$  экземпляров  $f$ -графа атома  $A_{2n}$  (слева) удалением одного внутреннего (неориентированного) ребра и соединением освободившихся вершин.

*Доказательство.* Рассмотрим почти прямые произведения  $A_{2n} \times A_{2n}$  и  $(A_{2n} \times A'_{2n})/\mathbb{Z}_{2n}$  с соответствующими функциями  $f_1$  и  $f_2$  на них.  $f$ -графы атомов  $A_{2n}$  и  $A'_{2n}$  показаны на рис. 3.3 вместе с действием на них соответствующих групп. Как и в примере А. Грабежного, почти прямые произведения  $A_{2n} \times A_{2n}$  и  $(A_{2n} \times A'_{2n})/\mathbb{Z}_{2n}$  несократимы, а значит, соответствующие им особенности различны по теореме Зунга (см. теорему 1.7).

На прямом произведении определим функцию  $f_1$  как  $f_1(x, y) = f_1(x)$  и аналогично зададим функцию  $f_2$ . Функции  $f_1$  и  $f_2$  задают отображение момента  $A_{2n} \times A_{2n} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Как и в примере А. В. Грабежного рассмотрим прообраз значения  $f_1 = 1$ . Это есть множество  $\{(x, y) | f_1(x, y) = 1\}$ , т.е. прямое произведение  $O \times A_{2n}$  (3-атом  $A_{2n}$ ). Для каждого такого атома слоеи Зейферта устроено как прямое произведение слоя (окружности) на 2-атом  $A_{2n}$ . В случае  $f_1 = 1$  допустимый цикл  $\lambda$  является слоем расслоения Зейферта. Чтобы посчитать матрицу склейки, возьмем в качестве допустимого цикла  $\mu$  граничную окружность атома  $A_{2n}$ . В результате при склейке граничных торов, от одного атома будут “наследоваться” циклы  $\lambda$  и  $\mu$  в одном порядке, а от другого атома — в обратном. Следовательно, круговая молекула такой особенности имеет вид графа (см. рис. 1.6 справа), ребрам которого соответствует матрица склейки  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Такая матрица склейки у всех прямых произведений таких атомов.

Атомы, находящиеся в круговой молекуле почти прямого произведения  $(A_{2n} \times A'_{2n})/\mathbb{Z}_{2n}$ , имеют один из перечисленных видов:  $(A'_{2n} \times O)/\mathbb{Z}_{2n}$  или  $(A_{2n} \times 2nO)/\mathbb{Z}_{2n}$ . В факторе  $(A'_{2n} \times O)/\mathbb{Z}_{2n}$  группа  $\mathbb{Z}_{2n}$  действует на окружности поворотом на угол  $\frac{2\pi}{n}$ , в почти прямом произведении  $(A_{2n} \times 2nO)/\mathbb{Z}_{2n}$  — на атоме  $A_{2n}$  тривиально, покомпонентно и переставляет циклически  $2n$  окружностей. Таким образом, факторы  $(A'_{2n} \times O)/\mathbb{Z}_{2n}$  и  $(A_{2n} \times 2nO)/\mathbb{Z}_{2n}$  равны  $A_{2n} \times O$ , что соответствует атому  $A_{2n}$ . Следовательно, во всех компонентах круговой молекулы почти прямого произведения  $(A_{2n} \times A'_{2n})/\mathbb{Z}_{2n}$  находятся атомы  $A_{2n}$ , они соединены одним ребром (так как атом  $A_{2n}$  перестраивает одну окружность в одну).

Легко убедиться, что ребрам соответствует матрица склейки, описанная выше. Так как действие группы на граничных торах, которые являются прямыми произведениями двух окружностей, покомпонентное, то склейка устроена так: цикл  $\lambda$  выбирается как слой расслоения Зейферта, т.е. как окружность, полученная после факторизации непересекающегося объединения

окружностей до факторизации, а цикл  $\mu$  — как граничная окружность атома  $A_{2n}$ . Следовательно, аналогично примеру А. Грабежного круговые меченые молекулы  $A_{2n} \times A_{2n}$  и  $(A_{2n} \times A'_{2n})/\mathbb{Z}_{2n}$  совпадают.  $\square$

# Глава 4

## Расщепляемость почти прямых произведений $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$ .

### 4.1 Два определения расщепляемости/неустойчивости.

#### 4.1.1 Определение расщепляемости в общем смысле.

Сначала дадим общее определение устойчивости. Для интегрируемой гамильтоновой системы  $(M^{2n}, \omega, f_1, f_2, \dots, f_n)$  назовем ее *интегрируемым возмущением* семейство интегрируемых гамильтоновых систем  $(M^{2n}, \omega_\alpha, f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha}, \dots, f_{n,\alpha})$ , где симплектическая структура  $\omega_\alpha$  и интегралы  $f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha}, \dots, f_{n,\alpha}$  гладко зависят от координат и параметра возмущения  $\alpha$ , причем исходная система соответствует значению параметра  $\alpha = 0$ .

**Определение 4.1.1.** Интегрируемую гамильтонову систему  $(M^{2n}, \omega, f_1, f_2, \dots, f_n)$  будем называть *устойчивой*, если для любого ее интегрируемого возмущения  $(M^{2n}, \omega_\alpha, f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha}, \dots, f_{n,\alpha})$  с компактным носителем существует  $\varepsilon > 0$ , для которого исходная система Лиувиллево эквивалентна возмущенной при всех  $\alpha \in [0, \varepsilon]$ .

Рассматривая в качестве  $M^{2n}$  инвариантную окрестность  $U(L)$  особого слоя  $L$ , мы приходим к определению полулокальной устойчивости (или нерасщепляемости) особенностей системы.

**Определение 4.1.2.** Пусть  $(M^{2n}, \omega, f_1, f_2, \dots, f_n)$  — интегрируемая гамильтонова система,  $L$  — особый слой соответствующего слоения Лиувилля, содержащий лишь невырожденные особые точки ранга нуль седлового типа, а  $U(L)$  — его малая инвариантная регулярная окрестность в  $M^{2n}$ . Седловую особенность  $U(L)$  назовем *нерасщепляемой*, если интегрируемая система  $(U(L), \omega, f_1, f_2, \dots, f_n)$  устойчива в смысле определения 4.1.1.

Другими словами, седловая особенность ранга нуль является *расщепляемой*, если существует малое интегрируемое возмущение, при котором ее особый слой  $L$  распадается на несколько особых слоев (с седловыми особыми точками ранга 0), а для нерасщепляемой особенности особый слой у возмущенной системы ровно один. Результат возмущения, соответствующего расщепляемой особенности  $U(L)$ , будем называть ее *расщеплением*.

Для седловых особенностей типа почти прямого произведения опишем один из возможных способов их расщепления. Рассмотрим почти прямое произведение  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$  с атомами  $V_i = (P_i, f_i)$ . Пусть, например, для атома  $V_n$  при возмущении  $f_{n,\alpha}, \alpha \in [0, \varepsilon]$ , особый слой функции  $f_n$  распадается на несколько особых слоев функции  $f_{n,\varepsilon}$  (при  $\alpha = \varepsilon$ ). Обозначим пару

$(P_n, f_{n,\varepsilon})$  через  $V'_n$ . Отметим, что  $V'_n$  уже не является атомом, поскольку функция  $f_{n,\varepsilon}$  имеет несколько критических значений, но, тем не менее,  $V'_n$  - это поверхность  $P_n$  со слоением Лиувилля, заданным линиями уровня функции  $f_{n,\varepsilon}$ . Предположим, что действие  $\phi_n$  группы  $G$  на  $P_n$  сохраняет не только функцию  $f_n$ , но и ее возмущение  $f_{n,\alpha}$  (и в частности  $f_{n,\varepsilon}$ ). Тогда действие  $\phi$  группы  $G$  определено на произведении  $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_{n-1} \times V'_n$ , причем это действие свободно. Поэтому определена и интегрируемая система с интегралами  $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, f_{n,\varepsilon}$ .

**Утверждение 4.1.1.** [42] *Интегрируемая система  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_{n-1} \times V'_n)/G$  является расщеплением особенности  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$ .*

*Доказательство.* Ясно, что функции  $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, f_{n,\alpha}$  попарно коммутируют при любом  $\alpha$  и определяют на  $(P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n)/G$  интегрируемую систему. При малом возмущении  $f_{n,\alpha}$  функции  $f_n$  ее седловые точки не изменят тип. Поэтому у возмущенной интегрируемой системы  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_{n-1} \times V'_n)/G$  будет то же количество седловых особых точек ранга нуль, что и у исходной системы, но все они не могут лежать на одном особом слое, поскольку по предположению функция  $f_{n,\varepsilon}$  в некоторых из них принимает разные значения.  $\square$

Итак, для почти прямого произведения  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$  можно строить расщепление, возмущая слоение только на одном из атомов, если это возмущение сохраняется при действии группы  $G$ .

## 4.1.2 Определение покомпонентной расщепляемости.

Далее мы будем рассматривать только особенности типа почти прямого произведения. Для них удобно работать с другим более узким определением “покомпонентной” устойчивости (нерасщепляемости).

**Определение 4.1.3.** Назовем особенность типа почти прямого произведения  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$  *покомпонентно нерасщепляемой (или покомпонентно устойчивой)*, если при любых возмущениях  $f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha}, \dots, f_{n,\alpha}$  функций  $f_1, f_2, \dots, f_n$  (заданных на  $V_1, V_2, \dots, V_n$  соответственно), инвариантных относительно действий  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  группы  $G$  и постоянных на граничных окружностях, возмущенная система лиувиллево эквивалентна исходной при всех  $\alpha \in [0, \varepsilon]$  для некоторого  $\varepsilon > 0$ .

Наоборот, будем говорить, что седловая особенность  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$  является *покомпонентно расщепляемой*, если существуют  $G$ -инвариантные “покомпонентные” возмущения  $f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha}, \dots, f_{n,\alpha}$  функций  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , для которых у возмущенной системы число особых слоев, содержащих точки ранга нуль, больше одного. Соответствующее фактор-многообразие  $(P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n)/G$  со слоением, заданным функциями  $f_{1,\alpha}, f_{2,\alpha}, \dots, f_{n,\alpha}$ , будем обозначать  $(V'_1 \times V'_2 \times \dots \times V'_n)/G$ .

Согласно утверждению 4.1.1 из покомпонентной расщепляемости следует расщепляемость в общем смысле (определение 4.1.2), т.е. является расщеплением особенности  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$ .

Отметим также, что в определении покомпонентной расщепляемости можно рассматривать возмущение лишь на одном атоме, поскольку указанные возмущения на атомах в почти прямом произведении можно выполнять последовательно (и в любом порядке). Сформулируем это как следствие.

**Следствие 4.1.1.** [42] *Пусть существует покомпонентное расщепление  $(V'_1 \times V'_2 \times \dots \times V'_n)/G$ , тогда особенности  $(V'_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$ ,  $(V_1 \times V'_2 \times \dots \times V_n)/G$  ... и  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V'_n)/G$  также являются расщеплениями в общем смысле.*

## 4.2 Расщепление почти прямых произведений $(V_1 \times V_2)/G$ сложности два.

### 4.2.1 Необходимые условия покомпонентной расщепляемости

В этом разделе обсуждаются некоторые свойства меченой круговой молекулы особенности типа седло-седло (для краткости будем называть ее также просто круговой молекулой), связанные с устойчивостью (или возможностью расщепления) такой особенности. Как и выше, мы будем рассматривать особенности типа почти прямого произведения  $(V_1 \times V_2)/G$  и их покомпонентные возмущения.

**Определение 4.2.1.** Пусть  $(V'_1 \times V'_2)/G$  — покомпонентное расщепление особенности  $(V_1 \times V_2)/G$ , где  $V'_1 = (V_1, H_\varepsilon)$ ,  $V'_2 = (V_2, f_\varepsilon)$ . Рассмотрим простую замкнутую кривую на образе отображения момента  $(H_\varepsilon, f_\varepsilon)$ , ограничивающую область, в которой лежат все критические значения, имеющие в прообразе точки ранга нуль. Круговую молекулу, соответствующую такому пути, назовем *круговой молекулой покомпонентно расщепленной особенности* или для краткости *круговой молекулой расщепления*.

**Утверждение 4.2.1.** [42] Пусть  $B$  — круговая молекула особенности  $(W \times V)/G$ , а  $(W' \times V')/G$  — ее покомпонентное расщепление. Круговая молекула расщепления получается из  $B$  расщеплением некоторых 3-атомов, соответствующих компонентам молекулы  $B$ .

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть случай расщепления одного из атомов почти прямого произведения. Пусть, без ограничения общности, функции Морса  $H$  и  $f$ , соответствующие атомам  $W = (P_1, H)$  и  $V = (P_2, f)$ , принимают на границах  $P_1$  и  $P_2$  значения  $+1$  и  $-1$ . Пусть  $W' = (P_1, f_\varepsilon)$  — возмущение атома  $W = (P_1, H)$ , при котором расщепляется особый слой функции  $H$ , тогда  $W'$  можно представить в виде цепочки атомов  $W_1, W_2, \dots, W_n$ , склеенных последовательно по граничным окружностям друг с другом. Бифуркационная диаграмма особенности  $(W' \times V)/G$  изображена на рисунке 4.1 слева.

Пусть атом  $W$  является перестройкой  $k$  окружностей в  $l$ , а атом  $V$  является перестройкой  $p$  окружностей в  $q$ . Компоненты круговой молекул расщепленной особенности  $(W' \times V)/G$  имеют вид  $(pO \times V)/G, (qO \times V)/G$  и  $(W_1 \times kO)/G, (W_2 \times kO)/G, \dots, (W_n \times kO)/G; (W_1 \times lO)/G, (W_2 \times lO)/G, \dots, (W_n \times lO)/G$ . Компоненты круговой молекулы расщепленной особенности  $(W' \times V)/G$  изображены на рисунке 4.1 справа.

Рассмотрим некоторый атом  $X$  круговой молекулы особенности  $(W \times V)/G$ , принадлежащий компоненте  $(W \times kO)/G$ . Он является фактором  $X = (W \times sO)/G$ , где  $sO \subset kO$  — некоторый набор граничных окружностей атома  $V$ , соответствующий положительному значению функции  $f = +1$ . Сопоставим атому  $X$  цепочку наборов атомов  $(W_1 \times sO)/G, (W_2 \times sO)/G, \dots, (W_n \times sO)/G$ , склеенных последовательно по граничным окружностям друг с другом. Эта цепочка является расщеплением атома  $X$ .  $\square$

В доказательстве утверждения 4.2.1 строится соответствие между 3-атомами круговой молекулы до расщепления и наборами 3-атомов после расщепления. В смысле этого соответствия в дальнейшем будем говорить про *расщепленные 3-атомы круговой молекулы* или последовательность расщепленных 3-атомов. Для этой последовательности верно следующей утверждение.

**Утверждение 4.2.2.** Все метки  $r$ , соответствующие ребрам между расщепленными 3-атомами, полученными расщеплением одного 3-атома круговой молекулы, равны  $\infty$ .

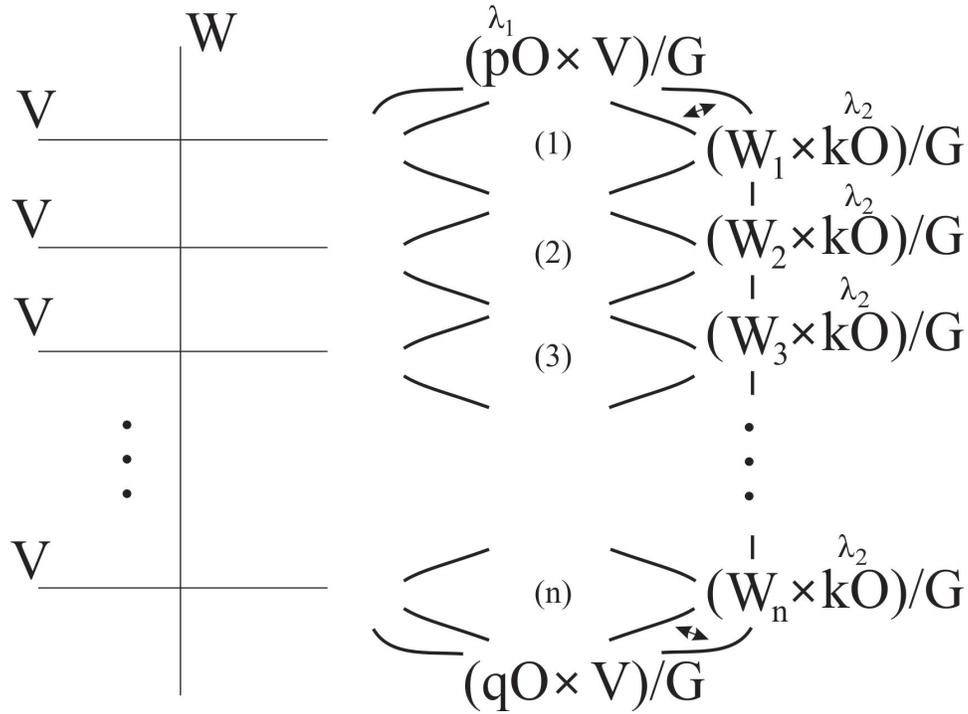


Рис. 4.1: Бифуркационная диаграмма (слева) и компоненты круговой молекулы (справа) расщепленной особенности  $(W' \times V)/G$ . Цифрами (1) – (n) обозначены круговые молекулы особенностей меньшей сложности. Стрелками обозначены особые ребра.

