

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

---

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

ТУЖИЛИН Алексей Августинovich

УДК 514.77+512.816.4+517.924.8

КЛАССИФИКАЦИЯ ЛОКАЛЬНО МИНИМАЛЬНЫХ  
ПЛОСКИХ СЕТЕЙ С ВЫПУКЛЫМИ ГРАНИЦАМИ

01.01.04 — геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ  
на соискание ученой степени  
доктора физико–математических наук

Москва — 1997

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>1</b>
1 Исторический обзор . . . . .	4
2 Основные результаты теории абсолютно минимальных сетей	11
2.1 Оболочки Штейнера . . . . .	12
2.2 Гексагональная система координат . . . . .	14
2.3 Абсолютно минимальные деревья, затягивающие множества специального вида . . . . .	16
3 Минимальные остовные деревья . . . . .	19
3.1 Триангуляция Делоне и диаграмма Вороного . . . . .	21
4 Отношение Штейнера . . . . .	23
5 Краткое содержание диссертации . . . . .	24
6 Основные результаты диссертации . . . . .	26
<b>1 Основные определения и общие предварительные результаты</b>	<b>43</b>
1 Топологические графы . . . . .	43
2 Операции над топологическими графами . . . . .	44
3 Минимальные сети . . . . .	46
4 Локальное устройство минимальных сетей . . . . .	49
5 Минимальная реализация с данной границей . . . . .	53
5.1 Алгоритм Мелзака . . . . .	54
5.2 Алгоритм Хванга . . . . .	56
5.3 Следствия из алгоритмов Мелзака и Хванга . . . . .	59
6 Структура минимальных сетей с данными топологией и границей . . . . .	61
7 Постановка основной задачи . . . . .	63
8 Минимальная реализация деревьев Штейнера . . . . .	66
9 Минимальная реализация невырожденных графов и сетей Штейнера . . . . .	67
10 Минимальная реализация сетей Штейнера: общий случай . . . . .	69

<b>2</b>	<b>Полная классификация минимальных бинарных деревьев с выпуклой границей</b>	<b>70</b>
1	Число вращения минимального бинарного дерева с выпуклой границей . . . . .	71
2	Плоские бинарные деревья и диагональные триангуляции . . . . .	74
2.1	Соответствие между плоскими бинарными деревьями и диагональными триангуляциями . . . . .	75
2.2	Структурные элементы диагональных триангуляций . . . . .	76
3	Паркетная реализация бинарных деревьев с не превосходящим пяти числом вращения . . . . .	77
4	Паркеты и их свойства . . . . .	81
4.1	Разбиения паркета на скелет и наросты . . . . .	81
4.2	Разбиение деревянного скелета на узлы ветвления и линейные участки . . . . .	83
4.3	Ось . . . . .	84
4.4	Число вращения ломаной . . . . .	85
4.5	Осевой граф . . . . .	86
4.6	Связь между числом вращения линейного деревянного скелета и его оси . . . . .	87
5	Структурные элементы скелетов из $\mathcal{WP}_5$ . . . . .	91
5.1	Узлы ветвления деревянных скелетов . . . . .	92
5.2	Линейные участки . . . . .	94
6	Операции редукции и антиредукции . . . . .	96
6.1	Разрезание и склейка . . . . .	96
6.2	Редукция плоского бинарного дерева . . . . .	97
6.3	Редукция паркетов из $\mathcal{WP}_5$ . . . . .	98
6.4	Антиредукция плоских бинарных деревьев . . . . .	99
6.5	Антиредукция паркетов из $\mathcal{WP}_5$ . . . . .	102
7	Боковины и их свойства . . . . .	102
7.1	Определение боковин . . . . .	103
7.2	Числа вращения ребер контура . . . . .	103
7.3	Связь между числами вращения боковин и числом вращения паркета . . . . .	104
7.4	Терминологические замечания . . . . .	107
8	Теорема классификации скелетов из $\mathcal{WP}_5$ . . . . .	107
8.1	Число концевых линейных участков скелета из $\mathcal{WP}_5$ . . . . .	109
8.2	Концевые змеи . . . . .	109
8.3	Выпускание концевого линейного участка . . . . .	110
8.4	Врезание змеи . . . . .	112
8.5	Направления концевых линейных участков скелетов из $\mathcal{WP}_5$ . . . . .	114
8.6	Коды невырожденных 6-скелетов . . . . .	115
8.7	Завершение доказательства теоремы 2.2 . . . . .	115

9	Расположение наростов в паркетах, принадлежащих $\mathcal{WP}_5$ , на их скелетах . . . . .	118
10	Теорема реализации . . . . .	122
10.1	Редукция I-го типа . . . . .	122
10.2	Реализация змеи . . . . .	124
10.3	Реализация ломаной змеи и лестницы . . . . .	127
10.4	Реализация лестницы в усеченном треугольнике . . . . .	130
10.5	$CM$ -реализация скелетов из $\mathcal{WP}_5$ . . . . .	133
10.6	Завершение доказательства теоремы реализации . . . . .	139
<b>3</b>	<b>Минимальные бинарные деревья с правильной границей</b>	<b>143</b>
1	Дожди . . . . .	145
2	Минимальная реализация змеи на произвольном множестве . . . . .	146
2.1	Характеристическая дуга . . . . .	147
2.2	Характеристическая дуга в случае трех точек . . . . .	149
2.3	Характеристическая дуга в общем случае . . . . .	151
2.4	Вполне характеристическая дуга . . . . .	154
3	Существование правильной минимальной реализации змеи . . . . .	158
3.1	Характеристические дуги и треугольники . . . . .	158
3.2	Доказательство существования минимальной реализации змеи . . . . .	163
4	Общие свойства скелетов, имеющих правильную минимальную реализацию . . . . .	164
4.1	Расположение концевых линейных участков . . . . .	164
4.2	Устройство концевых линейных участков . . . . .	166
4.3	Устройство боковин . . . . .	169
5	Критерий существования $RM$ -реализации для нелинейных скелетов . . . . .	172
6	Правильная минимальная реализация скелетов с тремя концевыми линейными участками . . . . .	178
7	Не существование правильной минимальной реализации у скелетов с четырьмя концевыми линейными участками . . . . .	185
7.1	Длины боковин . . . . .	185
7.2	Перегородки второго уровня . . . . .	189
7.3	Доказательство предложения 3.12 . . . . .	192
8	Не существование правильной минимальной реализации у скелетов с пятью концевыми линейными участками . . . . .	210
9	Правильная минимальная реализация скелетов с шестью концевыми линейными участками . . . . .	215
<b>4</b>	<b>Наросты и линейные участки минимальных сетей с выпуклыми границами</b>	<b>236</b>
1	Концевые наросты . . . . .	237
2	О концевых вершинах . . . . .	239

3	Геометрия концевых линейных участков . . . . .	240
3.1	Длина жала: на концевой змее есть наросты . . . . .	241
3.2	Длина жала: на концевой змее наростов нет, концевой линейный участок имеет излом . . . . .	251
3.3	Длина хвоста: концевой линейный участок имеет из- лом и на концевой змее есть наросты . . . . .	256
3.4	Взаимное расположение концевых линейных участков .	265
<b>5</b>	<b>Квазиправильные границы, которые нельзя затянуть ни од- ним минимальным бинарным деревом</b>	<b>275</b>
1	Жаловый модуль . . . . .	276
2	Доказательство теоремы 5.1 . . . . .	279
<b>6</b>	<b>Концевые линейные участки паркетов из <math>\mathcal{WP}_5</math>, имеющих <math>RM</math>- реализацию</b>	<b>284</b>
1	Линейные паркетные с правильной границей . . . . .	284
2	Произвольные паркетные с правильной границей . . . . .	298
<b>7</b>	<b>Невырожденные минимальные сети с выпуклой границей. Циклический случай</b>	<b>313</b>
1	Фундаментальные циклы невырожденных минимальных се- тей с выпуклой границей. Тривиальные сети . . . . .	313
1.1	Число вращения тривиальной сети . . . . .	315
2	Двойственный комплекс . . . . .	318
2.1	Число вращения ребер контура двойственного комплекса тривиальной сети . . . . .	321
2.2	Ядра двойственного комплекса . . . . .	326
3	Паркетная реализация тривиальных сетей с числом вращения не более пяти . . . . .	328
3.1	Число вращения ребер контура паркета . . . . .	330
4	Описание паркетов общего вида . . . . .	331
4.1	Скелет и наросты . . . . .	331
4.2	Паркетные оболочки и ядра . . . . .	331
4.3	Ядра паркета . . . . .	331
4.4	Узлы ветвления . . . . .	332
4.5	Линейные участки . . . . .	333
4.6	Структурные элементы . . . . .	334
4.7	Макроэлементы и концевые линейные участки . . . . .	335
5	Скелеты из $\mathcal{P}_5$ . . . . .	336
5.1	Структурные элементы . . . . .	336
5.2	Направления концевых линейных участков скелетов из $\mathcal{P}_5$ . . . . .	337
5.3	Коды скелетов из $\mathcal{P}_5$ . . . . .	338
5.4	Полинаросты . . . . .	339

6	Расположение наростов в паркетах из $\mathcal{P}_3$ на их скелетах . . .	343
6.1	Большие псевдобоквины . . . . .	343
6.2	Псевдобоквины . . . . .	345
6.3	Расположение наростов на скелетах паркетов из $\mathcal{P}_3$ . .	347
<b>Общий список работ</b>		<b>350</b>
<b>Список работ по теме диссертации</b>		<b>355</b>

# Введение

Настоящая диссертация посвящена изучению локально минимальных плоских связных графов, затягивающих вершины выпуклых многоугольников. Такие графы возникают при решении знаменитой проблемы, названной в честь Якоба Штейнера (Jacob Steiner, 1796–1863), профессора Берлинского университета: *среди всех сетей (связных одномерных континуумов), затягивающих данное конечное множество  $M$  точек плоскости, найти сеть наименьшей длины*. Решения проблемы Штейнера называются *абсолютно минимальными деревьями*.

Абсолютно минимальные сети можно рассматривать как обобщения кратчайших геодезических. Пусть  $W$  — произвольное связное риманово многообразие, и  $\{A, B\}$  — пара точек из  $W$ . Рассмотрим множество  $\Omega(A, B)$  всех измеримых кривых, соединяющих точки  $A$  и  $B$ . Тогда кривая  $\gamma \in \Omega(A, B)$ , имеющая наименьшую длину среди всех кривых из  $\Omega(A, B)$  (если, конечно, она существует), называется *кратчайшей кривой*, соединяющей  $A$  с  $B$ . Хорошо известно, что такие кратчайшие кривые описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Решения этой системы называются *геодезическими*, однако эти решения, в общем случае, не обязаны быть кратчайшими кривыми, соединяющими свои начальную и конечную точки. Тем не менее, если на геодезической  $\gamma$  выбрать две достаточно близкие точки  $A$  и  $B$ , то отрезок  $\gamma(A, B)$  этой геодезической, ограниченный точками  $A$  и  $B$ , будет кратчайшей кривой. Иными словами, у каждой точки  $P$ , лежащей на геодезической  $\gamma$ , имеется такая замкнутая окрестность  $U$ , что  $\gamma \cap U$  является кратчайшей кривой, соединяющей точки из  $(\partial\gamma \cap U) \cup (\gamma \cap \partial U)$ , где  $\partial\gamma = \{A, B\}$  — граница кривой  $\gamma$ , а  $\partial U$  — граница окрестности  $U$ . Таким образом, геодезические локально являются кратчайшими кривыми. Отметим, что последнее свойство может быть принято за определение геодезических: каждая локально кратчайшая кривая есть геодезическая.

Рассмотрим теперь вместо множества  $\{A, B\}$  произвольное конечное подмножество  $M$  риманова многообразия  $W$ . Наша задача — обобщить на этот случай понятия кратчайшей кривой и геодезической.

Естественно, первый шаг состоит в обобщении понятия кривой. Это обобщение называется *сетью*. В случае  $W = \mathbb{R}^2$ , сеть — это произвольный

связный плоский граф, ребра которого — непрерывные кривые. Если  $W$  — произвольное риманово многообразие, или, более общо, топологическое пространство, то *сеть*  $\Gamma$  в  $W$  можно определить как непрерывное вложение связного одномерного конечного  $CW$ -комплекса  $G$  в пространство  $W$ , и ограничение этого вложения на клетки размерности 0 и 1 из  $G$  называть соответственно *ребрами* и *вершинами* сети  $\Gamma$ . Таким образом, *сеть можно рассматривать как разветвленную кривую*.

Отметим, что, как и в случае кривых, удобно отождествлять и вершины, и ребра сети  $\Gamma$ , являющиеся ограничениями отображения  $\Gamma$  на соответствующие клетки из  $G$ , с их образами в  $W$ . Ниже мы воспользуемся таким отождествлением.

Следующий шаг — обобщить выражение “кривая, соединяющая точки  $A$  и  $B$ ”, на случай многоточечного множества  $M$ . Для этого мы будем говорить, что *сеть  $\Gamma$  затягивает  $M$* , или  *$M$  является границей сети  $\Gamma$* , если  $M$  — подмножество множества вершин сети  $\Gamma$ . Границу сети  $\Gamma$  будем обозначать через  $\partial\Gamma$ .

Далее, мы хотим измерять длину сети, поэтому мы потребуем, чтобы ребра сети  $\Gamma$  были измеримыми кривыми. Такие сети будем называть *измеримыми*. *Длиной сети  $\Gamma$*  назовем сумму длин всех ее ребер.

Определим теперь обобщения кратчайших кривых следующим образом. Сеть  $\Gamma$  с границей  $M$  называется *абсолютно минимальной*, если длина сети  $\Gamma$  — наименьшая среди длин всех сетей, затягивающих  $M$ . Иными словами, вместо пространства  $\Omega(A, B)$  всех измеримых кривых, соединяющих  $A$  и  $B$ , мы рассматриваем пространство  $\Omega(M)$  всех измеримых сетей, затягивающих конечное подмножество  $M$  риманова многообразия  $W$ , и из всех таких сетей выбираем сеть наименьшей длины (если, опять же, таковая существует). Итак, *абсолютно минимальные сети можно рассматривать как разветвленные кратчайшие геодезические*.

Наконец, обобщим понятие произвольной (не обязательно, кратчайшей) геодезической. Для этого, воспользуемся свойством локальной минимальности последней. А именно, измеримая сеть  $\Gamma$  в римановом многообразии  $W$ , затягивающая множество  $M = \partial\Gamma$ , называется *локально минимальной*, если для любой точки  $P \in \Gamma$  существует такая замкнутая окрестность  $U$ , что пересечение  $\Gamma \cap U$  является абсолютно минимальной сетью с естественной границей  $\partial(\Gamma \cap U) = (\Gamma \cap \partial U) \cup (\partial\Gamma \cap U)$ . Сравнивая это определение со свойством локальной минимальности геодезических, заключаем, что *локально минимальные сети можно рассматривать как разветвленные геодезические*.

Отметим, что абсолютно минимальные сети являются с очевидностью локально минимальными. Однако, как и в случае кривых, локально минимальных сетей существенно больше.

Локальное устройство локально минимальных сетей описывается легко. Мы приведем общий результат, см. [53], хотя в дальнейшем мы будем работать лишь с плоским случаем  $W = \mathbb{R}^2$ , поэтому в следующей главе дадим



доказательство формулируемого ниже предложения только для этого случая.

**Предложение 1 (Локальная структура)** *Сеть  $\Gamma$  в римановом многообразии  $W$ , затагивающая конечное множество  $M$  точек из  $W$ , является локально минимальной, если и только если имеют место следующие свойства:*

- все ребра сети  $\Gamma$  — геодезические;
- угол между любыми двумя ребрами, выходящими из одной вершины, не меньше  $120^\circ$ ; в частности, степень каждой вершины сети  $\Gamma$  не превосходит 3;
- все вершины степени 1 являются граничными, т.е. лежат в  $M$ ;
- если вершина степени 2 не граничная, то угол между выходящими из нее ребрами равен  $180^\circ$ .

Сеть, степени вершин которой не превосходят 3, называются *сетями Штейнера*. Таким образом, каждая локально минимальная сеть является сетью Штейнера.

**Замечание.** Легко видеть, что из любой сети, не меняя ее как подмножество многообразия  $W$ , можно получить другую сеть, выбрав на ее ребрах произвольные внутренние точки и добавив их к множеству неграничных вершин (при этом надо сделать очевидную перестройку ребер). По предыдущему предложению, при такой перестройке локально минимальная сеть  $\Gamma$  остается локально минимальной.

Обратно, выбрасывая из множества вершин локально минимальной сети  $\Gamma$  неграничные вершины степени 2 и “укрупняя” при этом ребра, склеивая каждую пару ребер из  $\Gamma$ , инцидентных такой вершине, в одно ребро, получим, очевидно, новую сеть, совпадающую, как подмножество  $W$ , с  $\Gamma$ . Опять, если сеть  $\Gamma$  локально минимальна, то результат описанной только что перестройки — также локально минимальная сеть.

Вышесказанное приводит к следующему соглашению: в дальнейшем, не ограничивая общности, *будем всегда считать, что рассматриваемые сети не имеют неграничных вершин степени 2*. Таким образом, можно считать, что все вершины степени 1 и 2 локально минимальной сети  $\Gamma$  принадлежат ее границе.

В отличие от локальной структуры, глобальное устройство локально минимальных сетей достаточно сложно. Известно [53], что для любого конечного подмножества  $M$  полного риманова многообразия  $W$  существует абсолютно минимальная и, значит, локально минимальная сеть, затагивающая  $M$ , т.е. имеет место теорема существования. Тем не менее, теоремы

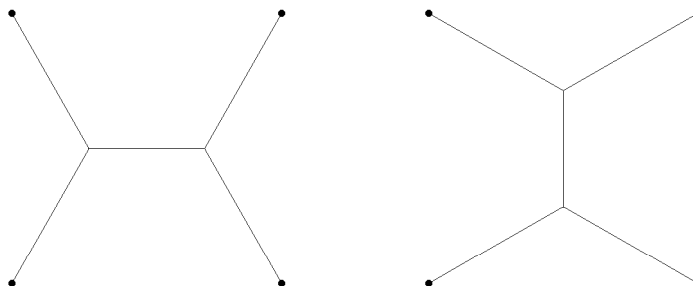


Рис. 1: Две абсолютно минимальных сети, затагивающих вершины квадрата

единственности, вообще говоря, нет. Стандартный пример — для множества  $M \subset \mathbb{R}^2$ , являющегося вершинами квадрата, существует две абсолютно минимальных сети, см. рис. 1.

И хотя в случае  $W = \mathbb{R}^2$  существуют алгоритмы Мелзака [31] и Хванга [24], позволяющие для каждого заданного множества  $M$  строить все локально минимальные деревья, затагивающие  $M$ , а, значит, и абсолютно минимальную сеть (являющуюся, очевидно, деревом), однако построение абсолютно минимальной сети с заданной границей  $M$  (не говоря уже об описании всех локально минимальных сетей, затагивающих  $M$ ) — это  $\mathcal{NP}$ -полная задача, см. [20] и [21]. Причина этого — чрезвычайно большое количество топологий плоских сетей Штейнера.

Поэтому возникает следующая проблема: как по свойствам граничного множества  $M$  можно понять, какие сети Штейнера *a priori* не могут встречаться среди локально минимальных сетей, затагивающих  $M$ . Цель настоящей диссертации — исследовать взаимосвязь между свойствами граничных множеств и затагивающих их локально минимальных сетей на примере локально минимальных сетей на плоскости, границы которых — множества вершин выпуклых многоугольников.

В дальнейшем мы будем заниматься только сетями на стандартной евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ , поэтому, не оговаривая каждый раз специально, мы будем понимать под сетью плоский связный граф, ребра которого — измеримые кривые.

## 1 Исторический обзор

Хотя проблема Штейнера имеет долгую историю, а первые ее постановки и варианты решения возникли задолго до Штейнера в работах таких ученых, как П. Ферма, Э. Торричелли, Б. Кавальери, Т. Симпсон и, возможно, многих других, наибольшую известность она приобрела лишь после выхода в свет замечательной книги Ричарда Куранта и Герберта Е. Роббинса «Что

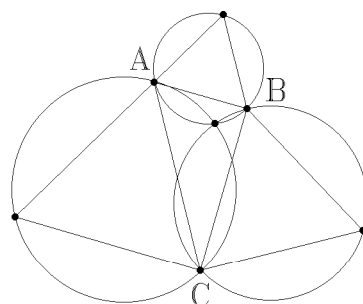


Рис. 2: Точка Торричелли

такое математика?». В этой книге, вскоре ставшей чрезвычайно популярной, эта задача была названа именем Штейнера.

Чтобы проследить историю возникновения и развития проблемы Штейнера, обратимся к [42] и [30]. Впервые эта проблема, в наиболее простой своей модификации, появилась, по-видимому, у Ферма (1601–1665).

**Задача 1 (Ферма)** *Найти на плоскости точку, сумма расстояний от которой до трех данных точек наименьшая из возможных.*

Еще до 1640 года Торричелли предложил геометрическое решение задачи Ферма. Построим на сторонах произвольного треугольника  $ABC$  вне его три правильных треугольника и опишем вокруг них окружности. Тогда, как утверждал Торричелли, построенные три окружности пересекутся в одной точке, причем эта точка и является искомой в задаче Ферма. Точку пересечения этих трех окружностей называют *точкой Торричелли*, см. рис. 2.

Отметим, однако, забегая немного вперед, что точка Торричелли является решением задачи Ферма только в случае, когда все углы треугольника  $ABC$  не превосходят  $120^\circ$ . В случае, когда один из углов, скажем  $A$ , больше  $120^\circ$ , точка Торричелли лежит вне треугольника  $ABC$  и больше не минимизирует суммарное расстояние до вершин  $A$ ,  $B$  и  $C$ . На сей раз, оказывается, решение задачи Ферма — это вершина  $A$ . Этот факт был обнаружен лишь в 1834 году Хейненом, и, позднее, в 1853 году — Бертраном.

В 1647 году выходит книга Кавальери *“Excercitationes Geometricae”*, в которой отмечается важное свойство точки Торричелли, если последняя лежит внутри треугольника  $ABC$ . Оказывается, все углы между отрезками, соединяющими точку Торричелли с вершинами треугольника  $ABC$ , равны между собой и равны  $120^\circ$ , см. рис. 3. Этот замечательный факт будет еще не раз появляться во многих обобщениях рассматриваемой проблемы.

Приблизительно через сто лет, в 1750 году, в свет выходит книга Симпсона *“Doctrine and Application of Fluxions”*. В ней Симпсон предложил другой способ построения точки Торричелли. А именно, вновь построим

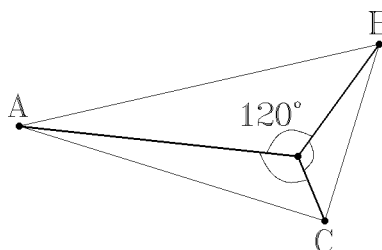
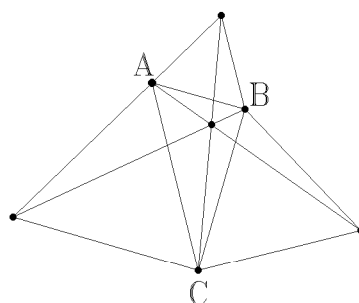
Рис. 3: Свойство  $120^\circ$ 

Рис. 4: Линии Симпсона пересекаются в точке Торричелли

на сторонах треугольника  $ABC$  вне его правильные треугольники. Теперь, вместо того, чтобы описывать вокруг построенных треугольников окружности, рассмотрим произвольную сторону  $x$  треугольника  $ABC$ , вершину  $Y$  из  $ABC$ , противоположную стороне  $x$ , вершину  $Z$  из правильного треугольника, построенного на стороне  $x$ , лежащую напротив  $x$ , и соединим точки  $Y$  и  $Z$ . Так поступим для каждой стороны треугольника  $ABC$ . В результате мы получим три отрезка, называемые теперь *линиями Симпсона*. Оказывается, как доказал Симпсон, эти три отрезка или их продолжения пересекаются в одной точке, которая, в действительности, совпадает с точкой Торричелли, рис. 4.

Еще через 80 лет, в 1834 году, Хейнен обнаружил, что длины всех трех линий Симпсона равны между собой и равны сумме расстояний от точки Торричелли до вершин треугольника. Таким образом, собирая воедино все сказанное выше, и замечая, что в “пограничном” случае, когда один из углов треугольника  $ABC$ , скажем  $A$ , равен  $120^\circ$ , искомая точка — точка Торричелли — совпадает с вершиной  $A$ , мы получаем следующее решение задачи Ферма.

**Решение задачи Ферма.** Если один из углов треугольника  $ABC$ , скажем  $A$ , больше или равен  $120^\circ$ , то точка, являющаяся решением задачи

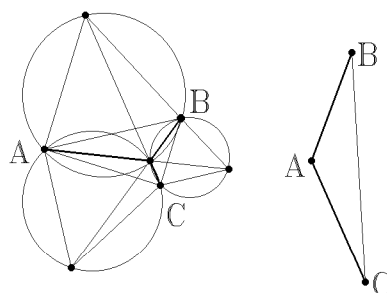


Рис. 5: Решение задачи Ферма

Ферма, единственна и совпадает с вершиной  $A$ .

Если же все углы треугольника  $ABC$  меньше  $120^\circ$ , то решение задачи — это внутренняя точка  $S$  треугольника  $ABC$ , совпадающая с точкой Торричелли = точкой пересечения линий Симпсона, что и определяет ее однозначно. В этом случае все углы между отрезками  $SA$ ,  $SB$  и  $SC$  равны между собой и равны  $120^\circ$ . При этом линии Симпсона имеют одинаковые длины, равные  $|SA| + |SB| + |SC|$ , рис. 5

Существует естественное обобщение задачи Ферма, а именно.

**Задача 2 (Обобщенная задача Ферма)** Найти на плоскости (в  $d$ -мерном пространстве) точку, сумма расстояний от которой до  $n$  данных точек наименьшая из возможных.

Обобщенная задача Ферма была сформулирована в виде упражнения в книге Симпсона “*Fluxions*”, и именно этой задачей из рассматриваемой области проблем занимался Штейнер.

Другое обобщение задачи Ферма получается, если в качестве объекта, у которого минимизируется длина, рассматривать произвольные *сети*, затягивающие данные множества точек. Именно такая постановка задачи была выдвинута Ярником и Кесслером в 1934 году.

**Задача 3 (Ярник, Кесслер)** Найти кратчайшую сеть, связывающую  $n$  данных точек плоскости.

Ярник и Кесслер решили поставленную проблему для граничных множеств, образующих вершины правильных  $n$ -угольников при  $n = 3, 4, 5$  и  $n \geq 13$ . Для  $n = 3, 4, 5$  Ярник и Кесслер нашли очевидные абсолютно минимальные сети, а для  $n \geq 13$  показали, что абсолютно минимальная сеть состоит из  $(n - 1)$ -ой стороны рассматриваемого правильного  $n$ -угольника. В работе этих авторов не было ссылок на Ферма, так как сама эта проблема, возможно, казалась им существенно другой. Заметим, что случаи

оставшихся  $n$  были разобраны лишь в работе [17] Ду, Хванга и Венга 1987 года, где было показано, что и в этих случаях ответ такой же, как и для  $n \geq 13$ .

Как мы уже отметили выше, проблема Штейнера получила свое название благодаря книге Куранта и Роббинса “*Что такое математика?*”, написанной ими в 1941 году. Авторы этой книги сформулировали описанную выше задачу Ферма, назвав ее проблемой Штейнера, а затем поставили проблему Ярника и Кесслера как естественное обобщение проблемы Штейнера. Ни на Ферма, ни на Ярника и Кесслера ссылок сделано не было. Благодаря огромной популярности книги, название “проблема Штейнера” прочно вошло в лексикон математиков. Отметим, что книга Куранта и Роббинса породила не только недоразумение в авторстве, но, что более важно, привлекла к проблеме Штейнера интерес большого числа ученых.

В дальнейшем проблемой Штейнера занимались многие известные математики, см. [1]–[46], такие как Гилберт, Грехем, Гэри, Джонсон, Ду, Кокейн, Мелзак, Поллак, Рубинштейн, Хванг и другие. Ниже мы вкратце опишем основные результаты, полученные в этой науке за последние 40 лет. Неугасающий интерес к проблеме Штейнера объясняется несколькими причинами. Первая из них состоит в том, что, несмотря на простоту постановки, эта задача чрезвычайно нетривиальна. И хотя, как будет описано ниже, существует несложный алгоритм построения кратчайшей сети, затягивающей данное множество из  $n$  точек плоскости, этот алгоритм связан с очень большим перебором возможных топологий сетей. В действительности, проблема Штейнера является  $NP$ -полной, см. [21]. Последнее означает, что, скорее всего, для этой проблемы не существует полиномиального алгоритма, т.е. алгоритма, решающего задачу за время порядка не выше чем  $n^k$ , где  $k$  — некоторое фиксированное число. Поэтому важной задачей является исследование разных геометрических ограничений, которые накладываются на сеть условием минимальности.

Другая причина связана с тем, что у проблемы Штейнера имеется много различных интерпретаций и приложений. Так, например, предположим, что возникла необходимость соединить некоторые города системой дорог. При этом желательно, чтобы затраты на прокладку дорог были наименьшими возможными. Естественно, затраты пропорциональны сумме длин дорог, т.е. длине искомой сети. В идеальном случае, когда на сеть больше не накладывается никаких ограничений (скажем, отсутствуют препятствия, и мы вольны прокладывать дороги там, где пожелаем), сеть дорог, минимизирующая затраты, является абсолютно минимальной сетью.

В приведенном только что примере можно заменить города на пункты потребления, а дороги — на нефте или газопроводы. В этом случае абсолютно минимальная сеть — это оптимальная система нефте или газоснабжения. Если под пунктами  $A_1, A_2, \dots, A_n$  понимать местонахождения абонентов, а под абсолютно минимальной сетью  $\Gamma$  — телефонную сеть, то мы получим модельную ситуацию, используемую в США при вычисле-

нии федеральных тарифов за междугородные телефонные разговоры. В этом случае плата за разговор абонентов, находящихся в пунктах  $A_i$  и  $A_j$ , пропорциональна длине минимального пути в телефонной сети  $\Gamma$ , соединяющего  $A_i$  с  $A_j$ .

Локально минимальные сети можно наблюдать, рассматривая естественные природные образования. Скажем, если пренебречь высотой пчелиных сот, то получится локально минимальная сеть, построенная из шестиугольников с углами по  $120^\circ$ . Таким образом, пчелы инстинктивно минимизируют количество воска, идущего на постройку сот.

В следующих примерах локально минимальные сети образуются в результате работы законов неживой природы. Чтобы нагляднее представить себе механизм, можно проделать следующие эксперименты.

В первом эксперименте нам понадобятся две прозрачные пластины, например пластины из плексигласа, набор металлических штырьков, а также таз с мыльным раствором или раствором шампуня.

**Эксперимент 1.** Возьмем две прозрачные пластины, расположим их в параллельных плоскостях на некотором расстоянии друг от друга, и соединим их между собой произвольным числом штырьков, перпендикулярных плоскостям, в которых пластины лежат. Опустим полученную конфигурацию в заранее приготовленный мыльный раствор и осторожно извлечем ее из раствора. На конфигурации осядет мыльная пленка, перпендикулярная пластинам (рис. 6).

Граница полученной мыльной пленки состоит из двух частей: первая часть границы — это объединение штырьков, соединяющих пластины, а вторая часть — объединение двух одинаковых “следов”, по которым пленка касается пластин. Если  $h$  — расстояние между пластинами, а  $l$  — длина одного из “следов”, то площадь мыльной пленки равна  $hl$ .

Хорошо известно, что мыльная пленка всегда стремится занять такое положение, в котором ее площадь больше нельзя уменьшить без предварительного увеличения. Поэтому каждый из “следов” является сетью, длину которой нельзя уменьшить малыми шевелениями, оставляющими на месте точки крепления штырьков — границу этой сети. Сети, удовлетворяющие такому условию, в действительности являются локально минимальными.

Следующий эксперимент представляет собой механическую реализацию минимальных сетей. Для него нам потребуется одна пластина, достаточно длинная леска и набор одинаковых по массе грузиков.

**Эксперимент 2.** Разрежем леску на некоторое число частей. Это число обозначим через  $n$ . Выберем из  $n$  полученных отрезков лески  $n - 1$ , и на одном конце каждого из выбранных отрезков завяжем незатягивающуюся петельку. Из полученных  $n - 1$ -ого отрезка с петелькой выберем  $k_1$  штук, и через петельки проденем единственный отрезок без петли. Тем самым

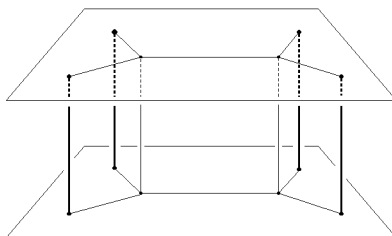


Рис. 6: Мыльные пленки, моделирующие локально минимальные сети

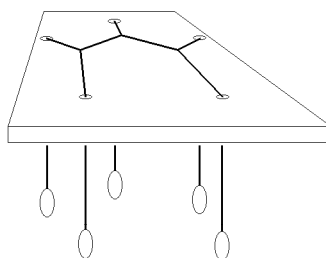


Рис. 7: Механическая реализация локально минимальных сетей

мы получим конфигурацию, состоящую из  $k_1 + 1$ -ого отрезка и имеющую  $k_1 + 2$  концов.

Далее, из оставшихся незадействованными отрезков выберем  $k_2$  штук и проденем через их петельки концы построенной конфигурации. Тем самым мы получим новую конфигурацию уже с  $k_1 + k_2 + 2$  концами. Опять из оставшихся отрезков выберем  $k_3$  и вновь перестроим конфигурацию. Будем продолжать это процесс до тех пор, пока все отрезки не будут заняты. В результате мы построим конфигурацию  $G$ , число концов которой равно  $n + 1$ .

Просверлим в пластине  $n + 1$  маленьких сквозных отверстий, расположим пластину горизонтально и пропустим сверху концы конфигурации  $G$  через отверстия так, чтобы на каждое из них приходилось по одному концу из  $G$ . Прикрепим теперь к концам грузики одинаковой массы. Когда полученная механическая система придет в состояние равновесия, конфигурация из лески, в случае, если все петельки свободно разошлись между собой, образует локально минимальную сеть, граница которой — набор просверленных отверстий, рис. 7.



## 2 Основные результаты теории абсолютно минимальных сетей

Приведем теперь основные результаты, посвященные исследованию абсолютно минимальных деревьев.

Пусть  $M = \{M_i\}$  — фиксированное множество, состоящее из  $n$  точек плоскости. Первые естественные вопросы рассматриваемой теории — это теоремы существования и единственности абсолютно минимальных деревьев, затачивающих  $M$ . Как было отмечено выше, всегда существует абсолютно минимальное дерево, затачивающее  $M$ , однако, вообще говоря, такое дерево не единственно, см. рис. 1.

Кроме того, выше мы описали локальное устройство локально минимальных, а значит, и абсолютно минимальных сетей. А именно, каждая абсолютно минимальная сеть состоит из отрезков, стыкующихся в вершинах под углами, не превосходящими  $120^\circ$ . В частности, степени вершин локально минимальной сети не превосходят 3, поэтому такие сети являются сетями Штейнера. Более того, можно считать, что все вершины степени 1 и 2 являются граничными, т.е. принадлежат  $M$ .

В отличие от локальной структуры минимальных сетей, которая полностью описана, про глобальное устройство известно далеко не все. Конечно, ясно, что каждая абсолютно минимальная сеть является деревом, степени вершин которого не больше 3. В частности, абсолютно минимальное дерево содержит не более  $n - 2$  вершин, не лежащих в граничном множестве  $M$  (напомним, что через  $n$  мы обозначили количество точек в  $M$ ). Эти дополнительные вершины называются *точками Штейнера*.

Мы уже отмечали, что задача построения абсолютно минимального дерева —  $NP$ -полная, и этот факт является одной из мотиваций, обосновывающих актуальность основной задачи настоящей диссертации: научиться по геометрии множества  $M$  понимать, какие топологии не могут заведомо встречаться в абсолютно минимальных сетях, затачивающих  $M$ . Иными словами, требуется исследовать дополнительные свойства абсолютно минимальных сетей и связь этих свойств с геометрией границы  $M$ .

Одно из таких свойств формулируется в терминах так называемой оболочки Штейнера. Легко показать, что если известно расположение точек Штейнера из абсолютно минимального дерева, то все абсолютно минимальные деревья с данным расположением точек Штейнера известны и являются всевозможными минимальными остовными деревьями, затачивающими объединение множества  $M$  с множеством всех этих точек Штейнера. Поэтому полезно выделить подмножество плоскости, за пределы которого точки Штейнера попасть не могут.

## 2.1 Оболочки Штейнера

Приводимые ниже результаты можно найти в обзоре [22], а также в статье [6].

**Определение.** Множество  $\text{SH}(M) \subset \mathbb{R}^2$  называется *оболочкой Штейнера множества  $M$* , если каждое абсолютно минимальное дерево, затягивающее  $M$ , содержится в  $\text{SH}(M)$ .

Ясно, что чем меньшую по включению оболочку Штейнера нам удастся найти, тем более сильные ограничения на расположение точек Штейнера мы получим. Приведем несколько характерных результатов на эту тему.

Пусть  $\Gamma$  — абсолютно минимальное дерево, затягивающее множество  $M$ .

**Утверждение 1 (Свойство бесконечного клина)** Пусть  $W$  — внутренность некоторого угла величины не меньше чем  $2\pi/3$ . Предположим, что  $W$  не содержит точек из  $M$ . Тогда  $W$  не содержит точек Штейнера дерева  $\Gamma$ .

Внутренность угла  $W$  часто называют *бесконечным клином*.

**Следствие 1** Выпуклая оболочка множества  $M$  является одной из оболочек Штейнера для  $M$ .

Пусть  $\Gamma$ , как и выше, обозначает абсолютно минимальное дерево, затягивающее конечное множество  $M$  точек плоскости. Рассмотрим некоторый треугольник  $ABC$ , угол  $B$  которого не меньше  $2\pi/3$ . Обозначим через  $W$  множество, полученное из  $ABC$  выбрасыванием сторон  $AB$  и  $BC$ , прилежащих к углу  $B$ . Множество  $W$  будем называть (*ограниченным*) *клином*, порожденным  $ABC$ .

**Утверждение 2** Пусть клин  $W$ , порожденный  $ABC$ , не содержит точек множества  $M$ , а отрезок  $AC$  лежит на границе некоторой оболочки Штейнера  $\text{SH}(M)$ . Тогда  $W$  не содержит точек Штейнера абсолютно минимального дерева  $\Gamma$ , затягивающего  $M$ .

Приведем здесь еще одно утверждение, позволяющее уменьшать оболочку Штейнера.

*Лункой  $L$* , соответствующей отрезку  $AB$ , назовем пересечение двух открытых кругов радиуса  $AB$  с центрами в  $A$  и  $B$  соответственно.

**Утверждение 3 (Свойство лунки)** Пусть  $\Gamma$  — абсолютно минимальное дерево, затягивающее множество  $M$ , и  $AB$  — произвольное ребро из  $\Gamma$ . Тогда лунка  $L$ , соответствующая  $AB$ , не содержит вершин дерева  $\Gamma$ .

Известно несколько способов переходить от одной оболочки Штейнера к другой, меньшей. Мы приведем здесь один из них, предложенный Кокейном [6].

Пусть  $U$  — некоторый многоугольник на плоскости, являющийся оболочкой Штейнера множества  $M$ , а  $\partial U$  — его граница. Пару точек  $A$  и  $C$  из  $M$  назовем *соседними на  $\partial U$* , если отрезок  $AC$  лежит на  $\partial U$ , и на интервале  $AC$  нет точек из  $M$ . Пусть  $A$  и  $C$  — пара соседних на  $\partial U$  точек из  $M$ . Точку  $B$  из  $M$  назовем *хорошей для  $A$  и  $C$* , если угол  $B$  треугольника  $ABC$  не меньше  $2\pi/3$ , и ограниченный клин  $W$ , порожденный  $ABC$ , не содержит точек из  $M$ .

**Утверждение 4** *В сделанных выше предположениях, множество  $U'$ , полученное из  $U$  выбрасыванием ограниченного клина  $W$ , является оболочкой Штейнера для  $M$ .*

Алгоритм, предложенный Кокейном, состоит в следующем. Пусть  $U$  — некоторая оболочка Штейнера. Рассмотрим всевозможные пары соседних на  $\partial U$  точек из  $M$ , и для каждой такой пары  $A, C$  найдем все хорошие точки  $B \in M$  и рассмотрим соответствующие клинья  $W$ , порожденные  $ABC$ . Из всех построенных клиньев выберем тот клин  $W_0$ , у которого угол при вершине  $B$  максимальный. Если таких клиньев несколько, то возьмем любой из них. Обозначим через  $U'$  множество  $U \setminus W_0$ . В силу леммы 1.1, множество  $U'$  является оболочкой Штейнера для  $M$ , поэтому для  $U'$  можно повторить описанную процедуру. Алгоритм заканчивает работу, когда для построенного на предыдущем шаге множества  $\tilde{U}$  ни для какой пары соседних на  $\partial \tilde{U}$  точек из  $M$  нет хорошей точки из  $M$ .

**Предложение 2 (Кокейн)** *Пусть  $U$  — некоторая оболочка Штейнера множества  $M$ . Применим к  $U$  описанный выше алгоритм. Полученное в результате множество  $\tilde{U}$  определено однозначно и является оболочкой Штейнера для  $M$ .*

Отметим, что в результате описанной процедуры может получиться множество, представляющее собой объединение многоугольников  $P_i$ , соединенных между собой некоторыми ломаными  $L_i$  (возможно одноточечными). Эти ломаные, очевидно, являются ребрами абсолютно минимального дерева. Более того, в этом случае достаточно построить абсолютно минимальное дерево для каждого из множеств  $M_i = M \cap P_i$ . Абсолютно минимальное дерево для всего множества  $M$  при этом совпадает с объединением абсолютно минимальных деревьев для  $M_i$  и ломаных  $L_i$ .

Подчеркнем, что описанная выше процедура улучшения оболочки Штейнера не единственна. Например, Хванг, Сонг, Тинг и Ду в [19] предложили способ, позволяющий отрезать от оболочки Штейнера некоторые четырехугольники специального вида. Мы не приводим здесь их результат, отсылая к работе [19].

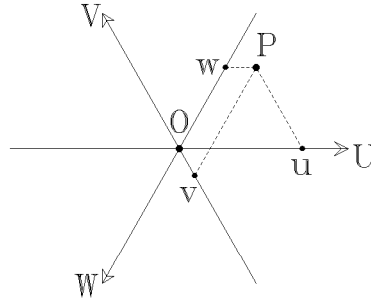


Рис. 8: Гексагональные координаты

## 2.2 Гексагональная система координат

Как было отмечено выше, имеются алгоритмы Мелзака и Хванга, позволяющие находить все абсолютно минимальные сети, затачивающие данное множество  $M$  точек плоскости. В действительности, эти алгоритмы перебирают все затачивающие  $M$  плоские деревья, степени вершин которых не превосходят 3 (такие деревья называются *деревьями Штейнера*) и для каждого такого дерева  $\Gamma$  проверяют, существует ли планарно эквивалентное ему локально минимальное дерево  $\Gamma_m$ , затачивающее множество  $M$ , такое что ограничение на множество  $M$  планарной эквивалентности, переводящей  $\Gamma$  в  $\Gamma_m$ , является тождественным отображением. Если такое  $\Gamma_m$  существует, то алгоритмы строят его в явном виде и вычисляют длину. На заключительной стадии длины всех найденных локально минимальных сетей сравниваются между собой и выбирается локально минимальное дерево наименьшей длины. Это дерево и является абсолютно минимальным.

Сравнительно недавно Кларк [5], а затем независимо Хванг и Венг [25], предложили алгебраическую версию алгоритма Мелзака. Хванг и Венг использовали в этих целях так называемые гексагональные координаты.

Пусть на плоскости фиксированы три прямые  $U$ ,  $V$  и  $W$ , пересекающиеся в точке  $O$  и разбивающие плоскость на шесть равных углов. Фиксируем ориентацию каждой из этих прямых так, как показано на рис. 8. Каждой точке  $P$  плоскости  $\mathbb{R}^2$  поставим в соответствие три числа  $(u, v, w)$ , где  $u$  — алгебраическая величина проекции точки  $P$  на ось  $U$  вдоль оси  $V$ ,  $v$  — алгебраическая величина проекции точки  $P$  на ось  $V$  вдоль оси  $W$ , и, наконец,  $w$  — алгебраическая величина проекции точки  $P$  на ось  $W$  вдоль оси  $U$ . Числа  $(u, v, w)$  называются *гексагональными координатами* точки  $P$  в системе координат  $UVW$ . Иногда гексагональные координаты точки  $P$  обозначаются через  $(u(P), v(P), w(P))$ .

Следующее утверждение очевидно.

**Утверждение 5** Для произвольной точки  $P$  плоскости  $\mathbb{R}^2$  выполнено следующее соотношение:  $u + v + w = 0$ .

Пусть  $\Gamma$  — локально минимальное бинарное дерево, каждое ребро которого параллельно одной из осей гексагональной системы координат. Отметим, что если отрезок  $AB$  параллелен одной из гексагональных осей (например, оси  $U$ ), то соответствующие гексагональные координаты (в данном случае  $w$ ) точек  $A$  и  $B$  совпадают. Отсюда вытекает следующее утверждение.

**Утверждение 6** *Если ребра локально минимального бинарного дерева  $\Gamma$  параллельны соответствующим осям гексагональных координат, то координаты всех точек Штейнера дерева  $\Gamma$  являются линейными функциями координат точек множества  $M$  и вычисляются однозначно.*

Далее, напомним, что каждое дерево является двудольным графом. Последнее означает, что множество его вершин можно разбить на два подмножества, называемые долями, так, чтобы каждое ребро дерева соединяло вершины, принадлежащие разным долям. Пусть  $V = V_1 \sqcup V_2$  — такое разбиение множества  $V$  вершин локально минимального бинарного дерева  $\Gamma$ .

**Утверждение 7** *Пусть на плоскости фиксирована гексагональная система координат  $UVW$ . Пусть  $\Gamma$  — локально минимальное бинарное дерево, затачивающее множество  $M$ , и предположим, что каждое ребро дерева  $\Gamma$  параллельно одной из координатных осей. Тогда, для произвольного разбиения  $V = V_1 \sqcup V_2$  множества вершин дерева  $\Gamma$  на доли, имеем:*

$$\sum_{P \in V_1 \cap M} [u(P) + v(P) + w(P)] - \sum_{P \in V_2 \cap M} [u(P) + v(P) + w(P)] = 0.$$

Утверждения 6 и 7 показывают, что гексагональные координаты граничных точек множества  $M$ , затаченного фиксированным минимальным бинарным деревом, связаны между собой линейным уравнением. Это уравнение называется *характеристическим*. Отметим, что если рассмотреть дерево другой топологии, то характеристическое уравнение окажется, вообще говоря, другим, так как изменится разбиение множества вершин дерева на доли.

С помощью характеристического уравнения удастся найти направления ребер минимального бинарного дерева данной топологии, затачивающего данное множество точек (если такое дерево существует), или, что все равно, найти гексагональную систему координат, оси которой параллельны ребрам этого минимального дерева.

**Утверждение 8** *Если система гексагональных координат  $U'V'W'$  повернута относительно исходной системы  $UVW$  на угол  $\varphi$  против часовой стрелки, то для произвольной точки  $P$  имеем:*

$$\begin{pmatrix} u'(P) \\ v'(P) \\ w'(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l & k & -k \\ -k & l & k \\ k & -k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(P) \\ v(P) \\ w(P) \end{pmatrix},$$

где  $k = \sin(\varphi)/\sqrt{3}$ , а  $l = \cos(\varphi)$ .

Воспользовавшись утверждением 8, можно записать характеристическое уравнение, которое, очевидно, будет линейным уравнением на  $k$  и  $l$ . Поскольку повороты на углы  $\varphi$ ,  $\varphi + 2\pi/3$  и  $\varphi + 4\pi/3$  дают, очевидно, одинаковые, с точностью до обозначения осей, системы координат, а также поскольку имеет место соотношение  $l^2 + 3k^2 = 1$ , можно, найти угол  $\varphi$  (если такой существует), удовлетворяющий характеристическому уравнению. Итак, имеет место следующее предложение.

**Предложение 3 (Кларк, Хванг, Венг)** *Исходя из гексагональных координат точек множества  $M$ , с помощью характеристического уравнения можно найти направления ребер невырожденного минимального дерева  $\Gamma$ , затагивающего  $M$ .*

### 2.3 Абсолютно минимальные деревья, затагивающие множества специального вида

Иногда, если наложить достаточно жесткие ограничения на устройство граничного множества  $M$ , удается полностью решить задачу о поиске абсолютно минимального дерева. В настоящем пункте мы расскажем о некоторых задачах такого типа.

#### Зигзаги

Рассмотрим на плоскости ломаную  $L$ , звенья которой “поворачивают в разные стороны”. Последнее означает, что если фиксировать некоторую ориентацию ломаной  $L$ , и каждой паре последовательных векторов-звеньев ломаной  $L$  поставить в соответствие знак ориентированного угла от первого звена ко второму, то получится знакопеременная последовательность. Ломаные, обладающие таким свойством, называются *зигзагами*.

Пусть теперь  $M$  — конечное множество точек плоскости. Множество  $M$  называется *зигзагом*, если существует ломаная-зигзаг  $L$ , множество вершин которой совпадает с  $M$ . В этом случае говорят, что  $L$  *параметризует зигзаг  $M$* .

Пусть  $M = \{M_i\}_{i=1}^k$  — некоторый зигзаг, параметризованный ориентированной ломаной-зигзагом  $L$ . Предположим, что точки из  $M$  занумерованы последовательно в соответствии с ориентацией  $L$ . Зигзаг  $M$  называется *регулярным*, если существует такая его параметризация  $L$ , что величина угла  $M_i M_{i+1} M_{i+2}$  не зависит от  $i$ . Величина этого угла называется в этом случае *углом зигзага  $M$*  в данной параметризации.

Зигзаг  $M$  называется *выпуклым*, если множество  $M$  лежит на границе своей выпуклой оболочки.

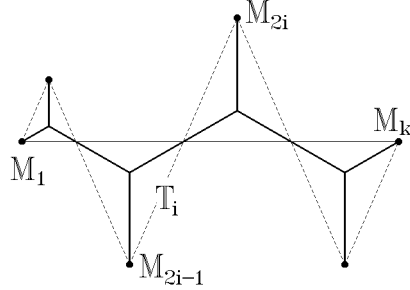


Рис. 9: Абсолютно минимальная сеть, затягивающая зигзаг

Зигзаг  $M$  называется *нормальным*, если выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|M_i M_{i+1}\| &\leq \|M_i M_{i+2}\|, & 1 \leq i \leq k-2, \\ \|M_{i+1} M_{i+2}\| &\leq \|M_i M_{i+2}\|, & 2 \leq i \leq k-2. \end{aligned}$$

Непосредственно из определений вытекает следующее несложное утверждение.

**Утверждение 9** Пусть  $M$  — некоторый зигзаг. Если зигзаг  $M$  выпуклый, то отрезок  $M_1 M_k$  пересекает каждый отрезок  $M_i M_{i+1}$ . Если зигзаг  $M$  нормальный, то угол  $M_i M_{i+1} M_{i+2}$  не меньше чем  $\pi/3$ .

Рассмотрим регулярный выпуклый зигзаг  $M$ , и пусть  $\alpha$  — угол зигзага  $M$ , а  $L$  — параметризующая  $M$  ломаная. Обозначим через  $T_i$  невырожденные треугольники, ограниченные ломаной  $L$  и отрезком  $M_1 M_k$ , см. рис 9. Построим в каждом треугольнике  $T_i$  абсолютно минимальное дерево  $S_i$ , затягивающее вершины  $T_i$ , и обозначим через  $S$  дерево, совпадающее с объединением  $\cup S_i$  деревьев  $S_i$ . Положим

$$x_i = \|M_{2i-1} M_{2i}\|, \quad \text{и} \quad y_i = \|M_{2i} M_{2i+1}\|.$$

Тогда имеет место следующая теорема, доказанная Ду, Хвангом и Венгом [16].

**Предложение 4 (Ду, Хванг, Венгом)** Если  $M$  — регулярный выпуклый нормальный зигзаг с углом  $\alpha$  (по отношению к некоторой фиксированной параметризации), то построенное выше дерево  $S$  является абсолютно минимальным деревом, затягивающим  $M$ . Его длина имеет вид:

$$\begin{aligned} &\sqrt{(\sum x_i)^2 + (\sum y_i)^2 - 2(\sum x_i)(\sum y_i) \cos(\pi/3 + \alpha)} && \text{при } \pi/3 \leq \alpha \leq 2\pi/3, \\ &\sum x_i + \sum y_i && \text{при } 2\pi/3 \leq \alpha \leq \pi. \end{aligned}$$

Из предложения 4 вытекает, что при  $\pi/3 \leq \alpha < 2\pi/3$  абсолютно минимальное дерево, затягивающее регулярный выпуклый зигзаг с углом  $\alpha$ , не совпадает с минимальным остовным деревом, а при  $2\pi/3 \leq \alpha \leq \pi$  уже совпадает.

**Точки на окружности**

Другой класс граничных множеств, для которого удается найти абсолютно минимальное дерево, это точки, расположенные на окружности достаточно плотно. Оказывается, в этом случае абсолютно минимальное дерево является минимальным остовным деревом для своих граничных точек.

Пусть  $M = \{M_i\}$  — конечное множество точек плоскости, лежащих на окружности единичного радиуса. Положим  $\rho = \sqrt{3}/2$ , и  $k = 1 - (1 - \rho)\pi/\rho = 0,51399\dots$ . Тогда имеет место следующая теорема, полученная Ду, Хвангом и Чао [15].

**Предложение 5 (Ду, Хванг, Чао)** *Если длины всех сторон многоугольника  $M$ , кроме, быть может, одной, меньше, чем  $k$ , то абсолютно минимальное дерево для множества  $M$  представляет собой объединение всех сторон этого многоугольника, за исключением самой длинной.*

Усиление этой теоремы получено в работе [37] Рубинштейна и Томаса. А именно, имеет место следующий результат.

**Предложение 6 (Рубинштейн, Томас)** *Пусть  $M = \{M_i\}$  — конечное множество точек плоскости, лежащих на окружности радиуса  $r$ . Если не более одной стороны многоугольника  $M$  имеет строго большую чем  $r$  длину, то абсолютно минимальное дерево для множества  $M$  представляет собой объединение всех сторон этого многоугольника, за исключением самой длинной.*

**Выпуклые многоугольники**

Следующий результат получен Томасом, Рубинштейном и Колом [41]. Авторы статьи [41] описывают некоторый класс выпуклых многоугольников, для которых абсолютно минимальная сеть совпадает с множеством сторон многоугольника, за исключением самой длинной.

Пусть теперь  $M = \{M_0, \dots, M_{n-1}\}$  — последовательные вершины некоторого строго выпуклого многоугольника. Для удобства будем предполагать, что индексы  $i$  в  $M_i$  являются элементами группы  $\mathbb{Z}_n$ . Для любых трех последовательных точек  $M_{i-1}$ ,  $M_i$  и  $M_{i+1}$  обозначим через  $r_i$  и  $O_i$  радиус и центр окружности, описанной вокруг треугольника  $M_{i-1}M_iM_{i+1}$ . Пусть  $r$  наименьшее из  $r_i$ . Число  $r$  называется *радиусом наибольшей кривизны*.

Мы говорим, что точки  $M_{i-1}$ ,  $M_i$ ,  $M_{i+1}$  и  $M_{i+2}$  *совместимы*, если  $O_i$  и  $O_{i+1}$  лежат с той же стороны от прямой  $(M_i, M_{i+1})$ , что и все остальные точки  $M_j$ .



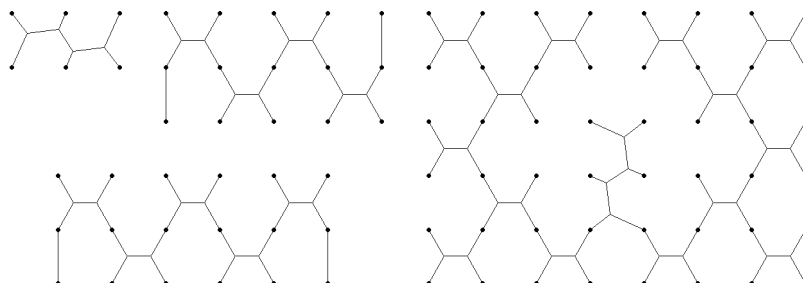


Рис. 10: Примеры абсолютно минимальных сетей, затагивающих вершины, лежащие на квадратной решетке

**Предложение 7 (Томас, Рубинштейн, Кол)** Пусть  $r$  — радиус наибольшей кривизны выпуклого многоугольника  $M$ , и все последовательные четверки точек из  $M$  совместимы. Если не более одной стороны многоугольника  $M$  длиннее чем  $r$ , то абсолютно минимальная сеть состоит из всех сторон многоугольника  $M$ , за исключением самой длинной.

### Вершины квадратной решетки

В работах [1]–[4] австралийской школы под руководством Рубинштейна выполнен цикл работ, описывающих различные свойства абсолютно минимальных сетей, затагивающих конечное множество  $M$  вершин стандартной квадратной решетки. Эти работы развивают результаты, полученные в [7] и [8], в первой из которых были исследованы абсолютно минимальные сети, затагивающие так называемые лестницы, т.е. все вершины с координатами  $(m, n)$ , где  $1 \leq m \leq M$ ,  $n = 1, 2$ , а во второй — высказана гипотеза о том, как устроены абсолютно минимальные деревья для решетки  $2^k \times 2^k$ , т.е. для решетки, составленной из всех вершин вида  $(m, n)$ , где  $1 \leq m \leq 2^k$  и  $1 \leq n \leq 2^k$ . Эта гипотеза была доказана в [2]. Так как результаты австралийской школы требуют для своей формулировки введения многих новых понятий, описывающих структуру абсолютно минимальных сетей, мы не будем приводить их здесь, а ограничимся сделанными ссылками и некоторыми примерами, приведенными на рис. 10.

## 3 Минимальные остовные деревья

Как мы уже отмечали, задача поиска абсолютно минимального дерева является  $NP$ -полной, поэтому большое практическое значение имеет построение приближенных решений. Один из самых распространенных способов состоит в построении минимального остовного дерева.

Рассмотрим все сети, затягивающие множество  $M$ , такие что каждая вершина сети принадлежит  $M$ . Сеть наименьшей длины среди этого семейства сетей называется *минимальным остовным деревом*. Ясно, что полученная сеть, вообще говоря, имеет большую длину, чем абсолютно минимальное дерево (например, если  $M$  — вершины правильного треугольника, то абсолютно минимальная сеть состоит из трех отрезков, соединяющих центр этого треугольника с его вершинами, а минимальное основное дерево состоит из двух сторон треугольника). Однако этот подход оказывается весьма эффективным по целому ряду причин. Во-первых, существуют быстрые алгоритмы построения минимальных остовных деревьев, во-вторых, длина минимального остовного дерева, оказывается, не может сильно отличаться от длины абсолютно минимального дерева (см. следующий параграф). В-третьих, минимальные остовные деревья интересны сами по себе, поскольку используются “при кластеризации, при вычислении характерной размерности множества точек, при распознавании образов, для минимизации длины проводников при компоновке электрической схемы ЭВМ” и т.д. (см. [34]).

Задача о поиске минимального остовного дерева легко сводится к задаче об остове минимального веса во взвешенном графе. В самом деле, пусть  $M$  — произвольное множество, состоящее из  $n$  точек плоскости. Построим линейную реализацию полного графа  $K_n$ , соединив каждую пару точек  $M_i$  и  $M_j$  из  $M$  отрезком. Превратим граф  $K_n$  во взвешенный, положив  $\omega(e_{ij}) = |M_i M_j|$ , где  $e_{ij}$  — ребро графа  $K_n$ , соединяющее вершины, соответствующие  $M_i$  и  $M_j$ . Очевидно, что остов минимального веса взвешенного графа  $(K_n, \omega)$  совпадает с минимальным остовным деревом, затягивающим множество  $M$ . Поэтому, для построения минимального остовного дерева можно использовать, например, полиномиальный алгоритм Краскала [29], который приведет к успеху за  $O(n^3)$  операций.

Заметим, однако, что при поиске остова минимального веса для произвольного полного взвешенного графа с  $n$  вершинами имеется  $n(n-1)/2$  входных данных (веса ребер), тогда как в случае поиска минимального остовного дерева достаточно задать координаты  $n$  точек на плоскости (граничных вершин). Это наводит на мысль, что можно построить более эффективный алгоритм поиска минимального остовного дерева, используя геометрию этой задачи. Такой алгоритм действительно существует. Оказывается, при поиске очередного ребра  $e_{i+1}$  минимального веса достаточно перебирать лишь ребра так называемой триангуляции Делоне (Шеймос, [39]) граничного множества, что позволяет существенно сократить число операций. А именно, с помощью триангуляции Делоне удастся построить алгоритм, строящий минимальное остовное дерево за  $O(n \lg n)$  операций.

### 3.1 Триангуляция Делоне и диаграмма Вороного

Для того, чтобы определить триангуляцию Делоне, удобно начать с так называемой диаграммы Вороного конечного множества точек плоскости. Пусть  $M \subset \mathbb{R}^2$  — такое множество. *Многоугольником Вороного точки  $M_i$  множества  $M$*  называется множество  $\text{Vor}(M_i)$ , состоящее из всех таких точек плоскости, расстояние до которых от точки  $M_i$  не больше, чем до любой другой точки множества  $M$ :

$$\text{Vor}(M_i) = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid |XM_i| \leq |XM_j|, j \neq i\}.$$

Ясно, что многоугольник Вороного точки  $M_i$  представляет собой пересечение замкнутых полуплоскостей  $\Pi_j$ ,  $j \neq i$ , где полуплоскость  $\Pi_j$  содержит точку  $M_i$  и ограничена серединным перпендикуляром к отрезку  $M_iM_j$ . Поэтому  $\text{Vor}(M_i)$  является выпуклым многоугольником (возможно, неограниченным).

Построив для каждой точки  $M_i$  из множества  $M$  ее многоугольник Вороного, мы получим разбиение плоскости в объединение выпуклых многоугольников, которое называется *диаграммой Вороного множества  $M$* . Вершины многоугольников  $\text{Vor}(M_i)$  называются *вершинами диаграммы Вороного*, а их ребра — *ребрами диаграммы Вороного*. Ясно, что каждое ребро диаграммы Вороного принадлежит ровно двум многоугольникам Вороного.

Приведем несколько важных свойств диаграммы Вороного. Чтобы упростить формулировки, мы будем предполагать, что множество  $M$  находится в общем положении в следующем смысле: *никакие четыре точки из  $M$  не лежат на одной окружности и никакие три точки из  $M$  не лежат на одной прямой*.

**Утверждение 10** *В сделанных предположениях, в каждой вершине диаграммы Вороного стыкуется ровно три ее ребра.*

Таким образом, каждая вершина  $V$  диаграммы Вороного множества  $M$  является центром окружности  $C(V)$ , на которой лежат ровно три точки из множества  $M$ .

**Утверждение 11** *Внутри круга, ограниченного окружностью  $C(V)$ , не содержится точек из множества  $M$ .*

Построим теперь плоский граф  $\mathcal{D}(M)$ , двойственный к диаграмме Вороного, взяв в качестве множества вершин графа  $\mathcal{D}(M)$  множество  $M$ . Пара вершин  $M_i$  и  $M_j$  графа  $\mathcal{D}(M)$  смежны и соединены отрезком  $M_iM_j$  — ребром графа  $\mathcal{D}(M)$ , тогда и только тогда, когда многоугольники Вороного  $\text{Vor}(M_i)$  и  $\text{Vor}(M_j)$  имеют общее ребро. Имеет место следующий важный результат, доказанный Делоне [9].

**Утверждение 12** *В сделанных предположениях, граф  $\mathcal{D}(M)$  является триангуляцией множества  $M$ .*

**Определение.** Граф  $\mathcal{D}(M)$  называется *триангуляцией Делоне множества  $M$* .

**Замечание.** Из сказанного выше вытекает, что триангуляция Делоне множества  $M$  обладает следующим свойством: внутри окружности, описанной вокруг произвольного треугольника триангуляции, нет точек из  $M$ . Оказывается, это свойство можно принять за определение триангуляции Делоне. Такое определение уже не требует предположения о том, что точки множества  $M$  находятся в общем положении. Ясно, как в этом случае получить триангуляцию Делоне из диаграммы Вороного. Если построить граф  $\mathcal{D}(M)$  для произвольного множества точек, то у него, вообще говоря, могут получиться ограниченные грани с числом вершин больше чем 3. Однако, очевидно, все вершины каждой такой грани расположены на некоторой окружности (с центром в соответствующей вершине диаграммы Вороного), внутри которой нет точек из множества  $M$ . Поэтому, чтобы завершить построение триангуляции в этом случае, достаточно дополнить граф  $\mathcal{D}(M)$  ребрами произвольных триангуляций диагоналями его нетрехугольных ограниченных граней.

Приведем теперь результат Шеймоса, связывающий триангуляции Делоне и минимальными остовными деревьями.

**Предложение 8** *Пусть  $M$  — произвольное конечное множество точек плоскости, и  $\Gamma$  — некоторое минимальное остовное дерево, затагивающее  $M$ . Тогда ребра  $\Gamma$  являются ребрами триангуляции Делоне  $\mathcal{D}(M)$  множества  $M$ .*

Итак, каждое минимальное остовное дерево, затагивающее конечное множество точек плоскости, является подграфом триангуляции Делоне этого множества. Мы не будем приводить здесь алгоритм, позволяющий быстро (а именно, за  $O(n \lg n)$  операций) построить триангуляцию Делоне множества  $M$ , состоящего из  $n$  точек плоскости. Этот алгоритм подробно изложен в [34]. Исходя из триангуляции Делоне, можно построить минимальное остовное дерево за  $n$  операций. Подводя итоги, сформулируем следующий результат Шеймоса [39].

**Предложение 9 (Шеймос)** *Минимальное остовное дерево, затагивающее множество, состоящее из  $n$  точек плоскости, может быть построено за оптимальное время порядка  $O(n \lg n)$  операций.*

## 4 Отношение Штейнера

В предыдущем разделе мы рассказали про то, как можно быстро построить приближение для абсолютно минимального дерева, т.е. минимальное остовное дерево. Однако мало научиться строить какое-то приближенное решение, не менее важно понять, насколько сильно построенное приближение отличается от точного решения. Пусть имеется некоторый алгоритм  $A$ , строящий для произвольного множества  $M$  точек плоскости некоторую сеть  $A(M)$ , затягивающую  $M$ , которую мы хотим рассматривать как приближенное решение задачи Штейнера. Обозначим через  $L_a(M)$  длину этой сети, а через  $L_s(M)$  — длину абсолютно минимального дерева для  $M$ . Тогда величину

$$\rho_a = \inf_M (L_s(M)/L_a(M)),$$

где нижняя грань берется по всевозможным конечным множествам  $M$  точек плоскости, естественно рассматривать как характеристику “хороше-сти” приближений, получаемых с помощью алгоритма  $A$ . Очевидно, что  $0 \leq \rho_a \leq 1$ . Алгоритм  $A$  тем лучше, чем ближе число  $\rho_a$  к 1. Поэтому вычисление  $\rho_a$  для конкретных приближений представляет собой важную, однако очень сложную задачу.

Если в качестве алгоритма  $A$  взять построение минимального остовного дерева, то соответствующее число  $\rho_a$  известно в литературе как *отношение Штейнера* и обычно обозначается просто через  $\rho$ . Иногда бывает удобно определить также отношение Штейнера  $\rho(n)$  для множеств  $M$ , состоящих из  $n$  точек плоскости.

В 1968 году Гилберт и Поллак [22] вычислили отношение Штейнера  $\rho(3)$  для множеств, состоящих из трех точек. А именно, они показали, что

$$\rho(3) = \inf_{M=\{A,B,C\} \subset \mathbb{R}^2} (L_s(M)/L_m(M)) = \sqrt{3}/2,$$

где через  $L_m(M)$  обозначена длина минимального остовного дерева, затягивающего множество  $M$ . Поэтому, очевидно,  $\rho \leq \rho(3) \leq \sqrt{3}/2$ . В той же работе Гилберт и Поллак выдвинули следующую гипотезу.

**Гипотеза 1 (Гилберт, Поллак)** *Отношение Штейнера  $\rho$  равно*

$$\sqrt{3}/2 = 0,8660254\dots$$

За доказательство этой гипотезы шла упорная борьба, длившаяся 24 года. Поллак [33] показал, что гипотеза справедлива для множеств  $M$ , состоящих из  $n = 4$  точек, Ду, Хванг и Яо [18] распространили этот результат на случай  $n = 5$ , а затем Рубинштейн и Томас [36] — на случай  $n = 6$ . С другой стороны предпринимались попытки получить оценки снизу на  $\rho$ . Гилберт и Поллак сообщают [22], что Моор установил справедливость неравенства  $0,5 \leq \rho$ . Затем оценка последовательно улучшалась так: Грэхем

и Хванг  $0,57 \leq \rho$ ; Чанг и Хванг  $0,74 \leq \rho$ ; Ду и Хванг  $0,8 \leq \rho$ ; Чанг и Грэхем  $0,824 \leq \rho$ . И наконец, когда стало ясно, что за сотые и тысячные доли можно бороться до бесконечности, Ду и Хванг в своих блестящих работах [13] и [14] получили доказательство гипотезы Гилберта–Поллака в общем случае. А именно, была доказана теорема.

**Предложение 10 (Ду, Хванг)** *Гипотеза Гилберта–Поллака верна, а именно  $\rho = \sqrt{3}/2$ .*

## 5 Краткое содержание диссертации

Опишем теперь структуру диссертации.

**В первой главе** формулируются основные определения и доказываются наиболее общие результаты о локально минимальных сетях, такие как теорема о локальной структуре локально минимальных сетей, свойство выпуклой оболочки граничного множества локально минимальной сети и т.д.

**Во второй главе** приводится классификация локально минимальных бинарных деревьев с выпуклой границей. Для этого вводится понятие *числа вращения плоского бинарного дерева*, описывающего “степень закрученности” таких деревьев, и доказывается теорема о том, что у локально минимальных бинарных деревьев с выпуклой границей число вращения не превосходит 5. Далее, плоские бинарные деревья изучаются на двойственном языке диагональных триангуляций, важным частным случаем которых являются *паркет*, т.е. диагональные триангуляции, составленные из правильных треугольников. Паркеты оказываются чрезвычайно удобными для описания локально минимальных бинарных деревьев с выпуклыми границами в силу того, что они одновременно “хорошо чувствуют” как экстремальность соответствующих им сетей, так и выпуклость границы этих сетей, и, более того, много различных дополнительных ограничений на границу, таких как, скажем, правильность или квазиправильность граничного множества. Использование диагональных триангуляций позволяет более естественным образом описывать глобальную структуру плоских бинарных деревьев, в частности, определить важное разбиение диагональной триангуляции на *скелет* и *наросты*. Это разбиение оказывается очень полезным в нашем случае, так как скелеты, имеющие *выпуклую минимальную реализацию* (двойственные сети этих скелетов планарно эквивалентны локально минимальным бинарным деревьям с выпуклыми границами), устроены достаточно регулярным образом и могут быть легко описаны. Наросты, в отличие от скелетов, можно рассматривать как “случайные элементы”, чем и объясняется введенная терминология. Отметим, что классификационная теорема состоит из двух частей: сначала мы описываем все скелеты, двойственные сети которых имеют число вращения,

не превосходящее  $5$ , а затем то, как к таким скелетам можно прикреплять наросты, чтобы двойственные сети полученных в результате диагональных триангуляций по-прежнему имели число вращения, не превосходящее  $5$ . В заключение второй главы мы доказываем теорему реализации: каждая диагональная триангуляция, двойственная сеть которой имеет не превосходящее  $5$  число вращения, имеет выпуклую минимальную реализацию. При этом приводимое доказательство конструктивно, а именно, оно описывает алгоритм, позволяющий по данному паркету с не превосходящим  $5$  числом вращения явно построить некоторое локально минимальное бинарное дерево с выпуклой границей.

**В третьей главе** рассматриваются вопросы *правильной минимальной реализации*: двойственные сети каких из найденных во второй главе паркетов планарно эквивалентны минимальным бинарным деревьям, натягивающим вершины правильных  $n$ -угольников. Развивая результаты второй главы, мы приводим полную классификацию скелетов, имеющих правильную минимальную реализацию. Неожиданным является тот факт, что существует две бесконечные по  $n$  серии таких скелетов, и одна конечная.

**В четвертой главе** теория паркетов, имеющих выпуклую минимальную реализацию, находит свое дальнейшее развитие. Приводится большое количество оценок, описывающих различные геометрические характеристики таких паркетов исходя из свойств соответствующих граничных множеств.

**В пятой главе** технические результаты четвертой главы применяются к так называемым *квазиправильным многоугольникам* (неформально, многоугольникам, близким к правильным). Строится бесконечная по  $n$  серия квазиправильных  $n$ -угольников, каждый из которых не может быть натянут ни одним локально минимальным бинарным деревом. Интересно отметить, что для компьютерного подтверждения доказанной теоремы даже в случае наименьшего  $n$ , равного  $80$ , необходимо проверить столь большое число вариантов, что ни один современный компьютер не в состоянии справиться с этой проблемой.

**В шестой главе** вновь используются технические результаты четвертой главы и доказываются теоремы, описывающие новые ограничения на паркеты общего вида, обладающие правильной минимальной реализацией.

**В седьмой главе** мы переносим технику паркетов на случай триангуляций более общего вида, двойственные сети которых соответствуют невырожденным сетям Штейнера, т.е. сетям, степени вершин которых могут равняться только  $1$  и  $3$  (теперь сети могут иметь циклы). Для этого мы определяем *паркет* как триангуляцию некоторого многоугольника, все треугольники которой — правильные. В отличие от определения, данного выше, теперь паркеты могут иметь внутренние вершины. (В действительности, паркеты, являющиеся диагональными триангуляциями, в диссертации называются *деревянными* в силу того, что двойственные сети таких триангуляций — деревья.)

Далее, мы вводим понятие *фундаментального цикла* и показываем, что если невырожденная сеть Штейнера имеет выпуклую минимальную реализацию, то каждый ее фундаментальный цикл состоит из шести ребер и внутри его нет других вершин сети. Невырожденные сети Штейнера, у которых фундаментальные циклы устроены таким образом, мы называем *тривиальными*.

Оказывается, для тривиальных сетей  $\Gamma$  можно естественно определить *число вращения* и показать, что если  $\Gamma$  имеет выпуклую минимальную реализацию, то ее число вращения не превосходит 5. Используя этот факт, мы доказываем, что каждая невырожденная сеть Штейнера планарно эквивалентна двойственной сети некоторого паркета. Таким образом, мы сводим задачу описания локально минимальных невырожденных сетей Штейнера с выпуклыми границами к описанию всех паркетов с числом вращения, не превосходящим 5.

## 6 Основные результаты диссертации

Приведем основные определения и результаты диссертации.

### 1) Получена полная классификация локально минимальных бинарных деревьев с выпуклой границей.

Хотя в диссертации приводится классификация в терминах диагональных триангуляций специального вида, а именно, триангуляций, у которых все треугольники правильные (мы называем такие триангуляции паркетами), здесь мы сформулируем основную теорему непосредственно на языке графов, без использования триангуляций. Это делается для того, чтобы было более понятно, какими объектами из теории графов мы пользуемся в наших построениях.

Чтобы не загромождать описание, мы сразу будем предполагать, что все рассматриваемые бинарные деревья содержат не менее трех вершин степени 3. Отметим, что каждое плоское бинарное дерево, имеющее меньше трех вершин степени 3, планарно эквивалентно некоторому локально минимальному дереву с выпуклой границей, в качестве которого можно взять, например, очевидные абсолютно минимальные деревья, затягивающие вершины правильных  $n$ -угольников для  $n \leq 4$ .

Пусть  $\Gamma$  — плоское бинарное дерево,  $(a, b)$  — некоторая (упорядоченная) пара его ребер, и  $\gamma$  — единственный путь в  $\Gamma$ , соединяющий эти ребра. Ориентируем путь  $\gamma$  от  $a$  к  $b$ , и пусть  $P$  — произвольная вершина степени 3 дерева  $\Gamma$ , лежащая внутри  $\gamma$ , т.е. не совпадающая ни с одной из его концевых вершин. Выберем круговую окрестность  $U$  вершины  $P$ , такую что  $U \cap \Gamma$  является деревом, не содержащим вершин из  $\Gamma$ , отличных от  $P$ . Тогда пересечение  $\partial U \cap \Gamma$  состоит из трех точек, которые мы обозначим через  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Пусть  $a_1$  — первое, и  $a_2$  — последнее ребро из  $\gamma$ , инцидентное  $P$ , и пусть  $A_i \in a_i$ ,  $i = 1, 2$ . Рассмотрим дугу  $\delta$  окружности  $\partial U$ , лежащую



между  $A_1$  и  $A_2$  и не содержащую  $A_3$ .

**Определение.** Если движение по дуге  $\delta$  от  $A_2$  к  $A_1$  происходит по часовой стрелке, то будем говорить, что мы *поворачиваем направо в точке  $P$* , и припишем  $P$  число  $-1$ . В противном случае, скажем, что мы *поворачиваем налево в точке  $P$*  и припишем  $P$  число  $+1$ . Число, приписанное вершине  $P$ , называется *твистингом вершины  $P$  ориентированного пути  $\gamma$* . Числом вращения  $\text{tw}(a, b)$  упорядоченной пары  $(a, b)$  ребер плоского бинарного дерева  $\Gamma$  называется сумма твистингов во всех внутренних вершинах пути  $\gamma$ . Положим, по определению,  $\text{tw}(a, a) = 0$ .

**Определение.** Числом вращения  $\text{tw} \Gamma$  плоского бинарного дерева  $\Gamma$  называется максимум чисел вращения  $\text{tw}(a, b)$ , взятый по всевозможным упорядоченным парам ребер из  $\Gamma$ .

Будем говорить, что плоское бинарное дерево  $\Gamma$  имеет *выпуклую минимальную реализацию*, если  $\Gamma$  планарно эквивалентно некоторому локально минимальному дереву, затягивающему вершины выпуклого многоугольника.

**Предложение 11** *Плоское бинарное дерево  $\Gamma$  имеет выпуклую минимальную реализацию тогда и только тогда, когда  $\text{tw} \Gamma \leq 5$ .*

Пусть  $\Gamma$  — произвольное бинарное дерево. Вершины дерева  $\Gamma$ , степень которых равна 1, будем называть *граничными*, а все остальные, т.е. вершины степени 3 — *внутренними*. Ребра, инцидентные граничным вершинам, также назовем *граничными*, а все остальные ребра назовем *внутренними*.

Разобьем вершины дерева  $\Gamma$  на три уровня. К *нулевому уровню* отнесем все граничные вершины. К *первому уровню* отнесем все неграничные вершины, смежные с граничными вершинами. Ко *второму уровню* отнесем все остальные вершины.

Пару  $(e_1, e_2)$  смежных граничных ребер назовем *усами*, а общую вершину ребер  $e_i$  назовем *основанием* этих усов. Пусть  $(e_1, e_2)$  — усы, и  $v$  — их основание. Если  $v$  смежна с вершиной второго уровня, то усы  $(e_1, e_2)$  назовем *наростом*. Бинарное дерево без наростов назовем *скелетом*.

Определим теперь *разложение бинарного дерева  $\Gamma$*  на скелет и наросты (это разложение, вообще говоря, не однозначно). Рассмотрим все вершины  $v$  дерева  $\Gamma$ , лежащие на втором уровне и смежные с основаниями некоторых усов. Для каждой такой вершины  $v$  выберем ровно одни любые усы, основание которых смежно с  $v$ , иотрежем их от дерева  $\Gamma$ . Легко показать, что полученное бинарное дерево  $S$  не содержит наростов и, значит, является скелетом. Тем самым, мы построили разложение бинарного дерева  $\Gamma$  на скелет  $S$  и наросты  $\{\Delta_i\}$ . Это разложение определено неоднозначно если имеется вершина  $v$  второго уровня, смежная более чем с одним основанием

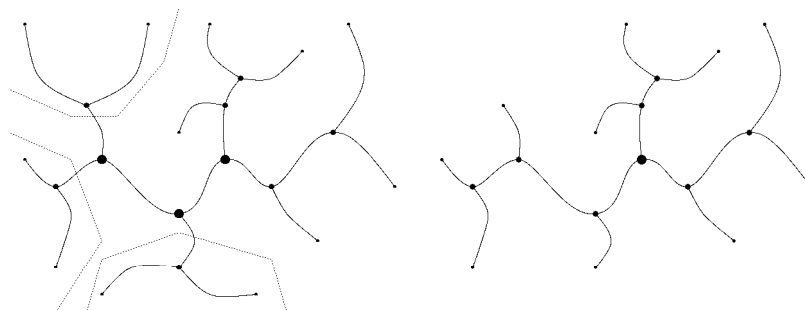


Рис. 11: Бинарное дерево с наростами, разбиение его вершин на уровни и скелет этого дерева для одного из разложений на скелет и наросты

усов. Скелет  $S$  построенного разложения назовем *скелетом бинарного дерева*  $\Gamma$ , рис. 11.

Пусть теперь  $S$  — бинарное дерево, являющееся скелетом. Выкинем из  $S$  все граничные ребра. Полученное поддерево в  $S$  назовем *осью скелета*  $S$  и обозначим через  $A(S)$ . Таким образом, ось  $A(S)$  скелета  $S$  является остовом, натянутым на вершины 1-ого и 2-ого уровня.

Пусть  $S$  — скелет, и  $A(S)$  — его ось. Вершины из  $A(S)$  степени 1 назовем *концевыми вершинами оси*  $A(S)$ , а вершины из  $A(S)$  степени 3 назовем *вершинами ветвления скелета*  $S$ . Легко видеть, что вершина из  $S$  является вершиной ветвления если и только если она относится ко 2-ому уровню.

Связные компоненты остова скелета  $S$ , натянутого на вершины второго уровня, назовем *узлами ветвления скелета*  $S$ , а замыкания связных компонент оси  $A(S)$  скелета  $S$ , из которой выброшены все узлы ветвления, назовем *линейными участками скелета*  $S$ . Линейный участок, содержащий концевую вершину оси  $A(S)$  скелета  $S$ , называется *концевым*, а не содержащий — *промежуточным*. Таким образом, мы разложили скелет  $S$  на граничные ребра и ось  $A(S)$ , которая, в свою очередь, разлагается на линейные участки и узлы ветвления. Эти объекты будем называть *структурными элементами скелета*  $S$ .

Если  $\Gamma$  — произвольное бинарное дерево, то каждый структурный элемент его скелета (для некоторого разложения) будем называть соответствующим *структурным элементом дерева*  $\Gamma$ . Кроме того, к *структурным элементам дерева*  $\Gamma$  отнесем его наросты. Таким образом, мы разложили каждое бинарное дерево на наросты, граничные ребра скелета, узлы ветвления и линейные участки. Ось скелета дерева  $\Gamma$  будем называть *осью бинарного дерева*  $\Gamma$  и обозначать через  $A(\Gamma)$ .

Пусть  $H \subset \Gamma$  — поддерево плоского бинарного дерева (вообще говоря, дерево  $H$  не обязано быть бинарным). Определим *число вращения*  $tw H$  поддерева  $H$  как максимум чисел вращения  $tw(a, b)$  по всем упорядоченным

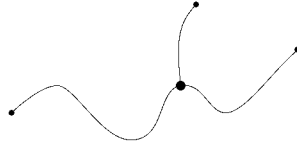


Рис. 12: Ось скелета, его узлы ветвления и линейные участки. В данном примере имеется три линейных участка и один узел ветвления, совпадающий с вершиной ветвления

парам ребер из  $H$ , где число вращения  $\text{tw}(a, b)$  вычисляется в объемлющем плоском бинарном дереве  $\Gamma$ .

**Предложение 12** Пусть  $\Gamma$  — плоское бинарное дерево, такое что  $\text{tw } \Gamma \leq 5$ . Тогда каждый узел ветвления в  $\Gamma$  является поддеревом, содержащим не более 3 ребер и таким, что его число вращения не превосходит 1. В частности, имеется ровно пять типов возможных узлов ветвления.

Напомним, что мы рассматриваем лишь те бинарные деревья, у которых имеется не менее трех внутренних вершин.

**Предложение 13** Пусть  $\Gamma$  — плоское бинарное дерево, такое что  $\text{tw } \Gamma \leq 5$ . Тогда каждый линейный участок  $L$  в  $\Gamma$  является путем в  $\Gamma$ , состоящим не менее чем из двух ребер. Число вращения пути  $L$  не превосходит 3.

По предложению 13, число вращения  $\text{tw } L$  каждого линейного участка  $L$  в плоском бинарном дереве  $\Gamma$ , таком что  $\text{tw } \Gamma \leq 5$ , лежит в пределах от 1 до 3. Разобьем все линейные участки таких деревьев  $\Gamma$  на три класса, в зависимости от числа вращения  $\text{tw } L$ . Если  $\text{tw } L = 1$ , то  $L$  называется змеей, если  $\text{tw } L = 2$ , то  $L$  — лестница, и, наконец, если  $\text{tw } L = 3$ , то  $L$  — ломаная змея.

Опишем более детально структуру линейных участков. Для этого введем следующее понятие. Путь  $\gamma$  в плоском бинарном дереве  $\Gamma$  называется сетевой геодезической, если его число вращения не превосходит 1. Разобьем линейный участок  $L$  скелета  $\Gamma$  на последовательные максимальные сетевые геодезические  $L_1, \dots, L_k$ . Из предложения 13 вытекает, что каждая  $L_i$  содержит не менее двух ребер. Кроме того, ясно, что пара последовательных  $L_i$  пересекается ровно по одному ребру. Пусть  $e$  — ребро пересечения сетевых геодезических  $L_i$  и  $L_{i+1}$ . Обозначим через  $e_i$  и  $e_{i+1}$  соответственно отличные от  $e$  ребра из  $L_i$  и  $L_{i+1}$ , смежные с  $e$ . Ясно, что  $\text{tw}(e_i, e) = \text{tw}(e, e_{i+1})$ .

Числом вращения  $\text{tw}(L_i, L_{i+1})$  упорядоченной пары последовательных максимальных сетевых геодезических из  $L$  называется число вращения

$$\text{tw}(e_i, e) = \text{tw}(e, e_{i+1}).$$

Определим число вращения  $\text{tw}(L_i, L_j)$  упорядоченной пары произвольных максимальных сетевых геодезических из  $L$ , таких что  $j > i$ , как следующую сумму:

$$\text{tw}(L_i, L_j) = \text{tw}(L_i, L_{i+1}) + \dots + \text{tw}(L_{j-1}, L_j).$$

Положим, по определению,  $\text{tw}(L_i, L_i) = 0$  и  $\text{tw}(L_j, L_i) = -\text{tw}(L_i, L_j)$ .

**Следствие 2** Пусть  $\Gamma$  — плоское бинарное дерево,  $\text{tw} \Gamma \leq 5$ , и  $L$  — линейный участок из  $\Gamma$ . Пусть  $L_i$  и  $L_j$  — две произвольные максимальные сетевые геодезические из  $L$ . Тогда  $|\text{tw}(L_i, L_j)| \leq 2$ .

Отметим, что если линейный участок  $L$  является змеей, то он состоит ровно из одной максимальной сетевой геодезической. В силу сделанного замечания, а также для краткости, максимальные сетевые геодезические мы будем также называть *максимальными змеями*.

Две максимальных змей  $L_i$  и  $L_j$  из линейного участка  $L$  назовем *параллельными*, если  $\text{tw}(L_i, L_j) = 0$ . Ясно, что определенное только что отношение параллельности на максимальных змеях  $L_i$  является отношением эквивалентности, поэтому мы построили разбиение всех максимальных змей  $L_i$  на *классы параллельности*.

**Предложение 14** Если  $\Gamma$  — плоское бинарное дерево, причем  $\text{tw} \Gamma \leq 5$ , и  $L$  — произвольный линейный участок из  $\Gamma$ , то  $L$  является змеей, лестницей или ломаной змеей тогда и только тогда, когда максимальные змеи из  $L$  разбиваются на 1, 2 или 3 класса параллельности соответственно.

Рассмотрим теперь два произвольных линейных участка  $L'$  и  $L''$  из плоского бинарного дерева  $\Gamma$ , и пусть  $\gamma$  — единственный путь в графе  $A(\Gamma)$ , соединяющий  $L'$  с  $L''$ . Так же, как и выше, разобьем путь  $\gamma$  на максимальные змеи  $\gamma_i$ . Ясно, что для каждой максимальной змеи из  $L'$  или из  $L''$  существует единственная змея  $\gamma_i$ , ее содержащая. Снова, по аналогии с тем, как это было сделано выше, определим число вращения  $\text{tw}(\gamma_i, \gamma_j)$  упорядоченной пары  $(\gamma_i, \gamma_j)$ .

Пусть  $L'_i$  — максимальная змея из  $L'$ ,  $L''_j$  — максимальная змея из  $L''$ , и максимальные змеи  $\gamma'$  и  $\gamma''$  из  $\gamma$  таковы, что  $L'_i \subset \gamma'$ , а  $L''_j \subset \gamma''$ . Положим по определению  $\text{tw}(L'_i, L''_j) = \text{tw}(\gamma', \gamma'')$ .

**Предложение 15** Пусть  $\Gamma$  — плоское бинарное дерево, такое что  $\text{tw} \Gamma \leq 5$ , а  $L'$  и  $L''$  — два линейных участка из  $\Gamma$ . Пусть  $L'_i$  и  $L''_j$  — две произвольные максимальные змеи из  $L'$  и  $L''$  соответственно. Тогда  $|\text{tw}(L'_i, L''_j)| \leq 2$ .

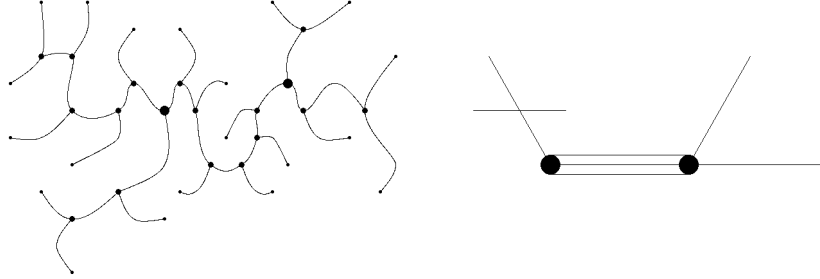


Рис. 13: Пример скелета и соответствующей ему схемы

Рассмотрим на плоскости  $\mathbb{R}^2$  три прямые  $l_1, l_2$  и  $l_3$ , проходящие через начало координат и разбивающие плоскость  $\mathbb{R}^2$  на шесть конгруэнтных углов величины  $\pi/3$ . Пусть  $S$  — плоское бинарное дерево, являющееся скелетом, и  $\text{tw } S \leq 5$ . Выберем в  $S$  произвольный линейный участок  $L$ , а в  $L$  — произвольную максимальную змею  $L_i$ . Поставим в соответствие змее  $L_i$  прямую  $l_1$ . Пусть  $L'_j$  — максимальная змея из другого линейного участка  $L'$  (возможно, совпадающего с  $L$ ). Обозначим через  $k$  число вращения  $\text{tw}(L_i, L'_j)$ . Тогда поставим в соответствие максимальной змее  $L'_j$  прямую  $l_p$ , полученную из  $l_1$  поворотом вокруг начала координат на угол  $k\pi/3$ . Эту прямую назовем  $\mathbb{R}$ -направляющей максимальной змеи  $L'_j$ . Отметим, что если  $L'$  — змея, то  $L'$  совпадает с единственной максимальной змеей, содержащейся в нем, и поэтому максимальные змеи из такого  $L'$  имеют одну  $\mathbb{R}$ -направляющую. Если же  $L'$  — лестница, то максимальные змеи из  $L'$  имеют две  $\mathbb{R}$ -направляющих. И, наконец, максимальные змеи из  $L'$ , являющегося ломаной змеей, имеют три  $\mathbb{R}$ -направляющих.

Построим теперь *схему скелета*  $S$  следующим образом. Пусть  $L$  — произвольный линейный участок из  $S$ . Если  $L$  — змея, то будем его схематично изображать отрезком, параллельным  $\mathbb{R}$ -направляющей единственной максимальной змее, содержащейся в  $L$  и совпадающей с  $L$ . Если  $L$  — лестница, то будем изображать  $L$  двумя пересекающимися по внутренней точке отрезками, параллельными  $\mathbb{R}$ -направляющим максимальных змей из  $L$ . Если же  $L$  — ломаная змея, то, очевидно, в  $L$  имеется такая максимальная змея  $L_i$ , что для любой другой максимальной змеи  $L_j$  из  $L$  выполняется  $|\text{tw}(L_i, L_j)| \leq 1$ . Будем обозначать такой  $L$  тремя отрезками, параллельными  $\mathbb{R}$ -направляющей максимальной змее  $L_i$ . Узлы ветвления будем обозначать кружочками. На рис. 13 приведен пример скелета  $S$  и соответствующей ему схемы.

Чтобы сформулировать теорему, классифицирующую все скелеты  $S$ , такие что  $\text{tw } S \leq 5$ , нам осталось определить редукцию плоских бинарных деревьев. В нашем случае редукции бывают I-ого и II-ого типов.

Пусть  $\Gamma$  — плоское бинарное дерево. Разрежем дерево  $\Gamma$  по произволь-

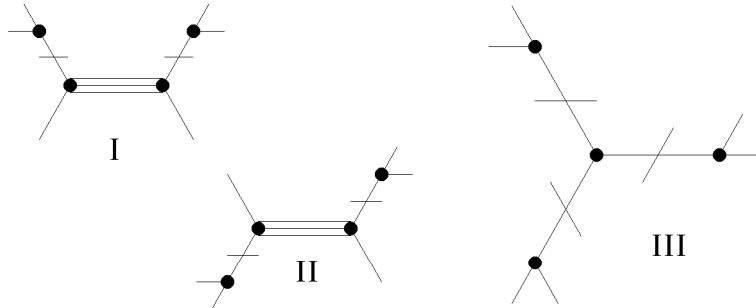


Рис. 14: Схемы классифицирующих скелетов

ному неграничному ребру и выкинем одну из двух полученных компонент. Будем говорить, что полученное плоское бинарное дерево является результатом *редукции I-ого типа*.

Чтобы определить редукцию II-ого типа, рассмотрим в плоском бинарном дереве  $\Gamma$  два неграничных ребра  $a$  и  $b$ , таких что  $\text{tw}(a, b) = 0$ , и разрежем дерево  $\Gamma$  по этим ребрам. Выкинем из  $\Gamma$  ту компоненту, которая пересекается с двумя оставшимися. Обозначим через  $a'$  и  $b'$  граничные ребра из оставшихся компонент  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$ , содержащиеся в  $a$  и  $b$  соответственно. Склеим компоненты  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$ , соединив граничные вершины ребер  $a'$  и  $b'$  кривой  $\gamma$  так, чтобы в результате получилось плоское бинарное дерево  $\bar{\Gamma}$ . Будем говорить, что плоское бинарное дерево  $\bar{\Gamma}$  является результатом *редукции II-ого типа*.

Легко видеть, что описанные два типа редукции не увеличивают числа вращения исходного дерева  $\Gamma$ .

**Теорема 1** Каждое плоское бинарное дерево  $S$ , являющееся скелетом, таким что  $\text{tw } S \leq 5$ , быть получено кратным применением редукции к некоторому скелету  $\bar{S}$ ,  $\text{tw } \bar{S} \leq 5$ , относящемуся к одному из трех канонических типов, схемы которых приведены на рис. 14.

**Следствие 3** Каждый скелет  $S$ , такой что  $\text{tw } S \leq 5$ , содержит не более 6 усов, и, значит, не более 6 концевых линейных участков, не более 3 промежуточных линейных участков, и не более 4 вершин ветвления (а, значит, не более 4 узлов ветвления).

Переформулируем теперь приведенную только что теорему в терминах паркетов. С нашей точки зрения, это полезно сделать, чтобы продемонстрировать, насколько язык паркетов делает наши результаты наглядней.

Напомним, что плоские бинарные деревья можно описывать на двойственном языке, а именно с помощью триангуляций диагоналями плоских

многоугольников: по каждой диагональной триангуляции  $T$  многоугольника  $W$  можно построить плоское бинарное дерево  $\Gamma_T$ , называемое *двойственной сетью* этой триангуляции, и обратно, по каждому плоскому бинарному дереву  $\Gamma$  можно построить некоторую диагональную триангуляцию  $T$ , такую что двойственная сеть  $\Gamma_T$  этой триангуляции планарно эквивалентна  $\Gamma$ . Треугольники таких триангуляций будем называть *ячейками*.

Если двойственная сеть диагональной триангуляции  $T$  обладает некоторым свойством, то мы, в дальнейшем, будем говорить, что сама триангуляция  $T$  обладает этим свойством. Так, например, совокупность ячеек из  $T$  называется *связной*, если пересечение двойственной сети  $\Gamma_T$  с этими ячейками связно. Или, скажем, число вращения сети  $\Gamma_T$  будем называть *числом вращения триангуляции  $T$* . Также, будем говорить, что диагональная триангуляция  $T$  имеет *выпуклую минимальную реализацию*, если ее двойственная сеть  $\Gamma_T$  планарно эквивалентна некоторому локально минимальному бинарному дереву с выпуклой границей. Из предложения 11 вытекает, что для описания всех локально минимальных бинарных деревьев с выпуклой границей достаточно расклассифицировать все диагональные триангуляции с числом вращения, не превосходящим 5. Множество всех таких триангуляций будем обозначать через  $\mathcal{WP}_5^*$ .

Пусть  $T$  — произвольная триангуляция диагоналями многоугольника  $W$ , и  $\Delta$  — любая ячейка. Назовем  $\Delta$  *крайней ячейкой*, если по меньшей мере две ее стороны являются сторонами  $W$ . Ячейка  $\Delta$  называется *внутренней*, если ни одна из ее сторон не есть сторона из  $W$ . Если две ячейки пересекаются по стороне, то мы называем их *смежными* и говорим, что одна из них *примыкает* ко второй. Крайняя ячейка, примыкающая к внутренней, называется *наростом*, а триангуляция  $T$  без наростов называется *скелетом*. Если для каждой внутренней ячейки триангуляции  $T$  из всех примыкающих к ней наростов (если они есть) выбросить ровно один, то, как легко проверить, полученная триангуляция  $T'$  уже не будет содержать наростов, т.е.  $T'$  является скелетом, который называется *скелетом триангуляции  $T$* . Таким образом, мы построили, вообще говоря, неоднозначное *разложение триангуляции  $T$  на скелет и наросты*. Эта неоднозначность возникает при наличии *концевых наростов* — пары наростов, примыкающих к одной и той же внутренней ячейке.

Оказывается, для триангуляций из  $\mathcal{WP}_5^*$  скелеты устроены достаточно просто. Наша классификация состоит из двух частей: сначала описываются все скелеты из  $\mathcal{WP}_5^*$ , а затем то, как можно к ним прикреплять наросты, не выходя при этом из класса  $\mathcal{WP}_5^*$ . Мы приведем здесь лишь описание скелетов из  $\mathcal{WP}_5^*$ . Первый шаг в описании скелетов — это разложение их на линейные участки и узлы ветвления.

Пусть  $S$  — произвольный скелет (не обязательно из  $\mathcal{WP}_5^*$ ). Связные компоненты множества внутренних ячеек скелета  $S$  называются *узлами ветвления*, а связные компоненты скелета  $S$ , из которого выброшены все внутренние ячейки, называются *линейными участками*. Линейный уча-

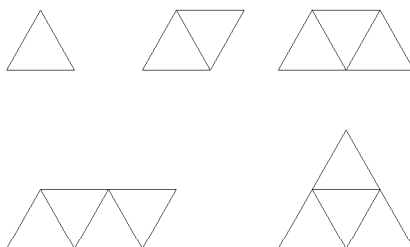


Рис. 15: Узлы ветвления скелетов из  $WP_5$

сток, содержащий крайнюю ячейку, называется *концевым*, а не содержащий — *промежуточным*. Если скелет  $S$  содержит  $k$  концевых линейных участков, то  $S$  будем называть  *$k$ -скелетом*.

Построенное разбиение скелета  $S$  позволяет определить *код* этого скелета как плоский граф, вершины которого соответствуют крайним и внутренним ячейкам из  $S$ , а ребра — линейным участкам и внутренним ребрам скелета  $S$ , по которым пересекаются смежные внутренние ячейки. Как будет показано ниже, код скелета из  $WP_5$  устроен достаточно просто.

Следующее предложение полностью описывает все возможные узлы ветвления скелетов из  $WP_5$ .

**Предложение 16** *Узлы ветвления скелетов из  $WP_5$  могут быть ровно 5 типов, приведенных на рис. 15.*

Опишем теперь линейные участки скелетов из  $WP_5$ . Чтобы это описание было наглядным, оказывается полезным рассматривать диагональные триангуляции специального вида, а именно, так называемые *паркет*.

Диагональная триангуляция, все ячейки которой — правильные (конгруэнтные) треугольники, называется *паркетом*. Следующее предложение показывает, что при изучении локально минимальных бинарных деревьев с выпуклой границей можно ограничиться паркетами.

**Предложение 17** *Каждое плоское бинарное дерево, число вращения которого не превосходит 5, планарно эквивалентно двойственной сети некоторого паркета.*

Итак, в дальнейшем всегда будем предполагать, что рассматриваемые диагональные триангуляции являются паркетами. Кроме того, для паркетов двойственную сеть удобно выбрать специальным образом: в качестве вершин такой двойственной сети возьмем центры ячеек и середины граничных сторон, а все ребра будем считать отрезками, соединяющими соответствующие вершины. Именно такие бинарные деревья мы и будем



иметь в виду, говоря о двойственных сетях паркетов. Отметим, что двойственная сеть каждого паркета является локально минимальным бинарным деревом с границей, состоящей из всех вершин степени 1.

Пусть  $S$  — скелет, и  $L$  — его линейный участок. Сейчас мы определим ось линейного участка  $L$ , что позволит нам полностью описать линейные участки скелетов из  $\mathcal{WP}_5$ .

Если  $S$  состоит из одной ячейки, то проведем в этой ячейке произвольную среднюю линию. Если  $S$  состоит из двух ячеек, то проведем в них параллельные средние линии, пересекающиеся с единственным внутренним ребром скелета  $S$ , одним из двух возможных способов. Пусть теперь  $S$  состоит по крайней мере из трех ячеек. Проведем во всех некрайних ячейках скелета  $S$  их средние линии, соединяющие внутренние стороны этих ячеек. В крайних ячейках проведем средние линии, параллельные уже построенным в смежных ячейках. На объединении всех проведенных средних линий введем структуру графа, объявив ребрами максимальные связанные прямолинейные совокупности этих линий из не внутренних ячеек, а также все линии из внутренних ячеек. Полученный плоский граф называется *осью скелета  $S$* .<sup>1</sup> Далее, пересечение оси скелета  $S$  с каждым его линейным участком  $L$  называется *осью линейного участка  $L$* .

Следующее предложение описывает все линейные участки скелетов из  $\mathcal{WP}_5$ .

**Предложение 18** *Ось каждого линейного участка  $L$  скелета из  $\mathcal{WP}_5$  однозначно проектируется на прямую, параллельную некоторой стороне произвольной ячейки.*

Прямая из предложения 18 называется *направляющей линейного участка  $L$* . Отметим, что, с точностью до параллельности, существует ровно три прямые, каждая из которых параллельна какой-нибудь стороне произвольной ячейки. В дальнейшем, говоря о направляющих, будем отождествлять параллельные прямые, поэтому, например, имеет смысл говорить, что линейный участок обладает одной направляющей (т.е. все направляющие линейного участка параллельны). Принимая во внимание сделанные замечания и соглашение, отметим, что существует не более трех направляющих. Если линейный участок обладает тремя направляющими, то он называется *змеей*, если двумя — то *лестницей*, и, наконец, если одной — то *ломаной змеей*, см. рис. 16. Таким образом, описаны основные *структурные элементы* паркетов из  $\mathcal{WP}_5$ : наросты, узлы ветвления и линейные участки.

Опишем, как эти элементы крепятся друг к другу. Оказывается, каждый скелет из  $\mathcal{WP}_5$  можно получить из скелетов специального канониче-

<sup>1</sup>В поисках более удачной терминологии, мы изменили название описанного только что плоского графа: в основных работах автора этот граф называется *позвоночником*.

Рис. 16: Линейные участки скелетов из  $\mathcal{WP}_5^2$ 

ского вида, выбрасывая из последних некоторое количество ячеек. Операция “выбрасывания” называется *редукцией*. Различаются редукции I-ого и II-ого типа. Пусть  $D$  — некоторый паркет. Редукция I-ого типа состоит в разрезании паркета  $D$  вдоль внутреннего ребра некоторой ячейки и отбрасывания одной из двух компонент. Ясно, что редукция I-ого типа переводит паркет  $D$  в некоторый паркет, число вращения которого не больше числа вращения паркета  $D$ . Чтобы описать редукцию II-ого типа, напомним, что каждое ребро двойственной сети, соединяющее вершины степени три, пересекает ровно одно внутреннее ребро некоторой ячейки паркета. Это задает соответствие между такими ребрами двойственной сети и внутренними ребрами паркета. Итак, редукция II-ого типа состоит в следующем: выберем два внутренних ребра паркета  $D$ , таких что число вращения между соответствующими им ребрами двойственной сети равно нулю; разрежем паркет  $D$  вдоль этих ребер; выбросим ту из трех образованных компонент, которая пересекается с обоими оставшимися компонентами; с помощью параллельного переноса склеим оставшиеся две компоненты по ребрам разреза. Можно показать, что если  $D \in \mathcal{WP}_5^2$ , то описанная операция корректно определена (т.е. после сдвига полученные два паркета пересекаются только по ребрам разреза), и результирующий паркет имеет число вращения, не большее чем у  $D$ , в частности, он по-прежнему принадлежит  $\mathcal{WP}_5^2$ .

Выше мы построили код скелета  $S$ , являющийся плоским графом и описывающий топологию скелета  $S$ . Однако код не отражает геометрических особенностей скелета  $S$ , таких как, скажем, взаимного расположения направляющих линейных участков, входящих в  $S$ . Поэтому для описания геометрии скелетов построим *схему скелета*  $S$ , закодировав каждый узел ветвления кружочком, а каждый линейный участок  $L$  набором черточек по следующему правилу: если  $L$  — змея, то поставим ему в соответствие одну черточку, параллельную оси участка  $L$ ; если  $L$  — лестница, то поставим ему в соответствие пару пересекающихся черточек, каждая из которых параллельна одной из двух направляющих участка  $L$ ; если же  $L$  — лома-

ная змея, то поставим в соответствие  $L$  три параллельные между собой черточки и параллельные единственной направляющей участка  $L$ .

Теперь мы в состоянии сформулировать основную теорему, классифицирующую скелеты из  $\mathcal{WP}_5$ .

**Теорема 1'** *Каждый скелет из  $\mathcal{WP}_5$  может быть получен кратным применением редукции к скелету одного из трех канонических типов, схемы которых приведены на рис. 14.*

Отметим, что из теоремы 1' вытекает интересное следствие.

**Следствие 4** *Коды скелетов из  $\mathcal{WP}_5$  — это всевозможные плоские бинарные деревья, каждое из которых имеет не более 6 вершин степени 1. В частности, скелет из  $\mathcal{WP}_5$  содержит не более 6 концевых линейных участков, не более 3 промежуточных линейных участков, и не более 4 внутренних ячеек (а, значит, не более 4 узлов ветвления).*

Ориентируем ось каждого концевого участка  $L$  скелета  $S \in \mathcal{WP}_5$  в сторону крайней ячейки, принадлежащей  $L$  (для  $S$ , не содержащего внутренних ячеек, существует две таких ориентации). Тогда направления ребер так ориентированной оси назовем *направлениями концевого участка  $L$* . Ясно, что всего существует не более шести различных направлений, образующих правильный шестиугольник, вписанный в единичную окружность направлений. Такой шестиугольник назовем *шестиугольником направлений*.

**Следствие 5** *Каждый концевой линейный участок скелета  $S$  из  $\mathcal{WP}_5$  имеет не более трех различных направлений, причем эти направления — последовательные. Множества направлений, соответствующие любым двум различным концевым линейным участкам из  $S$ , не пересекаются.*

*Если ориентировать границу скелета  $S$ , для определенности, против часовой стрелки, что задаст циклический порядок на множестве концевых линейных участков, а также ориентировать шестиугольник направлений против часовой стрелки, что задаст циклический порядок на множестве направлений концевых линейных участков, то оба возникших порядка будут согласованы: последовательные концевые участки будут иметь последовательные множества направлений.*

Оказывается, полученная нами классификация точна, а именно, имеет место следующая теорема.

**Теорема 2 (О реализации)** *Двойственный граф произвольного паркета из  $\mathcal{WP}_5$  эквивалентен некоторому плоскому минимальному бинарному дереву с выпуклой границей.*

2) Получено полное описание всех локально минимальных бинарных деревьев, затягивающих вершины правильных многоугольников, в случае, когда соответствующие им диагональные триангуляции являются скелетами.

Мы говорим, что паркет имеет *правильную минимальную реализацию*, если его двойственная сеть планарно эквивалентна локально минимальному бинарному дереву, затягивающему вершины правильного многоугольника. В соответствие с вышесказанным, все такие паркеты принадлежат  $WP_3^2$ .

**Теорема 3** Если скелет имеет правильную минимальную реализацию, то все его концевые линейные участки — змеи (количество концевых линейных участков не превосходит 6).

С точностью до изометрии, следующие скелеты и только они имеют правильную минимальную реализацию на правильном  $n$ -угольнике:

- среди скелетов без узлов ветвления — лишь змеи для любого  $n$ , рис. 17, слева;
- среди скелетов с одной ячейкой ветвления, т.е. среди 3-скелетов, — лишь скелеты, у которых концевые линейные участки являются змеями, состоящими из одинакового числа ячеек, причем угол между направлениями этих линейных участков равен  $120^\circ$  (концевые линейные участки ориентированы в сторону своих концевых ячеек). В частности, такие скелеты инвариантны относительно вращения вокруг центра единственной ячейки ветвления на угол в  $120^\circ$ , см. рис. 17, справа. Более того, такая реализация существует лишь для  $n = 6k + 3$ , где  $k$  — произвольное целое положительное число;
- 4-скелеты и 5-скелеты не имеют правильной минимальной реализации;
- среди 6-скелетов имеется лишь четыре скелета, по одному для каждого  $n$ , равного 24, 30, 36 и 42, рис. 18 и 19.

Более того, все правильные минимальные реализации каждого такого скелета отличаются друг от друга на изометрию.

Таким образом, среди скелетов, допускающих правильную минимальную реализацию, имеется две бесконечные серии и одна конечная серия.

3) Построена бесконечная серия квазиправильных многоугольников (многоугольников, множества вершин которых лежат на окружности и не сильно отличаются от множеств вершин соответствующих правильных многоугольников), которые нельзя затянуть ни одним локально минимальным бинарным деревом.

Пусть  $P = \{p_i\}$  — правильный  $n$ -угольник, вписанный в единичную окружность  $S^1$  с центром в нуле, и  $\varepsilon$  — неотрицательное число, меньшее

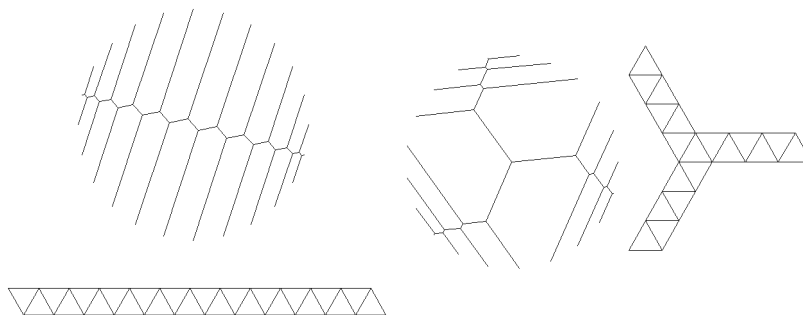


Рис. 17: Представители бесконечных серий скелетов без узлов ветвления и 3-скелетов, имеющих правильную минимальную реализацию

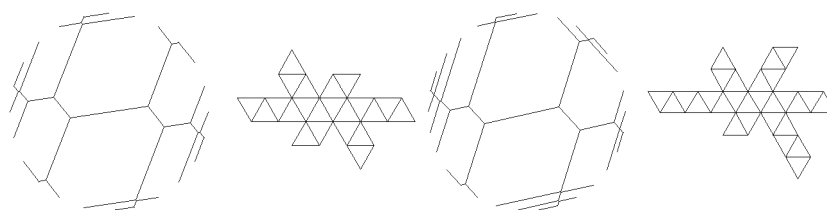


Рис. 18: 6-скелеты, имеющие правильную минимальную реализацию: случаи  $n = 24$  и  $n = 30$

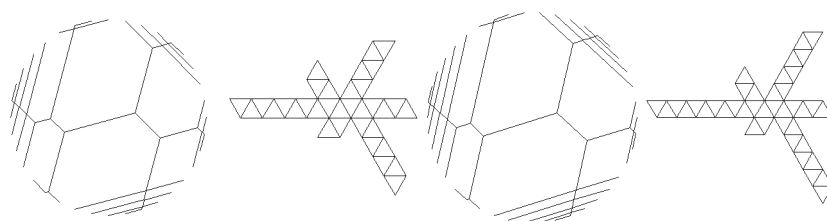


Рис. 19: 6-скелеты, имеющие правильную минимальную реализацию: случаи  $n = 36$  и  $n = 42$

чем  $\pi/n$ , где  $\alpha = \pi/n$ . Пусть  $s = (s_1, \dots, s_n)$  — произвольная последовательность из  $\pm 1$ . Обозначим через  $m_i$  точку, полученную из  $p_i$  поворотом на угол  $s_i \varepsilon$ , и пусть  $M = \{m_i\}$ . Многоугольник  $M$  называется  $\varepsilon$ -квазиправильным многоугольником типа  $s$ .

**Теорема 4** Пусть  $s$  — периодическая последовательность длины  $n = 10k$  с периодом  $(-1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1)$ , и  $\varepsilon$  — произвольное положительное число, такое что  $\pi/(2n) \leq \varepsilon < \pi/n$ . Тогда при  $k \geq 8$  множество  $M$  вершин  $\varepsilon$ -квазиправильного  $n$ -угольника типа  $s$  нельзя затянуть ни одним минимальным бинарным деревом.

**4) Получено полное описание всех невырожденных локально минимальных сетей с выпуклыми границами.**

Описание дается на языке обобщенных паркетов, т.е. триангуляций (не обязательно диагональных), составленных из правильных треугольников.

Сначала для произвольной сети Штейнера  $\Gamma$ , т.е. для сети, степени вершин которой не превосходят 3, определим фундаментальные циклы. А именно, пусть  $U$  — произвольная связная компонента множества  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , и  $\bar{U}$  — замыкание множества  $U$ . Тогда связная компонента  $C$  границы  $\partial \bar{U}$  множества  $\bar{U}$ , такая что область, ограниченная  $C$ , содержит все остальные связные компоненты множества  $\partial \bar{U}$ , называется *фундаментальным циклом, соответствующим  $U$* .

Разобьем вершины фундаментального цикла  $C$  на внешние, внутренние и вырожденные. Пусть  $v$  — произвольная вершина из  $C$ . Если вершина  $v$  имеет степень 2 в сети  $\Gamma$ , то назовем  $v$  *вырожденной вершиной*. В противном случае, обозначим через  $e$  единственное ребро сети  $\Gamma$ , инцидентное  $v$  и не содержащееся в  $C$ . Если  $e$  пересекает  $\bar{U}$  по вершине  $v$ , то назовем  $v$  *внешней вершиной*, иначе назовем  $v$  *внутренней вершиной*. Обозначим через  $d(C)$ ,  $o(C)$  и  $i(C)$  соответственно количества вырожденных, внешних и внутренних вершин фундаментального цикла  $C$ . Имеет место следующий результат.

**Предложение 19** Если сеть Штейнера  $\Gamma$  планарно эквивалентна некоторой локально минимальной сети, то для каждого фундаментального цикла  $C$  из  $\Gamma$  выполняется

$$|o(C) - i(C) - 6| \leq d(C).$$

Пусть теперь  $\Gamma$  — невырожденная сеть Штейнера, т.е.  $\Gamma$  не содержит вершин степени 2.

**Следствие 6** Если невырожденная сеть Штейнера  $\Gamma$  планарно эквивалентна некоторой локально минимальной сети, то для каждого фундаментального цикла  $C$  из  $\Gamma$  выполняется

$$o(C) - i(C) = 6.$$

**Предложение 20** Если невырожденная сеть Штейнера  $\Gamma$  планарно эквивалентна некоторой локально минимальной сети с выпуклой границей, то для каждого фундаментального цикла  $C$  из  $\Gamma$  выполняется

$$o(C) = 6, i(C) = 0.$$

Иными словами, в любом фундаментальном цикле внутренние вершины отсутствуют, и каждый фундаментальный цикл состоит из шести ребер.

Фундаментальный цикл  $C$ , для которого  $d(C) = 0$ ,  $i(C) = 0$  и  $o(C) = 6$  называется *тривиальным*, а невырожденная сеть Штейнера, все фундаментальные циклы которой тривиальны, также называется *тривиальной*.

Пусть  $\Gamma$  — тривиальная сеть Штейнера, и пусть  $a$  и  $b$  — два произвольных ребра из  $\Gamma$ , инцидентных вершинам степени 1 (такие ребра будем называть *граничными*). Рассмотрим произвольный ориентированный путь  $\gamma$  в  $\Gamma$ , начинающийся на  $a$  и заканчивающийся на  $b$ . Так же, как и выше, определим число вращения  $\text{tw}_\gamma(a, b)$  упорядоченной пары ребер  $(a, b)$  вдоль пути  $\gamma$ .

**Предложение 21** Пусть  $\Gamma$  — тривиальная сеть Штейнера,  $(a, b)$  — упорядоченная пара граничных ребер из  $\Gamma$ , а  $\gamma$  и  $\gamma'$  — пара ориентированных путей, начинающихся на  $a$  и заканчивающихся на  $b$ . Тогда

$$\text{tw}_\gamma(a, b) = \text{tw}_{\gamma'}(a', b').$$

Иными словами, в тривиальной сети Штейнера число вращения между граничными ребрами не зависит от пути, их соединяющего.

Последнее предложение позволяет обобщить понятие числа вращения на произвольную упорядоченную пару граничных ребер тривиальной сети Штейнера  $\Gamma$ .

**Определение.** Числом вращения тривиальной сети Штейнера  $\Gamma$  называется максимум чисел вращения  $\text{tw}(a, b)$  по всем упорядоченным парам  $(a, b)$  граничных ребер из  $\Gamma$ .

**Теорема 5** Если невырожденная сеть Штейнера  $\Gamma$  имеет выпуклую минимальную реализацию, то  $\Gamma$  — тривиальная сеть Штейнера, и ее число вращения не превосходит 5.

**Предложение 22** Каждая тривиальная сеть Штейнера с не превосходящим 5 числом вращения планарно эквивалентна двойственной сети некоторого обобщенного паркета.

Два последних результата позволяют использовать язык обобщенных паркетов для описания невырожденных сетей Штейнера, имеющих правильную минимальную реализацию. Так как полученные описания достаточно сложны, мы не будем здесь приводить точного результата.

Автор выражает глубокую признательность своему учителю академику Анатолию Тимофеевичу Фоменко, который сформировал научные интересы автора, научил автора работать, проявлял постоянный интерес к работе автора, и поддерживал автора во многих его начинаниях. Автор также глубоко благодарен своему другу и коллеге Александру Олеговичу Иванову за многолетнее сотрудничество как в научных, так и в житейских вопросах.



## Глава 1

# Основные определения и общие предварительные результаты

В настоящей главе мы напомним основные определения, необходимые в дальнейшем, и приведем наиболее общие результаты, характеризующие объекты, с которыми мы будем работать.

### 1 Топологические графы

Пусть  $G$  — произвольное топологическое пространство, склеенное из конечного числа отрезков прямой  $[a_i, b_i]$  по некоторой эквивалентности, отождествляющей концевые точки этих отрезков. Такое пространство  $G$  называется *топологическим графом*. Если  $\pi : \sqcup [a_i, b_i] \rightarrow G$  — естественная проекция, задаваемая этой склейкой, то образ каждого отрезка  $[a_i, b_i]$  называется *ребром топологического графа  $G$* , а образы точек  $a_i$  и  $b_i$  — *вершинами из  $G$* . Сами отрезки  $[a_i, b_i]$  назовем *отрезками, параметризующими ребра топологического графа  $G$* .

Ясно, что мы получили топологическое представление абстрактных графов самого общего вида, т.е. графов с петлями и кратными ребрами, поэтому на топологические графы непосредственно переносится вся терминология как теории абстрактных графов, так и теории топологических пространств, чем мы и будем пользоваться в дальнейшем. Кроме того, в силу отмеченного соответствия между топологическими и абстрактными графами, мы часто для краткости будем называть топологические графы просто *графами*, опуская слово “топологический”.

Предположим, что в графе  $G$  выделено некоторое подмножество  $M$  мно-

жества его вершин. Пару  $(G, M)$  мы будем называть *графом с границей  $M$* . Иногда, неформально, мы будем говорить, что *граф  $G$  имеет границу  $M$*  и обозначать ее через  $\partial G$ . Вершины из  $\partial G$  будем называть *граничными* или *неподвижными*, а все остальные вершины — *внутренними* или *подвижными*. Ребра графа, инцидентные граничным вершинам, также назовем *граничными*, а ребро, не инцидентное никакой граничной вершине, назовем *внутренним*.

Два топологических графа  $G_1$  и  $G_2$  называются *эквивалентными*, если между ними существует гомеоморфизм  $\varphi$ , устанавливающий взаимно однозначное соответствие между множествами вершин этих графов. Каждый такой гомеоморфизм называется *эквивалентностью*. Если, кроме того, у графов  $G_i$  имеются границы  $M_i$ , состоящие из одинакового числа вершин, и задано некоторое взаимно однозначное соответствие  $\nu : M_1 \rightarrow M_2$ , то графы  $G_i$  называются  *$\nu$ -эквивалентными*, если существует эквивалентность  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ , ограничение которой на  $M_1$  совпадает с  $\nu$ .

Пусть  $G$  — произвольный граф с границей  $\partial G$  (возможно, пустой), и  $P \in G$  — некоторая его точка. *Допустимой окрестностью  $U \subset G$  точки  $P$*  графа  $G$  называется замыкание связной окрестности этой точки, не содержащее вершин графа  $G$ , отличных от  $P$ , если  $P$  — вершина, и не содержащее петель из  $G$ . Наделим окрестность  $U$  структурой графа, объявив вершинами все точки из  $\partial U$ , а также точку  $P$ , если  $P$  — вершина из  $G$ ; ребрами назовем отрезки в  $U$ , соединяющие эти точки. Полученное дерево обозначим через  $G_U$  и будем называть *локальным графом с центром в точке  $P$* . Определим *каноническую границу  $\partial G_U$  локального графа  $G_U$* , включив в нее все вершины из  $\partial U$ , а также вершину  $P$ , если  $P$  — граничная вершина графа  $G$ .

Ниже мы используем локальные графы для определения локально минимальных сетей. Здесь же проиллюстрируем, как работает это понятие, напомнив определение степени вершины. А именно, *степенью  $\deg(v)$  вершины  $v$*  графа  $G$  называется количество ребер произвольного локального графа с центром в  $v$ .

## 2 Операции над топологическими графами

Пусть  $G$  — топологический граф, и  $e$  — произвольное его ребро. Рассмотрим подпространство  $G'$  в  $G$ , являющееся замыканием множества  $G \setminus e$ . Наделим  $G'$  структурой топологического графа, объявив вершинами все вершины графа  $G$ , а ребрами — все ребра графа  $G$ , за исключением ребра  $e$ . Описанная только что перестройка графа  $G$  называется *выкидыванием из  $G$  ребра  $e$*  и обозначается  $G \setminus e$ .

Пусть  $G$  — топологический граф, и  $v$  — произвольная его вершина. Пару  $(G, v)$  назовем *отмеченным топологическим графом*.

Пусть  $(G, v)$  и  $(G', v')$  — два отмеченных топологических графа. Пусть

$I = [a, b]$  — отрезок. Склеим  $G$ ,  $I$  и  $G'$  (как топологические пространства) следующим образом. Точку  $a \in I$  отождествим с  $v$ , а точку  $b \in I$  — с  $v'$ . Полученное топологическое пространство  $\bar{G}$  наделим структурой графа, выбрав в качестве вершин все вершины из  $G$  и  $G'$ , а в качестве ребер — все ребра из  $G$  и  $G'$ , а также отрезок  $I$  (точнее, его образ при склейке). Эта операция называется *склейкой отмеченных графов*  $(G, v)$  и  $(G', v')$ , а ребро, полученное из отрезка  $I$  — ребром склейки.

Пусть  $G_1$  и  $G_2$  — два топологических графа, и  $e_i$  — ребро графа  $G_i$ , инцидентное вершине  $v_i$  степени 1. Тогда склейку отмеченных графов  $(G_i, v_i)$  будем называть *склейкой графов  $G_i$  по ребрам склейки  $e_i$*  и обозначать через  $(G_1, e_1) \# (G_2, e_2)$ .

Пусть  $G$  — топологический граф,  $e$  — произвольное его ребро, и  $I = [a, b]$  — отрезок, параметризующий ребро  $e$ . Пусть  $v$  и  $v'$  — вершины графа  $G$ , инцидентные ребру  $e$  (эти вершины могут совпадать, если  $e$  — петля). Для определенности, предположим, что точка  $a \in I$  отождествляется с  $v$ , а точка  $b \in I$  — с  $v'$ . Выберем на  $e$  (фактически, на  $I = [a, b]$ ) некоторую внутреннюю точку  $A$ , и рассмотрим два отрезка:  $I_1 = [a, A]$  и  $I_2 = [A, b]$ . Выбросим из графа  $G$  ребро  $e$ , и к полученному графу  $G \setminus e$  приклеим отрезки  $I_1$  и  $I_2$ , отождествив вершину  $v$  с точкой  $a \in I_1$ , а вершину  $v'$  — с точкой  $b \in I_2$ . Полученное топологическое пространство наделим структурой графа, объявив вершинами все вершины из  $G \setminus e$ , а также *две разные точки*  $A_1 = A \in I_1$  и  $A_2 = A \in I_2$ ; в качестве ребер возьмем все ребра из  $G \setminus e$ , плюс отрезки  $I_1$  и  $I_2$ . Описанная операция называется *разрезанием графа  $G$  по точке  $A$*  и обозначается  $G \setminus A$ . Естественные вложения отрезков  $I_1$  и  $I_2$  в отрезок  $I$  порождают очевидным образом погружение графа  $G \setminus A$  в граф  $G$ ; при этом точки  $A_1$  и  $A_2$  переходят в одну точку  $A \in e$ . Ребро  $e$  будем называть *ребром разреза*, а точку  $A$  — *точкой разреза*. Также скажем, что ребро  $e$  при разрезании по точке  $A$  *распадается на два ребра*  $e_1$  и  $e_2$ , параметризованные соответственно отрезками  $I_1$  и  $I_2$ , а точка  $A$  *распадается на две вершины*  $A_1$  и  $A_2$  графа  $G \setminus A$ .

Рассмотрим еще одну конструкцию, аналогичную приведенной только что. Пусть  $G$  — топологический граф,  $e$  — произвольное его ребро. Выкинем из ребра  $e$  связную открытую окрестность  $U$  произвольной внутренней точки, такую что замыкание окрестности  $U$  целиком лежит в  $e$ . Полученное топологическое пространство наделим структурой топологического графа, объявив вершинами все вершины из  $G$ , а также две граничные точки окрестности  $U$ ; ребрами назовем все ребра из  $G$ , за исключением ребра  $e$ , а также две компоненты, на которые распалось ребро  $e$  после выбрасывания  $U$ . Полученный топологический граф назовем результатом *разреза графа  $G$  по ребру  $e$*  и будем обозначать через  $\Gamma \setminus e$ .

Определим теперь операцию на топологическом графе  $G$ , обратную к разрезанию. Для этого выберем в  $G$  две вершины  $v$  и  $v'$  степени 1, и пусть  $e$  и  $e'$  — ребра, инцидентные соответственно  $v$  и  $v'$ . Отождествим вершины  $v$  и  $v'$ . Полученное топологическое пространство обозначим через  $G'$ . Па-

раметризуем очевидным образом объединение  $e \cup e'$  некоторым отрезком, и после этого введем на  $G'$  структуру графа, выбрав в качестве вершин все вершины из  $G$ , за исключением  $v$  и  $v'$ , а в качестве ребер — все ребра из  $G$ , за исключением  $e$  и  $e'$ , а также  $e \cup e'$ . Так полученный граф обозначим через  $G/v\tilde{v}'$ , а описанную операцию назовем *склежкой графа  $G$  по вершинам  $v$  и  $v'$* . Вершины  $v$  и  $v'$  называются *вершинами склейки*.

Пусть  $G$  — топологический граф, и  $e$  — произвольное его ребро. Выберем внутри ребра  $e$  произвольную точку  $A$ , и разобьем это ребро точкой  $A$  на два отрезка  $e_1$  и  $e_2$ . Определим теперь новый топологический граф  $G'$ , множество вершин которого получается из множества вершин графа  $G$  добавлением точки  $A$ , а множество ребер — заменой во множестве ребер графа  $G$  ребра  $e$  на  $e_1$  и  $e_2$ . Описанная только что операция называется *измельчением топологического графа  $G$* .

Определим теперь операцию, обратную к измельчению. Пусть  $G$  — топологический граф, и  $v$  — произвольная его вершина степени 2, не инцидентная петле (в противном случае, связная компонента графа  $G$ , содержащая  $v$ , состоит ровно из одной петли, и наша операция не определена). Пусть  $e_1$  и  $e_2$  — ребра из  $G$ , инцидентные  $v$  (эти ребра различны в силу сделанного предположения). Рассмотрим теперь граф  $G'$ , множество вершин которого получается из множества вершин графа  $G$  удалением вершины  $v$ , а множество ребер — заменой во множестве ребер графа  $G$  ребер  $e_1$  и  $e_2$  на ребро  $e_1 \cup e_2$ . Эта операция называется *укрупнением топологического графа  $G$* .

### 3 Минимальные сети

Пусть  $G$  — связный граф. Непрерывное отображение  $\Gamma$  графа  $G$  в плоскость  $\mathbb{R}^2$  называется *обобщенной топологической сетью*. При этом граф  $G$  называется *параметризующим графом* сети  $\Gamma$ . Ограничение отображения  $\Gamma$  на вершины и ребра графа  $G$  будем называть соответственно *вершинами и ребрами сети  $\Gamma$* . Ясно, что ребра сети — это непрерывные кривые на плоскости. Отметим, что образы различных вершин графа  $G$  при отображении  $\Gamma$  могут, вообще говоря, совпадать.

Выше мы определили различные операции над топологическими графами. Во многих случаях они очевидным образом переносятся и на сети. *Полученные в результате сети будем называть и обозначать так же, как и соответствующие топологические графы*. Разберем теперь нетривиальные ситуации. К ним относятся склейка отмеченных графов и склейка графа по паре его вершин степени 1. В первом случае надо дополнительно определить сеть на ребре склейки, в чем заключается некоторый произвол. Ниже мы иногда будем накладывать дополнительные ограничения на ребра склейки таких сетей, что будет обговариваться особо. Во втором случае сеть может быть корректно определена если и только если образы

вершин склейки совпадают.

Пусть  $\Gamma : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  — обобщенная сеть, и  $\partial G$  — граница графа  $G$ . Ограничение отображения  $\Gamma$  на  $\partial G$  называется *границей сети*  $\Gamma$  и обозначается через  $\partial\Gamma$ . При этом, если  $M$  — произвольное конечное подмножество плоскости  $\mathbb{R}^2$ , и  $\Gamma$  — сеть с границей  $\partial\Gamma$ , образ которой совпадает с  $M$ , то будем говорить, что сеть  $\Gamma$  *затягивает множество  $M$  по граничному отображению  $\partial\Gamma$* . Вершины сети  $\Gamma$ , принадлежащие границе  $\partial\Gamma$ , называются *граничными* или *неподвижными*, а все остальные вершины из  $\Gamma$  — *внутренними* или *подвижными*. Ребра сети, инцидентные граничным вершинам, будем также называть *граничными*, а ребро, не инцидентное никакой граничной вершине, назовем *внутренним*.

Пусть  $\Gamma : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  — обобщенная сеть, и  $\bar{\Gamma} : G \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  — непрерывное отображение. Обозначим через  $\Gamma_t$  отображение  $\bar{\Gamma}(\cdot, t)$ . Тогда отображение  $\bar{\Gamma}$  и семейство отображений  $\Gamma_t$  называются *деформацией сети*  $\Gamma$ , если  $\Gamma_a = \Gamma$ .

Пусть теперь обобщенная сеть  $\Gamma : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  имеет некоторую границу, и  $\Gamma_t$  — деформация сети  $\Gamma$ . Мы говорим, что эта деформация *неподвижна на границе*, если каждая граничная вершина сети  $\Gamma$  неподвижна при деформации  $\Gamma_t$ .

Обобщенная топологическая сеть  $\Gamma : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  называется *погруженной сетью*, если для любой точки  $P \in G$  существует такая окрестность  $U$ , что ограничение отображения  $\Gamma$  на окрестность  $U$  является вложением. Иными словами, погружение  $\Gamma$  — это локальное вложение. Легко видеть, что в качестве окрестности  $U$  всегда можно выбрать допустимую окрестность. Иными словами, сеть  $\Gamma$  является погруженной, если у любой точки  $P$  из  $G$  имеется такая допустимая окрестность  $U$ , что ограничение отображения  $\Gamma$  на локальный граф  $G_U$  — вложенная сеть. Кроме того, ясно, что каждое ребро погруженной сети является погруженной непрерывной кривой.

Так как в дальнейшем нас будут интересовать преимущественно погруженные сети, то такие сети для краткости будем называть просто *сетями*, опуская слово “погруженный”.

Обобщенная топологическая сеть  $\Gamma : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  называется *вложенной сетью*, если отображение  $\Gamma$  является топологическим вложением.

Если обобщенная сеть  $\Gamma$  — погруженная, то, определяя ее *деформацию*  $\Gamma_t$ , будем предполагать (если не оговорено противное), что все сети  $\Gamma_t$  также являются погруженными.

Две (погруженных) сети  $\Gamma : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  и  $\Gamma' : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  называются *эквивалентными*, если существует деформация  $\Gamma_t : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \in [0, 1]$ , такая что  $\Gamma_0 = \Gamma$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma'$  (и все сети  $\Gamma_t$  — погруженные). Иными словами, сети эквивалентны, если одну из них можно продеформировать в другую. Если сети  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  — вложенные, то мы, определяя их эквивалентность, дополнительно будем предполагать, что все сети  $\Gamma_t$  — вложенные. В случае, когда на потребуются, чтобы эквивалентность  $\Gamma_t$ , переводящая вложенную сеть  $\Gamma$  во вложенную сеть  $\Gamma'$ , проходила через погруженные сети, мы будем такую

эквивалентность называть *погруженной эквивалентностью*, а сети  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  в этом случае называть *погруженно эквивалентными*.

**Замечание.** Мы могли бы определить эквивалентность обобщенных сетей, однако такая эквивалентность тривиальна, так как каждая обобщенная сеть эквивалентна точечной сети (т.е. когда  $\Gamma$  — отображение в точку).

Обобщенная сеть  $\Gamma$  называется *измеримой*, если все ее ребра — погруженные спрямляемые кривые, т.е. для каждого ребра определена длина как предел длин вписанных в это ребро ломаных. *Длиной измеримой сети* называется сумма длин входящих в нее ребер.

Пусть опять  $\Gamma : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  — произвольная обобщенная сеть,  $P$  — любая точка графа  $G$ , и  $G_U$  — локальный граф с центром в  $P$ . Сеть с границей, равная ограничению отображения  $\Gamma$  на  $G_U$ , называется *локальной сетью с центром в точке  $P$*  и обозначается через  $\Gamma_U$ . При этом, ограничение отображения  $\Gamma$  на каноническую границу  $\partial G_U$  локального графа  $G_U$  называется *канонической границей локальной сети  $\Gamma_U$*  и обозначается через  $\partial \Gamma_U$ . Отметим, что любая локальная сеть произвольной измеримой сети также измерима. Также отметим, что у любой точки  $P$  параметризующего графа  $G$  погруженной сети имеется такой локальный граф  $G_U$ , что соответствующая локальная сеть является вложенной.

Измеримая сеть  $\Gamma$ , затагивающая конечное множество  $M \subset \mathbb{R}^2$  точек плоскости  $\mathbb{R}^2$ , называется *абсолютно минимальной*, если ее длина — наименьшая среди длин всех измеримых сетей, затагивающих  $M$ .

Определим теперь локально минимальные сети. Неформально говоря, это такие сети, каждый достаточно малый фрагмент которых абсолютно минимален. Чтобы дать строгое определение, воспользуемся введенной выше локальной сетью.

**Определение.** Измеримая сеть  $\Gamma$ , затагивающая множество  $M \subset \mathbb{R}^2$ , называется *локально минимальной*, если для любой ее точки  $P$  некоторая локальная сеть с центром в  $P$  является абсолютно минимальной сетью.

**Замечание.** Поясним, что значит “локальная сеть с центром в  $P$  является абсолютно минимальной”. Выше мы определили каноническую границу локальной сети. Рассмотрим образ этой канонической границы. Получим некоторое подмножество  $M$  плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Так вот, абсолютная минимальность рассматриваемой локальной сети означает, что эта сеть имеет наименьшую длину среди всех измеримых сетей, затагивающих  $M$ .

В дальнейшем основное внимание будет уделяться лишь локально минимальным сетям, поэтому, для краткости, будем называть их просто *минимальными*, опуская слово “локальный”.

## 4 Локальное устройство минимальных сетей

В силу определения, локальное устройство абсолютно минимальных и локально минимальных сетей одинаково. Следующая теорема полностью описывает локальное устройство минимальных сетей, и может, с небольшими изменениями формулировки, быть обобщена на случай сетей в произвольном римановом многообразии, см. [53] и Введение настоящей диссертации.

**Предложение 1.1 (Локальная структура минимальных сетей)** *Измеримая сеть  $\Gamma$  с границей  $M$  минимальна, если и только если имеют место следующие свойства:*

- все ребра сети — прямолинейные отрезки;
- угол между любыми двумя смежными ребрами не меньше  $120^\circ$ ;
- все вершины степени 1 являются граничными;
- если вершина степени 2 не граничная, то угол между выходящими из нее невырожденными ребрами равен  $180^\circ$ .

**Доказательство.** Пусть  $\Gamma$  — минимальная сеть. Покажем, что для нее выполняются все свойства, перечисленные в предложении. Пусть  $e$  — произвольное ребро сети  $\Gamma$ , и предположим, что  $e$  не является отрезком прямой. Это означает, что существует такая внутренняя точка  $P$  из  $e$ , что любая связанная замкнутая окрестность точки  $P$  не есть отрезок прямой. С другой стороны, каждая локальная сеть  $\Gamma_U$  с центром в  $P$  — это часть ребра  $e$  между некоторыми его точками  $A$  и  $B$ , содержащая  $P$ . Так как сеть  $\Gamma$ , по предположению, минимальна, то некоторая локальная сеть  $\Gamma_U$  — абсолютно минимальна, т.е. является отрезком  $[A, B]$ . Полученное противоречие завершает доказательство первого пункта предложения.

Доказательство второго пункта проведем от противного. Пусть  $P$  — вершина сети  $\Gamma$ , такая что угол между инцидентными ей ребрами-отрезками  $e$  и  $e'$  меньше  $120^\circ$ . Пусть  $\Gamma_U$  — абсолютно минимальная локальная сеть с центром в точке  $P$ . Выберем локальную сеть  $\Gamma' \subset \Gamma_U$  с центром в  $P$ , такую что длины всех ее ребер одинаковы. Так как  $\Gamma_U$  — абсолютно минимальна, то  $\Gamma'$  — также абсолютно минимальная сеть. Пусть  $f$  и  $f'$  — те ребра из  $\Gamma'$ , которые содержатся в  $e$  и  $e'$  соответственно, а  $A$  и  $A'$  — вершины из  $\Gamma'$ , отличные от  $P$  и инцидентные соответственно  $f$  и  $f'$ . В треугольнике  $PA A'$  все углы меньше, чем  $120^\circ$ , поэтому минимальная сеть  $\Gamma_m$ , затагивающая вершины этого треугольника, короче, чем сумма длин ребер  $f$  и  $f'$ . Заменяя в локальной сети  $\Gamma_U$  отрезки  $f$  и  $f'$  ребер  $e$  и  $e'$  на сеть  $\Gamma_m$ , наделив полученную совокупность кривых структурой какой-нибудь сети  $\Gamma'_m$  и выбрав, в качестве границы, все те вершины из  $\Gamma'_m$ , которые были границей в сети  $\Gamma_U$ , получим сеть, граница которой совпадает с границей сети  $\Gamma_U$ , но длина которой меньше длины сети  $\Gamma_U$ . Это противоречит

абсолютной минимальности локальной сети  $\Gamma_U$ , что и доказывает второй пункт предложения.

Покажем теперь, что все вершины степени 1 — граничные. Действительно, если некоторая вершина  $P$  степени 1 — не граничная, то каждая локальная сеть  $\Gamma_U$  с центром в  $P$  — это отрезок  $[P, Q]$  для некоторой точки  $Q$  из единственного ребра, инцидентного  $P$ . При этом, вершина  $P$  сети  $\Gamma_U$  не является граничной вершиной. Поэтому, если  $P'$  — произвольная внутренняя точка отрезка  $[P, Q]$ , то сеть  $[P', Q]$  затягивает  $\partial\Gamma_U$  и короче, чем  $\Gamma_U$ , противоречие.

Пусть теперь  $P$  — внутренняя вершина степени 2 сети  $\Gamma$ , и предположим, что угол между выходящими из  $P$  ребрами отличен от  $180^\circ$ . Пусть  $\Gamma_U$  — произвольная локальная сеть с центром в  $P$ . Тогда сеть  $\Gamma_U$  состоит из двух ребер-отрезков, скажем  $[P, Q]$  и  $[P, R]$ , стыкующихся в  $P$  под некоторым углом, отличным от  $180^\circ$ . При этом, (каноническая) граница сети  $\Gamma_U$  состоит из двух точек —  $Q$  и  $R$ . Поэтому сеть  $[Q, R]$  затягивает границу  $\partial\Gamma_U$  и короче сети  $\Gamma_U$ , противоречие.

Итак, мы доказали, что каждая локально минимальная сеть обладает всеми свойствами, перечисленными в предложении 1.1. Покажем теперь, что каждая сеть  $\Gamma$ , удовлетворяющая всем условиям этого предложения, — локально минимальна. Для этого мы должны показать, что некоторая локальная сеть произвольной точки из  $\Gamma$  является абсолютно минимальной.

Пусть  $P$  — произвольная внутренняя точка некоторого ребра сети  $\Gamma$ . Так как ребра из  $\Gamma$  являются отрезками, то каждая локальная сеть  $\Gamma_U$  с центром в  $P$  — некоторый отрезок  $[Q, R]$ , причем  $\partial\Gamma_U = \{Q, R\}$ . Ясно, что такая  $\Gamma_U$  абсолютно минимальна.

Далее, пусть  $P$  — вершина сети  $\Gamma$ , и  $\Gamma_U$  — произвольная локальная сеть с центром в  $P$ . Так как угол между любой парой ребер-отрезков, инцидентных  $P$ , не меньше  $120^\circ$ , то степень  $\deg(P)$  вершины  $P$  не превосходит 3.

Предположим сначала, что вершина  $P$  — граничная. Если  $\deg(P) = 1$ , то  $\Gamma_U$  — некоторый отрезок  $[P, Q]$ , причем  $\partial\Gamma_U = \{P, Q\}$ , поэтому  $\Gamma_U$  — абсолютно минимальна. Если  $\deg(P) = 2$ , то  $\Gamma_U$  — две стороны  $[P, Q]$  и  $[P, R]$  треугольника  $PQR$ , угол которого при вершине  $P$  больше или равен  $120^\circ$ . При этом,  $\partial\Gamma_U = \{P, Q, R\}$ , поэтому  $\Gamma_U$  — абсолютно минимальная сеть. Наконец, если  $\deg(P) = 3$ , то  $\Gamma_U$  состоит из трех отрезков, скажем  $[P, Q]$ ,  $[P, R]$  и  $[P, S]$ , углы между которыми равны  $120^\circ$ . Отсюда немедленно вытекает, что в треугольнике  $QRS$  все углы меньше  $120^\circ$ , поэтому абсолютно минимальная сеть  $\Gamma'$ , затягивающая вершины  $Q, R$  и  $S$ , совпадает, как подмножество плоскости, с  $\Gamma_U$ . Однако, у сети  $\Gamma_U$ , в отличие от  $\Gamma'$ , имеется дополнительная граничная вершина, а именно,  $P$ . Если  $\Gamma_U$  не является абсолютно минимальной сетью с границей  $\{Q, R, S, P\}$ , то абсолютно минимальная сеть с этой границей короче, чем  $\Gamma'$  и, с другой стороны, затягивает вершины  $Q, R$  и  $S$ , что противоречит абсолютной минимальности сети  $\Gamma'$ . Таким образом, сеть  $\Gamma_U$  — абсолютно минимальна.



Пусть теперь вершина  $P$  — внутренняя. Если  $\deg(P) = 2$ , то  $\Gamma_U$ , как подмножество плоскости, — это некоторый отрезок  $[Q, R]$ , для которого вершина  $P$  — некоторая внутренняя точка. Граница сети  $\Gamma_U$  состоит из двух точек,  $Q$  и  $R$ , поэтому  $\Gamma_U$  — абсолютно минимальная сеть. Пусть теперь  $\deg(P) = 3$ . Тогда  $\Gamma_U$  состоит из трех отрезков, скажем  $[P, Q]$ ,  $[P, R]$  и  $[P, S]$ , стыкующихся в  $P$  под углами в  $120^\circ$ . Поэтому в треугольнике  $QRS$  все углы меньше  $120^\circ$ , и абсолютно минимальная сеть с границей  $\{Q, R, S\}$  совпадает, как подмножество плоскости, с  $\Gamma_U$ . С другой стороны, граница сети  $\Gamma_U$  — это  $\{Q, R, S\}$ , поэтому  $\Gamma_U$  — абсолютно минимальна. Доказательство предложения 1.1 закончено.

**Замечание.** В соответствии с предложением 1.1, каждая минимальная сеть параметризуется *простым графом*, т.е. графом без петель и кратных ребер. Поэтому, в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь простых графов, и *под топологическим графом будем всегда понимать граф без кратных ребер и петель*.

**Замечание.** Из предложения 1.1 вытекает, что каждая минимальная сеть является погруженной сетью, степень каждой вершины которой не превосходит 3. Именно такие сети являются предметом нашего рассмотрения. Связный топологический граф, степени вершин которого не превосходят трех, называется *графом Штейнера*, а соответствующая погруженная сеть — *сетью Штейнера*. Графы (сети) Штейнера без вершин степени 2 называются *невырожденными*. Итак, каждая минимальная сеть является сетью Штейнера.

Среди графов Штейнера выделяется важный подкласс *бинарных деревьев* или *2-деревьев*, состоящий из невырожденных графов Штейнера, являющихся деревьями. Такие деревья, по определению, содержат лишь вершины степени 1 и 3. Соответствующие сети мы будем называть *погруженными бинарными деревьями* или *погруженными 2-деревьями*.

**Замечание.** Легко видеть, что из любой сети  $\Gamma$ , не меняя ее как подмножество плоскости, можно получить другую сеть, выбрав на ребрах параметризирующего графа  $G$  произвольные внутренние точки и добавив их к множеству подвижных вершин. Эту операцию мы описали выше, назвав ее измельчением сети  $\Gamma$ . По предложению 1.1, при измельчении каждая минимальная сеть остается минимальной.

Обратно, укрупняя произвольную минимальную сеть  $\Gamma$  выбрасыванием из множества вершин параметризирующего графа  $G$  подвижных вершин степени 2, вновь, по предложению 1.1, получаем минимальную сеть. Отметим, что операция укрупнения минимальных сетей на плоскости корректна, так как минимальные сети не содержат петель.

**Определение.** Каждую подвижную вершину степени 2 произвольной сети  $\Gamma$  будем называть *фиктивной*.

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем всегда считать, что рассматриваемые сети не имеют фиктивных вершин.

**Замечание.** Пусть  $\Gamma$  — произвольная минимальная сеть с границей  $\partial\Gamma$ . По предложению 1.1, степени вершин сети  $\Gamma$  не превосходят 3. В соответствии со сделанным выше соглашением, граница сети  $\Gamma$  включает все вершины степени 1 и 2 (напомним, что мы договорились запретить все фиктивные вершины), однако может также содержать и вершины степени 3.