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть случай расщепления одного из атомов почти прямого произведения. Пусть  $W' = (P_1, H_\varepsilon)$  – возмущение атома  $W = (P_1, H)$ , при котором расщепляется особый слой функции  $H$ , тогда аналогично утверждению 4.2.1  $W'$  можно представить в виде цепочки атомов  $W_1, W_2, \dots, W_n$ , склеенных последовательно по граничным окружностям друг с другом. Граничные окружности атомов  $W$  и  $V$  обозначим так же, как в доказательстве утверждения 4.2.1. Компоненте  $(W \times kO)/G$  круговой молекулы особенности  $(W \times V)/G$  соответствует цепочка компонент  $(W_1 \times kO)/G, (W_2 \times kO)/G, \dots, (W_n \times kO)/G$ , склеенных последовательно по граничным окружностям. Циклы  $\lambda$  для 3-атомов из соседних компонент выбираются, как слои расслоения Зейферта, то есть из множества  $kO$ , следовательно, на торе, по которому соседние 3-атомы склеены, эти циклы гомологичны. Следовательно, метка  $r$  на ребре, соответствующему этому тору, равна  $\infty$ .  $\square$

Дополнительно к утверждению 4.2.2, круговая молекула расщепленной особенности связана с круговой молекулой особенности  $(V_1 \times V_2)/G$  необходимыми условиями расщепляемости. Некоторые из этих условий были сформулированы в работе [6].

**Теорема 4.1** (Необходимые условия покомпонентной расщепляемости [42]). *Пусть задано покомпонентное расщепление особенности  $(V_1 \times V_2)/G$ .*

1. *Всякое ребро круговой молекулы 4-особенности является одним из ребер круговой молекулы расщепленной особенности.*
2. *Для каждого 3-атома со звездочками в круговой молекуле особенности  $(V_1 \times V_2)/G$  количество его звездочек (критических окружностей с неориентируемой сепаратрисной*

диаграммой) равно суммарному количеству звездочек в 3-атомах, соответствующих ему (в смысле утверждения 4.2.1) в круговой молекуле расщепления.

*Доказательство.* 1. Аналогично доказательству утверждения 4.2.1, торы, соответствующие прямому произведению границ 3-атомов  $V_1$  и  $V_2$ , не изменились при расщеплении. Также не изменился способ их склейки, а следовательно, и метки на ребрах, соответствующих этим торам.

2. В 3-атомах со звездочками имеются особые слои (окружности) прямого произведения атомов  $V_1 \times V_2$ , в окрестности которых группа  $G$  действует поворотом на  $\pi$ , то есть действие группы  $G$  на прямом произведении  $V_1 \times V_2$  задает наличие или отсутствие звездочек у 3-атомов круговой молекулы до расщепления и после, а значит, не зависит от возмущения слоения. □

**Замечание 3.** Необходимые условия расщепляемости сформулированы выше для случая покомпонентных возмущений, но, вероятно, они будут выполнены и для общего определения расщепляемости (см. определения 4.1.2 и 4.1.1).

Рассмотрим бифуркационную диаграмму расщепленной особенности. По определению расщепления, особые точки типа седло-седло при расщеплении остаются особыми точками типа седло-седло, следовательно, на бифуркационной диаграмме в окрестности ее значения она имеет вид “креста”. Следовательно, бифуркационная диаграмма расщепления будет состоять из склейки крестов (решетки), каждый из которых соответствует особому слою возмущенного отображения момента.

Рассмотрим для каждого такого креста его достаточно малую окрестность, которая содержит на бифуркационной диаграмме ровно одно особое значение ранга нуль. Для каждой такой окрестности (4-особенности) можно построить свою круговую молекулу, соответствующую ее границе. Такая круговая молекула будет *круговой молекулой особенности меньшей сложности* по отношению к круговой молекуле 4-особенности до расщепления. На рисунке 4.1 круговые молекулы особенностей меньшей сложности обозначены числами (1) – (n).

Назовем ребро круговой молекулы расщепления *особым*, если оно соответствует (при соответствии, указанном в утверждении 4.2.1) ребру (после расщепления) одной из круговых молекул 4-особенностей меньшей сложности. Особые ребра круговой молекулы расщепления обозначены на рисунке 4.1 стрелками. Уточним первое необходимое условие расщепляемости.

**Утверждение 4.2.3.** [42] *При расщеплении знаменатель метки  $r$  каждого ребра круговой молекулы сохраняется.*

*Доказательство.* Докажем следующее: знаменатель метки  $r$  круговой молекулы до расщепления совпадает со знаменателем метки  $r$  одного из особых ребер круговой молекулы расщепленной особенности (соответствие указано в утверждении 4.2.1).

Будем использовать обозначения как в утверждении 4.2.1. Достаточно рассмотреть случай расщепления ровно одного атома почти прямого произведения  $(W \times V)/G$ . Пусть  $W = (P_1, H_\varepsilon)$  — возмущение атома  $W = (P_2, H)$ , расщепляющее особый слой функции  $H$ . Предположим, что граничные значения на  $P_2$  у функции  $f$  и на  $P_1$  у функций  $H$  и  $H_\alpha$  равны  $+1$  и  $-1$  для любого  $\alpha$ . Пусть атом  $V_1$  является перестройкой  $k$  окружностей в  $l$ , а атом  $V$  является перестройкой  $p$  окружностей в  $q$ . Компоненты круговой молекул расщепленной особенности  $(W' \times V)/G$  имеют

вид  $(pO \times V)/G$ ,  $(qO \times V)/G$  и  $(W_1 \times kO)/G$ ,  $(W_2 \times kO)/G, \dots (W_n \times kO)/G$ ;  $(W_1 \times lO)/G$ ,  $(W_2 \times lO)/G, \dots (W_n \times lO)/G$ . Компоненты круговой молекулы расщепленной особенности  $(W' \times V)/G$  изображены на рисунке 4.1 справа.

Ребра круговой молекулы расщепления делятся на два типа: соответствующие круговой молекуле до расщепления и ребра, образовавшиеся при расщеплении соответствующих атомов. Рассмотрим ребро, соответствующее круговой молекуле особенности до расщепления. Это ребро соответствует некоторому тору из несвязного объединения торов Лиувилля (прообраза значения  $(\pm 1, \pm 1)$  при отображении момента  $\mathcal{F} = (H, f)$  для любого сочетания “+” и “-”). Такие ребра являются особыми.

Обозначим через  $\phi$  отображение из  $P_1 \times P_2$  в фактор  $(P_1 \times P_2)/G$ . Группа  $G$  сохраняет функции  $H$  и  $f$ , следовательно на  $(P_1 \times P_2)/G$  определено отображение момента  $\mathcal{F} : (P_1 \times P_2)/G \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Рассмотрим тор  $T \subset (P_1 \times P_2)/G$ , соответствующий значению  $(+1, +1)$  при этом отображении момента (остальные случаи рассматриваются аналогично). Пусть тор  $T$  является граничным тором для 3-атомов  $X$  и  $Y$ , соответствующих компонентам  $X \subset (W \times kO)/G$  и  $Y \subset (pO \times V)/G$  круговой молекулы почти прямого произведения  $(W \times V)/G$ , по которому они (3-атомы) склеиваются  $T \subset \partial X \cap \partial Y$ . 3-атомы  $X$  и  $Y$  имеют структуру расслоения Зейферта со слоями  $\lambda_1 \subset (kO)/G$  и  $\lambda_2 \subset (pO)/G$  соответственно (см. рисунок 4.1). Циклы  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  трансверсальны и являются образующими для тора  $T$ .

Пусть  $x \in H^{-1}(pO)$  и  $y \in H^{-1}(kO)$  — точки из прообразов граничных окружностей атомов  $W$  и  $V$  при отображениях  $H : W \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  соответственно. Количество пересечений образов при отображении  $\phi$  связных компонент множеств  $\phi^{-1}(x \times \lambda_1)$  и  $\phi^{-1}(\lambda_2 \times y)$  равно знаменателю метки  $r$  на ребре круговой молекулы, соответствующему тору  $T$ .

Обозначим через  $\mathcal{F}_\alpha = (H_\alpha, f)$  отображение момента, соответствующее покомпонентному возмущению. По определению покомпонентной расщепляемости и из предположения, что граничные значения на  $P_2$  у функции  $H_\alpha$  равны  $+1$  и  $-1$  для любого  $\alpha$ , следует, что отображение  $\mathcal{F}_\alpha^{-1} \circ \mathcal{F}$  является гладким по  $\alpha$  и тривиальным на границах атомов  $W$  и  $V$  при любом  $\alpha$ . Следовательно, при отображении  $\phi \circ \mathcal{F}_\alpha^{-1} \circ \mathcal{F} \circ \phi^{-1}$  слои слоения Зейферта 3-атомов до возмущения переходят в слои слоения Зейферта 3-атомов после возмущения. Следовательно, верно следующее:

$$\phi \circ \mathcal{F}_\alpha^{-1} \circ \mathcal{F} \circ \phi^{-1}(x \times \lambda_1) = x' \times \lambda'_1, \quad \phi \circ \mathcal{F}_\alpha^{-1} \circ \mathcal{F} \circ \phi^{-1}(\lambda_2 \times y) = \lambda'_2 \times y'.$$

Так как отображение  $\mathcal{F}_\alpha^{-1} \circ \mathcal{F}|_{\phi^{-1}(x \times \lambda_1)} = id$  и  $\mathcal{F}_\alpha^{-1} \circ \mathcal{F}|_{\phi^{-1}(\lambda_2 \times y)} = id$ , следовательно, верно следующее:

$$\phi^{-1}(x' \times \lambda'_1) = \mathcal{F}_\alpha^{-1} \circ \mathcal{F}(\phi^{-1}(x \times \lambda_1)) = \phi^{-1}(x \times \lambda_1),$$

аналогично  $\phi^{-1}(\lambda'_2 \times y') = \phi^{-1}(\lambda_2 \times y)$ . Следовательно, количество пересечений образов при отображении  $\phi$  связных компонент множеств  $\phi^{-1}(x \times \lambda_1)$  и  $\phi^{-1}(\lambda_2 \times y)$  равно количеству пересечений образов при отображении  $\phi$  связных компонент множеств  $\phi^{-1}(x' \times \lambda'_1)$  и  $\phi^{-1}(\lambda'_2 \times y')$ . Следовательно, знаменатель метки  $r$  круговой молекулы до расщепления совпадает со знаменателем метки  $r$  одного из особых ребер круговой молекулы расщепленной особенности.  $\square$

Далее при доказательстве нерасщепляемости используется лишь сохранение знаменателя  $r$ -метки, однако во всех рассмотренных в данной диссертации примерах расщепленных круговых молекул сохраняется вся  $r$ -метка.

## 4.2.2 Классификация расщепленных особенностей типа седло-седло малой сложности.

Невырожденные особенности сложности 1, очевидно, не могут быть расщепляемыми. Все особенности коранга 1 расщепляемы (см. [8]). Поэтому простейший класс особенностей (по сложности и числу степеней свободы), в котором могут возникнуть как устойчивые, так и расщепляемые особенности, это особенности типа седло-седло, т.е. седловые особенности ранга нуль сложности 2. Список всех таких особенностей был получен А.В. Болсиновым (см. [28]). Он состоит из 39 особенностей. Как уже было замечено в разделе 2.1.2 все 39 особенностей перечислены в таблице 4.1. Информация, приведенная в этой таблице взята из таблиц 9.1 и 9.3 книги [5]. В первом столбце таблицы 4.1 указан номер особенности, а в остальных - некоторые ее топологические характеристики. В частности, в последнем столбце содержится информация о возможности расщепления данной особенности при интегрируемом возмущении. Поясним обозначения, используемые в таблице 4.1.

1. Латинские буквы (с индексами) - это стандартные обозначения атомов из книги [5]. Изображения всех атомов, встречающихся в таблице 4.1, приведены на рисунках 4.5–4.8. При этом  $BB$  означает два атома  $B$ , а  $BB'$  - два атома  $B$  с различными направлениями роста функции на них.
2. Бифуркационная диаграмма в малой окрестности образа точки типа седло-седло при отображении момента  $\mathcal{F} : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  выглядит как пара трансверсально пересекающихся кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Прообраз при отображении момента каждой из этих кривых содержит седловые критические точки ранга один, которые заполняют двумерное симплектическое подмногообразие ( $S_1$  для  $\gamma_1$  и  $S_2$  для  $\gamma_2$ ) в  $M^4$ . Выбрав подходящим образом координаты  $(f_1, f_2)$  в образе отображения момента, можно считать, что эти кривые являются прямыми  $f_2 = 0$  и  $f_1 = 0$ , а подмногообразия  $S_1$  и  $S_2$  - множествами критических точек функций  $f_2$  и  $f_1$  (соответственно) на  $M^4$ . Каждая из функций  $f_1$  на  $S_1$  и  $f_2$  на  $S_2$  имеет ровно одно критическое значение, т.е.  $W_1 = (S_1, f_1)$  и  $W_2 = (S_2, f_2)$  представляют из себя наборы 2-атомов (поскольку поверхности  $S_1, S_2$  могут быть не связными). Пара этих наборов атомов  $(W_1, W_2)$  называется *l-типом особенности типа седло-седло*. Их обозначения и указаны во втором столбце таблицы 4.1.
3. В третьем столбце указано представление особенности в виде почти прямого произведения  $(V_1 \times V_2)/G$  (группа  $G = D_4$  для особенности с номером 16 — это группа диэдра порядка 8). Поскольку в группе симметрий атомов обычно есть несколько элементов порядка 2, после обозначения группы  $\mathbb{Z}_2$  в скобках указано покомпонентное действие ее образующей на прямом произведении атомов, т.е. обозначение  $\mathbb{Z}_2(\sigma_1, \sigma_2)$  означает, что образующая группы  $\mathbb{Z}_2$  действует на первом сомножителе инволюцией  $\sigma_1$ , а на втором — инволюцией  $\sigma_2$ . Обозначения симметрий атомов  $\alpha, \beta, \gamma$  взяты из книги [5] (см. там список атомов с симметриями после таблицы 9.1). При этом изображения атомов (в книге [5], а также на рисунках 4.5–4.8) выбраны так, что  $\alpha$  — это центральная симметрия,  $\beta$  — поворот на  $\frac{\pi}{2}$  (относительно “центра” атома при данном его изображении), а  $\beta$  — некоторая дополнительная симметрия, которая для разных атомов имеет разный смысл (см. ее описание, а также описание действия группы  $D_4$  для особенности с номером 16 в книге [5] на рисунках после таблицы 9.1).