Выкинем из  $\partial\Gamma$  все вершины сети  $\Gamma$  степени 3. По тому же предложению 1.1, сеть  $\Gamma$  с так полученной границей по-прежнему является минимальной сетью. Однако теперь граница сети  $\Gamma$  состоит в точности из всех вершин степени 1 и 2.

**Определение.** Пусть  $G$  — произвольный граф Штейнера. Множество всех вершин из  $G$  степени 1 и 2 мы назовем *эффективной границей* и будем обозначать через  $\partial_e G$ . Вершины из  $G$  степени 3 называются *точками Штейнера*. Все эти определения дословно переносятся и на сети Штейнера.

Итак, имеет место следующий очевидный результат.

**Утверждение 1.1** *Сеть Штейнера  $\Gamma$  с границей  $\partial\Gamma \supset \partial_e\Gamma$  минимальна тогда и только тогда, когда минимальна сеть  $\Gamma$  с эффективной границей  $\partial_e\Gamma$ .*

Из предложения 1.1 вытекает, что граница минимальной сети всегда содержит эффективную границу. Для дальнейшего, удобно ввести следующее соглашение. *Границей графа Штейнера* будем называть произвольное подмножество множества вершин этого графа, содержащее эффективную границу. Это определение мгновенно уточняет определение границы сети Штейнера.

Приведем еще одно следствие из предложения 1.1.

**Предложение 1.2 (Свойство выпуклой оболочки)** *Каждая минимальная сеть  $\Gamma$ , натягивающая множество  $M \subset \mathbb{R}^2$ , содержится в выпуклой оболочке  $\text{conv}(M)$  множества  $M$ . Каждая вершина степени 3 сети  $\Gamma$  (точнее, образ вершины) является внутренней точкой в  $\text{conv}(M)$ .*

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. некоторая точка  $P$  локально минимальной сети  $\Gamma$  попала вне выпуклой оболочки  $\sigma$  границы  $\partial\Gamma$  сети  $\Gamma$ . Если  $P$  не является вершиной, то, очевидно, одна из вершин ребра, которому  $P$  принадлежит, также лежит вне  $\sigma$ . Таким образом, без ограничения общности будем считать, что  $P$  — вершина. Естественно, вершина  $P$  не граничная, поэтому  $\deg(P) = 3$ .

Пусть  $\ell$  — произвольная прямая, отделяющая  $P$  от  $\sigma$ , и  $h$  — луч, выходящий из  $P$ , перпендикулярный  $\ell$  и не пересекающий  $\ell$ . Обозначим через  $\ell_h$

прямую, содержащую  $h$  и ориентированную в направлении луча  $h$ , а через  $\Pi$  — ту полуплоскость, ограниченную прямой  $\ell$ , которая не содержит  $\sigma$ . Рассмотрим все вершины сети  $\Gamma$ , попавшие в  $\Pi$ , и выберем из них вершину  $P'$ , наиболее удаленную от прямой  $\ell$ . Так как  $P' \notin \sigma$ , вершина  $P'$  является подвижной, и, поэтому,  $\deg(P') = 3$ .

Легко видеть, что среди трех ребер сети  $\Gamma$ , инцидентных  $P'$  и ориентированных от  $P'$ , всегда найдется по крайней мере одно, скажем  $e$ , ортогональная проекция которого на  $\ell_h$  положительна. Пусть  $P''$  — отличная от  $P'$  вершина сети  $\Gamma$ , инцидентная  $e$ . Ясно, что  $P'' \notin \sigma$ , поэтому  $P''$  — подвижная вершина, и, кроме того, находящаяся от  $\ell$  дальше, чем  $P'$ . Последнее противоречит выбору вершины  $P'$ . Таким образом, показано, что  $\Gamma$  содержится в  $\sigma$ .

Второе утверждение мгновенно следует из первого. Доказательство предложения 1.2 закончено.

Граничное множество  $M$  сети  $\Gamma$  называется *выпуклым (правильным)*, если  $M$  лежит на границе своей выпуклой оболочки (если  $M$  — множество вершин правильного многоугольника). Из предложения 1.2 непосредственно вытекает следующий результат.

**Предложение 1.3** *Если  $\Gamma$  — минимальная сеть с выпуклой границей, то ее вершины степени 3 — не граничные. Таким образом, если граница  $\partial\Gamma$  минимальной сети  $\Gamma$  выпукла, то  $\partial\Gamma$  — это множество всех вершин из  $\Gamma$  степени 1 и 2. Иными словами,  $\partial\Gamma = \partial_e\Gamma$ . Если же  $\Gamma$  — минимальная невырожденная сеть, в частности, минимальное бинарное дерево, с выпуклой границей  $\partial\Gamma$ , то  $\partial\Gamma$  — это множество всех вершин из  $\Gamma$  степени 1.*

## 5 Минимальная реализация с данной границей

Пусть  $G$  — произвольный граф Штейнера,  $\partial G \supset \partial_e G$  — некоторая его граница, и пусть  $\varphi : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$  — произвольное отображение. Такие отображения  $\varphi$  будем называть *граничными*. В отличие от данного выше определения границы сети, мы не предполагаем, что граничное отображение  $\varphi$  индуцировано некоторой сетью  $\Gamma : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Мы говорим, что  $G$  имеет *минимальную реализацию с границей  $\varphi$* , если существует минимальная сеть  $\Gamma : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  с границей  $\partial\Gamma$ , равной  $\varphi$ . Если дополнительно известно, что минимальная сеть  $\Gamma$  — вложенная, то будем говорить, что граф  $G$  имеет *вложенную минимальную реализацию с границей  $\varphi$* .

Если  $G$  — дерево Штейнера, то существует придуманный Мелзаком [31] алгоритм, позволяющий понять, имеет ли  $G$  минимальную реализацию с заданной границей  $\varphi$ , и если да, то построить соответствующую минимальную сеть.

Напомним этот алгоритм.

### 5.1 Алгоритм Мелзака

Пусть  $G$  — дерево Штейнера с границей  $\partial G$ , и  $\varphi : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$  — некоторое граничное отображение. Разобьем  $G$  на невырожденные компоненты (бинарные деревья), граница каждой из которых, т.е. пересечение множества вершин этой компоненты с  $\partial G$ , — эффективна. Для этого, очевидно, достаточно разрезать дерево  $G$  по всем граничным вершинам степени больше 1. Мы проверим, имеет ли минимальную реализацию каждая такая компонента (с соответствующей границей, равной ограничению граничного отображения  $\varphi$  на эффективную границу этой компоненты), и если да, то, построив каждую из них, проверим, под какими углами стыкуются ребра этих компонент в вершинах разреза. Если в вершинах степени 2 все эти углы не меньше  $120^\circ$ , а в вершинах степени 3 входящие ребра образуют три равных угла величины  $120^\circ$ , то объединение построенных компонент и есть искомая минимальная реализация дерева  $G$ . Итак, единственным нетривиальным шагом является построение минимальной реализации невырожденного дерева Штейнера (бинарного дерева), граница которого — эффективна. Поэтому, предположим сразу, что  $G$  — бинарное дерево с границей, состоящей в точности из всех вершин степени 1.

Если  $G$  имеет ровно одно ребро, то, очевидно, минимальная реализация существует тогда и только тогда, когда образы граничных вершин этого дерева различны (напомним, что минимальные сети — погруженные). Пусть теперь  $G$  состоит более чем из одного ребра.

**Определение.** Два смежных ребра произвольного бинарного дерева  $G$  образуют *усы*, если каждое из них инцидентно вершине степени 1.

**Лемма 1.1** *Если бинарное дерево  $G$  состоит из трех ребер, то для любого ребра  $e$  из  $G$  существуют усы, не содержащие  $e$ . Если же  $G$  имеет более трех ребер, то оно содержит двое непересекающихся усов.*

**Доказательство.** Первое утверждение леммы 1.1 очевидно. Доказательство второго утверждения проведем по индукции. Отметим сначала, что количество ребер в произвольном бинарном дереве нечетно. Предположим, что для всех бинарных деревьев с числом ребер, меньшим  $2n + 1$ ,  $n \geq 2$ , утверждение имеет место. Рассмотрим произвольное дерево  $G$ , состоящее из  $2n + 1$  ребер. Пусть  $e$  — произвольное ребро из  $G$ , не инцидентное вершинам степени 1. Разрезав  $G$  по ребру  $e$ , мы получим два бинарных дерева,  $G'$  и  $G''$ , каждое из которых состоит не менее чем из трех ребер. Пусть  $e'$  и  $e''$  — ребра разреза, принадлежащие соответственно  $G'$  и  $G''$ . По предположению индукции и по первому утверждению настоящей леммы, каждое из  $G'$  и  $G''$  имеет усы, не содержащие ребер  $e'$  и  $e''$ . Доказательство закончено.

Итак, по лемме 1.1, дерево  $G$  имеет некоторые усы  $(e, e')$ . Пусть  $v$  и  $v'$  — вершины степени 1, инцидентные ребрам  $e$  и  $e'$  соответственно, а  $s$  — вершина степени 3, инцидентная одновременно ребрам  $e$  и  $e'$ . Обозначим через  $e''$  третье ребро, инцидентное вершине  $s$ , а через  $w$  — отличную от  $s$  вершину, инцидентную ребру  $e''$ .

Если образы  $A = \varphi(v)$  и  $A' = \varphi(v')$  вершин  $v$  и  $v'$  при отображении  $\varphi$  совпадают, то минимальной реализации не существует. В противном случае, построим правильный треугольник  $AA'B$  одним из двух возможных способов.

Перестроим дерево  $G$  в дерево  $G'$ , отрезав от  $G$  усы. Определим граничное отображение  $\varphi'$  на  $\partial_e G'$ , положив его равным  $\varphi$  везде, кроме  $s$ , и задав  $\varphi'(s)$  равным  $B$ .

Следующая лемма вытекает из элементарных планиметрических построений.

**Лемма 1.2** *Если бинарное дерево  $G$  имеет минимальную реализацию  $\Gamma$  с границей  $\varphi$ , то для одного из двух правильных треугольников  $AA'B$  дерево  $G'$  имеет минимальную реализацию  $\Gamma'$  с границей  $\varphi'$ . Минимальные сети  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  совпадают на  $G' \setminus e''$ . При этом, луч с вершиной  $B$  в направлении точки  $\Gamma'(w) = \Gamma(w)$  содержится внутри угла  $ABA'$  и содержит точку  $\Gamma(s)$ , которая, в свою очередь, лежит на окружности  $S^1$ , описанной вокруг треугольника  $ABA'$ . В частности, точка  $\Gamma'(w) = \Gamma(w)$  лежит вне круга, ограниченного окружностью  $S^1$ .*

*Обратно, если существует минимальная реализация  $\Gamma'$  дерева  $G'$  с границей  $\varphi'$ , и выполняются следующие условия:*

- *луч с вершиной  $B$  в направлении точки  $\Gamma'(w)$  содержится внутри угла  $ABA'$ , и*
- *точка  $\Gamma'(w)$  лежит вне круга, ограниченного окружностью  $S^1$ , которая описана вокруг правильного треугольника  $ABA'$ ,*

*то существует минимальная реализация  $\Gamma$  дерева  $G$  с границей  $\varphi$ , которая получается из  $\Gamma'$  так. Обозначим через  $C$  точку пересечения интервала  $(\Gamma'(s), \Gamma'(w))$  с окружностью  $S^1$ . На всех ребрах из  $G$ , отличных от  $e$ ,  $e'$  и  $e''$ , отображение  $\Gamma$  определим равным отображению  $\Gamma'$ . На ребрах  $e$ ,  $e'$  и  $e''$  определим его так, чтобы эти ребра переходили соответственно в отрезки  $[C, A]$ ,  $[C, A']$  и  $[C, \Gamma'(w)]$  соответственно. При этом, конечно же,  $\Gamma(s) = C$ .*

Итерировав описанный только что процесс перестройки дерева  $G$  и граничного отображения  $\varphi$  в дерево  $G'$  и граничное отображение  $\varphi'$  до тех пор, пока в результирующем дереве останется ровно одно ребро, мы реализуем *прямой ход алгоритма Мелзака*. Каждая итерация называется *шагом прямого хода алгоритма Мелзака*. Ясно, что если прямой ход состоит

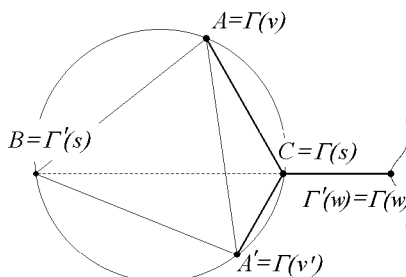


Рис. 1.1: Иллюстрация идеи алгоритма Мелзака

из  $n$  шагов, то существует  $2^n$  реализаций прямого хода, в зависимости от выбора правильного треугольника  $ABA'$ .

Для завершения алгоритма Мелзака, необходимо выполнить *обратный ход*. На первом шаге обратного хода мы проверяем, не совпадают ли образы граничных вершин результирующего дерева, состоящего из одного ребра. Если нет, то строим минимальную реализацию этого дерева, отображая единственное его ребро в отрезок, соединяющий образы граничных вершин при результирующем граничном отображении. После этого, начинаем последовательно строить минимальные реализации деревьев, полученных на прямом ходе. Соответствующие построения мы уже описали в лемме 1.2. Если на одном из шагов обратного хода нарушаются условия леммы 1.2, то переходим к испытанию следующей из  $2^n$  реализаций прямого хода. Таким образом, или при проверке очередной реализации прямого хода обратный ход алгоритма Мелзака приведет к построению искомой минимальной реализации, или будут проверены все  $2^n$  вариантов и сделан вывод о том, что данное дерево  $G$  не имеет минимальной реализации с граничным отображением  $\varphi$ .

Как будет показано ниже, к успешному завершению прямого хода алгоритма Мелзака может привести не более одной реализации прямого хода. Алгоритм Мелзака, не умея отсеивать “неперспективные” последовательности, тратит много времени на работу с ними. Однако, оказывается, можно заранее понять, как устроена та единственная последовательность треугольников  $ABA'$ , которая может привести к успешному завершению алгоритма Мелзака. Эту задачу решает алгоритм, предложенный Хвангом в [24].

## 5.2 Алгоритм Хванга

Пусть  $G$  — бинарное дерево с границей  $\partial G = \partial_e G$ , и  $\varphi : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$  — некоторое граничное отображение. Начнем с рассмотрения случаев, когда дерево  $G$  содержит мало ребер.

Если  $G$  состоит ровно из одного ребра, то все очевидно, так как треугольники  $ABA'$  строить не надо.

Если  $G$  имеет три ребра, т.е.  $\partial G$  состоит из трех вершин, то имеются следующие возможности: или все точки из  $\varphi(\partial G)$  лежат на одной прямой (тогда минимальной реализации не существует, см. Введение), или точки из  $\varphi(\partial G)$  образуют невырожденный треугольник. В последнем случае один из двух треугольников  $ABA'$  из прямого хода алгоритма Мелзака пересекается с внутренностью выпуклой оболочки  $\text{conv } \varphi(\partial G)$  множества  $\varphi(\partial G)$ , а другой — нет. Легко видеть, что тот  $ABA'$ , который пересекает внутренность  $\text{conv } \varphi(\partial G)$ , никогда не приводит к положительному результату, т.е. к минимальной сети. Следовательно, в этом случае однозначно определено “правильное” расположение треугольников  $ABA'$ .

Пусть теперь  $G$  состоит из пяти ребер, т.е. граница  $\partial G$  содержит четыре вершины. Обозначим через  $(e, e')$  и  $(f, f')$  имеющиеся две пары усов. Пусть  $E, E', F$  и  $F'$  —  $\varphi$ -образы граничных вершин, инцидентных соответственно  $e, e', f$  и  $f'$ . Легко видеть, что если какие-либо из этих четырех точек совпадают, то интересующую минимальную сеть построить нельзя. Пусть теперь все эти точки различны. Обозначим через  $\ell_e$  и  $\ell_f$  прямые, проходящие соответственно через  $E, E'$ , и  $F, F'$ . Из элементарной планиметрии вытекает, что если дерево  $G$  имеет минимальную реализацию, то точки  $E$  и  $E'$  должны лежать в одной открытой полуплоскости относительно прямой  $\ell_f$ , а также точки  $F$  и  $F'$  должны лежать в одной открытой полуплоскости относительно прямой  $\ell_e$ . Более того, если вершина  $B$  треугольника  $ABA'$ , который строится на вершинах  $E$  и  $E'$ , лежит в той же полуплоскости относительно  $\ell_e$ , что и точки  $F$  и  $F'$ , то это не приводит к минимальной реализации дерева  $G$ . Аналогичные рассуждения имеют место и для треугольника  $ABA'$  на вершинах  $F$  и  $F'$ . Таким образом, и в этом случае однозначно определено правильное расположение треугольников  $ABA'$ .

Предположим теперь, что дерево  $G$  состоит более чем из 5 ребер, т.е. его граница состоит более чем из четырех вершин. Напомним, что по лемме 1.1, в дереве  $G$  имеется, по крайней мере, двое непересекающихся усов. Нам будут полезны следующие определения.

Пусть  $(e, e')$  и  $(f, f')$  — пара непересекающихся усов в дереве  $G$ . Обозначим через  $s_e$  и  $s_f$  общие вершины соответственно для первых и для вторых усов. Мы скажем, что эти двое усов *смежны*, если существует вершина  $s$ , смежная одновременно с  $s_e$  и  $s_f$ . Далее, пусть  $(e, e')$  — усы, и  $s_e$  — вершина, общая для ребер из этих усов. Пусть  $f$  — ребро, соединяющее некоторую вершину степени 1 с некоторой вершиной  $s_f$ . Мы скажем, что усы  $(e, e')$  и ребро  $f$  *смежны*, если вершины  $s_e$  и  $s_f$  соединены ребром. Имеет место следующее утверждение.

**Лемма 1.3** Пусть  $G$  — произвольное бинарное дерево, содержащее более 5 ребер. Тогда в  $G$  или существует пара смежных усов, или имеются усы,

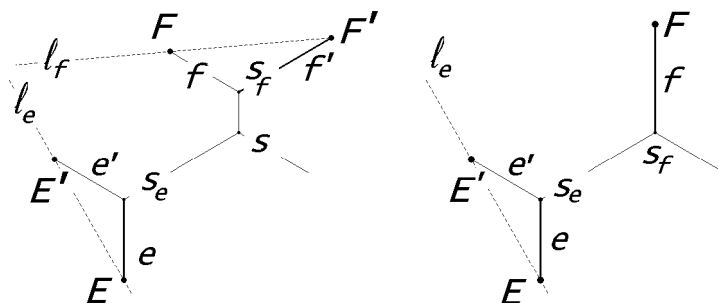


Рис. 1.2: Алгоритм Хванга

смежные ребра, инцидентному вершине степени 1.

**Доказательство.** Отрежем от дерева  $G$  все усы. Так как  $G$  имеет более четырех граничных вершин, то полученное бинарное дерево  $G'$  будет, очевидно, содержать более одного ребра. По лемме 1.1, бинарное дерево  $G'$  обладает некоторыми усами, скажем  $(e, e')$ . Однако эти усы не могут быть усами дерева  $G$ , иначе они должны были быть отрезанными. Поэтому к усам  $(e, e')$  крепятся или одни усы дерева  $G$ , или двое усов из  $G$ . В первом случае мы получаем усы, смежные с граничным ребром, а во втором случае — пару смежных усов. Доказательство закончено.

Итак, рассмотрим два случая. Пусть в дереве  $G$  существует пара смежных усов  $(e, e')$  и  $(f, f')$ . Обозначим через  $E, E', F$  и  $F'$   $\varphi$ -образы граничных вершин из  $G$ , инцидентных  $e, e', f$  и  $f'$  соответственно. Пусть  $\ell_e$  и  $\ell_f$  — прямые, проходящие соответственно через  $E, E'$  и  $F, F'$ .

**Лемма 1.4** Если существует минимальная реализация дерева  $G$ , то или точки  $E$  и  $E'$  лежат в одной открытой полуплоскости относительно прямой  $\ell_f$ , или точки  $F$  и  $F'$  лежат в одной открытой полуплоскости относительно прямой  $\ell_e$ .

**Доказательство.** Действительно, утверждение леммы равносильно тому, что отрезки  $[E, E']$  и  $[F, F']$  не пересекаются. Последнее очевидно из элементарных планиметрических соображений, см. рис. 1.2.

Следующая лемма также элементарна.

**Лемма 1.5** Пусть точки  $E$  и  $E'$  лежат в одной открытой полуплоскости относительно прямой  $\ell_f$ . Тогда если вершина  $B$  треугольника  $ABA'$ , построенного на точках  $F$  и  $F'$ , лежит в той же полуплоскости, что и точки  $E$  и  $E'$ , то эта реализация прямого хода алгоритма Мелзака не приводит к построению минимальной сети.



Перейдем теперь ко второму случаю, а именно, когда в дереве  $G$  имеются некоторые усы  $(e, e')$ , смежные с некоторым ребром  $f$ , инцидентным вершине степени 1. Обозначим через  $E, E'$  и  $F$   $\varphi$ -образы граничных вершин, инцидентных ребрам  $e, e'$  и  $f$  соответственно. Обозначим через  $\ell_e$  прямую, проходящую через  $E$  и  $E'$ . Легко видеть, что имеет место следующий результат.

**Лемма 1.6** *Если существует минимальная реализация дерева  $G$ , то точка  $F$  не лежит на прямой  $\ell_e$ . Более того, при правильном выборе треугольника  $ABA'$ , построенного на точках  $E$  и  $E'$ , вершина  $B$  и точка  $F$  должны лежать в разных открытых полуплоскостях относительно прямой  $\ell_e$ .*

Итак, правильный выбор треугольников  $ABA'$  на  $i$ -ом шаге прямого хода алгоритма Мелзака в случае, когда текущее дерево  $G_i$  состоит более чем из 5 ребер, заключается в следующем.

Если имеются усы  $(e, e')$ , смежные с граничным ребром  $f$ , то сначала проверяем, различны ли  $\varphi$ -образы граничных вершин, инцидентных  $e, e'$  и  $f$  (если нет, то эта реализация прямого хода плохая) и не лежит ли  $\varphi$ -образ  $F$  граничной вершины, инцидентной  $f$ , на прямой  $\ell_e$ , проведенной через  $\varphi$ -образы граничных вершин, инцидентных усам  $(e, e')$ . Если лежит, то эта реализация прямого хода плохая. Иначе располагаем вершину  $B$  так, чтобы она была отделена прямой  $\ell_e$  от  $F$ .

Если не существует усов, смежных с граничным ребром, то обязана существовать пара смежных усов, скажем  $(e, e')$  и  $(f, f')$ . Если  $E, E', F, F'$  — образы граничных вершин ребер  $e, e', f, f'$  соответственно, то проверяем, различны ли точки  $E, E', F$  и  $F'$  (если нет, то эта реализация прямого хода плохая) и не пересекаются ли отрезки  $[E, E']$  и  $[F, F']$ . Если пересекаются, то эта реализация прямого хода плохая. Иначе выбираем ту пару точек из  $(E, E')$  и  $(F, F')$ , которая лежит в одной открытой полуплоскости относительно прямой, проведенной через другую из пар этих точек. Пусть, например, точки  $E, E'$  лежат с одной стороны относительно прямой  $\ell_f$ , проведенной через  $F$  и  $F'$ . Построим треугольник  $ABA'$  на вершинах  $F$  и  $F'$  так, чтобы его вершина  $B$  была отделена прямой  $\ell_f$  от точек  $E$  и  $E'$ .

### 5.3 Следствия из алгоритмов Мелзака и Хванга

Итак, мы выяснили, что, исходя из геометрии множества  $\varphi(\partial G)$  и топологии дерева  $G$  можно однозначно определить правильный выбор треугольника  $ABA'$  на каждом шаге прямого хода алгоритма Мелзака. В дальнейшем, говоря об алгоритме Мелзака, мы всегда будем предполагать, что все треугольники  $ABA'$  выбираются именно так. Конечно, мы не гарантированы, что в результате обратного хода будет построена минимальная реализация дерева  $G$ , так как ее, вообще говоря, может и не существовать. Однако, если на каждом шаге обратного хода выполняются условия

леммы 1.2, то такая реализация существует. Более того, из алгоритма Хванга вытекает следующая теорема единственности.

**Предложение 1.4** *Для каждого дерева Штейнера  $G$  и граничного отображения  $\varphi: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$  существует не более одной минимальной реализации. Другими словами, для каждого дерева Штейнера  $G$  и граничного отображения  $\varphi$  множество всех минимальных сетей типа  $G$  с границей  $\varphi$  состоит не более чем из одной точки.*

Приведем еще одно полезное следствие из рассмотренных алгоритмов. Как было отмечено выше, для успешного завершения обратного хода алгоритма Мелзака необходимо и достаточно выполнение на каждом шаге условий леммы 1.2. Легко видеть, что если существует минимальная реализация бинарного дерева  $G$  с граничным отображением  $\varphi$ , то при малом шевелении границы, т.е. при малом изменении граничного отображения  $\varphi$ , условия леммы 1.2 по-прежнему выполняются. Чтобы сформулировать соответствующий результат, введем следующее определение.

Пусть  $G$  — произвольный граф Штейнера с границей  $\partial G$ . Введем на множестве всех граничных отображений  $\varphi: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$  метрику  $\rho$  следующим образом. Если  $\varphi$  и  $\varphi'$  — два таких отображения, то положим

$$\rho(\varphi, \varphi') = \max_{v \in \partial G} |\varphi(v), \varphi'(v)|.$$

**Предложение 1.5** *Предположим, что бинарное дерево  $G$  с границей  $\partial G = \partial_\varepsilon G$  имеет минимальную реализацию  $\Gamma$  для некоторого граничного отображения  $\varphi$ . Тогда существует такое  $\varepsilon > 0$ , что для любого граничного отображения  $\varphi'$ ,  $\rho(\partial\Gamma, \varphi') < \varepsilon$ , дерево  $G$  также имеет минимальную реализацию с граничным отображением  $\varphi'$ . Иными словами, минимальные бинарные деревья с эффективными границами устойчивы при малых вариациях границы.*

Более того, для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для всех граничных отображений  $\varphi'$  дерева  $G$ , таких что  $\rho(\varphi', \partial\Gamma) < \delta$ , существуют минимальные реализации  $\Gamma'$  дерева  $G$  с границами  $\varphi'$ , и расстояние между образами  $\Gamma(v)$  и  $\Gamma'(v)$  произвольной вершины  $v \in G$  при отображениях  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  меньше  $\varepsilon$ . Иными словами, минимальная реализация бинарного дерева  $G$  с эффективной границей непрерывно зависит от граничного отображения.

**Замечание.** Предложение 1.5 не может быть обобщено на произвольные деревья Штейнера с вершинами степени 2 в силу того, что при малом шевелении граничного отображения угол между ребрами невырожденных компонент, стыкующихся в некоторой вершине степени 2, может стать меньше  $120^\circ$  (если, конечно, до этого он был равен  $120^\circ$ ). Кроме того, требование

эффективности границы также существенно: малый сдвиг точек эффективной части границы минимального дерева может привести к сдвигу каждой вершины степени 3, что недопустимо, если в дереве имеется граничная вершина степени 3, которую мы хотим оставить на месте.

Напомним, что результатом прямого хода алгоритма Мелзака является пара точек. В качестве первого шага обратного хода мы строим отрезок, соединяющий полученные точки. Этот отрезок называется *линией Симпсона*. Отметим, что, в силу произвольности выбора усов на каждом шаге прямого хода, мы, вообще говоря, можем построить много разных линий Симпсона. На самом деле, существует естественное взаимно однозначное соответствие между линиями Симпсона и ребрами бинарного дерева  $G$ . Действительно, в процессе прямого хода мы перестраиваем дерево  $G$ , отрезая от него выбранные усы. На последнем шаге прямого хода от дерева  $G$  остается ровно одно ребро, которое и надо поставить в соответствие полученной линии Симпсона. Несложно показать, что каждому ребру дерева  $G$  соответствует некоторая линия Симпсона. Более того, имеет место следующее утверждение.

**Утверждение 1.2** *Если бинарное дерево  $G$  имеет минимальную реализацию с граничным отображением  $\varphi$ , то длина любой линии Симпсона равна длине соответствующей минимальной сети.*

## 6 Структура минимальных сетей с данными топологией и границей

В настоящем разделе мы приведем для полноты изложения результаты из [60], обобщающие предложение 1.4 на минимальные сети с циклами. Иными словами, мы опишем устройство минимальных сетей одной и той же топологии и с одной и той же границей. Для этого введем следующие понятия.

Обобщенная сеть  $\Gamma : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  называется *линейной*, если все ее ребра — отрезки прямых. Отметим, что некоторые ребра обобщенной линейной сети могут быть вырожденными отрезками, т.е. отображениями в точку. Пусть  $\mathcal{L}(G)$  обозначает множество всех обобщенных линейных сетей вида  $\Gamma : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ , где  $G$  — произвольный граф Штейнера. Ясно, что элементы пространства  $\mathcal{L}(G)$  могут быть описаны положениями своих вершин. Поэтому, если  $|G|$  — количество вершин графа  $G$ , то  $\mathcal{L}(G)$  представимо в виде евклидова пространства  $\mathbb{R}^{2|G|}$ . Элементы множества  $\mathcal{L}(G)$  назовем *обобщенными линейными сетями топологии  $G$* .

Для каждой пары  $(G, \varphi)$ , где  $G$  — граф Штейнера, а  $\varphi : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$  — некоторое граничное отображение, рассмотрим все обобщенные линейные сети  $\Gamma : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ , такие что  $\partial\Gamma = \varphi$ . Это множество обозначим через  $[G, \varphi]$

и будем называть *пространством обобщенных линейных сетей топологии  $G$  с данной границей  $\varphi$* . По определению,  $[G, \varphi] \subset \mathcal{L}(G)$ . Каждый элемент из  $[G, \varphi]$  однозначно задается положением точек Штейнера, поэтому если  $s$  — количество подвижных вершин графа  $G$ , то  $[G, \varphi]$  естественным образом наделяется структурой пространства  $\mathbb{R}^{2s}$ . Ясно, что  $\mathbb{R}^{2s} = [G, \varphi]$  является аффинным подпространством в  $\mathbb{R}^{2|G|} = \mathcal{L}(G)$ .

Пусть  $G_\varphi$  — подграф в  $G$ , порожденный всеми неограниченными вершинами из  $G$ , т.е. вершинами, не принадлежащими  $\partial G$ . Подграф  $G_\varphi$  назовем *подвижным подграфом* графа  $(G, \partial G)$ . Обозначим через  $k(G_\varphi)$  цикломатическое число графа  $G_\varphi$ , т.е. наименьшее количество ребер, которые надо выбросить из графа  $G_\varphi$ , чтобы разрушить все циклы, и, значит, превратить граф  $G_\varphi$  в лес.

**Предложение 1.6** *Пусть  $G$  — произвольный граф Штейнера с границей  $\partial G$ ,  $\varphi$  — любое граничное отображение,  $G_\varphi$  — подвижный подграф в  $G$ , и  $k = k(G_\varphi)$  — цикломатическое число подвижного подграфа  $G_\varphi$ . Тогда множество минимальных сетей топологии  $G$  с границей  $\varphi$  или пусто, или является  $k$ -мерным выпуклым открытым телом в некотором  $k$ -мерном подпространстве конфигурационного пространства  $[G, \varphi]$  подвижных вершин графа  $G$ . Поэтому, если  $\Gamma_i : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $i = 0, 1$ , — две погруженные минимальные сети топологии  $G$  с одной и той же границей  $\varphi$ , то все обобщенные линейные сети  $\Gamma_t$  вида  $(1-t)\Gamma_0 + t\Gamma_1$ ,  $t \in [0, 1]$ , являются (погруженными) минимальными сетями той же топологии  $G$  и с той же границей  $\varphi$ .*

*В частности, если  $k(G_\varphi) = 0$ , т.е. подвижный подграф  $G_\varphi$  графа  $G$  ацикличесок, то существует не более одной минимальной сети типа  $G$  с границей  $\varphi$ .*

Пусть  $G$  — произвольный граф Штейнера с границей  $\partial G$ , и  $\varphi$  — некоторое граничное отображение. Пусть  $G_\varphi$  — подвижный подграф для  $G$ . Ребро  $e$  из  $G$  отнесем к *нулевому уровню*, если  $e$  принадлежит некоторому циклу подвижного подграфа  $G_\varphi$ . Ребро  $e$  из  $G$ , не лежащее на нулевом уровне, но смежное с некоторым ребром нулевого уровня, отнесем к *первому уровню*, а все ребра из  $G$ , не лежащие ни на нулевом, ни на первом уровнях, отнесем ко *второму уровню*.

**Предложение 1.7** *Пусть  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  — две минимальные сети одной и той же топологии  $G$  и с одной и той же границей. Тогда имеют место следующие свойства:*

- *сеть  $\Gamma$  параллельна сети  $\Gamma'$ ;*
- *длины сетей  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  равны;*
- *если  $e$  — произвольное ребро из  $G$ , лежащее на втором уровне, то его образы при отображениях  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  совпадают;*

- если  $e$  — произвольное ребро из  $G$ , лежащее на первом уровне, то его образы при отображениях  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  лежат на одной прямой;
- если  $e$  — произвольное ребро из  $G$ , лежащее на нулевом уровне, то его образы при отображениях  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  (в соответствии с первым пунктом) параллельны между собой.

## 7 Постановка основной задачи

В настоящем параграфе мы сформулируем общую задачу диссертации. С частным случаем этой задачи мы уже сталкивались выше, где требовалось описать все минимальные сети, затачивающие данное конечное подмножество  $M$  точек плоскости. Однако, как было показано в [21], эта задача и даже задача поиска абсолютно минимального дерева, затачивающего  $M$ , является  $NP$ -полной, так как приходится тестировать слишком большое число топологий параметризующих графов. Это приводит к тому, что современные компьютеры в состоянии найти абсолютно минимальное дерево (за реальное время) лишь для множеств  $M$ , состоящих из небольшого числа точек, много меньшего, чем это требуется в приложениях. Поэтому одна из важных задач теории минимальных сетей состоит в поиске ограничений на возможные топологии, которые вытекают из геометрии множества  $M$ . Тем самым, естественно перейти от конкретного множества  $M$  к тем или иным классам множеств  $M$ , и выяснить, какие графы Штейнера имеют минимальные реализации на множествах  $M$  из рассматриваемых классов. Перейдем к формальному описанию основной задачи.

Пусть  $\mathcal{M}$  — некоторое семейство конечных подмножеств плоскости  $\mathbb{R}^2$ , и  $\mathcal{G}$  — некоторое семейство попарно неэквивалентных графов Штейнера.

**Задача А** *Описать те графы  $G \in \mathcal{G}$ , для которых существуют минимальные реализации, затачивающие некоторые множества  $M$  из  $\mathcal{M}$ .*

Так, например, если  $\mathcal{M}$  — это всевозможные конечные подмножества плоскости, а  $\mathcal{G}$  — всевозможные графы Штейнера, то задача А состоит в описании тех графов Штейнера, которые обладают минимальной реализацией. Ниже мы разберем эту задачу более детально. В частности, мы покажем, что каждое дерево Штейнера имеет минимальную реализацию, даже в классе вложенных минимальных деревьев. Однако, если граф Штейнера  $G$  содержит циклы, то в общем случае минимальной реализации не существует. В частности, если  $G$  содержит цикл, состоящий менее чем из шести ребер, то  $G$  не имеет минимальной реализации.

Сформулируем теперь задачу, уточняющую задачу А. Дадим сначала следующее определение. Пусть  $\Gamma : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  — произвольная сеть Штейнера,  $\partial G$  — граница графа  $G$ , и  $\varphi : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$  — некоторое граничное отображение. Мы говорим, что сеть  $\Gamma$  имеет (вложенную) минимальную

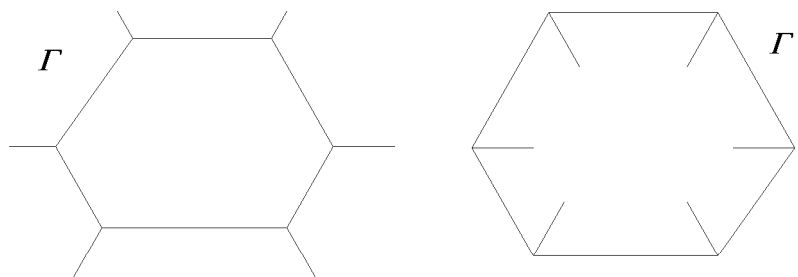


Рис. 1.3: Сеть  $\Gamma$  имеет минимальную реализацию, а сеть  $\Gamma'$  — нет

реализацию с границей  $\varphi$ , если граф  $G$  обладает (вложенной) минимальной реализацией  $\Gamma_m$  с границей  $\varphi$ , и при этом сети  $\Gamma_m$  и  $\Gamma$  эквивалентны. Более того, если  $M = \varphi(\partial G)$ , то про описанную только что сеть  $\Gamma$  будем говорить, что она имеет (вложенную) минимальную реализацию на  $M$  или имеет (вложенную) минимальную реализацию, затягивающую  $M$ .

Рассмотрим теперь вместо семейства  $\mathcal{G}$  множество  $\mathfrak{S}$  попарно неэквивалентных сетей Штейнера. Опять, через  $\mathcal{M}$  обозначим произвольное семейство конечных подмножеств плоскости.

**Задача В** *Описать сети  $\Gamma \in \mathfrak{S}$ , для которых существуют (вложенные) минимальные реализации, затягивающие некоторые множества  $M$  из  $\mathcal{M}$ .*

В качестве примера рассмотрим  $\mathfrak{S}$ , состоящее из всех попарно неэквивалентных сетей Штейнера, а в качестве  $\mathcal{M}$  — семейство, состоящее из всех конечных подмножеств  $M$  плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Тогда задача В состоит в описании всех сетей, имеющих минимальные реализации. В отличие от задачи А, теперь мы имеем существенно больше возможностей. В качестве иллюстрации рассмотрим две сети  $\Gamma$  и  $\Gamma'$ , изображенных на рис. 1.3. Эти сети имеют одинаковую топологию, но сеть  $\Gamma$  обладает минимальной реализацией, а сеть  $\Gamma'$  — нет.

И, наконец, приведем последнее уточнение основной задачи. Пусть  $\mathcal{M}$  и  $\mathfrak{S}$  — такие же, как и выше.

**Задача С** *Описать сети  $\Gamma \in \mathfrak{S}$ , для которых существуют (вложенные) минимальные реализации, затягивающие некоторые множества  $M$  из  $\mathcal{M}$ , и для каждой такой сети описать все минимальные реализации на каждом  $M \in \mathcal{M}$ .*

В качестве примера рассмотрим  $\mathfrak{S}$ , состоящее из всех попарно неэквивалентных сетей Штейнера, а в качестве  $\mathcal{M}$  — семейство, состоящее из одного множества  $M$ . Тогда задача С эквивалентна задаче описания всех минимальных сетей, затягивающих  $M$ .

Приведем теперь основные семейства  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{E}$ , с которыми мы будем работать.

Семейства  $\mathcal{M}$  граничных множеств.

- Всевозможные множества  $M$ . В этом случае имеем задачу *о минимальной реализации* графов или сетей данного типа.
- Экстремальные множества  $M$ . Напомним, что множество  $M$  называется экстремальным, если оно лежит на границе своей выпуклой оболочки. В дальнейшем, мы, в соответствии с традицией, слегка изменим терминологию, и конечное экстремальное множество  $M$  будем называть *выпуклым*. Мы говорим, что граф (сеть) обладает *выпуклой минимальной реализацией*, если этот граф (сеть) имеет минимальную реализацию на выпуклом множестве. Таким образом, мы получаем задачу *о выпуклой минимальной реализации* графов или сетей данного типа.
- Правильные множества  $M$ , т.е. множества вершин правильных многоугольников. Мы говорим, что граф (сеть) обладает *правильной минимальной реализацией*, если этот граф (сеть) имеет минимальную реализацию на правильном множестве. Итак, возникает задача *о правильной минимальной реализации* графов или сетей данного типа.
- Конкретное множество  $M$ . Здесь мы имеем задачу *о минимальной реализации* графов или сетей данного типа *на данном множестве*.

Семейства  $\mathcal{G}$  графов Штейнера.

- Невырожденные деревья Штейнера, т.е. бинарные деревья или 2-деревья.
- Деревья Штейнера.
- Невырожденные графы Штейнера.
- Всевозможные графы Штейнера.

Семейства  $\mathcal{E}$  сетей Штейнера.

Так как для приложений наиболее важным классом минимальных сетей являются вложенные минимальные сети, будем рассматривать следующие классы сетей.

- Вложенные невырожденные деревья Штейнера, т.е. плоские бинарные деревья или плоские 2-деревья.
- Плоские деревья Штейнера (общего вида).

- Плоские невырожденные сети Штейнера.
- Всевозможные плоские сети Штейнера.

В качестве примера, рассмотрим частный случай основной задачи, когда семейство  $M$  граничных множеств совпадает со всеми конечными подмножествами плоскости. Иными словами, нас интересуют препятствия к минимальной реализации заданного графа или заданной сети Штейнера.

Так как мы рассматриваем только вложенные сети Штейнера, то *всюду ниже, если не оговорено противное, под сетью мы будем понимать именно вложенную сеть*. В частности, под (выпуклой, правильной) минимальной реализацией мы будем понимать соответствующую минимальную реализацию в классе вложенных сетей.

Начнем со случая деревьев Штейнера.

## 8 Минимальная реализация деревьев Штейнера

**Предложение 1.8** *Каждое плоское дерево Штейнера имеет минимальную реализацию.*

**Доказательство.** Пусть  $\Gamma$  — произвольное плоское дерево Штейнера. Если  $\Gamma$  состоит из одного ребра, то все очевидно. Предположим теперь, что для всех  $\Gamma$ , содержащих  $1 \leq k < n$  ребер, предложение доказано. Докажем предложение для дерева  $\Gamma$ , имеющего  $n$  ребер.

Напомним, что два смежных ребра из  $\Gamma$  называются *усами*, если каждое из них инцидентно вершине степени 1.

**Лемма 1.7** *Каждое дерево Штейнера, состоящее не менее чем из двух ребер, или содержит ребро, соединяющее вершины степени 1 и 2, или имеет усы.*

**Доказательство.** Пусть  $\Gamma$  — произвольное плоское дерево Штейнера. Выберем произвольную вершину  $v$  степени 1 дерева  $\Gamma$  и рассмотрим  $\Gamma$  как корневое дерево с корнем в  $v$ . Таким образом, все вершины дерева  $\Gamma$  разбиваются на уровни: вершина  $v$  относится к нулевому уровню; вершины, смежные с  $v$  — к первому уровню; вершины, смежные с вершинами  $(k-1)$ -ого уровня и не относящиеся к низшим уровням — к  $k$ -ому уровню. Отметим, что каждая вершина с  $k$ -ого уровня при  $k > 0$  смежна ровно с одной вершиной из  $(k-1)$ -ого уровня.

Пусть  $n$  — максимальный номер имеющихся уровней дерева  $\Gamma$ , и  $v'$  — произвольная вершина с  $n$ -ого уровня. Ясно, что все вершины  $n$ -ого уровня имеют степень 1. Обозначим через  $w$  единственную вершину из  $\Gamma$ , смежную с  $v'$ . Так как дерево  $\Gamma$  состоит более чем из одного ребра, то  $w$  лежит не



ниже первого уровня. Поэтому степень  $\deg(w)$  вершины  $w$  не меньше 2. Если  $\deg(w) = 2$ , то ребро  $wv'$  — исконое. В противном случае, вершина  $w$  смежна еще с одной вершиной из  $n$ -ого уровня, отличной от  $v'$ . Обозначим эту вершину через  $v''$ . Как было уже отмечено, степень вершины  $v''$ , как вершины из  $n$ -ого уровня, равна 1, поэтому ребра  $wv'$  и  $wv''$  образуют усы. Лемма 1.7 доказана.

Вернемся к доказательству предложения 1.8. По лемме 1.7, существует такая вершина  $w$  дерева  $\Gamma$ , что или  $\deg(w) = 2$  и  $w$  смежна с вершиной  $v$  степени 1, или  $\deg(w) = 3$ , и  $w$  смежна с вершинами  $v$  и  $v'$  степени 1. В первом случае, отрежем от  $\Gamma$  ребро  $wv$ , а во втором — оба ребра  $wv$  и  $wv'$ . Полученное дерево обозначим через  $\Gamma'$ .

По предположению, дерево  $\Gamma'$  обладает некоторой минимальной реализацией  $\Gamma'_m$ . Обозначим той же буквой  $w$  вершину из  $\Gamma'_m$ , соответствующую вершине  $w$  из  $\Gamma'$ . Ясно, что степень вершины  $w$  в дереве  $\Gamma'_m$  равна 1. Обозначим через  $e'$  единственное ребро из  $\Gamma'_m$ , инцидентное  $w$ . Легко видеть, что существует такая замкнутая круговая окрестность  $U$  вершины  $w$ , что  $\Gamma'_m \cap U = e' \cap U$  — радиус круга  $U$ .

Напомним, что мы рассматриваем два случая. В первом случае, проведем в круге  $U$  радиус  $e$ , составляющий с радиусом  $e' \cap U$  угол не меньше чем в  $120^\circ$ , и обозначим через  $\Gamma_m$  дерево  $\Gamma'_m \cup e$ . Во втором случае, проведем в круге  $U$  различные радиусы  $e$  и  $f$ , составляющие с радиусом  $e' \cap U$  углы в  $120^\circ$ , и обозначим через  $\Gamma_m$  дерево  $\Gamma'_m \cup e \cup f$ . По предложению 1.1, дерево  $\Gamma_m$  в обоих случаях является исконой минимальной реализацией дерева  $\Gamma$ , что и завершает доказательство предложения 1.8.

## 9 Минимальная реализация невырожденных графов и сетей Штейнера

Однако, если параметризующий граф содержит циклы, то он может не иметь минимальной реализации. Например, рассмотрим граф Штейнера, состоящий из шести ребер, три из которых образуют треугольник, а три других выходят из вершин этого треугольника, рис. 1.4. Так как, в силу предложения 1.1, углы между смежными ребрами не меньше  $120^\circ$ , у минимальной реализации такого графа имеется треугольник, все углы которого не меньше  $120^\circ$ , что невозможно.

Приведем необходимое условие существования минимальной сети с циклами. Начнем со случая невырожденной сети Штейнера. Пусть  $\Gamma$  — произвольная невырожденная сеть Штейнера. Напомним, что у такой сети отсутствуют вершины степени 2. Обозначим через  $U'_i$  связные компоненты множества  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , а через  $U_i$  — открытое множество  $\text{int}(\text{cl}(U'_i))$ , где  $\text{cl}$  обозначает замыкание, а  $\text{int}$  — взятие внутренности. Легко видеть, что граница каждого  $U_i$  — это объединение некоторого количества простых

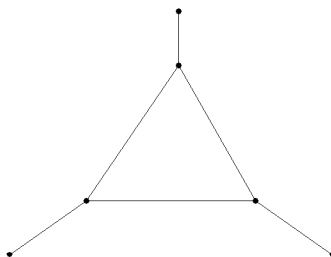


Рис. 1.4: Этот граф Штейнера не имеет минимальной реализации

циклов в  $\Gamma$ . Так полученные простые циклы называются *фундаментальными циклами*.

Вершина  $P$  фундаментального цикла  $\gamma \subset \Gamma$  называется *внешней*, если единственное ребро из  $\Gamma$ , инцидентное  $P$  и не принадлежащее  $\gamma$ , лежит вне области, ограниченной циклом  $\gamma$ . В противном случае, вершина  $P$  называется *внутренней*. Разность количеств внешних и внутренних вершин фундаментального цикла  $\gamma$  называется *индексом цикла  $\gamma$*  и обозначается через  $\text{ind}(\gamma)$ . Ясно, что эквивалентные невырожденные сети Штейнера имеют одинаковые структуры фундаментальных циклов.

**Предложение 1.9** *Индекс каждого фундаментального цикла произвольной минимальной невырожденной сети Штейнера равен 6. Иными словами, равенство шести индекса каждого фундаментального цикла невырожденной сети Штейнера является необходимым условием минимальной реализации последней.*

**Доказательство.** Действительно, каждый фундаментальный цикл — это многоугольник, углы которого равны или  $2\pi/3$ , или  $4\pi/3$ . Ясно, что если угол в вершине равен  $2\pi/3$ , то это — внешняя вершина. В противном случае, вершина внутренняя. Пусть  $n$  — количество вершин фундаментального цикла,  $n_O$  — количество внешних вершин, и  $n_I$  — количество внутренних вершин. Имеем

$$n_O + n_I = n \quad \text{и} \quad 2\pi/3 n_O + 4\pi/3 n_I = \pi(n - 2),$$

откуда и получаем  $n_O - n_I = 6$ . Доказательство предложения 1.9 закончено.

**Гипотеза 1.1** *Условие предложения 1.9 является также и достаточным. А именно, если индекс каждого фундаментального цикла невырожденной сети Штейнера равен 6, то эта сеть обладает минимальной реализацией.*

**Замечание.** Отметим, что в случае, когда любые два фундаментальных цикла невырожденной сети Штейнера не пересекаются, сформулированная только что гипотеза может быть легко доказана. В общем случае доказательство этой гипотезы не известно.

## 10 Минимальная реализация сетей Штейнера: общий случай

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть  $\Gamma$  — произвольная сеть Штейнера. Как и выше, определим фундаментальные циклы. Однако теперь вершины каждого фундаментального цикла разбиваются не на два, а на три класса, а именно, внутренние, внешние и вырожденные. Определение первых двух классов — такое же, как и выше, а в третий класс входят вершины степени 2. Далее, снова определим *индекс*  $\text{ind}(\gamma)$  *фундаментального цикла*  $\gamma$  как разность количеств внешних и внутренних вершин. Кроме того, определим *степень вырождения*  $\text{degen}(\gamma)$  *фундаментального цикла*  $\gamma$  как количество вырожденных вершин в  $\gamma$ .

**Предложение 1.10** Пусть  $\Gamma$  — произвольная минимальная сеть, и  $\gamma$  — любой ее фундаментальный цикл. Тогда

$$|\text{ind}(\gamma) - 6| \leq \text{degen}(\gamma).$$

**Доказательство.** Цикл  $\gamma$  — это многоугольник, у которого углы при внешних вершинах равны  $2\pi/3$ , при внутренних — равны  $4\pi/3$ , а при вырожденных вершинах находятся в пределах между  $2\pi/3$  и  $4\pi/3$ . Пусть  $n_O$ ,  $n_I$  и  $n_D$  — соответственно количества внешних, внутренних и вырожденных вершин фундаментального цикла  $\gamma$ . Обозначим через  $\Sigma_D$  сумму углов при вырожденных вершинах. Тогда величина  $\alpha$ , равная  $\Sigma_D/n_D$ , лежит между  $2\pi/3$  и  $4\pi/3$ . Имеем

$$2\pi/3 n_O + 4\pi/3 n_I + \alpha n_D = \pi(n_O + n_I + n_D - 2).$$

Отсюда

$$\text{ind}(\gamma) - 6 = n_O - n_I - 6 = (3\alpha/\pi - 3)n_D = (3\alpha/\pi - 3) \text{degen}(\gamma).$$

Так как величина  $3\alpha/\pi - 3$  меняется в пределах от  $-1$  до  $1$ , получаем утверждение предложения 1.10.

**Гипотеза 1.2** Условие предложения 1.10 является также и достаточным. А именно, если индекс каждого фундаментального цикла произвольной сети Штейнера отличается от 6 не более чем на степень вырождения этого фундаментального цикла, то эта сеть обладает минимальной реализацией.

## Глава 2

# Полная классификация минимальных бинарных деревьев с выпуклой границей

В настоящей главе задача В из главы 1 будет полностью решена для вложенных невырожденных деревьев Штейнера, т.е. так называемых *плоских бинарных деревьев* или *плоских 2-деревьев*. Случай бинарных деревьев интересен, во-первых, поскольку для него удастся получить полный ответ, а во-вторых, на этом существенно более простом объекте мы разработаем технику, которая в дальнейшем будет использована для описания невырожденных сетей Штейнера общего вида, обладающих выпуклой минимальной реализацией.

Отметим, что, по предложению 1.3 из главы 1, если минимальная сеть  $\Gamma$  обладает выпуклой границей, то вершины из  $\Gamma$  степени 3 граничными не являются, т.е. граница сети  $\Gamma$  совпадает с ее эффективной границей. Это приводит нас к следующему соглашению: *в дальнейшем, не оговаривая каждый раз специально, мы будем предполагать, что граница произвольного графа (сети) Штейнера является эффективной.*

Кроме того, в дальнейшем мы будем интересоваться лишь вложенными минимальными сетями, поэтому *всюду ниже мы будем понимать под сетью именно вложенную сеть.*

## 1 Число вращения минимального бинарного дерева с выпуклой границей

Оказывается, условие выпуклости конечного множества  $M \subset \mathbb{R}^2$  накладывает сильные ограничения на затачивающие  $M$  (вложенные) минимальные бинарные деревья. Неформально говоря, это условие означает, что такие деревья не могут быть “сильно закрученными”. Для описания степени закрученности полезно воспользоваться числом вращения, определение которого было приведено во Введении. Напомним это определение.

Пусть  $\Gamma$  — плоское бинарное дерево,  $(a, b)$  — некоторая (упорядоченная) пара его ребер, и  $\gamma$  — единственный путь в  $\Gamma$ , соединяющий эти ребра. Ориентируем путь  $\gamma$  от  $a$  к  $b$ , и пусть  $P$  — произвольная вершина степени 3 дерева  $\Gamma$ , лежащая внутри  $\gamma$ , т.е. не совпадающая ни с одной из его концевых вершин. Выберем круговую окрестность  $U$  вершины  $P$ , такую что  $U \cap \Gamma$  является деревом, не содержащим вершин из  $\Gamma$ , отличных от  $P$ . Тогда пересечение  $\partial U \cap \Gamma$  состоит из трех точек, которые мы обозначим через  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Пусть  $a_1$  — первое, и  $a_2$  — последнее ребро из  $\gamma$ , инцидентное  $P$ , и пусть  $A_i \in a_i$ ,  $i = 1, 2$ . Рассмотрим дугу  $\delta$  окружности  $\partial U$ , лежащую между  $A_1$  и  $A_2$  и не содержащую  $A_3$ .

**Определение.** Если движение по дуге  $\delta$  от  $A_2$  к  $A_1$  происходит по часовой стрелке, то будем говорить, что мы *поворачиваем направо в точке  $P$* , и припишем  $P$  число  $-1$ . В противном случае, скажем, что мы *поворачиваем налево в точке  $P$*  и припишем  $P$  число  $+1$ . Число, приписанное вершине  $P$ , называется *твистингом вершины  $P$  ориентированного пути  $\gamma$* . Числом вращения  $\text{tw}(a, b)$  упорядоченной пары  $(a, b)$  ребер плоского бинарного дерева  $\Gamma$  называется сумма твистингов во всех внутренних вершинах пути  $\gamma$ . Положим, по определению,  $\text{tw}(a, a) = 0$ .

**Определение.** Числом вращения  $\text{tw}(\Gamma)$  плоского бинарного дерева  $\Gamma$  называется максимум чисел вращения  $\text{tw}(a, b)$  по всем упорядоченным парам ребер дерева  $\Gamma$ :

$$\text{tw}(\Gamma) = \max_{(a,b)} \text{tw}(a, b).$$

**Замечание.** Иногда, чтобы подчеркнуть, в каком дереве  $\Gamma$  вычисляется число вращения, мы будем писать вместо  $\text{tw}(a, b)$  подправленное выражение  $\text{tw}_\Gamma(a, b)$ .

Отметим, что если  $\Gamma$  — минимальное бинарное дерево, то число вращения имеет естественный геометрический смысл. Чтобы сформулировать соответствующее утверждение, напомним следующие понятия.

Пусть  $(a, b)$  — упорядоченная пара ненулевых векторов из  $\mathbb{R}^2$ . Определим *ориентированный угол  $\alpha(a, b)$  пары  $(a, b)$*  следующим образом. Если  $a$  и  $b$  сонаправлены, то положим  $\alpha(a, b) = 0$ . Если  $a$  и  $b$  не коллинеарны, то

определим  $\alpha(a, b)$  равным по модулю наименьшему углу между  $a$  и  $b$ , а по знаку — знаку репера  $(a, b)$ . Если же  $a$  и  $b$  — противоположно направлены, то ориентированный угол  $\alpha(a, b)$  не определен.

Пусть  $L \subset \mathbb{R}^2$  — произвольная ломаная,  $A_0, \dots, A_k$  — ее последовательные вершины, и  $a_1, \dots, a_k$  — ее последовательные звенья, где  $a_p = [A_{p-1}, A_p]$ . Вершины  $A_0, \dots, A_k$  можно упорядочить двумя естественными способами: от  $A_0$  к  $A_k$ , и от  $A_k$  к  $A_0$ . Выбор одного из этих порядков называется *ориентацией ломаной  $L$* , а сама ломаная с фиксированным порядком вершин — *ориентированной ломаной*. При этом, если вершины  $A_p$  упорядочены от  $A_0$  к  $A_k$ , то мы говорим, что ломаная  $L$  *ориентирована от  $A_0$  к  $A_k$*  или от  $a_1$  к  $a_k$ . В противном случае, ломаная  $L$  *ориентирована от  $A_k$  к  $A_0$*  или от  $a_k$  к  $a_1$ .

Для ориентированной ломаной  $L$  каждое ее звено  $a_p = [A_{p-1}, A_p]$  можно рассматривать как вектор  $A_{p-1}A_p$  с началом в  $A_{p-1}$ . Такие вектора будем называть *векторами-звеньями*.

*Углом поворота* между последовательными векторами-звеньями  $a_p$  и  $a_{p+1}$  ориентированной ломаной  $L$  называется угол  $\alpha(a_p, a_{p+1})$ . Сумма углов поворота между всеми последовательными ребрами  $a_p$  и  $a_{p+1}$  ориентированной ломаной  $L$  называется *полным углом поворота вдоль ломаной  $L$*  и обозначается через  $\alpha(L)$ .

Пусть теперь  $(a, b)$  — упорядоченная пара звеньев произвольной (неориентированной) ломаной  $L$ . Рассмотрим ломаную  $L'$ , составленную из всех звеньев ломаной  $L$ , расположенных между  $a$  и  $b$ . Ориентируем  $L'$  от  $a$  к  $b$ . *Углом поворота  $\alpha(a, b)$  упорядоченной пары  $(a, b)$  звеньев ломаной  $L$*  или *углом поворота от звена  $a$  к звену  $b$  ломаной  $L$*  называется полный угол поворота ломаной  $L'$ .

Пусть теперь  $\Gamma$  — минимальное бинарное дерево, и  $(a, b)$  — произвольная упорядоченная пара его ребер. Тогда единственный путь  $\gamma$  в  $\Gamma$ , соединяющий  $a$  с  $b$ , является ломаной. Ориентируем ломаную  $\gamma$  от  $a$  к  $b$ . Имеет место следующий очевидный результат.

**Предложение 2.1** *Число вращения  $\text{tw}(a, b)$  упорядоченной пары  $(a, b)$  ребер минимального бинарного дерева  $\Gamma$  равно полному углу поворота  $\alpha(\gamma)$  вдоль ориентированной ломаной  $\gamma$ , деленному на  $\pi/3$ :*

$$\text{tw}(a, b) = \frac{3}{\pi} \alpha(\gamma).$$

Далее, приведем несколько простых утверждений, описывающих свойства чисел вращения плоских бинарных деревьев.

**Предложение 2.2** *Пусть  $\Gamma$  — произвольное плоское бинарное дерево. Тогда для любых ребер  $a, b$  и  $c$  из  $\Gamma$  выполняются следующие соотношения:*

- $\text{tw}(a, b) = -\text{tw}(b, a)$  (*кососимметричность*);

- если  $a$ ,  $b$  и  $c$  принадлежат одному пути, то

$$\text{tw}(a, c) = \text{tw}(a, b) + \text{tw}(b, c)$$

(аддитивность вдоль путей).

**Утверждение 2.1** Пусть  $\Gamma$  — плоское бинарное дерево, и  $\text{tw}(\Gamma) = \text{tw}(a, b)$ . Тогда  $a$  и  $b$  — граничные ребра.

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. одно из ребер  $a$  и  $b$ , скажем  $a$ , — не граничное. Рассмотрим путь  $\gamma$ , соединяющий  $a$  с  $b$ , и пусть  $A$  — концевая вершина пути  $\gamma$ , инцидентная ребру  $a$ . Тогда, из вершины  $A$  выходит, помимо ребра  $a$ , еще два ребра, скажем  $e$  и  $e'$ ; при этом числа вращения  $\text{tw}(e, a)$  и  $\text{tw}(e', a)$  различны. Пусть, для определенности,  $\text{tw}(e, a) = 1$ . Тогда  $\text{tw}(e, b) > \text{tw}(a, b)$ , что противоречит максимальнойности числа  $\text{tw}(a, b)$ . Доказательство закончено.

Следующее утверждение описывает ограничение на число вращения минимального бинарного дерева  $\Gamma$ , накладываемое выпуклостью границы дерева  $\Gamma$ .

**Предложение 2.3** Пусть  $\Gamma$  — минимальное бинарное дерево с выпуклой границей. Тогда  $\text{tw}(\Gamma) \leq 5$ .

**Доказательство.** Если  $\Gamma$  состоит из одного ребра, то все очевидно. Предположим теперь, что  $\Gamma$  содержит более одного ребра.

Пусть  $(a, b)$  — произвольная пара граничных ребер дерева  $\Gamma$ , и  $\gamma$  — путь в  $\Gamma$ , соединяющий  $a$  с  $b$  и ориентированный от  $a$  к  $b$ . Так как, по утверждению 2.1, число вращения плоского бинарного дерева  $\Gamma$  достигается на его граничных ребрах, достаточно показать, что  $\text{tw}(a, b) \leq 5$ . Для этого, в силу минимальности дерева  $\Gamma$ , достаточно проверить, что угол поворота от ребра  $a$  к ребру  $b$  вдоль ломаной  $\gamma$  строго меньше  $2\pi$ .

Обозначим через  $z$  этот угол поворота. Ясно, что  $z = (\pi/3) \text{tw}(a, b)$ . Пусть  $M$  — образ граничного отображения  $\partial\Gamma$ , и  $W$  — граница выпуклой оболочки множества  $M$ . Обозначим через  $A$  и  $B$  точки из  $M$ , в которые приходят ребра  $a$  и  $b$  соответственно. Точки  $A$  и  $B$  разбивают замкнутую ломаную  $W$  на две ломаных  $W_1$  и  $W_2$ . Ориентируем ломаную  $W$  в положительном направлении, а ломаные  $W_1$  и  $W_2$  — в соответствии с ориентацией ломаной  $W$ . Обозначим через  $x_i$  угол поворота от начального ребра ломаной  $W_i$  к конечному ребру этой ломаной.

Рассмотрим замкнутые контуры  $\gamma_i = W_i \cup \gamma$  и зададим на них положительную ориентацию. Пусть  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  — соответствующие углы поворота при переходе с пути  $\gamma$  на ломаную  $W_i$  и обратно, с ломаной  $W_i$  на путь  $\gamma$ , во время обхода контура  $\gamma_i$  в положительном направлении, рис. 2.1.

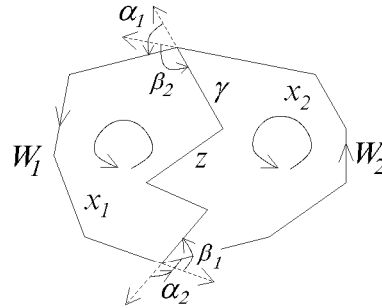


Рис. 2.1: Полный угол поворота пути  $\gamma$  меньше  $2\pi$

Поскольку полный угол поворота вектора-ребра при движении в положительном направлении по замкнутому контуру, ограничивающему область, равен  $2\pi$ , имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} z + \alpha_1 + x_1 + \beta_1 &= 2\pi \\ -z + \beta_2 + x_2 + \alpha_2 &= 2\pi, \end{aligned}$$

Отметим, что, в силу невырожденности минимального бинарного дерева  $\Gamma$ , ребра  $a$  и  $b$  не лежат на  $W$ , поэтому углы  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  положительны и строго меньше  $\pi$ . Кроме того, в силу выпуклости  $W$ , углы  $x_1$  и  $x_2$  неотрицательны и их сумма равна  $2\pi$ , поэтому каждый из них не превосходит  $2\pi$ .

Вычтем теперь из первого соотношения второе, выразим из полученного уравнения  $z$  и оценим его модуль. Имеем:

$$|z| \leq \frac{1}{2}(|x_2 - x_1| + |\alpha_2 - \alpha_1| + |\beta_2 - \beta_1|) < \frac{1}{2}(2\pi + \pi + \pi) = 2\pi,$$

что и требовалось доказать.

Оказывается, как мы в дальнейшем увидим, имеет место утверждение, обратное к предложению 2.3, а именно, каждое плоское бинарное дерево с числом вращения, не превосходящим 5, имеет выпуклую минимальную реализацию.

## 2 Плоские бинарные деревья и диагональные триангуляции

Для описания минимальных бинарных деревьев с выпуклыми границами удобно воспользоваться двойственным объектом, а именно, диагональными триангуляциями многоугольников.



## 2.1 Соответствие между плоскими бинарными деревьями и диагональными триангуляциями

Пусть  $W$  — плоский  $n$ -угольник, и  $T = \{\Delta_i\}_{i=1}^{n-2}$  — некоторая его диагональная триангуляция. Иными словами, многоугольник  $W$  разбит на треугольники  $\Delta_i$ , каждый из которых образован некоторой тройкой из сторон и диагоналей  $n$ -угольника  $W$ . Таким образом,  $W = \cup_i \Delta_i$  и внутренности разных треугольников  $\Delta_i$  не пересекаются; в частности, каждый треугольник  $\Delta_i$  принадлежит  $W$  (вообще говоря, мы не предполагаем, что  $n$ -угольник  $W$  — выпуклый). Треугольники триангуляции  $T$  будем называть *ячейками*. Стороны и вершины ячеек триангуляции  $T$  называются соответственно *ребрами* и *вершинами* триангуляции  $T$ ; при этом, ребра триангуляции  $T$ , являющиеся сторонами  $n$ -угольника  $W$ , называются *граничными*, а все остальные ребра — *внутренними* ребрами или *диагоналями*.

По каждой диагональной триангуляции  $T$  многоугольника  $W$  можно построить плоское бинарное дерево, называемое двойственной сетью этой триангуляции. Отметим внутри каждой ячейки  $\Delta_i$  по одной точке  $v_i$ , а также внутри каждого граничного ребра  $b_i$  (стороны  $n$ -угольника  $W$ ) — по одной точке  $w_i$ . Каждую пару точек  $v_i$  и  $v_j$ , таких что ячейки  $\Delta_i$  и  $\Delta_j$  смежны, соединим вложенной кривой  $\gamma_{ij}$ , лежащей внутри  $\Delta_i \cup \Delta_j$ . Каждую пару точек  $v_i$  и  $w_j$ , принадлежащих одной ячейке  $\Delta_i$ , также соединим вложенной кривой  $\delta_{ij}$ , внутренность которой лежит внутри  $\Delta_i$ . Кривые  $\gamma_{ij}$  и  $\delta_{ij}$  проведем так, чтобы внутренность каждой из них не пересекала объединение всех остальных кривых этого семейства. Тем самым мы получим вложенную сеть, *ребра* которой — кривые  $\gamma_{ij}$  и  $\delta_{ij}$ , а *вершины* — концы этих кривых. Полученная сеть и называется *двойственной сетью триангуляции  $T$*  и будет обозначаться через  $\Gamma_T$ . Ребра  $\gamma_{ij}$  двойственной сети  $\Gamma_T$  называются *внутренними*, а  $\delta_{ij}$  — *граничными*.

Обратно, пусть  $\Gamma$  — плоское бинарное дерево, граница которого состоит из  $n$  вершин. Мы хотим построить триангуляцию  $T$  некоторого многоугольника  $W$ , такую что ее двойственная сеть  $\Gamma_T$  эквивалентна сети  $\Gamma$ . Отбрасывая тривиальный случай, когда  $\Gamma$  состоит из одного ребра, будем предполагать, что  $n \geq 3$ .

Если  $n = 3$ , то выберем в качестве  $W$  произвольный треугольник, а в качестве  $T$  — единственную триангуляцию треугольника  $W$ , состоящую из одной ячейки  $W$ . Ясно, что  $\Gamma_T$  и  $\Gamma$  эквивалентны.

Пусть теперь  $n > 3$ . Обойдем дерево  $\Gamma$  в положительном направлении, и пусть  $e_0, \dots, e_{n-1}$  — последовательные граничные ребра из  $\Gamma$ . Пусть  $W$  — произвольный выпуклый  $n$ -угольник. Ориентируем  $W$  в положительном направлении, и пусть  $b_0, \dots, b_{n-1}$  — последовательные стороны из  $W$ . Для удобства изложения, индексы  $i$  в  $e_i$  и  $b_i$  мы будем рассматривать как элементы из группы  $\mathbb{Z}_n$ .

Рассмотрим естественное взаимно однозначное соответствие  $\nu$  между граничными ребрами дерева  $\Gamma$  и сторонами многоугольника  $W$ , определен-

ное так:  $\nu : e_i \mapsto b_i$ . По лемме 1.1, дерево  $\Gamma$  содержит некоторые усы  $(e, f)$ . Ясно, что усы  $(e, f)$  имеют вид  $(e_k, e_{k+1})$  для некоторого  $k \in \mathbb{Z}_n$ . Стороны  $b_k = \nu(e_k)$  и  $b_{k+1} = \nu(e_{k+1})$  многоугольника  $W$  — соседние, поэтому существует единственная диагональ  $b_{kk+1}$  многоугольника  $W$ , образующая вместе со сторонами  $b_k$  и  $b_{k+1}$  некоторый треугольник  $\Delta_1$ .

Пусть  $e_{kk+1}$  — ребро из  $\Gamma$ , смежное одновременно с ребрами  $e_k$  и  $e_{k+1}$ . Отрежем от дерева  $\Gamma$  усы  $(e_k, e_{k+1})$ , и обозначим полученное бинарное дерево через  $\Gamma^1$ . Одновременно отрежем от многоугольника  $W$  треугольник  $\Delta_1$ , и полученный выпуклый многоугольник обозначим через  $W^1$ . Зададим взаимно однозначное соответствие  $\nu^1$  между граничными ребрами дерева  $\Gamma^1$  и сторонами  $(n-1)$ -угольника  $W^1$ , положив его равным  $\nu$  для всех граничных ребер из  $\Gamma^1$ , отличных от  $e_{kk+1}$ , и определив его на ребре  $e_{kk+1}$  единственно возможным способом:  $\nu^1 : e_{kk+1} \mapsto b_{kk+1}$ .

К вновь полученной тройке  $(\Gamma^1, W^1, \nu^1)$  применим вышеописанную операцию. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока многоугольник  $W$  не превратится в некоторый треугольник  $\Delta$ . Обозначим через  $\Delta_i$ ,  $i = 1, \dots, n-3$ , треугольник, отрезанный от перестроенного многоугольника  $W$  на  $i$ -ом шаге, а через  $\Delta_{n-2}$  — треугольник  $\Delta$ . В результате мы получаем триангуляцию  $T = \{\Delta_i\}$  многоугольника  $W$ , у которой двойственная сеть  $\Gamma_T$  эквивалентна  $\Gamma$ .

Опишем теперь некоторые структурные элементы триангуляций, которые будут нам полезны в дальнейшем.

## 2.2 Структурные элементы диагональных триангуляций

Пусть  $T = \{\Delta_i\}$  — некоторая диагональная триангуляция произвольного многоугольника  $W$ . В соответствии со сделанным выше соглашением, все граничные вершины двойственной сети  $\Gamma_T$  принадлежат граничным ребрам триангуляции  $T$  и, наоборот, каждое граничное ребро из  $T$  содержит ровно одну вершину двойственной сети  $\Gamma_T$ , и эта вершина является граничной для  $\Gamma_T$ . В частности, каждое граничное ребро сети  $\Gamma_T$  пересекает ровно одно ребро триангуляции  $T$  и это ребро из  $T$  является граничным; наоборот, каждое граничное ребро триангуляции пересекается с единственным граничным ребром сети  $\Gamma_T$ . Далее, каждое внутреннее ребро двойственной сети  $\Gamma_T$  пересекает единственную диагональ триангуляции  $T$ , и наоборот, каждая диагональ триангуляции  $T$  пересекается с единственным внутренним ребром сети  $\Gamma_T$ .

Таким образом, мы описали следующие естественные взаимно однознач-

ные соответствия:

$$\begin{aligned} \{\text{граничные ребра } T\} &\longleftrightarrow \{\text{граничные вершины } \Gamma_T\} \\ \{\text{граничные ребра } T\} &\longleftrightarrow \{\text{граничные ребра } \Gamma_T\} \\ \{\text{диагонали } T\} &\longleftrightarrow \{\text{внутренние ребра } \Gamma_T\} \\ \{\text{ячейки } T\} &\longleftrightarrow \{\text{внутренние вершины } \Gamma_T\} \end{aligned}$$

*Именно описанные только что соответствия и будут иметься в виду в дальнейшем.*

Если двойственная сеть диагональной триангуляции  $T$  обладает некоторым свойством, то мы, в дальнейшем, будем говорить, что сама триангуляция  $T$  обладает этим свойством. Так, например, совокупность ячеек из  $T$  называется *связной*, если пересечение двойственной сети  $\Gamma_T$  с этими ячейками связно. Или, скажем, число вращения сети  $\Gamma_T$  будем называть *числом вращения триангуляции  $T$* . Далее, будем говорить, что диагональная триангуляция  $T$  имеет *минимальную реализацию* (соответственно, *выпуклую минимальную реализацию*, *правильную минимальную реализацию*), если такой реализацией обладает ее двойственная сеть. По предложению 2.3, число вращения диагональной триангуляции, обладающей выпуклой минимальной реализацией, не превосходит пяти.

Из вышесказанного вытекает, что для решения задачи В достаточно описать все диагональные триангуляции с не превосходящим пяти числом вращения. Оказывается, для этого описания полезно перейти к диагональным триангуляциям специального вида, определяемым тем, что все их ячейки — правильные треугольники. Во Введении мы называли такие триангуляции паркетами. Однако теперь мы определим паркеты более общим образом, а диагональные триангуляции, составленные из правильных треугольников, будем называть *деревянными паркетами*, подчеркивая тем самым, что двойственная сеть таких триангуляций является деревом.

Легко построить пример плоского бинарного дерева, для которого соответствующая диагональная триангуляция не эквивалентна никакому деревянному паркету, см. рис. 2.3. Тем не менее, в интересующем нас случае диагональных триангуляций с числом вращения, не превосходящим пяти, всегда можно построить соответствующий деревянный паркет. Этот факт будет установлен в следующем разделе в теореме 2.1 о паркетной реализации.

### 3 Паркетная реализация бинарных деревьев с не превосходящим пяти числом вращения

Рассмотрим каноническое разбиение плоскости на конгруэнтные правильные треугольники. Это разбиение можно получить так. Разобьем плоскость на полосы одинаковой ширины семейством параллельных прямых.

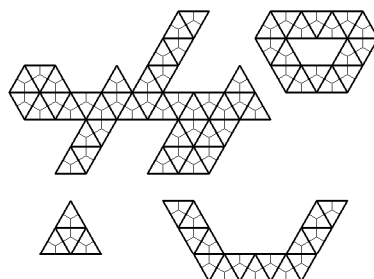


Рис. 2.2: Двойственный граф паркета

На одной из этих прямых фиксируем точку и повернем эти прямые на  $60^\circ$  и  $-60^\circ$ . Полученные три семейства параллельных прямых, называемых в дальнейшем *направляющими*, и задают искомое разбиение, которое мы будем называть (треугольным) *паркетом плоскости*, а правильные треугольники, его составляющие, — *ячейками*. Стороны ячеек будем называть *ребрами паркета*, а их вершины — *вершинами паркета*. Множество ячеек паркета плоскости, расположенных между соседними параллельными направляющими, назовем *полосой паркета плоскости*.

**Определение.** Произвольную совокупность ячеек назовем *паркетом*.

Пусть теперь  $D$  — произвольный паркет. Пару ячеек паркета  $D$  назовем *смежными*, если они пересекаются по ребру. Границу паркета  $D$  как подмножества плоскости назовем *контуром* и обозначим через  $\partial D$ . Ребра ячеек из  $D$ , лежащие на контуре, назовем *граничными ребрами* или *ребрами контура*, а остальные ребра — *внутренними*. В дальнейшем мы часто будем объединять последовательно расположенные параллельные ребра контура в отрезки, называемые *звеньями контура*.

Определим теперь *двойственный граф*  $\Gamma_D$  *паркета*  $D$  как плоский граф, полученный следующим образом. Соединим центр каждой ячейки этого паркета  $D$  отрезками с серединами ее сторон. В качестве вершин двойственного графа  $\Gamma_D$  возьмем центры ячеек из  $D$  и середины граничных ребер паркета  $D$ . При этом отрезки, соединяющие центры смежных ячеек с серединой их общей стороны, мы объединим в одно ребро. Отметим, что двойственный граф  $\Gamma_D$  является объединением невырожденных минимальных сетей, каждая из которых затягивает множество середин ребер одной из связных компонент контура паркета  $D$  (см. рис. 2.2).

Для удобства, терминологию из теории графов, применяемую к двойственному графу паркета, мы будем переносить на сам паркет. А именно, произвольную совокупность ячеек паркета назовем его *подпаркетом*. Назовем паркет *связным*, если его двойственный граф связан, *деревянным* — если его двойственный граф — дерево. *Связными компонентами* паркета

назовем его подпаркеты, двойственные графы которых являются связными компонентами двойственного графа самого паркета. Также под *числом вращения* деревянного паркета будем понимать число вращения его двойственного графа.

С другой стороны, мы будем также переносить термины, применяемые к паркетам, на их двойственные графы, и, более общо, на эквивалентные этим графам плоские, в частности, минимальные, сети.

**Теорема 2.1 (О паркетной реализации)** *Всякое плоское бинарное дерево с числом вращения, не превосходящим пяти, эквивалентно двойственной сети некоторого паркета.*

**Доказательство.** Напомним, что каждое плоское бинарное дерево эквивалентно двойственному графу некоторой диагональной триангуляции выпуклого многоугольника. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что существует непрерывное кусочно-аффинное вложение, переводящее эту триангуляцию на диагональную триангуляцию некоторого многоугольника, составленную из ячеек паркета плоскости.

Пусть  $\Gamma$  — рассматриваемое бинарное дерево, а  $T$  — соответствующая диагональная триангуляция выпуклого многоугольника  $P$ . Будем считать, что плоскость, содержащая многоугольник  $P$ , и плоскость, разбитая на правильные треугольники, образующие паркет  $\mathcal{T}$ , ориентированы каноническим образом.

Возьмем произвольный треугольник  $t$  триангуляции  $T$  и поставим ему в соответствие произвольную ячейку  $\tau$  паркета  $\mathcal{T}$ . Пусть  $\varphi_t$  — сохраняющее ориентацию аффинное отображение, переводящее  $t$  в  $\tau$ . Если триангуляция  $T$  состоит из одного треугольника, то искомое кусочно-аффинное отображение построено (оно совпадает с  $\varphi_t$ ).

В противном случае, рассмотрим треугольник  $t' \in T$ , смежный с  $t$  по некоторой стороне  $a$ . Поставим ему в соответствие ячейку  $\tau' \in \mathcal{T}$ , смежную с ячейкой  $\tau$  по ребру  $\varphi_t(a)$ . Пусть  $\varphi_{t'}$  — сохраняющее ориентацию аффинное отображение, переводящее  $t'$  в  $\tau'$  и совпадающее с  $\varphi_t$  на общей стороне  $a$  треугольников  $t$  и  $t'$ . Если триангуляция  $T$  содержит только два треугольника, то искомое кусочно-аффинное вложение  $\varphi_{t \cup t'}$  склеивается из отображений  $\varphi_t$  и  $\varphi_{t'}$ .

В противном случае, рассматриваем новый треугольник  $t'' \in T$ , смежный с одним из уже выбранных треугольников (т.е. смежный с  $t \cup t'$ ) по стороне  $b$ . Опять строим сохраняющее ориентацию аффинное отображение  $\varphi_{t''}$ , переводящее  $t''$  в ячейку  $\tau'' \in \mathcal{T}$ , смежную с  $\tau \cup \tau'$  по ребру  $\varphi_{t \cup t'}(b)$ , требуя при этом, чтобы отображения  $\varphi_{t''}$  и  $\varphi_{t \cap t'}$  совпадали на  $b$ .

Если нам удастся продолжить описанный только что процесс до тех пор, пока не будут задействованы все треугольники триангуляции  $T$ , и при этом полученный паркет окажется деревянным, то в результате мы построим кусочно-аффинное отображение из многоугольника  $P$  в паркет

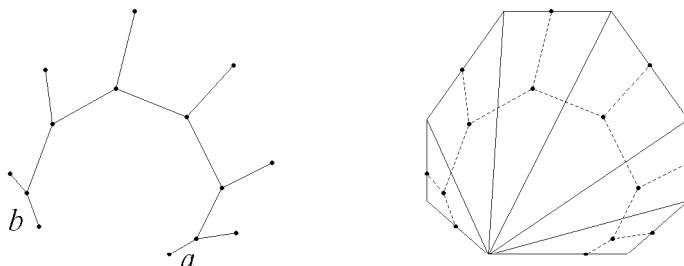


Рис. 2.3: Это плоское бинарное дерево не имеет паркетной реализации

плоскости  $\mathcal{T}$ , такое что его образ и будет искомым деревянным паркетом. Единственное, что нам может помешать — это возможность склейки на одном из шагов тех ребер выбираемых ячеек, прообразы которых не склеиваются в триангуляции  $T$ . На рис. 2.3 приведен пример бинарного дерева и соответствующей ему триангуляции, не имеющих “паркетной реализации”. Отметим, что у рассматриваемого дерева число вращения равно 6 и достигается на ребрах  $a$  и  $b$ :  $\text{tw}(a, b) = 6$ .

Однако, если число вращения дерева  $\Gamma$  не превосходит пяти, то такие склейки невозможны. Действительно, в противном случае рассмотрим двойственный граф паркета, возникшего на том шаге, когда появилась “незаконная” склейка, скажем, по ребру  $a$ . Этот двойственный граф, очевидно, содержит цикл. Рассмотрим ребро двойственного графа, соединяющее центры ячеек, смежных по стороне  $a$ . Это ребро делится стороной  $a$  на два отрезка, соответствующих ребрам дерева  $\Gamma$ , скажем, ребрам  $b$  и  $c$ .

Хорошо известно, что полный обход по любой замкнутой вложенной кривой на плоскости приводит к повороту на угол  $\pm 2\pi$ . Поэтому, в силу того, что двойственный граф паркета является минимальной сетью, а также в силу геометрического смысла числа вращения минимального бинарного дерева (см. предложение 2.1), получаем, что  $\text{tw}(b, c) = \pm 6$ . Мы пришли к противоречию, что и доказывает невозможность незаконных склеек.

Таким образом, корректно определено кусочно-аффинное отображение  $\varphi: P \rightarrow \mathbb{R}^2$ , переводящее треугольники триангуляции  $T$  в ячейки паркета  $\mathcal{T}$ , причем на внутренности многоугольника  $P$  отображение  $\varphi$  взаимно однозначно с образом. Нам осталось показать, что это отображение также взаимно однозначно и на границе многоугольника  $P$ , т.е.  $\varphi$  является непрерывным вложением. Идея доказательства последнего утверждения состоит в рассмотрении “незаконно склеившихся по вершине” ячеек паркета  $\varphi(T)$ , выбора в них соответствующих ребер двойственного графа и доказательстве того, что между этими ребрами число вращения будет по модулю больше пяти. Чтобы избежать несущественных технических нагромождений, мы ненадолго отложим строгое доказательство этого факта (см. ниже

раздел “Линейные участки”), а пока займемся более детальным анализом комбинаторного и геометрического устройств деревянных паркетов.

Теорема 2.1 позволяет нам вместо плоских бинарных деревьев рассматривать деревянные паркетные с числом вращения, не превосходящим пяти. Класс таких паркетов мы будем обозначать через  $WP_5$ .

## 4 Паркетные и их свойства

В настоящем пункте мы начнем изучать различные “элементарные кирпичи”, из которых составлены паркетные. Особое внимание мы уделим случаю деревянных паркетов. На протяжении этого пункта все паркетные считаются связными.

### 4.1 Разбиения паркета на скелет и наросты

Оказывается, структуру паркета можно достаточно легко понять, если предварительно избавиться от некоторых “случайных” его элементов, называемых нами наростами.

Пусть  $D$  — произвольный (связный) паркет. Его ячейку назовем *крайней*, если по крайней мере два ее ребра лежат на контуре  $\partial D$ , и *внутренней* — если все ее ребра лежат внутри паркета. Если ровно одно ребро ячейки лежит на  $\partial D$ , то такая ячейка называется *полукрайней*.

Среди крайних ячеек важный класс образуют так называемые наросты.

**Определение.** Крайнюю ячейку назовем *наростом*, если она примыкает к внутренней ячейке.

Отметим, что наросты бывают двух типов. Пусть  $\Delta$  — нарост, крепящийся к внутренней ячейке  $\Delta'$ . Если к  $\Delta'$  больше не крепится никаких наростов, то  $\Delta$  называется *внутренним наростом*. В противном случае, нарост  $\Delta$  — *концевой*, см. рис. 2.4.

Легко видеть, что паркет, состоящий из 1, 2 или 3 ячеек, не содержит наростов. Первый паркет, содержащий наросты, состоит из 4 ячеек и изображен на рис. 2.4 справа. Отметим, что этот паркет является исключительным в следующем смысле: к его внутренней ячейке примыкают сразу три нароста. Легко видеть, что если у паркета имеется более четырех ячеек, то к каждой внутренней ячейке может крепиться не более двух наростов.

**Определение.** Паркет, не содержащий наростов, назовем *скелетом*.

Как мы увидим ниже, скелеты имеют достаточно жесткую структуру, что позволяет в некоторых случаях их полностью описать.

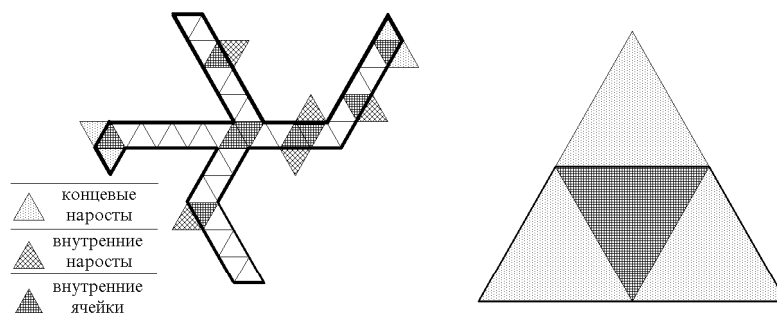


Рис. 2.4: Разложение паркета на скелет и наросты

Пусть  $D$  — паркет. Рассмотрим все его внутренние ячейки, и для каждой такой ячейки — все крепящиеся к ней наросты. Если к данной внутренней ячейке  $\Delta$  крепится ровно один нарост, — выкинем его. Если же к  $\Delta$  крепится несколько наростов, — выкинем любой из них. Проведем эту операцию для всех внутренних ячеек.

**Утверждение 2.2** *Получившийся в результате только что описанной операции паркет является скелетом.*

**Доказательство.** Пусть  $S$  — получившийся паркет, а  $\Delta$  — произвольная ячейка из  $D$ . Выясним, как меняется тип ячейки  $\Delta$  при переходе от паркета  $D$  к паркету  $S$ . Имеем:

- если  $\Delta$  — внутренняя ячейка из  $D$ , к которой не крепится ни одного нароста из  $D$ , то  $\Delta$  — внутренняя ячейка в  $S$  (ни одна смежная с  $\Delta$  ячейка из  $D$  не выбрасывается);
- если  $\Delta$  — внутренняя ячейка из  $D$ , к которой крепился хотя бы один нарост, то  $\Delta$  — полукрайняя ячейка в  $S$  (так как мы выбрасываем ровно один нарост, крепящийся к  $\Delta$ );
- если  $\Delta$  — полукрайняя ячейка из  $D$ , то  $\Delta$  — полукрайней ячейка и в  $S$  (ни одна смежная с  $\Delta$  ячейка из  $D$  не выбрасывается);
- если  $\Delta$  — крайняя ячейка в  $D$ , не являющаяся наростом, то  $\Delta$  — крайняя ячейка в  $S$ ;
- если  $\Delta$  — нарост, который не выбрасывается, то  $\Delta$  не является наростом в  $S$ , так как единственная смежная с  $\Delta$  ячейка из  $D$  перестает быть внутренней (она становится полукрайней, см. выше);
- если  $\Delta$  — нарост, который выбрасывается, то его, конечно, нет в  $S$ .



Мы рассмотрели все типы ячеек и обнаружили, что при переходе от  $D$  к  $S$  ни одна из ячеек не становится (не остается) наростом, поэтому  $S$  наростов не содержит. Доказательство закончено.

Пусть  $D$  — паркет,  $\Delta_i$  — семейство выброшенных по только что описанному правилу наростов,  $S$  — оставшийся скелет. Представление  $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$  называется *разложением паркета  $D$  на скелет и наросты*. Отметим, что это разложение однозначно в том и только том случае, если у паркета  $D$  нет концевых наростов, т.е. нескольких наростов, крепящихся к одной внутренней ячейке. Чтобы подчеркнуть происхождение скелета  $S$ , мы иногда будем называть его *скелетом паркета  $D$* .

В самом общем виде, план построения классификации паркетов из  $\mathcal{WP}_5$  состоит из двух шагов: сначала описываются все скелеты из  $\mathcal{WP}_5$ , а затем выясняется, каким образом к этим скелетам можно прикреплять наросты так, чтобы не выйти за рамки класса  $\mathcal{WP}_5$ . В следующем разделе мы начнем изучать устройство скелетов.

## 4.2 Разбиение деревянного скелета на узлы ветвления и линейные участки

В настоящем разделе  $S$  обозначает произвольный деревянный скелет.

Выберем из скелета  $S$  все его внутренние ячейки, и рассмотрим связанные компоненты полученного паркета. Эти связанные компоненты назовем *узлами ветвления*.

Рассмотрим множество ячеек скелета  $S$ , не являющихся внутренними. Связные компоненты полученного паркета назовем *линейными участками*.

Итак, мы построили *разложение скелета на узлы ветвления и линейные участки*. В отличие от разложения паркета на скелет и наросты, это новое разложение единственно. Легко видеть, что узлы ветвления скелета произвольного деревянного паркета не зависят от разложения этого паркета на скелет и наросты. Поэтому узлы ветвления скелета паркета  $D$  мы будем также называть *узлами ветвления паркета  $D$* . Более того, если фиксировано разложение  $S \sqcup \{\Delta_i\}$  паркета  $D$  на скелет и наросты, или же если вид этого разложения не важен, то и линейные участки скелета  $S$  также будут называться *линейными участками паркета  $D$* .

Как мы увидим ниже, узлы ветвления деревянных скелетов могут быть ровно пяти типов, причем у скелетов из  $\mathcal{WP}_5$  все эти пять типов встречаются. Для линейных участков ограниченность пятеркой числа вращения приводит к появлению у линейных участков важной геометрической характеристики, называемой направляющей линейного участка. Неформально, направляющая линейного участка — это направляющая паркета плоскости, вдоль которой “происходит распространение” рассматриваемого линейного участка. Определение направляющей линейного участка удобно

давать в терминах осей, построение которых описывается в следующем разделе.

### 4.3 Ось

Пусть  $S$  — произвольный (связный) скелет, состоящий из  $n$  ячеек. *Осью*  $\text{Sp } S$  скелета  $S$  называется плоский граф, получающийся следующим образом.

Если  $n = 1$ , то  $\text{Sp } S$  — это произвольная средняя линия единственной ячейки из  $S$ . В этом случае ось можно построить тремя различными способами.

Если  $n = 2$ , то  $\text{Sp } S$  состоит из двух параллельных средних линий, выходящих из середины общей стороны двух ячеек, составляющих  $S$ . На сей раз ось можно выбрать двумя способами.

Если  $n \geq 3$ , то  $\text{Sp } S$  строится однозначно следующим образом. В каждой некрайней ячейке соединим отрезками середины тех сторон, которые лежат внутри скелета  $S$ . В силу отсутствия наростов, каждая крайняя ячейка примыкает к ячейке, не являющейся внутренней, т.е. к ячейке, в которой проведена единственная средняя линия. Построим в крайней ячейке ту среднюю линию, которая параллельна единственной средней линии в примыкающей к ней ячейке.

Все принадлежащие  $\text{Sp } S$  средние линии называются *осями соответствующих ячеек из  $S$* . Удобно объединить последовательно идущие взаимно параллельные оси ячеек из  $S$  в *ребра оси*  $\text{Sp } S$ . Поэтому вершины графа  $\text{Sp } S$  — это, во-первых, середины тех ребер контура, в которые приходит ось, во-вторых, все середины ребер внутренних ячеек, и, в-третьих, середины тех внутренних ребер скелета  $S$ , к которым примыкают полукрайние ячейки с непараллельными осями.

Пусть скелет  $S$  деревянный. Тогда все циклы его оси  $\text{Sp } S$  находятся во внутренних ячейках. Профакторизовав по этим циклам, получим, очевидно, дерево. В построенном дереве объединим последовательно идущие ребра, соединяющиеся в вершинах степени 2, в одно ребро. Получим дерево  $K$  без вершин степени 2.

**Определение.** Дерево  $K$ , только что построенное, называется *кодом скелета  $S$* .

Как мы увидим ниже, коды скелетов из  $\mathcal{WP}_5$  легко описать: они представляют собой всевозможные плоские деревья с не более чем шестью вершинами степени 1.

Пусть  $S$  — деревянный скелет, а  $L$  — его линейный участок. *Осью*  $\text{Sp } L$  *линейного участка*  $L$  назовем пересечение оси  $\text{Sp } S$  скелета  $S$  с линейным участком  $L$ :  $\text{Sp } L = \text{Sp } S \cap L$ .

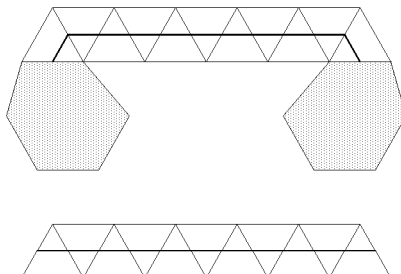


Рис. 2.5: Ось линейного участка

**Важное замечание.** Ось линейного участка существенно зависит от способа крепления этого участка к оставшейся части скелета. Это приводит к тому, что ось линейного участка  $L$  и его же ось как паркета могут, вообще говоря, отличаться друг от друга. Соответствующие примеры приведены на рис. 2.5.

Деревянный скелет назовем *линейным*, если его ось — ломаная линия. Ясно, что деревянный скелет линейен тогда и только тогда, когда он не содержит узлов ветвления. Очевидно, каждый линейный участок является линейным скелетом.

Для описания линейных участков скелетов из  $\mathcal{WP}_3^2$  оси оказываются чрезвычайно полезными. А именно, имеет место следующее предложение.

**Предложение 2.4** *Ось любого линейного участка скелета из  $\mathcal{WP}_3^2$  однозначно проектируется на некоторую направляющую паркета плоскости.*

Прямые, обладающие свойством из предложения 2.4, называются *направляющими* рассматриваемого линейного участка. Перед тем, как перейти к доказательству предложения 2.4, полезно определить число вращения ломаной линии и установить связь между числом вращения линейного участка и его осью.

#### 4.4 Число вращения ломаной

В разделе 1 настоящей главы для каждой упорядоченной пары  $(a, b)$  звеньев ломаной  $L$  мы определили угол поворота  $\alpha(a, b)$  от ребра  $a$  к ребру  $b$ .

**Определение.** *Числом вращения  $\text{tw}(a, b)$  упорядоченной пары звеньев  $(a, b)$  ломаной  $L$  называется угол поворота  $\alpha(a, b)$  от ребра  $a$  к ребру  $b$ , деленный на  $\pi/3$ :*

$$\text{tw}(a, b) = \frac{3}{\pi} \alpha(a, b).$$

Числом вращения ломаной  $L$  называется наибольшее из чисел вращения между ее звеньями:

$$\text{tw } L = \max_{(a,b)} \text{tw}(a, b).$$

Отметим, что число вращения ломаной не обязано быть целым числом. Тем не менее, число вращения оси линейного участка всегда целое.

Легко доказывается следующее утверждение.

**Утверждение 2.3** *Ломаная  $L$  однозначно проектируется на некоторую прямую  $l$  тогда и только тогда, когда  $\text{tw } L$  строго меньше 3.*

**Доказательство.** Ориентируем ломаную  $L$ . Тогда звенья этой ломаной можно рассматривать как вектора. Для наглядности отложим последовательные вектора-звенья ломаной  $L$  от одной фиксированной точки. Так как  $\text{tw } L < 3$ , то множество отложенных векторов заключено в некотором угле  $\varphi$ , величина которого строго меньше  $\pi$ . Пусть  $n$  — направляющий вектор биссектрисы угла  $\varphi$ , и  $l$  — произвольная прямая, параллельная  $n$  и ориентированная в направлении  $n$ . Очевидно, все вектора-звенья ломаной  $L$  имеют положительную проекцию на прямую  $l$ , поэтому ломаная  $L$  проектируется на  $l$  однозначно. Обратное утверждение очевидно. Что и требовалось доказать.

Таким образом, для доказательства предложения 2.4 достаточно показать, что число вращения оси линейного участка скелета из  $\mathcal{WP}_3$  не превосходит 3. В следующем разделе мы определим осевой граф, который позволит нам наглядно представить связь между числом вращения линейного скелета (участка) и его оси.

## 4.5 Осевой граф

Пусть  $L$  — произвольный линейный скелет или линейный участок некоторого деревянного скелета, и пусть  $\text{Sp } L$  — его ось. В силу линейности, каждая ячейка из  $L$  имеет ровно одну ось. Рассмотрим в каждой ячейке то ее ребро, которое параллельно содержащейся в ней оси, и соединим середину этого ребра с серединой оси отрезком. Такие отрезки будем называть *отростками*.

Рассмотрим объединение оси  $\text{Sp } L$  с отростками и зададим на нем структуру сети следующим образом. Вершинами сети будут два конца ломаной  $\text{Sp } L$  и все концы отростков (для каждого отростка — его “точка крепления” к оси, т.е. середина оси ячейки, и соответствующая середина стороны ячейки). Так построенную сеть будем называть *осевым графом* и обозначать через  $\Gamma_{\text{Sp}}$ .

Следующее утверждение очевидно.

**Утверждение 2.4** *Осевой граф линейного скелета (участка) эквивалентен двойственному графу этого скелета (участка). Поэтому, в частности, их числа вращения совпадают.*

Отметим, что не все ребра осевого графа являются отрезками. Ребра из  $\Gamma_{\text{Sp}}$ , не являющиеся отрезками, называются *ребрами поворота*. Ребра осевого графа, не являющиеся ребрами поворота и отрезками, называются *прямыми ребрами*. Ребро осевого графа называется *концевым*, если оно инцидентно концу оси. Отметим, что концевое ребро всегда прямое. Итак, у осевого графа имеются: прямые ребра (концевые и неконцевые), ребра поворота и отрезки.

#### 4.6 Связь между числом вращения линейного деревянного скелета и его оси

Цель настоящего раздела — доказать следующее предложение и следствия из него.

**Предложение 2.5** *Пусть  $L$  — линейный скелет, состоящий не менее чем из трех ячеек, и  $\text{Sp } L$  — его ось. Тогда*

$$\text{tw } L = \text{tw } \text{Sp } L + 3.$$

*Если же паркет  $L$  состоит менее чем из трех ячеек, то*

$$\text{tw } \text{Sp } L = 0.$$

**Доказательство.** Идея доказательства состоит в следующем. Рассмотрим осевой граф  $\Gamma_{\text{Sp}}$  скелета  $L$ . Сначала мы покажем, что число вращения оси достигается на звеньях  $a$  и  $b$ , состоящих не менее чем из двух осей ячеек. Последнее означает, что к звеньям  $a$  и  $b$  крепятся отрезки с обеих сторон каждого звена. Далее, будет доказано, что число вращения осевого графа достигается на некоторых отрезках.

Затем мы покажем, что число вращения между отрезками осевого графа отличается от числа вращения между звеньями  $a$  и  $b$  оси, к которым эти отрезки крепятся, не более чем на 3, и равно полному углу поворота при движении по пути в  $\Gamma_{\text{Sp}}$  от первого отрезка ко второму. Этот угол может быть легко вычислен. Он равен  $\pm\pi/2 + (\pi/3) \text{tw}(a, b) \pm \pi/2$  (в силу того, что отрезки крепятся к оси под углом в  $\pi/2$ ). Тот факт, что звенья  $a$  и  $b$ , на которых достигается число вращения, состоят не менее чем из двух осей ячеек, позволяет выбрать в последнем соотношении знаки плюс, что и завершает доказательство предложения.

Перейдем к подробностям.

**Лемма 2.1** *Пусть  $a$  и  $b$  — звенья оси  $\text{Sp } L$ , такие что  $\text{tw}(a, b) = \text{tw } \text{Sp } L$ . Тогда каждое из звеньев  $a$  и  $b$  состоит не менее чем из двух осей ячеек.*

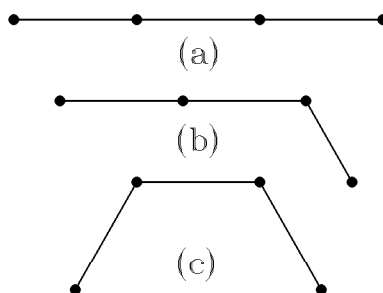


Рис. 2.6: Взаимное расположение трех последовательных осей ячеек

**Доказательство.** Для определенности, будем доказывать лемму для ребра  $a$ . Если  $a$  — крайнее звено ломаной  $\text{Sp } L$ , то  $a$ , по определению оси скелета, состоит не менее чем из двух осей ячеек.

Пусть теперь звено  $a$  не является крайним. Предположим противное, т.е.  $a$  состоит из оси ровно одной ячейки. Рассмотрим две оси ячеек, смежные с  $a$  (такие существуют, так как  $a$  — не крайнее звено). На рис. 2.6 приведены все возможные случаи взаимного расположения трех последовательно идущих осей ячеек. Случаи (а) и (б), очевидно, не подходят, так как тогда  $a$  состоит более чем из одной оси ячейки.

Рассмотрим случай (в). Тогда, очевидно, число вращения между одним из двух смежных с  $a$  звеном ломаной  $\text{Sp } L$  и звеном  $b$  больше, чем  $\text{tw}(a, b)$ , и, значит, чем  $\text{tw } \text{Sp } L$ . Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

**Лемма 2.2** Пусть  $x$  и  $y$  — ребра осевого графа  $\Gamma_{\text{Sp}}$ , для которых выполняется  $\text{tw}(x, y) = \text{tw } \Gamma_{\text{Sp}}$ . Тогда  $x$  и  $y$  — отростки.

**Доказательство.** Напомним, что число вращения плоского бинарного дерева достигается на его граничных ребрах. Поэтому осталось показать, что  $x$  и  $y$  — не концевые ребра.

В силу определения оси паркета, каждое концевое звено оси состоит не менее чем из двух осей ячеек (напомним, что паркет предполагается состоящим не менее чем из трех ячеек). Поэтому к каждому концевому звену крепятся отростки с обеих сторон относительно этого звена. Если, скажем,  $x$  — концевое ребро осевого графа, то, очевидно, можно заменить  $x$  на один из двух последовательно идущих отростков, крепящихся к звену оси, содержащему  $x$ , и получить пару ребер осевого графа, число вращения между которыми больше  $\text{tw } \Gamma_{\text{Sp}}$  (см. рис. 2.7).

**Лемма 2.3** Пусть  $x$  и  $y$  — пара произвольных отростков осевого графа  $\Gamma_{\text{Sp}}$ . Обозначим через  $\Gamma_{\text{Sp}}[x, y]$  единственный путь в  $\Gamma_{\text{Sp}}$ , соединяющий  $x$  и  $y$ . Тогда число вращения  $\text{tw}_{\Gamma_{\text{Sp}}}(x, y)$  равно полному углу поворота при

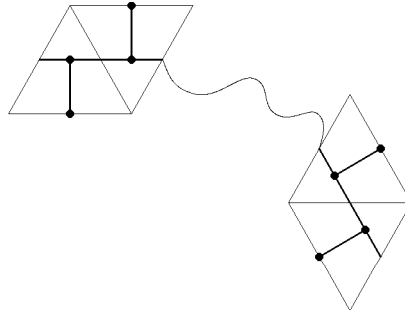


Рис. 2.7: Число вращения осевого графа достигается на отрезках

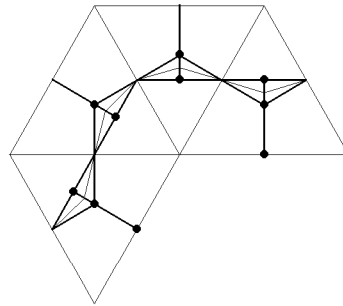


Рис. 2.8: Деформация ломаных

движении от  $x$  к  $y$  по пути  $\Gamma_{Sp}[x, y]$  в  $\Gamma_{Sp}$ , деленному на  $\pi/3$ , т.е. числу вращения между  $x$  и  $y$  как звеньев ломаной  $\Gamma_{Sp}[x, y]$  в этой ломаной.

**Доказательство.** Пусть  $\mu_x$  и  $\mu_y$  — граничные ребра двойственного графа  $\Gamma$  скелета  $L$ , содержащиеся соответственно в  $x$  и  $y$ . Пусть  $\Gamma[\mu_x, \mu_y]$  — путь в  $\Gamma$ , соединяющий  $\mu_x$  и  $\mu_y$ .

Рассмотрим деформацию ломаной  $\Gamma[\mu_x, \mu_y]$  на ломаную  $\Gamma_{Sp}[x, y]$ , изображенную на рис. 2.8. Ясно, что в процессе деформации направление концевых звеньев ломаных не меняется.

Следующая лемма очевидна.

**Лемма 2.4** Пусть  $\gamma_t$  — непрерывная деформация (вложенной) ломаной  $\gamma_0$  в классе (вложенных) ломаных, не меняющая направления концевых звеньев ломаной  $\gamma_0$ . Тогда число вращения между концевыми звеньями в процессе этой деформации остается неизменным.

Из леммы 2.4 вытекает, что

$$\text{tw}_{\Gamma_{Sp}[x, y]}(x, y) = \text{tw}_{\Gamma[\mu_x, \mu_y]}(\mu_x, \mu_y).$$

В силу геометрического смысла числа вращения в двойственном графе,

$$\text{tw}_{\Gamma[\mu_x, \mu_y]}(\mu_x, \mu_y) = \text{tw}_{\Gamma}(\mu_x, \mu_y).$$

Ввиду эквивалентности двойственного графа и осевого графа,

$$\text{tw}_{\Gamma}(\mu_x, \mu_y) = \text{tw}_{\Gamma_{\text{Sp}}}(x, y),$$

что и требовалось.

**Лемма 2.5** Пусть  $a$  и  $b$  — произвольные звенья оси, а  $x$  и  $y$  — отростки, крепящиеся к  $a$  и  $b$  соответственно. Тогда,

- если  $x$  и  $y$  лежат по одну сторону оси, то

$$\text{tw}(x, y) = \text{tw}(a, b) \pm 3,$$

где знак плюс или минус выбирается в зависимости от того, по какую сторону от оси лежат отростки  $x$  и  $y$ ;

- если  $x$  и  $y$  лежат по разные стороны оси, то

$$\text{tw}(x, y) = \text{tw}(a, b).$$

**Доказательство.** Это непосредственно вытекает из леммы 2.3.

Вернемся к доказательству предложения. Пусть  $a$  и  $b$  — звенья оси  $\text{Sp } L$ , на которых достигается число вращения оси. Тогда, по лемме 2.1, эти звенья состоят не менее чем из двух осей ячеек. Поэтому, как к  $a$ , так и к  $b$  крепятся отростки, расположенные с обеих сторон оси. По лемме 2.5, из этих отростков можно выбрать такие отростки  $x$  и  $y$ , крепящиеся к  $a$  и  $b$  соответственно, что  $\text{tw}(x, y) = \text{tw}(a, b) + 3 = \text{tw } \text{Sp } L + 3$ . Поэтому

$$\text{tw } \Gamma_{\text{Sp}} \geq \text{tw } \text{Sp } L + 3.$$

Далее, пусть  $x$  и  $y$  обозначают теперь те отростки, на которых достигается число вращения осевого графа (такие отростки существуют в силу леммы 2.2), и пусть  $a$  и  $b$  — звенья оси, к которым крепятся эти отростки. Тогда, по лемме 2.5,  $\text{tw}(a, b) \geq \text{tw}(x, y) - 3$ , или,  $\text{tw } \Gamma_{\text{Sp}} = \text{tw}(x, y) \leq \text{tw}(a, b) + 3$ , откуда

$$\text{tw } \Gamma_{\text{Sp}} \leq \text{tw } \text{Sp } L + 3.$$

Доказательство предложения закончено.

Из предложения 2.5 вытекает целый ряд важных следствий.

**Следствие 2.1** Пусть  $L$  — линейный участок,  $\text{Sp } L$  — его ось. Тогда

$$\text{tw } L \leq \text{tw } \text{Sp } L + 3.$$



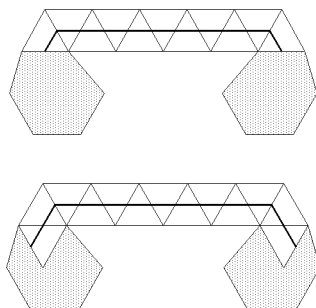


Рис. 2.9: Расширение линейного участка

**Доказательство.** Пусть  $L$  — линейный участок скелета  $S$ . Добавим к  $L$  ячейки из  $S$ , к которым участок  $L$  крепится. Легко видеть, что ось полученного паркета отличается от оси линейного участка только длиной концевых звеньев (см. рис. 2.9). Поэтому числа вращения этих двух осей равны между собой. Так как при добавлении к паркету ячеек его число вращения может только увеличиться, то, используя предложение 2.5, получаем утверждение следствия.

Следствия 2.2 и 2.3 непосредственно вытекают из предложения 2.5.

**Следствие 2.2** Число вращения линейного скелета не превосходит пяти тогда и только тогда, когда число вращения его оси не превосходит двух.

**Следствие 2.3** Число вращения оси линейного участка скелета из  $\mathcal{WP}_5$  не превосходит двух.

**Следствие 2.4** Ось линейного скелета из  $\mathcal{WP}_5$  однозначно проектируется на некоторую направляющую паркета плоскости.

**Доказательство.** Достаточно воспользоваться утверждением 2.3 и следствием 2.2.

**Следствие 2.5** Ось линейного участка скелета из  $\mathcal{WP}_5$  однозначно проектируется на некоторую направляющую паркета плоскости.

**Доказательство.** Достаточно воспользоваться утверждением 2.3 и следствием 2.3.

## 5 Структурные элементы скелетов из $\mathcal{WP}_5$

Выше мы построили разбиение произвольного деревянного скелета на узлы ветвления и линейные участки. Настоящий раздел посвящен описанию узлов ветвления деревянных скелетов и линейных участков скелетов с числом вращения, не превосходящим 5.

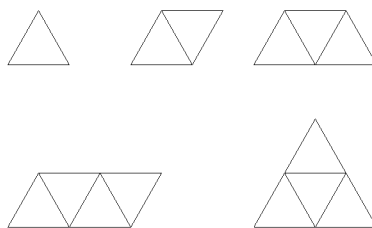


Рис. 2.10: Узлы ветвления деревянных паркетов

### 5.1 Узлы ветвления деревянных скелетов

Оказывается, в деревянных скелетах, в независимости от их числа вращения, может встречаться всего пять типов узлов ветвления, а именно, имеет место следующее предложение.

**Предложение 2.6** *Узлы ветвления деревянных паркетов могут быть лишь следующих пяти типов, приведенных на рис. 2.10.*

**Доказательство.** Доказательство предложения проведем в несколько шагов.

**Лемма 2.6** *Контур узла ветвления деревянного паркета представляет собой выпуклый многоугольник.*

**Доказательство.** Предположим противное. Тогда контур узла ветвления содержит два соседних ребра, скажем  $a$  и  $b$ , внешний угол между которыми равен или  $120^\circ$  или  $60^\circ$ . Поскольку узел ветвления состоит из внутренних ячеек, к ребрам  $a$  и  $b$  необходимо крепятся ячейки паркета. Легко видеть, что объединение этих ячеек и узла ветвления содержит цикл, что противоречит деревянности паркета. Лемма доказана.

Итак, контур узла ветвления — выпуклый  $n$ -угольник с углами, равными  $120^\circ$  или  $60^\circ$ . Такие многоугольники существуют лишь для небольших  $n$ , а именно.

**Лемма 2.7** *Пусть  $n$  — число сторон выпуклого многоугольника с углами, равными  $60^\circ$  или  $120^\circ$ . Тогда  $3 \leq n \leq 6$ . Более того, каждый такой  $n$ -угольник содержит ровно  $6 - n$  углов по  $60^\circ$ .*

**Доказательство.** Пусть  $k$  и  $l$  — количества углов в  $60^\circ$  и  $120^\circ$  соответственно. Тогда

$$\pi(n - 2) = \pi(k + l - 2) = \frac{\pi}{3}k + \frac{2\pi}{3}l,$$

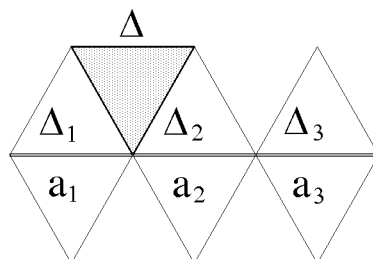


Рис. 2.11: Длина звена контура узла ветвления не больше 2

поэтому  $2k + l = k + n = 6$ . Теперь утверждение леммы следует из неотрицательности  $k$ .

**Лемма 2.8** *Каждое звено контура узла ветвления деревянного паркета состоит не более чем из двух ребер.*

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. существует звено контура узла ветвления, состоящее из трех или более ребер. Пусть  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  — три подряд идущих ребра этого звена. К каждому  $a_i$  обязан крепиться подпаркет  $D_i$ , состоящий не менее чем из двух ячеек (напомним, что узлы ветвления паркета определяются для его скелета, т.е. паркета без наростов). Пусть  $\Delta_i$  — ячейка из  $D_i$ , смежная с рассматриваемым узлом ветвления, и  $\Delta$  — некоторая ячейка из  $D_2$ , смежная с  $\Delta_2$ . Легко видеть, что паркет, составленный из рассматриваемого узла ветвления, ячеек  $\Delta_i$  и ячейки  $\Delta$ , не является деревянным (см. рис. 2.11). Полученное противоречие и завершает доказательство леммы.

Рассмотрим разбиение  $\mathcal{D}$  плоскости на параллельные полосы паркета. Это разбиение порождает разбиение узла ветвления на подпаркеты, называемые *рядами* данного направления. Ряды, находящиеся в соседних полосах, назовем *смежными*. Пусть  $A$  и  $B$  — два смежных ряда узла ветвления, порожденные полосами паркета  $\mathcal{D}_A$  и  $\mathcal{D}_B$  из разбиения  $\mathcal{D}$ , а  $l$  — направляющая паркета плоскости, совпадающая с пересечением полос  $\mathcal{D}_A$  и  $\mathcal{D}_B$ . Тогда, в силу выпуклости узла ветвления, пересечения рядов  $A$  и  $B$  с прямой  $l$  являются отрезками и равны между собой. Такие отрезки назовем *отрезками склейки* данного направления.

**Лемма 2.9** *Каждый отрезок склейки узла ветвления деревянного паркета состоит не более чем из одного ребра.*

**Доказательство.** В противном случае, внутрь узла ветвления попадает вершина паркета, поэтому двойственный граф узла ветвления содержит цикл.

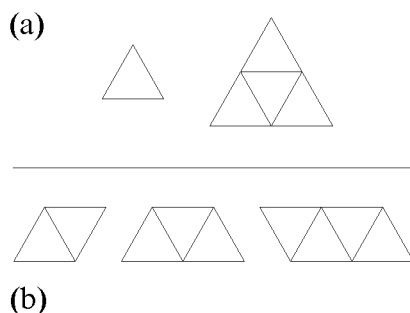


Рис. 2.12: Узел ветвления является треугольником или четырехугольником

Вернемся к доказательству предложения. Из леммы 2.10 вытекает, что узел ветвления  $U$  представляет собой  $n$ -угольник, где  $n \leq 6$ .

1. Пусть  $n = 3$ . По леммам 2.7 и 2.8, узел ветвления  $U$  — правильный треугольник со стороной, состоящей не более чем из двух ребер. Оба эти узла приведены на рис. 2.12.

2. Пусть  $n = 4$ . По лемме 2.7, узел ветвления  $U$  — или параллелограмм или трапеция. В первом случае стороны узла-параллелограмма могут состоять из одного или двух ребер, причем случай  $2 \times 2$  не реализуется в силу леммы 2.9. Во втором случае,  $U$  — трапеция с основаниями, состоящими из двух и одного ребра. Отсюда вытекает, что боковые стороны этой трапеции состоят из одного ребра. Все три возможных узла-четырёхугольника приведены на рис. 2.12.

3. Пусть  $n = 5$  или  $n = 6$ . По лемме 2.7 у контура узла  $U$  имеются два соседних угла величины  $120^\circ$ , прилегающих к звену  $a$  контура. Пусть  $A$  — единственный содержащий  $a$  ряд направления  $a$ . Тогда  $U$  не совпадает с рядом  $A$ , поэтому у ряда  $A$  имеется отрезок склейки, состоящий не менее чем из двух ребер, что противоречит лемме 2.9.

Доказательство предложения закончено.

## 5.2 Линейные участки

В настоящем разделе мы опишем линейные участки  $L$  паркетов из  $\mathcal{WP}_3^2$ . В силу следствия 2.5, оси  $\text{Sp } L$  таких линейных участков однозначно проектируются на некоторые направляющие паркета плоскости, называемые направляющими линейного участка. Поэтому в ориентированной оси  $\text{Sp } L$  ее вектора-звеня могут быть лишь трех направлений. Кроме того, такие  $\text{Sp } L$  могут проектироваться на несколько непараллельных направляющих паркета плоскости. Для удобства изложения, ниже, *направляющей* будем также называть целый класс параллельности одной из таких прямых. Тем самым, имеет смысл говорить, что линейный скелет (участок) обладает одной, двумя или тремя направляющими.

**Определение.** Линейный скелет (участок), имеющий три направляющих, называется *змеей*. Такой скелет целиком находится в некоторой полосе паркета плоскости, и его ось — отрезок прямой. Число вращения оси в этом случае равно 1.

Линейный скелет (участок), имеющий две направляющих, называется *лестницей*. Ориентированная ось такого скелета (участка) состоит из векторов-звеньев двух направлений. Число вращения оси равно 2.

Линейный скелет (участок), имеющий одну направляющую, называется *ломаной змеей*. Ориентированная ось такого скелета (участка) состоит из векторов-звеньев трех возможных направлений. Число вращения оси равно 3.

Паркет, состоящий не более чем из трех ячеек, всегда является змеей. Отметим еще раз, что линейный участок, являющийся змеей как паркет, может быть ломаной змеей как линейный участок. Линейный участок из одной ячейки — всегда змея, из двух ячеек — змея или лестница, из трех ячеек — змея, лестница или ломаная змея, т.е. любой из возможных типов.

Для более наглядного геометрического представления линейного скелета (участка), разобьем его на подпаркеты, каждый из которых состоит из ячеек, оси которых входят в данное звено оси. Ясно, что полученные подпаркеты являются змеями, причем оси смежных змей имеют различные направления.

**Утверждение 2.5** *Линейные скелеты (участки) представляют собой объединения последовательно идущих змей, причем последовательные змеи имеют различные направления.*

Используя понятие направляющей линейного скелета из  $\mathcal{WP}_5^2$ , легко доказать следующее утверждение.

**Утверждение 2.6** *Контур линейного скелета из  $\mathcal{WP}_5^2$  является вложенной ломаной. Таким образом, вторая часть теоремы 2.1 имеет место для линейных скелетов.*

**Доказательство.** Очевидно, все паркеты, состоящие не более чем из пяти ячеек, принадлежат  $\mathcal{WP}_5^2$  и имеют вложенные контуры. Среди паркетов из шести ячеек только один содержит цикл (он состоит из всех ячеек, имеющих одну общую вершину), остальные принадлежат  $\mathcal{WP}_5^2$  и имеют вложенные контуры.

Предположим теперь, что линейный скелет  $L$  из  $\mathcal{WP}_5^2$  имеет не менее семи ячеек, и пусть  $l$  — некоторая его направляющая. Достаточно показать, что ячейки  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  из  $L$ , между которыми находится не менее пяти ячеек, не пересекаются. Действительно, если  $a$  — длина стороны ячейки, то расстояние между проекциями середин осей ячеек  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  на направляющую  $l$  не меньше  $6a/4$ , поэтому ячейки  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  не имеют общих точек. Доказательство закончено.

Теперь мы в состоянии завершить доказательство теоремы 2.1.

**Завершение доказательства теоремы 2.1.** Предположим противное, т.е. контур некоторого паркета  $D$  из  $\mathcal{WP}_5^2$  не является вложенной ломаной. Тогда существуют ячейки  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  из  $D$ , имеющие общую “незаконную” вершину. Пусть  $L$  — наименьший связный подпаркет в  $D$ , содержащий  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ . Ясно, что паркет  $L$  — линейный скелет из  $\mathcal{WP}_5^2$ . По утверждению 2.6, контур паркета  $L$  является вложенной ломаной, поэтому “незаконные” склейки его ячеек невозможны. Полученное противоречие и завершает доказательство теоремы 2.1.

## 6 Операции редукции и антиредукции

В настоящем пункте мы определим операции редукции и антиредукции, которые в дальнейшем будут необходимы при формулировке и доказательстве основных классификационных теорем для паркетов из  $\mathcal{WP}_5^2$ . Неформально, операция редукции представляет собой факторизацию плоского бинарного дерева (паркета) по поддереву (подпаркету) специального вида, а антиредукция — обратную операцию по отношению к редукции. Классификационная теорема для скелетов (см. теорему 2.2 ниже) дает три канонических типа скелетов из  $\mathcal{WP}_5^2$ , из которых остальные получаются с помощью редукции.

### 6.1 Разрезание и склейка

В главе 1 мы определили основные операции на графах и сказали, что эти операции очевидным образом переносятся на сети. Уточним определение двух важных для нас операций, а именно, разрезания и склейки сети в интересующем нас случае вложенных сетей.

Пусть  $\Gamma$  — плоское бинарное дерево, и  $a$  — его произвольное ребро. Выбросим из плоского дерева  $\Gamma$  маленькую открытую окрестность внутренней точки его ребра  $a$ . Полученный в результате плоский граф, представляющий собой объединение двух бинарных деревьев  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , будем обозначать через  $\Gamma \setminus a$  и говорить, что  $\Gamma \setminus a = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$  получен из  $\Gamma$  *разрезанием по ребру  $a$* . Ребра графа  $\Gamma \setminus a$ , получившиеся из ребра  $a$  исходного дерева  $\Gamma$ , будем называть *ребрами разреза*.

Пусть теперь заданы два плоских непересекающихся бинарных дерева  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , и пусть  $a$  — граничное ребро из  $\Gamma_1$ , а  $b$  — граничное ребро из  $\Gamma_2$ . Обозначим через  $A$  и  $B$  вершины степени один, инцидентные ребрам  $a$  и  $b$  соответственно. Соединим  $A$  и  $B$  произвольной вложенной кривой  $\gamma$ , не имеющей с  $\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$  других общих точек. В результате мы получим плоское бинарное дерево, вершины которого суть все вершины бинарных деревьев  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , за исключением  $A$  и  $B$ . Построенное плоское бинарное

дерево обозначим через  $(\Gamma_1, a) \# (\Gamma_2, b)$  и будем называть *склейкой*  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  по ребрам  $a$  и  $b$ . Ребро дерева  $(\Gamma_1, a) \# (\Gamma_2, b)$ , являющееся объединением ребер  $a$ ,  $b$  и кривой  $\gamma$ , назовем *ребром склейки*. Легко видеть, что класс эквивалентности дерева  $(\Gamma_1, a) \# (\Gamma_2, b)$  зависит лишь от выбора ребер  $a$  и  $b$ .

Отметим, что операции разрезания и склейки взаимно обратны в следующем смысле. А именно, бинарное дерево, являющееся результатом склейки по ребрам разреза двух бинарных деревьев, полученных разрезанием бинарного дерева  $\Gamma$ , эквивалентен  $\Gamma$ . Обратно, граф, полученный разрезанием по ребру склейки бинарного дерева, склеенного из непересекающихся бинарных деревьев  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , эквивалентен  $\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$ .

## 6.2 Редукция плоского бинарного дерева

Пусть  $\Gamma$  — плоское бинарное дерево, и  $\Gamma a = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$  — результат разрезания дерева  $\Gamma$  по некоторому его ребру  $a$ .

**Определение.** Каждую из компонент связности графа  $\Gamma a$  будем называть плоским бинарным деревом, *I-редуцированным из  $\Gamma$* , а операцию перехода от  $\Gamma$  к  $\Gamma_i$  — *редукцией I-го типа*.

Пусть, как и выше,  $\Gamma$  — плоское бинарное дерево, и  $a_1$  и  $a_2$  — пара его различных ребер. Разрежем  $\Gamma$  по ребрам  $a_1$  и  $a_2$ , и пусть  $\Gamma_0$  — та компонента связности полученного плоского графа, которая содержит два ребра разреза, а  $\Gamma_i$  — компонента, содержащая лишь ребро разреза, полученное из  $a_i$ , которое мы также обозначим через  $a_i$ .

**Определение.** Плоское бинарное дерево  $(\Gamma_1, a_1) \# (\Gamma_2, a_2)$  назовем *II-редуцированным из  $\Gamma$  по ребрам  $a_1$  и  $a_2$* , а операцию перехода от  $\Gamma$  к  $(\Gamma_1, a_1) \# (\Gamma_2, a_2)$  — *редукцией II-го типа*. Ребра  $a_1$  и  $a_2$  будем называть *ребрами разреза*.

Легко видеть, что редукция I-го типа не увеличивает число вращения. Для редукции второго типа это уже не так, как видно из примера, приведенного на рис. 2.13. Однако, имеет место следующее утверждение.

**Утверждение 2.7** Пусть  $\Gamma'$  — плоское бинарное дерево, полученное редукцией II-го типа из бинарного дерева  $\Gamma$  по ребрам  $a$  и  $b$ . Тогда, если  $\text{tw}_\Gamma(a, b) = 0$ , то число вращения дерева  $\Gamma'$  не превосходит числа вращения дерева  $\Gamma$ :

$$\text{tw } \Gamma' \leq \text{tw } \Gamma.$$

**Доказательство.** Пусть  $\Gamma' = (\Gamma_1, a) \# (\Gamma_2, b)$ , где  $\Gamma_i$  — соответствующие поддеревья дерева  $\Gamma$  из определения редукции II-го типа. Пусть  $c$  и  $d$  — произвольные ребра из  $\Gamma'$ . Если  $c$  и  $d$  лежат в одном из  $\Gamma_i$ , то  $\text{tw}_{\Gamma'}(c, d) =$

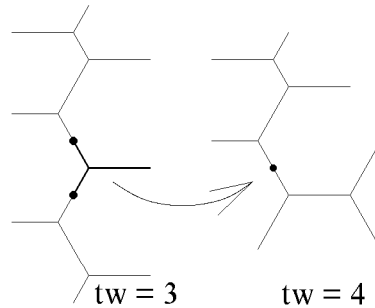


Рис. 2.13: Редукция II-го типа может увеличить число вращения

$\text{tw}_\Gamma(c, d)$ . В противном случае, путь в  $\Gamma$ , соединяющий  $c$  и  $d$ , проходит через ребра  $a$  и  $b$ . Поэтому, в силу аддитивности числа вращения на путях, имеем

$$\begin{aligned} \text{tw}_\Gamma(c, d) &= \text{tw}_\Gamma(c, a) + \text{tw}_\Gamma(a, b) + \text{tw}_\Gamma(b, d) = \text{tw}_\Gamma(c, a) + \text{tw}_\Gamma(b, d) \\ &= \text{tw}_{\Gamma'}(c, a) + \text{tw}_{\Gamma'}(b, d) = \text{tw}_{\Gamma'}(c, d), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство утверждения.

### 6.3 Редукция паркетов из $\mathcal{WP}_5$

Операция редукции, определенная нами для бинарных деревьев, может быть естественным образом перенесена на деревянные паркетные. Пусть  $D$  — произвольный паркет из  $\mathcal{WP}_5$ , и  $\Gamma$  — его двойственный граф. Пусть бинарное дерево  $\Gamma'$  получено из  $\Gamma$  в результате редукции I-го или II-го типа. Предположим, что число вращения  $\Gamma'$  не превосходит пяти. В силу теоремы о паркетной реализации, бинарное дерево  $\Gamma'$  эквивалентно двойственному графу некоторого паркета  $D'$  из  $\mathcal{WP}_5$ .

**Определение.** Паркет  $D'$  назовем *редуцированным* из паркета  $D$ , а операцию перехода от  $D$  к  $D'$  — *редукцией соответствующего типа*.

**Замечание.** Понятие редукции паркетов становится более естественным, если определять ее для так называемых погруженных деревянных паркетов. Напомним, что деревянный паркет строится по бинарному дереву с помощью соответствующей последней триангуляции диагоналями некоторого выпуклого многоугольника. В теореме 2.1 было построено непрерывное кусочно-аффинное отображение, переводящее диагональную триангуляцию в некоторый подпаркет плоскости. Для деревьев с числом вращения, не превосходящим пяти, это отображение оказалось вложением. Ясно, что оно может быть точно так же определено и в общем случае, однако тогда оно, вообще говоря, будет лишь погружением. Такие погружения называются *погруженными паркетами*. Определяя для таких паркетов понятие



редукции, можно, как и в случае бинарных деревьев, не заботиться о числе вращения.

На геометрическом языке редукцию паркета можно представлять себе так. Редукция I-го типа состоит в разрезании паркета по произвольному внутреннему ребру и выбрасывании одной из связных компонент.

Редукция II-го типа заключается в следующем. Рассмотрим внутренние ребра  $a$  и  $b$  паркета  $D$ , пересекающиеся с ребрами разреза  $a'$  и  $b'$  двойственного графа  $\Gamma$  паркета  $D$ . Пусть  $\gamma$  — путь в  $\Gamma$ , соединяющий  $a'$  с  $b'$  и ориентированный от  $a'$  к  $b'$ . Ориентация пути  $\gamma$  порождает ориентацию ребер  $a'$  и  $b'$ , которые тем самым можно рассматривать как вектора. Ориентируем  $a$  и  $b$  так, чтобы пары векторов  $(a, a')$  и  $(b, b')$  имели одинаковую ориентацию. Будем рассматривать так ориентированные ребра  $a$  и  $b$  как вектора, приложенные к соответствующим точкам плоскости (касательные вектора на плоскости). Разрежем паркет  $D$  по  $a$  и  $b$ , и выкинем ту часть паркета, которая одновременно пересекается с  $a$  и  $b$ . Пусть  $\varphi$  — сохраняющее ориентацию движение плоскости, совмещающее вектор  $a$  с вектором  $b$ . Если  $D'$  и  $D''$  — оставшиеся невыброшенными части паркета  $D$ , то  $\varphi(D') \cup D''$  — и есть, с точностью до движения плоскости, редуцированный паркет. Этот паркет является вложенным, так как число вращения его двойственного графа, по определению операции редукции паркетов из  $\mathcal{WP}_5^2$ , не превосходит 5.

В дальнейшем внутренние ребра паркета, пересекающиеся с ребрами разреза двойственного графа этого паркета, также будем называть *ребрами разреза*.

Один из важных примеров редукции II-го типа возникает в случае равенства нулю числа вращения между ребрами разреза. В этом случае число вращения редуцированного паркета заведомо не превосходит числа вращения исходного паркета, т.е. при работе с паркетами из  $\mathcal{WP}_5^2$  не выводит из этого класса (см. утверждение 2.7). В дальнейшем под редукцией II-го типа паркетов из  $\mathcal{WP}_5^2$  мы будем понимать именно такую редукцию.

#### 6.4 Антиредукция плоских бинарных деревьев

В настоящем разделе определяется операция, обратная к операции редукции, называемая, поэтому, антиредукцией.

Пусть  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — два непересекающихся плоских бинарных дерева. Выберем в каждом из них по одному граничному ребру  $a_i$ .

**Определение.** Полученное в результате склейки по ребрам  $a_i$  деревьев  $\Gamma_i$  плоское бинарное дерево  $\Gamma = (\Gamma_1, a_1) \# (\Gamma_2, a_2)$  назовем *I-антиредуцированным* из  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  по ребрам склейки  $a_1$  и  $a_2$ , а операцию перехода от деревьев  $\Gamma_i$  к дереву  $\Gamma$  — *антиредукцией I-го типа*.

Пусть, как и выше, задано два непересекающихся плоских бинарных дерева  $\Gamma$  и  $\Gamma_0$ , и пусть в дереве  $\Gamma$  фиксировано произвольное ребро  $a$ , а в дереве  $\Gamma_0$  — пара различных граничных ребер  $b_1$  и  $b_2$ . Разрежем дерево  $\Gamma$  по ребру  $a$ , и пусть  $a_1$  и  $a_2$  — ребра разреза, принадлежащие компонентам  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  графа  $\Gamma \setminus a$  соответственно. Склеим деревья  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_0$  по ребрам  $a_1$  и  $b_1$ . К полученному бинарному дереву  $(\Gamma_1, a_1) \# (\Gamma_0, b_1)$  приклеим дерево  $\Gamma_2$  по ребрам  $b_2$  и  $a_2$ . В результате мы построим бинарное дерево

$$\hat{\Gamma} = ((\Gamma_1, a_1) \# (\Gamma_0, b_1), b_2) \# (\Gamma_2, a_2).$$

**Определение.** Полученное только что бинарное дерево  $\hat{\Gamma}$  назовем *II-антиредуцированным* из  $\Gamma$  с помощью вклеивания бинарного дерева  $\Gamma_0$  в ребро  $a$  по ребрам  $b_1$  и  $b_2$ , а операцию перехода от деревьев  $\Gamma$  и  $\Gamma_0$  к дереву  $\hat{\Gamma}$  — *антиредукцией II-го типа*.

Изучим поведение числа вращения при антиредукции. Для этого нам понадобится понятие относительного числа вращения, которое мы сейчас и определим. Пусть  $\Gamma$  — произвольное плоское бинарное дерево, и  $a$  — некоторое его ребро.

**Определение.** Числом вращения  $\text{tw}(a, \Gamma)$  ребра  $a$  относительно дерева  $\Gamma$  называется упорядоченная пара чисел  $(m, M)$ , такая что

$$m = -\min_b \text{tw}(a, b), \quad M = \max_b \text{tw}(a, b),$$

где  $\max$  и  $\min$  берутся по всевозможным ребрам дерева  $\Gamma$ .

**Определение.** Числом вращения  $\text{tw}(\Gamma, a)$  дерева  $\Gamma$  относительно ребра  $a$  назовем упорядоченную пару чисел  $(m, M)$ , такую что

$$m = -\min_b \text{tw}(b, a), \quad M = \max_b \text{tw}(b, a),$$

где  $\max$  и  $\min$  берутся по всевозможным ребрам дерева  $\Gamma$ .

Имеет место следующее простое утверждение.

**Утверждение 2.8** Пусть  $\text{tw}(a, \Gamma) = (m, M)$ . Тогда  $\text{tw}(\Gamma, a) = (M, m)$ .

**Доказательство.** Пусть  $\text{tw}(\Gamma, a) = (m', M')$ . По определению,

$$\begin{aligned} m' &= -\min_b \text{tw}(b, a) = -\min_b (-\text{tw}(a, b)) = \max_b \text{tw}(a, b) = M, \\ M' &= \max_b \text{tw}(b, a) = \max_b (-\text{tw}(a, b)) = -\min_b \text{tw}(a, b) = m, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Для формулировки основного результата настоящего раздела нам понадобятся следующие обозначения. В приведенных ниже формулах все буквы обозначают целые числа.

- Положим  $(m, M) \leq (p, q)$ , если и только если  $m \leq p$  и, одновременно,  $M \leq q$ .
- Вместо  $(m, M) \leq (p, p)$  будем сокращенно писать  $(m, M) \leq p$ .
- Сложение двух пар чисел обозначает покомпонентное сложение:  $(m, M) + (n, N) = (m + n, M + N)$ .
- Максимальное из двух чисел  $m$  и  $M$  назовем *модулем пары*  $(m, M)$  и обозначим через  $|(m, M)|$ .

**Утверждение 2.9** Пусть плоское бинарное дерево  $\Gamma$  получено антиредукцией I-го типа из плоских непересекающихся бинарных деревьев  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  по ребрам склейки  $a_1$  и  $a_2$ . Тогда имеет место следующая оценка на число вращения дерева  $\Gamma$ :

$$\text{tw } \Gamma \leq \max(\text{tw } \Gamma_1, \text{tw } \Gamma_2, |\text{tw}(\Gamma_1, a_1) + \text{tw}(a_2, \Gamma_2)|).$$

**Доказательство.** Пусть  $c$  и  $d$  — произвольные ребра дерева  $\Gamma$ . Если оба эти ребра одновременно лежат в одном из  $\Gamma_i$ , то  $\text{tw}_\Gamma(c, d) \leq \text{tw } \Gamma_i$ . В противном случае, пусть  $c$  лежит, скажем, в  $\Gamma_1$ , а  $d$  — в  $\Gamma_2$ . Положим  $\text{tw}(\Gamma_1, a_1) = (m_1, M_1)$ , а  $\text{tw}(a_2, \Gamma_2) = (m_2, M_2)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{tw}_\Gamma(c, d) = \text{tw}_{\Gamma_1}(c, a_1) + \text{tw}_{\Gamma_2}(a_2, d) &\leq \\ \max_{c'} \text{tw}_{\Gamma_1}(c', a_1) + \max_{d'} \text{tw}_{\Gamma_2}(a_2, d') &= M_1 + M_2, \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} \text{tw}_\Gamma(d, c) = \text{tw}_{\Gamma_2}(d, a_2) + \text{tw}_{\Gamma_1}(a_1, c) &\leq \\ \max_{d'} \text{tw}_{\Gamma_2}(d', a_2) + \max_{c'} \text{tw}_{\Gamma_1}(a_1, c') &= m_2 + m_1, \end{aligned}$$

где последнее равенство имеет место в соответствии с утверждением 2.8. Поэтому

$$|\text{tw}_\Gamma(d, c)| \leq |(m_1, M_1) + (m_2, M_2)|,$$

что и заканчивает доказательство.

Исследуем теперь, как ведет себя число вращения при антиредукции II-го типа. Пусть бинарное дерево  $\hat{\Gamma}$  получено антиредукцией II-го типа из плоского бинарного дерева  $\Gamma$  с помощью вклеивания бинарного дерева  $\Gamma_0$  в ребро  $a$  из  $\Gamma$  по ребрам  $b_1$  и  $b_2$  из  $\Gamma_0$ . Обозначим через  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  компоненты, на которые распадается дерево  $\Gamma$  при разрезании его по ребру  $a$ , а через  $a_i$  — соответствующее ребро разреза дерева  $\Gamma_i$ .

**Утверждение 2.10** Если  $\text{tw}_{\Gamma_0}(b_1, b_2) = 0$ , то имеет место следующая оценка на число вращения дерева  $\hat{\Gamma}$ :

$$\text{tw } \hat{\Gamma} \leq \max(\text{tw } \Gamma_0, \text{tw } \Gamma_1, \text{tw } \Gamma_2, |\text{tw}(\Gamma_1, a_1) + \text{tw}(b_1, \Gamma_0)|, \\ |\text{tw}(\Gamma_0, b_2) + \text{tw}(a_2, \Gamma_2)|, |\text{tw}(\Gamma_1, a_1) + \text{tw}(a_2, \Gamma_2)|).$$

Доказательство утверждения 2.10 полностью аналогично доказательству утверждения 2.9.

**Следствие 2.6** В предположениях утверждения 2.9, имеет место следующая оценка на число вращения II-антиредуцированного дерева  $\hat{\Gamma}$ :

$$\text{tw } \hat{\Gamma} \leq \max(\text{tw } \Gamma_0, \text{tw } \Gamma, \\ |\text{tw}(\Gamma_1, a_1) + \text{tw}(b_1, \Gamma_0)|, |\text{tw}(\Gamma_0, b_2) + \text{tw}(a_2, \Gamma_2)|).$$

**Доказательство.** В самом деле,  $\text{tw } \Gamma_i \leq \text{tw } \Gamma$  для  $i = 1, 2$ , и  $|\text{tw}(\Gamma_1, a_1) + \text{tw}(a_2, \Gamma_2)| \leq \text{tw } \Gamma$ , что и требовалось доказать.

## 6.5 Антиредукция паркетов из $\mathcal{WP}_5$

Антиредукция паркетов из  $\mathcal{WP}_5$  может быть определена по аналогии с тем, как мы это делали по отношению к редукции. А именно, если антиредукция двойственных графов паркетов из  $\mathcal{WP}_5$  приводит к бинарному дереву с не превосходящим 5 числом вращения, то соответствующий этому бинарному дереву вложенный паркет принадлежит  $\mathcal{WP}_5$  и называется *антиредуцированным паркетом соответствующего типа*. Более того, определение антиредукции естественным образом переносится и на случай погруженных паркетов. В дальнейшем, при доказательстве теоремы классификации скелетов, нами будут определены важные операции “выпускания концевой линейного участка” и “врезания змеи”, которые являются антиредукциями I-го и II-го типа соответственно.

## 7 Боковины и их свойства

В настоящем пункте мы опишем некоторое каноническое разбиение контура деревянного паркета на концевые ребра, концевые вершины и боковины. В случае, когда паркет не содержит наростов, это разбиение не содержит концевых вершин, и будет полезно нам для определения того, куда можно крепить наросты на скелет из  $\mathcal{WP}_5$ , чтобы не выйти за пределы класса  $\mathcal{WP}_5$ . Мы увидим, что числа вращения боковин паркетов из  $\mathcal{WP}_5$  так же, как и числа вращения линейных участков таких паркетов, не превосходят 2. Во второй части классификационной теоремы мы изучим возможное расположение наростов в терминах числа вращения боковин.

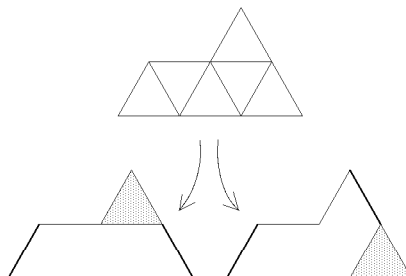


Рис. 2.14: Концевые ребра паркета определены неоднозначно

### 7.1 Определение боковин

Пусть  $D$  — произвольный деревянный паркет, и  $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$  — некоторое его разбиение на скелет и наросты. Ребра контура паркета  $D$ , пересекающиеся с осью скелета  $S$ , назовем *концевыми*. Отметим, что концевые ребра определены неоднозначно, т.е., вообще говоря, они зависят от разбиения паркета на скелет и наросты (см. рис. 2.14). Однако, для скелета неоднозначность в определении концевых ребер исчезает. Заметим также, что при фиксированном разбиении  $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$  концевые ребра паркета  $D$  совпадают с концевыми ребрами его скелета  $S$ .

Вершины наростов  $\Delta_i$ , не лежащие на контуре скелета  $S$  паркета  $D$ , также назовем *концевыми*.

**Определение.** Замыкания связных компонент, на которые распадается контур паркета  $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$  после выбрасывания из него концевых ребер и концевых вершин, назовем *боковинами паркета  $D$*  (для данного разбиения паркета на скелет и наросты).

### 7.2 Числа вращения ребер контура

Пусть  $D$  — деревянный паркет, и  $K = \partial D$  — его контур. Ориентируем контур  $K$  по часовой стрелке, т.е. в отрицательном направлении. Рассмотрим два произвольных ребра  $a$  и  $b$  контура  $K$ , и пусть  $\gamma = K[a, b]$  — тот из двух путей на контуре  $K$ , соединяющих  $a$  и  $b$ , для которого  $a$  — начальное, а  $b$  — конечное ребро в выбранной нами ориентации.

**Определение.** Числом вращения  $\text{tw}(a, b) \equiv \text{tw}_K(a, b)$  ребер контура  $a$  и  $b$  называется их число вращения как звеньев ломаной  $\gamma$ , т.е.  $\text{tw}_\gamma(a, b)$ .

Пусть  $\Gamma$  — двойственный граф паркета  $D$ , и пусть  $x$  и  $y$  — те его граничные ребра, которые пересекаются соответственно с ребрами  $a$  и  $b$  контура  $K = \partial D$ . Тогда числа вращения  $\text{tw}_K(a, b)$  и  $\text{tw}_\Gamma(x, y)$  связаны между собой следующим образом.

**Утверждение 2.11** *В только что сделанных предположениях,*

$$\text{tw}_\Gamma(x, y) = \text{tw}_K(a, b) + 3.$$

**Доказательство.** Пусть  $A$  и  $B$  — соответственно точки пересечения ребер  $x$  и  $y$  с контуром  $K$ . Часть пути  $\gamma = K[a, b]$ , расположенную между точками  $A$  и  $B$ , также обозначим через  $\gamma$ . Тогда путь  $\gamma$  вместе с путем  $\Gamma[x, y]$ , соединяющим в дереве  $\Gamma$  ребра  $x$  и  $y$ , образуют многоугольник, у которого углы при вершинах  $A$  и  $B$  равны  $\pi/2$ . Полный угол поворота при обходе по часовой стрелке построенного многоугольника равен  $-2\pi$ , поэтому

$$\frac{\pi}{3} \text{tw}_K(a, b) - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \text{tw}_\Gamma(x, y) - \frac{\pi}{2} = -2\pi,$$

откуда, после элементарных вычислений, получается утверждение.

### 7.3 Связь между числами вращения боковин и числом вращения паркета

Мы начнем этот раздел с несложного утверждения, а именно.

**Утверждение 2.12** *Число вращения любой боковины произвольного линейного деревянного скелета равно числу вращения его оси.*

**Доказательство.** Пусть  $L$  — произвольный линейный деревянный скелет,  $\text{Sp } L$  — его ось, и  $B$  — любая из двух его боковин. Пусть  $a$  и  $b$  — звенья оси, на которых достигается ее число вращения. Тогда, как было показано при доказательстве предложения 2.5, каждое из звеньев  $a$  и  $b$  состоит не менее чем из двух осей ячеек.

Пусть  $\gamma$  — часть оси  $\text{Sp } L$ , соединяющая звенья  $a$  и  $b$ , и пусть  $L'$  — подпаркет в  $L$ , составленный из всех ячеек, оси которых принадлежат  $\gamma$ . Положим  $B' = B \cap L'$ . Так как звенья  $a$  и  $b$  состоят не менее чем из двух осей ячеек,  $B'$  является боковиной линейного скелета  $L'$ , а  $\gamma$  совпадает с его осью  $\text{Sp } L'$ . Более того, в силу той же причины, концевые звенья боковины  $B'$  параллельны звеньям  $a$  и  $b$ . Обозначим через  $x$  и  $y$  концевые звенья боковины  $B'$ , параллельные соответственно  $a$  и  $b$ .

Рассмотрим многоугольник  $P$ , ограниченный боковиной  $B'$  скелета  $L'$ , осью  $\gamma = \text{Sp } L'$  скелета  $L'$ , а также половинками  $u$  и  $v$  концевых ребер контура скелета  $L'$ , дополняющими  $B' \sqcup \gamma$  до многоугольника (см. рис. 2.15).

Предположим для определенности, что при полном обходе многоугольника  $P$  против часовой стрелки мы проходим ось скелета  $L'$  от  $a$  к  $b$  (в противном случае рассуждения аналогичны). Так как полный угол поворота при обходе многоугольника  $P$  против часовой стрелки равен  $2\pi$ , и при проходе через каждое из ребер  $u$  и  $v$  угол поворота равен  $\pi$  (в силу параллельности  $a$  и  $x$ , а также  $b$  и  $y$ ), имеет место следующее соотношение:

$$2\pi = \frac{\pi}{3} \text{tw}_\gamma(a, b) + \pi - \frac{\pi}{3} \text{tw}(x, y) + \pi,$$

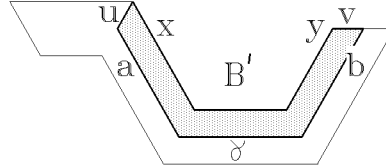


Рис. 2.15: Числа вращения оси и боковины равны

откуда  $\text{tw}_\gamma(a, b) = \text{tw}(x, y)$ , и, поэтому,  $\text{tw Sp } L \leq \text{tw } B$ .

Чтобы получить обратное неравенство, рассмотрим часть  $B'$  боковины  $B$ , соединяющую те ребра  $x$  и  $y$  боковины  $B$ , на которых достигается число вращения для  $B$ . Пусть  $\Delta_x$  и  $\Delta_y$  — ячейки из  $L$ , имеющие соответственно  $x$  и  $y$  своими ребрами. Обозначим через  $L'$  наименьший связный подпаркет в  $L$ , содержащий ячейки  $\Delta_x$  и  $\Delta_y$ . Ясно, что  $L$  — линейный скелет.