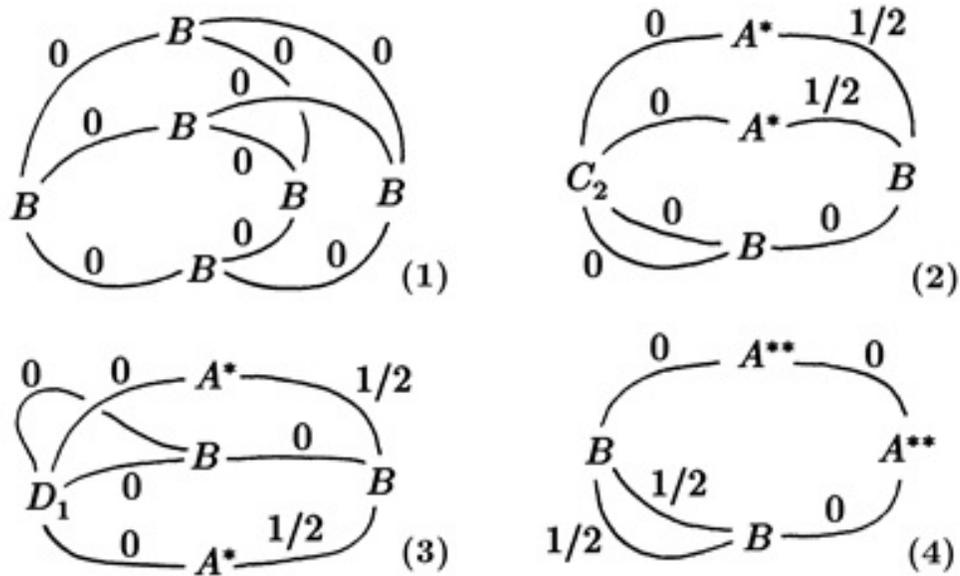


Рис. 4.2: Круговые меченые молекулы для всех четырех особенностей типа седло-седло сложности 1.

4. В последнем столбце указано расщепление данной особенности сложности 2 на две особенности сложности 1, если для нее существует соответствующее покомпонентное возмущение (иначе написано “нет”). Обозначения (1),(2),(3),(4) особенностей сложности 1 в этом столбце соответствуют рисунку 4.2, на котором приведены круговые молекулы всех четырех особенностей типа седло-седло сложности 1.

Главным результатом диссертации является следующая теорема.

**Теорема 4.2.** [42] [О расщепляемости особенностей типа седло-седло сложности 2] Среди всех возможных особенностей сложности 2 типа седло-седло покомпонентно расщепляемыми являются 28 особенностей, остальные 11 являются покомпонентно нерасщепляемыми. Полный список особенностей вместе с их расщеплениями приведен в таблице 4.1.

*Пояснения к таблице 4.1:*  $\alpha$  — это образующий элемент группы  $\mathbb{Z}_2$ , действующий центральной симметрией на соответствующем 2-атоме,  $\beta$  — это образующий элемент группы  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ , образованной элементами  $\langle \alpha, \beta \rangle$ ,  $\gamma$  — образующий элемент группы  $\mathbb{Z}_4$ , действующий поворотом на соответствующем атоме на угол  $\frac{\pi}{2}$ . Атомы и действия групп на них изображены на рисунках 4.9–4.11. Обозначения образующих и список всех атомов, участвующих в классификации особенностей типа седло-седло сложности два взяты из книги [5].

*Доказательство.* 1. Сначала докажем расщепляемость. Для доказательства расщепляемости будем строить возмущение только одной из функций на 4-особенности так, чтобы выполнялись все условия утверждения 4.1.1. На рисунках 4.5–4.8 показано, как мы возмущаем слоение на соответствующих атомах. Рассмотрим два примера четырехмерных особенностей:  $(C_2 \times K_3)/\mathbb{Z}_2(\alpha, \beta\gamma^2) \times \mathbb{Z}_2(\beta, \gamma^2)$ ,  $(B \times P_4)/\mathbb{Z}_2(\alpha, \gamma^2)$ . Остальное будет доказываться аналогично.

Возмутим сначала слоение (функцию Морса) атома  $K_3$  (для особенности  $(C_2 \times K_3)/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , номер 2 в таблице 4.1) таким образом, как показано на рисунке 4.6. Новое (возмущенное)

слоение  $K'_3$  атома  $K_3$  устроено следующим образом: две белые окружности перестраиваются в две серые окружности через особый слой с двумя невырожденными особыми точками, что соответствует атому  $C_2$ . Затем, аналогично, две серые окружности преобразуются в две черные окружности через особый слой с двумя невырожденными особыми точками, что соответствует второму атому  $C_2$ . Следовательно, атом  $K_3$  расщепится на два атома  $C_2$ , склеенных друг с другом по двум серым окружностям. Образующие группы  $\mathbb{Z}_2(\beta\gamma^2) \times \mathbb{Z}_2(\gamma^2)$  продолжаются на расщепление  $K'_3$ : на расщеплении каждая из образующих группы  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  действует на каждом из атомов  $C_2$  инвариантно, причем это действие совпадает с действием группы симметрий соответствующего атома  $C_2$ . Следовательно, возмущая в прямом произведении  $C_2 \times K_3$  атом  $K_3$ , как описано выше, действие группы  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  продолжится и на расщепление прямого произведения и, следовательно, будет определен фактор  $(C_2 \times K'_3)/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Получившееся слоение и будет расщеплением особенности  $(C_2 \times K_3)/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

Теперь рассмотрим особенность  $(B \times P_4)/\mathbb{Z}_2(\alpha, \gamma^2)$  (номер 12 в таблице 4.1). Аналогично предыдущему случаю возмутим атом  $P_4$ , как показано на рисунке 4.8 (верхнее). Возмущение атома  $P_4$  представляет собой следующее: две белые окружности деформируются в две серые окружности через особый слой с двумя невырожденными особыми точками (соответственно атом  $C_2$ ), потом две серые окружности переходят в две черные окружности, образуя две компоненты связности. В каждой из таких компонент одна окружность переходит в две через особый слой с одной невырожденной особой точкой, что соответствует атому  $B$ . Таким образом возмущение  $P'_4$  представляет собой склейку атома  $C_2$  с двумя атомами  $B$  по двум серым окружностям. Действие группы  $\mathbb{Z}_2$  продолжается на расщепление  $B \times P'_4$ : на атоме  $C_2$  группа действует инвариантно центральной симметрией, а на двух атомах  $B$  перестановкой этих атомов. Следовательно, определен фактор  $(B \times P'_4)/\mathbb{Z}_2$ , который и является расщеплением.

2. Докажем нерасщепляемость. Рассмотрим произвольную особенность типа почти прямого произведения и предположим противное: пусть для этой особенности существует расщепление, то есть такое возмущение интегралов, что у возмущенного отображения момента количество особых слоев было бы больше единицы.

В нашем случае особенность имеет сложность два, следовательно, на особом слое имеются ровно две невырожденные особые точки ранга нуль. При расщеплении особый слой может расщепиться только ровно на два особых слоя, каждому из которых соответствует ровно одна невырожденная особая точка ранга нуль (то есть на две особенности сложности один). Следовательно, бифуркационная диаграмма будет состоять из склейки только двух крестов.

Сначала докажем для особенностей под номерами 16, 27, 28, 35, 36, 39 из таблицы 4.1. Для всех будет доказательство аналогичное. Рассмотрим круговую молекулу такой особенности. В этой молекуле присутствуют ребра с метками  $\frac{1}{4}$  или  $\frac{3}{4}$ . Из утверждения 4.2.3 следует, что ребра с такими же метками будут присутствовать в круговой молекуле расщепленной особенности, причем они будут ее особыми ребрами. Следовательно, эти ребра будут принадлежать круговой молекуле меньшей сложности, то есть сложности один. На рисунке 4.2 приведена классификация А. В. Болсинова всех возможных молекул сложности один.

Среди ребер молекул сложности один нет ребер с метками  $\frac{1}{4}$  или  $\frac{3}{4}$ . Противоречие. Сле-

довательно, такая особенность не расщепляется.

Рассмотрим особенности под номерами 15, 17, 37 из таблицы 4.1. Круговые молекулы таких особенностей содержат два атома  $B$ , которые соединяются единственным ребром с меткой  $\frac{1}{2}$ . Атом  $B$  имеет ровно одну особую точку, следовательно для атома  $B$  не существует расщепления. Расщепление круговой молекулы особенности происходит за счет расщепления соответствующих атомов, следовательно, в круговой молекуле расщепления будут присутствовать атомы  $B$ , причем, аналогично предыдущему пункту, с тем же ребром и меткой. Это ребро будет особым, следовательно, после расщепления будет принадлежать круговой молекуле меньшей сложности. Следовательно, атомы  $B$  вместе с этим ребром будут принадлежать круговой молекуле меньшей сложности, так как это ребро соединяет два атома  $B$ , и в круговой молекуле меньшей сложности никакое другое ребро не будет их соединять. Ни в одной круговой молекуле сложности один нет двух атомов  $B$ , которые соединяются единственным ребром с меткой  $\frac{1}{2}$ . Противоречие. Следовательно, такая особенность не расщепляется.

Рассмотрим особенности под номерами 18 и 38 из таблицы 4.1. Круговые молекулы таких особенностей содержат атом  $A^{**}$ , который соединяется ровно одним ребром с соседними атомами. Пусть существует расщепление круговой молекулы, при котором расщепляется атом  $A^{**}$ . По второму и третьему необходимым свойствам расщепляемости общее количество звездочек должно быть одно и то же после расщепления и до. Атом  $A^{**}$  является перестройкой ровно одного тора Лиувилля в один, следовательно, атом  $A^{**}$  мог бы расщепиться только на два атома  $A^*$  или на два других атома с одной звездочкой, соединенных ребрами. Ни в одной круговой молекуле сложности один нет двух атомов  $A^*$  или других атомов с одной звездочкой, соединенных ребрами, следовательно, аналогично рассуждениям выше, такое расщепление не возможно. Следовательно, атом  $A^{**}$  не мог расщепиться. Ребра атома  $A^{**}$  являются особыми по утверждению 4.2.3, следовательно, атом  $A^{**}$  вместе с его мечеными ребрами принадлежит круговой молекуле меньшей сложности. Рассмотрим круговую молекулу меньшей сложности, которой принадлежит атом  $A^{**}$ . Во всех круговых молекулах сложности один, где присутствует атом  $A^{**}$ , этот атом соединяется ребром с другим атомом  $A^{**}$  (см. рисунок 4.2), следовательно, в этой круговой молекуле меньшей сложности должен присутствовать второй атом  $A^{**}$ . Вторым атомом  $A^{**}$  соответствует перестройки торов Лиувилля при переходе из одной камеры бифуркационной диаграммы расщепления в другую, следовательно, он также присутствует в круговой молекуле расщепленной особенности. Следовательно, суммарное количество звездочек в круговой молекуле расщепленной особенности больше либо равно четырем, а суммарное количество звездочек круговой молекулы до расщепления равно двум, что противоречит третьему необходимому свойству расщепляемости. Следовательно, такая особенность не расщепляется. □

Поскольку из покомпонентной расщепляемости, очевидно, следует и просто расщепляемость (в смысле определений 4.1.2, 4.1.1), верно следующее утверждение.

**Следствие 4.2.1.** Среди 39 особенностей сложности 2 типа седло-седло 28 особенностей являются полулокально неустойчивыми. Их расщепление указано в таблице 4.1.

**Замечание 4.** Ключевым утверждением при доказательстве нерасщепляемости в теореме 4.2 была теорема 4.1 о необходимых условиях нерасщепляемости. Если доказать выполнение необ-

ходимых условий нерасщепляемости в случае общего определения расщепляемости, то все те же выкладки можно будет проделать и для теоремы 4.2.

**Замечание 5.** Также возможно ослабить условие покомпонентной расщепляемости: потребовать расщепляемость в общем смысле вместе с выполнением необходимых условий расщепляемости.

### 4.2.3 Круговая молекула 4-особенности сложности два и расщепляемость этой 4-особенности.

В этом разделе описаны некоторые свойства меченых круговых молекул, которые позволяют установить расщепляемость или нерасщепляемость соответствующей особенности типа седло-седло сложности 2. Отметим, что в общем случае меченая круговая молекула не определяет особенность с точностью до лиувиллевой эквивалентности. Пример не эквивалентных особенностей типа седло-седло (сложности больше 2), имеющих одинаковые меченые круговые молекулы, был построен А. В. Грабежным [7] (см. также работу [40]).

Необходимые условия расщепляемости (см. теорему 4.1 и утверждение 4.2.3), используемые в доказательстве теоремы 4.2, для того чтобы доказать нерасщепляемость некоторых особенностей типа седло-седло сложности два, накладывают ограничения только на круговую меченую молекулу этой особенности (на ее слоение на границе, а не внутри). Как показывает следующее утверждение, для особенностей сложности 2 этих ограничений достаточно (только на слоение на границе), чтобы выявить среди них все покомпонентно нерасщепляемые особенности.

**Утверждение 4.2.1.** [42] *Из необходимых условий нерасщепляемости следует покомпонентная устойчивость всех 11 особенностей из теоремы 4.2.*

*Доказательство.* Перечислим три свойства, которые были использованы в теореме 4.1 и утверждении 4.2.3: в круговой молекуле расщепляемой особенности не может содержаться

1. ребро с меткой  $\frac{1}{4}$  или  $\frac{3}{4}$ ,
2. пара 3-атомов  $B$ , соединенных только одним ребром с меткой  $\frac{1}{2}$ ,
3. ровно один 3-атом со звездочками  $A^{**}$ .

Действительно, из утверждения 4.2.3 следует, если круговая молекула расщепляемой особенности сложности 2 содержит фрагмент 1 или 2, то аналогичный фрагмент должен содержаться в какой-то из двух круговых молекул, соответствующих особенностям сложности 1, полученных после расщепления, но таких фрагментов в круговых молекулах особенностей сложности 1 нет (см. рис. 4.2).

В третьем случае 3-атом  $A^{**}$  не может расщепиться, так как при этом должны были бы возникнуть два 3-атома со звездочкой, соединенные ребром, но таких фрагментов в круговых молекулах особенностей сложности 1 тоже нет (см. рис. 4.2). Если же 3-атом  $A^{**}$  не расщепляется при возмущении, то после расщепления особенности этот 3-атом  $A^{**}$  должен принадлежать круговой молекуле сложности 1 вида (4) на рисунке 4.2, но тогда это противоречит свойству (2) из теоремы 4.1, поскольку до расщепления в молекуле было лишь две звездочки.

Применяя указанные соображения в случае 1 к особенностям с номерами 16, 27, 28, 35, 36, в случае 2 — к особенностям с номерами 15, 17, 37, а в случае 3 — к особенностям с номерами 18, 38, получаем, что все эти 11 особенностей покомпонентно нерасщепляемы.  $\square$

Рассмотрим, как расщепление особенности влияет на ее круговую молекулу на примере особенности  $(C_2 \times K_3)/\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  (номер 2 в таблице 4.1). Расщепление круговой молекулы этой особенности показано на рисунке 4.3. При этом расщеплении в прямом произведении  $C_2 \times K_3$  происходит возмущение слоения атома  $K_3$ , как показано на рисунке 4.6, затем происходит факторизация нового прямого произведения по действию группы  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ , продолженному на возмущение атома  $K_3$ . Атом  $K_3$  расщепляется на два атома  $C_2$ , соединенные двумя ребрами. Группа  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  становится группой симметрий соответствующих склеенных друг с другом атомов  $C_2$ . Круговая молекула этой особенности распадается на две круговые молекулы особенностей типа  $(C_2 \times C_2)/\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ , причем расщепление круговой молекулы происходит за счет расщеплений 3-атомов  $A^{****}$  и  $C_1$ . 3-Атом  $C_1$  распадается на два 3-атома  $B$  (в соответствии с рисунком 4.5). 3-Атом  $A^{****}$  можно представить, как фактор  $(K_3 \times O)/\mathbb{Z}_2(\alpha\beta, \alpha)$  (см. статью [40]), где  $O$  обозначает окружность. Возмутим в факторе  $(K_3 \times O)/\mathbb{Z}_2(\alpha\beta, \alpha)$  слоение атома  $K_3$ , как показано на рисунке 4.6. Как уже отмечено выше, атом  $K_3$  расщепится на два атома  $C_2$ , при этом действие группы продолжается на расщепление и таким образом получится два 3-атома  $(C_2 \times O)/\mathbb{Z}_2(\alpha\beta, \alpha)$ , которые и есть 3-атомы  $A^{**}$  (см. статью [40]). Таким образом, рисунки 4.5–4.8 дают нам информацию не только о расщеплении атомов почти прямого произведения, но и о расщеплении 3-атомов круговых молекул.

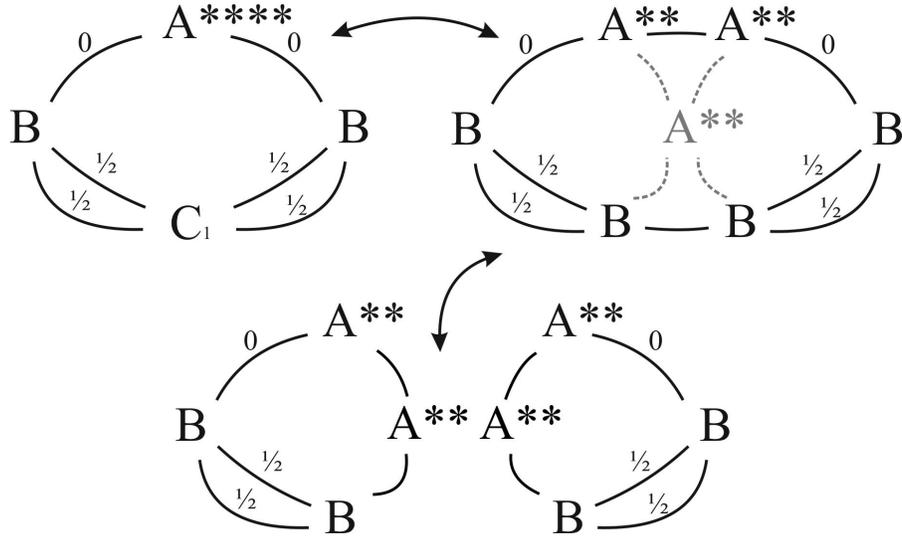


Рис. 4.3: Внешнее расщепление круговой молекулы особенности  $(C_2 \times K_3)/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ . Расщеплению соответствуют стрелки слева-направо, сверху-вниз.

Вернемся к расщеплению круговой молекулы  $(C_2 \times K_3)/\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ . Как было показано выше, левая и правая части круговой молекулы расщепления соответствуют круговым молекулам сложности 1. Такое расщепление круговой молекулы назовем *внешним*. Внешнее расщепление происходит за счет расщепления всех 3-атомов в противоположных вершинах квадрата, соответствующего круговой молекуле (3-атомов  $A^{****}$  и  $C_1$ ).

**Утверждение 4.2.2.** [42] *Особенность типа седло-седло сложности 2, для круговой молекулы которой существует внешнее расщепление (см. пример на рисунке 4.3), является расщепляемой.*

*Доказательство.* Перебором убеждаемся, что внешнее расщепление можно провести только для круговых молекул особенностей с номерами 1–14, 19, 20, 22, 29–34 из таблицы 4.1. Как было показано, эти особенности являются расщепляемыми.  $\square$

Для расщепляемой особенности не всегда происходит внешнее расщепление ее круговой молекулы. Рассмотрим пример особенности  $(B \times L_2)/\mathbb{Z}_2$  (номер 26 в таблице 4.1). Расщепление ее круговой молекулы показано на рисунке 4.4.

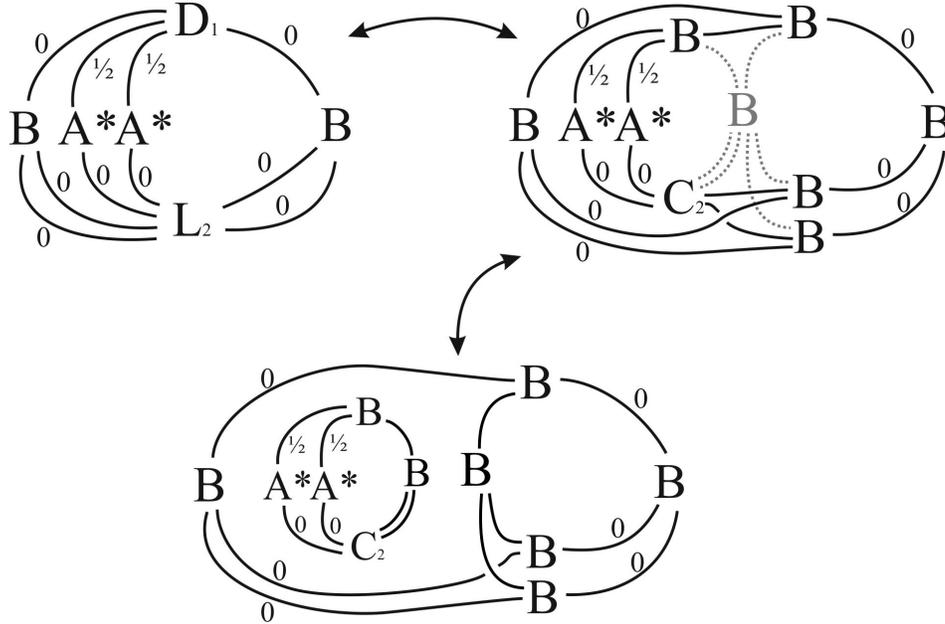


Рис. 4.4: Внутреннее расщепление круговой молекулы особенности  $(B \times L_2)/\mathbb{Z}_2$ . Расщеплению соответствуют стрелки слева-направо, сверху-вниз.

Здесь расщепление почти прямого произведения происходит за счет возмущения слоения атома  $L_2$ , как показано на рисунке 4.7: атом  $L_2$  распадается на непересекающееся объединение двух окружностей и атома  $C_2$ , которые затем склеиваются с двумя атомами  $B$ . Расщепление почти прямого произведения при этом получается склеиванием двух особенностей типа  $(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$  и  $(B \times 2O)/\mathbb{Z}_2$  с особенностью  $(B \times 2B)/\mathbb{Z}_2$ , где  $2O$  и  $2B$  — непересекающееся объединение двух окружностей и соответственно двух атомов  $B$ , на котором группа  $\mathbb{Z}_2$  действует перестановкой. Эта склейка хорошо видна на круговой молекуле расщепления: левая часть круговой молекулы расщепления на рисунке 4.4 состоит из проекции на плоскость двух листов, на одном из которых расположена круговая молекула особенности  $(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$ , а на другом 3-атом  $B = (B \times 2O)/\mathbb{Z}_2$ , который является частью круговой молекулы особенности  $B \times B = (B \times 2B)/\mathbb{Z}_2$ .

Таким образом, расщепление также происходит за счет расщепления соответствующих 3-атомов в компонентах круговой молекулы, но сама круговая молекула расщепления является “сцепливанием” круговых молекул особенностей меньшей сложности. Такое расщепление назовем *внутренним*.

**Утверждение 4.2.3.** [42] *Особенность типа седло-седло сложности 2, для круговой молекулы которой существует внутреннее расщепление (см. пример на рисунке 4.4), является расщепляемой.*

*Доказательство.* Перебором убеждаемся, что внутреннее расщепление можно провести только для круговых молекул особенностей с номерами 21, 23, 24, 25 из таблицы 4.1. Как было показано, эти особенности являются расщепляемыми.  $\square$

Теперь можно сформулировать утверждение о связи круговой молекулы особенности типа седло-седло сложности 2 и возможности расщепления.

**Утверждение 4.2.4.** *Круговая меченая молекула особенности типа седло-седло сложности 2 определяет, существует ли покомпонентное расщепление этой особенности.*

*Доказательство.* Нерасщепляемость доказана в утверждении 4.2.1. Возможность внутреннего и внешнего расщепления — свойство круговой молекулы. особенности типа седло-седло, следовательно, из утверждений 4.2.2 и 4.2.3 расщепляемость доказана.  $\square$

Для круговых молекул особенностей сложности два существует обратная операция: операция склейки круговой молекулы особенности сложности 2 из двух круговых молекул особенностей сложности 1. Чтобы получить такую круговую молекулу, нужно взять две круговые молекулы сложности 1 (см. рис. 4.2), расположить их рядом или одну внутри другой, склеить их соответственно внешним или внутренним способом, указанным на рисунках 4.3 и 4.4 (склейке соответствуют стрелки снизу-вверх и справа-налево), и заменить 3-атомы в противоположных вершинах круговой молекулы согласно одной из перестроек на рисунках 4.5–4.8. Если при такой операции получится круговая молекула особенности сложности 2, то по утверждению 4.2.4 соответствующая особенность сложности 2 является расщепляемой. Круговые молекулы особенностей, которые не получились указанным выше способом являются “претендентами на нерасщепляемость”. В случае особенностей типа седло-седло сложности 2 такие особенности являются нерасщепляемыми (утверждение 4.2.4). Такую операцию можно применить для проверки расщепляемости на компьютере.

## 4.3 Устойчивость почти прямых произведений $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$ .

### 4.3.1 Критерий устойчивости седловых особенностей.

На основе предыдущих результатов был получен критерий покомпонентной расщепляемости для седловых особенностей ранга нуль.

**Теорема 4.3** (А. А. Ошемков [42]). *Седловая особенность  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$  покомпонентно устойчива (не расщепляема) тогда и только тогда, когда группа  $G$  действует транзитивно на вершинах каждого из атомов  $V_1, V_2, \dots, V_n$  (т.е. на его седловых критических точках).*

*Доказательство.* Опишем сначала возмущение функции  $f$  на двумерной поверхности в классе функций Морса, которое тождественно вне малой окрестности седловой критической точки  $X$  и изменяет значение функции  $f$  в точке  $X$ . Если  $X$  — седловая критическая точка функции  $f$  на двумерной поверхности, то по лемме Морса в некоторой ее окрестности  $W$  существуют координаты  $x, y$ , в которых функция  $f$  имеет вид  $f = x^2 - y^2$  (при этом  $X = (0, 0)$ ). Рассмотрим функцию  $\psi_{X,\delta}$  типа “шапочка” в малой окрестности точки  $X$ . Например, определим ее формулой  $\psi_{X,\delta} = \exp\{\frac{1}{x^2+y^2-\delta}\}$  при  $x^2+y^2 < \delta$  в координатах из леммы Морса, где  $\delta$  — малое положительное

число, для которого область  $\{x^2 + y^2 < \delta\}$  целиком содержится в окрестности  $W$ , а вне области  $\{x^2 + y^2 < \delta\}$  (в частности вне окрестности  $W$ ) положим  $\psi_{X,\delta} = 0$ . В качестве возмущения функции  $f$  рассмотрим  $f_\alpha = f + \alpha\psi_{X,\delta}$ . Легко проверяется, что при всех достаточно малых значениях параметра  $\alpha$  функция  $f_\alpha$  имеет единственную критическую точку  $X$  в окрестности  $W$ , причем  $f_\alpha \equiv f$  вне окрестности  $W$  и  $f_\alpha(X) \neq f(X)$  при  $\alpha \neq 0$ .

Построим теперь аналогичное возмущение функции  $f$  на атоме  $V = (P, f)$ , инвариантное относительно действия конечной группы  $G$ . Пусть  $X$  — одна из вершин атома  $V = (P, f)$  (т.е. критическая точка функции  $f$ ). Рассмотрим возмущение  $f_\alpha = f + \alpha\psi_{X,\delta}$ , описанное выше, и построим новое возмущение  $\tilde{f}_\alpha$ , усредняя  $f_\alpha$  по действию  $\phi$  группы  $G$ :  $\tilde{f}_\alpha = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_\alpha(\phi(g)x)$ , где  $|G|$  — порядок группы  $G$ , а  $x$  — любая точка на поверхности  $P$ . Ясно, что при любом  $\alpha$  функция  $\tilde{f}_\alpha$  инвариантна относительно действия группы  $G$  и при  $\alpha = 0$  совпадает с  $f$ , если  $f$  инвариантна относительно этого действия.

Предположим теперь, что для особенности  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$  группа  $G$  действует не транзитивно на вершинах какого-то из атомов  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , например, на вершинах атома  $V_n = (P_n, f_n)$ . Тогда, рассматривая возмущение  $\tilde{f}_{n,\alpha}$  для функции  $f_n$  и некоторой ее критической точки  $X$ , мы получим на  $P_n$  слоение с несколькими особыми слоями, поскольку значение функции  $\tilde{f}_{n,\alpha}$  в точках из орбиты точки  $X$  и ее значение в остальных критических точках будут различны. Тем самым мы построим интегрируемое возмущение  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n')/G$  особенности  $(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n)/G$ , а значит, эта особенность расщепляема.

Докажем обратное утверждение. Пусть группа  $G$  действует транзитивно на вершинах каждого из атомов  $V_1, V_2, \dots, V_n$ . Тогда ни для одного из атомов  $V_i = (P_i, f_i)$  не существует  $G$ -инвариантного возмущения, при котором происходит расщепление этого атома. Действительно, при  $G$ -инвариантном возмущении функции  $f_i$ , все критические значения которой лежат на одном особом слое, мы получим возмущенную функцию  $f_{i,\alpha}$ , у которой значения во всех критических точках также одинаковы, поскольку группа  $G$  действует транзитивно на этих точках (можно считать, что значения в критических точках просто не меняются при возмущении). Это условие однозначно задает структуру слоения поверхности  $P_i$  на линии уровня функции, т.е. при возмущении, сохраняющем значения функции  $f_i$  в критических точках, атом  $V_i = (P_i, f_i)$  не расщепляется. В силу определения 4.1.2 это означает, что особенность покомпонентно устойчива (не расщепляема).  $\square$

### 4.3.2 Другое доказательство основной теоремы о расщепляемости почти прямых произведений $(V_1 \times V_2)/G$ сложности два.

С помощью теоремы 4.3 можно получить другое доказательство теоремы 4.2 о расщепляемости почти прямых произведений  $(V_1 \times V_2)/G$  сложности два. Приведем формулировку этой теоремы

**Теорема 4.2.** *[О расщепляемости особенностей типа седло-седло сложности 2] Среди всех возможных особенностей сложности 2 типа седло-седло покомпонентно расщепляемыми являются 28 особенностей, остальные 11 являются покомпонентно нерасщепляемыми. Полный список особенностей вместе с их расщеплениями приведен в таблице 4.1.*

*Доказательство.* Поскольку имеется список всех 39 особенностей сложности 2, для каждой из которых известно ее представление в виде почти прямого произведения (см. третий столбец таблицы 4.1), вопрос о покомпонентной расщепляемости каждой из них решается применением

критерия из теоремы 4.3. Докажем утверждение, позволяющее упростить эту проверку для каждой из особенностей.

**Лемма 4.4.** [42] Для особенности типа седло-седло  $(V_1 \times V_2)/G$  группа  $G$  действует транзитивно на вершинах каждого из атомов  $V_1, V_2$  тогда и только тогда, когда  $l$ -тип этой особенности  $(W_1, W_2)$  состоит из пары атомов, т.е. поверхности  $S_1$  и  $S_2$ , соответствующие  $W_1$  и  $W_2$ , связны (см. определение  $l$ -типа в пункте 2).

*Доказательство.* Пусть  $V_1 = (P_1, f_1)$  и  $V_2 = (P_2, f_2)$  — атомы сложности  $k_1$  и  $k_2$  соответственно. Обозначим критические точки функции  $f_1$  на  $P_1$  (т.е. вершины атома  $V_1$ ) через  $X_1, \dots, X_{k_1}$  и критические точки функции  $f_2$  на  $P_2$  (т.е. вершины атома  $V_2$ ) через  $Y_1, \dots, Y_{k_2}$ . Тогда  $l$ -тип особенности  $V_1 \times V_2$  есть пара  $(\tilde{W}_1, \tilde{W}_2) = (k_2 V_1, k_1 V_2)$ , где набору атомов  $\tilde{W}_1$ , состоящему из  $k_2$  экземпляров атома  $V_1$ , в прямом произведении  $P_1 \times P_2$  соответствует поверхность  $\tilde{S}_1 = \bigcup_{i=1}^{k_2} P_1 \times Y_i$  (несвязная при  $k_2 > 1$ ), а набору атомов  $\tilde{W}_2$  аналогичным образом соответствует поверхность  $\tilde{S}_2 = \bigcup_{i=1}^{k_1} X_i \times P_2$ .