Пусть  $\gamma$  — пересечение оси  $\text{Sp } L$  скелета  $L$  с паркетом  $L'$ . Очевидно, соответствующие концевые звенья ломаных  $B'$  и  $\gamma$  параллельны между собой. Поэтому многоугольник  $P$ , составленный из  $B'$ ,  $\gamma$  и половинок  $u$  и  $v$  ребер паркета  $L'$ , дополняющих  $B' \sqcup \gamma$  до многоугольника, обладает тем же свойством, что и выше. А именно, при обходе многоугольника  $P$  против часовой стрелки во время перехода через ребра  $u$  и  $v$  мы поворачиваемся на  $\pi$ . Записав условие равенства  $2\pi$  полного угла поворота при обходе против часовой стрелки многоугольника  $P$ , найдем, что  $\text{tw}_\gamma(a, b) = \text{tw}(x, y)$ , и, поэтому,  $\text{tw Sp } L \geq \text{tw } B$ . Доказательство утверждения закончено.

**Следствие 2.7** Пусть  $L$  — линейный деревянный скелет, состоящий не менее чем из трех ячеек, и  $B$  — произвольная его боковина. Тогда

$$\text{tw } L = \text{tw } B + 3.$$

Если паркет  $D$  состоит менее чем из трех ячеек, то

$$\text{tw } B = 0.$$

Перейдем теперь к главной цели настоящего раздела, а именно, покажем, как условие принадлежности деревянного паркета классу  $\mathcal{WP}_2^j$  может быть сформулировано в терминах боковин этого паркета.

**Предложение 2.7** Пусть  $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$  — деревянный паркет, и  $\{B_j\}$  — множество всех его боковин. Тогда  $D \in \mathcal{WP}_2^j$  если и только если число вращения каждой боковины  $B_j$  не превосходит 2:

$$(\text{tw } D \leq 5) \iff (\text{tw } B_j \leq 2 \text{ для всех } j).$$

**Доказательство.** Пусть  $D$  — паркет из  $\mathcal{WP}_3^2$ , а  $B$  — произвольная его боковина. Обозначим через  $L$  подпаркет в  $B$ , составленный из всех ячеек паркета  $D$ , имеющих непустое пересечение с боковиной  $B$ . Ясно, что  $L$  — линейный скелет, принадлежащий  $\mathcal{WP}_3^2$ . Поэтому, в силу следствия 2.7, либо  $\text{tw } B$  равно нулю, если  $L$  состоит менее чем из трех ячеек, либо, в противном случае,  $\text{tw } B = \text{tw } L - 3 \leq 2$ . Тем самым предложение доказано в одну сторону.

Обратно, предположим, что число вращения каждой боковины  $B_j$  не превосходит 2. Пусть  $K$  — контур паркета  $D$ . В силу утверждения 2.11, достаточно показать, что число вращения любой пары ребер контура не больше 2 и не меньше  $-8$ .

Пусть  $a$  и  $b$  — пара произвольных ребер контура  $K$ . Как и выше, ориентируем  $K$  по часовой стрелке, и обозначим через  $\gamma$  тот из двух путей в контуре, соединяющих  $a$  и  $b$ , для которого  $a$  — первое, а  $b$  — последнее ребро в выбранной ориентации. Если путь  $\gamma$  целиком лежит в одной боковине, то искомая оценка на  $\text{tw}(a, b)$  выполнена по предположению.

Пусть теперь  $\gamma$  не лежит в одной боковине. Концевые ребра и концевые вершины контура, попавшие на путь  $\gamma$ , разбивают этот путь на участки  $\gamma_i$ , каждый из которых является связной частью некоторой боковины. Обозначим через  $\alpha_i$  число вращения между первым и последним ребрами пути  $\gamma_i$ , а через  $\beta_i$  — число вращения между последним ребром пути  $\gamma_i$  и начальным ребром пути  $\gamma_{i+1}$ . Отметим, что  $\beta_i$  равно  $(-2\pi/3)/(\pi/3) = -2$ , если  $\gamma_i$  стыкуется с  $\gamma_{i+1}$  по концевой вершине, и  $(-\pi)/(\pi/3) = -3$  в случае, когда эти пути стыкуются по концевому ребру. Оценим сверху число вращения между ребрами  $a$  и  $b$ :

$$\text{tw}(a, b) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \leq 2k - 2(k-1) = 2.$$

Чтобы получить оценку снизу, заметим, что  $\text{tw}(a, b) + \text{tw}(b, a) = -6$ , поэтому

$$\text{tw}(a, b) \geq -6 - \text{tw}(b, a) \geq -6 - 2 = -8.$$

Доказательство предложения закончено.

**Замечание.** Вообще говоря, из ограниченности числа вращения боковин деревянного паркета не следует ограниченность числа вращения самого паркета. На рис. 2.16 приведен пример “спирального паркета” с числом вращения, равным 9, у которого число вращения каждой боковины не превосходит 3. Легко видеть, что, увеличивая “число витков”, можно получить спиральный паркет со сколь угодно большим числом вращения, боковины которого имеют числа вращения, не превосходящие 3.



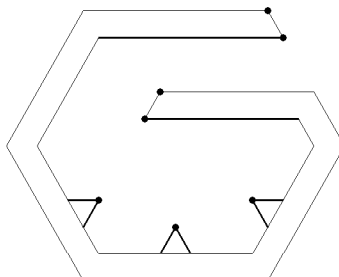


Рис. 2.16: Спиральный паркет

### 7.4 Терминологические замечания

Как было показано выше, числа вращения осей линейных скелетов из  $\mathcal{WP}_5$ , линейных участков паркетов из  $\mathcal{WP}_5$ , а также боковин паркетов из  $\mathcal{WP}_5$ , не превосходят 2, т.е., будучи расклассифицированы своим числом вращения, могут быть ровно трех типов, так же, как и линейные скелеты (участки паркетов) из  $\mathcal{WP}_5$ . Удобно перенести на ось и боковины названия тех линейных скелетов, оси (боковинами) которых они являются. А именно, ось (боковину)  $A$  назовем *змеей*, если  $\text{tw } A = 0$ , *лестницей*, если  $\text{tw } A = 1$ , и *ломаной змеей*, если  $\text{tw } A = 2$ .

## 8 Теорема классификации скелетов из $\mathcal{WP}_5$

Выше мы построили код скелета  $S$ , являющийся плоским графом и описывающий топологию скелета  $S$ . Однако код не отражает геометрических особенностей скелета  $S$ , таких как, скажем, взаимного расположения направляющих линейных участков, входящих в  $S$ . Поэтому для описания геометрии скелетов построим *схему скелета*  $S$ , закодировав каждый узел ветвления кружочком, а каждый линейный участок  $L$  набором черточек по следующему правилу: если  $L$  — змея, то поставим ему в соответствие одну черточку, параллельную оси участка  $L$ ; если  $L$  — лестница, то поставим ему в соответствие пару пересекающихся черточек, каждая из которых параллельна одной из двух направляющих участка  $L$ ; если же  $L$  — ломаная змея, то поставим в соответствие  $L$  три параллельные между собой черточки и параллельные единственной направляющей участка  $L$ .

Теперь все готово для того, чтобы сформулировать и доказать первую основную теорему из настоящей главы — теорему классификации скелетов из  $\mathcal{WP}_5$ .

**Теорема 2.2 (О классификации скелетов)** Пусть  $S$  — деревянный скелет с числом вращения, не превосходящим 5. Тогда он может быть получен последовательным применением операций редукции к некоторому

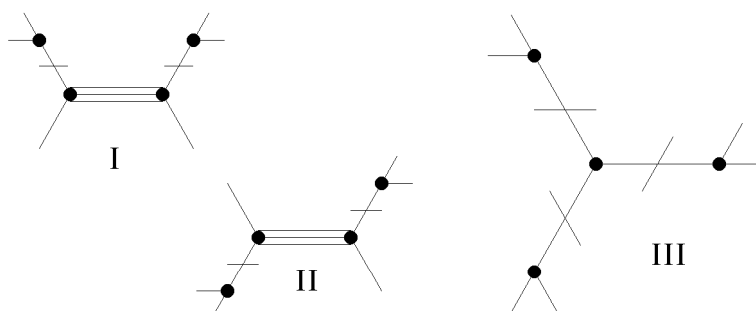


Рис. 2.17: Схемы классифицирующих скелетов

скелету одного из трех канонических типов, схемы которых изображены на рис. 2.17.

Обратно, каждый скелет, полученный последовательным применением операций редукции к произвольному скелету одного из трех канонических типов, принадлежит  $\mathcal{WP}_5$ .

**Определение.** Скелеты из  $\mathcal{WP}_5$  с шестью концевыми линейными участками, схемы которых приведены на рис. 2.17, называются *классифицирующими скелетами* I-го, II-го или III-го типов в соответствии с римской цифрой, приписанной коду на этом рисунке.

Доказательство теоремы 2.2 проведем в несколько шагов. Сначала отметим, что для линейных деревянных скелетов теорема тривиальна, поэтому будем предполагать, что скелет  $S$  содержит по крайней мере один узел ветвления. У таких скелетов удобно выделить некоторые линейные участки, которые мы назовем концевыми.

**Определение.** Линейный участок скелета  $S$ , содержащий крайнюю ячейку, называется *концевым*. Скелет  $S$ , содержащий  $k$  концевых линейных участков, будем называть  $k$ -скелетом.

Отметим, что у линейного деревянного скелета имеется два совпадающих концевых линейных участка (фактически, под концевым линейным участком деревянного скелета мы понимаем пару, состоящую из крайней ячейки и содержащего ее линейного участка).

Прежде всего, мы докажем, что число концевых линейных участков скелета  $S$  не превосходит 6.

Затем, с помощью операций антиредукции, мы научимся достраивать произвольный скелет из  $\mathcal{WP}_5$  до 6-скелета, также лежащего в  $\mathcal{WP}_5$  и имеющего лишь такие узлы ветвления, которые состоят ровно из одной ячейки.

Так как операции редукции и антиредукции взаимно обратны, нам останется расклассифицировать полученные 6-скелеты, что и завершит доказательство теоремы.

Перейдем теперь к реализации очерченного плана.

### 8.1 Число конечных линейных участков скелета из $\mathcal{WP}_5$

Цель настоящего раздела — доказать следующее предложение о числе конечных линейных участков скелетов из  $\mathcal{WP}_5$ .

**Предложение 2.8** *Число конечных линейных участков произвольного скелета  $S$  из  $\mathcal{WP}_5$  не превосходит шести.*

**Доказательство.** Отметим, что число конечных линейных участков скелета  $S$  равно числу конечных ребер его контура  $K$ . Напомним, что конечные ребра разбивают контур на боковины  $B_i$ , число  $k$  которых также совпадает с числом конечных линейных участков.

По предложению 2.7, число вращения каждой из боковин  $B_i$  не превосходит 2. Ориентируем контур  $K$  по часовой стрелке. Тогда, число вращения между последним ребром произвольной боковины и первым ребром боковины, следующей за ней, равно, очевидно,  $-3$ . Поэтому, условие равенства  $-2\pi$  полного угла поворота при обходе контура  $K$  по часовой стрелке, дает следующую оценку на  $k$ :

$$-6 = \sum_{i=1}^k \text{tw } B_i + (-3)k \leq 2k - 3k = -k,$$

откуда  $k \leq 6$ . Доказательство закончено.

### 8.2 Концевые змеи

Пусть  $S$  — произвольный деревянный скелет, и  $L$  — один из его конечных линейных участков. Рассмотрим ось  $\text{Sp } L$  для  $L$  как линейного участка, и пусть  $\gamma$  — концевое звено оси  $\text{Sp } L$ , т.е. звено, пересекающееся с контуром паркета  $S$ . Обозначим через  $Z$  множество всех ячеек паркета  $L$ , оси которых лежат в  $\gamma$ . Ясно, что паркет  $Z$  является змеей.

**Определение.** Построенную только что змею  $Z$  назовем *концевой змеей* для  $L$ .

Пусть теперь  $S$  — скелет из  $\mathcal{WP}_5$ . Продолжим отрезок  $\gamma$  за контур скелета  $S$  до некоторого отрезка конечной длины, и добавим к  $S$  все ячейки паркета плоскости, пересекающихся с продолжением  $\gamma$ . Ориентируем продолжение  $\gamma$  наружу скелета  $S$ . Ясно, что при добавлении последовательных ячеек перестраиваются ровно две боковины паркета, причем эта перестройка заключается в удлинении конечных звеньев этих боковин, поэтому числа вращения этих боковин остаются неизменными. Следовательно, перестроенный паркет по-прежнему остается скелетом из  $\mathcal{WP}_5$ .

**Определение.** Описанную только что операцию будем называть *удлинением конечного линейного участка  $L$  скелета  $S$* .

Итак, имеет место следующее утверждение.

**Утверждение 2.13** *В результате удлинения любого конечного линейного участка произвольного скелета из  $\mathcal{WP}_5$  всегда получается скелет из  $\mathcal{WP}_5$ .*

### 8.3 Выпускание конечного линейного участка

В настоящем разделе мы определим операцию выпускания конечного линейного участка, которая является частным случаем антиредукции I-го типа, и позволит нам достроить произвольный скелет из  $\mathcal{WP}_5$  до скелета с шестью концевыми линейными участками, также принадлежащего  $\mathcal{WP}_5$ .

Пусть  $S$  — скелет из  $\mathcal{WP}_5$ , имеющий менее шести концевых линейных участков. Удлинив, если необходимо, концевые линейные участки скелета  $S$ , будем предполагать, что концевые змеи скелета  $S$  состоят не менее чем из четырех ячеек. Пусть  $B_i$  — боковины скелета  $S$ ,  $i = 1, \dots, k$ , причем  $k \leq 5$ . В силу сделанного предположения, концевые звенья каждой боковины  $B_i$  состоят не менее чем из двух граничных ребер скелета  $S$ .

Ориентируем контур  $K$  скелета  $S$  по часовой стрелке. Будем предполагать, что боковины  $B_i$  скелета  $S$  занумерованы последовательно. Обозначим через  $a_i$  и  $b_i$  соответственно начальное и конечное звено боковины  $B_i$ . Тогда условие равенства  $-2\pi$  полного угла поворота при обходе контура  $K$  по часовой стрелке записывается в виде:

$$-6 = \sum_{i=1}^k \text{tw}(a_i, b_i) - 3k.$$

Так как числа вращения боковин  $B_i$  не превосходят 2, а  $k < 6$ , все  $\text{tw}(a_i, b_i)$  не могут одновременно равняться 2. Пусть, для определенности,  $\text{tw}(a_1, b_1) < 2$ .

**Лемма 2.10** *Имеет место одно из следующих двух утверждений.*

- Число вращения между  $a_1$  и произвольным звеном боковины  $B_1$  не превосходит 1.
- Число вращения между произвольным звеном боковины  $B_1$  и звеном  $b_1$  не превосходит 1.

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. существуют звенья  $c$  и  $d$  боковины  $B_1$ , такие что  $\text{tw}(a_1, c) = \text{tw}(d, b_1) = 2$ . Тогда

$$\text{tw}(a_1, b_1) = \text{tw}(a_1, c) + \text{tw}(c, d) + \text{tw}(d, b_1) = 4 + \text{tw}(c, d) \leq 1.$$

Поэтому,  $\text{tw}(c, d) \leq -3$ . Последнее противоречит тому, что  $\text{tw} B_1 \leq 2$ . Лемма доказана.

Предположим для определенности, что выполняется первое из двух утверждений леммы 2.10 (все приводимые ниже рассуждения тривиальным образом переносятся на случай, когда имеет место второе утверждение леммы 2.13). Иными словами, для любого звена  $c$  боковины  $B_1$  число вращения  $\text{tw}(a_1, c)$  не превосходит 1.

**Лемма 2.11** Пусть  $c$  — произвольное звено контура  $K$  скелета  $S$ , тогда число вращения  $\text{tw}(a_1, c)$  между звеньями  $a_1$  и  $c$  лежит в следующих пределах:

$$-5 \leq \text{tw}(a_1, c) \leq 1.$$

**Доказательство.** В силу выбора звена  $a_1$ , имеем  $\text{tw}(a_1, c) \leq 1$  для любого звена  $c$  боковины  $B_1$ . Пусть теперь  $c$  не лежит в  $B_1$ , и пусть  $m \geq 1$  — число боковин, целиком лежащих между  $a_1$  и  $c$ . Тогда

$$\text{tw}(a_1, c) = \sum_{i=1}^m \text{tw}(a_i, b_i) - 3(m-1) + \text{tw}(b_m, c).$$

Но  $\text{tw}(b_m, c) \leq -1$ , так как или  $c$  — концевое ребро, смежное с  $b_m$ , и тогда  $\text{tw}(b_m, c) \leq -1$ , или  $c$  лежит на следующей за  $B_m$  боковине, и тогда  $\text{tw}(b_m, c) \leq -3 + 2 = -1$ . С другой стороны,

$$\sum_{i=1}^m \text{tw}(a_i, b_i) \leq 1 + 2(m-1),$$

так как  $\text{tw}(a_1, b_1) \leq 1$ . Таким образом,

$$\text{tw}(a_1, c) \leq 1 + 2(m-1) - 3(m-1) - 1 = 1 - m \leq 0.$$

Проверим теперь неравенство  $\text{tw}(a_1, c) \geq -5$ . Так как  $\text{tw}(a_1, c) + \text{tw}(c, a_1) = -6$ , это неравенство вытекает из  $\text{tw}(c, a_1) \leq -1$ .

Если  $c$  — концевое ребро, смежное с  $a_1$ , то  $\text{tw}(c, a_1) \leq -1$  и все доказано.

Предположим теперь, что  $c$  не является смежным с  $a_1$  концевым ребром. Пусть  $m$  — номер первой боковины, целиком лежащей между  $c$  и  $a_1$ . Если таких боковин нет, т.е.  $c$  лежит на  $B_k$ , получим:

$$\text{tw}(c, a_1) = \text{tw}(c, b_k) + \text{tw}(b_k, a_1) \leq 2 - 3 = -1.$$

В противном случае, имеем:

$$\text{tw}(c, a_1) = \text{tw}(c, a_m) + \sum_{i=m}^k \text{tw}(a_i, b_i) + \sum_{i=m}^{k-1} \text{tw}(b_i, a_{i+1}) + \text{tw}(b_k, a_1).$$

Легко видеть, что  $\text{tw}(c, a_m) \leq -1$ , поэтому

$$\text{tw}(c, a_1) \leq -1 + 2(k+1-m) - 3(k-m) - 3 = -2 + m - k \leq -2,$$

так как  $k \leq m$ . Лемма доказана.

**Замечание.** Если в лемме 2.11 под  $a_1$  понимать не звено, а ребро боковины  $B_1$ , то, очевидно, получим более слабую оценку:  $-6 \leq \text{tw}(a_1, c) \leq 1$ .

Обозначим через  $a$  ребро контура, принадлежащее звену  $a_1$  и являющееся внутренним ребром боковины  $B_1$ . По замечанию к лемме 2.11, число вращения между  $a$  и произвольным ребром контура  $K$  лежит в пределах от  $-6$  до  $1$ . Пусть  $x$  — граничное ребро двойственного графа  $\Gamma_S$  скелета  $S$ , пересекающееся с  $a$ , и  $y$  — произвольное граничное ребро из  $\Gamma_S$ . В силу утверждения 2.11, имеем:  $-3 \leq \text{tw}(x, y) \leq 4$ , т.е.  $\text{tw}(x, \Gamma_S) \leq (3, 4)$ .

Рассмотрим змею  $Z$ , не пересекающуюся с  $S$ , состоящую более чем из двух ячеек, и такую, что число вращения  $\text{tw}(\Gamma_Z, z)$  ее двойственного графа  $\Gamma_Z$  относительно некоторого ее концевго ребра  $z$  равно  $(2, 1)$ . Склеим бинарные деревья  $\Gamma_S$  и  $\Gamma_Z$  по ребрам  $x$  и  $z$ . По утверждению 2.9,

$$\text{tw}((\Gamma_Z, z) \# (\Gamma_S, x)) \leq \max(3, 5, |(2, 1) + (3, 4)|) = 5.$$

По теореме о паркетной реализации, бинарное дерево  $(\Gamma_Z, z) \# (\Gamma_S, x)$  эквивалентно двойственному графу некоторого паркета  $Z \# S$  из  $\mathcal{WP}_5^2$ . Легко видеть, что паркет  $Z \# S$  является скелетом и имеет на один концевой линейный участок больше, чем скелет  $S$ . Легко понять, что на геометрическом языке паркет  $Z \# S$  можно получить так: рассмотрим сохраняющее ориентацию движение  $\varphi$  плоскости, совмещающее концевое ребро контура змеи  $Z$ , пересекающее  $z$ , с ребром  $a$  контура скелета  $S$  так, чтобы смежная с  $a$  ячейка из  $S$  оказалась вне змеи  $Z$ . Паркет  $Z \# S$ , с точностью до движения, совпадает с  $S \cup \varphi(Z)$ . Будем говорить, что паркет  $Z \# S$  получен из  $S$  *выпусканьем концевой змеи  $Z$  с ребра  $a$  контура  $K$  этого скелета.*

Таким образом, доказано следующее предложение.

**Предложение 2.9** *Для любого скелета из  $\mathcal{WP}_5^2$ , число концевых линейных участков которого меньше 6, существует содержащий его скелет из  $\mathcal{WP}_5^2$ , имеющий на один концевой линейный участок больше. В частности, всякий скелет из  $\mathcal{WP}_5^2$  может быть расширен до 6-скелета из  $\mathcal{WP}_5^2$  с помощью операции выпускания концевго линейного участка.*

## 8.4 Врезание змеи

Если в предыдущем разделе мы научились увеличивать число концевых линейных участков скелета, не выходя при этом из класса  $\mathcal{WP}_5^2$ , то цель настоящего раздела — научиться расщеплять сложные узлы ветвления, состоящие более чем из одной ячейки, на более простые. Для этого мы определим операцию врезания змеи.

Пусть  $S$  — произвольный скелет из  $\mathcal{WP}_5^2$ , содержащий узел ветвления  $U$ , состоящий более чем из одной ячейки. Рассмотрим внутреннее ребро  $a$  паркета  $U$ , и пусть  $x$  — ребро двойственного графа  $\Gamma_S$  скелета  $S$ , пересекающее  $a$ . Разрежем граф  $\Gamma_S$  по ребру  $x$ , и пусть  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — соответствующие

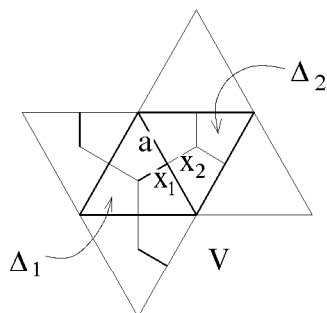


Рис. 2.18: Обоснование возможности расщепления узла ветвления

связные компоненты,  $x_i$  — ребро разреза из графа  $\Gamma_i$ , и  $S_i$  — компоненты скелета  $S$ , соответствующие  $\Gamma_i$ .

**Лемма 2.12** *Имеют место следующие неравенства:*

$$(2, 2) \leq \text{tw}(x_i, \Gamma_i) \leq (3, 3), \quad i = 1, 2.$$

**Доказательство.** Пусть  $\Delta_i$  — ячейка из  $S_i$ , примыкающая к ребру  $a$ . В силу выбора ребра  $a$ , ячейки  $\Delta_i$  входят в узел  $U$ , т.е. являются внутренними. Поэтому к каждой из них крепится еще по две ячейки скелета  $S$ , объединение которых с ячейками  $\Delta_i$  мы обозначим через  $V$ . Теперь ясно (см. рис. 2.18), что  $\text{tw}(x_i, \Gamma_i) \geq (2, 2)$  и  $\text{tw}(\Gamma_i, x_i) \geq (2, 2)$ . Так как число вращения скелета  $S$  не превосходит 5, то  $\text{tw}(\Gamma_1, x_1) + \text{tw}(x_2, \Gamma_2) \leq 5$ , поэтому  $\text{tw}(x_i, \Gamma_i) \leq (3, 3)$ . Лемма доказана.

Пусть теперь  $Z$  — змея, не пересекающаяся с  $S$  и состоящая из четного числа ячеек. Тогда число вращения между концевыми ребрами  $z_1$  и  $z_2$  ее двойственного графа  $\Gamma_Z$  равно нулю. Теперь мы находимся в условиях следствия 2.6. С помощью антиредукции II-го типа, вклеим в ребро  $x$  дерева  $\Gamma_S$  дерево  $\Gamma_Z$  по ребрам  $z_1$  и  $z_2$ . Полученное дерево обозначим через  $\hat{\Gamma}$ . Тогда, в силу следствия 2.6, число вращения бинарного дерева  $\hat{\Gamma}$  оценивается так:

$$\text{tw } \hat{\Gamma} \leq \max(3, 5, |(3, 3) + (2, 2)|, |(3, 3) + (2, 2)|) = 5,$$

где  $(2, 2)$  в правой части неравенства — оценка сверху на числа вращения концевых ребер змеи  $Z$  по отношению к  $Z$ .

Таким образом, число вращения II-антиредуцированного дерева  $\Gamma$  меньше или равно 5, поэтому, по теореме о паркетной реализации, ему соответствует паркет  $\hat{S}$  из  $\mathcal{WP}_5$ , который, очевидно, является скелетом. Геометрически, паркет  $\hat{S}$  можно получить так. Разрежем паркет  $S$  по ребру  $a$  на подпаркеты  $S_1$  и  $S_2$ . Пусть  $b_i$  — концевое ребро контура змеи  $Z$ , пересекающееся с ребром  $z_i$ . Пусть  $\varphi_i$  — сохраняющее ориентацию движение

плоскости, совмещающее ребро  $a$  контура паркета  $S_i$  с концевым ребром  $b_i$  контура змеи  $Z$ , причем так, чтобы образ смежной с  $a$  ячейки паркета  $S_i$  не лежал в  $Z$ . Тогда паркет  $\hat{S}$  совпадает, с точностью до движения, с паркетом  $\varphi_1(S_1) \cup Z \cup \varphi_2(S_2)$  и имеет, очевидно, на один узел ветвления больше, чем паркет  $S$ . Будем говорить, что скелет  $\hat{S}$  получен из скелета  $S$  *врезанием змеи  $Z$  в узел ветвления  $U$  по ребру  $a$* .

**Предложение 2.10** *Любой скелет из  $\mathcal{WP}_5$ , имеющий узел ветвления, состоящий более чем из одной ячейки, может быть получен редукцией II-го типа из скелета, также принадлежащего  $\mathcal{WP}_5$ , имеющего на один узел ветвления больше. В частности, каждый скелет из  $\mathcal{WP}_5$  получается последовательным применением операции редукции II-го типа из принадлежащего  $\mathcal{WP}_5$  скелета, каждый узел ветвления которого состоит ровно из одной ячейки.*

**Следствие 2.8** *Любой скелет из  $\mathcal{WP}_5$  может быть получен последовательным применением операции редукции к некоторому скелету из  $\mathcal{WP}_5$ , имеющему 6 концевых линейных участков и узлы ветвления, каждый из которых состоит ровно из одной ячейки.*

**Определение.** Скелеты из  $\mathcal{WP}_5$ , имеющие 6 концевых линейных участков и узлы ветвления, каждый из которых состоит ровно из одной ячейки, назовем *невырожденными 6-скелетами*.

Итак, описание скелетов из  $\mathcal{WP}_5$  свелось к описанию невырожденных 6-скелетов.

## 8.5 Направления концевых линейных участков скелетов из $\mathcal{WP}_5$

Пусть  $S$  — деревянный скелет, и  $L$  — произвольный его концевой линейный участок. Ориентируем ось  $\text{Sp } L$  участка  $L$  так, чтобы концевое звено оси было последним.

**Определение.** *Направлениями концевого линейного участка  $L$*  назовем направления векторов-звеньев его оси  $\text{Sp } L$ , ориентированной как описано выше.

**Предложение 2.11** *Направления концевых линейных участков произвольного скелета из  $\mathcal{WP}_5$  попарно различны.*

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. пусть нашлась пара концевых линейных участков  $L_i$  и  $L_j$  скелета  $S$ , множества направлений которых пересекаются. Это означает, что некоторые звенья, скажем  $l_i$  и  $l_j$ , их ориентированных осей сонаправлены. Рассмотрим наименьший подпаркет



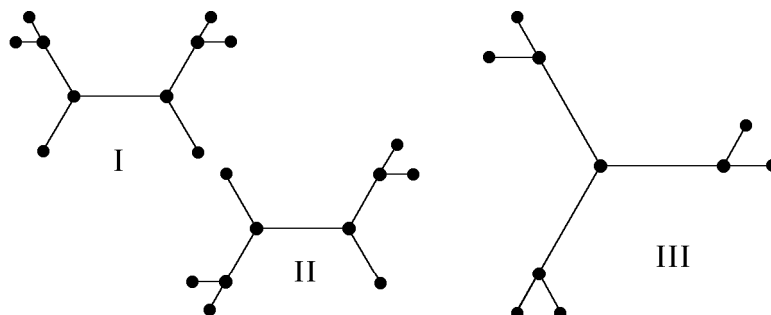


Рис. 2.19: Коды невырожденных 6-скелетов

$P$  в  $S$ , содержащий концевые линейные участки  $L_i$  и  $L_j$ . Легко видеть, что  $P$  — линейный паркет, причем звенья  $l_i$  и  $l_j$  его оси имеют противоположные направления, т.е.  $\text{tw } P > 5$ . Противоречие.

## 8.6 Коды невырожденных 6-скелетов

Выше, в разделе “Ось” настоящей главы, были определены коды деревянных скелетов. Ясно, что код невырожденного 6-скелета представляет собой плоское бинарное дерево с шестью вершинами степени 1. Таких деревьев, с точностью до эквивалентности, ровно три (рис. 2.19). Не представляет труда построить примеры невырожденных 6-скелетов, коды которых эквивалентны каждому из этих трех деревьев соответственно. Будем называть коды невырожденных 6-скелетов кодами *I-го*, *II-го* и *III-го типа* в соответствии с рис. 2.19. Итак, доказано следующее предложение.

**Предложение 2.12** *Коды невырожденных 6-скелетов представляют собой всевозможные плоские бинарные деревья с шестью вершинами степени 1.*

Поскольку каждый скелет из  $\mathcal{WP}_5$  может быть получен редукцией из некоторого невырожденного 6-скелета, а операция редукции не увеличивает числа концевых линейных участков и может уменьшать число узлов ветвления, имеет место следующее утверждение.

**Следствие 2.9** *Коды скелетов из  $\mathcal{WP}_5$  представляют собой всевозможные плоские деревья с не более чем шестью вершинами степени 1.*

## 8.7 Завершение доказательства теоремы 2.2

Для завершения доказательства теоремы 2.2 главное, что нам осталось сделать, — это разобраться с тем, какими могут быть линейные участки невырожденных 6-скелетов. Для этого разобьем ребра кодов невырожденных

$\delta$ -скелетов на *уровни*, отнеся к *первому уровню* все ребра, инцидентные вершинам кода степени 1, ко *второму уровню* — те из оставшихся ребер, которые смежны с ребрами первого уровня, и, наконец, к *третьему уровню* — все оставшиеся ребра (если они есть). Таким образом, у кодов I-го и II-го типа (см. рис 2.19) встречаются ребра всех трех уровней, а у кода III-го типа — ребра только первого и второго уровня.

В дальнейшем нам будет удобно придерживаться следующей терминологии. Линейный участок, соответствующий ребру  $i$ -го уровня кода невырожденного  $\delta$ -скелета, будем также относить к  $i$ -му уровню. Далее, упорядочим линейные участки по их числам вращения. Будем говорить, что линейный участок является *не более чем ломаной змеей (лестницей)*, если число вращения его оси не превосходит трех (двух).

**Предложение 2.13** Пусть  $S$  — произвольный невырожденный  $\delta$ -скелет. Тогда его линейные участки устроены следующим образом.

1. Линейные участки первого уровня — концевые линейные участки скелета  $S$ , являющиеся змеями. Угол между направлениями соседних концевых змей равен  $\pi/3$ .
2. Линейные участки второго уровня — не более чем лестницы, причем, если ориентировать такой линейный участок в сторону двух концевых змей, на которые он разветвляется, то направления звеньев его оси будут содержаться среди направлений этих концевых линейных участков.
3. Линейный участок  $L$  третьего уровня (если он есть) — не более чем ломаная змея. При этом, если ориентировать  $L$  в сторону любого узла ветвления  $U$ , то направления звеньев оси  $\text{Sp } L$  содержатся среди направлений тех трех концевых линейных участков скелета  $S$ , которые лежат в той же связной компоненте паркета  $S \setminus L$ , что и узел  $U$ .

**Доказательство.** (1) Покажем сначала, что линейные участки первого уровня суть змеи. Предположим противное. Тогда среди направлений различных концевых линейных участков скелета  $S$  есть совпадающие, что противоречит предложению 2.11.

Вычислим теперь углы между направлениями соседних концевых змей скелета  $S$ . Ориентируем, как всегда, контур  $K$  скелета  $S$  по часовой стрелке. Пусть  $B_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , — последовательные боковины скелета  $S$ , и обозначим через  $a_i$  и  $b_i$  соответственно начальное и конечное ребра боковины  $B_i$ . Ясно, что направление ребра  $a_i$  противоположно направлению содержащего его концевого линейного участка, а направление ребра  $b_i$  — совпадает с направлением концевого линейного участка, его содержащего. Искомое утверждение вытекает теперь из следующей леммы.

**Лемма 2.13** *Для любого  $i$  имеет место:  $\text{tw}(a_i, b_i) = 2$ .*

**Доказательство.** Очевидно,

$$-6 = \sum_{i=1}^6 \text{tw}(a_i, b_i) - 3 \cdot 6,$$

поэтому, так как  $\text{tw}(a_i, b_i) \leq 2$ , то все слагаемые  $\text{tw}(a_i, b_i)$  равны 2. Лемма доказана.

(2) Пусть  $L$  — линейный участок второго уровня. С помощью операции редукции I-го типа отрезем от скелета  $S$  те концевые змеи, на которые разветвляется  $L$ . Теперь  $L$  — концевой линейный участок полученного редуцированного скелета. В силу предложения 2.11, направления звеньев оси  $\text{Sp } L$  отличаются от направлений оставшихся четырех концевых линейных участков, поэтому обязаны содержаться среди направлений концевых линейных участков, которые были отрезаны, что и требовалось.

(3) Доказательство аналогично (2).

Ориентируем контур  $K$  скелета  $S$  по часовой стрелке, и пусть  $L_i$  — концевые линейные участки скелета  $S$ , занумерованные последовательно.<sup>1</sup>

**Следствие 2.10** *Каждый концевой линейный участок скелета  $S$  из  $\mathcal{WP}_5$  имеет не более трех различных направлений, причем эти направления — последовательные. Множества направлений, соответствующих любым двум различным концевым линейным участкам из  $S$ , не пересекаются.*

*Если ориентировать границу скелета  $S$ , скажем, против часовой стрелки, что задаст циклический порядок на множестве концевых линейных участков, а также ориентировать шестиугольник направлений против часовой стрелки, что задаст циклический порядок на семействе множеств направлений концевых линейных участков, то оба возникших порядка будут согласованы: последовательные концевые линейные участки будут иметь последовательные множества направлений.*<sup>2</sup>

Используя предложение 2.13, а также технику врезания змей, примененную в разделе “Врезание змей” для расщепления узлов ветвления, состоящих

<sup>1</sup>Между концевыми линейными участками скелета и концевыми ребрами его контура существует взаимно однозначное соответствие. Ориентация контура определяет циклический порядок на множестве концевых ребер, а, значит, и на множестве концевых линейных участков скелета.

<sup>2</sup>Каждому направлению естественным образом соответствует точка на единичной окружности. Ориентация контура задает ориентацию окружности (в нашем случае окружность ориентирована в отрицательном направлении), и, поэтому, циклический порядок на множестве всевозможных направлений. Заметим, что в нашем случае имеется ровно 6 возможных направлений, составляющих вершины вписанного в окружность правильного шестиугольника.

более чем из одной ячейки, мы очевидным образом можем преобразовать каждый линейный участок невырожденного  $\delta$ -скелета так, чтобы превратить этот скелет в классифицирующий.

Итак, первое утверждение теоремы 2.2 полностью доказано. Обратное утверждение вытекает из того, что классифицирующие скелеты принадлежат  $\mathcal{WP}_5$ . Последнее легко проверяется с помощью предложения 2.7. Доказательство закончено.

## 9 Расположение наростов в паркетах, принадлежащих $\mathcal{WP}_5$ , на их скелетах

В настоящем разделе будет доказана теорема, описывающая расположение наростов паркетов из  $\mathcal{WP}_5$  на их скелетах. Прежде всего, покажем, что боковины паркета независимы в следующем смысле.

**Предложение 2.14 (О независимости боковин)** Пусть  $S$  — скелет из  $\mathcal{WP}_5$ , а  $B_i$  — его боковины. Пусть  $D_i$  — деревянный паркет, скелет которого (для некоторого разложения) совпадает с  $S$ , причем множество  $A_i$  всех наростов паркета  $D_i$  крепится к одной боковине  $B_i$ . Предположим, что каждый паркет  $D_i$  принадлежит  $\mathcal{WP}_5$ . Тогда паркет  $D$ , полученный из  $S$  присоединением всех наростов из множества  $\sqcup A_i$ , также принадлежит  $\mathcal{WP}_5$ .

**Доказательство.** Поскольку присоединение нароста к боковине меняет только эту боковину, предложение следует из предложения 2.7.

Из предложения 2.14 вытекает, что достаточно описать возможное расположение наростов на одной боковине скелета из  $\mathcal{WP}_5$ .

**Теорема 2.3 (О расположении наростов)** Пусть  $D$  — паркет из  $\mathcal{WP}_5$ , и  $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$  — его разложение на скелет и наросты. Пусть  $B$  — некоторая боковина скелета  $S$ . Ориентируем  $B$  в соответствии с обходом контура скелета  $S$  по часовой стрелке. Тогда наросты паркета  $D$  могут располагаться на  $B$  по следующим правилам (см. рис. 2.20).

- (1) Если  $B$  — змея, на расположение наростов на  $B$  никаких ограничений нет.
- (2) Пусть  $B$  — лестница. Будем двигаться по  $B$  в соответствии с ориентацией. Тогда встречающиеся наросты сначала расположены произвольным образом на звеньях одного и того же направления, а затем, начиная с некоторого момента, — лишь на звеньях другого направления, составляющего с первым угол  $-\pi/3$  (если, конечно, звенья такого направления существуют).

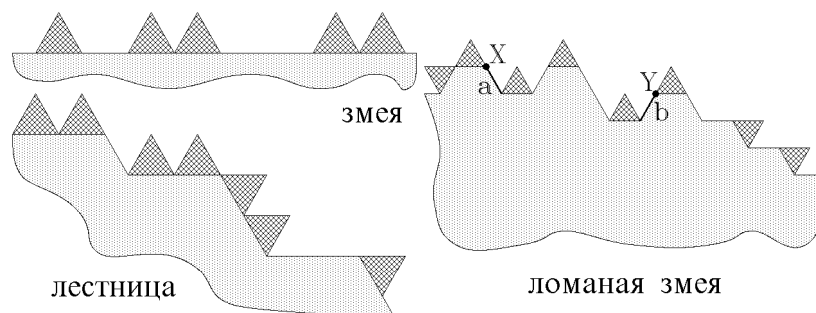


Рис. 2.20: Расположение наростов в паркетах из  $\mathcal{WP}_5^2$

(3) Пусть  $B$  — ломаная змея, и  $l$  — ее направляющая, ориентированная так, что проекции векторов-звеньев ломаной  $B$  на  $l$  положительны. Пусть  $a$  — первое звено ломаной  $B$ , повернутое относительно направления  $l$  на  $-\pi/3$ , а  $b$  — последнее звено ломаной  $B$ , повернутое относительно направления  $l$  на  $+\pi/3$ . Обозначим через  $X$  начальную вершину вектора-звена  $a$  и через  $Y$  — конечную вершину вектора-звена  $b$ . Вершины  $X$  и  $Y$  разбивают ломаную  $B$  на три последовательных участка, первый и последний из которых, очевидно, являются не более чем лестницами. На среднем участке наросты могут быть расположены произвольным образом лишь на звеньях, параллельных  $l$ . На начальном и конечном участках наросты располагаются по правилу (2).

**Доказательство.** В силу предложения 2.14, теорему достаточно доказать для таких паркетов, все наросты которых крепятся только к одной боковине. Всюду ниже  $S$  обозначает скелет такого паркета, а  $B$  — ту его боковину, к которой крепятся наросты. Мы начнем со следующей несложной леммы.

**Лемма 2.14** Пусть  $B$  — боковина скелета  $S$  деревянного паркета  $D$ , причем  $S$  лежит в  $\mathcal{WP}_5^2$ . Тогда если все наросты паркета  $D$  располагаются только на тех звеньях ломаной  $B$ , которые параллельны некоторой фиксированной направляющей боковины  $B$ , то паркет  $D$  также принадлежит  $\mathcal{WP}_5^2$ .

**Доказательство.** Добавление каждого нароста  $\Delta$  к звену боковины  $B$ , параллельному ее направляющей  $l$ , приводит к тому, что боковина  $B$  рестраивается в объединение двух боковин  $B_1$  и  $B_2$ , каждая из которых однозначно проектируется на направляющую  $l$ . В самом деле, ломаная  $B_1 \cup B_2$  отличается от  $B$  тем, что вместо ребра  $a$ , на которое крепится нарост  $\Delta$ , появилось два ребра, представляющие собой стороны из  $\Delta$ , отличные от  $a$ . Ясно, что эти две стороны проектируются на  $l$  однозначно в

образ ребра  $a$ , что и требовалось. Остается заметить, что  $l$  является также направляющей и для боковин  $B_i$ , что и завершает доказательство леммы.

Для дальнейшего нам будет полезно выделить части контура паркета, обладающие специальными свойствами. Эти части контура мы будем называть существенно ломаными змеями.

Ориентируем контур по часовой стрелке.

**Определение.** Лежащая на контуре ломаная  $L$  называется *существенно ломаной змеей*, если число вращения между начальным и конечным ее звеньями равно 2.

**Лемма 2.15** *Если паркет является скелетом, то каждая существенно ломаная змея целиком содержится в некоторой его боковине.*

**Доказательство.** Пусть  $S$  — скелет из  $\mathcal{WP}_5^2$ , и  $a$  — некоторое ребро контура  $K$  скелета  $S$ . Рассмотрим произвольное ребро  $b$  из  $K$ . Ориентируем  $K$  по часовой стрелке, и пусть  $\gamma = K[a, b]$  — ориентированный в соответствии с  $K$  путь в  $K$ , начинающийся на  $a$  и заканчивающийся на  $b$ . Мы должны показать, что  $\text{tw}_\gamma(a, b) < 2$  для ребер  $a$  и  $b$ , не лежащих в одной боковине. Поэтому будем сразу предполагать, что  $a \neq b$ .

Пусть  $B_1, \dots, B_p$ ,  $p \geq 1$ , — последовательные боковины контура  $K$ , каждая из которых пересекает  $\gamma$  не менее чем по ребру. Ориентируем каждую  $B_i$  в соответствии с  $K$ , и обозначим через  $a_i$  и  $b_i$  начальное и конечное ребро из  $B_i$ .

Пусть  $a$  — конечное ребро. Имеет место следующее утверждение.

**Утверждение 2.14** *В сделанных предположениях,  $\text{tw}_\gamma(a, b) \leq 1$ .*

**Доказательство.** Пусть сначала  $b$  — конечное ребро. Имеем:

$$\text{tw}_\gamma(a, b) = \text{tw}(a, a_1) + \sum_{i=1}^p \text{tw}(a_i, b_i) - 3(p-1) + \text{tw}(b_p, b).$$

Очевидно,  $\text{tw}(a, a_1) \leq -1$ ,  $\text{tw}(b_p, b) \leq -1$  и  $\text{tw}(a_i, b_i) \leq 2$ , поэтому

$$\text{tw}_\gamma(a, b) \leq -1 + 2p - 3(p-1) - 1 = 1 - p \leq 0.$$

Пусть теперь  $b$  — не конечное ребро. Тогда

$$\text{tw}_\gamma(a, b) = \text{tw}(a, a_1) + \sum_{i=1}^{p-1} \text{tw}(a_i, b_i) - 3(p-1) + \text{tw}(a_p, b),$$

поэтому

$$\text{tw}_\gamma(a, b) \leq -1 + 2(p-1) - 3(p-1) + 2 = 2 - p \leq 1.$$

Доказательство утверждения закончено.

Вернемся к доказательству леммы. Рассмотрим теперь случай, когда  $a$  — не концевое ребро.

Пусть  $b$  — концевое ребро. Тогда

$$\text{tw}_\gamma(a, b) = \text{tw}(a, b_1) + \sum_{i=2}^p \text{tw}(a_i, b_i) - 3(p-1) + \text{tw}(b_p, b),$$

но  $\text{tw}(a, b_1) \leq 2$ ,  $\text{tw}(a_i, b_i) \leq 2$  и  $\text{tw}(b_p, b) \leq -1$ , поэтому

$$\text{tw}_\gamma(a, b) \leq 2 + 2(p-1) - 3(p-1) - 1 = 2 - p \leq 1.$$

Наконец, пусть  $b$  — не концевое ребро. Тогда  $p \geq 2$ , так как  $a$  и  $b$  не лежат на одной боковине. Имеем:

$$\begin{aligned} \text{tw}(a, b) &= \text{tw}(a, b_1) + \sum_{i=2}^{p-1} \text{tw}(a_i, b_i) - 3(p-1) + \text{tw}(a_p, b) \leq \\ &2 + 2(p-2) - 3(p-1) + 2 = 3 - p \leq 1. \end{aligned}$$

Доказательство леммы закончено.

**Лемма 2.16** Пусть  $L$  — часть боковины  $B$  скелета  $S$  деревянного паркета  $D$ , причем  $D$  лежит в  $\mathcal{WP}_5^2$ . Предположим, что  $L$  является существенно ломаной змеей. Тогда наросты паркета  $D$  могут располагаться только на тех звеньях ломаной  $L$ , которые параллельны единственной направляющей боковины  $B$ .

**Доказательство.** Пусть  $a$  — первое звено из  $L$ , а  $b$  — последнее. Предположим противное, т.е. на некотором звене  $c$  ломаной  $L$ , не параллельном направляющей боковины  $B$ , имеется нарост. Обозначим через  $x$  и  $y$  последовательные его граничные ребра. Тогда, если  $c$  параллельно  $a$ , то  $\text{tw}(y, b) = 3$ , а если  $c$  параллельно  $b$ , то  $\text{tw}(a, x) = 3$ . Полученное противоречие и завершает доказательство леммы.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы.

Утверждение (1) сразу следует из леммы 2.14.

Для доказательства утверждения (2) вспомним, что каждое звено лестницы параллельно некоторой ее направляющей (лестница имеет две направляющих и состоит из звеньев двух направлений). Обозначим звенья одного направления через  $a_i$ , а звенья второго направления — через  $b_i$ , причем будем, для определенности, предполагать, что направление звеньев  $b_i$  повернуто относительно направления звеньев  $a_i$  на угол величины  $-\pi/3$ . Обозначим через  $D'$  паркет, полученный из  $D$  выбрасыванием всех наростов, прикрепленных к звеньям  $b_i$ . По лемме 2.14 паркет  $D'$  лежит в  $\mathcal{WP}_5^2$ . Пусть  $\Delta$  — произвольный такой нарост. Тогда выброшенные наросты не

могут располагаться перед  $\Delta$ . В самом деле, если звено  $b_i$  расположено перед  $\Delta$ , а  $x$  и  $y$  — последовательные граничные ребра нароста  $\Delta$ , то  $\text{tw}(b_i, x) = 3$ , поэтому часть контура с начальным звеном  $b_i$  и конечным звеном  $x$  является существенно ломаной змеей с направляющей параллельной  $a_i$ , и искомое утверждение вытекает из леммы 2.16. Поэтому все выброшенные наросты могли располагаться только после последнего такого нароста.

Пусть теперь  $\Delta$  — последний из наростов паркета  $D'$ . Тогда боковина, начальное звено которой — ребро  $y$ , является лестницей. Поэтому, по лемме 2.14, если на звеньях  $b_i$ , лежащих после  $\Delta$ , произвольным образом располагаются наросты паркета  $D$ , то паркет  $D$  лежит в  $\mathcal{WP}_3^*$ . Утверждение (2) доказано.

Доказательство утверждения (3) получается аналогично.

Доказательство теоремы закончено.

## 10 Теорема реализации

В настоящем пункте мы покажем, что полученная нами классификация точна, а именно, имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.4 (О реализации)** *Двойственный граф произвольного паркета из  $\mathcal{WP}_3^*$  эквивалентен некоторому плоскому минимальному бинарному дереву с выпуклой границей.*

Для доказательства теоремы реализации мы воспользуемся описанием паркетов из  $\mathcal{WP}_3^*$ , полученным в теоремах 2.2 и 2.3. Сначала мы покажем, что каждый скелет из  $\mathcal{WP}_3^*$  имеет выпуклую минимальную реализацию или, короче, *СМ-реализацию*, а затем обобщим полученный результат на паркеты с наростами.

### 10.1 Редукция I-го типа

Операция редукции оказывается полезной и при доказательстве теоремы реализации. А именно, имеет место следующее предложение.

**Предложение 2.15** *Пусть  $\hat{D}$  — деревянный паркет, имеющий СМ-реализацию, и  $D$  — паркет, полученный из  $\hat{D}$  редукцией I-го типа. Тогда  $D$  тоже имеет СМ-реализацию.*

**Доказательство.** Пусть паркет  $D$  получается из паркета  $\hat{D}$  отрезанием подпаркета  $D_0$ . Обозначим через  $\hat{\Gamma}$ ,  $\Gamma$  и  $\Gamma_0$  двойственные графы паркетов  $\hat{D}$ ,  $D$  и  $D_0$  соответственно, а через  $\hat{a}$  — ребро дерева  $\hat{\Gamma}$ , соответствующее тому ребру паркета  $\hat{D}$ , по которому произошло это разрезание.



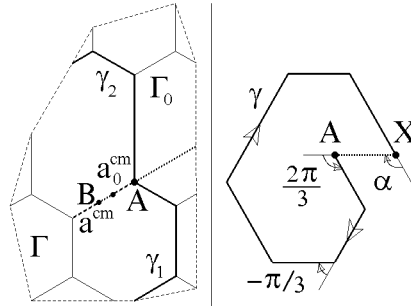


Рис. 2.21: Продолжение ребра  $a^{cm}$  не пересекает  $\gamma_1 \cup \gamma_2$

Пусть  $\widehat{\Gamma}^{cm}$  — некоторая выпуклая минимальная реализация бинарного дерева  $\widehat{\Gamma}$  (т.е.  $\widehat{\Gamma}^{cm}$  — плоское минимальное бинарное дерево, эквивалентное  $\widehat{\Gamma}$ , граничные вершины которого лежат на границе  $\partial P$  выпуклого многоугольника  $P$ ), и  $\widehat{a}^{cm}$  — ребро из  $\widehat{\Gamma}^{cm}$ , соответствующее  $\widehat{a}$ . Ясно, что если разрезать дерево  $\widehat{\Gamma}^{cm}$  по ребру  $\widehat{a}^{cm}$ , то мы получим бинарные деревья  $\Gamma^{cm}$  и  $\Gamma_0^{cm}$ , эквивалентные  $\Gamma$  и  $\Gamma_0$  соответственно. Пусть  $a^{cm}$  и  $a_0^{cm}$  — ребра разреза, принадлежащие соответственно  $\Gamma^{cm}$  и  $\Gamma_0^{cm}$ . Обозначим через  $B$  (граничную) вершину ребра  $a^{cm}$ , которая лежит внутри  $\widehat{a}^{cm}$ . Мы покажем, что выпуклую минимальную реализацию дерева  $\Gamma$  можно получить так: выбросить дерево  $\Gamma_0^{cm}$  и продолжить ребро  $a^{cm}$  дерева  $\Gamma^{cm}$  за вершину  $B$  до пересечения с ломаной  $\partial P$ .

В самом деле, построенное таким образом плоское бинарное дерево будет, очевидно, плоским минимальным бинарным деревом с выпуклой границей, эквивалентным  $\Gamma$ , если только продолжение ребра  $a^{cm}$  не пересечет дерева  $\Gamma^{cm}$ .

Итак, покажем, что продолжение ребра  $a^{cm}$  дерева  $\Gamma^{cm}$  не пересекает дерева  $\Gamma^{cm}$ . Пусть  $A$  — вершина ребра  $a_0^{cm}$ , не лежащая внутри  $\widehat{a}^{cm}$ . Рассмотрим пути  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ , в дереве  $\Gamma_0^{cm}$ , начинающиеся в вершине  $A$  и такие, что если  $e_i$  — начальное ребро пути  $\gamma_i$ , то  $\text{tw}(a_0^{cm}, e_i) = (-1)^i$  и числа вращения между последовательными звеньями пути  $\gamma_i$ , как между ребрами дерева  $\Gamma_0^{cm}$ , равны  $(-1)^i$ . Ясно, что пути  $\gamma_i$  разбивают многоугольник  $P$  на две замкнутые области, пересекающиеся по  $\gamma_1 \cup \gamma_2$ , в одной из которых лежит дерево  $\Gamma^{cm}$ , а в другой — дерево  $\Gamma_0^{cm}$ , из которого выброшено ребро  $a_0^{cm}$ . Поэтому достаточно показать, что продолжение ребра  $a_0^{cm}$  за вершину  $A$  не пересекает путей  $\gamma_i$ .

Предположим противное, т.е. продолжение ребра  $a_0^{cm}$  пересекается с одним из путей  $\gamma_i$ , скажем, с  $\gamma_1$ . Пусть  $X$  — первая, отличная от  $A$ , точка пересечения продолжения ребра  $a_0^{cm}$  с путем  $\gamma_1$ . Обозначим через  $\gamma$  часть пути  $\gamma_1$ , расположенную между точками  $A$  и  $X$ . Рассмотрим многоугольник  $U$ , ограниченный  $\gamma$  и отрезком  $A X$ , см. рис. 2.21. Так как  $\text{tw } \widehat{\Gamma} \leq 5$ , многоугольник  $U$  имеет не более шести вершин.

Ориентируем границу многоугольника  $U$  так, чтобы движение по  $\gamma$  происходило от точки  $A$  к точке  $X$ . Обозначим через  $\alpha$  угол поворота при проходе вершины  $X$  многоугольника  $U$ . Заметим, что при проходе через вершину  $A$  угол поворота равен  $2\pi/3$ , а при проходе через вершины из  $U$ , отличные от  $A$  и  $X$ , углы поворота равны  $-\pi/3$ . Пусть  $k+2$  — число вершин многоугольника  $U$ . Из вышесказанного следует, что  $k \leq 4$ . Запишем условие равенства  $\pm 2\pi$  полного угла поворота при обходе многоугольника  $U$ :

$$\pm 2\pi = \frac{2\pi}{3} - k\frac{\pi}{3} + \alpha.$$

Сумма первых двух слагаемых в правой части этого соотношения по модулю не превосходит  $2\pi/3$  (так как  $k \leq 4$ ). С другой стороны, угол  $\alpha$  по модулю меньше  $\pi$ . Противоречие. Тем самым, доказательство предложения закончено.

Из предложения 2.15 вытекает, что теорему реализации в случае скелетов достаточно доказать для скелетов с шестью концевыми линейными участками. Такая реализация будет построена в несколько этапов.

## 10.2 Реализация змеи

Центральным понятием, позволяющим строить различные минимальные реализации скелетов, является понятие дождя, к определению которого мы и переходим.

**Определение.** Произвольную конечную совокупность различных взаимно параллельных прямых на плоскости назовем *дождем*. Две прямые дождя называются *соседними*, если между ними не содержится других прямых этого дождя. Объединение полос, ограниченных соседними прямыми дождя, назовем *полосой дождя*.

Пусть  $R = \{r_i\}_{i=1}^k$  — некоторый дождь, где  $r_i$  — его прямые. Если соседние прямые дождя занумерованы последовательными числами  $i$ , то такую нумерацию назовем *канонической*. Отметим, что для каждого дождя существует ровно две канонические нумерации.

Чтобы различать две возможные канонические нумерации, полезно ввести направления распространения дождя. А именно, пусть  $R$  — канонически занумерованный дождь. Рассмотрим единичный вектор  $n$ , перпендикулярный прямым дождя  $R$ . Тогда ориентированная прямая  $l$  направления  $n$  задает на прямых дождя  $R$  естественный порядок, порожденный порядком точек пересечения прямых дождя с прямой  $l$ . Если так определенный порядок совпадает с порядком, заданным канонической нумерацией дождя, то вектор  $n$  назовем *направлением распространения дождя  $R$*  и обозначим через  $n(R)$ .

Пусть  $m$  — единичный вектор, параллельный прямому дождю. Вектор  $m$  задает на этих прямых некоторую ориентацию, называемую *ориентацией дождя*. При этом дождь, на прямых которого задана такая ориентация, назовем *ориентированным*. Вектор  $m$  называется *направлением ориентированного дождя*. Отметим, что каждый дождь можно ориентировать ровно двумя способами. Если  $R$  — дождь, ориентированный вектором  $m$ , то дождь, ориентированный вектором  $-m$  будем обозначать через  $-R$ . Два ориентированных дождя назовем *сонаправленными*, если их направления совпадают.

Дожди естественным образом появляются в теории минимальных сетей.

**Пример 2.1** Пусть  $\Gamma_Z$  — двойственный граф некоторой змеи  $Z$ , или некоторая его минимальная реализация. Проведем через неконцевые граничные ребра графа  $\Gamma_Z$  прямые, множество которых обозначим через  $R$ . Ясно, что  $R$  является дождем, который называется дождем змеи  $Z$ .

Пусть  $R$  — дождь, ориентированный единичным вектором  $m$ , и  $A$  — некоторая точка плоскости, лежащая вне полосы дождя  $R$ . Выберем направление  $n(R)$  распространения дождя  $R$  так, чтобы ближайшая к  $A$  прямая дождя была бы первой в канонической нумерации, порожденной  $n(R)$ . Теперь дождь  $R$  имеет вид:  $r_1, \dots, r_k$ . Ориентируем плоскость с помощью ортонормального репера  $(n(R), m)$ . Выпустим из  $A$  луч  $m_1$ , повернутый относительно  $n(R)$  на угол  $\pi/6$ , и пусть  $A_1$  — точка пересечения луча  $m_1$  с прямой  $r_1$ . Далее, выпустим из точки  $A_1$  луч  $m_2$  под углом  $-\pi/6$  к  $n(R)$ .<sup>3</sup> Из точки  $A_2$  пересечения луча  $m_2$  с прямой  $r_2$  (если такая прямая существует, т.е. если  $k > 1$ ), выпустим луч  $m_3$  снова под углом  $\pi/6$  к  $n(R)$ . Продолжим этот процесс до тех пор, пока не будет исчерпано множество всех прямых дождя.

**Определение.** Объединение ломаной  $A_0 = A, A_1, \dots, A_k$  с лучом  $m_{k+1}$  назовем выпущенным из точки  $A$  *ручейком*, порожденным ориентированным дождем  $R$ . Такие ручейки будем обозначать через  $\text{br}(A, R)$ .

Ручеек разбивает каждую прямую дождя на два луча: один из лучей сонаправлен с  $m$ , а другой — с  $-m$ . Первый из этих лучей назовем *положительным*, а второй — *отрицательным*. Рассмотрим  $i$ -ую прямую дождя. Если  $i$  — нечетно, то выкинем из  $i$ -ой прямой внутренность отрицательного луча. Если же  $i$  — четно, то выкинем из  $i$ -ой прямой внутренность положительного луча. Оставшиеся после проделанной операции положительные и отрицательные лучи назовем *отростками*.

**Определение.** Объединение ручейка  $\text{br}(A, R)$  и отростков назовем выпущенной из точки  $A$  (бесконечной) *змеей*, порожденной ориентированным дождем  $R$ . Такие змеи будут обозначаться через  $\mathcal{Z}(A, R)$ . Вершины  $A_1, \dots, A_k$  ручейка  $\text{br}(A, R)$  назовем *точками Штейнера* змеи  $\mathcal{Z}(A, R)$ .

<sup>3</sup>Отметим, что мы измеряем углы в репере  $(n(R), m)$ , что определяет знаки углов.

Отметим, что углы в каждой точке Штейнера змеи  $Z(A, R)$  равны между собой и, значит, равны  $120^\circ$ . Кроме того, изменение ориентации дождя  $R$  приводит к змее  $Z(A, -R)$ , зеркально симметричной с  $Z(A, R)$ .

**Пример 2.2** Рассмотрим сеть  $\Gamma_Z$  из примера 2.1 и продолжим все ее граничные ребра, кроме одного концевого ребра  $e$ , за инцидентные им граничные вершины до бесконечности. Если  $A$  — граничная вершина ребра  $e$ , и дождь  $R$  ориентирован в направлении смежного с  $e$  граничного ребра сети  $\Gamma_Z$  (мы предполагаем, что граничные ребра ориентированы в стороны инцидентных им граничных вершин), то так преобразованный граф  $\Gamma_Z$  совпадает со змеей  $Z(A, R)$ .

**Пример 2.3** Пусть  $P$  — некоторый выпуклый многоугольник, содержащий внутри себя все точки Штейнера некоторой змеи  $Z(A, R)$ . Предположим, что точка  $A$  лежит на границе многоугольника  $P$ . Тогда пересечение змеи  $Z(A, R)$  с  $P$  является минимальной сетью типа змея, стягивающей вершины, получающиеся при пересечении змеи  $Z(A, R)$  с границей многоугольника  $P$ . Полученная минимальная сеть является выпуклой минимальной реализацией некоторой змеи  $Z$ .

Пусть  $R$  — некоторый дождь, и пусть  $A$  и  $B$  — два произвольных подмножества плоскости. Будем говорить, что дождь  $R$  лежит между  $A$  и  $B$ , если множества  $A$  и  $B$  находятся в разных открытых полуплоскостях, на которые распадается плоскость после выбрасывания полосы дождя  $R$ . Про такие множества  $A$  и  $B$  мы будем также говорить, что они отделены дождем  $R$ .

Пусть  $A$  — фиксированная точка, и  $B$  — некоторое подмножество плоскости. Пусть  $R$  — некоторый ориентированный дождь, лежащий между  $A$  и  $B$ . Пусть  $X$  — произвольная точка множества  $B$ . Будем говорить, что змея  $Z(A, R)$  приходит в точку  $X$ , если  $X$  принадлежит пересечению змеи  $Z(A, R)$  с множеством  $B$ .

Рассмотрим множество всех сонаправленных с  $R$  ориентированных дождей  $R_\alpha$ , также лежащих между  $A$  и  $B$ . Возникает следующая задача.

**Задача** Описать множество точек из  $B$ , в которые приходят змеи  $Z(A, R_\alpha)$ .

Решение этой задачи может быть получено в терминах так называемого характеристического конуса.

**Определение.** Внутренность угла величины  $\pi/3$  с вершиной в точке  $A$ , для которого луч с вершиной в  $A$  направления  $n(A, R)$  является биссектрисой, называется *характеристическим конусом ориентированного дождя  $R$*  с вершиной в  $A$ . Такой характеристический конус будем обозначать через  $C(A, R)$ .

Пусть  $R$  — дождь, и  $A$  — точка плоскости, не лежащая в полосе дождя. Проведем через  $A$  прямую  $l$ , параллельную прямым дождя  $R$ . Тогда все параллельные  $R$  дожди, находящиеся в той же полуплоскости относительно  $l$ , что и  $R$ , имеют совпадающие характеристические конусы с вершиной в  $A$ .

Из вышесказанного непосредственно вытекает следующий результат.

**Предложение 2.16** *Пусть, как и выше, точка  $A$  и множество  $B$  отделены некоторым ориентированным дождем  $R$ , и пусть  $R_\alpha$  — всевозможные сонаправленные с  $R$  дожди, также лежащие между  $A$  и  $B$ . Тогда множество всех точек из  $B$ , в которые приходят всевозможные змеи  $Z(A, R_\alpha)$ , совпадает с пересечением множества  $B$  и характеристического конуса  $\mathcal{C}(A, R)$ . Более того, все ручейки  $\text{br}(A, R_\alpha)$  лежат в замыкании конуса  $\mathcal{C}(A, R)$ .*

Пусть  $Z$  — некоторый паркет-змея,  $\Gamma_Z$  — его двойственный граф,  $A_Z$  — концевая вершина графа  $\Gamma_Z$ , т.е. одна из двух граничных вершин, инцидентных концевым ребрам. Пусть  $P$  — произвольный выпуклый многоугольник,  $A$  — точка на его границе,  $e$  — его сторона. Предположим, что существует отделяющий  $A$  и  $e$  дождь  $R'$ , такой что внутренность стороны  $e$  пересекает оба луча, образующих границу характеристического конуса  $\mathcal{C}(A, R')$ . Пусть  $X$  — произвольная точка из  $\mathcal{C}(A, R') \cap e$ .

**Следствие 2.11** *В сделанных только что предположениях, существует дождь  $R$ , параллельный  $R'$ , также отделяющий  $A$  от  $e$ , такой что пересечение змеи  $Z(A, R)$  с многоугольником  $P$  является эквивалентной  $\Gamma_Z$  минимальной сетью типа змея с выпуклой границей, причем  $X$  — концевая вершина этой сети.*

**Следствие 2.12** *Пусть  $ABC$  — произвольный треугольник, и  $X$  — любая внутренняя точка отрезка  $BC$ . Пусть  $Z$  — некоторый паркет-змея,  $\Gamma_Z$  — двойственный граф змеи  $Z$ . Тогда существует минимальная сеть  $\Gamma$ , эквивалентная  $\Gamma_Z$ , такая что все граничные вершины сети  $\Gamma$  лежат на сторонах треугольника  $ABC$  (а, значит,  $\Gamma$  содержится в треугольнике  $ABC$ ), причем ребро из  $\Gamma_Z$ , соответствующее концевому ребру змеи  $Z$ , выходит из точки  $X$ , а реализации всех отростков змеи  $Z$  параллельны отрезку  $BC$ .*

Разработанная в настоящем разделе техника будет существенно использоваться в дальнейшем при построении минимальных реализаций.

### 10.3 Реализация ломаной змеи и лестницы

Цель настоящего раздела — построить минимальную реализацию произвольного линейного деревянного скелета, являющегося не более чем ломаной змеей, в некоторой трапеции специального вида. Напомним, что две

эквивалентных минимальных сети называются *параллельными*, если после произвольной ориентации параметризующего их графа соответствующие ребра этих сетей являются сонаправленными векторами.

Пусть  $L$  — линейный деревянный скелет (участок),  $\text{Sp } L$  — его ось,  $\text{tw Sp } L \leq 2$ , и  $l$  — некоторая его направляющая.

**Предложение 2.17** *Существует минимальная сеть  $\Gamma$ , параллельная двойственному графу  $\Gamma_L$  паркета  $L$ , такая что ее граничные вершины расположены на границе некоторой трапеции  $P$  с параллельными  $l$  основаниями, причем каждая вершина трапеции  $P$  является граничной вершиной сети  $\Gamma$ .*

**Доказательство.** Ориентируем ось  $\text{Sp } L$ , и пусть направляющая ориентирована так, что проекция каждого звена оси  $\text{Sp } L$  на  $l$  положительна. Напомним, что каждый линейный скелет (участок)  $L$  представляется в виде объединения последовательно идущих змей  $Z_i$  разных направлений. Разобьем множество змей  $Z_i$  на два класса. К первому из них отнесем змеи  $X_i$ , оси которых параллельны направляющей  $l$ , а ко второму — все остальные змеи  $Y_i$ . Заметим, что оба этих класса упорядочены в соответствии с порядком во множестве  $\{Z_i\}$ .

Для каждой змеи  $Y_i$  выделим примыкающие к ней ячейки паркета  $L$ . Ясно, что эти ячейки содержатся в змеях  $X_i$  и могут, вообще говоря, совпадать для разных  $Y_i$ . Пусть  $\{\Delta_i\}$  — множество выделенных ячеек, упорядоченных в соответствии с порядком, заданным на ячейках паркета  $L$  ориентацией направляющей  $l$ .

Пусть  $\Pi$  — некоторая полоса, параллельная  $l$ , ограниченная прямыми  $l_1$  и  $l_2$ . Разобьем некоторую часть этой полосы на последовательно идущие прямоугольники  $\Pi_i$ , диагонали которых перпендикулярны соответствующим направляющим паркета плоскости, отличным от  $l$ . Построим столько таких прямоугольников, сколько имеется змей  $Y_i$ . Ясно, что выбранная ориентация направляющей  $l$  задает, плюс ко всему, естественный порядок на множестве прямоугольников  $\Pi_i$ , поэтому возникает взаимно однозначное соответствие между  $\{Y_i\}$  и  $\{\Pi_i\}$ , сохраняющее порядок.

В каждом прямоугольнике  $\Pi_i$  проведем ту диагональ, которая перпендикулярна оси соответствующей ему змеи  $Y_i$ . При этом прямоугольник разбивается на два треугольника. Подправим теперь полученное множество треугольников.

Пусть  $T$  и  $T'$  — два последовательных треугольника, первый из которых содержится в  $\Pi_i$ , а второй — в  $\Pi_{i+1}$ . Пусть в  $L$  между змеями  $Y_i$  и  $Y_{i+1}$  расположена змея  $X_j$ . Если змея  $X_j$  состоит ровно из одной ячейки, склеим треугольники  $T$  и  $T'$  в один по их общей стороне. Кроме того, если начальная (конечная) змея из  $L$  не параллельна направляющей  $l$ , то выкинем начальный (конечный) треугольник. Рассмотрим перестроенное так множество треугольников, последовательные элементы которого будем обозначать через  $T_i$ . Легко видеть, что между множеством  $\{\Delta_i\}$  выбранных

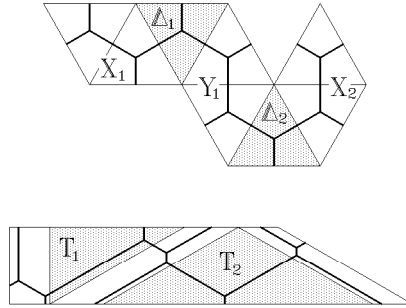


Рис. 2.22: Минимальная реализация линейного деревянного скелета

выше ячеек из  $L$  и множеством треугольников  $T_i$  существует единственное взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок. Для удобства, стороны треугольников  $T_i$ , не параллельные  $l$ , назовем *боковыми*. На множестве боковых сторон также имеется естественный порядок. Множество так упорядоченных боковых сторон обозначим через  $\{a_i\}$ .

Рассмотрим боковую сторону  $e$  треугольника  $T_i$ . Каждый параллелограмм, построенный снаружи треугольника  $T_i$ , так что две его стороны лежат на границе полосы  $\Pi$ , а третья совпадает с  $e$ , назовем *примыкающим*. Стороны примыкающего параллелограмма, параллельные  $e$ , также будем называть *боковыми*.

Искомая минимальная реализация строится так (см. рис. 2.22). Разобьем  $L$  на участки трех типов: змеи  $Y_i$ , построенные выше, ячейки  $\Delta_i$ , примыкающие к ним, и змеи  $X_i$ , из которых выброшены ячейки  $\Delta_i$ . Отметим, что элементы третьего типа могут быть пусты. Последовательные элементы только что построенного разбиения будем обозначать через  $H_i$ .

Будем последовательно реализовывать последовательные элементы  $H_i$  так. Элемент  $H_1$  является, очевидно, змеей. Рассмотрим примыкающий к первой боковой стороне  $a_1$  параллелограмм, и пусть  $e_1$  — другая боковая сторона этого параллелограмма. Фиксируем на стороне  $e_1$  произвольную внутреннюю точку  $E_1$ . Выберем параллелограмм столь “узким” (т.е. с достаточно близкими боковыми сторонами), чтобы граничные лучи характеристического конуса  $\mathcal{C}(E_1, R_1)$ , где  $R_1$  — дождь, параллельный  $e_1$  и отделяющий  $e_1$  от  $a_1$ , пересекали  $a_1$  по внутренним точкам. Тогда, в силу следствия 2.11, в выбранном примыкающем параллелограмме существует такая минимальная реализация змеи  $H_1$ , удовлетворяющая условиям предложения, что одна ее концевая вершина совпадает с  $E_1$ , а вторая — с некоторой точкой  $A_1$ , лежащей внутри  $a_1$ .

Элемент  $H_2$ , очевидно, является ячейкой  $\Delta_1$ . Построим в треугольнике  $T_1$  минимальную сеть соответствующего направления, эквивалентную двойственному графу ячейки  $\Delta_1$  так, чтобы одной из ее граничных вершин являлась  $A_1$ , а другие две лежали на внутренностях двух других сторон

треугольника  $T_1$ , отличных от  $a_1$ . Легко видеть, что этого всегда можно добиться, при произвольном расположении точки  $A_1$  внутри стороны  $a_1$ . Обозначим через  $A_2$  граничную вершину только что построенной минимальной сети, лежащую внутри стороны  $a_2$ .

Если  $H_3$  является ячейкой  $\Delta_2$ , то аналогично реализуем двойственный граф из  $\Delta_2$  в треугольнике  $T_2$ .

В противном случае, рассмотрим достаточно узкий примыкающий к  $a_2$  параллелограмм и, так же, как и выше, реализуем в нем змею  $H_3$ , начинающуюся в точке  $A_2$  и проходящую в некоторую внутреннюю точку  $E_2$  второй боковой стороны  $e_2$  этого параллелограмма. Сдвинем объединение треугольников  $T_i$ ,  $i \geq 2$ , оставив на месте треугольник  $T_1$ , так, чтобы образ  $b_2$  боковой стороны  $a_2$  треугольника  $T_2$  совместился с  $e_2$ . Образы сторон  $a_i$ ,  $i \geq 3$ , будем по-прежнему обозначать через  $a_i$ .

Продолжим описанный только что процесс до тех пор, пока не будут реализованы все элементы  $H_i$ . В результате получим выпуклую минимальную реализацию скелета (участка)  $L$  в трапеции  $P'$ , являющейся объединением смещенных треугольников  $T_i$  и примыкающих к ним параллелограммов. Продолжим теперь те граничные ребра построенной реализации, которые вышли на боковые стороны трапеции  $P'$ , до пересечения с прямыми  $l_i$ . Так перестроенную минимальную реализацию обозначим через  $\Gamma$ . Отметим, что все граничные вершины сети  $\Gamma$  лежат на прямых  $l_i$ , каждую из которых ориентируем в направлении прямой  $L$ . Обозначим через  $C_i$  — первую граничную вершину на прямой  $l_i$ , а через  $D_i$  — последнюю. Тогда искомая трапеция  $P$  — это  $C_1C_2D_2D_1$ . Доказательство предложения закончено.