Группа  $G$ , действуя на прямом произведении  $V_1 \times V_2$ , задает почти прямое произведение  $(V_1 \times V_2)/G$  с  $l$ -типом  $(W_1, W_2)$ , где набору атомов  $W_1$  соответствует в факторе  $(P_1 \times P_2)/G$  поверхность (возможно, несвязная)  $S_1 = \tilde{S}_1/G$ , а набору атомов  $W_2$  аналогичным образом соответствует поверхность  $S_2 = \tilde{S}_2/G$ . Таким образом, каждой орбите  $O_{Y_i}$  действия группы  $G$  на множестве  $\{Y_1, \dots, Y_{k_2}\}$  вершин атома  $V_2$  соответствует связная компонента поверхности  $S_1$ , а именно поверхность  $(P_1 \times O_{Y_i})/G$ , гомеоморфная  $P_1/\text{St}_{Y_i}$ , где  $\text{St}_{Y_i}$  — стабилизатор вершины  $Y_i$  при действии группы  $G$  на множестве вершин атома  $V_2$ . Поэтому количество атомов в наборе  $W_1$  равно количеству орбит действия группы  $G$  на множестве вершин атома  $V_2$ . В частности,  $W_1$  является атомом (т.е. поверхность  $S_1$  связна) тогда и только тогда, когда действие группы  $G$  на множестве вершин атома  $V_2$  транзитивно. Аналогично,  $W_2$  является атомом тогда и только тогда, когда действие  $G$  на множестве вершин атома  $V_1$  транзитивно.  $\square$   $\square$

Информация об  $l$ -типе особенностей, приведенная во втором столбце таблицы 4.1, означает, что для особенностей с номерами 1–14, 19–26, 29–34 одна из компонент пары  $(W_1, W_2)$  задает не связную поверхность, состоящую из двух экземпляров поверхности, соответствующей атому  $V$  или  $V'$  (окрестность “восьмерки”). В силу леммы 4.4 эти 28 особенностей покомпонентно расщепляемы, а оставшиеся 11 — не расщепляемы. Теорема доказана.  $\square$   $\square$

Поскольку из покомпонентной расщепляемости, очевидно, следует и просто расщепляемость (в смысле определений 4.1.1, 4.1.2), верно следующее утверждение.

**Замечание 6.** Для каждой из 28 неустойчивых особенностей, представленной в виде почти прямого произведения  $(V_1 \times V_2)/G$ , можно также явно указать  $G$ -инвариантное возмущение слоения на одном из атомов  $V_1, V_2$ , расщепляющее его особый слой. Эти возмущения атомов представлены на рисунках 4.5–4.8. Тем самым эти рисунки дают другое доказательство неустойчивости этих 28 особенностей. Отметим, что, вообще говоря, для одного и того же атома могут потребоваться различные возмущения при доказательстве неустойчивости разных особенностей из таблицы 4.1. Например, на рисунке 4.8 приведены два возмущения атома  $P_4$ : при рассмотрении особенностей с номерами 12 и 20 необходимо первое, а для особенности с номером 23 — второе.

**Замечание 7.** Как показано выше, покомпонентная устойчивость особенности типа седло-седло эквивалентна связности обеих поверхностей ее  $l$ -типа. Несвязность этих поверхностей влечет полулокальную неустойчивость особенности в общем смысле. Если верно и обратное, то это давало бы критерий полулокальной устойчивости особенностей типа седло-седло в терминах ее  $l$ -типа.

**Замечание 8.** В работе Г. Х. Левина [6] тоже исследовался вопрос об устойчивости особенностей типа седло-седло. В частности, в ней сформулированы некоторые утверждения, аналогичные утверждениям настоящей работы, а также для некоторых из 39 особенностей типа седло-седло сложности 2 определено, являются ли они устойчивыми. Сделаем несколько комментариев по этому поводу.

1. В работе [6] рассмотрен некоторый “сценарий” расщепления круговой молекулы, после чего ошибочно сделано заключение о том, что особенности, молекулы которых не могут удовлетворять этому сценарию, являются устойчивыми. Основная ошибка заключалась в том, что на самом деле возможен второй сценарий расщепления круговой молекулы, который в работе [6] был пропущен (кроме того, при перечислении молекул, для которых первый сценарий возможен, в работе [6] почему-то пропущены молекулы с номерами 13, 32, 33). Оба эти сценария описаны в разделе 4.2.3, где они названы соответственно “внешними” и “внутренним” расщеплением молекулы.
2. В работе [6] было сформулировано еще одно препятствие к существованию расщепления особенности, а именно, наличие 3-атомов сложности 1 (т.е.  $B$  или  $A^*$ ) в каждой из двух пар “противоположных” перестроек в круговой молекуле, из чего сделан вывод об устойчивости соответствующих особенностей. Отметим, что этому условию удовлетворяют лишь 9 особенностей из 39. Для двух особенностей (с номерами 18 и 38) таких 3-атомов в круговой молекуле нет, хотя они не являются покомпонентно расщепляемыми (см. таблицу 4.1). Отметим также, что рассуждения в работе [6] ведутся для устойчивости в смысле общего определения, но при таком определении устойчивость особенностей с номерами 18 и 38 там не доказана.
3. Неустойчивость особенностей доказана в работе [6] только для прямых произведений (четыре особенности с номерами 4, 11, 22, 30) с помощью возмущения слоения на одном из атомов-сомножителей. Рассмотрение  $G$ -инвариантных возмущений для почти прямых произведений позволило нам доказать неустойчивость 28 особенностей из всех 39 особенностей типа седло-седло сложности 2 (см. теорему 4.2 и утверждение 4.2.4), про большую часть из которых в работе [6] утверждалось, что они устойчивы.

№	$l$ -тип	почти прямое произведение	расщепление
1	$(C_1, BB)$	$(C_1 \times C_2) / \mathbb{Z}_2(\gamma^2, \alpha)$	(2), (2)
2	$(C_1, BB)$	$(K_3 \times C_2) / \mathbb{Z}_2(\beta\gamma^2, \alpha) \oplus \mathbb{Z}_2(\gamma^2, \beta)$	(4), (4)
3	$(C_1, BB)$	$(C_1 \times D_1) / \mathbb{Z}_2(\gamma^2, \alpha)$	(3), (3)
4	$(C_1, BB)$	$C_1 \times B$	(1), (1)
5	$(C_1, BB)$	$(K_2 \times B) / \mathbb{Z}_2(\alpha, \alpha)$	(2), (2)
6	$(C_1, BB)$	$(M_2 \times B) / \mathbb{Z}_2(\alpha, \alpha)$	(3), (3)
7	$(C_1, BB)$	$(K_3 \times B) / \mathbb{Z}_2(\beta, \alpha)$	(2), (2)
8	$(C_2, BB)$	$(C_2 \times C_2) / \mathbb{Z}_2(\alpha\beta, \alpha)$	(2), (2)
9	$(C_2, BB)$	$(K_3 \times C_2) / \mathbb{Z}_2(\beta\gamma^2, \alpha) \oplus \mathbb{Z}_2(\beta, \beta)$	(4), (4)
10	$(C_2, BB)$	$(C_2 \times D_1) / \mathbb{Z}_2(\alpha\beta, \alpha)$	(3), (3)
11	$(C_2, BB)$	$C_2 \times B$	(1), (1)
12	$(C_2, BB)$	$(P_4 \times B) / \mathbb{Z}_2(\gamma^2, \alpha)$	(1), (2)
13	$(C_2, BB)$	$(M_1 \times B) / \mathbb{Z}_2(\alpha, \alpha)$	(3), (3)
14	$(C_2, BB)$	$(K_3 \times B) / \mathbb{Z}_2(\gamma^2, \alpha)$	(2), (2)
15	$(D_1, D_1)$	$(D_1 \times D_1) / \mathbb{Z}_2(\alpha, \alpha)$	нет
16	$(D_1, D_1)$	$(P_4 \times P_4) / D_4$	нет
17	$(C_2, C_2)$	$(C_2 \times C_2) / \mathbb{Z}_2(\alpha, \alpha)$	нет
18	$(C_2, C_2)$	$(C_2 \times P_4) / \mathbb{Z}_2(\alpha, \beta) \oplus \mathbb{Z}_2(\beta, \beta\gamma^2)$	нет
19	$(C_1, BB')$	$(K_2 \times C_2) / \mathbb{Z}_2(\beta, \alpha) \oplus \mathbb{Z}_2(\alpha\beta, \beta)$	(4), (4)
20	$(C_2, BB')$	$(P_4 \times C_2) / \mathbb{Z}_2(\gamma^3\beta, \alpha) \oplus \mathbb{Z}_2(\beta\gamma^3, \beta)$	(2), (4)
21	$(D_1, BB)$	$(V_4 \times B) / \mathbb{Z}_2(\alpha, \alpha)$	(1), (3)
22	$(D_1, BB)$	$D_1 \times B$	(1), (1)
23	$(D_1, BB)$	$(P_4 \times B) / \mathbb{Z}_2(\beta, \alpha)$	(2), (3)
24	$(D_1, BB)$	$(I_1 \times B) / \mathbb{Z}_2(\gamma^2, \alpha)$	(3), (3)
25	$(D_1, BB)$	$(J_1 \times B) / \mathbb{Z}_2(\gamma^2, \alpha)$	(2), (3)
26	$(D_1, BB)$	$(L_2 \times B) / \mathbb{Z}_2(\alpha, \alpha)$	(1), (2)
27	$(C_1, D_1)$	$(C_1 \times I_1) / \mathbb{Z}_4$	нет
28	$(C_1, D_1)$	$(C_1 \times J_1) / \mathbb{Z}_4$	нет
29	$(D_2, BB)$	$(V'_4 \times B) / \mathbb{Z}_2(\alpha, \alpha)$	(3), (3)
30	$(D_2, BB)$	$D_2 \times B$	(1), (1)
31	$(D_2, BB)$	$(K_1 \times B) / \mathbb{Z}_2(\alpha, \alpha)$	(2), (2)
32	$(D_2, BB)$	$(I_2 \times B) / \mathbb{Z}_2(\alpha, \alpha)$	(3), (3)
33	$(D_2, BB)$	$(J_2 \times B) / \mathbb{Z}_2(\alpha, \alpha)$	(3), (3)
34	$(D_2, BB)$	$(L_1 \times B) / \mathbb{Z}_2(\alpha, \alpha)$	(1), (2)
35	$(C_1, C_2)$	$(C_1 \times K_3) / \mathbb{Z}_4$	нет
36	$(C_1, C_2)$	$(C_1 \times P_4) / \mathbb{Z}_4$	нет
37	$(D_1, C_2)$	$(D_1 \times C_2) / \mathbb{Z}_2(\alpha, \alpha)$	нет
38	$(D_1, C_2)$	$(P_4 \times C_2) / \mathbb{Z}_2(\gamma^2, \alpha) \oplus \mathbb{Z}_2(\beta, \beta)$	нет
39	$(C_1, C_1)$	$(K_3 \times K_3) / \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2(\beta, \beta\gamma^2)$	нет

Таблица 4.1: Список особенностей типа седло-седло сложности 2 с указанием их возможного расщепления. Пояснения к таблице приведены перед формулировкой теоремы 4.2.

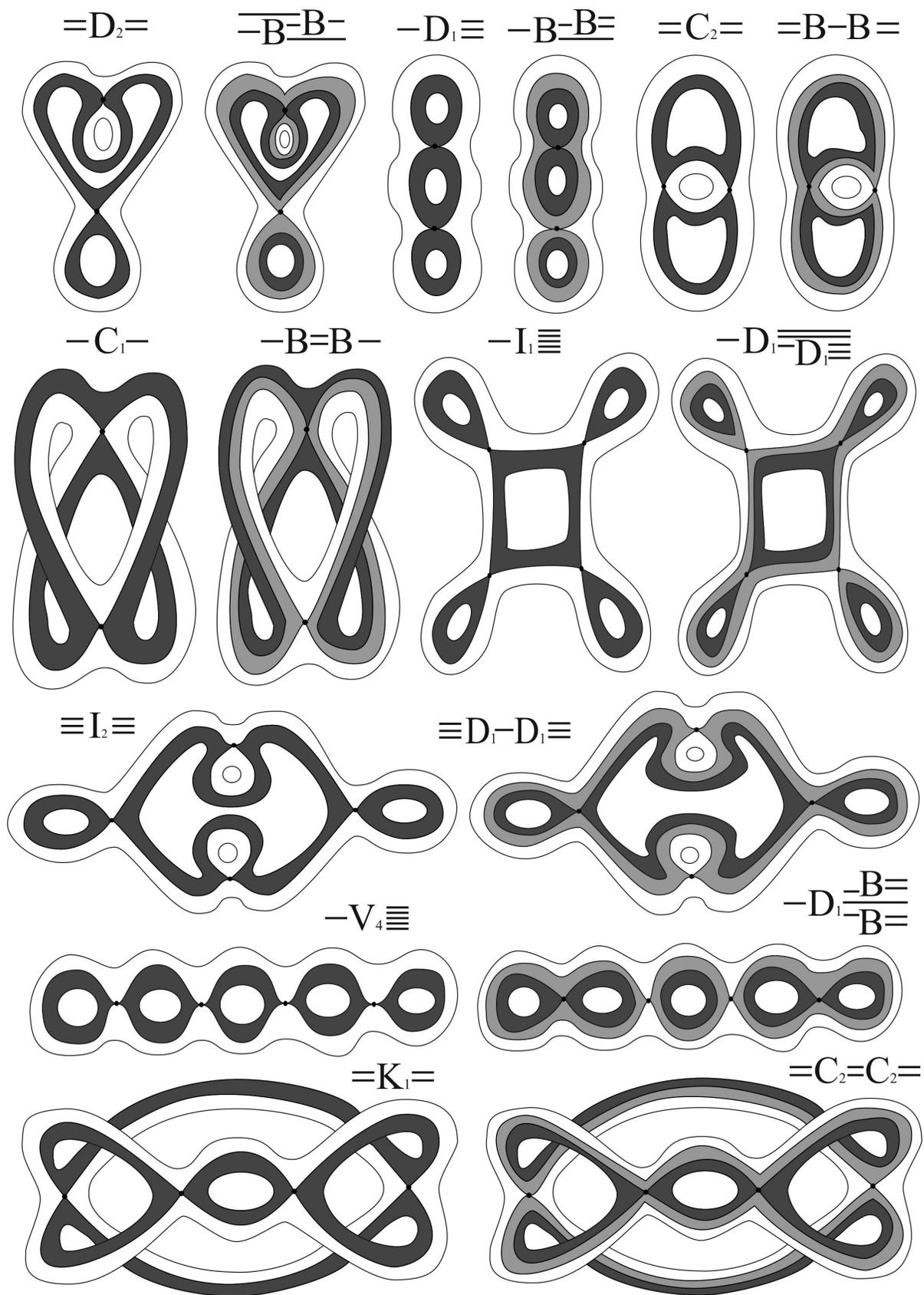


Рис. 4.5: Атомы и их возмущенные слои (с обозначениями согласно [5]). Белые окружности перестраиваются через особый слой в серые, затем серые окружности перестраиваются в черные.