#### 10.4 Реализация лестницы в усеченном треугольнике

В настоящем разделе будет построена минимальная реализация линейного скелета (участка), являющегося не более чем лестницей, в некотором усеченном треугольнике специального вида.

Пусть  $L$  — линейный деревянный скелет (участок),  $\text{Sp } L$  — его ось,  $\text{tw Sp } L \leq 1$ , и пусть  $l_1$  и  $l_2$  — две направляющие для  $L$ . Ориентируем ось  $\text{Sp } L$ . Выберем на  $l_1$  и  $l_2$  ориентации, такие что проекция каждого звена оси  $\text{Sp } L$  на прямую  $l_i$  была бы отрицательна. Рассмотрим на плоскости угол  $F$ , стороны которого представляют собой лучи  $m_1$  и  $m_2$ , сонаправленные с  $l_1$  и  $l_2$  соответственно. Пусть  $DEF$  — прямоугольный треугольник, гипотенуза  $FE$  и меньший катет  $DF$  которого лежат на сторонах угла  $F$ , а больший катет  $DE$  — перпендикулярен первому звену оси  $\text{Sp } L$ . Пусть  $X$  — произвольная внутренняя точка катета  $DE$ .

**Предложение 2.18** *Существует эквивалентная двойственному графу  $\Gamma_L$  паркета  $L$  минимальная сеть  $\Gamma$ , такая что ее граница принадлежит границе некоторого выпуклого четырехугольника, получающегося из треуголь-*



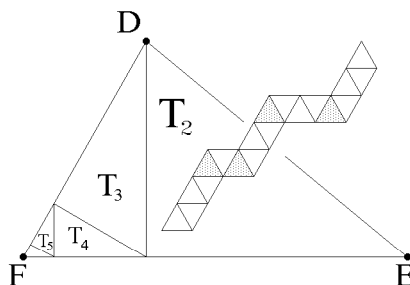


Рис. 2.23: Бесконечная последовательность прямоугольных треугольников

ника  $DEF$  отсечением остроугольного треугольника с вершиной  $F$ . При этом, минимальные сети  $\Gamma$  и  $\Gamma_L$  параллельны; первой концевой вершине двойственного графа  $\Gamma_L$  соответствует точка  $X$ ; вершины четырехугольника, отличные от  $D$  и  $E$ , являются граничными вершинами сети  $\Gamma$ .

**Доказательство.** Снова представим линейный скелет (участок)  $L$  в виде объединения последовательно идущих змей  $Z_i$  разных направлений, и в каждой змее  $Z_i$ , кроме первой, выделим ее начальную ячейку  $\Delta_i$ .

Из вершины прямого угла  $D$  треугольника  $DEF$  опустим перпендикуляр на сторону  $FE$ . Из основания этого перпендикуляра опустим перпендикуляр на сторону  $FD$ . Далее, из основания вновь полученного перпендикуляра снова опустим перпендикуляр на  $FE$ , и т.д., см. рис. 2.23.

В результате мы построим бесконечную последовательность прямоугольных треугольников, меньший катет каждого из которых лежит или на  $FE$ , или на  $FD$ . Эти треугольники естественным образом упорядочены. Поставим в соответствие последовательным выделенным ячейкам  $\Delta_i$  последовательные выделенные треугольники  $T_i$ ,  $i = 2, 3, \dots$ . Легко видеть, что катет треугольника  $T_i$ , лежащий на стороне угла  $F$ , параллелен граничному не концевому <sup>4</sup> ребру соответствующей ячейки  $\Delta_i$ .

Для удобства, стороны треугольников  $T_i$ , не лежащие на сторонах угла  $F$ , назовем *боковыми*, занумеруем последовательно и обозначим через  $a_i$ . Отметим, что у каждого треугольника  $T_i$  имеется две боковых стороны:  $a_i$  и  $a_{i+1}$ .

Рассмотрим произвольную боковую сторону  $e$  треугольника  $T_i$ . Каждую прямоугольную трапецию, построенную снаружи треугольника  $T_i$  так, что ее боковые стороны лежат на сторонах угла  $F$ , а одно из оснований совпадает с  $e$ , назовем *примыкающей*.

Теперь искомая минимальная реализация строится по аналогии с тем,

<sup>4</sup>Ячейка  $\Delta_i$  может оказаться концевой, если последняя змея участка  $L$  состоит из одной ячейки.

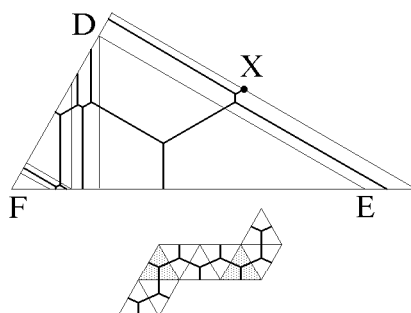


Рис. 2.24: Минимальная реализация не более чем лестницы в усеченном треугольнике

как это делалось в предыдущем разделе (см. рис. 2.24). Разобьем скелет (участок)  $L$  на участки двух типов: выделенные ячейки  $\Delta_i$  и связанные компоненты паркета  $L$ , из которого выброшены ячейки  $\Delta_i$ . Эти связанные компоненты, очевидно, являются змеями, и, в дальнейшем, говоря о них, мы будем называть их *змеями*, чтобы отличать от выделенных ячеек  $\Delta_i$ , которые будем называть *ячейками*. Последовательные элементы только что построенного разбиения обозначим через  $H_i$ .

Будем последовательно реализовывать последовательные элементы  $H_i$  так. Элемент  $H_1$ , являющийся, очевидно, змеей, реализуем в некоторой трапеции, примыкающей к первой боковой стороне  $a_2$ , выпустив минимальную реализацию змеи  $H_1$  из произвольной внутренней точки  $E_2$  основания  $e_2 \neq a_2$  этой трапеции. Отметим, что отростки змеи  $H_1$  параллельны  $a_2$ . При этом, выбрав трапецию достаточно узкой, можно всегда добиться того, чтобы эта минимальная реализация пришла во внутреннюю точку  $A_2$  стороны  $a_2$ . С помощью гомотетии с центром в вершине  $F$  угла  $F$ , примененной к построенной примыкающей трапеции и треугольникам  $T_i$ ,  $i \leq 2$ , совместим сторону  $e_2$  с отрезком  $ED$ . При этом точка  $E_2$  перейдет в некоторую точку  $X$  отрезка  $ED$ . Ясно, что, в силу произвольности точки  $E_2$ , так можно получить любую внутреннюю точку из  $ED$ . Сохраним за продеформированными объектами те же обозначения.

Элемент  $H_2$ , если он есть, очевидно, является ячейкой  $\Delta_2$ . Построим в треугольнике  $T_2$  минимальную сеть соответствующего направления, эквивалентную двойственному графу ячейки  $\Delta_2$  так, чтобы одной из граничных вершин этой минимальной сети являлась точка  $A_2$ , а другие две ее граничные вершины лежали на внутренностях двух других сторон треугольника  $T_2$ , отличных от  $a_2$ . Легко видеть, что этого всегда можно добиться, при произвольном расположении точки  $A_2$  внутри стороны  $a_2$ . При этом, если ячейка  $\Delta_2$  — не крайняя ячейка в  $L$ , то граничная вершина построенной сети, соответствующая граничной вершине  $\Gamma_L$ , попадет на сторону угла  $F$ . Обозначим через  $A_3$  граничную вершину только что построенной ми-

нимальной сети, лежащую внутри стороны  $a_3$ .

Так как каждое внутреннее звено оси лестницы состоит не менее чем из двух осей ячеек, элемент  $H_3$ , если он есть, снова является змеей. Рассмотрим достаточно узкую примыкающую к  $a_3$  трапецию и, так же, как и выше, реализуем в ней змеей  $H_3$ , начинающуюся в точке  $A_3$  и приходящую в некоторую внутреннюю точку  $E_3$  основания  $e_3 \neq a_3$  этой трапеции. Применим к объединению треугольников  $T_i$ ,  $i \geq 3$ , такую гомотегию с центром в вершине  $F$  угла  $F$ , оставив при этом на месте треугольник  $T_2$ , чтобы образ  $b_3$  боковой стороны  $a_3$  треугольника  $T_3$  совместился с  $e_3$ .

Продолжим описанный только что процесс до тех пор, пока не будут реализованы все элементы  $H_i$ . Продолжим реализацию последнего конечного ребра до пересечения со сторонами угла  $F$ . Так перестроенную минимальную реализацию обозначим через  $\Gamma$ . Отметим, что все граничные вершины сети  $\Gamma$  лежат на лучах  $m_i$ . Обозначим через  $C_i$  первую граничную вершину на луче  $m_i$ . Тогда искомым четырехугольником — это  $C_1C_2DE$ . Доказательство предложения закончено.

### 10.5 $CM$ -реализация скелетов из $\mathcal{WP}_5$

Цель настоящего раздела — построить выпуклую реализацию произвольного скелета из  $\mathcal{WP}_5$  в некотором выпуклом шестиугольнике, углы которого равны  $120^\circ$ , а стороны параллельны направляющим паркета плоскости.

**Предложение 2.19** *Двойственный граф произвольного скелета, принадлежащего  $\mathcal{WP}_5$ , эквивалентен некоторому плоскому минимальному бинарному дереву, граничные вершины которого лежат на границе некоторого выпуклого шестиугольника с углами по  $120^\circ$  и сторонами, параллельными направляющим паркета плоскости.*

**Доказательство.** Из предложения 2.15 вытекает, что достаточно построить выпуклую минимальную реализацию лишь для скелетов с шестью концевыми линейными участками. Итак, пусть  $S$  — скелет из  $\mathcal{WP}_5$  с шестью концевыми линейными участками, получающийся редукцией из классифицирующего скелета  $\hat{S}$  I-го или II-го типа. Пусть  $l$  — направляющая единственного линейного участка  $\hat{L}$  из  $\hat{S}$ , являющегося ломаной змеей. Пусть  $L$  — соответствующий  $\hat{L}$  линейный участок скелета  $S$ , и пусть  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  — ячейки ветвления, примыкающие к  $L$ . Пусть  $\Gamma$  — построенная в предложении 2.17 минимальная реализация линейного скелета  $L' = L \cup \Delta_1 \cup \Delta_2$  в некоторой трапеции  $C_1C_2D_2D_1 = P$ , основания которой параллельны  $l$  и лежат на прямых  $l_1$  и  $l_2$ . Пусть, как и выше,  $C_i \in l_i$ .

Рассмотрим, для определенности, реализацию двойственного графа  $\Gamma_{\Delta_1}$  ячейки  $\Delta_1$ . Так как  $\Delta_1$  — ячейка ветвления скелета  $S$ , полученного редукцией из классифицирующего скелета I-го или II-го типа, к ней примыкает ровно один концевой линейный участок скелета  $S$ . Обозначим через  $\epsilon$  ребро

графа  $\Gamma_{\Delta_1}$ , принадлежащее двойственному графу этого концевому линейного участка, а через  $f$  — второе, отличное от  $e$ , ребро из  $\Gamma_{\Delta_1}$ , являющееся граничным ребром двойственного графа паркета  $L'$ . Пусть  $e'$  обозначает реализацию ребра  $e$ , а  $f'$  — реализацию ребра  $f$ . Из геометрии классифицирующих скелетов I-го и II-го типов легко выводится, что каждая из точек  $C_i$  инцидентна одному из ребер  $e'$  или  $f'$ . Будем, для определенности, предполагать, что граничные вершины реализаций  $e'$  и  $f'$  совпадают с  $C_1$  и  $C_2$  соответственно.

Рассмотрим часть паркета  $S$ , которая примыкает к ячейке  $\Delta_1$  и не пересекается с паркетом  $L$ . Она, очевидно, представляет собой дизъюнктное объединение примыкающего к  $\Delta_1$  концевому линейного участка  $Q_1$  и не более чем лестницы  $L_1$ , разветвляющейся в ячейке ветвления  $\Delta_3$  на два концевых линейных участка  $Q_2$  и  $Q_3$ . Обозначим через  $L'_1$  лестницу  $L_1$  с присоединенной к ней ячейкой ветвления  $\Delta_3$ . Ясно, что  $L'_1$  снова является лестницей.

Ориентируем направляющую  $l$  паркета  $L'$  в сторону его концевой ячейки  $\Delta_1$ , что задаст нам ориентацию прямых  $l_1$  и  $l_2$ . Рассмотрим отрезок  $C_1C_2$ , и ориентируем его от  $C_1$  к  $C_2$ . Обозначим через  $\alpha$  абсолютную величину угла между направлениями вектора  $C_1C_2$  и прямой  $l_1$ . Поскольку  $C_1$  и  $C_2$  инцидентны ребрам сети  $\Gamma$ , выходящим из одной точки Штейнера,  $\alpha$  лежит в следующих пределах:  $\pi/6 < \alpha < 5\pi/6$ .

Возможны следующие два случая: угол  $\alpha$  меньше  $\pi/3$  или угол  $\alpha$  больше или равен  $\pi/3$ .

Рассмотрим первый случай. Тогда ребро  $e'$  перпендикулярно  $l_1$ , а  $f'$  составляет с  $l_2$  угол в  $\pi/6$ , см. рис. 2.25. Отсечем от трапеции  $P$  вблизи вершины  $C_2$  достаточно малый треугольник  $C_2AB$ ,  $A \in C_1C_2$ ,  $B \in l_2$ , где отрезок  $AB$  перпендикулярен первому звену оси линейного участка  $L_1$ . Выберем треугольник  $C_2AB$  столь малым, чтобы он не содержал граничных вершин графа  $\Gamma$ , отличных от  $C_2$ . На рис. 2.26 приведены все возможные случаи расположения треугольника  $C_2AB$ . Заметим, что угол  $C_2$  треугольника  $C_2AB$  равен  $\alpha$ , поэтому, по предположению, этот угол меньше чем  $\pi/3$ .

Отсечем от треугольника  $C_2AB$  треугольник  $C_2AF$ , выпустив из точки  $A$  луч  $AF$  под углом  $\pi/3$  к прямой  $l_2$ . Легко видеть, что треугольник  $FAB$  прямоугольный, и ребро  $f'$  пересекает его катет  $AB$  по некоторой внутренней точке  $X$ . Теперь мы находимся в условиях предложения 2.18, что дает нам возможность реализовать лестницу  $L'_1$  в некотором четырехугольнике, полученном отсечением от треугольника  $FAB$  некоторого треугольника  $FUV$ , рис. 2.27. Легко видеть, что в этом случае ребра построенной минимальной сети, инцидентные вершинам  $U$  и  $V$ , выходят из одной точки Штейнера и приходят на стороны угла  $F$  под прямым углом. Поэтому треугольник  $FUV$  остроугольный с углом  $F$ , равным  $\pi/3$ , и, следовательно, его углы  $U$  и  $V$  больше  $\pi/6$  и меньше  $\pi/2$ .

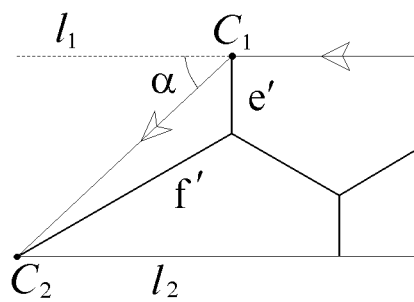


Рис. 2.25:

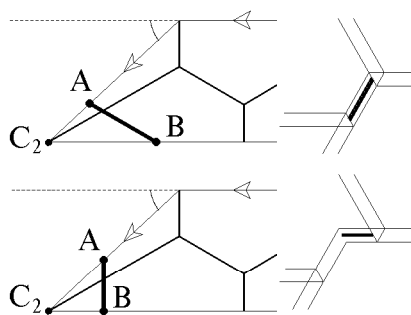


Рис. 2.26: Все возможные случаи расположения треугольника  $C_2AB$

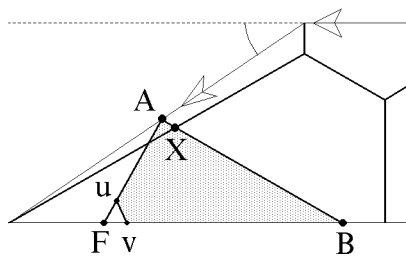


Рис. 2.27:

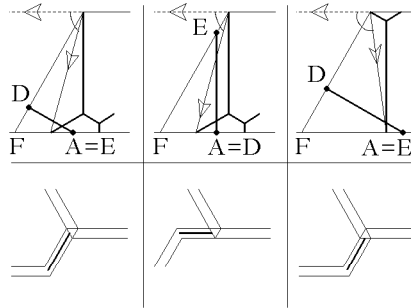


Рис. 2.28: Все возможные случаи расположения треугольника  $DEF$

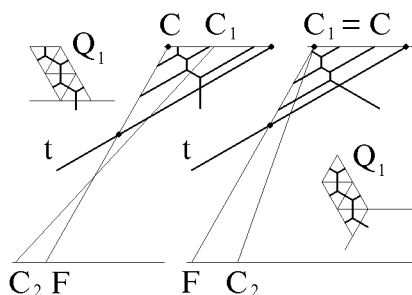
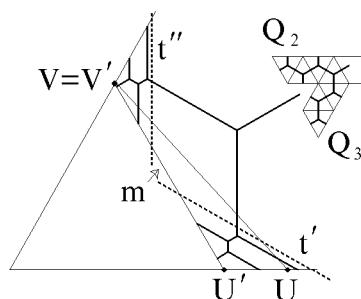
Рассмотрим второй случай, т.е.  $\alpha \geq \pi/3$ . Выпустим из точки  $C_1$  луч под углом  $\pi/3$  к  $l_1$  до пересечения в точке  $F$  с прямой  $l_2$ . Ясно, что  $(C_1F)$  целиком лежит вне трапеции  $C_1C_2D_2D_1$ , поэтому отрезок  $C_1F$  пересекается с сетью  $\Gamma$  лишь по  $C_1$ . Из точки  $A$ , лежащей внутри отрезка  $C_2D_2$  и достаточно близкой к  $C_2$ , проведем прямую, перпендикулярную первому звену оси  $Sp L'_1$ . Эта прямая отсекает треугольник  $DEF$  с прямым углом  $D$ . При этом точку  $A$  можно выбрать настолько близкой к  $C_2$ , чтобы треугольник  $DEF$  не содержал граничных вершин графа  $\Gamma$ , отличных от  $C_2$ . На рис. 2.28 приведены все возможные случаи расположения треугольника  $DEF$ .

Отметим, что ребро  $f'$  сети  $\Gamma$  пересекает сторону  $DE$  треугольника  $DEF$  по некоторой внутренней точке. Мы находимся в условиях предложения 2.18, что дает нам возможность реализовать лестницу  $L'_1$  в некотором четырехугольнике, полученном отсечением от треугольника  $DEF$  некоторого остроугольного треугольника  $FUV$ . Легко видеть, что и в этом случае углы  $U$  и  $V$  треугольника  $FUV$  больше  $\pi/6$  и меньше  $\pi/2$ .

Чтобы реализовать концевой линейный участок  $Q_1$ , отсечем от трапеции  $C_1C_2D_2D_1$  малый треугольник  $T'$  с вершиной в  $C_1$ , проведя прямую  $t$  перпендикулярно оси концевой змеи  $Q_1$ . Вернемся к рассмотрению введенных выше двух случаев.

В первом случае, т.е. когда  $\alpha < \pi/3$ , продолжим отрезок  $FA$  за точку  $A$  до пересечения с прямой  $l_1$  в некоторой точке  $C$ . Далее, заметим, что прямую  $t$  можно провести столь близко от  $C_1$ , чтобы она пересекла прямую  $FC$  по некоторой внутренней точке отрезка  $AC$ . Проведем одну из таких прямых. В результате от трапеции  $CFD_2D_1$  будет отсечен некоторый треугольник с вершиной в  $C$ , вторая вершина которого лежит внутри отрезка  $AC$ , а третья располагается на отрезке  $C_1D_1$  вблизи вершины  $C_1$ . Полученный треугольник обозначим через  $T$ .

Во втором случае, т.е. когда  $\alpha \geq \pi/3$ , через  $T$  обозначим сам треугольник  $T'$ . Отметим, что в обоих случаях в треугольнике  $T$  угол, противолежащий прямой  $t$ , равен  $120^\circ$ .

Рис. 2.29: Реализация конечного линейного участка  $Q_1$ Рис. 2.30: Реализация конечных линейных участков  $Q_2$  и  $Q_3$ 

Воспользовавшись следствием 2.12, реализуем конечной линейный участок  $Q_1$  в треугольнике  $T$  (см. рис. 2.29).

Реализуем теперь конечные линейные участки  $Q_2$  и  $Q_3$ . Для этого, как и выше, отсечем от четырехугольника, в котором была реализована лестница  $L'_1$ , маленькие треугольники  $T'$  и  $T''$  с вершинами в  $U$  и  $V$  соответственно, проведя прямые  $t'$  и  $t''$  перпендикулярно осям соответствующих конечных линейных участков.

Далее, через подходящую вершину  $U$  или  $V$  проведем такую прямую  $m$ , чтобы от треугольника  $FUV$  был отсечен правильный треугольник. Ясно, что так отсеченный треугольник пересекается с построенной минимальной сетью не более чем по вершинам  $U$  и  $V$  (в случае общего положения лишь по одной из них). Легко видеть, что прямые  $t'$  и  $t''$  можно выбрать проходящими столь близко от  $U$  и  $V$  соответственно, чтобы треугольники, высеченные этими прямыми из усеченного прямой  $m$  угла  $F$ , не пересекались. Выберем некоторые из таких прямых, и, воспользовавшись следствием 2.12, в полученных треугольниках реализуем конечные линейные участки  $Q_2$  и  $Q_3$  (см. рис. 2.30). Отметим, что углы этих треугольников, противоположные прямым  $t'$  и  $t''$  соответственно, равны  $120^\circ$ .

Аналогично, построим реализацию оставшейся части скелета, примыкающей к ячейке ветвления  $\Delta_2$ . Итак, реализация скелетов, полученных редукцией из классифицирующих скелетов I-го или II-го типа, в шестиугольнике с углами по  $120^\circ$  построена.

Пусть теперь  $S$  — скелет из  $\mathcal{WP}_5$  с шестью концевыми линейными участками, полученный редукцией из классифицирующего скелета  $\hat{S}$  III-го типа, и пусть  $L_i$  — его линейные участки, соответствующие лестницам паркета  $\hat{S}$ , стыкующиеся в ячейке ветвления  $\Delta$ . Ориентируем участки  $L_i$  в сторону от  $\Delta$ , и пусть  $\Delta_i$  — отличная от  $\Delta$  ячейка ветвления паркета  $S$ , примыкающая к участку  $L_i$ . Обозначим через  $L'_i$  линейные паркеты, полученные из  $L_i$  добавлением ячеек  $\Delta_i$ .

Рассмотрим правильный треугольник  $A_1A_2A_3$ , у которого стороны угла  $A_i$  параллельны направляющим линейного участка  $\hat{L}_i$  паркета  $\hat{S}$ , соответствующего участку  $L_i$ . Отметим, что, с точностью до растяжений и параллельного переноса, существует два таких треугольника. Если ориентировать стороны угла  $A_i$  к его вершине, то у одного из этих треугольников направления сторон совпадут с направлениями соответствующих звеньев оси участка  $\hat{L}_i$  (участок  $L_i$  “входит в угол  $A_i$ ”), а у другого — будут противоположны (участок  $L_i$  “выходит из угла  $A_i$ ”). Выберем первый из этих двух треугольников.

Реализуем в треугольнике  $A_1A_2A_3$  двойственный граф  $\Gamma_\Delta$  ячейки ветвления  $\Delta$  так, чтобы полученная минимальная сеть  $\Gamma_\Delta^{cm}$  была параллельна  $\Gamma_\Delta$ , выходила на стороны треугольника  $A_1A_2A_3$ , и ее точка Штейнера  $C$  совпадала бы с центром треугольника  $A_1A_2A_3$ . Отметим, что такая сеть  $\Gamma_\Delta^{cm}$  получается после соединения центра  $C$  треугольника  $A_1A_2A_3$  или с его вершинами, или с серединами его сторон.

Рассмотрим первый случай. От каждой вершины  $A_i$  отсечем достаточно малый прямоугольный треугольник, проведя прямую, перпендикулярную первому звену оси участка  $L_i$ .<sup>5</sup> Ясно, что ребро  $CA_i$  пересекает больший катет отсеченного треугольника по некоторой его внутренней точке  $X_i$ , см. рис. 2.31. Так же, как и выше, реализуем участок  $L_i$  вместе с концевыми линейными участками, на которые он разветвляется, в подходящем усечении соответствующего отсеченного треугольника. Тем самым, искомая реализация построена в первом случае.

Во втором случае ситуация более жесткая в том смысле, что углы между направлениями первых звеньев осей линейных участков  $L_i$  равны  $2\pi/3$ . Поэтому, можно, по аналогии с первым случаем, отсечь от треугольника  $A_1A_2A_3$  непересекающиеся прямоугольные треугольники, большие катеты которых перпендикулярны первым звеньям осей соответствующих участков  $L_i$ , а гипотенузы содержат соответствующие граничные вершины сети  $\Gamma_\Delta^{cm}$ , см. рис. 2.32. В усечениях этих треугольников и реализуются участки

<sup>5</sup>Если линейный участок  $L_i$  пуст, то отсечем треугольник прямой любого из двух возможных направлений.



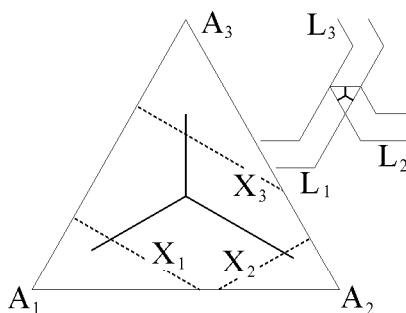


Рис. 2.31: Реализация скелетов III-его типа, первый случай

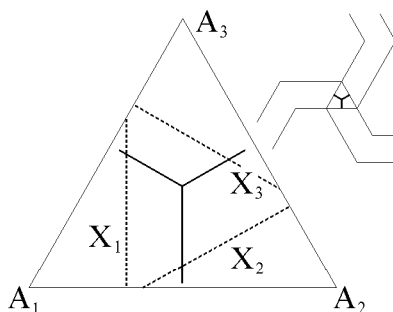


Рис. 2.32: Реализация скелетов III-его типа, второй случай

$L_i$  вместе с концевыми линейными участками, на которые они разветвляются. Предложение полностью доказано.

## 10.6 Завершение доказательства теоремы реализации

Для завершения доказательства теоремы 2.4 нам осталось научиться строить выпуклую минимальную реализацию паркета из  $\mathcal{WP}_3^*$ , обладающего наростами, по выпуклой минимальной реализации некоторого его скелета. Мы начнем со следующего небольшого замечания.

В разделе 8 было дано определение концевых линейных участков деревянного скелета  $S$ . Оказывается, число концевых линейных участков скелета произвольного деревянного паркета не зависит от разложения этого паркета на скелет и наросты. Действительно, по определению этого разложения, число наростов, выбрасываемых из паркета чтобы получить скелет, не зависит от выбора конкретных наростов. С другой стороны, число концевых линейных участков скелета равно числу его крайних ячеек, а при выбрасывании наростов дополнительных крайних ячеек не появляется. Поэтому, можно говорить о числе концевых линейных участков деревянного паркета.

Пусть  $D$  — паркет с шестью концевыми линейными участками, лежащий в  $\mathcal{WP}_5$ , и  $S$  — некоторый его скелет. Рассмотрим выпуклую минимальную реализацию  $\Gamma$  скелета  $S$  в шестиугольнике  $P$  с углами по  $120^\circ$ , построенную в предыдущем разделе. Мы хотим перестроить сеть  $\Gamma$  в некоторую минимальную сеть  $\tilde{\Gamma}$ , эквивалентную двойственному графу паркета  $D$  и такую, что все ее граничные вершины также лежат на границе шестиугольника  $P$ .

Легко заметить, что минимальная сеть  $\Gamma$  обладает следующим замечательным свойством: каждое граничное ребро  $e$  сети  $\Gamma$ , соответствующее граничному ребру скелета  $S$ , к которому крепится нарост паркета  $D$ , перпендикулярно стороне шестиугольника  $P$ , на которую  $e$  выходит.

Пусть  $A$  — граничная вершина, инцидентная ребру  $e$ . Укоротим ребро  $e$  до ребра  $e'$ , отрезав от  $e$  достаточно маленький отрезок  $AH$ , содержащий граничную вершину  $A$ . Выпустим из точки  $H$  пару лучей, направления которых составляют с направлением вектора  $HA$  углы в  $\pm\pi/3$ , до пересечения с границей шестиугольника  $P$ . Пару полученных таким образом обрезков назовем, как и выше, *усами*. Точку  $H$  можно выбрать настолько близко к  $A$ , чтобы построенные усы выходили на одну и ту же сторону шестиугольника  $P$ . Более того, точки  $H$  могут быть выбраны столь близко к соответствующим граничным вершинам  $A$ , чтобы перестроенная минимальная сеть  $\tilde{\Gamma}$  оказалась вложенной. Тем самым, доказано следующее предложение.

**Предложение 2.20** *Для каждого паркета  $D \in \mathcal{WP}_5$  с шестью концевыми линейными участками существует минимальная сеть  $\tilde{\Gamma}$ , эквивалентная двойственному графу паркета  $D$ , и такая, что все ее граничные вершины лежат на границе некоторого шестиугольника с углами по  $120^\circ$ .*

Чтобы реализовать произвольный паркет из  $\mathcal{WP}_5$ , докажем следующее обобщение предложения 2.9.

**Предложение 2.21** *Для любого паркета из  $\mathcal{WP}_5$ , число концевых линейных участков которого меньше 6, существует содержащий его паркет из  $\mathcal{WP}_5$ , имеющий на один концевой линейный участок больше. В частности, всякий паркет из  $\mathcal{WP}_5$  может быть расширен до паркета из  $\mathcal{WP}_5$  с шестью концевыми линейными участками.*

**Доказательство.** Пусть  $D$  — произвольный паркет из  $\mathcal{WP}_5$ , разложенный на скелет  $S$  и наросты. Прежде всего, отметим, что имеет место аналог утверждения 2.13 об удлинении концевых линейных участков произвольного скелета из  $\mathcal{WP}_5$ . Определим удлинение концевого линейного участка паркета  $D$  как удлинение соответствующего концевого линейного участка скелета  $S$ . Поскольку удлинение концевого линейного участка паркета  $D$  не меняет типов боковин его скелета  $S$ , то, в соответствии с теоремой 2.3 о расположении наростов, удлинение концевых линейных участков паркета  $D$  не выводит за пределы класса  $\mathcal{WP}_5$ . Поэтому можно предполагать, что

как первое и второе, так предпоследнее и последнее ребра боковин скелета  $S$  сонаправлены и свободны от наростов паркета  $D$ .

Предположим теперь, что паркет  $D$  имеет менее шести концевых линейных участков. Пусть контуры паркета  $D$  и его скелета  $S$  ориентированы по часовой стрелке, и  $B_i$  — боковины скелета  $S$ , занумерованные последовательно числами по модулю их количества. Тогда у его скелета  $S$  существует боковина  $B_i$ , число вращения между начальным  $a_i$  и конечным  $b_i$  звеньями которой меньше 2.

Пусть  $\hat{B}_i$  — часть контура паркета  $D$ , начинающаяся ребром  $a_i$  и заканчивающаяся ребром  $b_i$ . Возможны два случая:  $\max \text{tw}(a_i, x) = \text{tw}(a_i, b_i)$ , или нет, где максимум берется по всевозможным ребрам  $x$  ломаной  $\hat{B}_i$ . В первом случае выберем следующее за  $a_i$  ребро из  $\hat{B}_i$  и обозначим его через  $w$ .

**Лемма 2.17** *Для ребра  $w$  ломаной  $\hat{B}_i$  выполнены следующие соотношения:*

$$-6 \leq \text{tw}(w, u) \leq 1,$$

где  $u$  — произвольное ребро контура паркета  $D$ .

**Доказательство.** По условию, для любого ребра  $u$  из  $\hat{B}_i$  число вращения  $\text{tw}(w, u)$  меньше 2, так как  $\text{tw}(a_i, b_i) \leq 1$ , а  $a_i$  и  $w$  — сонаправлены. Так как число вращения между любой парой последовательных ребер контура паркета  $D$  не превосходит 2, а при переходе через каждое концевое ребро число вращения меняется на  $-3$ , то, по аналогии с доказательством предложения 2.9, убеждаемся, что  $\text{tw}(w, u) \leq 1$  для любого ребра  $u$  из контура паркета  $D$ .

Получим теперь оценку снизу на  $\text{tw}(w, u)$ . Если  $u$  лежит на  $\hat{B}_i$ , то  $\text{tw}(w, u) \geq -4$ , так как  $\text{tw} B_i \leq 2$ , и, следовательно,  $\text{tw} \hat{B}_i \leq 4$  (докажите). Пусть теперь  $u$  не лежит в  $\hat{B}_i$ . Так как  $\text{tw}(w, u) + \text{tw}(u, w) = -6$ , достаточно показать, что  $\text{tw}(u, w) \leq 0$ . Если  $u$  — смежное с  $a_i$  концевое ребро контура паркета  $D$ , то это очевидно. В противном случае, вновь воспользуемся тем, что число вращения между любой парой последовательных ребер контура паркета  $D$  не превосходит 2, а при переходе через каждое концевое ребро число вращения меняется на  $-3$ , и, по аналогии с доказательством предложения 2.9, убедимся, что  $\text{tw}(u, w) \leq 0$ . Лемма доказана.

Из леммы 2.17 вытекает, что в первом случае с ребра  $w$  можно выпустить концевой линейный участок. Поэтому, в таких предположениях предложение доказано.

Пусть теперь имеет место второй случай:  $\max \text{tw}(a_i, x) \neq \text{tw}(a_i, b_i)$ . Рассмотрим все ребра  $x$  ломаной  $\hat{B}_i$ , такие что  $\text{tw}(a_i, x) \geq \text{tw}(a_i, b_i)$  для любого ребра  $y$  из  $\hat{B}_i$ . Выберем из найденных ребер  $x$  последнее и обозначим его через  $z$ . В этом случае, через  $w$  обозначим следующее за  $z$  ребро из  $\hat{B}_i$ .

**Лемма 2.18** Для ребра  $w$  ломаной  $\widehat{B}_i$  выполнено одно из двух соотношений:

$$\text{или } -6 \leq \text{tw}(w, u) \leq 1, \quad \text{или } -7 \leq \text{tw}(w, u) \leq 0,$$

где  $u$  — произвольное ребро контура паркета  $D$ .

**Доказательство.** Мы покажем, что одно из требуемых неравенств имеет место для произвольного  $u$  из  $\widehat{B}_i$ . Для всех остальных ребер контура паркета  $D$  доказательство получается точно так же, как в лемме 2.17.

Отметим, прежде всего, что, так как  $z$  — последнее из ребер  $x$ , на которых достигается максимум  $\text{tw}(a_i, y)$ , то  $\text{tw}(z, w) < 0$ . Поскольку  $z$  и  $w$  соседние ребра, возможны ровно два случая:  $\text{tw}(z, w) = -1$  или  $\text{tw}(z, w) = -2$ .

Пусть сначала  $\text{tw}(z, w) = -1$ . Покажем, что  $-7 \leq \text{tw}(w, u) \leq 0$ . Пусть  $u$  — произвольное ребро из  $\widehat{B}_i$ , лежащее между  $a_i$  и  $w$ . Тогда  $\text{tw}(u, w) \leq 1$ , так как в противном случае  $\text{tw}(u, z) \geq 3$ , что невозможно. С другой стороны,  $\text{tw}(u, w) \geq -4$ . Поэтому, так как  $\text{tw}(u, w) + \text{tw}(w, u) = -6$ , имеем:  $-7 \leq \text{tw}(w, u) \leq -2$ .

Пусть теперь  $u$  лежит между  $w$  и  $b_i$ . Тогда  $\text{tw}(w, u) \leq 0$ , так как в противном случае  $\text{tw}(z, u) \geq 0$ , поэтому  $z$  не последнее ребро из ребер  $x$ . С другой стороны,  $\text{tw}(w, u) \geq -4$ . Таким образом, для случая  $\text{tw}(z, w) = -1$  лемма доказана.

Предположим теперь, что  $\text{tw}(z, w) = -2$ . Покажем, что  $-6 \leq \text{tw}(w, u) \leq 1$ . Если  $u$  лежит между  $a_i$  и  $w$ , то  $\text{tw}(u, w) \leq 0$ , так как в противном случае  $\text{tw}(u, z) \geq 3$ , что невозможно. С другой стороны,  $\text{tw}(u, w) \geq -4$ , поэтому  $-6 \leq \text{tw}(w, u) \leq -2$ .

Пусть теперь  $u$  лежит между  $w$  и  $b_i$ . Тогда  $\text{tw}(w, u) \leq 1$ , так как в противном случае  $\text{tw}(z, u) \geq 0$ , поэтому  $z$  не последнее ребро из ребер  $x$ . С другой стороны,  $\text{tw}(w, u) \geq -4$ . Доказательство леммы закончено.

Из леммы 2.18 вытекает, что и во втором случае с ребра  $w$  можно выпустить концевой линейный участок. Доказательство предложения закончено.

Теперь теорема 2.4 вытекает из предложений 2.20, 2.21 и 2.15. Доказательство теоремы 2.4 закончено.

## Глава 3

# Минимальные бинарные деревья с правильной границей

В настоящей главе мы применим технику, разработанную в главе 2, и получим полную классификацию минимальных бинарных деревьев, затягивающих вершины правильных многоугольников, в случае, когда соответствующие этим деревьям паркеты являются скелетами. В следующих главах мы приведем некоторые результаты, описывающие произвольные паркеты из  $\mathcal{WP}_5$ , имеющие правильную минимальную реализацию. В частности, мы покажем, что если паркет  $D$  из  $\mathcal{WP}_5$  имеет минимальную реализацию на некотором правильном  $n$ -угольнике, то при  $n \geq 12$  паркет  $D$  не имеет концевых наростов, поэтому скелет  $S$  паркета  $D$  определен однозначно; более того, все концевые линейные участки такого скелета  $S$  являются змеями.

Приведем основной результат данной главы.

**Теорема 3.1** Пусть  $\Gamma_m$  — минимальное бинарное дерево, затягивающее вершины правильного  $n$ -угольника. Предположим, что соответствующий  $\Gamma_m$  паркет  $S$  является скелетом. Тогда,

- если скелет  $S$  — линейный, то  $S$  — змея, рис. 3.1, слева, причем, для любого  $n$  существует правильная минимальная реализация змеи с  $n$  граничными ребрами;
- если  $S$  имеет три концевых линейных участка, и, значит, одну ячейку ветвления, т.е.  $S$  является 3-скелетом, то все линейные участки из  $S$  — змеи, состоящие из одинакового числа ячеек, причем  $S$  инвариантен относительно поворота на  $120^\circ$  вокруг центра единственной

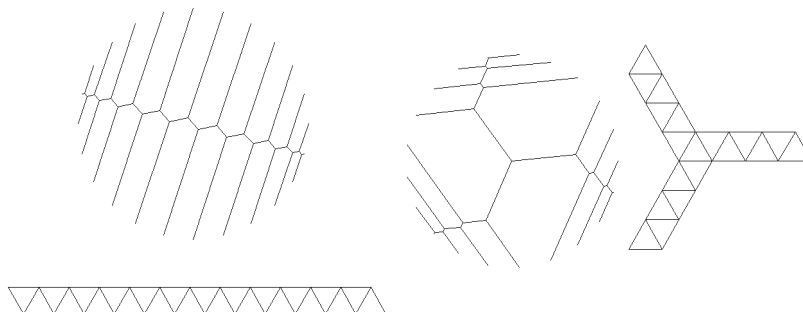


Рис. 3.1: Представители бесконечных серий скелетов без узлов ветвления и 3-скелетов, имеющих правильную минимальную реализацию

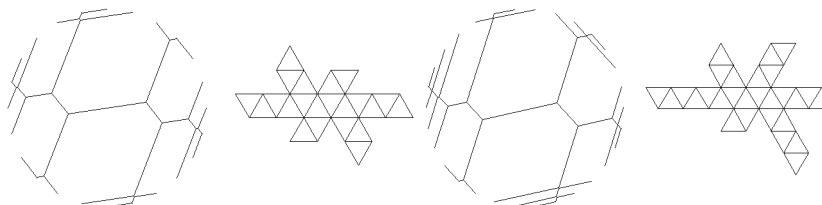


Рис. 3.2: 6-скелеты, имеющие правильную минимальную реализацию: случаи  $n = 24$  и  $n = 30$

*своей ячейки ветвления, рис. 3.1, справа. Более того, такая реализация существует тогда и только тогда, когда  $n = 6k + 3$ , где  $k$  — произвольное целое положительное число;*

- скелет  $S$  не может быть 4-скелетом;
- скелет  $S$  не может быть 5-скелетом;
- если  $S$  является 6-скелетом, то он представляет собой один из четырех скелетов, приведенных на рис. 3.2 и 3.3. При этом соответствующие значения  $n$  равны 24, 30, 36 и 42.

*Более того, все правильные минимальные реализации каждого такого скелета отличаются друг от друга на изометрию.*

Итак, среди скелетов из  $\mathcal{WP}_3$ , имеющих правильную минимальную реализацию, существует две бесконечные по  $n$  серии, и одна конечная.

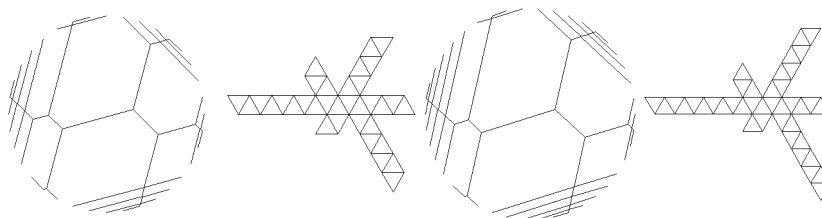


Рис. 3.3: 6-скелеты, имеющие правильную минимальную реализацию: случаи  $n = 36$  и  $n = 42$

## 1 Дожди

Напомним, что *дождем* на плоскости мы назвали произвольную совокупность попарно различных параллельных прямых. Пусть  $M$  — произвольное конечное множество точек плоскости. Будем говорить, что дождь  $R$  *проходит через множество  $M$* , если каждая точка из  $M$  лежит на некоторой прямой дождя  $R$ , и, обратно, каждая прямая дождя  $R$  проходит через некоторую точку из  $M$ .

**Определение.** Дождь  $R$ , проходящий через конечное множество  $M$  точек плоскости, называется *регулярным*, если на каждой прямой дождя лежит ровно одна точка из  $M$ . В противном случае, дождь  $R$  называется *особым*.

Пусть дождь  $R$  проходит через множество  $M$ , и  $M' \subset M$  — некоторое подмножество в  $M$ . Дождь  $R|_{M'}$ , состоящий из тех и только тех прямых дождя  $R$ , которые содержат точки из  $M'$ , назовем *ограничением дождя  $R$  на  $M'$* . Отметим, что каждое ограничение регулярного дождя также регулярно. Обратно, если на  $M'$  задан некоторый дождь  $R'$ , то дождь  $R$ , полученный из  $R'$  присоединением прямых, проходящих через точки из  $M \setminus M'$ , будем называть *расширением дождя  $R'$  с  $M'$  на  $M$* .

Пусть теперь  $R$  — ориентированный дождь. Напомним, что направлением ориентированного дождя называется единичный вектор, сонаправленный с формирующими этот дождь ориентированными прямыми. Мы будем отождествлять вектора направлений с соответствующими точками единичной окружности, которую назовем *окружностью направлений*.

Легко понять, что для каждого направления существует единственный дождь этого направления, проходящий через данное множество  $M$ . Таким образом, множество всех дождей, проходящих через  $M$ , находится во взаимно однозначном соответствии с точками окружности направлений. В дальнейшем, мы часто будем отождествлять ориентированный дождь, проходящий через фиксированное множество  $M$ , с соответствующей направлением этого дождя точкой окружности направлений.

Ясно, что для каждого фиксированного конечного множества  $M$  точек плоскости существует лишь конечное число проходящих через  $M$  особых дождей. Подмножество окружности направлений, состоящее из направлений всех особых дождей, проходящих через  $M$ , обозначим через  $\text{Sing}(M)$ , а дополнительное до  $\text{Sing}(M)$  подмножество окружности направлений, которое, очевидно, соответствует направлениям регулярных дождей, проходящих через  $M$ , обозначим через  $\text{Reg}(M)$ .

Так как каждый ориентированный дождь  $R$ , проходящий через  $M$ , и дождь  $-R$  противоположного направления, также проходящий через  $M$ , одновременно или регулярны, или особы, множества  $\text{Sing}(M)$  и  $\text{Reg}(M)$  центрально симметричны относительно центра окружности направлений.

**Определение.** Связные компоненты множества  $\text{Reg}(M)$  назовем *допустимыми углами*, соответствующими множеству  $M$ . Центально симметричные допустимые углы назовем *противоположными*.

**Замечание.** В дальнейшем, под допустимым углом мы часто будем понимать множество регулярных дождей, соответствующих направлениям из этого угла.

Пусть  $R$  — регулярный дождь, проходящий через  $M$ . Точки из  $M$ , лежащие на границе полосы дождя  $R$ , назовем *крайними*. Предположим теперь, что выбрано направление  $n(R)$  распространения дождя  $R$ . Тогда порожденная  $n(R)$  каноническая нумерация переносится на элементы множества  $M$ . В этом случае мы всегда будем предполагать, что множество  $M$  занумеровано именно таким образом и называть эту нумерацию *канонической*. Первая точка из  $M$  в канонической нумерации будет называться *начальной*, последняя — *конечной* точками множества  $M$  (по отношению к  $R$ ). Очевидно, что начальная и конечная точки являются крайними. Ясно также, что изменение направления дождя  $R$  в пределах допустимого угла, которому  $R$  принадлежит, не меняет канонического порядка на  $M$ , а, значит, начальной и конечной точек.

## 2 Минимальная реализация змеи на произвольном множестве

Пусть  $M$  — произвольное конечное множество точек плоскости, и  $Z$  — линейный паркет, являющийся змеей. Пусть  $A$  — произвольная точка из  $M$ . Если существует минимальная сеть  $Z_M$ , эквивалентная двойственному графу паркета  $Z$ , затыгивающая множество  $M$ , такая что  $A$  инцидентна концевому ребру из  $Z_M$ , то будем говорить, что *из точки  $A$  можно выпустить змею  $Z$* , а сеть  $Z_M$  будем называть *змеей типа  $Z$ , выпущенной из  $A$* .



Цель настоящего параграфа состоит в построении эффективного критерия, позволяющего понять, можно ли из данной точки фиксированного множества выпустить змею данного типа.

Прежде всего, отметим следующее простое свойство минимальных змей.

**Утверждение 3.1** *Концевые вершины произвольной минимальной змеи лежат на границе выпуклой оболочки множества граничных вершин этой змеи.*

Из утверждения 3.1 вытекает, что необходимым условием существования минимальной змеи, выпущенной из данной точки  $A$  множества  $M$ , является принадлежность точки  $A$  границе выпуклой оболочки множества  $M$ .

**Определение.** Допустимый угол  $\Phi$  называется  $A$ -допустимым, если точка  $A$  множества  $M$  является крайней точкой в  $M$  по отношению к дождям из  $\Phi$ .

**Утверждение 3.2** *Если из точки  $A$  множества  $M$  можно выпустить змею, то множество всех  $A$ -допустимых углов не пусто.*

## 2.1 Характеристическая дуга

Пусть  $\widehat{M}$  — произвольное конечное множество точек плоскости, и  $A$  — точка из  $\widehat{M}$ , лежащая на границе выпуклой оболочки множества  $\widehat{M}$ . Пусть  $\Phi$  — некоторый  $A$ -допустимый угол, и  $\widehat{R}$  — произвольный ориентированный регулярный дождь из  $\Phi$ . Будем предполагать, что множество  $\widehat{M}$  состоит не менее чем из трех точек. Выберем направление  $n(\widehat{R})$  распространения дождя  $\widehat{R}$  так, чтобы  $A$  стала начальной точкой. Конечную точку множества  $M$  обозначим через  $B(\Phi)$ .

Обозначим через  $M$  множество  $\widehat{M} \setminus \{A\}$ , и пусть  $R$  — ограничение дождя  $\widehat{R}$  на множество  $M$ , сонаправленное с  $\widehat{R}$ . Ясно, что содержащий  $R$  допустимый угол, соответствующий множеству  $M$ , включает  $\Phi$ .

Выберем направление распространения дождя  $R$  совпадающим с  $n(\widehat{R})$ . Тогда  $R = \{r_i\}_{i=1}^n$ . Выпустим из  $A$  ручеек  $\text{bg}(A, R)$ , и пусть  $B(R)$  — точка пересечения этого ручейка с последней прямой  $r_n$  дождя  $R$ .

**Определение.** Множество всех точек  $B(R)$  по всем дождям  $\widehat{R}$  из допустимого угла  $\Phi$  называется *характеристической дугой* для множества  $\widehat{M}$ , соответствующей допустимому углу  $\Phi$ , и обозначается через  $D(\Phi)$ .

**Определение.** Допустимый угол  $\Phi$  называется  $B$ -допустимым, если  $B(\Phi) \in D(\Phi)$ .

Рассмотрим произвольную минимальную змею  $\Gamma$ , и пусть  $A$  — некоторая ее концевая вершина. Рассмотрим отросток  $a$  из  $\Gamma$ , смежный с концевым ребром, инцидентным  $A$ , и ориентируем его в направлении от точки Штейнера, из которой он выходит. Рассмотрим дождь змеи  $\Gamma$ , и дополним его до большего дождя, добавив к нему прямые, проходящие через концевые вершины из  $\Gamma$ . Ориентируем полученный дождь в направлении отростка  $a$ .

**Определение.** Построенный только что ориентированный дождь назовем *расширенным дождем змеи  $\Gamma$ , выходящей из  $A$* .

**Утверждение 3.3** *Если из точки  $A$  множества  $\widehat{M}$  можно выпустить змею  $Z$ , то допустимый угол, содержащий расширенный дождь построенной минимальной змеи, выходящей из  $A$ , является одновременно  $A$ -допустимым и  $B$ -допустимым.*

Понятие характеристической дуги оказывается чрезвычайно полезным для исследования возможности выпуска змеи из точки произвольного множества, а также для построения правильной минимальной реализации деревянных скелетов. Оказывается, имеет место следующее предложение.

**Предложение 3.1** *Характеристическая дуга является или дугой некоторой окружности, или вырождается в одну точку. Если характеристическая дуга невырождена, то ее угловая величина равна удвоенной величине соответствующего допустимого угла.*

**Доказательство.** Будем отождествлять точки плоскости с соответствующими комплексными числами. Пусть  $\widehat{M} = \{M_j\}_{j=0}^n$ ,  $M_0 = A$ , и пусть  $e^{i\varphi} = n(R)$  — направление распространения дождя  $R$ . Рассмотрим ручеек  $\text{br}(A, R)$  и ориентируем его от точки  $A$ . Обозначим  $j$ -ое звено ручейка  $\text{br}(A, R)$  через  $b_j$ . Тогда, как легко видеть,  $b_j$  получается из вектора  $\langle M_j - M_{j-1}, n(R) \rangle n(R)$  поворотом на угол  $\pm\pi/6$  и растяжением в  $2/\sqrt{3}$  раз, где знак “плюс” выбирается для нечетных  $j$ , и знак “минус” — для четных  $j$ . В комплексном виде это можно записать так:

$$b_j = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Re}[(M_j - M_{j-1})e^{-i\varphi}] e^{i\varphi} e^{(-1)^j \pi/6}.$$

Правую часть этого равенства можно элементарными преобразованиями привести к виду  $u_j + v_j e^{2i\varphi}$ , где  $u_j$  и  $v_j$  — комплексные числа, не зависящие от  $\varphi$ . Далее, точка  $B(R)$  имеет вид:

$$B(R) = A + \sum_{j=1}^n b_j = u + v e^{2i\varphi},$$

где  $u$  и  $v$  — комплексные числа, не зависящие от  $\varphi$ . Теперь ясно, что если  $v \neq 0$ , то, при изменении  $\varphi$  в пределах допустимого угла, точка  $B(R)$  заметает дугу окружности, угловая величина которой равна удвоенной величине допустимого угла. Если же  $v = 0$ , то характеристическая дуга вырождается в точку. Предложение доказано.

**Следствие 3.1** Пусть  $\Phi$  — некоторый  $B$ -допустимый угол. Тогда либо существует единственный дождь  $R \in \Phi$ , для которого  $B(R) = B(\Phi)$  (характеристическая дуга невырождена), либо  $B(R) = B(\Phi)$  для любого  $R \in \Phi$ .

Из сказанного выше вытекает: если у нас имеется  $A$ -допустимый угол  $\Phi$ , то для того, чтобы проверить, является ли он  $B$ -допустимым, нужно построить характеристическую дугу, и посмотреть, попала ли точка  $B(\Phi)$  на эту дугу. Ниже мы покажем, как можно построить характеристическую дугу геометрически.

## 2.2 Характеристическая дуга в случае трех точек

Пусть  $\widehat{M} = \{A, M_1, M_2\}$ ,  $R = \{r_1, r_2\}$ , и  $\text{br}(A, R)$  — ручеек, ориентированный от точки  $A$ ,  $b_j$  — его звенья, а  $A_k$  — его вершины. Отметим, что  $A_0 = A$ , и  $A_2 = B(R)$ .

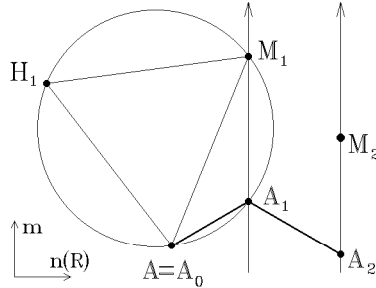
Будем предполагать, что множество  $\widehat{M}$  находится в общем положении. Последнее означает следующее. В процессе проводимого ниже построения мы будем расширять множество  $\widehat{M}$ , добавляя к уже имеющимся точкам новые. При этом мы будем достраивать некоторые пары полученных ранее точек до правильных треугольников. Так вот, будем предполагать, что новые точки не попадают на прямые дождя  $R$ . Как будет видно непосредственно из построения, почти для всех множеств  $\widehat{M}$  это условие выполняется. В случае, если  $\widehat{M}$  находится не в общем положении, некоторые из порождаемых нами правильных треугольников могут вырождаться в точку. Однако, приводимая ниже конструкция также может быть без изменений перенесена и на этот случай с заменой секущих построенных ниже окружностей на их касательные в соответствующих точках.

Итак, изучим, где может быть расположена точка  $A_1$ . Имеется три возможности.

(1.) Пусть точка  $M_1$  следует за точкой  $A_1$ , и  $M_1 \neq A_1$ . Тогда угол  $AA_1M_1$  определен и равен  $2\pi/3$ .

(2.) Пусть  $M_1$  предшествует  $A_1$ , и  $M_1 \neq A_1$ . Тогда угол  $AA_1M_1$  определен и равен  $\pi/3$ .

В любом случае, точка  $A_1$  лежит на окружности, описанной вокруг правильного треугольника  $AM_1H_1$ , построенного на отрезке  $AM_1$  так, чтобы  $H_1$  получалась из  $M_1$  поворотом на  $\pi/3$  вокруг точки  $A$ . При этом знак

Рис. 3.4: Расположение точки  $A_1$ 

угла поворота определяется в базисе  $(n(R), m)$ , где  $m$  — направление дождя  $R$  (см. рис. 3.4).

(3.) Пусть  $M_1 = A_1$ . Тогда точка  $A_1$  также лежит на окружности, описанной вокруг того же правильного треугольника  $AM_1H_1$ , при этом прямая  $r_1$  касается этой окружности в точке  $M_1 = A_1$ .

В силу того, что множество  $\widehat{M}$  находится в общем положении,  $H_1 \notin r_1$ , поэтому  $H_1 \neq A_1$ . Легко видеть, что отрезки  $H_1A_1$  и  $A_1A_2 = b_2$  лежат на одной прямой.<sup>1</sup>

Выясним теперь, где расположена точка  $A_2$ . В силу предположения, точка  $H_1$  не лежит на прямой  $r_2$ . Возникает, как и выше, три существенно разных случая.

(1.) Пусть точка  $M_2$  следует за точкой  $A_2$ , и  $M_2 \neq A_2$ . Тогда, если  $H_1$  лежит в той же полуплоскости относительно  $r_2$ , что и  $r_1$ , то угол  $H_1A_2M_2$  определен и равен  $\pi/3$ . Если же  $H_1$  и  $r_1$  лежат в разных полуплоскостях относительно  $r_2$ , то угол  $H_1A_2M_2$  определен и равен  $2\pi/3$ .

(2.) Пусть точка  $M_2$  предшествует  $A_2$ , и  $M_2 \neq A_2$ . Тогда, если  $H_1$  лежит в той же полуплоскости относительно  $r_2$ , что и  $r_1$ , то угол  $H_1A_2M_2$  определен и равен  $2\pi/3$ . Если же  $H_1$  и  $r_1$  лежат в разных полуплоскостях относительно  $r_2$ , то угол  $H_1A_2M_2$  определен и равен  $\pi/3$ .

Как бы то ни было, точка  $A_2 = B(R)$  лежит на окружности, описанной вокруг правильного треугольника  $H_1M_2H_2$ , построенного на отрезке  $H_1M_2$  так, чтобы  $H_2$  получалась из  $M_2$  поворотом на  $-\pi/3$  вокруг точки  $H_1$ . При этом знак угла поворота опять же определяется в базисе  $(n(R), m)$  (см. рис. 3.5, слева).

(3.) Пусть  $M_2 = A_2$ . Тогда точка  $A_2$  также лежит на окружности, описанной вокруг того же правильного треугольника  $H_1M_2H_2$ , при этом

<sup>1</sup>Если же множество  $\widehat{M}$  находится не в общем положении, то  $H_1$  может совпасть с  $A_1$ . В этом случае секущая  $H_1A_1$  вырождается в касательную к построенной окружности, проходящую через точку  $H_1$ . При этом отрезок  $A_1A_2 = b_2$  будет лежать на этой касательной.

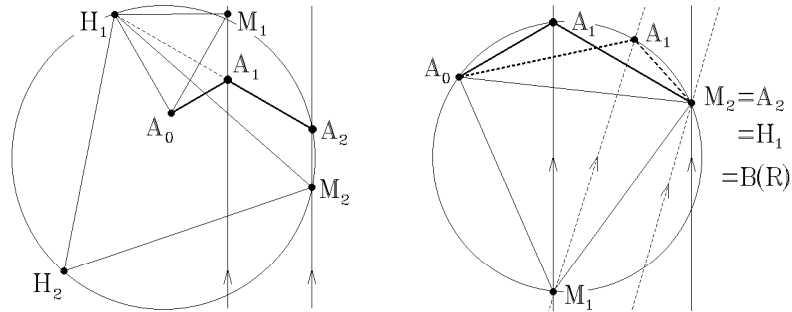


Рис. 3.5: Расположение точки  $A_2$

прямая  $r_2$  касается этой окружности в точке  $M_2 = A_2 = B(R)$ .<sup>2</sup>

Таким образом, всевозможные точки  $B(R)$  лежат на окружности  $S^1(\Phi)$ , описанной вокруг правильного треугольника  $H_1M_2H_2$ , вырожденной в случае  $M_2 = H_1$ , см. сноску. Отметим, что построение этого треугольника не зависит от выбора направления дождя  $R$  в пределах содержащего  $R$  допустимого угла, поэтому, как мы вновь видим, характеристическая дуга является или дугой окружности, или точкой — дугой вырожденной окружности. Окружность  $S^1(\Phi)$ , по определению, пересекается с прямой  $r_2$  дождя  $R$ , проходящей через точку  $M_2$ , по точке  $M_2$ . Если прямая  $r_2$  не касается окружности  $S^1(\Phi)$  (в этом случае окружность, естественно, невырождена), то точка  $B(R)$  совпадает с отличной от  $M_2$  точкой пересечения окружности  $S^1(\Phi)$  с прямой  $r_2$ . В противном случае,  $B(R) = M_2$  — единственная общая точка прямой  $r_2$  и окружности  $S^1(\Phi)$ .

### 2.3 Характеристическая дуга в общем случае

По аналогии с разделом 2.2, можно построить характеристическую дугу в случае произвольного количества точек во множестве  $M$ . А именно, если  $A = A_0, A_1, \dots, A_n$  — последовательные вершины ручейка  $\text{br}(A, R)$ , то вершина  $A_1$  лежит на окружности, описанной вокруг правильного треугольника  $AM_1H_1$ , где точка  $H_1$  получается из  $M_1$  поворотом на угол  $\pi/3$  вокруг точки  $A$ . Напомним, что знак угла поворота определяется в базисе

<sup>2</sup>Если же множество  $\widehat{M}$  находится не в общем положении, то  $H_1$  может попасть на  $r_2$ . В этом случае, очевидно,  $A_2 = H_1$ . При этом, если  $M_2 \neq A_2$ , то, как и в случае общего положения, точка  $A_2 = B(R) = H_1$  лежит на окружности, описанной вокруг правильного треугольника  $H_1M_2H_2$ , построенного на отрезке  $H_1M_2$  так, чтобы  $H_2$  получалась из  $M_2$  поворотом на  $-\pi/3$  вокруг точки  $H_1$ . Отметим, что прямая, проходящая через  $b_2$ , касается построенной окружности в точке  $H_1 = A_2$ . Если же  $M_2 = A_2$ , то треугольник  $H_1M_2H_2$  вырождается в точку  $M_2 = A_2 = H_1 = B(R)$ . Однако, снова можно считать, что  $A_2$  лежит на (вырожденной) окружности, описанной вокруг (вырожденного) треугольника  $H_1M_2H_2$ . В этом замечательном случае все ручейки, выпущенные из точки  $A$  для всех дождей  $R \in \Phi$ , приходят в одну и ту же точку  $M_2 = B(R)$  (см. рис. 3.5, справа).

$(n(R), m)$ , где  $n(R)$  — направление распространения, а  $m$  — направление дождя  $R$ . Далее, вершина  $A_2$  лежит на окружности, описанной вокруг правильного треугольника  $H_1M_2H_2$ , где точка  $H_2$  получается из точки  $M_2$  поворотом на угол  $-\pi/3$  вокруг точки  $H_1$ . Вершина  $A_3$  лежит на окружности, описанной вокруг правильного треугольника  $H_2M_3H_3$ , причем  $H_3$  получается из  $M_3$  поворотом вокруг  $H_2$  снова на угол  $\pi/3$ , и т.д. Характеристическая дуга лежит на окружности  $S^1(\Phi)$ , описанной вокруг последнего из этой серии правильного треугольника  $H_{n-1}M_nH_n$ .

**Определение.** Правильный треугольник  $H_{i-1}M_iH_i$ , построенный выше, будем называть  *$i$ -ым характеристическим треугольником*, а  $n$ -ый характеристический треугольник — *главным*. При каждом фиксированном  $i$ , геометрическое место точек  $A_i$  для всех дождей  $R \in \Phi$ , назовем  *$i$ -ой характеристической дугой* и обозначим через  $D_i(\Phi)$ .

**Замечание.** Если  $i \geq 2$ , то  $i$ -ая характеристическая дуга совпадает с ограничением характеристической дуги “начального отрезка”

$$M^i = \{A, M_1, \dots, M_i\}$$

множества  $\widehat{M}$  на множество всех дождей  $R$  из  $\Phi$ . Более формально, для множества  $M^i$  существует допустимый угол  $\Phi^i$ , содержащий  $\Phi$ . Дуга  $D_i(\Phi)$  состоит из тех и только тех точек характеристической дуги  $D(\Phi^i)$ , которые соответствуют дождям из  $\Phi$ .

Отметим, что если множество  $\widehat{M}$  находится не в общем положении, то некоторые из построенных характеристических треугольников  $H_{i-1}M_iH_i$  могут вырождаться в точку. При этом все ручейки, для всевозможных дождей  $R \in \Phi$ , проходят через точки, в которые треугольники  $H_{i-1}M_iH_i$  вырождаются. Если главный характеристический треугольник,  $H_{n-1}M_nH_n$ , невырожден, то характеристическая дуга  $D(\Phi)$  также невырождена и является дугой окружности  $S^1(\Phi)$ , при этом величина этой дуги вдвое больше, чем  $\Phi$ . Если же  $H_{n-1}M_nH_n$  вырожден, то характеристическая дуга является точкой, в которую приходят все ручейки для всех дождей  $R \in \Phi$ . В этом замечательном случае  $B(R) = B(\Phi)$  для любого  $R \in \Phi$ , т.е. каждый такой допустимый угол  $\Phi$  является  $B$ -допустимым.

Имеется еще один полезный способ построения характеристической дуги. Оказывается, можно так перестроить множество  $\widehat{M}$ , сведя его к трем точкам, чтобы характеристическая дуга перестроенного множества содержала характеристическую дугу множества  $\widehat{M}$ .

Пусть  $b_i$ , как и выше, обозначает вектор-звено  $A_{i-1}A_i$  ориентированного от точки  $A = A_0$  ручейка  $\text{br}(A, R)$ . Обозначим через  $l_i$  вектор  $M_{i-1}M_i$ . Положим:

$$O(\Phi) = A + \sum_i l_{2i-1}, \quad \text{и} \quad E(\Phi) = A + \sum_i l_{2i}.$$

**Определение.** Множество  $M_O = \{A, O(\Phi), B(\Phi)\}$  назовем *нечетным  $\Phi$ -редуцированным*, а множество  $M_E = \{A, E(\Phi), B(\Phi)\}$  — *четным  $\Phi$ -редуцированным* множествами, полученными из  $\widehat{M}$ .

Пусть  $R_O$  — ориентированный дождь, проходящий через множество  $\{O(\Phi), B(\Phi)\}$  и сонаправленный с дождем  $R$ , а  $R_E$  — ориентированный дождь, проходящий через  $\{E(\Phi), B(\Phi)\}$  и имеющий противоположное дождю  $R$  направление. Выберем направления распространения дождей  $R_O$  и  $R_E$  совпадающими с  $n(R)$ .

**Утверждение 3.4** *Дожди  $R_O$  и  $R_E$  регулярны, и, кроме того,  $B(R_O) = B(R_E) = B(R)$ .*

**Доказательство.** Пусть  $n(R)$  — направление распространения дождя  $R$ . Так как  $\widehat{R}$  — регулярный дождь, а  $R$  — его ограничение, то ортогональные проекции векторов  $l_i$  на вектор  $n(R)$  — положительны. С другой стороны,

$$B(\Phi) = A + \sum_i l_i = A + \sum_j l_{2j-1} + \sum_j l_{2j} = O(\Phi) + \sum_j l_{2j} = E(\Phi) + \sum_j l_{2j-1}.$$

В силу сделанного выше замечания, все суммы в последней формуле, равны векторам, имеющим положительную проекцию на вектор  $n(R)$ . Так как прямые дождей  $R_O$  и  $R_E$  перпендикулярны  $n(R)$ , то прямые в каждом из этих дождей различны. Таким образом, дожди  $R_O$  и  $R_E$  регулярны.

Далее, положим:

$$O(R) = A + \sum_i b_{2i-1}, \quad \text{и} \quad E(R) = A + \sum_i b_{2i}.$$

Заметим, что проекции векторов  $\sum_i b_{2i-1}$  и  $\sum_i b_{2i}$  на вектор  $n(R)$  совпадают соответственно с проекциями на  $n(R)$  векторов  $\sum_i l_{2i-1}$  и  $\sum_i l_{2i}$ . Поэтому, точка  $O(R)$  лежит на первой прямой дождя  $R_O$ , а точка  $E(R)$  — на первой прямой дождя  $R_E$ . Кроме того, все векторы, входящие в сумму  $\sum_i b_{2i-1}$ , сонаправлены и имеют то же направление, что и начальное звено ручейка  $\text{br}(A, R_O)$ , поэтому точка  $O(R)$  является вершиной этого ручейка. Точно так же проверяется, что точка  $E(R)$  является вершиной ручейка  $\text{br}(A, R_E)$ . Далее, очевидно, второе вектор-звено ручейка  $\text{br}(A, R_O)$  совпадает с  $\sum_i b_{2i}$ . Аналогично для ручейка  $\text{br}(A, R_E)$ . Поэтому,

$$B(R) = A + \sum_{i=1}^n b_i = A + \sum_j b_{2j-1} + \sum_j b_{2j} = O(R) + \sum_i b_{2i} = B(R_O).$$

Аналогично для  $R_E$ . Доказательство закончено.

Обозначим через  $\Phi_O$  и  $\Phi_E$  допустимые углы, содержащие дожди, полученные расширением дождей  $R_O$  и  $R_E$  на множества  $M_O$  и  $M_E$  соответственно.

**Следствие 3.2** *Характеристическая дуга  $D(\Phi)$  для множества  $\widehat{M}$ , соответствующая допустимому углу  $\Phi$ , содержится в характеристических дугах  $D(\Phi_O)$  и  $D(\Phi_E)$  нечетного и четного  $\Phi$ -редуцированных множеств  $M_O$  и  $M_E$ .*

**Следствие 3.3** *Пусть  $M^i = \{A, M_1, M_2, \dots, M_i\}$  — начальный отрезок множества  $\widehat{M}$ . Тогда  $i$ -ая характеристическая дуга  $d_i(\Phi)$ , соответствующая множеству  $\widehat{M}$ , содержится в характеристической дуге множества  $M^i$ , соответствующей тому допустимому углу, в котором лежит  $\Phi$ . Более того,  $i$ -ый характеристический треугольник совпадает с главным характеристическим треугольником для множества  $M^i$ .*

## 2.4 Вполне характеристическая дуга

Используя результаты предыдущего пункта, можно предложить следующий алгоритм проверки того, можно ли данное множество  $\widehat{M}$  точек плоскости затянуть змеей, выпущенной из точки  $A \in \widehat{M}$ . Сначала проверяется, принадлежит ли точка  $A$  границе выпуклой оболочки множества  $\widehat{M}$ . Если это не так, то змею выпустить нельзя.

В противном случае, рассматриваются все  $A$ -допустимые углы, для каждого из них строится своя характеристическая дуга и проверяется, лежит ли конечная точка множества  $\widehat{M}$  на этой дуге, т.е. проверяется, является ли данный угол  $B$ -допустимым. Если среди множества всех  $A$ -допустимых углов нет ни одного  $B$ -допустимого угла, то змею выпустить нельзя.

В противном случае, рассматривается каждый  $B$ -допустимый угол. Если соответствующая ему характеристическая дуга невырождена, то существует единственный дождь  $R$  из этого угла, такой что  $B(R)$  совпадает с конечной точкой множества  $\widehat{M}$ . Этот дождь может быть легко построен, а именно, конечная прямая этого дождя совпадает с касательной к окружности, описанной вокруг главного характеристического треугольника, проведенной через конечную точку множества  $\widehat{M}$ . Отметим, что эта касательная параллельна противоположной стороне главного характеристического треугольника.

Если же характеристическая дуга вырождена, то придется рассматривать все дожди из допустимого угла.

Осталось проверить, существует ли среди выбранных дождей такой, для которого не крайние точки множества  $\widehat{M}$  лежат на отростках порожденной этим дождем бесконечной змеи, выпущенной из  $A$ . Если такой дождь найдется, то искомая минимальная змея получается ограничением построенной бесконечной змеи. В противном случае, змею выпустить нельзя.

Наличие вырожденного случая, а также некоторые технические соображения, приводят к необходимости более детального исследования последнего шага этого алгоритма. В настоящем пункте мы сформулируем критерий существования минимальной змеи, выпущенной из точки  $A$ , в терминах



так называемой вполне характеристической дуги, являющейся ограничением характеристической дуги.

Пусть  $H_{i-1}M_iH_i$  —  $i$ -ый характеристический треугольник. Его вершину  $H_i$  назовем *главной*. Пусть  $S_i^1$  — окружность, описанная вокруг треугольника  $H_{i-1}M_iH_i$ . Открытую дугу окружности  $S_i^1$ , лежащую между  $H_{i-1}$  и  $M_i$  и не содержащую главной вершины  $H_i$ , назовем  *$i$ -ой главной дугой*. Отметим, что если треугольник  $H_{i-1}M_iH_i$  — вырожден, то, по определению,  $i$ -ая главная дуга — пуста.

Отметим, что  $i$ -ая главная дуга и  $i$ -ая характеристическая дуга лежат на одной окружности  $S_i^1$ .

**Определение.** Пересечение  $i$ -ой главной дуги и  $i$ -ой характеристической дуги назовем *главной частью  $i$ -ой характеристической дуги* и обозначим через  $d_i(\Phi)$ .

Пусть  $Z$  — паркет-змея, и  $Z_{\widehat{M}}$  — некоторая его минимальная реализации на множестве  $\widehat{M}$ , выпущенная из некоторой вершины  $A \in \widehat{M}$ . Рассмотрим дождь  $R'$ , соответствующий  $Z_{\widehat{M}}$ , и расширим его до дождя  $R$ , добавив к  $R'$  прямую, проходящую через отличную от  $A$  концевую вершину змеи  $Z_{\widehat{M}}$ . Пусть  $\Phi$  — допустимый угол для множества  $\widehat{M}$ , содержащий расширение  $\widehat{R}$  дождя  $R$  на  $\widehat{M}$ . Обозначим через  $A_1, \dots, A_n$  последовательные вершины ориентированного от  $A$  ручейка  $\text{br}(A, R)$ .

**Предложение 3.2** В сделанных выше предположениях, имеют место следующие соотношения:  $A_i \in d_i(\Phi)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ .

**Доказательство.** Прежде всего, отметим, что если какой-либо характеристический треугольник, отличный от главного, вырождается, то соответствующая точка из  $\widehat{M}$  совпадает с точкой Штейнера бесконечной змеи, порожденной любым дождем из рассматриваемого допустимого угла. В этом случае минимальную змею выпустить нельзя. Следовательно, все характеристические треугольники, за исключением, быть может, главного, невырождены.

Доказательство предложения проведем по индукции. Пусть  $i = 1$ . Так как угол  $AA_1M_1$  равен  $2\pi/3$ , то ориентированный угол между направлением  $m$  дождя  $R$  и вектором  $AM_1$  в базисе  $(n(R), m)$  лежит в пределах между  $-\pi/3$  и  $0$ . Напомним, что  $H_1$  получается из  $M_1$  поворотом вокруг  $A$  на угол величины  $\pi/3$ . Поэтому ориентированный угол между  $m$  и вектором  $AH_1$  больше нуля и меньше  $\pi/3$ . Следовательно, точка  $H_1$  лежит в той же полуплоскости относительно прямой  $r_1$ , что и точка  $A$ . Более того, из равенства  $2\pi/3$  угла  $AA_1M_1$  и принадлежности точки  $A_1$  окружности  $S_1^1$ , описанной вокруг треугольника  $AM_1H_1$ , вытекает, что  $A_1$  обязана попасть на ту из двух дуг, стянутых хордой  $AM_1$ , которая по величине равна  $2\pi/3$ , т.е. на 1-ую главную дугу. Поэтому, по определению,  $A_1 \in d_1(\Phi)$ .