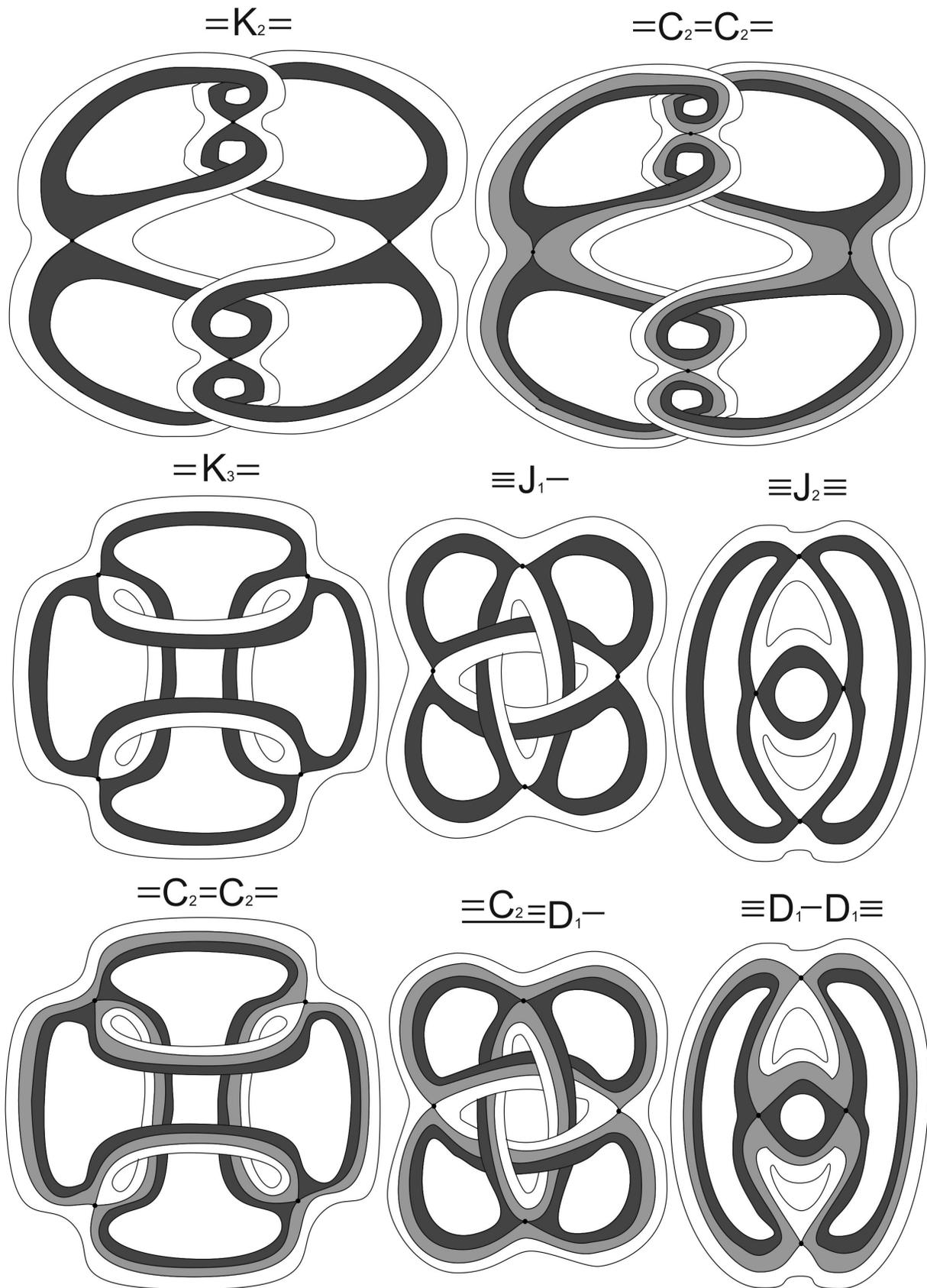


Рис. 4.6: Атомы и их возмущенные слои (с обозначениями согласно [5]). Белые окружности перестраиваются через особый слой в серые, затем серые окружности перестраиваются в черные.

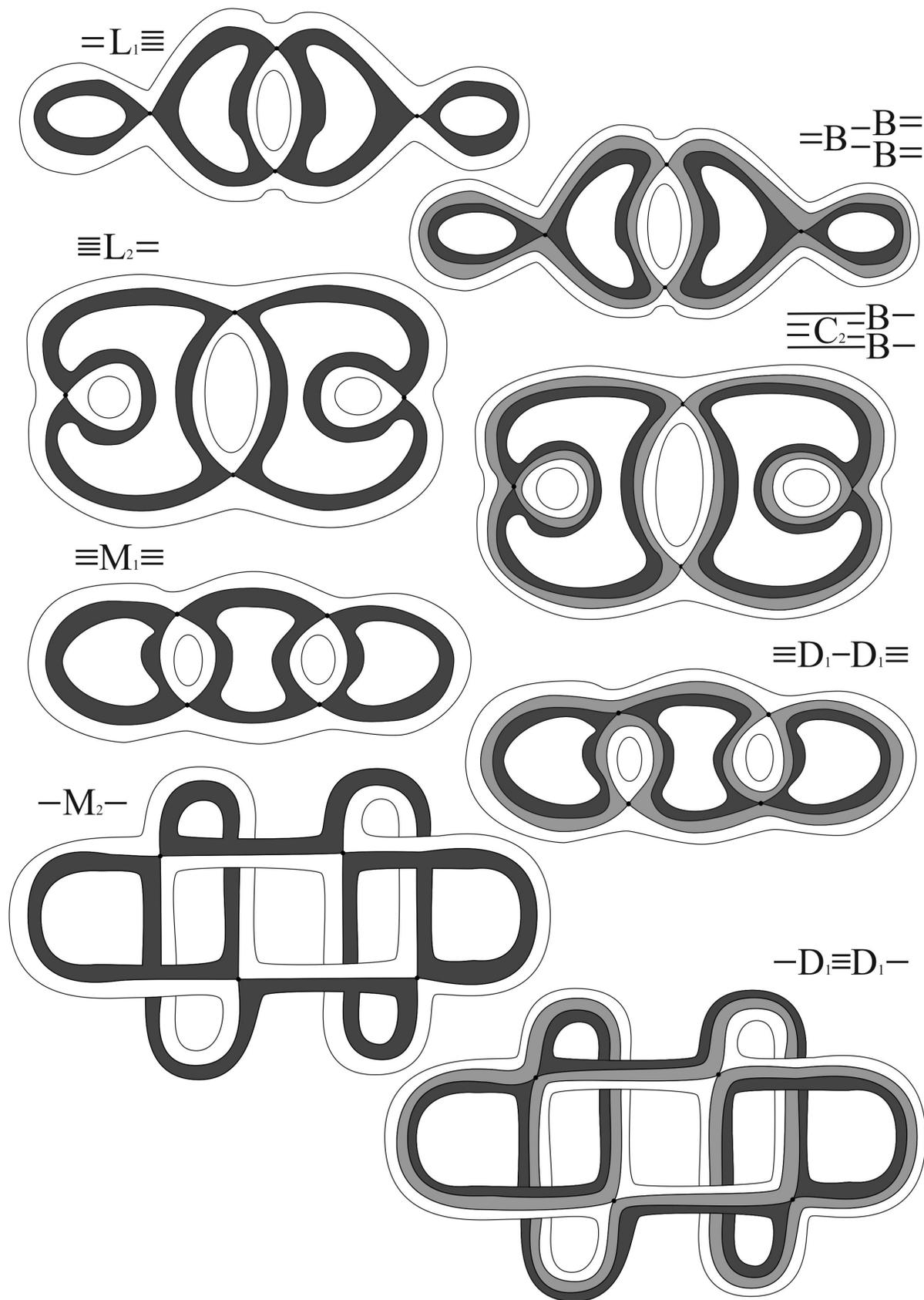


Рис. 4.7: Атомы и их возмущенные слоения (с обозначениями согласно [5]). Белые окружности перестраиваются через особый слой в серые, затем серые окружности перестраиваются в черные.

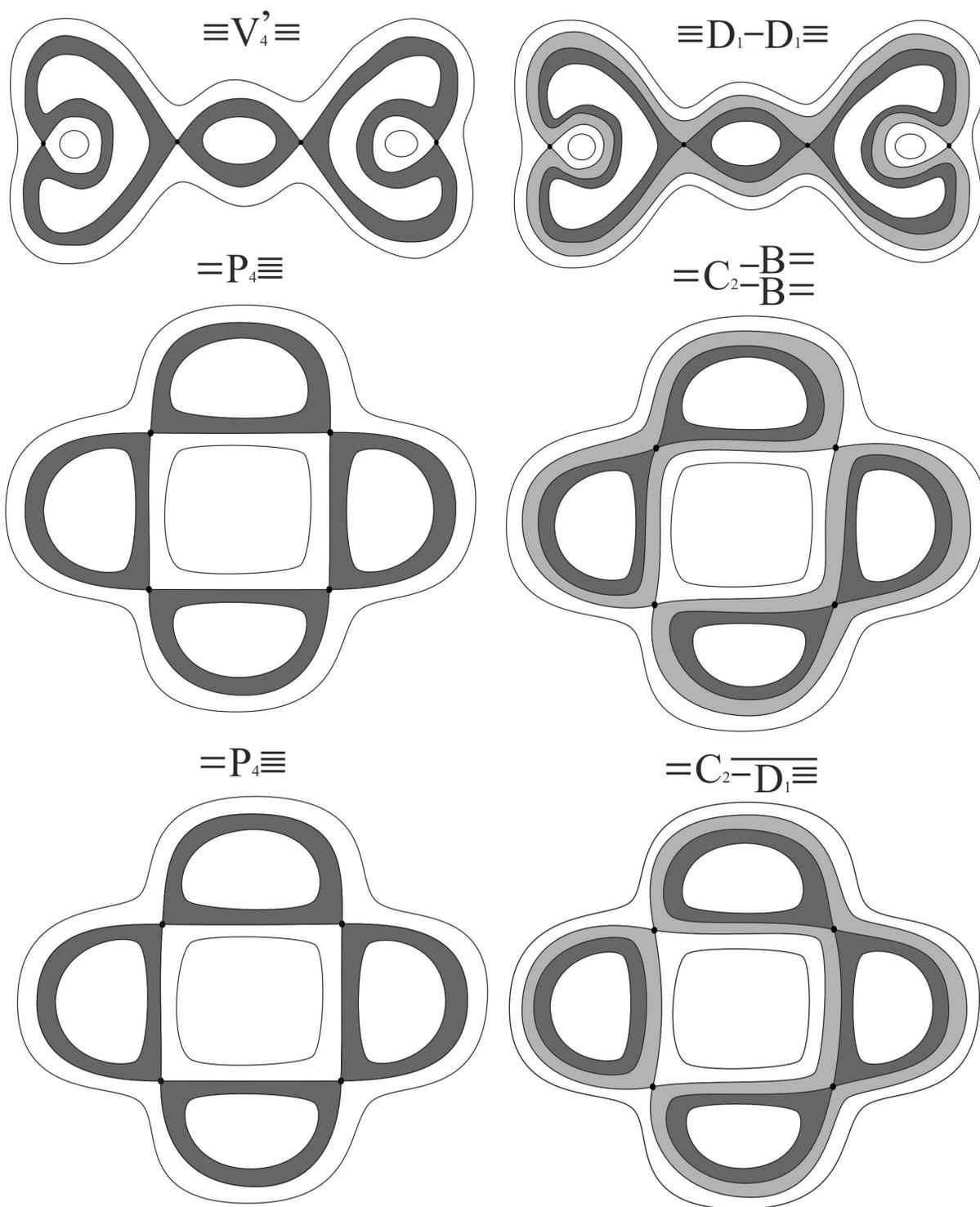


Рис. 4.8: Атомы и их возмущенные слоения (с обозначениями согласно [5]). Белые окружности перестраиваются через особый слой в серые, затем серые окружности перестраиваются в черные.

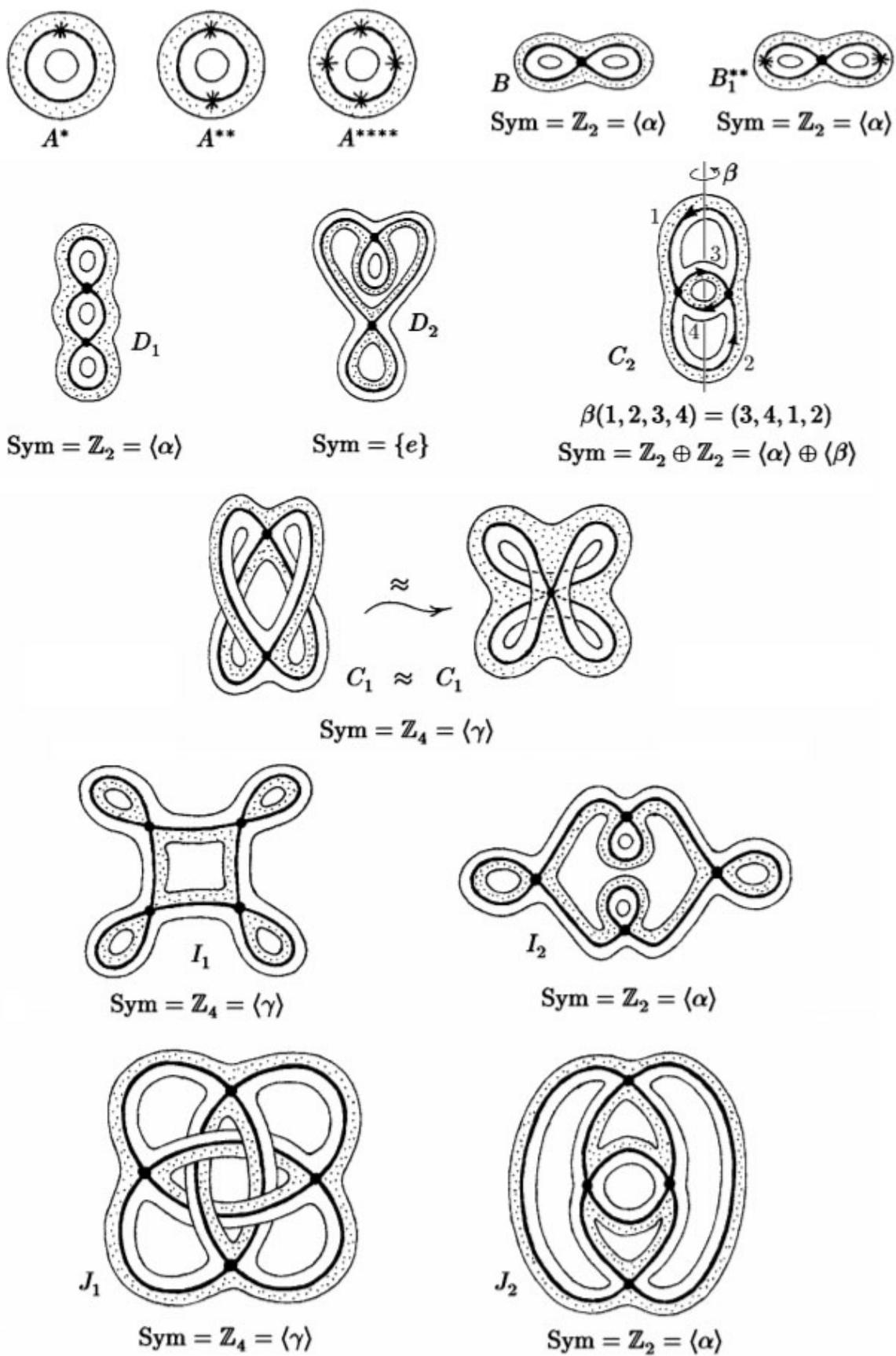


Рис. 4.9: 2-атомы с действиями групп, участвующие в классификации 4-особенностей сложности два из книги [5].

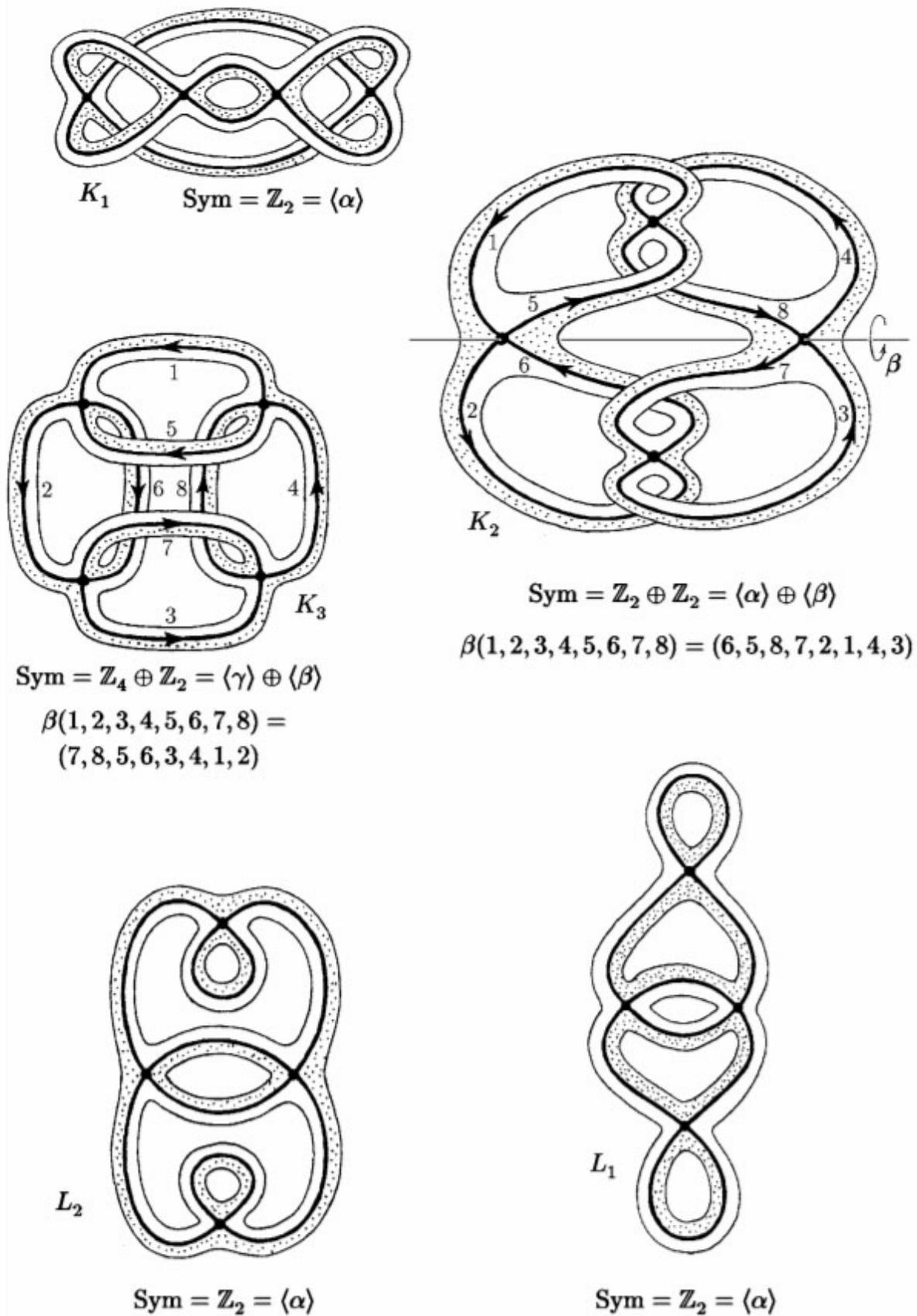


Рис. 4.10: 2-атомы с действиями групп, участвующие в классификации 4-особенностей сложности два из книги [5].