Пусть  $i = 2$ . Так как угол  $H_1A_2M_2$  равен  $2\pi/3$ , то ориентированный угол между направлением  $m$  дождя  $R$  и вектором  $H_1M_2$  в базисе  $(n(R), m)$  лежит в пределах между  $-2\pi/3$  и  $-\pi$ . Напомним, что  $H_2$  получается из  $M_2$  поворотом вокруг  $H_1$  на угол величины  $-\pi/3$ . Поэтому ориентированный угол между  $m$  и вектором  $H_1H_2$  меньше  $-\pi$  и больше  $-4\pi/3$ . Следовательно, точка  $H_2$  лежит в той же полуплоскости относительно прямой  $r_2$ , что и точка  $H_1$ , а, значит, в той же полуплоскости, что и точка  $A$ . Более того, из равенства  $2\pi/3$  угла  $H_1A_2M_2$  и принадлежности точки  $A_2$  окружности  $S_2^1$ , описанной вокруг треугольника  $H_1M_2H_2$ , вытекает, что  $A_2$  обязана попасть на ту из двух дуг, стянутых хордой  $H_1M_2$ , которая по величине равна  $2\pi/3$ , т.е. на 2-ую главную дугу. Поэтому, по определению,  $A_2 \in d_2(\Phi)$ .

Предположим, что для всех  $i < k \leq n - 1$  доказано, что  $A_i \in d_i(\Phi)$ , и что точка  $H_i$  находится относительно прямой  $r_i$  в той же полуплоскости, что и точка  $A$ . Тогда, дословно повторив рассуждения для  $i = 2$ , если  $k$  четно, и для  $i = 1$ , если  $k$  нечетно, получим, что  $A_k \in d_k(\Phi)$ . Предложение доказано.

Рассмотрим множество тех дождей из  $\Phi$ , у которых каждая точка  $A_i$  лежит на своей  $d_i(\Phi)$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ . Соответствующее подмножество допустимого угла  $\Phi$  назовем *базой вполне характеристической дуги*. Для каждого дождя  $R$  из базы вполне характеристической дуги рассмотрим соответствующую ему точку  $B(R)$  на характеристической дуге  $D(\Phi)$ .

**Определение.** Построенное только что подмножество характеристической дуги  $D(\Phi)$  назовем *вполне характеристической дугой* и обозначим через  $D^H(\Phi)$ .

Так как каждая из  $i$ -ых главных дуг и  $i$ -ых характеристических дуг связна и открыта, то вполне характеристическая дуга или пуста, или представляет собой связную открытую дугу окружности  $S^1(\Phi)$ . Отметим также, что вполне характеристическая дуга может быть пуста, в то время как ее база — нет. Из предложения 3.2 непосредственно вытекает.

**Следствие 3.4** *В предположениях предложения 3.2, база вполне характеристической дуги  $D^H(\Phi)$  не пуста. Более того, если главный характеристический треугольник невырожден, то вполне характеристическая дуга  $D^H(\Phi)$  также не пуста и содержит точку  $B(\Phi) = A_n$ .*

Теперь все готово для того, чтобы сформулировать основной результат настоящего параграфа.

### Предложение 3.3 (Критерий существования минимальной змеи)

*Конечное множество  $\widehat{M}$  точек плоскости можно затянуть минимальной змеей, выпущенной из точки  $A \in \widehat{M}$ , тогда и только тогда, когда*

среди  $A$ -допустимых углов существует такой  $B$ -допустимый угол  $\Phi$ , что база вполне характеристической дуги не пуста. При этом, если главный характеристический треугольник невырожден, то конечная точка  $B(\Phi)$  множества  $\widehat{M}$  относительно  $\Phi$  принадлежит вполне характеристической дуге  $D^H(\Phi)$ .

**Доказательство.** Прямое утверждение содержится в предложении 3.2. Докажем обратное утверждение. Пусть, как всегда,  $A$  — начальная точка множества  $\widehat{M}$  по отношению к некоторому проходящему через  $\widehat{M}$  регулярному ориентированному дождю  $\widehat{R}$  с выбранным направлением распространения  $n(\widehat{R})$ . Вновь обозначим через  $M$  множество  $\widehat{M} \setminus \{A\}$ , через  $R = \{r_i\}$  — сонаправленное с  $\widehat{R}$  ограничение дождя  $\widehat{R}$  на  $M$ , распространяющееся в направлении  $n(\widehat{R})$ ; через  $\Phi$  — допустимый угол, соответствующий множеству  $\widehat{M}$  и содержащий дождь  $\widehat{R}$ ; через  $\text{br}(A, R)$  — ручеек, ориентированный от точки  $A$ , через  $A_0 = A, A_1, \dots, A_n$  — последовательные вершины ручейка  $\text{br}(A, R)$ .

Пусть  $M_1, \dots, M_n$  — последовательные элементы множества  $M$  в порядке, порожденном дождем  $R$ . Предположим, что  $\Phi$  — это тот  $B$ -допустимый угол, существование которого предполагается в условии предложения. Пусть  $H_{i-1}M_iH_i$  —  $i$ -ый характеристический треугольник. Так как, по условию, база вполне характеристической дуги  $D^H(\Phi)$  не пуста, то все  $i$ -ые характеристические треугольники, за исключением, быть может, главного, невырождены. Если главный характеристический треугольник невырожден, то в качестве дождя  $R$  выберем такой дождь из  $\Phi$ , для которого  $A_n = M_n$ . По условию предложения,  $B(\Phi) \in D^H(\Phi)$ , поэтому такой дождь  $R$  содержится в базе вполне характеристической дуги. Если же главный характеристический треугольник вырожден, то выберем в качестве  $R$  произвольный дождь из базы вполне характеристической дуги.

Нам осталось показать, что углы  $A_{i-1}A_iM_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , равны  $2\pi/3$ . Рассмотрим угол при вершине  $A_1$ . По условию, точка  $A_1$  лежит на главной дуге окружности  $S_1^1$ , описанной вокруг характеристического треугольника  $AM_1H_1$ . Следовательно, угол  $AA_1M_1$  равен  $2\pi/3$ . Поэтому точка  $M_1$  следует за  $A_1$ , и, значит, главная вершина  $H_1$  этого треугольника лежит относительно  $r_1$  в той же полуплоскости, что и точка  $A$ . Далее, рассматриваем  $A_2$  и проводим в точности такие же рассуждения. Перебирая последовательно точки  $A_i$ , убеждаемся, что угол  $A_{i-1}A_iM_i$  при каждой из них равен  $2\pi/3$  и точка  $H_i$  лежит в той же относительно прямой  $r_i$  полуплоскости, что и точка  $A$ . Доказательство предложения закончено.

### 3 Существование правильной минимальной реализации змеи

Цель настоящего параграфа — применить разработанную выше технику к доказательству следующего предложения.

**Предложение 3.4** *Множество вершин каждого правильного многоугольника можно затянуть единственной, с точностью до движения, минимальной змеей, см. рис. 3.1, слева.*

Мы начнем этот параграф с описания устройства  $i$ -ых характеристических дуг и  $i$ -ых характеристических треугольников для множества вершин правильного многоугольника.

#### 3.1 Характеристические дуги и треугольники

Пусть  $P$  — правильный  $n$ -угольник, а  $\widehat{M}$  — множество его вершин. Будем считать, что многоугольник  $P$  вписан в окружность  $S^1$  единичного радиуса с центром в начале стандартной системы координат.

Пусть  $A$  — произвольная вершина многоугольника  $P$ , и  $M$ , как и выше, — множество  $\widehat{M} \setminus \{A\}$ . Мы покажем, что из точки  $A$  можно выпустить змею. Так как  $\widehat{M}$  — выпуклое<sup>3</sup> множество, а точка  $A$  является крайней точкой для  $P$ , то у множества  $\widehat{M}$  имеется  $A$ -допустимый угол. Более внимательное рассмотрение показывает, что у  $\widehat{M}$  имеется две пары противоположных  $A$ -допустимых углов: если, в комплексной записи,  $A = e^{i\varphi}$ , то одна пара углов имеет вид:

$$(\varphi + \pi/2, \varphi + \pi/2 + \alpha) \quad \text{и} \quad (\varphi + 3\pi/2, \varphi + 3\pi/2 + \alpha),$$

а другая пара — имеет вид

$$(\varphi + \pi/2 - \alpha, \varphi + \pi/2) \quad \text{и} \quad (\varphi + 3\pi/2 - \alpha, \varphi + 3\pi/2),$$

где  $\alpha = \pi/n$ . Здесь мы записываем углы как интервалы на единичной окружности направлений. Геометрически эти углы образованы касательной к окружности  $S^1$ , проведенной через точку  $A$ , и двумя секущими, каждая из которых проходит через точку  $A$  и соседнюю с ней вершину многоугольника  $P$ .

Для определенности, выберем многоугольник так, чтобы точка  $A$  имела координаты  $(-1, 0)$ , а в качестве  $A$ -допустимого угла  $\Phi$  — угол вида  $(\pi/2 - \alpha, \pi/2)$ , заключенный между касательным в точке  $A$  к окружности  $S^1$  лучом, направленным в верхнюю полуплоскость, и лучом, идущим из точки  $A$

<sup>3</sup>Здесь мы для удобства будем называть выпуклыми множества, лежащие на границах своих выпуклых оболочек. Часто такие множества называют экстремальными.

в соседнюю с  $A$  вершину многоугольника  $P$ , лежащую в верхней полуплоскости.

Пусть  $\widehat{R}$  — произвольный дождь из  $\Phi$ , и  $R$  — его ограничение на  $M$ . Выберем направление распространения дождей  $\widehat{R}$  и  $R$  равным вектору, имеющему положительную проекцию на вектор с координатами  $(0, 1)$ , т.е. будем считать, что эти дожди распространяются внутрь многоугольника. Тогда на множестве  $M$  возникает каноническая нумерация. Пусть  $M = \{M_1, \dots, M_{n-1}\}$ . Отметим, что, в силу выбора  $\Phi$ , точки  $M_{2j-1}$  с нечетными номерами, за исключением последней, если  $n$  — четно, лежат в верхней полуплоскости, а точки  $M_{2j}$  с четными номерами, — в нижней полуплоскости. Иногда, для удобства, точку  $A$  мы будем обозначать через  $M_0$ .

Проведем построения предыдущего параграфа для определения того, как выглядят  $i$ -ые характеристические дуги для угла  $\Phi$ . Для этого удобнее всего воспользоваться следствием 3.3. Для построения 1-ой характеристической дуги построим на стороне  $AM_1$  вне многоугольника  $P$  правильный треугольник  $AM_1H_1$ , являющийся 1-ым характеристическим треугольником. Легко видеть, что 1-ая характеристическая дуга  $D_1(\Phi)$  высекается углом  $AM_1M_2$  из окружности  $S_1^1$ , описанной вокруг треугольника  $AM_1H_1$ . Пусть  $P_1$  — точка пересечения внутренности луча  $M_1M_2$  с окружностью  $S_1^1$ . Простое геометрическое наблюдение показывает, что луч  $AP_1$  отклоняется от оси абсцисс (диаметра окружности  $S^1$ , проведенного через точку  $A$ ), на угол  $\pi/6$ .

Построим теперь 2-ую характеристическую дугу  $D_2(\Phi)$ . Для этого воспользуемся четной редукцией множества  $M^2 = \{A, M_1, M_2\}$ . Пусть  $\Phi^2$  — допустимый угол для  $M^2$ , содержащий  $\Phi$ . Тогда множество  $M_E^2$  состоит из трех точек  $A$ ,  $E_1 = E(\Phi^2)$  и  $M_2 = B(\Phi^2)$ . Определим, где расположена точка  $E_1$ . По определению четной редукции,  $E_1 = A + M_1M_2$ , поэтому  $E_1$  лежит на луче, касательном к окружности  $S^1$  в точке  $A$ , направленном в нижнюю полуплоскость. При этом  $|AE_1| = |M_1M_2|$ . Отметим, что четырехугольник  $AM_1M_2E_1$  — параллелограмм.

Первый характеристический треугольник для множества  $M_E^2$  — это правильный треугольник  $AE_1H$ , построенный вне многоугольника  $P$ . Чтобы понять, как устроен второй характеристический треугольник, сформулируем следующее очевидное планиметрическое утверждение.

**Лемма 3.1** Пусть  $ABCD$  — параллелограмм, и правильные треугольники  $ABE$  и  $CBF$  построены вне  $ABCD$ . Тогда треугольник  $EFD$  — также правильный.

Из леммы 3.1 вытекает, что второй характеристический треугольник для  $M_E^2$  совпадает с треугольником  $HM_2H_1$ . По следствию 3.3, этот треугольник есть не что иное, как второй характеристический треугольник  $H_1M_2H_2$  для множества  $\widehat{M}$ . Поэтому,  $H = H_2$ . Таким образом, доказана

**Лемма 3.2** *Вершина  $H_2$  второго характеристического треугольника  $H_1M_2H_2$  совпадает с вершиной  $H$  правильного треугольника  $AE_1H$ , построенного вне многоугольника  $P$ , где  $E_1$  — точка на касательном луче к  $S^1$  в точке  $A$ , идущем в нижнюю полуплоскость, причем  $|AE_1| = |M_1M_2|$ .*

Таким образом, 2-ая характеристическая дуга  $D_2(\Phi)$  вырезается из окружности  $S_2^1$ , описанной вокруг треугольника  $H_1M_2H_2$ , углом  $M_1M_2M_3$ .

**Лемма 3.3** *Окружность  $S_2^1$  проходит через точку  $P_1$ . Поэтому, пересечение внутренней луча  $M_2M_1$  с окружностью  $S_2^1$  совпадает с точкой  $P_1$ .*

**Доказательство.** Отметим, что прямые  $AP_1$  и  $AH_2$  совпадают в силу того, что вектор  $AP_1$  отклоняется от оси абсцисс на  $\pi/6$ , а вектор  $AH_2$  — на  $-2\pi/3$ . Далее, легко видеть, что угол  $AP_1M_2$  равен  $\pi/3$ , поэтому и угол  $H_2P_1M_2$  также равен  $\pi/3$ , что и доказывает принадлежность точки  $P_1$  окружности  $S_2^1$ .

Пусть  $P_2$  — точка пересечения внутренней луча  $M_2M_3$  с окружностью  $S_2^1$ .

**Лемма 3.4** *Точка  $P_2$  лежит на прямой  $H_1A$ , поэтому вектор  $AP_2$  отклоняется от оси абсцисс на угол  $-\pi/6 - \alpha$ .*

**Доказательство.** Очевидно, угол  $H_1AH_2$  равен  $\pi/3 + \alpha$ . Угол  $P_1M_2P_2$  равен  $\alpha$  и вписан в окружность  $S_2^1$ , поэтому меньшая дуга окружности  $S_2^1$  между  $P_1$  и  $P_2$  равна  $2\alpha$ . С другой стороны, меньшая дуга этой же окружности между  $H_1$  и  $H_2$  равна  $2\pi/3$ .

Проведем прямую  $H_1A$ , и пусть  $X$  — точка ее пересечения с окружностью  $S_2^1$ , отличная от  $H_1$ . Так как прямые  $H_1X$  и  $H_2P_1$  образуют вертикальный угол величины  $\pi/3 + \alpha$ , то величина меньшей дуги между  $P_1$  и  $X$  равна  $2\alpha$ , т.е. точка  $X$  совпадает с  $P_2$ . Таким образом,  $P_2$  лежит на прямой  $H_1A$ . Осталось вспомнить, что угол между  $AP_1$  и направлением оси абсцисс равен  $\pi/6$ .

Выясним теперь, как выглядит дуга  $D_3(\Phi)$ . Для этого воспользуемся нечетной редукцией, примененной к множеству  $M^3$ .

Пусть  $\Phi^3$  — допустимый угол для  $M^3$ , содержащий  $\Phi$ . Тогда множество  $M_O^3$  состоит из трех точек  $A$ ,  $O_1 = O(\Phi^3)$  и  $M_3 = B(\Phi^3)$ . Определим, где расположена точка  $O_1$ . По определению нечетной редукции,  $O_1 = A + AM_1 + M_2M_3$ , поэтому, так как  $AM_1$  и  $M_1M_3$  сонаправлены,  $O_1$  лежит на луче  $AM_1$ . При этом  $|AO_1| = |AM_1| + |M_2M_3|$ . Отметим, что четырехугольник  $AO_1M_3E_1$  — параллелограмм.

Первый характеристический треугольник для множества  $M_O^3$  — это правильный треугольник  $AO_1H$ , построенный вне многоугольника  $P$ .

Из леммы 3.1 вытекает, что второй характеристический треугольник для  $M_O^3$  совпадает с треугольником  $HM_3H_2$ . По следствию 3.3, этот треугольник есть не что иное, как третий характеристический треугольник  $H_2M_3H_3$  для множества  $\widehat{M}$ . Поэтому,  $H = H_3$ . Таким образом, доказана

**Лемма 3.5** *Вершина  $H_3$  третьего характеристического треугольника  $H_2M_3H_3$  совпадает с вершиной  $H$  правильного треугольника  $AO_1H$ , построенного вне многоугольника  $P$ , где  $O_1$  — точка на луче  $AM_1$ , причем  $|AO_1| = |AM_1| + |M_2M_3|$ .*

Таким образом, 3-ая характеристическая дуга  $D_3(\Phi)$  вырезается из окружности  $S_3^1$ , описанной вокруг треугольника  $H_2M_3H_3$ , углом  $M_2M_3M_4$ .

**Лемма 3.6** *Окружность  $S_3^1$  проходит через точку  $P_2$ . Поэтому, пересечение внутренности луча  $M_3M_2$  с окружностью  $S_3^1$  совпадает с точкой  $P_2$ .*

**Доказательство.** Ясно, что прямые  $AP_2$  и  $AH_3$  совпадают. Далее, легко видеть, что угол  $AP_2M_3$  равен  $\pi/3$ , поэтому и угол  $H_3P_2M_3$  так же равен  $\pi/3$ , что и доказывает принадлежность точки  $P_2$  окружности  $S_3^1$ .

Пусть  $P_3$  — точка пересечения внутренности луча  $M_3M_4$  с окружностью  $S_3^1$ .

**Лемма 3.7** *Точка  $P_3$  лежит на прямой  $H_2A$ , поэтому вектор  $AP_3$  отклоняется от оси абсцисс на угол  $\pi/6$ . Поэтому, в частности, прямые  $AP_1$  и  $AP_3$  совпадают.*

**Доказательство.** Очевидно, угол  $H_2AH_3$  равен  $\pi/3 + \alpha$ . Угол  $P_2M_3P_3$  равен  $\alpha$  и вписан в окружность  $S_3^1$ , поэтому меньшая дуга окружности  $S_3^1$  между  $P_2$  и  $P_3$  равна  $2\alpha$ . С другой стороны, меньшая дуга этой же окружности между  $H_2$  и  $H_3$  равна  $2\pi/3$ .

Проведем прямую  $H_2A$ , и пусть  $X$  — точка ее пересечения с окружностью  $S_3^1$ , отличная от  $H_2$ . Так как прямые  $H_2X$  и  $H_3P_2$  образуют вертикальный угол величины  $\pi/3 + \alpha$ , то величина меньшей дуги между  $P_2$  и  $X$  равна  $2\alpha$ , т.е. точка  $X$  совпадает с  $P_3$ . Таким образом,  $P_3$  лежит на прямой  $H_2A$ .

Поступая и дальше аналогичным образом, т.е. для последовательных множеств  $M^i$  делая четную редукцию для четного  $i$ , и нечетную редукцию для нечетного  $i$ , мы построим все  $i$ -ые характеристические дуги и  $i$ -ые характеристические треугольники. В следующем предложении подвоятся итоги проведенного выше исследования геометрии характеристических дуг и треугольников в случае правильного многоугольника  $P$ .

Обозначим луч  $AM_1$  через  $m_O$ , а луч  $AE_1$  — через  $m_E$ . Также обозначим лучи  $AH_1$  и  $AH_2$  через  $h_O$  и  $h_E$  соответственно. Лучи, полученные продолжением  $h_O$  и  $h_E$  за вершину  $A$  внутрь окружности  $S^1$  обозначим через  $u_O$  и  $u_E$  соответственно.

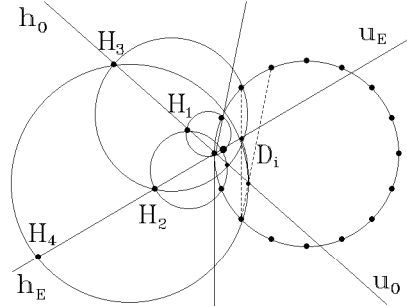


Рис. 3.6: Геометрия характеристических дуг

**Предложение 3.5** В сделанных выше предположениях,  $i$ -ые характеристические треугольники  $H_{i-1}M_iH_i$  устроены так. Каждая вершина  $H_{2k-1}$  с нечетным номером лежит на луче  $h_O$  на расстоянии  $\sum_{j=1}^k |M_{2j-2}M_{2j-1}|$  от точки  $A = M_0$ , а каждая вершина  $H_{2k}$  с четным номером лежит на луче  $h_E$  на расстоянии  $\sum_{j=1}^k |M_{2j-1}M_{2j}|$  от точки  $A$ .

Далее,  $i$ -ая характеристическая дуга  $D_i(\Phi) = P_{i-1}P_i$  высекается из окружности  $S_i^1$ , описанной вокруг  $i$ -го характеристического треугольника, углом величины  $\pi/3 + \alpha$  между лучами  $u_O$  и  $u_E$ . Кроме того, дуга  $P_{i-1}P_i$  лежит в вертикальном угле величины  $\alpha$ , ограниченном прямыми  $M_{i-1}M_i$  и  $M_iM_{i+1}$ . Угловая величина этой дуги равна  $2\alpha$ , поэтому, в частности, угол  $P_{i-1}H_iP_i$  равен  $\alpha$ . Описанные здесь построения приведены на рис. 3.6.

**Определение.** Внутренность угла величины  $\pi/3 + \alpha$  между лучами  $u_O$  и  $u_E$  назовем *характеристическим углом* правильного многоугольника  $\widehat{M}$  с вершиной в  $A$  и обозначим через  $U(A, \Phi)$ . Угол  $P_{i-1}H_iP_i$  величины  $\alpha$  будем называть *допустимым углом* с вершиной  $H_i$ .

Рассмотрим произвольный дождь  $R$  из  $A$ -допустимого угла  $\Phi$ , проходящий через  $M$ , и пусть  $A_0 = A, A_1, \dots, A_{n-1}$  — последовательные вершины ручейка  $\text{br}(A, R)$ . Тогда, по определению, точка  $A_i, i > 0$ , лежит на  $i$ -ой характеристической дуге  $D_i(\Phi)$ . Пусть  $H_{i-1}M_iH_i$  —  $i$ -ый характеристический треугольник. Рассмотрим луч  $H_iA_i$ . Тогда, непосредственно из построения вытекает следующее утверждение.

**Утверждение 3.5** Луч  $H_iA_i$  лежит внутри допустимого угла с вершиной в  $H_i$ . Вершина  $A_{i+1}, i \leq n - 2$ , лежит на пересечении луча  $H_iA_i$  с  $(i + 1)$ -ой характеристической дугой  $D_{i+1}(\Phi)$ . В частности, отрезок  $A_iA_{i+1}$  лежит на луче  $H_iA_i$ .

Предложение 3.5 непосредственно влечет справедливость следующего утверждения.



**Следствие 3.5** *Каждый  $A$ -допустимый угол  $\Phi$  для правильного многоугольника является  $B$ -допустимым. Кроме того, главный характеристический треугольник невырожден, поэтому существует единственный дождь  $R \in \Phi$ , такой что ручеек  $\text{br}(A, R)$ , начинающийся в  $A$ , приходит в  $M_{n-1} = B(\Phi)$ .*

Итак, нам осталось показать, что порожденная дождем  $R$  из следствия 3.5 бесконечная змея ограничивается до минимальной змеи, затягивающей множество  $\widehat{M}$ .

### 3.2 Доказательство существования минимальной реализации змеи

Для завершения доказательства существования минимальной змеи, выпущенной из  $A$ , можно было бы воспользоваться техникой вполне характеристических дуг. Однако, в данном случае имеется еще более простое доказательство, основанное на понятие характеристического конуса.

Пусть  $R \in \Phi$  — тот дождь, для которого ручеек  $\text{br}(A, R)$  проходит через точку  $M_{n-1}$ , и пусть  $A = A_0, A_1, \dots, A_{n-1} = M_{n-1}$  — его последовательные вершины. По построению, если  $A_i$  лежит внутри окружности  $S^1$ , то угол  $A_{i-1}A_iM_i$  равен  $2\pi/3$ , поэтому отросток бесконечной змеи  $\mathcal{Z}(A, R)$ , выходящий из такой точки  $A_i$ , содержит точку  $M_i$ . Поэтому, для завершения доказательства существования минимальной змеи, выпущенной из  $A$ , достаточно проверить, что все вершины  $A_i, i = 1, \dots, n - 2$  лежат внутри окружности  $S^1$ .

**Важное замечание.** В этом месте мы существенно пользуемся выбором допустимого угла  $\Phi$ . Отметим, что если вместо  $\Phi$  взять противоположный ему допустимый угол  $\Phi'$ , то ни один отросток бесконечной змеи, соответствующей единственному дождю  $R' \in \Phi'$ , для которого ручеек  $\text{br}(A, R')$  приходит в  $M_{n-1}$ , не содержит соответствующих вершин  $M_i$ . Поэтому из каждой пары противоположных допустимых углов лишь один подходит для построения минимальной змеи. Такой  $A$ -допустимый угол будем называть *хорошим*.

Итак, для произвольной вершины  $A$  правильного многоугольника существует ровно два хороших  $A$ -допустимых угла  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ . Пусть  $R_i$  — произвольный ориентированный дождь из  $\Phi_i$ , направление распространения которого выбрано внутрь многоугольника  $P$ . Тогда, если  $m_i$  — вектор направления дождя  $R_i$ , то базисы  $(n(R_1), m_1)$  и  $(n(R_2), m_2)$  задают на плоскости противоположные ориентации.

Напомним, что замыкание характеристического конуса  $\mathcal{C}(A, R)$  содержит ручеек  $\text{br}(A, R)$ . Из определения характеристического конуса и свойств характеристического угла непосредственно вытекает следующая лемма.

**Лемма 3.8** *Замыкание характеристического конуса  $\mathcal{C}(A, R)$  произвольного дожда  $R \in \Phi$  содержится, за исключением входящей в него точки  $A$ , в характеристическом угле  $U(A, \Phi)$ .*

Поэтому, достаточно показать, что пересечение характеристических углов  $U(A, \Phi)$  и  $U(M_{n-1}, \Phi)$  содержится внутри окружности  $S^1$ . Легко видеть, что имеет место следующая лемма.

**Лемма 3.9** *Пересечение характеристических углов  $U(A, \Phi)$  и  $U(M_{n-1}, \Phi)$  содержится внутри окружности  $S^1$  при  $n \geq 6$ .*

Таким образом, показано, что при  $n \geq 6$  из любой вершины  $A$  правильного  $n$ -угольника можно выпустить две минимальных змеи. В случае  $n < 6$  соответствующие змеи могут быть построены непосредственно с использованием алгоритма Мелзака, см. выше.

И, наконец, отметим, что для любой пары вершин правильного  $n$ -угольника, существует ровно два движения плоскости, сохраняющие многоугольник и переводящие одну из этих вершин в другую. Одно из них сохраняет ориентацию, а другое — нет. Эти движения и переводят пару минимальных змей, выпущенных из одной вершины этого правильного  $n$ -угольника, в пару минимальных змей, выходящих из другой его вершины. Доказательство предложения 3.4 закончено.

## 4 Общие свойства скелетов, имеющих правильную минимальную реализацию

В настоящем параграфе мы получим некоторые необходимые условия существования минимальной реализации на правильных многоугольниках двойственных графов скелетов из  $\mathcal{WP}_5$ . Напомним, что такие минимальные реализации мы сокращенно называем  $RM$ -реализациями.

### 4.1 Расположение концевых линейных участков

Пусть  $S$  — скелет из  $\mathcal{WP}_5$ , имеющий  $RM$ -реализацию  $S_M$  на правильном  $n$ -угольнике  $P$ , вписанном в единичную окружность  $S^1$  с центром в начале координат. Пусть  $K_i$  — те вершины из  $P$ , в которые приходят концевые ребра <sup>4</sup> из  $S_M$ .

**Предложение 3.6** *Пусть  $k$  — меньшее число сторон  $n$ -угольника  $P$ , заключенных между двумя несовпадающими вершинами  $K_i$  и  $K_j$ . Тогда существует и единственно целое положительное число  $l$ , не превосходящее*

<sup>4</sup>Под концевыми ребрами из  $S_M$  мы понимаем те граничные ребра графа  $S_M$ , которые соответствуют концевым ребрам двойственного графа скелета  $S$ .

3, такое что

$$\left| k - \frac{nl}{6} \right| < 1.$$

Таким образом, если  $nl$  делится нацело на 6, то  $k = nl/6$ ; в противном случае,  $k$  равно или  $[nl/6]$ , или  $[nl/6] + 1$ , где  $[x]$  обозначает целую часть числа  $x$ .

**Доказательство.** Если  $n = 3$ , то вершины  $K_i$  находятся в вершинах правильного треугольника, и предложение верно. Пусть теперь  $n > 3$ .

Предположим, что скелет  $S$  и его правильная минимальная реализация  $S_M$  расположены на одной плоскости так, что двойственный граф  $\Gamma_S$  скелета  $S$  параллелен минимальной сети  $S_M$ .

Пусть  $Z$  — концевая змея скелета  $S$ , и  $Z_M$  — соответствующая  $Z$  подсеть в  $S_M$ . Тогда, по определению,  $Z$  состоит не менее чем из двух ячеек. Пусть  $a$  — концевое ребро из  $Z_M$ ,  $b$  и  $c$  — отростки из  $Z_M$ , соответствующие отросткам двойственного графа скелета  $S$ , лежащим в концевой и смежной с ней ячейках соответственно.

Пусть  $A$ ,  $B$  и  $C$  — граничные вершины сети  $S_M$ , инцидентные ребрам  $a$ ,  $b$  и  $c$  соответственно. Продолжим отросток  $b$  за инцидентную ему точку Штейнера. Очевидно, это продолжение пересекает окружность  $S^1$  в некоторой внутренней точке  $D$  меньшей дуги между  $A$  и  $C$ . Выпустим из центра  $O$  окружности  $S^1$  луч  $l$ , перпендикулярный хорде  $BD$  и ее пересекающий. По определению, направление луча  $l$  совпадает с направлением концевой змеи  $Z$ . Пусть  $E$  — точка пересечения луча  $l$  с окружностью  $S^1$ . Ясно, что величина меньшей дуги между  $A$  и  $E$  строго меньше  $\alpha$ , где  $\alpha$ , как и выше, равно  $\pi/n$ .

Пусть  $Z_i$  и  $Z_j$  — концевые змеи скелета  $S$ , а  $K_i$  и  $K_j$  — вершины  $n$ -угольника  $P$ , в которые приходят концевые ребра из  $S_M$ , соответствующие концевым ребрам из  $Z_i$  и  $Z_j$ . Тогда угол между направлениями концевых змей  $Z_i$  и  $Z_j$  кратен  $\pi/3$ . Пусть меньший из углов между направлениями  $Z_i$  и  $Z_j$  равен  $l\pi/3$ . Тогда, из сказанного выше следует, что угловое расстояние между  $K_i$  и  $K_j$  отличается от  $l\pi/3$  меньше чем на  $2\alpha$ . Иными словами,

$$\left| k \frac{2\pi}{n} - l \frac{\pi}{3} \right| < 2 \frac{\pi}{n},$$

откуда, сокращая на  $2\pi/n$ , завершаем доказательство предложения.

**Замечание.** На геометрическом языке, предложение 3.6 может быть сформулирована так: концевые вершины правильной минимальной реализации скелета из  $\mathcal{WP}_3^2$  отстоят от вершин некоторого правильного шестиугольника, вписанного в окружность  $S^1$ , на угловое расстояние, строго меньшее  $\alpha$ .

## 4.2 Устройство концевых линейных участков

Оказывается, из условия существования правильной минимальной реализации двойственного графа скелета  $S$  из  $\mathcal{WP}_3^2$  вытекает, что концевые линейные участки скелета  $S$  устроены наиболее простым образом.

Пусть, как и выше,  $S$  — скелет, для которого существует  $RM$ -реализация  $S_M$  на правильном  $n$ -угольнике  $P$ . Пусть  $Q$  — некоторый концевой линейный участок скелета  $S$ , и  $Z$  — концевая змея из  $Q$ . Обозначим через  $Z_M$  подсеть в  $S_M$ , соответствующую концевой змее  $Z$ , и пусть  $A$  — вершина  $n$ -угольника, в которую приходит концевое ребро  $a$  змеи  $Z_M$ . Рассмотрим дождь  $R$ , порожденный змеей  $Z_M$ , и ориентируем его в направлении отростка из  $Z_M$ , смежного с  $a$ , предполагая, что этот отросток ориентирован от точки Штейнера. Расширим дождь  $R$  до сонаправленного с ним дождя, проходящего через все множество вершин многоугольника  $P$ . Обозначим через  $\Phi_Z$  содержащий этот расширенный дождь допустимый угол. Допустимый угол  $\Phi_Z$  и характеристический угол  $U(A, \Phi_Z)$  будем называть соответственно *допустимым углом* и *характеристическим углом концевой змеи  $Z$* .

**Предложение 3.7** *Все концевые линейные участки скелета  $S$  — змеи как линейные участки.*

**Доказательство.** Пусть  $n \leq 5$ . Тогда предложение очевидно. Если  $n = 6$ , то, очевидно, существует ровно два линейных скелета, один из которых змея, а другой — лестница, причем непосредственно проверяется, что лестница не имеет  $RM$ -реализации. Поэтому всюду ниже будем предполагать, что  $n \geq 7$ .

Докажем предложение от противного. Пусть существует такой концевой линейный участок  $Q$ , чья концевая змея  $Z$  не совпадает со всем  $Q$ . Пусть  $Q_M$  и  $Z_M$  — подсети в  $S_M$ , соответствующие  $Q$  и  $Z$ . Обозначим через  $A$  вершину  $n$ -угольника  $P$ , в которую приходит концевое ребро из  $Z_M$ . Будем, как и выше, считать, что координаты вершины  $A$  равны  $(-1, 0)$ , а допустимый угол  $\Phi_Z$  концевой змеи  $Z$  такой же, как и в доказательстве предложения 3.4. Отметим, что в этих предположениях, характеристический угол  $U(A, \Phi_Z)$  ограничен лучами  $u_E$  и  $u_O$ , аргумент первого из которых равен  $\pi/6$ , а второго — равен  $-(\pi/6 + \alpha)$ . Пусть  $U_E$  и  $U_O$  — точки пересечения лучей  $u_E$  и  $u_O$  с  $S^1$  соответственно.

Пусть  $\Delta$  — смежная с  $Z$  ячейка из  $Q$ . Обозначим через  $b$  реализацию единственного граничного ребра из двойственного графа  $\Gamma_S$ , лежащего в ячейке  $\Delta$ . Тогда, как легко видеть,  $b$  целиком содержится в характеристическом угле  $U(A, \Phi_Z)$  концевой змеи  $Z$ .

Пусть  $B$  — вершина из  $P$ , в которую приходит ребро  $b$ . Обозначим через  $\delta$  внутренность меньшей дуги окружности  $S^1$  между  $A$  и  $B$ . Ясно, что один из лучей, ограничивающих угол  $U(A, \Phi_Z)$ , пересекает  $\delta$ .

Пусть этот луч — луч  $u_E$ . Тогда, как легко видеть, змея  $Z_M$  затягивает все вершины многоугольника  $P$ , лежащие вне (открытого) угла  $U(A, \Phi_Z)$ . Если же этот луч — луч  $u_O$ , то змея  $Z_M$  затягивает все вершины многоугольника  $P$ , лежащие вне угла  $U(A, \Phi_Z)$ , кроме, быть может, одной. Нетрудно проверить, что вне угла  $U(A, \Phi_Z)$  лежит ровно  $2\lfloor n/3 \rfloor$  вершин из  $P$ . Итак, имеет место следующая лемма.

**Лемма 3.10** *В сделанных выше предположениях, концевая змея  $Z_M$  затягивает по крайней мере  $2\lfloor n/3 \rfloor - 1$  последовательных вершин многоугольника  $P$  в канонической нумерации, порожденной дождями из  $\Phi_Z$ .*

Рассмотрим, где может располагаться соседний с  $Q$  концевой линейный участок  $Q'$  скелета  $S$ . По предложению 3.6, концевое ребро из минимальной реализации  $Q'_M$  концевой линейного участка  $Q'$  приходит в вершину  $A'$  многоугольника  $P$ , такую что число сторон  $k$  многоугольника  $P$  между  $A$  и  $A'$  удовлетворяет неравенству  $|k - nl/6| < 1$  для некоторого  $l = 1, 2, 3$ . Так как  $Q'$  — концевой линейный участок, он состоит по меньшей мере из двух ячеек. Поэтому внутри меньшей дуги между  $A$  и  $A'$  лежит по крайней мере одна вершина  $X$ , затягиваемая концевым линейным участком  $Q'_M$ .

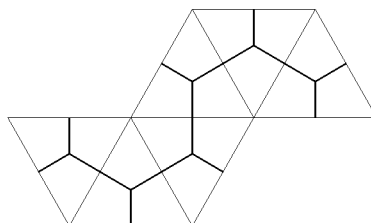
Предположим, что  $l$  равно 1. Тогда между  $A$  и  $A'$  содержится не более чем  $\lfloor n/6 \rfloor + 1$  сторон многоугольника  $P$ , поэтому между  $A$  и  $X$  — не более  $\lfloor n/6 \rfloor$  сторон. Но на меньшей дуге между  $A$  и  $U_E$  все вершины, за исключением, возможно, последней, затянуты концевой змеей  $Z_M$ , поэтому между  $A$  и последней затянутой  $Z_M$  вершиной находится не менее  $\lfloor n/3 \rfloor - 1$  сторон из  $P$ . Далее, все вершины из  $P$ , лежащие на меньшей дуге между  $A$  и  $U_O$ , затянуты  $Z_M$ , поэтому на этой дуге между  $A$  и последней затянутой  $Z_M$  вершиной находится также не менее  $\lfloor n/3 \rfloor - 1$  сторон из  $P$ .

Так как  $\lfloor n/6 \rfloor \leq \lfloor n/3 \rfloor - 1$  при  $n > 6$ , то вершина  $X$  попадает во множество вершин, затянутых концевой змеей  $Z_M$ . Противоречие. Поэтому  $l > 1$ .

Пусть теперь  $l = 2$ . Тогда, между  $A$  и  $X$  содержится не более чем  $\lfloor n/3 \rfloor$  сторон многоугольника  $P$ . Поэтому, рассуждая так же, как в случае  $l = 1$ , обнаружим, что между последней вершиной, затянутой  $Z_M$ , и  $A'$  может находиться не более одной вершины  $X$ , затянутой концевым линейным участком  $Q'_M$ .

Рассмотрим линейный подпаркет  $L$  в  $S$ , содержащий концевые ячейки участков  $Q$  и  $Q'$ . Из сказанного выше вытекает, что это — лестница, составленная из двух змей: змеи  $Z$  и змеи  $Z'$ , причем  $Z'$  состоит не более чем из трех ячеек.

Предположим, что скелет  $S$  имеет ячейки ветвления. Тогда одна из них должна, очевидно, содержаться в  $L$ . Но в  $Z$  она содержаться не может по условию (напомним, что  $Z$  — концевая змея), с ячейкой  $\Delta$  она также не может совпадать, так как иначе концевой линейный участок  $Q$  — змея. Поэтому, ячейка ветвления совпадает с одной из двух оставшихся ячеек из  $Z'$ . Однако, этого также не может быть, так как, с одной стороны,

Рис. 3.7: Этот скелет не имеет  $RM$ -реализации

ячейка ветвления не может быть крайней, а, с другой стороны, не может примыкать к крайней ячейке (иначе эта крайняя ячейка — нарост). Полученное противоречие показывает, что скелет  $S$  не может содержать ячеек ветвления. Поэтому  $S$  линейен.

Итак, показано, что при  $l = 1$  или  $2$  скелет  $S$  не может содержать ячеек ветвления. Однако, если  $S$  содержит ячейку ветвления, то у него существует концевой линейный участок  $Q'$ , для которого  $l < 3$ . Таким образом, предложение доказано для нелинейных скелетов  $S$ .

Пусть теперь  $S$  — линейный паркет. Тогда или  $l = 2$ , и  $S$  — лестница, составленная из двух змей, одна из которых состоит не более чем из трех ячеек, или  $l = 3$ . Рассмотрим первый случай. Выясним, при каких  $n$  такое возможно. По лемме 3.10, змея  $Z_M$  затягивает не менее  $2\lfloor n/3 \rfloor - 1$  вершин многоугольника, поэтому, оставшиеся  $n - 2\lfloor n/3 \rfloor + 1$  вершин затягиваются не более чем четырьмя граничными ребрами змеи  $Z'$ . Следовательно,  $n - 2\lfloor n/3 \rfloor + 1 \leq 4$ . При  $n > 6$  решениями этого неравенства являются 7 и 9. Используя метод Мелзака, непосредственно проверяется, что эти лестницы также не имеют  $RM$ -реализации.

Нам осталось рассмотреть случай  $l = 3$ . Поскольку оба концевых линейных участка не являющегося змеей линейного скелета  $S$  также не являются змеями, их концевые змеи, по лемме 3.10, вместе затягивают по крайней мере  $4\lfloor n/3 \rfloor - 2$  вершины многоугольника. Кроме того, из геометрии линейных скелетов очевидно, что  $S$  имеет по крайней мере две ячейки, не принадлежащие концевым змеям. Выясним, при каких  $n$  это возможно. Из сказанного выше вытекает следующее неравенство:  $4\lfloor n/3 \rfloor \leq n$ . При  $n > 6$  это неравенство имеет единственное решение  $n = 8$ . С точностью до изометрии, существует ровно один такой линейный скелет (см. рис 3.7). Непосредственно проверяется, что он не имеет  $RM$ -реализации. Предложение полностью доказано.

Из предложения 3.7 и предложения 3.4 непосредственно вытекает полное описание всех линейных скелетов, имеющих  $RM$ -реализацию.

**Предложение 3.8** *Линейный скелет имеет  $RM$ -реализацию тогда и только тогда, когда он является змеей.*

### 4.3 Устройство боковин

Отметим, что предложения 3.6 и 3.7 задают определенные ограничения на длины боковин скелетов, имеющих  $RM$ -реализацию. В дальнейшем, нам понадобится следующее несложное утверждение.

**Утверждение 3.6** *Пусть  $L$  — линейный скелет, концевые змеи которого параллельны, и пусть  $B_1$  и  $B_2$  — его боковины. Тогда число ребер контура скелета  $L$ , входящих в  $B_1$ , отличается от числа ребер, входящих в  $B_2$ , не более чем на 1.*

Из утверждения 3.6 вытекает следующее предложение.

**Предложение 3.9** *Пусть  $S$  — произвольный скелет из  $WP_2$ , имеющий хотя бы одну ячейку ветвления. Предположим, что среди концевых змей скелета  $S$  имеются две, скажем,  $Z_1$  и  $Z_2$ , противоположного направления. Пусть  $L$  — линейный подпаркет в  $S$ , содержащий  $Z_1$  и  $Z_2$ . Предположим, что одна из боковин паркета  $L$  является боковиной скелета  $S$ . Тогда  $S$  не имеет  $RM$ -реализации.*

**Доказательство.** Предположим противное, и пусть  $\Gamma$  — произвольная  $RM$ -реализация скелета  $S$  на правильном  $n$ -угольнике  $P$ , вписанном в единичную окружность  $S^1$ . Пусть  $K_1$  и  $K_2$  — те вершины многоугольника  $P$ , из которых выходят реализации концевых змей  $Z_1$  и  $Z_2$  соответственно, и пусть  $a_i$  — концевое ребро контура скелета  $S$ , принадлежащее  $Z_i$ . Выбросим из контура скелета  $S$  ребра  $a_i$ . При этом контур распадется на две компоненты, одна из которых, скажем  $B$ , совпадает с боковиной линейного паркета  $L$ . Вторую компоненту обозначим через  $C$ . Обозначим также через  $B'$  боковину паркета  $L$ , отличную от  $B$ .

Из предложения 3.6 вытекает, что количества вершин многоугольника  $P$ , лежащих на дугах окружности  $S^1$ , отсекаемых вершинами  $K_1$  и  $K_2$ , отличаются друг от друга не более чем на 1. Поэтому, не более чем на 1 отличаются и количества ребер ломаных  $B$  и  $C$ . Далее, в силу утверждения 3.6, количества ребер в боковинах линейного паркета  $L$  отличаются друг от друга не более чем на 1. С другой стороны, так как каждый концевой линейный участок содержит не менее трех граничных ребер, то в ломаной  $C$  содержится не менее чем на  $2(k-2)$  ребер больше, чем в ломаной  $B'$ , где  $k$  — число концевых линейных участков скелета  $S$ . Поэтому, ломаная  $C$  содержит по крайней мере на  $2(k-2) - 1$  ребер больше, чем ломаная  $B$ . Таким образом,  $2(k-2) - 1 \leq 1$ , откуда  $k \leq 3$ .

Осталось рассмотреть случай  $k = 3$ . По предложению 3.7, концевые линейные участки скелета  $S$  являются змеями, поэтому, очевидно, паркет

$L$  является змеей. Пусть  $\Delta$  — единственная ячейка ветвления скелета  $S$ , и  $e$  — то ребро ячейки  $\Delta$ , которое лежит на контуре скелета  $L$ . Обозначим через  $e_1$  и  $e_2$  смежные с  $e$  ребра контура скелета  $L$ . Ясно, что  $e_1$ ,  $e$  и  $e_2$  лежат на одной боковине скелета  $L$ . Обозначим через  $E_1$  и  $E_2$  те вершины многоугольника  $P$ , в которые приходят реализации отростков, соответствующих ребрам  $e_1$  и  $e_2$ .

Обозначим через  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  ячейки из  $L$ , примыкающие к  $\Delta$ , и пусть  $f_1$  и  $f_2$  — ребра этих ячеек, лежащие на контуре паркета  $L$ . Очевидно, что  $f_1$  и  $f_2$  — соседние ребра боковины паркета  $S$ . Обозначим через  $F_1$  и  $F_2$  те вершины многоугольника  $P$ , в которые приходят реализации отростков, соответствующих ребрам  $f_1$  и  $f_2$ . Кроме того, пусть  $B_1$  — соседняя с  $F_1$  вершина многоугольника  $P$ , отличная от  $F_2$ , а  $B_2$  — соседняя с  $F_2$  вершина из  $P$ , отличная от  $F_1$ .

Рассмотрим дождь, порожденный реализацией концевой змеи  $Z_i$ , и расширим его до дождя  $R_i$ , проходящего через множество всех вершин многоугольника  $P$ . Очевидно, что  $R_1$  совпадает с  $R_2$ . Обозначим этот дождь через  $R$ . Выберем одно из двух направлений распространения дождя  $R$ , и пусть  $R = \{r_i\}$ . Ясно, что прямые дождя  $R$ , проходящие через точки  $B_i$ ,  $E_i$  и  $F_i$ , имеют последовательные номера. Более того, вершины  $F_1$  и  $F_2$  многоугольника  $P$  являются соседними вершинами, и ни одна из них не является концевой вершиной для реализации змеи  $L$ . Поэтому, между прямыми дождя  $R$ , проходящими через  $F_1$  и  $F_2$ , лежит ровно одна прямая дождя  $R$ . Отсюда вытекает, что на меньшей дуге окружности  $S_1$ , ограниченной точками  $E_1$  и  $E_2$ , лежит ровно одна вершина из  $P$ . Поэтому, концевой линейный участок, выходящий с ребра  $e$ , затягивает ровно одну вершину многоугольника, что невозможно.

Из предложения 3.9, 3.6 и 3.7 непосредственно получаем.

**Следствие 3.6** *Скелеты, направления концевых линейных участков которых приведены на рис. 3.8, не имеют  $RM$ -реализации. В частности, среди скелетов с тремя концевыми линейными участками,  $RM$ -реализацию могут иметь только те, у которых углы между направлениями концевых линейных участков попарно равны и равны  $120^\circ$ .*

**Следствие 3.7** *Пусть  $S$  — скелет, имеющий  $RM$ -реализацию. Тогда его концевые линейные участки — змеи, и, в зависимости от их направлений, боковины скелета  $S$  могут быть одного из следующих 43 типов, приведенных в таблице 3.1.*

Таблица 3.1			
Боковины скелетов, допускающих $RM$ -реализацию			
$N$	Направления	$n$	Длины боковин
2	—————	$2k$	$(k - 1, k - 1)$
		$2k + 1$	$(k, k - 1)$








Таблица 3.1				
Боковины скелетов, допускающих $RM$ -реализацию				
3		$3k$ $(k-1, k-1, k-1)$		
		$3k+1$ $(k, k-1, k-1)$		
		$3k+2$ $(k, k, k-1)$		
4		$6k$ $(2k-1, k-1, k-1, 2k-1)$		
		$6k+1$ $(2k-1, k, k-1, 2k-1)$ $(2k, k-1, k-1, 2k-1)$		
		$6k+2$ $(2k-1, k, k-1, 2k)$ $(2k, k-1, k-1, 2k)$		
		$6k+3$ $(2k, k, k-1, 2k)$		
		$6k+4$ $(2k+1, k-1, k, 2k)$ $(2k, k, k, 2k)$		
		$6k+5$ $(2k+1, k, k-1, 2k+1)$ $(2k+1, k, k, 2k)$		
		$6k$ $(k-1, 2k-1, k-1, 2k-1)$		
		$6k+1$ $(k, 2k-1, k-1, 2k-1)$ $(k-1, 2k, k-1, 2k-1)$		
		$6k+2$ $(k, 2k-1, k, 2k-1)$ $(k-1, 2k, k-1, 2k)$		
		$6k+3$ $(k, 2k, k-1, 2k)$		
		$6k+4$ $(k-1, 2k+1, k-1, 2k+1)$ $(k, 2k, k, 2k)$		
		$6k+5$ $(k, 2k+1, k-1, 2k+1)$ $(k, 2k, k, 2k+1)$		
		5		$6k$ $(k-1, k-1, k-1, k-1, 2k-1)$
				$6k+1$ $(k, k-1, k-1, k-1, 2k-1)$ $(k-1, k, k-1, k-1, 2k-1)$ $(k-1, k-1, k-1, k-1, 2k)$
$6k+2$ $(k-1, k-1, k, k-1, 2k)$ $(k, k-1, k-1, k, 2k-1)$				
$6k+3$ $(k, k-1, k, k-1, 2k)$				
$6k+4$ $(k-1, k, k, k-1, 2k+1)$ $(k, k-1, k-1, k, 2k)$				
$6k+5$ $(k, k, k, k-1, 2k+1)$ $(k, k, k-1, k, 2k+1)$ $(k, k, k, k, 2k)$				
6				$6k$ $(k-1, k-1, k-1, k-1, k-1, k-1)$
		$6k+1$ $(k, k-1, k-1, k-1, k-1, k-1)$		
		$6k+2$ $(k, k-1, k-1, k, k-1, k-1)$		
		$6k+3$ $(k, k-1, k, k-1, k, k-1)$		
		$6k+4$ $(k-1, k, k, k-1, k, k)$		
		$6k+5$ $(k-1, k, k, k, k, k)$		



Рис. 3.8: Скелеты с такими направлениями концевых линейных участков не имеют  $RM$ -реализации

**Определение.** Скелет из  $\mathcal{WP}_5$ , все концевые линейные участки которого — змеи, а боковины относятся к одному из 43 типов, приведенных в таблице 3.1, назовем *правильным*.

## 5 Критерий существования $RM$ -реализации для нелинейных скелетов

В настоящем параграфе приводится критерий существования  $RM$ -реализации нелинейных скелетов из  $\mathcal{WP}_5$  на множестве вершин  $\widehat{M}$  правильного многоугольника. (Напомним, что для линейных скелетов такой критерий получен выше, см. предложение 3.8.) В соответствии с этим критерием, проверка существования  $RM$ -реализации скелета  $S$  сводится к построению минимальной реализации скелета  $S'$  — *остова скелета  $S$* , — полученного из  $S$  отрезанием всех его концевых линейных участков, на некотором множестве  $\widehat{M}'$ , полученном из  $\widehat{M}$  каноническим образом. Скелет  $S$  имеет  $RM$ -реализацию если и только если минимальная реализация остова  $S'$  скелета  $S$  на множестве  $\widehat{M}'$  существует и обладает специальными свойствами.

Пусть сначала  $S$  — произвольный паркет из  $\mathcal{WP}_5$ . Обозначим через  $n$  количество ребер контура паркета  $S$ . Рассмотрим произвольный  $n$ -угольник  $P$ , вписанный в единичную окружность  $S^1$  с центром в начале координат, и пусть  $\widehat{M}$ , как обычно, множество его вершин. Ориентируем окружность  $S^1$  и контур паркета  $S$  по часовой стрелке. Эта ориентация задаст нам циклические порядки как на множестве  $\widehat{M}$  вершин многоугольника  $P$ , так и на множестве всех ребер контура паркета  $S$ . Фиксируем некоторое взаимно однозначное соответствие  $\beta$  между этими двумя множествами, сохраняющие циклические порядки. Каждое такое соответствие будем называть *правильным граничным отображением*.

Ясно, что каждая минимальная реализация паркета  $S$  на множестве  $\widehat{M}$ , если таковая существует, задает некоторое правильное граничное отобра-

жение  $\beta$ . Будем говорить, что такая реализация *уважает* правильное граничное отображение  $\beta$ . Кроме того, очевидно, если для некоторого правильного граничного отображения существует уважающая его RM-реализация паркета  $S$ , то такая реализация существует и для любого правильного граничного отображения, заданного на ребрах контура паркета  $S$ .

Пусть теперь  $S$  — нелинейный скелет из  $\mathcal{WP}_3$ , и  $Z$  — его концевая змея. Пусть  $\Gamma_Z$  — двойственный граф змеи  $Z$ , а  $X$  — вершина из  $\Gamma_Z$ , соответствующая концевому ребру  $x$  скелета  $S$ . Обозначим через  $R$  дождь, порожденный  $\Gamma_Z$ , и выберем направление  $n_Z = n(R)$  распространения дождя  $R$  от точки  $X$ . Ориентируем дождь  $R$  в сторону первого отрезка змеи  $\Gamma_Z$ , и пусть  $m_Z$  — направление дождя  $R$ .

Фиксируем некоторое правильное граничное отображение множества ребер контура скелета  $S$  на множество  $\widehat{M}$ , и пусть  $A$  — та вершина из  $\widehat{M}$ , которая соответствует концевому ребру  $x$  контура скелета  $S$ . Обозначим через  $M$  множество  $\widehat{M} \setminus \{A\}$ . Как было отмечено выше, для множества  $\widehat{M}$  существует ровно два хороших  $A$ -допустимых угла. Выберем из них такой угол  $\Phi_Z$ , что для произвольного дождя  $R \in \Phi_Z$ , направление распространения которого направлено внутрь многоугольника  $P$ , а направление задается вектором  $m$ , базисы  $(n(R), m)$  и  $(n_Z, m_Z)$  задают на плоскости одинаковые ориентации.

Итак, если фиксировано некоторое правильное граничное отображение, то для каждой концевой змеи  $Z$  скелета  $S$  каноническим образом строится допустимый угол  $\Phi_Z$ . Допустимый угол  $\Phi_Z$  будем называть *допустимым углом змеи  $Z$* , а соответствующий характеристический угол  $U(A, \Phi_Z)$  — *характеристическим углом змеи  $Z$* .

Обозначим через  $k$  количество ячеек в змее  $Z$ . Назовем *главным характеристическим треугольником змеи  $Z$*  определенный выше  $k$ -ый характеристический треугольник  $H_{k-1}M_kH_k$  для  $A$ -допустимого угла  $\Phi_Z$ , и *характеристической дугой змеи  $Z$*  —  $k$ -ую характеристическую дугу  $D_k(\Phi_Z) = P_{k-1}P_k$ . Допустимый угол  $P_{k-1}H_kP_k$  с вершиной в  $H_k$  назовем  *$H$ -допустимым углом змеи  $Z$*  (см. рис. 3.9), а вершину  $H_k$  — *главной вершиной характеристического треугольника  $H_{k-1}M_kH_k$* .

Для дальнейшего нам понадобится следующее утверждение.

**Утверждение 3.7** Пусть  $S$  — произвольный нелинейный скелет из  $\mathcal{WP}_3$ , имеющий RM-реализацию на правильном  $n$ -угольнике  $P$ . Тогда каждый его концевой линейный участок-змея  $Z$  затягивает лишь те вершины, которые лежат вне характеристического угла змеи  $Z$ .

**Доказательство.** Введем на множестве  $\widehat{M}$  канонический порядок, заданный на множестве  $\widehat{M}$  дождями из  $\Phi_Z$ , и пусть, как обычно,  $\widehat{M} = \{M_0 = A, M_1, \dots, M_{n-1}\}$ .

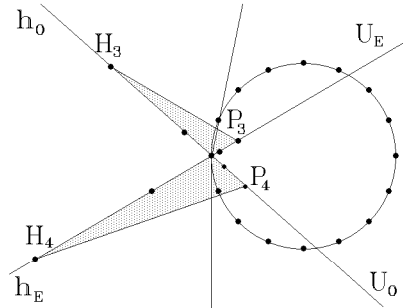


Рис. 3.9:  $H$ -допустимые углы

Так как скелет  $S$  — нелинеен, то для любого его концевой линейного участка  $Z$  существует соседний с ним концевой линейный участок  $Z'$ , составляющий с  $Z$  угол меньший или равный  $120^\circ$ . Пусть  $K$  и  $K'$  — те вершины многоугольника  $P$ , в которые приходят концевые ребра реализации змей  $Z$  и  $Z'$  соответственно. По предложению 3.6, на меньшей дуге  $\delta$  между  $K$  и  $K'$  лежит не более  $\lfloor n/3 \rfloor$  вершин из  $P$ . С другой стороны, так как участок  $Z'$  состоит не менее чем из двух ячеек, то на дуге  $\delta$  расположено не менее одной вершины, затянутой участком  $Z'$ , и, значит, не более  $\lfloor n/3 \rfloor - 1$  вершин, затянутых участком  $Z$ . Поэтому, концевой линейный участок  $Z$  затягивает не более чем  $2\lfloor n/3 \rfloor$  последовательных вершин из  $P$ , номер последней из которых не превосходит  $2\lfloor n/3 \rfloor - 1$ .

Для завершения доказательства утверждения осталось вспомнить, что, как было показано выше, первая вершина многоугольника  $P$ , лежащая внутри характеристического угла, имеет номер  $2\lfloor n/3 \rfloor$  в порожденной  $\Phi_Z$  канонической нумерации.

Пусть  $S$  — нелинейный скелет из  $\mathcal{WP}_3^n$ , имеющий  $RM$ -реализацию на правильном  $n$ -угольнике  $P$ , и  $Z$  — некоторый его концевой линейный участок-змея. Тогда из утверждения 3.7 непосредственно вытекает, что змея  $Z$  состоит не более чем из  $2\lfloor n/3 \rfloor - 1$  ячеек.

**Определение.** Нелинейный скелет из  $\mathcal{WP}_3^n$ , все концевые линейные участки которого суть змеи, состоящие не более чем из  $2\lfloor n/3 \rfloor - 1$  ячеек, где  $n$  — число ребер контура скелета  $S$ , назовем *регулярным* скелетом.

Таким образом, скелеты из  $\mathcal{WP}_3^n$ , имеющие  $RM$ -реализацию, являются регулярными. Отметим, что если  $S$  — регулярный скелет, то характеристическая дуга любой его концевой змеи лежит внутри многоугольника  $P$ . Напомним, что каждый скелет из  $\mathcal{WP}_3^n$ , имеющий  $RM$ -реализацию, является также и правильным.

**Утверждение 3.8** *Каждый нелинейный правильный скелет является регулярным.*

**Доказательство.** Пусть  $S$  — правильный скелет, контур которого состоит из  $n$  ребер. Из таблицы 3.1 видно, что каждый концевой линейный участок  $Z$  скелета  $S$  примыкает к такой боковине  $B$  этого скелета, которая состоит не более чем из  $\lfloor n/3 \rfloor$  ребер контура. Так как второй концевой линейный участок скелета, примыкающий к боковине  $B$ , содержит не менее двух ячеек, то пересечение концевого линейного участка  $Z$  с боковиной  $B$  состоит не более чем из  $\lfloor n/3 \rfloor - 1$  ребер, откуда вытекает, что концевой линейный участок  $Z$  имеет не более чем  $2\lfloor n/3 \rfloor - 1$  ячеек, что и требовалось.

Пусть  $Z$  — концевая змея правильного скелета  $S$ , контур которого состоит из  $n$  ребер. Обозначим через  $x$  концевое ребро контура скелета  $S$ , принадлежащее  $Z$ . Пусть задано некоторое правильное граничное отображение  $\beta$  во множество  $\widehat{M}$  вершин правильного  $n$ -угольника  $P$ , вписанного в единичную окружность  $S^1$ , и пусть  $A = \beta(x)$ . Пусть  $Z$  состоит из  $k$  ячеек. Напомним, что  $k \leq 2\lfloor n/3 \rfloor - 1$ . Рассмотрим дугу  $\gamma$  окружности  $S^1$  между  $M_{k-1}$  и  $M_k$ , содержащую точку  $A$ . Обозначим через  $E(A, Z)$  замкнутое подмножество единичного круга, ограниченное дугой  $\gamma$ , отрезками  $P_{k-1}M_{k-1}$  и  $P_kM_k$ , а также характеристической дугой концевой змеи  $Z$ .

**Определение.** Построенную выше замкнутую область  $E(A, Z)$  назовем *концевой областью* концевой змеи  $Z$  с началом в точке  $A$ .

Пусть  $S$  — правильный скелет, и  $Z_1$  и  $Z_2$  — его произвольные концевые змеи. Обозначим через  $x_i$  концевое ребро контура скелета  $S$ , принадлежащее  $Z_i$ . Пусть фиксировано некоторое правильное граничное отображение  $\beta$ .

**Утверждение 3.9** *Концевые области  $E(\beta(x_1), Z_1)$  и  $E(\beta(x_2), Z_2)$ , соответствующие концевым змеям  $Z_i$  правильного скелета  $S$ , не пересекаются.*

**Доказательство.** Обозначим через  $M_0$  вершину  $\beta(x_1)$  правильного  $n$ -угольника  $P$ , т.е. ту вершину из  $P$ , которая соответствует концевому ребру  $x_1$  из  $Z_1$ . Введем на множестве  $\widehat{M}$  вершин многоугольника  $P$  канонический порядок, заданный дождями из допустимого угла змеи  $Z_1$ , и пусть,  $\widehat{M} = \{M_0 = \beta(x_1), M_1, \dots, M_{n-1}\}$ . Пусть  $p$  — длина змеи  $Z_1$  (т.е. количество ячеек, составляющих  $Z_1$ ). Рассмотрим концевую область  $E(M_0, Z_1)$ . Обозначим через  $b_1$  ту часть границы концевой области, которая не лежит на окружности  $S^1$ . По предложению 3.5,  $b_1$  целиком лежит в угле  $M_{p-1}M_pM_{p+1}$ . Напомним, что при этом все вершины  $n$ -угольника  $P$ , лежащие на замкнутой дуге  $M_{p-1}M_0M_p$ , должны соответствовать граничным ребрам концевой змеи  $Z_1$ .

Обозначим через  $N_0$  вершину  $\beta(x_2)$  многоугольника  $P$ , т.е. ту вершину из  $P$ , которая соответствует концевому ребру  $x_2$  из  $Z_2$ . Введем на

множестве  $\widehat{M}$  вершин многоугольника  $P$  еще один канонический порядок, заданный дождями из допустимого угла змеи  $Z_2$ , и пусть,  $\widehat{M} = \{N_0 = \beta(x_2), N_1, \dots, N_{n-1}\}$ . Пусть  $q$  — длина концевой змеи  $Z_2$ .

Очевидно, дуги  $M_{p-1}M_0M_p$  и  $N_{q-1}N_0N_q$  не пересекаются. Из сказанного выше вытекает, что если углы  $M_{p-1}M_pM_{p+1}$  и  $N_{q-1}N_qN_{q+1}$  не пересекаются, то и концевые области  $E(M_0, Z_1)$  и  $E(N_0, Z_2)$  не пересекаются. Пересекаться же эти углы могут лишь если  $M_{p-1} = N_{q+1}$ , и  $M_{p+1} = N_{q-1}$ . Последнее, как не трудно видеть, означает, что предпоследние, если считать от концевых ячеек, отростки концевых линейных участков  $Z_1$  и  $Z_2$  приходят в соседние вершины правильного многоугольника — в точки  $M_{p-1}$  и  $N_{q-1}$ . Из геометрии паркетов легко видеть, что такое возможно только если концевые линейные участки-змеи  $Z_1$  и  $Z_2$  инцидентны одной и той же внутренней ячейке, а направления этих концевых линейных участков составляют угол в  $60^\circ$ . Разберем этот последний случай.

Поскольку угол между направлениями концевых линейных участков  $Z_1$  и  $Z_2$  равен  $60^\circ$ , угол между отростком концевого линейного участка  $Z_1$ , выходящим из  $M_{p-1}$  и ориентированным к точке Штейнера, и отростком концевого линейного участка  $Z_2$ , выходящим из  $N_{q-1}$  и ориентированным к точке Штейнера, составляет  $120^\circ$ . Поэтому угол между отрезками  $M_pM_{p-1}$  и  $M_{p-1}N_q$ , и угол между отрезками  $M_pM_{p+1}$  и  $M_{p+1}N_q$  не меньше чем  $120^\circ - 2\alpha$ , где  $\alpha = \pi/n$ .

Далее, пусть  $D_p^1$  обозначает характеристическую дугу концевой змеи  $Z_1$ , а  $D_q^2$  — характеристическую дугу концевой змеи  $Z_2$ . Дуга  $D_p^1$  пересекается с отрезком  $M_{p-1}M_p$ , поэтому имеет смысл говорить об угле между этим отрезком и дугой  $D_p^1$ . Покажем, что угол между дугой  $D_p^1$  и отрезком  $M_{p-1}M_p$  не превосходит  $\pi/3$ . Действительно, характеристическая дуга  $D_p^1$  — это дуга окружности, описанной вокруг главного характеристического треугольника  $H_{p-1}M_pH_p$  концевой змеи  $Z_1$ . Угол между  $D_p^1$  и  $M_pM_{p-1}$  равен, очевидно, половине угловой величины дуги  $\bar{D}_p^1$ , отсеченной от этой окружности отрезком  $M_{p-1}M_p$ , и содержащей  $D_p^1$ . Но дуга  $\bar{D}_p^1$  ограничена точкой  $M_p$  и не содержит других вершин правильного треугольника  $H_{p-1}M_pH_p$ , поэтому угловая величина дуги  $\bar{D}_p^1$  меньше  $2\pi/3$ , что и требовалось.

Аналогично, угол между характеристической дугой  $D_q^2$  концевой змеи  $Z_2$  и отрезком  $N_{q-1}N_q$  также не превосходит  $\pi/3$ .

Выпустим теперь из точки  $M_{p-1}$  внутрь угла  $M_pM_{p-1}N_q$  луч  $r$  под углом  $\pi/3$  к вектору  $M_{p-1}M_p$ , и пусть  $l$  — прямая, содержащая  $r$ . Из сказанного выше вытекает, что концевая область  $E(M_0, Z_1)$  целиком лежит в полуплоскости, ограниченной прямой  $l$  и содержащей  $M_0$  (в этой полуплоскости лежит отрезок  $M_{p-1}M_p$  и дуга  $D_p^1$ ). Концевая область  $E(N_0, Z_2)$ , в свою очередь, целиком лежит во второй полуплоскости, ограниченной прямой  $l$  (в этой полуплоскости лежат отрезки  $N_{q+1}N_q$  и  $N_qN_{q-1}$ ). Поэтому концевые области  $E(M_0, Z_1)$  и  $E(N_0, Z_2)$  не пересекаются. Лемма доказана.

Легко видеть, что если у деревянного скелета  $S$  существует  $RM$ -реализация, то все граничные ребра реализации каждой концевой змеи  $Z$  лежат в концевой области, соответствующей  $Z$ . Более того, все точки Штейнера, не принадлежащие реализации концевой линейного участка  $Z$ , лежат вне концевой области для  $Z$ .

**Определение.** Область, полученная после выбрасывания из единичного круга, ограниченного окружностью  $S^1$ , всех концевых областей, соответствующих концевым змеям некоторого правильного скелета  $S$ , называется *характеристической областью* и обозначается через  $W(S)$ .

Итак, все точки Штейнера произвольной  $RM$ -реализации  $\Gamma$  скелета  $S$  из  $WP_3$ , не принадлежащие реализациям концевых линейных участков скелета  $S$ , находятся внутри характеристической области этого скелета.

Пусть  $Z$  — некоторый концевой линейный участок-змея скелета  $S$ , и пусть  $\Delta$  — единственная ячейка ветвления, примыкающая к  $Z$ . Обозначим через  $X$  вершину из  $\Gamma$ , соответствующую точке Штейнера из  $\Delta$ , а через  $H$  — главную вершину главного характеристического треугольника концевой линейного участка-змеи  $Z$ . Обозначим через  $Y$  точку Штейнера из  $\Gamma$ , лежащую на характеристической дуге змеи  $Z$ .

В силу утверждения 3.5, отрезок  $YX$  лежит на луче  $HY$ . Кроме того, отрезок  $HY$  пересекает лишь ту часть  $\Gamma(Z)$  сети  $\Gamma$ , которая соответствует змее  $Z$ . Поэтому, заменив в сети  $\Gamma$  ее подсеть  $\Gamma(Z)$  на отрезок  $HX$ , мы получим вложенную минимальную сеть. Множество граничных точек этой сети получается из множества вершин многоугольника  $P$  заменой множества  $\widehat{M}_Z$  вершин, соответствующих змее  $Z$ , на вершину  $H$ .

Повторим описанную операцию для каждого концевой линейного участка  $Z$  скелета  $S$ . В результате, получим минимальную сеть  $\Gamma'$ , затягивающую множество  $\widehat{M}'$ , полученное из множества  $\widehat{M}$  вершин многоугольника  $P$  заменой каждого его подмножества  $\widehat{M}_Z$ , затугого  $Z$ , на главную вершину главного характеристического треугольника змеи  $Z$ . Легко видеть, что сеть  $\Gamma'$  эквивалентна двойственному графу паркета  $S'$ , полученного из скелета  $S$  выбрасыванием всех концевых линейных участков этого скелета.

Ребра контура скелета  $S'$ , по которым к  $S'$  крепятся концевые линейные участки скелета  $S$ , назовем *отмеченными*. Ясно, что правильное граничное отображение  $\beta$  каноническим образом порождает граничное отображение  $\beta'$ , ставящее в соответствие каждому отмеченному ребру контура  $K'$  скелета  $S'$  главную вершину главного характеристического треугольника соответствующего концевой линейного участка-змеи, и совпадающее с  $\beta$  на всех неотмеченных ребрах из  $K'$ .

**Определение.** Скелет  $S'$  называется *остовом скелета  $S$* , а множество  $\widehat{M}'$  — *остовом множества  $\widehat{M}$* , соответствующим скелету  $S$  и граничному отображению  $\beta$ .

Непосредственно из построений настоящего параграфа вытекает следующее важное предложение.

**Предложение 3.10 (Критерий  $RM$ -реализации скелетов)** *Правильный скелет  $S$  имеет  $RM$ -реализацию на множестве  $\widehat{M}$  вершин правильного многоугольника если и только если остов  $S'$  скелета  $S$  имеет минимальную реализацию  $\Gamma'$  на соответствующем остове  $\widehat{M}'$  множества  $\widehat{M}$ , уважающую граничное отображение  $\beta'$ , и такую что*

- (1) *граничные ребра сети  $\Gamma'$ , инцидентные главным вершинам  $H_i$  главных характеристических треугольников концевых линейных участков-змей  $Z_i$  скелета  $S$ , лежат внутри допустимых углов с вершинами в  $H_i$ ;*
- (2) *все точки Штейнера сети  $\Gamma'$  лежат внутри характеристической области  $W(S)$ .*

## 6 Правильная минимальная реализация скелетов с тремя концевыми линейными участками

Цель настоящего параграфа — получить полное описание скелетов с тремя концевыми линейными участками, имеющих  $RM$ -реализацию. Для этого мы воспользуемся техникой, разработанной выше. Нами будет доказано следующее предложение.

**Предложение 3.11** *Пусть  $S$  — скелет с тремя концевыми линейными участками, имеющий правильную минимальную реализацию на правильном  $n$ -угольнике. Тогда  $n = 6k + 3$ ,  $k \leq 1$ , и для каждого  $k$  существует, с точностью до движения, ровно один такой скелет. Этот скелет является правильным и переходит в себя при повороте плоскости на угол в  $2\pi/3$  вокруг центра единственной его ячейки ветвления. Правильная минимальная реализация скелета  $S$  также переходит в себя при повороте плоскости на  $2\pi/3$  вокруг центра  $n$ -угольника, см. рис. 3.1, справа.*

**Доказательство.** Сначала мы воспользуемся следствием 3.7 для того, чтобы составить полный список возможных длин концевых линейных участков скелета  $S$ .

**Лемма 3.11** *Возможны 20 соотношений на длины концевых линейных участков скелета  $S$ , приведенные в таблице 3.2.*



Таблица 3.2		
Длины концевых линейных участков 3-скелетов, допускающих $RM$ -реализацию		
Типы	$n$	Длины
a.	$6k$	$(2k - 1, 2k - 1, 2k - 1)$
b.		$(2k - 1, 2k - 2, 2k)$
a.	$6k+3$	$(2k, 2k, 2k)$
b.		$(2k, 2k - 1, 2k + 1)$
a.	$6k+1$	$(2k, 2k, 2k - 2)$
b.		$(2k - 1, 2k + 1, 2k - 2)$
c.		$(2k - 1, 2k - 1, 2k)$
d.		$(2k - 3, 2k + 1, 2k)$
a.	$6k+5$	$(2k, 2k, 2k + 2)$
b.		$(2k - 1, 2k + 1, 2k + 2)$
c.		$(2k + 1, 2k + 1, 2k)$
d.		$(2k - 1, 2k + 3, 2k)$
a.	$6k+2$	$(2k + 1, 2k - 1, 2k - 1)$
b.		$(2k, 2k, 2k - 1)$
c.		$(2k + 2, 2k - 2, 2k - 1)$
d.		$(2k, 2k - 2, 2k + 1)$
a.	$6k+4$	$(2k + 1, 2k - 1, 2k + 1)$
b.		$(2k, 2k, 2k + 1)$
c.		$(2k + 2, 2k - 2, 2k + 1)$
d.		$(2k, 2k - 1, 2k + 2)$

**Доказательство.** Без ограничения общности, можно считать, что из двух симметричных скелетов, приведенных на рис. 3.10, скелет  $S$  имеет вид первого из них. Пусть  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$  — длина  $i$ -го концевого линейного участка  $Z_i$  скелета  $S$ , т.е. число ячеек, входящих в этот концевой линейный участок. Будем считать, что концевые линейные участки занумерованы по часовой стрелке, и нумерация концевых линейных участков циклическая, т.е. утверждение “ $i$  и  $j$  — последовательные числа” означает, что пара  $(i, j)$  может быть одной из следующих трех пар:  $(1, 2)$ ,  $(2, 3)$  или  $(3, 1)$ .