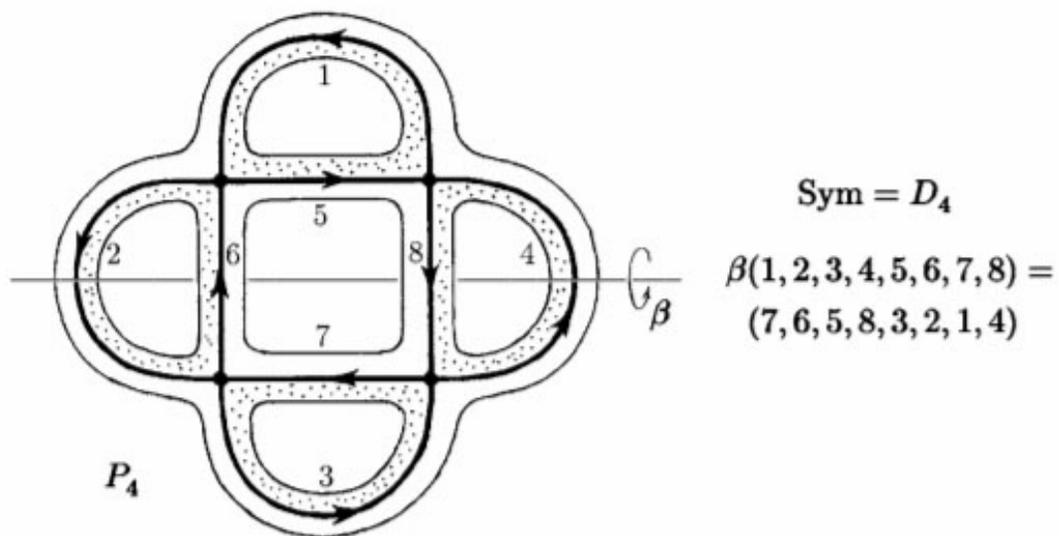
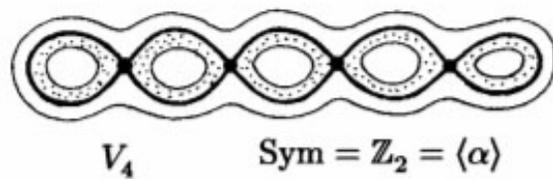
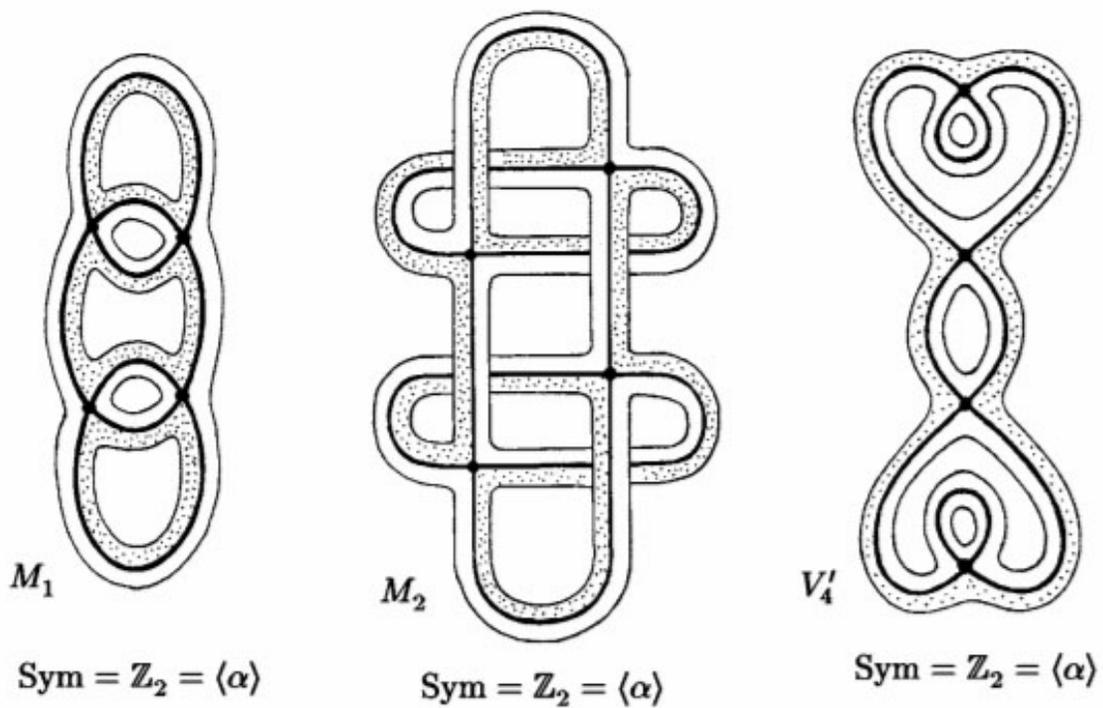


Рис. 4.11: 2-атомы с действиями групп, участвующие в классификации 4-особенностей сложности два из книги [5].

# Глава 5

## Приложение.

### 5.1 Невырожденные особые точки ранга нуль системы волчка Лагранжа с помощью бигамильтонова подхода.

#### 5.1.1 Волчок Лагранжа как система на $e(3)^*$ .

Пусть  $e(3)$  — алгебра Ли группы движений трехмерного пространства, тогда на  $e(3)^*$  можно ввести такие координаты  $J = (J_1, J_2, J_3)$  и  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , что в этих координатах скобка Ли–Пуассона имеет вид

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = 0. \quad (5.1)$$

Назовем эту скобку  $P$ . Она имеет две функции Казимира

$$C_1 = |x| = \sum_{k=1}^3 x_k^2, \quad C_2 = \langle x, J \rangle = \sum_{k=1}^3 x_k J_k. \quad (5.2)$$

Зафиксируем симплектический лист  $e(3)^*$ :  $O_{\alpha\beta} = \{x, J : C_1 = \alpha^2, C_2 = \beta\}$ , он является четырехмерным симплектическим многообразием, т. е. многообразием с невырожденной симплектической формой на нем.

Волчок Лагранжа — это интегрируемая гамильтонова система со скобкой  $P$  и гамильтонианом

$$H_2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + ax_3, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (5.3)$$

тогда имеется дополнительный интеграл  $H_1 = J_3$ .

#### 5.1.2 Согласованные скобки Пуассона.

Пусть на нашем многообразии есть вторая скобка Пуассона  $P'$ . Скобки  $P$  и  $P'$  называются *согласованными*, если  $P_\lambda = P + \lambda P'$  является скобкой Пуассона для любого  $\lambda$ . Векторное поле  $PdH_2$  можно переписать в виде  $(P + \lambda P')dH^\lambda$ , где  $H^\lambda = (1 - \frac{\lambda}{2})(H_2 - a\lambda H_1) + C_2$ , а  $P'$  — скобка,

согласованная с  $P$  (см. [31], [30]), имеющая вид

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 & 0 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Таким образом, мы получаем пучок скобок  $P_\lambda = P + \lambda P'$ . Скобка  $P$  при фиксированном  $\lambda$  имеет две функции Казимира

$$H_1(\lambda) = C_1, \quad H_2(\lambda) = a\lambda^2 H_1 - \lambda H_2 + 2C_2.$$

Будем рассматривать пучок скобок при  $\lambda \in \overline{C}$ ; если  $\lambda = \infty$ , то пучок  $P_\lambda$  будем считать равным  $P'$ . Заметим, что  $\text{rank}(P_\lambda)$  в точках общего положения равен 4.

Общая схема нахождения типов особых точек при помощи бигамильтоновой структуры следующая: сначала ищутся точки, в которых ранг скобки  $P_\lambda$  падает при фиксированном  $\lambda$ , потом этим точкам сопоставляется некоторая алгебра Ли, и по виду алгебры уже определяются тип особенности отображения момента в этой точке.

**Утверждение 5.1.1** (о ранге скобки пучка [39]). *Рассмотрим на  $e(3)^*$  скобку  $P_\lambda$  при фиксированном  $\lambda \in \overline{C}$ , тогда*

$$\text{rank}(P_\lambda) < 4 \iff \begin{cases} x_1 = \lambda J_1, \\ x_2 = \lambda J_2, \\ x_3 = \lambda J_3 - \lambda^2 \frac{a}{2}, \\ x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

*Доказательство.* Необходимость очевидна. Теперь докажем достаточность. Скобка  $P_\lambda$  будет иметь вид

$$P_\lambda = P + \lambda P' = \begin{pmatrix} 0 & \lambda x_3 & -\lambda x_2 & 0 & x_3 & -x_2 \\ -\lambda x_3 & 0 & \lambda x_1 & -x_3 & 0 & x_1 \\ \lambda x_2 & -\lambda x_1 & 0 & x_2 & -x_1 & 0 \\ 0 & x_3 & -x_2 & 0 & J_3 - \lambda \frac{a}{2} & -J_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 & -J_3 + \lambda \frac{a}{2} & 0 & J_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Если  $\text{rank}(P_\lambda) < 4$ , то из кососимметричности  $P_\lambda$  следует, что  $\text{rank}(P_\lambda)$  равен либо двум, либо нулю. Если же  $\text{rank}(P_\lambda) = 0$ , то легко видеть, что выполнены соотношения (5.5).

Пусть теперь  $\text{rank}(P_\lambda)$  равен двум. Тогда есть два столбца матрицы, через которые выражаются все остальные. Назовем их *главными столбцами*.

Поскольку мы изучаем отображение момента на регулярном симплектическом листе, то  $\text{rank}(P)$  равен 4, поэтому число  $\lambda$  не равно нулю. Без ограничения общности  $x_1 \neq 0$ . Главное соображение состоит в том, что столбцы матрицы  $P_\lambda$  разбиваются на пары, в каждой из которых один столбец пропорционален другому. Докажем это.

Обозначим столбцы матрицы  $P_\lambda$  через  $S_1, S_2, \dots, S_6$ . Разобьем их на три группы:  $\{S_1, S_4\}$ ,  $\{S_2, S_5\}$ ,  $\{S_3, S_6\}$ .

**Утверждение 5.1.2.** [39] Главные столбцы матрицы  $P_\lambda$  принадлежат разным группам.

*Доказательство.* Действительно, если они из одной группы, то они должны быть из первой группы, так как иначе найдется столбец, у которого на месте, где у главных столбцов стоит нуль, есть  $x_1$  с каким-то коэффициентом, отличным от нуля. Этот столбец выражается через выбранные два, следовательно,  $x_1 = 0$ , что противоречит предположению. Тогда из тех же соображений выводим, что  $x_2 = 0$  и  $x_3 = 0$ , следовательно, первый столбец является нулевым, а значит,  $\text{rank}(P_\lambda) < 2$ , — противоречие.  $\square$

Осталось доказать, что столбец, принадлежащий той же группе, что и главный, получается из него домножением на  $\lambda$  (если номер главного столбца 1, 2 или 3) или на  $\frac{1}{\lambda}$  (если соответственно номер главного столбца 4, 5 или 6). Заметим, что из этого сразу же будет вытекать утверждение теоремы.

Рассмотрим следующие случаи.

1. *Главные столбцы: из первой группы и любой другой.* Без ограничения общности пусть этими столбцами будут  $S_1$  и  $S_5$ . Тогда рассмотрим столбец  $S_2$ . Он равен линейной комбинации  $S_1$  и  $S_5$ . В столбце  $S_1$  первая координата равна нулю, а вторая есть  $x_3$  с ненулевым коэффициентом, поэтому либо  $x_3 = 0$ , либо  $S_2 = \lambda S_5$ . Если  $x_3 = 0$ , то первые и вторые координаты столбцов  $S_1$  и  $S_5$  равны нулю, а значит, по тем же соображениям  $x_1 = 0$ , — противоречие. Следовательно,  $S_2 = \lambda S_5$ , аналогично  $S_1 = \lambda S_4$ .

2. *Главные столбцы из групп два и три.* Так как  $x_1 \neq 0$ , то, применяя похожие рассуждения для третьей строки, получаем, что  $S_2 = \lambda S_5$ , а для второй  $S_3 = \lambda S_6$ .  $\square$

Теперь посмотрим на полученные результаты более внимательно. В случае, когда вектор  $x$  равен нулю, ранг скобки  $P$  меньше 4. Такие точки мы не рассматриваем, так как изучаем отображение момента на регулярном симплектическом листе.

Разделим полученные условия на случаи: для соответствующих точек  $(x, J)$  существует единственное значение  $\lambda$ , для которого ранг  $P_\lambda$  падает; существуют два действительных значения  $\lambda$  или два комплексных. Во всех этих трех случаях типы соответствующих точек будут различаться. Таким образом, получаем

**Следствие 5.1.1.** Ранг  $P_\lambda$  заданной формулой (5.6) падает тогда и только тогда, когда выполнено одно из соотношений

$$\begin{cases} x_1 = \lambda J_1, \\ x_2 = \lambda J_2, \\ x_3 = \lambda J_3 - \lambda^2 \frac{a}{2} \end{cases} \quad \text{при } \lambda \in \mathbb{R}; \quad (5.7)$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = J_1 = J_2 = 0, \\ x_3 = \lambda J_3 - \lambda^2 \frac{a}{2}, \\ J_3^2 - 2ax_3 > 0 \end{cases} \quad \text{при } \lambda = \frac{J_3 \pm \sqrt{J_3^2 - 2ax_3}}{a} \in \mathbb{R}; \quad (5.8)$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = J_1 = J_2 = 0, \\ x_3 = \lambda J_3 - \lambda^2 \frac{a}{2}, \\ J_3^2 - 2ax_3 < 0 \end{cases} \quad \text{при } \lambda = \frac{J_3 \pm \sqrt{J_3^2 - 2ax_3}}{a} \in \mathbb{C}; \quad (5.9)$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = J_1 = J_2 = 0, \\ x_3 = \lambda J_3 - \lambda^2 \frac{a}{2}, \\ J_3^2 - 2ax_3 = 0 \end{cases} \quad \text{при } \lambda = \frac{J_3}{a} \in \mathbb{R}. \quad (5.10)$$

Это следствие дает представление о множестве особых точек нашей системы. Точки, перечисленные в следствии 1, — это в точности множество особых точек отображения момента (см. [32]).

### 5.1.3 Классификация особенностей отображения момента для волчка Лагранжа

В следующей теореме дается классификация особенностей отображения момента для волчка Лагранжа.

**Теорема 5.1.** [39] Пусть дана интегрируемая система, задаваемая функциями Казимира (5.2), скобкой  $P$  (5.1), гамильтонианом  $H_2$  и дополнительным интегралом  $H_1$  (5.3). Тогда особыми точками отображения момента являются точки, перечисленные в формулах (5.7)–(5.10) причем в случае (5.7) они имеют эллиптический тип, в случае (5.8) — тип центра, в случае (5.9) — тип фокус-фокус, в случае (5.10) — вырожденный тип.

*Доказательство.* 1. Зафиксируем точку  $x^0$  из случая (5.7). Для такой точки построим связанную с ней алгебру  $\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{g}_\lambda(x^0)$  (см. [13]), такую, что она как линейное пространство совпадает с  $\ker(P_\lambda(x^0))$  и коммутатор на ней задается по формуле  $[\xi, \eta] = d\{f, g\}_\lambda$ , где  $\xi, \eta \in \ker(P_\lambda(x^0))$ ,  $f$  и  $g$  — некоторые функции, такие, что  $df(x^0) = \xi$ ,  $dg(x^0) = \eta$ . Тогда если взять в качестве  $f$  и  $g$  линейные функции, то коммутатор  $[\xi, \eta]$  будет равен  $\frac{\partial P^{ij}}{\partial x^k} \xi_i \eta_j$ , где по повторяющимся индексам ведется суммирование.

Выберем базис в  $\mathfrak{g}_\lambda$ :

$$\ker(P_\lambda(x^0)) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\lambda \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  — первые три координаты точки  $x^0$ . Обозначим эти порождающие векторы соответственно через  $a, b, c$  и  $d$ . Для того чтобы определить тип особой точки, необходимо понять, какой алгебре изоморфна данная. Для этого посчитаем коммутаторы. Нетрудно проверить, что

$$[a, b] = -\lambda c, \quad [a, c] = \lambda b, \quad [b, c] = -\lambda a, \quad [d, \mathfrak{g}_\lambda] = 0.$$

Сделаем замену  $x = \frac{b+c}{\lambda\sqrt{2}}$ ,  $y = \frac{b-c}{\lambda\sqrt{2}}$ ,  $z = \frac{a}{\lambda}$ , тогда  $[x, y] = z$ ,  $[y, z] = x$ ,  $[z, x] = y$ . Следовательно, алгебра  $\mathfrak{g}_\lambda$  изоморфна  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ . Как следует из работы [13], в случае, когда существует единственное число  $\lambda$  и алгебра  $\mathfrak{g}_\lambda$  изоморфна  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ , получается особенность эллиптического типа.

2. Теперь рассмотрим случай (5.8). Как и в первом случае, построим аналогичным образом алгебру  $\mathfrak{g}_\lambda$ , только уже для точки  $x_0$  из второго случая. Тогда скобка Пуассона примет вид

$$P_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda x_3 & 0 & 0 & x_3 & 0 \\ -\lambda x_3 & 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 0 & 0 & J_3 + \lambda \frac{a}{2} & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & -J_3 + \lambda \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Базисные векторы:

$$\ker(P_\lambda(x_0)) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Обозначим их соответственно через  $a$ ,  $b'$ ,  $c$  и  $d$ . Их коммутаторы имеют вид

$$[a, \mathfrak{g}_\lambda] = 0, \quad [b', c] = -d, \quad [b', d] = c, \quad [c, d] = \lambda a - \lambda^2 b'.$$

Сделаем замену  $b = a - \lambda b'$ , тогда:  $[b, c] = -\lambda d$ ,  $[b, d] = -\lambda c$ ,  $[c, d] = \lambda b$ . Заменой переменных избавившись от коэффициента, получаем алгебру  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ :

$$[x, y] = z, \quad [y, z] = x, \quad [z, x] = y.$$

Тогда в этом случае получается особенность типа центр-центр (см. [13]).

3. Случай (5.9) разбирается аналогично случаю (5.8), только для  $\lambda \in C$ . Для него таким же образом получается алгебра  $\mathfrak{so}(3, C)$ . Следовательно, есть только один элемент  $\mathfrak{so}(3, C)$  в разложении алгебры  $\mathfrak{g}_\lambda$ , а значит, эта особенность типа фокус-фокус.  $\square$

# Глава 6

## Заключение.

### 6.1 Расщепление особенностей в различных системах.

В этом разделе исследуется расщепляемость седловых особенностей для интегрируемых случаев Эйлера, Лагранжа, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, Ковалевской, Клебша, Стеклова, Соколова, Чаплыгина-Горячева-Яхьи, Ковалевской в двойном поле сил, Ковалевской-Соколова и Ковалевской-Яхьи.

По теореме Н. Зунга [9] любая невырожденная особенность ранга нуль гомеоморфна почти прямому произведению атомов. Используя теорему 4.3 (или для случая четырехмерной особенности теорему 4.2) можно исследовать такие особенности на расщепляемость. В данной работе будут исследоваться только седловые особенности. В работе П. Морозова [33] приводится разложение четырехмерных особенностей интегрируемых гамильтоновых систем случаев Клебша, Стеклова, Соколова и Ковалевской-Яхьи (при нулевом интеграле площадей) в почти прямое произведение атомов. Описания типов невырожденных особых точек, бифуркационных диаграмм и перестроек торов Лиувилля случаев Эйлера, Лагранжа, Горячева-Чаплыгина-Сретенского можно найти в книге [5], Ковалевской — в работе А. Болсинова, П. Рихтера, А. Фоменко [34], Чаплыгина-Горячева-Яхьи, Ковалевской-Соколова в работах П. Рябова [36] и [37] и Ковалевской-Яхьи в диссертации И. Козлова [35]. В работе П. Рябова и М. Харламова [38] приводится система Ковалевской в двойном поле сил с тремя степенями свободы.

**Утверждение 6.1.1.** *В таблице 6.1 приводится полное исследование седловых особенностей для интегрируемых гамильтоновых систем случаев Эйлера, Лагранжа, Горячева-Чаплыгина-Сретенского, Ковалевской, Клебша, Стеклова, Соколова, Чаплыгина-Горячева-Яхьи, Ковалевской в двойном поле сил, Ковалевской-Соколова и Ковалевской-Яхьи.*

*Доказательство.* Если седловые особенности являются особенностями сложности один, то по определению 4.1.2 такие особенности являются нерасщепляемыми.

В случаях Клебша, Стеклова, Соколова, Чаплыгина-Горячева-Яхьи исследование на расщепляемость получается применением теоремы 4.2. В случае Клебша особенность (соответствующая номеру 11 из таблицы 4.1) является не расщепляемой. В случаях Стеклова и Соколова особенности соответствуют номеру 11 из таблицы 4.1 и являются расщепляемыми. В случае Чаплыгина-Горячева-Яхьи особенность соответствуют номеру 12 из таблицы 4.1 и является расщепляемой.  $\square$

**Замечание 9.** В случаях Стеклова и Соколова атомы, которые соответствуют ребрам бифуркационной диаграммы (перестройкам торов Лиувилля через них), не примыкающим к особен-

ностям типа седло-седло, встречаются парами  $2A, 2B, 2A^*$  и т. д., все особенности ранга нуль являются расщепляемыми, что говорит о том, что, возможно, эти системы являются полностью (глобально) расщепляемыми.

**Замечание 10.** Случай Ковалевской-Соколова является глобальным возмущением системы случая Соколова. При этом возмущении седловая особенность  $C_2 \times B$  в случае Соколова расщепляется на две седловые особенности типа  $B \times B$ .

**Замечание 11.** В работе [36] для случая Чаплыгина-Горячева-Яхьи приводится возможное расщепление атома  $P_4$ , что соответствует верхнему расщеплению атома  $P_4$  на рис. 4.8.

случай ИГС	расщепление особенностей	комментарий
Эйлер	—	нет точек типа седло-седло
Лагранж	—	нет точек типа седло-седло
Гор.-Чап.-Срет.	$z_4$ не расщепляется	особенность сложности 1
Ковал. в дв. поле сил	$P_3, Q_{21}, Q_{31}$ и $Q_{32}$ не расщепляются	особенности сложности 1
Клебш	$P$ не расщепляется	имеет представление $(C_2 \times C_2)/\mathbb{Z}_2$ № 17 из таблицы 4.1 не расщепляется
Стеклов	$P$ расщепляется	имеет представление $B \times C_2$ № 11 из таблицы 4.1 расщепляется
Соколов	$P$ расщепляется	имеет представление $B \times C_2$ № 11 из таблицы 4.1 расщепляется
Чапл.-Гор.-Яхьи	$\mathbb{Z}_5$ расщепляется	имеет представление $(B \times P_4)/\mathbb{Z}_2$ № 12 из таблицы 4.1 расщепляется
Ковал.-Соколова	$\delta_{13}, \delta_{14}, \delta_{22}, \delta_{23}, \delta_{21}$ не расщепляются	особенности сложности 1
Ковал.-Яхья	$N$ и $P$ не расщепляются	особенности сложности 1

Таблица 6.1: Исследование на расщепление особенностей типа седло-седло для различных интегрируемых гамильтоновых систем. Обозначения особенностей для случаев Клебша, Стеклова, Соколова взяты согласно диссертации [33], для случаев Эйлера, Лагранжа, Горячева-Чаплыгина-Сретенского согласно книге [5], для Ковалевской согласно работе [34], Чаплыгина-Горячева-Яхьи — работе [36], Ковалевской-Соколова — работе [37], Ковалевской-Яхьи — диссертации [35] и Ковалевской в двойном поле сил согласно работе [38].

# Литература

- [1] Bolsinov A. V., Oshemkov A. A., *Singularities of integrable Hamiltonian systems.*, Topological methods in the theory of integrable systems. 2006. 1–67.
- [2] Lerman L. M., Umanskii Ya. L., *Structure of the Poisson action on  $\mathbb{R}^2$  on a four-dimensional symplectic manifold. I, II*, Selecta Math. Sov. 1987. **6**. 365–396 and 1988. 39–48.
- [3] В. С. Матвеев, А. А. Ошемков, *Алгоритмическая классификация инвариантных окрестностей точек типа седло-седло*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., Мех., №2. 1999. 62–65.
- [4] Ошемков А.А., *Классификация гиперболических особенностей ранга нуль интегрируемых гамильтоновых систем*, Математический сборник. 2010. **201**, № 8. 63–102.
- [5] Болсинов А. В., Фоменко А. Т., *Интегрируемые гамильтоновы системы*, Ижевск: изд. дом “Удмуртский университет”. 1999. **1,2**.
- [6] Левин Г., *Дипломная работа*, Москва, Московский Государственный Университет. 2008.
- [7] Грабежной А., *Дипломная работа*, Москва, Московский Государственный Университет. 2002.
- [8] Нгуен Т. З., *О свойстве общего положения простых боттовских интегралов*, УМН. 1990. **45**, 4(274). 161–162.
- [9] Nguen T. Z., *Decomposition of nondegenerate singularities of integrable Hamiltonian systems*, Letters in Mathematical Physics. 1995. **33**. 187–193.
- [10] Nguen T. Z., *Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems, I: Arnold–Liouville with singularities*, Compositio Mathematica. 1996. **101**. 179–215.
- [11] Фоменко А. Т., *Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости*, Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. **50**, № 6. 1276–1307.
- [12] Фоменко А. Т., *Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем*, Докл. АН СССР. 1986. **287**, № 5. 1071–1075.
- [13] Фоменко А.Т., *Симплектическая геометрия. Методы и приложения*, Изд-во МГУ М. 1988.
- [14] Фоменко А. Т., *Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем*, Успехи матем. наук. 1989. **44**, вып. 1. 145–173.

- [15] Фоменко А.Т., *Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях*, Функц. анализ и его прил. 1991. **25**, № 4. 23–35.
- [16] Fomenko A.T., *Theory of rough classification of integrable nondegenerate Hamiltonian differential equations on four-dimensional manifolds. Application to classical mechanics*, Topological classification of integrable systems, Adv. Soviet Math. 1991. **6**. 305–345.
- [17] Фоменко А. Т., Цишанг Х., *О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике*, Докл. АН СССР. 1987. **294**, № 2. 283–287.
- [18] А. В. Болсинов, С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко, *Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности*, Успехи математических наук. 1990. **45**, № 2. 49–77.
- [19] Браилов А. В., Фоменко А. Т., *Топология интегральных многообразий вполне интегрируемых гамильтоновых систем*, Матем. сб. 1987. **133**, № 3. 375–385.
- [20] Фоменко А. Т., Цишанг Х., *О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем*, Изв. АН СССР. 1988. **52**, № 2. 378–407.
- [21] Fomenko A. T., Konyaev A. Yu., *Algebra and geometry through Hamiltonian systems*, Continuous and Distributed Systems. Theory and Applications. Ser. Solid Mechanics and Its Applications. Ed. by V.Z. Zgurovsky, V.A. Sadovnichiy. Springer, 2014. **211**. 3–21.
- [22] Матвеев В.С., *Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа фокус-фокус и седло-седло*, Матем. сб. 1996. **187**, № 4. 29–58.
- [23] Корнеев В.В., *Представление четырехмерной особенности типа седло-седло в виде почти прямого произведения двумерных атомов. Случай сложности два* Топологические методы в теории гамильтоновых систем. Изд. Факториал. 1998. 127–135.
- [24] Williamson J., *On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems*, Amer. J. Math. 1936. **58**, № 1. 141–163.
- [25] Williamson J., *On the normal forms of linear canonical transformations in dynamics*, Amer. J. Math. 1937. **59**, № 1. 599–617.
- [26] Ошемков А. А., *Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей*, Тр. Матем. ин-та РАН. 1994. **205**. 131–140.
- [27] Ошемков А. А., *Седловые особенности сложности 1 интегрируемых гамильтоновых систем*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., Мех. 2011. № 2. 10–19.
- [28] Bolsinov A.V. *Methods of calculation of the Fomenko-Zieschang invariant*, Topological classification of integrable systems, Adv. Soviet Math., 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI. 1991. 147–183.
- [29] Кудрявцева Е. А., Никонов И. М., Фоменко А. Т. *Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия*, Матем. сб. 2008. **199**, № 9. 3–96.

- [30] Gavrilov L., Zhivkov A., *The complex geometry of Lagrange top*, L'Enseignement Mathematique, 1998. **44**. 133–170.
- [31] Ratiu T., *Euler–Poisson equations on Lie algebras and the  $N$ -dimensional heavy rigid body*, Amer. Math., 1982. **104**. 409–448.
- [32] Bolsinov A. A., *Compatible Poisson brackets on Lie algebras and the completeness of families of functions in involution*, Math. USSR Izv., 1992. **38**. 69–90.
- [33] Морозов П. В., *Тонкая лувиллева классификация некоторых интегрируемых случаев механики твердого тела*, Дис. канд. физ.-мат. наук : 01.01.04 Москва, 2007 170 с. РГБ ОД, 61:07-1/756.
- [34] Болсинов А. В., Рихтер П. Х., Фоменко А. Т., *Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской*, Матем. сб. 2000. **191**, № 2. 3–42.
- [35] Козлов И. К., *Инварианты слоений в симплектической и пуассоновой геометрии*, Дис. канд. физ.-мат. наук : 01.01.04 Москва, 2013. 193 с. РГБ ОД, 61 14-1/619.
- [36] Ryabov P. E., *Bifurcation Sets in an Integrable Problem on Motion of a Rigid Body in Fluid*, Regul. Chaot. Dyn. 1999. **4**, № 4. 59–76.
- [37] Kharlamov M. P., Ryabov P. E., Savushkin A. Y., *Topological Atlas of the Kowalevski–Sokolov Top*, Regul. Chaot. Dyn. 2016. **21**, № 1. 24–65.
- [38] Рябов П. Е., Харламов М. П., *Классификация особенностей в задаче о движении волчка Ковалевской в двойном поле сил*, Матем. сб., 2012. **203**, № 2. 111–142.

## Работы автора по теме диссертации

- [39] Тужилин М. А., *Бигамильтонова структура и особенности отображения момента волчка Лагранжа*, Вест. Моск. Ун-та. Сер. 1. Матем. Мех., 2015.
- [40] Тужилин М. А., *Инварианты четырехмерных и трехмерных особенностей интегрируемых систем*, Докл. РАН. 2016. **467**, № 4. 385–388.
- [41] Тужилин М. А., *Особенности интегрируемых гамильтоновых систем с одинаковым слоением на границе. Бесконечная серия*, Вест. Моск. Ун-та. Сер. 1. Матем. Мех., 2016. № 5. 14–20.
- [42] Ошемков А. А., Тужилин М. А., *Интегрируемые возмущения седловых особенностей ранга 0 интегрируемых гамильтоновых систем*, Матем. сб. 2018. 209(9). 102–127.