Будем называть *длиной боковины* скелета  $S$  число ребер контура этого скелета, входящих в данную боковину. Обозначим через  $k_{ij}$  длину боковины, пересекающейся с последовательными концевыми линейными участками  $Z_i$  и  $Z_j$ . Тогда, как легко проверить,

$$k_{ij} = [a_i/2] + [a_j/2] + \epsilon(a_i),$$

где  $\epsilon(a_i)$  равно 0, если  $a_i$  — четное, и 1 в противном случае. Воспользовавшись очевидным соотношением  $a_i = 2[a_i/2] + \epsilon(a_i)$ , выразим  $a_i$  через  $k_{jk}$ . Для этого достаточно сложить два из приведенных только что уравнений

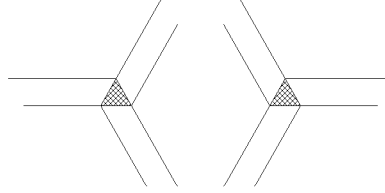


Рис. 3.10: Два типа симметричных скелетов в трех концевыми линейными участками-змеями

и вычесть из полученной суммы третье. В результате, имеем:

$$\begin{aligned} a_1 &= k_{31} + k_{12} - k_{23} - e(a_3) + e(a_2), \\ a_2 &= k_{12} + k_{23} - k_{31} - e(a_1) + e(a_3), \\ a_3 &= k_{23} + k_{31} - k_{12} - e(a_2) + e(a_1). \end{aligned}$$

Из таблицы 3.1 видно, что имеется три варианта длин  $k_{ij}$  боковин скелета  $S$  в зависимости от числа  $n$ . Разберем, для примера, случай  $n = 6k$ . Тогда, из таблицы 3.1 вытекает, что все  $k_{ij}$  равны между собой и равны  $2k - 1$ . Имеем:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2k - 1 - e(a_3) + e(a_2), \\ a_2 &= 2k - 1 - e(a_1) + e(a_3), \\ a_3 &= 2k - 1 - e(a_2) + e(a_1). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь разные случаи четности концевых линейных участков. Заметим, что  $a_1 + a_2 + a_3 = 6k - 3$ , т.е. нечетное число, поэтому из трех концевых линейных участков или один, или все три имеют нечетную длину. Пусть сначала длины всех трех концевых линейных участков нечетны. Тогда  $a_i = 2k - 1$ . Пусть теперь длина одного концевого линейного участка нечетна, а длины двух других — четны. С точностью до поворота, можно считать, что  $a_1$  — нечетно. Тогда

$$a_1 = 2k - 1, \quad a_2 = 2k - 2, \quad a_3 = 2k.$$

Остальные случаи разбираются аналогично. Результаты вычислений приведены в таблице 3.2.

Проверим теперь, в каких из этих 20 случаев скелет  $S$  в действительности имеет  $RM$ -реализацию. Для этого воспользуемся предложением 3.10. Фиксируем некоторое правильное граничное отображение  $\beta$ . В соответствии с этим предложением, необходимо вначале построить остов  $S'$  скелета  $S$ . Ясно, что в каждом из 20 случаев остов  $S'$  состоит из единственной ячейки ветвления, каждое ребро которой является отмеченным.

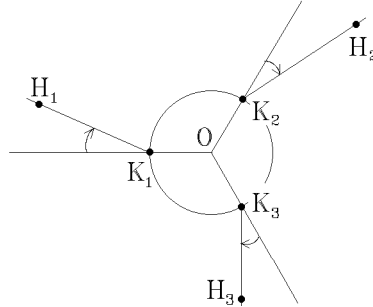


Рис. 3.11: Геометрия лучей  $OK_i$  и  $K_iH_i$

После этого, нужно построить соответствующий скелету  $S$  остов  $\widehat{M}'$  множества вершин  $\widehat{M}$  правильного многоугольника  $P$ . Остов  $\widehat{M}'$ , очевидно, представляет собой вершины треугольника  $H_1H_2H_3$  и состоит из главных вершин  $H_i$  трех главных характеристических треугольников концевых линейных участков-змей  $Z_i$  скелета  $S$ . Далее, если вершины треугольника  $\widehat{M}'$  затягиваются невырожденной минимальной сетью  $\Gamma'$  (она, очевидно, эквивалентна двойственному графу остова  $S'$ ), то нужно проверить, лежат ли ребра этой сети в  $H$ -допустимых углах концевых линейных участков-змей  $Z_i$ , и попадает ли единственная точка Штейнера сети  $\Gamma'$  в характеристическую область  $W(S)$ .

Обозначим через  $K_i$  те вершины  $n$ -угольника  $P$ , которые соответствуют концевым ребрам контура скелета  $S$  при граничном отображении  $\beta$ . Предположим, как всегда, что правильный многоугольник вписан в единичную окружность  $S^1$ , центр которой обозначим через  $O$ .

**Лемма 3.12** Пусть  $\psi_i$  — ориентированный угол между лучом  $OK_i$  и лучом  $K_iH_i$ . Тогда, если скелет  $S$  имеет  $RM$ -реализацию, то все  $\psi_i$  — одного знака, т.е. лучи  $K_iH_i$  повернуты относительно лучей  $OK_i$  в одну и ту же сторону (см. рис. 3.11).

**Доказательство.** Предположим противное. Тогда, как легко видеть, найдутся такие две вершины  $K_i$  и  $K_j$ , что лучи  $K_iH_i$  и  $K_jH_j$  лежат внутри угла  $K_iOK_j$ . Пусть  $\varphi$  — величина угла  $K_iOK_j$ . По определению правильного скелета, на меньшей дуге между вершинами  $K_i$  и  $K_j$  расположено не более чем  $[n/3] + 1$  сторон многоугольника  $P$ , поэтому  $\varphi \leq ([n/3] + 1)2\alpha$ , где  $\alpha$ , как обычно, равен  $\pi/n$ .

Обозначим через  $X$  точку пересечения отличных от  $H_iK_i$  и  $H_jK_j$  сторон  $H$ -допустимых углов змей  $Z_i$  и  $Z_j$ , см. рис. 3.12, и пусть  $\beta$  — величина угла  $H_iXH_j$ . Пусть  $Y$  — точка Штейнера минимальной сети  $\Gamma'$ , затягивающей вершины треугольника  $H_1H_2H_3$ . По предложению 3.10, лучи  $H_iY$  и  $H_jY$  лежат соответственно в углах  $XH_iK_i$  и  $XH_jK_j$  величины  $\alpha$ . Поэтому,

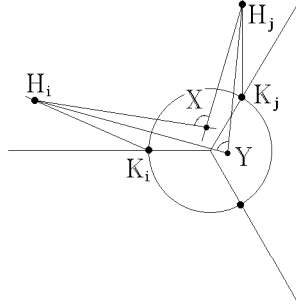


Рис. 3.12: Доказательство леммы 3.12

$\beta > 2\pi/3$ . С другой стороны,  $\beta = \varphi - |\psi_1| - |\psi_2| + 2\alpha$ . Так как  $\psi_i \geq \pi/6$ , имеем:

$$\frac{2\pi}{3} < \beta \leq \left(1 + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) 2\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{3},$$

откуда  $n < 2 + 2\lfloor n/3 \rfloor$ , что невозможно при  $n > 3$ . Лемма доказана.

Вычислим теперь расстояния  $l_i = |K_i H_i|$ . Из предложения 3.5 с помощью непосредственных вычислений получается следующая лемма.

**Лемма 3.13** Пусть змея  $Z_i$  состоит из  $k$  ячеек. Тогда

$$l_i = \begin{cases} \frac{2 \sin^2 p\alpha}{\sin \alpha}, & \text{при } k = 2p - 1, \\ \frac{2 \sin p\alpha \sin(p+1)\alpha}{\sin \alpha}, & \text{при } k = 2p. \end{cases}$$

Пусть, для определенности, окружность  $S^1$  ориентирована против часовой стрелки, концевые линейные участки  $K_i$  занумерованы в соответствие с этой ориентацией, и углы  $\psi_i$  положительны. Построим вне треугольника  $H_1 H_2 H_3$  правильные треугольники  $H_i H_j D_k$ , где индексы  $i, j$  и  $k$  — попарно различны. Для существования  $RM$ -реализации скелета  $S$  необходимо, чтобы отрезки  $H_k D_k$ , на которых лежат ребра сети  $\Gamma'$ , лежали каждый внутри своего допустимых угла с вершиной в  $H_k$ . Если это так, то, как легко понять,

$$[H_k D_k, H_k K_k] > 0, \quad \text{и} \quad [H_k D_k, \mathcal{O}_{-\alpha}(H_k K_k)] < 0,$$

где через  $[a, b]$  обозначена ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на пару векторов  $(a, b)$ , а через  $\mathcal{O}_\alpha$  — поворот на угол  $\alpha$ .

Обозначим через  $\varphi_i$  величину угла  $K_j O K_k$ , где  $i, j$  и  $k$  — попарно различны. Для удобства, воспользуемся комплексной записью. Будем, как и

выше, предполагать, что индексы, принадлежащие множеству  $\{1, 2, 3\}$ , меняются циклически, т.е., например,  $3 + 1 = 1$ . Тогда, как легко видеть,

$$\begin{aligned} H_j &= K_j + l_j K_j e^{i\psi_j}, \\ H_j D_j &= H_{j-2} + (H_{j-1} - H_{j-2})e^{-i\pi/3} = H_{j-2}e^{i\pi/3} + H_{j-1}e^{-i\pi/3}. \end{aligned}$$

Поэтому,

$$\begin{aligned} H_j D_j &= H_{j-2}e^{i\pi/3} + H_{j-1}e^{-i\pi/3} - H_j, \\ H_j K_j &= K_j - H_j. \end{aligned}$$

Выразим  $K_{j-1}$  и  $K_{j+1} = K_{j-2}$  через  $K_j$  и подставим полученные выражения в формулы для  $H_j D_j$  и  $H_j K_j$ . Имеем:

$$\begin{aligned} K_{j-1} &= K_j e^{-i\varphi_{j-2}}, & K_{j-2} &= K_{j+1} = K_j e^{i\varphi_{j-1}} \\ H_j &= K_j \left(1 + l_j e^{i\psi_j}\right), & H_{j-1} &= K_j \left(e^{-i\varphi_{j-2}} + l_{j-1} e^{i(\psi_{j-1} - \varphi_{j-2})}\right), \\ H_{j-2} &= K_j \left(e^{i\varphi_{j-1}} + l_{j-2} e^{i(\psi_{j-2} + \varphi_{j-1})}\right), \end{aligned}$$

откуда,

$$\begin{aligned} H_j D_j &= K_j \left( e^{i(\varphi_{j-1} + \pi/3)} + e^{-i(\varphi_{j-2} + \pi/3)} - 1 + l_{j-2} e^{i(\varphi_{j-1} + \psi_{j-2} + \pi/3)} + \right. \\ &\quad \left. + l_{j-1} e^{-i(\varphi_{j-2} - \psi_{j-1} + \pi/3)} - l_j e^{i\psi_j} \right), \end{aligned}$$

и

$$H_j K_j = -l_j K_j e^{i\psi_j}.$$

Воспользуемся теперь хорошо известным фактом, что ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на пару векторов  $(a, b)$ , в комплексной форме может быть записана так:  $[a, b] = \text{Im}(\bar{a}b)$ , где через  $\bar{a}$  обозначается комплексное число, сопряженное с  $a$ . В результате неравенство  $[H_j D_j, H_j K_j] > 0$  примет вид:

$$\begin{aligned} &\sin(\psi_j - \varphi_{j-1} - \pi/3) + \sin(\psi_j + \varphi_{j-2} + \pi/3) - \sin \psi_j + \\ &l_{j-2} \sin(\psi_j - \varphi_{j-1} - \psi_{j-2} - \pi/3) + l_{j-1} \sin(\psi_j + \varphi_{j-2} - \psi_{j-1} + \pi/3) < 0. \end{aligned}$$

Обозначим левую часть последнего неравенства через  $F_j$ .

Аналогично, неравенство  $[H_k D_k, \mathcal{O}_{-\alpha}(H_k K_k)] < 0$  переписывается так:

$$\begin{aligned} &\sin(\psi_j - \varphi_{j-1} - \alpha - \pi/3) + \sin(\psi_j + \varphi_{j-2} - \alpha + \pi/3) - \\ &\sin(\psi_j - \alpha) - \lambda_j \sin(\alpha) + l_{j-2} \sin(\psi_j - \varphi_{j-1} - \psi_{j-2} - \alpha - \pi/3) + \\ &l_{j-1} \sin(\psi_j + \varphi_{j-2} - \psi_{j-1} - \alpha + \pi/3) > 0. \end{aligned}$$

Обозначим левую часть последнего неравенства через  $G_j$ .

Приведем в таблице 3.3 значения функции  $G_3$ .

Таблица 3.3		
Тип	$n$	Функция $G_3$
a.	$6q$	0
b.		-1
a.	$6q + 3$	$3(\cos(\pi/3 - \alpha) - 1/2)$
b.		$1/2 - \cos(\alpha)$
a.	$6q + 1$	$-2 \cos(\alpha/3) \cos(\pi/3 + 2\alpha/3) - \cos(\pi/3 - \alpha/3)$ $-2 \sin(\alpha/3) \sin(\pi/3 - \alpha/3)$ $+2 \sin(\pi/6 - \alpha/6) \sin(\pi/6 + 5\alpha/6)$
b.		$-2 \cos(\alpha/3) \cos(\pi/3 - \alpha/3) - \cos(\pi/3 - 4\alpha/3)$ $-2 \sin(\pi/6 - \alpha/6) \sin(\pi/6 - 5\alpha/6) + 2 \sin^2(\pi/6 + 5\alpha/6)$
c.		$-2 \cos(\alpha/3) \cos(\pi/3 - \alpha/3) - \cos(\pi/3 + 2\alpha/3)$ $+2 \sin(\pi/6 - \alpha/6) \sin(\pi/6 + \alpha/2) + 2 \sin^2(\pi/6 - \alpha/6)$
d.		$-2 \cos(\alpha/3) \cos(\pi/3 - \alpha/3) - \cos(\pi/3 + 2\alpha/3)$ $+2 \sin(\pi/6 + 5\alpha/6) \sin(\pi/6 + \alpha/6) + 2 \sin^2(\pi/6 - 7\alpha/6)$
Тип	$n$	Функция $G_3$
a.	$6q + 5$	$-2 \cos(2\alpha/3) \cos(\pi/3 + \alpha/3) - \cos(\pi/3 + \alpha/3)$ $+2 \sin(\alpha/3) \sin(\pi/3 + \alpha/3)$ $+2 \sin(\pi/6 - 5\alpha/6) \sin(\pi/6 + \alpha/6)$
b.		$-2 \cos(2\alpha/3) \cos(\pi/3 - 2\alpha/3) - \cos(\pi/3 - 2\alpha/3)$ $-2 \sin(\pi/6 + \alpha/6) \sin(\pi/6 + 5\alpha/6) + 2 \sin^2(\pi/6 - 5\alpha/6)$
c.		$-2 \cos(\alpha/3) \cos(\pi/3 + \alpha/3) - \cos(\pi/3 - 2\alpha/3)$ $+2 \sin(\pi/6 + \alpha/6) \sin(\pi/6 - \alpha/2) + 2 \sin^2(\pi/6 + \alpha/6)$
d.		$-2 \cos(\alpha/3) \cos(\pi/3 + \alpha/3) - \cos(\pi/3 - 2\alpha/3)$ $+2 \sin(\pi/6 - 5\alpha/6) \sin(\pi/6 - \alpha/6) + 2 \sin^2(\pi/6 + 7\alpha/6)$
a.	$6q + 2$	$-2 \cos(2\alpha/3) \cos(\pi/3 - 2\alpha/3) - \cos(\pi/3 - 2\alpha/3)$ $+2 \sin(\alpha/3) \sin(\pi/3 + \alpha/3) + 2 \sin^2(\pi/6 - \alpha/3)$
b.		$-2 \cos(2\alpha/3) \cos(\pi/3 + \alpha/3) - \cos(\pi/3 + \alpha/3)$ $+ \sin(\pi/6 - \alpha/3) + 2 \sin(\pi/6 - \alpha/3) \sin(\pi/6 + 2\alpha/3)$
c.		$-2 \cos(2\alpha/3) \cos(\pi/3 + \alpha/3) - \cos(\pi/3 + \alpha/3)$ $+ \cos(\pi/3 + \alpha) + 2 \sin(\pi/6 - 4\alpha/3) \sin(\pi/6 - \alpha/3)$ $-2 \cos(\alpha) \cos(\pi/3 + 2\alpha/3) + \cos(\alpha/3)$
d.		$-2 \cos(\alpha/3) \cos(\pi/3 + \alpha/3) - \cos(\pi/3 - 2\alpha/3)$ $+2 \sin(2\alpha/3) \sin(\pi/3 - 2\alpha/3) + 2 \sin^2(\pi/6 + 2\alpha/3)$
a.	$6q + 4$	$-2 \cos(\alpha/3) \cos(\pi/3 - \alpha/3) - \cos(\pi/3 - 4\alpha/3)$ $-2 \sin(\alpha/3) \sin(\pi/3 - \alpha/3) + 2 \sin^2(\pi/6 + \alpha/3)$
b.		$-2 \cos(\alpha/3) \cos(\pi/3 + 2\alpha/3) - \cos(\pi/3 - \alpha/3)$ $+ \sin(\pi/6 + \alpha/3) + 2 \sin(\pi/6 - 2\alpha/3) \sin(\pi/6 + \alpha/3)$
c.		$-2 \cos(\alpha/3) \cos(\pi/3 + 2\alpha/3) - \cos(\pi/3 - \alpha/3)$ $+ \cos(\pi/3 - \alpha) + 2 \sin(\pi/6 + 4\alpha/3) \sin(\pi/6 + \alpha/3)$ $-2 \cos(\alpha) \cos(\pi/3 - 2\alpha/3) + \cos(\alpha/3)$
d.		$-2 \cos(\alpha/3) \cos(\pi/3 - \alpha/3) - \cos(\pi/3 + 2\alpha/3)$ $-2 \sin(2\alpha/3) \sin(\pi/3 + 2\alpha/3) + 2 \sin^2(\pi/6 - 2\alpha/3)$

Непосредственно проверяется, что для всех случаев, кроме  $n = 6p + 3$ , случай (а), функция  $G_3$  неположительна при  $n \geq 9$ , поэтому соответствующие скелеты не имеют  $RM$ -реализации. При  $n = 6k + 3$ , случай (а), имеем:

$$\begin{aligned} G_1 = G_2 = G_3 &= 3(\cos(\pi/3 - \alpha) - 1/2) > 0, \\ F_1 = F_2 = F_3 &= -1/2 < 0. \end{aligned}$$

Далее, в этом случае, как легко видеть, треугольник  $H_1H_2H_3$  — правильный, и его центр совпадает с точкой  $O$ . Поэтому, точка Штейнера сети  $\Gamma'$  совпадает с точкой  $O$  и, тем самым, лежит в характеристической области. Предложение доказано.

## 7 Не существование правильной минимальной реализации у скелетов с четырьмя концевыми линейными участками

В данном разделе мы покажем, что для 4-скелетов не существует правильной минимальной реализации. Для этого мы разовьем идеи, описанные выше, в частности, мы усилим предложения 3.7 и 3.6.

Итак, цель данного раздела — доказать следующее предложение.

**Предложение 3.12** Пусть  $S$  — скелет, у которого число концевых линейных участков равно четырем. Тогда  $S$  не имеет правильно минимальной реализации.

### 7.1 Длины боковин

В настоящем параграфе мы усилим предложение 3.6. На протяжении всего параграфа будем предполагать, что все рассматриваемые деревянные скелеты не являются линейными, т.е. имеют по крайней мере одну внутреннюю ячейку, и, значит, не менее трех концевых линейных участков.

Пусть  $S$  — скелет из  $\mathcal{WP}_3^2$ , обладающий  $RM$ -реализацией, и  $\Gamma = \Gamma_S$  — его двойственная сеть. Обозначим через  $e$  и  $a$  концевое ребро и смежный с ним отросток бинарного дерева  $\Gamma$ , соответствующие некоторому концевому линейному участку-змею  $Z$  скелета  $S$ . Будем рассматривать  $e$  и  $a$  как вектора, выходящие из общей для них внутренней точки сети  $\Gamma$ . Считая, что плоскость канонически ориентирована, дадим следующее определение.

**Определение.** Индексом  $\text{ind}(Z)$  концевого линейного участка  $Z$  назовем число, равное 1, если репер  $(a, e)$  положительно ориентирован, и  $-1$  в противном случае.

Пусть  $Z$  и  $Z'$  — концевые змеи скелета  $S$ .

**Определение.** Индексом  $\text{ind}(Z, Z')$  упорядоченной пары  $(Z, Z')$  называется полуразность  $\frac{1}{2}[\text{ind}(Z') - \text{ind}(Z)]$ .

Ясно, что индекс пары концевых змей может принимать лишь три значения:  $-1$ ,  $0$  и  $1$ . В первом случае говорят, что концевые линейные участки *смотрят наружу*, во втором — что концевые линейные участки *смотрят в одну сторону*, и в третьем — что концевые линейные участки *смотрят внутрь*.

Пусть  $(Z, Z')$  — упорядоченная пара концевых змей скелета  $S$ . Углом от  $Z$  к  $Z'$  назовем величину дуги единичной окружности направлений, движение по которой от направления первого концевого линейного участка  $Z$  к направлению второго концевого линейного участка  $Z'$  происходит против часовой стрелки, т.е. в положительном направлении. Также, для упорядоченной пары  $(K, K')$  вершин правильного многоугольника под числом сторон от  $K$  к  $K'$  будем понимать количество сторон в той из двух компонент между  $K$  и  $K'$ , движение по которой от  $K$  к  $K'$  порождает обход многоугольника против часовой стрелки.

**Предложение 3.13** Пусть  $S$  — произвольный скелет из  $\mathcal{WP}_5$ , имеющий  $RM$ -реализацию на правильном  $n$ -угольнике  $M$ . Пусть  $(K, K')$  — упорядоченная пара концевых вершин из  $M$ , соответствующая упорядоченной паре концевых змей  $(Z, Z')$  скелета  $S$ . Обозначим через  $k$  число сторон  $n$ -угольника  $M$  от  $K$  к  $K'$ . Пусть угол от концевого линейного участка  $Z$  к концевому линейному участку  $Z'$  равен  $\pi/3$ . Тогда существует и единственно такое число  $a$  из интервала  $(-1/2, 1/2)$ , что число  $\frac{nl}{6} + \frac{1}{2}\text{ind}(Z, Z') + a$  — целое. При этом

$$k = \frac{nl}{6} + \frac{1}{2}\text{ind}(Z, Z') + a.$$

Таким образом,

- если  $\text{ind}(Z, Z') = -1$ , то  $nl$  не делится нацело на 6, и  $k = \left\lceil \frac{nl}{6} \right\rceil$ ;
- если  $\text{ind}(Z, Z') = 0$ , то остаток  $r$  от деления  $nl$  на 6 не равен 3, и
  - если  $0 \leq r \leq 2$ , то  $k = \left\lceil \frac{nl}{6} \right\rceil$ ;
  - если  $4 \leq r \leq 5$ , то  $k = \left\lceil \frac{nl}{6} \right\rceil + 1$ ;
- если  $\text{ind}(Z, Z') = 1$ , то  $nl$  не делится нацело на 6, и  $k = \left\lceil \frac{nl}{6} \right\rceil + 1$ .



Пусть  $S$  — скелет, а  $B$  — произвольная его боковина. Так как мы предполагаем (см. выше), что скелет  $S$  не является линейным, то существует ровно два концевых линейных участка,  $Z$  и  $Z'$ , пересекающиеся с боковиной  $B$ . Более того, легко видеть, что  $B \cap Z$  и  $B \cap Z'$  — связные фрагменты ломаной  $B$ , содержащие граничные для  $B$  ребра. Будем говорить, что боковина  $B$  порождена концевыми линейными участками  $Z$  и  $Z'$ , а пересечения  $B \cap Z$  и  $B \cap Z'$  будем называть соответственно  $Z$ - и  $Z'$ -частями боковины  $B$ .

Далее, пусть, для определенности, при движении по границе скелета  $S$  против часовой стрелки мы проходим боковину  $B$ , начиная с ее  $Z$ -части и заканчивая на ее  $Z'$ -части.

**Определение.** В сделанных выше предположениях, индекс  $\text{ind}(Z, Z')$  называется *индексом боковины  $B$*  и обозначается через  $\text{ind}(B)$ . Угол от концевого линейного участка  $Z$  к концевому линейному участку  $Z'$  называется *раствором боковины  $B$*  и обозначается  $\text{ang}(B)$ .

**Следствие 3.8** Пусть  $S$  — произвольный скелет из  $\mathcal{WP}_5$ , и пусть  $n$  — длина его границы. Предположим, что  $S$  обладает  $RM$ -реализацией. Пусть  $B$  — произвольная боковина скелета  $S$ ,  $b$  — ее длина, и  $\text{ang}(B) = \pi l/3$  — ее раствор. Тогда

- если  $\text{ind}(B) = -1$ , то  $nl$  не делится на 6, и  $b = \left\lceil \frac{nl}{6} \right\rceil - 1$ ;
- если  $\text{ind}(B) = 0$ , то остаток  $r$  от деления  $nl$  на 6 не равен 3, и
  - если  $0 \leq r \leq 2$ , то  $b = \left\lceil \frac{nl}{6} \right\rceil - 1$ ;
  - если  $4 \leq r \leq 5$ , то  $b = \left\lceil \frac{nl}{6} \right\rceil$ ;
- если  $\text{ind}(B) = 1$ , то  $nl$  не делится на 6, и  $b = \left\lceil \frac{nl}{6} \right\rceil$ .

Иными словами, если  $nl = 6p + r$ , где  $p = \left\lceil \frac{nl}{6} \right\rceil$ , а  $0 \leq r \leq 5$ , то

- при  $r = 0$  индекс боковины  $B$  всегда равен 0, при  $r = 3$  индекс боковины  $B$  никогда не равен 0, а при оставшихся  $r$  индекс боковины  $B$  может быть равен как 0, так и  $\pm 1$ ;
- при любом  $r > 0$ ,
  - если  $\text{ind}(B) = -1$ , то  $b = p - 1$ ;
  - если  $\text{ind}(B) = 1$ , то  $b = p$ ;

- если  $\text{ind}(B) = 0$ , то
  - при  $0 \leq r \leq 2$  имеем  $b = p - 1$ ;
  - при  $4 \leq r \leq 5$  имеем  $b = p$ .

Пусть  $e$  и  $e'$  — два концевых ребра скелета  $S$ . Тогда ломаные, полученные при замыкании связных компонент, на которые распадается граница скелета  $S$  после выбрасывания этих концевых ребер, называется *супербоковиной*. Пусть  $Z$  и  $Z'$  — концевые линейные участки скелета  $S$ , такие что  $e \subset Z$  и  $e' \subset Z'$ . Будем говорить, что супербоковина  $B$  порождена концевыми линейными участками  $Z$  и  $Z'$ , а пересечения  $B \cap Z$  и  $B \cap Z'$  будем называть соответственно  $Z$ - и  $Z'$ -частями супербоковины  $B$ .

Далее, пусть, для определенности, при движении по границе скелета  $S$  против часовой стрелки мы проходим супербоковину  $B$ , начиная с ее  $Z$ -части, и заканчивая на ее  $Z'$ -части.

**Определение.** В сделанных выше предположениях, индекс  $\text{ind}(Z, Z')$  называется *индексом супербоковины  $B$*  и обозначается через  $\text{ind}(B)$ . Угол от концевого линейного участка  $Z$  к концевому линейному участку  $Z'$  называется *раствором супербоковины  $B$*  и обозначается  $\text{ang}(B)$ .

**Следствие 3.9** Утверждения следствия 3.8 имеют место и для супербоковин.

Перейдем теперь к доказательству предложения 3.13.

**Доказательство предложения 3.13.** Пусть  $\Gamma$  — некоторая  $RM$ -реализация скелета  $S$  на правильном  $n$ -угольнике  $M$ . Поддеревья в  $\Gamma$ , являющиеся реализациями концевых змей  $Z$  и  $Z'$ , обозначим теми же буквами.

Пусть  $O$  — центр окружности  $S^1$ , описанной вокруг  $n$ -угольника  $M$ . Обозначим через  $l$  и  $l'$  лучи, выходящие из  $O$  и перпендикулярные отрезкам змей  $Z$  и  $Z'$  соответственно. Пусть  $L$  и  $L'$  — точки пересечения лучей  $l$  и  $l'$  с окружностью  $S^1$ . Легко видеть, что угловое расстояние между  $L$  и  $K$ , так же, как и угловое расстояние между  $L'$  и  $K'$ , отлично от нуля и строго меньше  $\alpha = \pi/n$ . Обозначим эти угловые расстояния, деленные на  $\pi/n$ , через  $\delta$  и  $\delta'$  соответственно. Ясно, что  $0 < \delta < 1$  и  $0 < \delta' < 1$ .

Отметим, что если  $\text{ind}(Z) = 1$ , то движение от  $L$  к  $K$  по меньшей дуге между ними происходит в положительном направлении, а если  $\text{ind}(Z) = -1$  — то в отрицательном. Аналогичные рассуждения верны и для второго концевого линейного участка  $Z'$ . Поэтому, имеет место следующее соотношение:

$$\frac{2\pi}{n}k = \frac{\pi}{3}l + \frac{\pi}{n}(\delta' \text{ind}(Z') - \delta \text{ind}(Z)),$$

откуда

$$k = \frac{nl}{6} + \frac{(\delta' \text{ind}(Z') - \delta \text{ind}(Z))}{2}.$$

Положим  $b = (\delta' \text{ind}(Z') - \delta \text{ind}(Z))/2$ . Ясно, что значения функции  $b$  лежат на интервале  $(0, 1)$ , если  $\text{ind}(Z, Z') = 1$ , на интервале  $(-1/2, 1/2)$ , если  $\text{ind}(Z, Z') = 0$ , и, наконец, на интервале  $(-1, 0)$ , если  $\text{ind}(Z, Z') = -1$ . Поэтому  $b$  можно представить в виде  $\text{ind}(Z, Z')/2 + a$ , где  $-1/2 < a < 1/2$ .

Легко видеть, что  $b$  однозначно определяется условием (\*):  $\frac{nl}{6} + b$  является целым числом. Поэтому  $a$  также определяется однозначно. Таким образом, доказана первая часть предложения.

Для доказательства второй части, заметим, что если  $\text{ind}(Z, Z') = \pm 1$ , и  $nl$  делится нацело на 6, то  $b$  лежит в пределах между 0 и  $\text{ind}(Z, Z')$ , и, поэтому, число  $\frac{nl}{6} + b$  не может быть целым. Если же  $nl = 6p + r$ ,  $0 \leq r \leq 5$ , и остаток  $r$  отличен от нуля, то  $b = 1 - r/6$  при  $\text{ind}(Z, Z') = 1$ , и  $b = -r/6$  при  $\text{ind}(Z, Z') = -1$  удовлетворяют условию (\*). Эти два решения можно записать в общем виде:  $b = \text{ind}(Z, Z')/2 + 1/2 - r/6$ , т.е.  $a = 1/2 - r/6$ . В обоих случаях имеем:

$$\begin{aligned} k &= \frac{nl}{6} + \frac{1}{2} \text{ind}(Z, Z') + \frac{1}{2} - \frac{r}{6} \\ &= p + \frac{r}{6} + \frac{1}{2} \text{ind}(Z, Z') + \frac{1}{2} - \frac{r}{6} = \left[ \frac{nl}{6} \right] + \frac{1 + \text{ind}(Z, Z')}{2}, \end{aligned}$$

что равно  $\left[ \frac{nl}{6} \right] + 1$  при  $\text{ind}(Z, Z') = 1$ , и  $\left[ \frac{nl}{6} \right]$  при  $\text{ind}(Z, Z') = -1$ .

Пусть теперь  $\text{ind}(Z, Z') = 0$ . Теперь  $b$  может меняться в пределах от  $-1/2$  до  $1/2$ . Ясно, что если, как и выше, положить  $nl = 6p + r$ , то при  $r = 3$  не существует  $b$ , при котором  $\frac{nl}{6} + b$  — целое. Если же  $0 \leq r \leq 2$ , то  $b = -r/6$ , а если  $4 \leq r \leq 5$ , то  $b = 1 - r/6$ . Таким образом, при  $0 \leq r \leq 2$  имеем

$$k = \left[ \frac{nl}{6} \right] + \frac{r}{6} - \frac{r}{6} = \left[ \frac{nl}{6} \right].$$

При  $4 \leq r \leq 5$  получаем

$$k = \left[ \frac{nl}{6} \right] + \frac{r}{6} + 1 - \frac{r}{6} = \left[ \frac{nl}{6} \right] + 1.$$

Предложение полностью доказано.

## 7.2 Перегородки второго уровня

В настоящем параграфе мы усилим предложение 3.7, распространив его на перегородки некоторого специального вида. Так как скелеты из  $\mathcal{WP}_5^2$ , линейные или с тремя концевыми линейными участками, обладающие  $RM$ -реализацией, полностью описаны (см. выше), в дальнейшем, если не оговорено противное, предполагается, что все рассматриваемые скелеты имеют не менее четырех концевых линейных участков.

Пусть  $S$  — скелет из  $\mathcal{WP}_3^2$ , обладающий  $RM$ -реализацией. Пусть  $Z_1$  и  $Z_2$  — два его концевых линейных участка-змеи, инцидентные внутренней ячейке  $\Delta$  скелета  $S$ . Предположим, что направления концевых линейных участков  $Z_1$  и  $Z_2$  составляют угол в  $60^\circ$ .

В настоящем параграфе мы докажем следующий результат.

**Предложение 3.14** *В сделанных выше предположениях, скелет  $S$  не имеет инцидентной  $\Delta$  перегородки. Иными словами, внутренняя ячейка  $\Delta$  входит в состав некоторого узла ветвления, состоящего не менее чем из двух ячеек.*

Прежде чем приступить к доказательству предложения 3.14, опишем некоторые полезные свойства концевых линейных участков правильных минимальных реализаций скелетов из  $\mathcal{WP}_3^2$ .

Пусть  $S$  — скелет из  $\mathcal{WP}_3^2$ , и  $\Gamma$  — минимальное бинарное дерево, являющееся правильной минимальной реализацией скелета  $S$ . В соответствии с предложением 3.7, все концевые линейные участки дерева  $\Gamma$  — змеи. Пусть  $Z$  — произвольный концевой линейный участок-змея из  $\Gamma$ . Обозначим через  $k$  концевое ребро, принадлежащее  $Z$ , а через  $k'$  — ребро крепления этого концевого линейного участка (ребром крепления концевого линейного участка скелета называется внутреннее ребро скелета, по которому концевой линейный участок пересекается с инцидентной ему внутренней ячейкой; осталось воспользоваться соответствием между внутренними ребрами скелета и внутренними ребрами двойственной сети).

Пусть  $\gamma$  — путь в  $\Gamma$ , соединяющий  $k$  и  $k'$ . Ясно, что все точки Штейнера змеи  $Z$  лежат на  $\gamma$ , поэтому их можно линейно упорядочить. Ориентируем путь  $\gamma$  от  $k$  к  $k'$ , и обозначим последовательные точки Штейнера змеи  $Z$  через  $s_1, \dots, s_p$ . Отметим, что  $p \geq 2$ , так как  $S$  — скелет. Пусть  $k_i$  — отросток из  $\Gamma$ , инцидентный вершине  $s_i$ . Отметим, что все отростки  $k_i$  параллельны между собой. Пусть  $l_i$  — прямая, проходящая через отросток  $k_i$ . Тогда, для каждого  $1 < i < p$  отросток  $k_i$  лежит в полосе между прямыми  $l_{i-1}$  и  $l_{i+1}$ . В частности, если  $m_i$  обозначает точку из  $M$ , в которую приходит отросток  $k_i$ , то для  $1 < i < p$  точка  $m_i$  так же лежит в полосе между прямыми  $l_{i-1}$  и  $l_{i+1}$ .

Пусть  $m_0$  — концевая вершина из  $M$ , в которую приходит концевое ребро  $k$ , и  $l_0$  — прямая, проходящая через  $m_0$  и параллельная отросткам  $k_i$ . Ясно, что как  $k_1$ , так и  $m_1$ , лежат в полосе между  $l_0$  и  $l_2$ . Из приведенных выше рассуждений вытекает следующее утверждение.

**Утверждение 3.10** *В сделанных выше обозначениях, на каждой прямой  $l_i$ ,  $0 \leq i \leq p$ , лежит ровно одна точка из множества  $M$ . Для каждого  $0 < i < p$ , в открытой полосе между прямыми  $l_{i-1}$  и  $l_{i+1}$  лежит ровно одна точка из множества  $M$ , причем эта точка является граничной вершиной сети  $\Gamma$ , инцидентной отростку  $k_i$  змеи  $Z$ .*

Пусть  $\Pi$  — замкнутая полуплоскость, ограниченная прямой  $l_p$ , такая что  $m_0 \in \Pi$ .

**Утверждение 3.11** *В сделанных выше предположениях, все вершины из  $M$ , лежащие в полуплоскости  $\Pi$ , инцидентны граничным ребрам дерева  $\Gamma$ , принадлежащим змее  $Z$ . Иными словами, все точки из множества  $M$ , попавшие в полуплоскость  $\Pi$ , затянута змеей  $Z$ .*

Пусть  $l$  — прямая, параллельная отрезкам змеи  $Z$ , проходящая через вершину из  $M$ , соседнюю с  $m_p$  и не инцидентную граничным ребрам змеи  $Z$ . Обозначим через  $\Pi$  открытую полуплоскость, ограниченную прямой  $l$  и содержащую концевую вершину  $m_0$  змеи  $Z$ .

**Утверждение 3.12** *В сделанных выше предположениях, среди вершин из  $M$ , лежащих в полуплоскости  $\Pi$ , существует не более одной вершины, не инцидентной граничным ребрам дерева  $\Gamma$ , принадлежащим змее  $Z$ . Иными словами, все граничные вершины дерева  $\Gamma$ , попавшие в полуплоскость  $\Pi$ , за исключением, возможно, одной, затянута змеей  $Z$ .*

Пусть, как и выше,  $k' \subset Z$  обозначает ребро крепления. Пусть  $l'$  — прямая, проходящая через  $k'$ . Пусть  $\Pi$  — открытая полуплоскость, ограниченная прямой  $l'$  и содержащая концевую вершину  $m_0$  концевого линейного участка  $Z$ . Имеет место следующая оценка.

**Утверждение 3.13** *В сделанных выше предположениях, число вершин из  $M$ , попавших в полуплоскость  $\Pi$  и инцидентных ребрам концевого линейного участка  $Z$ , не меньше 2.*

Теперь все готово, чтобы доказать предложение 3.14.

**Доказательство предложения 3.14.** Предположим противное, т.е. что имеется непустая перегородка, инцидентная узлу ветвления  $\Delta$ . Пусть  $\Delta'$  — ячейка этой перегородки, смежная с  $\Delta$ . Будем обозначать теми же буквами соответствующие элементы  $RM$ -реализации  $\Gamma$  скелета  $S$ , см. рис. 3.13.

Так как ячейка  $\Delta'$  — не внутренняя, то существует отросток  $k_a$  дерева  $\Gamma$ , выходящий из точки Штейнера, которая соответствует ячейке  $\Delta'$ . Ясно, что  $k_a$  параллелен либо отросткам участка  $Z_1$ , либо отросткам участка  $Z_2$ . Пусть, для определенности,  $k_a$  параллелен отросткам концевого линейного участка  $Z_1$ , и  $m_a$  — вершина из  $M$ , инцидентная  $k_a$ .

Обозначим через  $k$  концевое ребро из  $\Gamma$ , а через  $m_0$  — концевую вершину из  $M$ , соответствующие концевому линейному участку  $Z_1$ . Пусть, как и выше,  $k_1, \dots, k_p$  — последовательные отростки концевого линейного участка  $Z_1$ , а  $m_i$  — вершина из  $M$ , в которую приходит отросток  $k_i$ . Ясно, что  $m_p$  и  $m_a$  — соседние вершины из  $M$ .

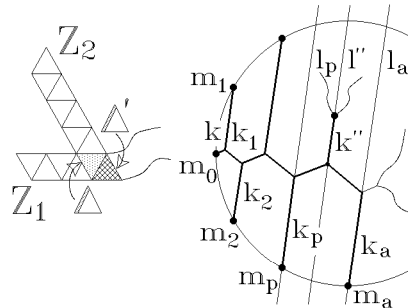


Рис. 3.13: Доказательство предложения 3.14

Проведем через  $m_a$  прямую  $l_a$ . Эта прямая, очевидно, параллельна отросткам змеи  $Z_1$ . Обозначим через  $\Pi$  открытую полуплоскость, ограниченную прямой  $l_a$  и содержащую вершину  $m_0$ . По утверждению 3.12, в полуплоскости  $\Pi$  содержится самое большое одна вершина из  $M$ , не инцидентная граничным ребрам змеи  $Z_1$ .

Обозначим через  $k''$  ребро крепления концевой линейной участка  $Z_2$ , и через  $l''$  — прямую, проходящую через  $k''$ . Легко видеть, что  $k''$  и, значит,  $l''$ , параллельны отросткам концевой линейной участка  $Z_1$ . Кроме того, если  $l_p$  и  $l_a$  — прямые, проходящие через  $k_p$  и  $k_a$  соответственно, то прямая  $l''$  содержится в полосе между прямыми  $l_p$  и  $l_a$ .

Далее, пусть  $\Pi''$  — открытая полуплоскость, ограниченная прямой  $l''$ , такая что концевое ребро из  $Z_2$  содержится в  $\Pi''$ . Легко видеть, что  $\Pi'' \subset \Pi$ . В силу утверждения 3.13, в полуплоскости  $\Pi''$  лежит не менее 2 точек из  $M$ , инцидентных граничным ребрам змеи  $Z_2$ . Но граничные ребра концевых линейных участков  $Z_1$  и  $Z_2$  инцидентны различным вершинам из множества  $M$ . Это противоречие и заканчивает доказательство предложения 3.14.

### 7.3 Доказательство предложения 3.12

В настоящем параграфе мы применим приведенные выше результаты для доказательства предложения 3.12, утверждающего не существование правильной минимальной реализации у 4-скелетов.

Пусть существует скелет  $S$  с четырьмя концевыми линейными участками, имеющий  $RM$ -реализацию на правильном  $n$ -угольнике  $M$ . Предположим сначала, что  $S$  имеет непустую перегородку. Тогда, по предложению 3.14, направления его концевых линейных участков, инцидентных одному и тому же узлу ветвления, составляют угол в  $2\pi/3$ . Докажем следующее предложение.

**Предложение 3.15** *Не существует скелета  $S$  с четырьмя концевыми линейными участками, который имел бы  $RM$ -реализацию, однако направ...*

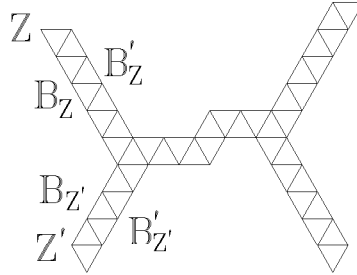


Рис. 3.14: Скелеты этого типа не имеют  $RM$ -реализации

вления каждой пары его соседних концевых линейных участков составляли бы угол в  $2\pi/3$ , рис. 3.14.

**Доказательство.** Предположим противное. Пусть  $Z$  и  $Z'$  — два концевых линейных участка скелета  $S$ , инцидентных одной и той же внутренней ячейке, а  $B$  — боковина, порожденная  $Z$  и  $Z'$ , и  $b$  — длина боковины  $B$ . По предложению 3.6, имеем или  $b = \lfloor n/3 \rfloor$ , или  $b = \lfloor n/3 \rfloor - 1$ , т.е.  $b \geq \lfloor n/3 \rfloor - 1$ .

Следующая лемма очевидна.

**Лемма 3.14** Пусть  $Z$  — концевой линейный участок-змея скелета  $S$ . Обозначим через  $B_Z$  и  $B'_{Z'}$  боковины концевого линейного участка  $Z$ , т.е. пересечение соответствующих боковин скелета  $S$  с границей концевого линейного участка  $Z$ . Тогда длины боковин  $B_Z$  и  $B'_{Z'}$  отличаются друг от друга не более чем на 1.

Пусть  $B_Z = B \cap Z$ ,  $B_{Z'} = B \cap Z'$ , а  $B'_Z$  и  $B'_{Z'}$  — оставшиеся боковины концевых линейных участков  $Z$  и  $Z'$  соответственно. Обозначим длины этих четырех боковин через  $b_Z$ ,  $b_{Z'}$ ,  $b'_Z$ , и  $b'_{Z'}$  соответственно. Ясно, что  $b = b_Z + b_{Z'}$ , поэтому  $b_Z + b_{Z'} \geq \lfloor n/3 \rfloor - 1$ , см. рис. 3.14.

Из леммы 3.14 вытекает, что  $b'_Z \geq b_Z - 1$  и  $b'_{Z'} \geq b_{Z'} - 1$ , поэтому получаем следующее неравенство (\*):  $b'_Z + b'_{Z'} \geq \lfloor n/3 \rfloor - 3$ . Следовательно, концевые линейные участки  $Z$  и  $Z'$  вместе затягивают не менее

$$\lfloor n/3 \rfloor - 1 + \lfloor n/3 \rfloor - 3 + 2 = 2\lfloor n/3 \rfloor - 2 \tag{**}$$

вершин из множества  $M$ .

Аналогичные рассуждения верны и для пары концевых линейных участков, инцидентных другому узлу ветвления. Поэтому, все четыре концевых линейных участка скелета  $S$  затягивают не менее  $4\lfloor n/3 \rfloor - 4$  точек из множества  $M$ . Однако, при  $n \geq 21$ , имеем:  $4\lfloor n/3 \rfloor - 4 > n$ , противоречие.

Отметим, что так как каждый концевой линейный участок затягивает не менее трех вершин из  $M$ , то осталось доказать предложение для

$12 \leq n \leq 20$ . Для этого заметим, что в нашем случае для одного из концевых линейных участков  $Z$  и  $Z'$ , скажем для  $Z$ , длина боковины  $b'_Z$  не меньше длины боковины  $b_Z$ , т.е.  $b'_Z \geq b_Z$ , а для другого из этих концевых линейных участков, для  $Z'$ , имеет место противоположное неравенство:  $b'_{Z'} \leq b_{Z'}$ . Поэтому, неравенство (\*) можно уточнить:  $b'_Z + b'_{Z'} \geq [n/3] - 2$ , следовательно, все четыре концевых линейных участка затягивают не менее  $4[n/3] - 2$ , что больше  $n$  при  $n \geq 12$ ,  $n \neq 14$ .

Если же  $n = 14$ , то  $4[n/3] - 2 = n$ , поэтому все вершины из  $M$  затянуты концевыми линейными участками, значит  $S$  не имеет перегородок. Более того,  $b = b_Z + b_{Z'}$  обязано равняться  $[n/3] - 1 = 3$ , а  $b'_Z + b'_{Z'}$  —  $[n/3] - 2 = 2$ , поэтому концевой линейный участок  $Z$  обязан состоять из 2 ячеек, в то время как  $Z'$  — из трех ячеек. Аналогично для двух оставшихся концевых линейных участков. Итак, мы получаем скелет с одним узлом ветвления, симметричный относительно центра этого узла ветвления, и с однозначно определенными длинами концевых линейных участков. Существует ровно один такой скелет (с точностью до симметрии). Легко видеть, что  $\text{ind}(B) = 1$ , поэтому, по следствию 3.8, длина  $b$  этой боковины равна  $[n/3] = 4$ , противоречие.

Предложение 3.15 полностью доказано.

**Следствие 3.10** *Скелет с четырьмя концевыми линейными участками, имеющий  $RM$ -реализацию, не содержит перегородок, поэтому он имеет ровно один узел ветвления.*

Из предложения 3.15 и следствия 3.10 вытекает, что имеется ровно два типа скелетов  $S$  с четырьмя концевыми линейными участками, которые могли бы иметь  $RM$ -реализацию:

- 1) углы между направлениями концевых линейных участков, выходящих с одной внутренней ячейки, равны  $\pi/3$ ;
- 2) для одной пары концевых линейных участков, выходящих с одной внутренней ячейки, угол между их направлениями равен  $\pi/3$ , а для другой пары —  $2\pi/3$ .

Скелеты этих обоих типов имеют ровно один узел ветвления, рис. 3.15.

**Предложение 3.16** *Пусть  $S$  — скелет с четырьмя концевыми линейными участками, обладающий  $RM$ -реализацией (относящийся к одному из двух типов, см. выше). Пусть  $Z$  и  $W$  — его концевые линейные участки, имеющие противоположные направления, а  $Z'$  и  $W'$  — два оставшихся концевых линейных участка. Тогда концевые линейные участки  $Z'$  и  $W'$  состоят из одинакового числа ячеек.*

**Доказательство.** Для определенности, будем считать, что концевые линейные участки  $Z$  и  $Z'$  выходят из одной внутренней ячейки.



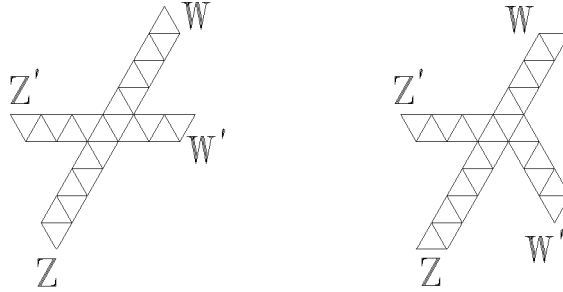


Рис. 3.15: Два типа возможных скелетов

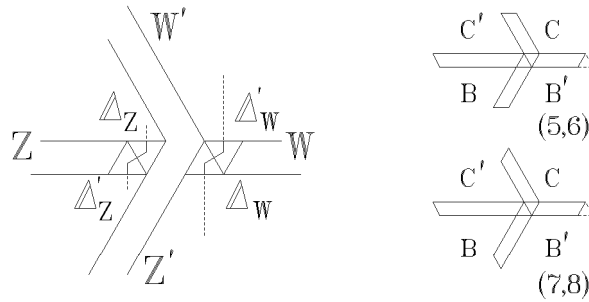


Рис. 3.16: Концы  $Z'$  и  $W'$  имеют одинаковую длину

Пусть  $\Delta_Z$  и  $\Delta'_Z$  — первые две ячейки концевой линейного участка  $Z$ , считая от узла ветвления, а  $\Delta_W$  и  $\Delta'_W$  — первые две ячейки концевой линейного участка  $W$ , также считая от узла ветвления. Ясно, что прямые  $l_Z, l'_Z, l_W$  и  $l'_W$ , проведенные через отростки  $RM$ -реализации  $\Gamma$  скелета  $S$ , соответствующие отросткам из построенных четырех ячеек, параллельны между собой, и каждая из них содержит ровно одну вершину из множества  $M$ . Если упорядочить построенные четыре прямые так:  $l'_Z, l_Z, l_W, l'_W$ , то в полосе между произвольными последовательными прямыми не будет лежать никакая другая прямая из этого семейства. Кроме того, как в открытой полосе между  $l'_Z$  и  $l_Z$ , так и в открытой полосе между  $l_W$  и  $l'_W$  нет вершин из множества  $M$ , рис. 3.16.

Пусть  $K$  и  $L$  — концевые вершины из  $M$ , соответствующие концевым линейным участкам  $Z$  и  $W$ . Эти вершины разбивают окружность  $S^1$ , описанную вокруг  $M$ , на две дуги:  $\delta$  и  $\delta'$ . Ясно, что отростки, соответствующие ячейкам  $\Delta'_Z$  и  $\Delta_W$ , приходят на одну и ту же из этих дуг, скажем, на  $\delta$ . Отростки же, соответствующие  $\Delta_Z$  и  $\Delta'_W$ , приходят на другую дугу,  $\delta'$ . Кроме того, легко видеть, что концевой линейный участок  $Z'$  затачивает вершины из  $M$ , лежащие на  $\delta$ , тогда как концевой линейный участок  $W'$  затачивает вершины из  $M$ , попавшие на  $\delta'$ . При этом, все вершины из

$M$ , зятянутые концевым линейным участком  $Z'$ , — это, в точности, все вершины из  $M$ , лежащие на  $\delta$  в открытой полосе между прямыми  $l'_Z$  и  $l_W$ . Аналогично, все вершины из  $M$ , зятянутые концевым линейным участком  $W'$ , — это, в точности, все вершины из  $M$ , лежащие на  $\delta'$  в открытой полосе между прямыми  $l_Z$  и  $l'_W$ .

Напомним, что в полосе между параллельными прямыми, пересекающими окружность, лежат две дуги этой окружности, имеющие одинаковую величину. Пусть  $\Pi$  — открытая полоса между  $l_Z$  и  $l_W$ . Так как  $l_Z$  проходит ровно через одну вершину из  $M$ , и эта вершина лежит на  $\delta'$ , а  $l_W$  также проходит ровно через одну вершину из  $M$ , и эта вершина лежит на  $\delta$ , заключаем, что на открытых дугах  $\delta \cap \Pi$  и  $\delta' \cap \Pi$  лежат одинаковые количества точек из  $M$ . Эти количества мы обозначим через  $k$ .

Так как в открытой полосе между  $l'_Z$  и  $l_Z$  нет точек из  $M$ , и единственная точка из  $M$ , лежащая на  $l_Z$ , принадлежит  $\delta'$ , то на части дуги  $\delta$ , попавшей в открытую полосу между прямыми  $l'_Z$  и  $l_W$ , также лежит  $k$  точек. Аналогично, количество точек из  $M$ , лежащих на дуге  $\delta'$  в открытой полосе между  $l_Z$  и  $l'_W$ , также равно  $k$ . Таким образом, концевые линейные участки  $Z'$  и  $W'$  зятягивают одинаковые количества вершин из  $M$ , т.е. эти концевые линейные участки состоят из одинакового числа ячеек (напомним, что мы отождествляем концевые линейные участки скелета и соответствующие поддережья в  $RM$ -реализации). Предложение 3.16 доказано.

Рассмотрим первую возможность.

**Предложение 3.17** *Не существует скелета  $S$  с четырьмя концевыми линейными участками, который обладал бы  $RM$ -реализацией, однако для каждой пары его концевых линейных участков, инцидентных одной и той же внутренней ячейке, их направления составляли бы угол в  $\pi/3$ .*

**Доказательство.** Предположим противное. Из предложения 3.14 вытекает, что у  $S$  нет перегородки, поэтому  $S$  имеет ровно один узел ветвления.

Заметим, что концевые линейные участки скелета  $S$ , так же, как и в предложении 3.15, можно разбить на две пары, составленные из концевых линейных участков, идущих под углом в  $2\pi/3$  (на сей раз концевые линейные участки, формирующие каждую из этих пар, уже не выходят с одной внутренней ячейки). Ровно те же рассуждения, что и в доказательстве предложения 3.15, примененные к таким парам концевых линейных участков скелета  $S$ , показывают, что при  $n \geq 21$  предложение 3.17 имеет место. Таким образом, нам осталось рассмотреть случаи  $12 \leq n \leq 20$ .

Для этого воспользуемся сначала предложением 3.16. Пусть  $Z'$  и  $Z$  — концевые линейные участки из  $S$ , выходящие из одной внутренней ячейки,  $W$  — концевой линейный участок из  $S$ , имеющий противоположное  $Z$  направление, и  $W'$  — концевой линейный участок, противоположно направленный с  $Z'$ . Из предложения 3.16 вытекает, что как  $Z$  и  $W$ , так и  $Z'$

и  $W'$ , состоят из одинакового числа ячеек. В частности,  $n$  должно быть четно. Таким образом, предложение доказано для всех нечетных  $n$ .

Для разбора оставшихся, четных,  $n$ , обозначим через  $B$  боковину, порожденную  $Z'$  и  $Z$ , а через  $B'$  — боковину, порожденную  $Z$  и  $W'$ . Обозначим через  $b$  длину боковины  $B$ , а через  $b'$  длину боковины  $B'$ . Отметим, что раствор боковины  $B$  равен  $\pi/3$ , а раствор боковины  $B'$  равен  $2\pi/3$ .

Пусть  $n = 12$ . Тогда, очевидно, существует ровно один скелет  $S$ . Ясно, что  $\text{ind}(B) = 1$ . Но, по следствию 3.8,  $n$  не должно делиться на 6, противоречие.

Пусть  $n = 14$ . Так как длины противоположно направленных концевых линейных участков равны между собой, существует, с точностью до симметрии, ровно одна возможность. Без ограничения общности, будем предполагать, что концевые линейные участки  $Z$  и  $W$  состоят из трех ячеек. Тогда  $b = 2$ . Ясно, что  $\text{ind}(B) = 0$ . Но, по следствию 3.8,  $b = [14/6] - 1 = 1$ , противоречие.

Пусть  $n = 16$ . Возникает две возможности: или концевые линейные участки  $Z'$  и  $Z$  состоят из одинакового числа ячеек, равного 3, или, для определенности,  $Z'$  состоит из 2 ячеек, а  $Z$  — из 4. В первом случае,  $b = 2$ , но  $\text{ind}(B) = -1$ , поэтому  $b = [16/6] - 1 = 1$ , противоречие. Во втором случае,  $b = 3$ , но  $\text{ind}(B) = 1$ , и  $b = [16/6] = 2$ , противоречие.

Пусть  $n = 18$ . Легко видеть, что, при любом выборе длин концевых линейных участков, имеем  $\text{ind}(B) = 0$  и  $b = 3$ . Но  $b = [18/6] - 1 = 2$ , противоречие.

И последний случай,  $n = 20$ . Возникает две возможности: оба концевых линейных участка  $Z'$  и  $Z$  состоят из четного числа ячеек, или оба эти участка состоят из нечетного числа ячеек. В первом случае  $b = 4$ , однако  $\text{ind}(B) = 1$ , поэтому  $b = [20/6] = 3$ , противоречие. Во втором случае  $b = 3$ , но  $\text{ind}(B) = -1$ , значит  $b = [20/6] - 1 = 2$ , противоречие.

Предложение 3.17 полностью доказано.

Рассмотрим теперь вторую возможность, а именно, пусть  $S$  — скелет, имеющий  $RM$ -реализацию, и такой что для одной пары его концевых линейных участков, скажем, для  $Z'$  и  $Z$ , выходящих с одной внутренней ячейки, угол между их направлениями равен  $\pi/3$ , а для другой пары,  $W'$  и  $W$ , — равен  $2\pi/3$ . Будем считать, что угол между направлениями участками  $Z$  и  $W'$  равен  $\pi/3$ . Ясно, что участки  $Z$  и  $W$  имеют противоположные направления, см. рис. 3.17.

Обозначим через  $B$  и  $B'$  боковины, порожденные парами концевых линейных участков  $(Z, Z')$  и  $(Z', W)$  соответственно. Также обозначим через  $C$  и  $C'$  боковины, порожденные соответственно парами концевых линейных участков  $(W, W')$  и  $(W', Z)$ . Отметим, что концевые линейные участки из каждой пары встречаются последовательно при обходе границы скелета  $S$  в положительном направлении. Обозначим через  $b, b', c$  и  $c'$  длины боковин  $B, B', C$  и  $C'$  соответственно. Для удобства, образуем вектор  $\beta$  длин

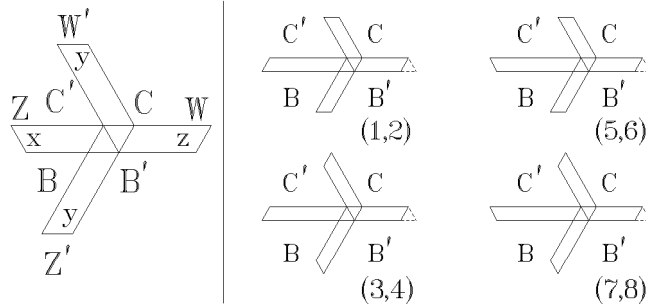


Рис. 3.17: Восемь возможных распределений четности концевых линейных участков

боковин, положив  $\beta = (b, b', c, c')$ .

Пусть  $x$  — количество ячеек, составляющих  $Z$ , а  $y$  — количество ячеек из  $Z'$ , равное, в силу предложения 3.16, количеству ячеек участка  $W'$ , и, наконец,  $z$  — количество ячеек участка  $W$ . Образует вектор  $\nu$  длин концевых линейных участков, положив  $\nu = (x, y, z)$ .

Легко видеть, что при любом выборе  $x$  и  $y$ , индекс одной из пар  $(Z, Z')$  и  $(W', Z)$  равен  $\pm 1$ , а другой — 0. Поэтому, в силу следствия 3.8, если  $n = 6p + r, 0 \leq r \leq 5$ , то  $r \neq 0$  и  $r \neq 3$ .

Рассмотрим восемь возможных случаев, в зависимости от четностей  $x, y$  и  $z$ , рис. 3.17.

**Пусть  $x$  и  $y$  — четны, рис. 3.17, случаи (1, 2)**

Тогда  $\text{ind}(B) = 1$ , поэтому  $b = \lfloor n/6 \rfloor$ . Но  $c' = b = \lfloor n/6 \rfloor$ , а  $\text{ind}(C') = 0$ , значит, по следствию 3.8, или  $r = 4$  или  $r = 5$ .

Пусть  $z$  — четно. Тогда  $\text{ind}(B') = -1$ , поэтому  $b' = \lfloor n/3 \rfloor - 1$ . Но  $c = b' = \lfloor n/3 \rfloor - 1$ , а  $\text{ind}(C) = 0$ , значит, по следствию 3.8, остаток от деления  $2r$  на 6 меньше 3. Следовательно,  $r = 4$ . Итак, имеем:  $n = 6p + 4, \beta = (p, 2p, 2p, p)$ . Если  $x = 2t$ , то  $y = 2(p - t)$ , и  $z = 2(p + t)$ , таким образом, имеем:  $\nu = (2t, 2(p - t), 2(p + t))$ .

Пусть  $z$  — нечетно. Тогда  $\text{ind}(C) = -1$ , поэтому  $c = \lfloor n/3 \rfloor - 1$ . Но  $b' = c + 1 = \lfloor n/3 \rfloor$ , а  $\text{ind}(B') = 0$ , значит, остаток от деления  $2r$  на 6 больше 3. Следовательно,  $r = 5$ . Итак, имеем:  $n = 6p + 5, \beta = (p, 2p + 1, 2p, p)$ . Если  $x = 2t$ , то  $y = 2(p - t)$ , и  $z = 2(p + t) + 1$ , таким образом, имеем:  $\nu = (2t, 2(p - t), 2(p + t) + 1)$ .

**Пусть  $x$  — четно, а  $y$  — нечетно, рис. 3.17, случаи (3, 4)**

Тогда  $\text{ind}(C') = -1$ , поэтому  $c' = \lfloor n/6 \rfloor - 1$ . Но  $b = c' = \lfloor n/6 \rfloor - 1$ , а  $\text{ind}(B) = 0$ , значит, или  $r = 1$  или  $r = 2$ .

Пусть  $z$  — чётно. Тогда  $\text{ind}(C) = 1$ , поэтому  $c = [n/3]$ . Но  $b' = c = [n/3]$ , а  $\text{ind}(B') = 0$ , значим, остаток от деления  $2r$  на 6 больше 3. Следовательно,  $r = 2$ . Итак, имеем:  $n = 6p + 2$ ,  $\beta = (p - 1, 2p, 2p, p - 1)$ . Если  $x = 2t$ , то  $y = 2(p - t) - 1$ , и  $z = 2(p + t)$ , таким образом, имеем:  $\nu = (2t, 2(p - t) - 1, 2(p + t))$ .

Пусть  $z$  — нечётно. Тогда  $\text{ind}(B') = 1$ , поэтому  $b' = [n/3]$ . Но  $c = b' - 1 = [n/3] - 1$ , а  $\text{ind}(C) = 0$ , значим, остаток от деления  $2r$  на 6 меньше 3. Следовательно,  $r = 1$ . Итак, имеем:  $n = 6p + 1$ ,  $\beta = (p - 1, 2p, 2p - 1, p - 1)$ . Если  $x = 2t$ , то  $y = 2(p - t) - 1$ , и  $z = 2(p + t) - 1$ , таким образом, имеем:  $\nu = (2t, 2(p - t) - 1, 2(p + t) - 1)$ .

**Пусть  $x$  — нечётно, а  $y$  — чётно, рис. 3.17, случаи (5, 6)**

Тогда  $\text{ind}(C') = 1$ , поэтому  $c' = [n/6]$ . Но  $b = c' - 1 = [n/6] - 1$ , а  $\text{ind}(B) = 0$ , значит, или  $r = 1$  или  $r = 2$ .

Пусть  $z$  — чётно. Тогда  $\text{ind}(B') = -1$ , поэтому  $b' = [n/3] - 1$ . Но  $c = b' = [n/3] - 1$ , а  $\text{ind}(C) = 0$ , значим, остаток от деления  $2r$  на 6 меньше 3. Следовательно,  $r = 1$ . Итак, имеем:  $n = 6p + 1$ ,  $\beta = (p - 1, 2p - 1, 2p - 1, p)$ . Если  $x = 2t + 1$ , то  $y = 2(p - t) - 2$ , и  $z = 2(p + t)$ , таким образом, имеем:  $\nu = (2t + 1, 2(p - t) - 2, 2(p + t))$ .

Пусть  $z$  — нечётно. Тогда  $\text{ind}(C) = -1$ , поэтому  $c = [n/3] - 1$ . Но  $b' = c + 1 = [n/3]$ , а  $\text{ind}(B') = 0$ , значим, остаток от деления  $2r$  на 6 больше 3. Следовательно,  $r = 2$ . Итак, имеем:  $n = 6p + 2$ ,  $\beta = (p - 1, 2p, 2p - 1, p)$ . Если  $x = 2t + 1$ , то  $y = 2(p - t) - 2$ , и  $z = 2(p + t) + 1$ , таким образом, имеем:  $\nu = (2t + 1, 2(p - t) - 2, 2(p + t) + 1)$ .

**И, наконец, пусть  $x$  и  $y$  — нечётны, рис. 3.17, случаи (7, 8)**

Тогда  $\text{ind}(B) = -1$ , поэтому  $b = [n/6] - 1$ . Но  $c' = b + 1 = [n/6]$ , а  $\text{ind}(C') = 0$ , значит, или  $r = 4$  или  $r = 5$ .

Пусть  $z$  — чётно. Тогда  $\text{ind}(C) = 1$ , поэтому  $c = [n/3]$ . Но  $b' = c = [n/3]$ , а  $\text{ind}(B') = 0$ , значим, остаток от деления  $2r$  на 6 больше 3. Следовательно,  $r = 5$ . Итак, имеем:  $n = 6p + 5$ ,  $\beta = (p - 1, 2p + 1, 2p + 1, p)$ . Если  $x = 2t + 1$ , то  $y = 2(p - t) - 1$ , и  $z = 2(p + t) + 2$ , таким образом, имеем:  $\nu = (2t + 1, 2(p - t) - 1, 2(p + t) + 2)$ .

Пусть  $z$  — нечётно. Тогда  $\text{ind}(B') = 1$ , поэтому  $b' = [n/3]$ . Но  $c = b' - 1 = [n/3] - 1$ , а  $\text{ind}(C) = 0$ , значим, остаток от деления  $2r$  на 6 меньше 3. Следовательно,  $r = 4$ . Итак, имеем:  $n = 6p + 4$ ,  $\beta = (p - 1, 2p + 1, 2p, p)$ . Если  $x = 2t + 1$ , то  $y = 2(p - t) - 1$ , и  $z = 2(p + t)$ , таким образом, имеем:  $\nu = (2t + 1, 2(p - t) - 1, 2(p + t) + 1)$ .

Итак, доказано следующее предложение.

**Предложение 3.18** Пусть  $S$  — скелет с четырьмя концевыми линейными участками, имеющий  $RM$ -реализацию на правильном  $n$ -угольнике. Пусть  $Z, Z', W$  и  $W'$  — его последовательные концевые линейные участки,

причем как первые два из них, так и последние два выходят из одной внутренней ячейки. Пусть углы между концевыми линейными участками в парах  $(Z, Z')$  и  $(W', Z)$  равны  $\pi/3$ , а между концевыми линейными участками в парах  $(Z', W)$  и  $(W, W')$  равны  $2\pi/3$ . Тогда  $S$  имеет ровно один узел ветвления, концевые линейные участки  $Z'$  и  $W'$  состоят из одинакового числа ячеек, и остаток от деления  $n$  на 6 не равен 0 и 3.

Более того, если  $\beta = (b, b', c, c')$  — вектор длин боковых скелета  $S$ , порожденных соответственно парами  $(Z, Z')$ ,  $(Z', W)$ ,  $(W, W')$  и  $(W', Z)$ , а  $\nu = (x, y, z)$  — вектор длин концевых линейных участков, где  $x$ ,  $y$  и  $z$  равны количеству ячеек, составляющих соответственно участки  $Z$ ,  $Z'$  и  $W$ , то возможны лишь следующие случаи:

при  $n = 6p + 1$

- $\beta = (p - 1, 2p, 2p - 1, p - 1)$  и  $\nu = (2t, 2(p - t) - 1, 2(p + t) - 1)$ ;
- $\beta = (p - 1, 2p - 1, 2p - 1, p)$  и  $\nu = (2t + 1, 2(p - t) - 2, 2(p + t))$ ;

при  $n = 6p + 2$

- $\beta = (p - 1, 2p, 2p, p - 1)$  и  $\nu = (2t, 2(p - t) - 1, 2(p + t))$ ;
- $\beta = (p - 1, 2p, 2p - 1, p)$  и  $\nu = (2t + 1, 2(p - t) - 2, 2(p + t) + 1)$ ;

при  $n = 6p + 4$

- $\beta = (p, 2p, 2p, p)$  и  $\nu = (2t, 2(p - t), 2(p + t))$ ;
- $\beta = (p - 1, 2p + 1, 2p, p)$  и  $\nu = (2t + 1, 2(p - t) - 1, 2(p + t) + 1)$ ;

при  $n = 6p + 5$

- $\beta = (p, 2p + 1, 2p, p)$  и  $\nu = (2t, 2(p - t), 2(p + t) + 1)$ ;
- $\beta = (p - 1, 2p + 1, 2p + 1, p)$  и  $\nu = (2t + 1, 2(p - t) - 1, 2(p + t) + 2)$ .

Таким образом, для доказательства предложения 3.12 нам осталось убедиться в том, что скелеты, перечисленные в предложении 3.18, также не имеют  $RM$ -реализации. Для этого мы воспользуемся критерием существования  $RM$ -реализации, сформулированным в предложении 3.10.

Прежде всего, отметим, что во всех интересующих нас восьми случаях остов соответствующего скелета  $S$  состоит из двух ячеек, а остов множества вершин правильного  $n$ -угольника — из четырех точек — главных вершин главных характеристических треугольников концевых линейных участков-змей скелета  $S$ . Поэтому нам необходимо построить соответствующие четырехугольники, затянуть их минимальным бинарным деревом соответствующей топологии, и, если такое дерево существует, проверить, удовлетворяет ли оно свойствам (1) и (2) предложения 3.10.

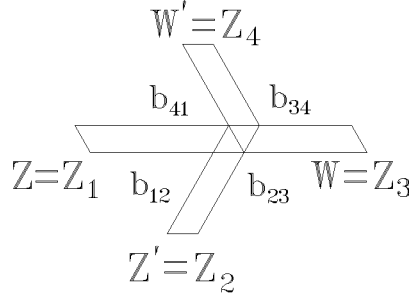


Рис. 3.18: Скелеты из предложения 3.18

Предположим для определенности, что узел ветвления скелета  $S$  расположен на плоскости так, как показано на рис. 3.18. (Оставшаяся вторая возможность получается из этой отражением плоскости.)

Для удобства дальнейшего изложения введем следующие переобозначения. Последовательные концевые линейные участки  $Z, Z', W, W'$  скелета  $S$  будем обозначать, соответственно, через  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$ ; длину боковины, пересекающей с двумя последовательными участками  $Z_i$  и  $Z_j$ , обозначим через  $b_{ij}$ , а длину участка  $Z_i$  — через  $z_i$ . Далее, мы, как и выше, предполагаем, что правильное граничное отображение фиксировано, и обозначим через  $k_i$  те точки из множества  $M$  вершин правильного многоугольника, которые соответствуют концевым ребрам скелета  $S$ . Главную вершину главного характеристического треугольника концевой линейной участка  $Z_i$  обозначим через  $H_i$ . Таким образом, остов  $M'$  множества  $M$  имеет вид:  $M' = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ .

Найдем точки  $H_i$ . Будем проводить вычисления в комплексной форме, отождествляя точки плоскости  $\mathbb{R}^2$  с соответствующими комплексными числами. При этом будем предполагать, что центр единичной окружности, в которую вписан правильный многоугольник, совпадает с началом координат, а точка  $k_3$  — с единицей, см. рис. 3.19. Обозначим через  $\ell_i$  расстояние от концевой вершины  $k_i$  до соответствующей главной вершины  $H_i$  главного характеристического треугольника. Напомним, что через  $\alpha$  мы обозначаем величину  $\pi/n$ . Тогда нетрудно вычислить, что:

$$\begin{aligned} H_1 &= e^{-2i(b_{12}+b_{23})\alpha} (1 + \ell_1 e^{-i(\pi/6+e(z_1)\alpha)}); \\ H_2 &= e^{-2ib_{23}\alpha} (1 + \ell_2 e^{i(\pi/6+e(z_2)\alpha)}); \\ H_3 &= 1 + \ell_3 e^{-i(\pi/6+e(z_3)\alpha)}; \\ H_4 &= e^{2ib_{34}\alpha} (1 + \ell_4 e^{-i(\pi/6+e(z_4)\alpha)}), \end{aligned}$$

где  $e(z)$  — функция четности, равная 0, если  $z$  четно, и 1, если  $z$  нечетно. Расстояние от концевой вершины  $k$  некоторого концевой линейной участка-змеи до главной вершины главного характеристического треугольника этого участка вычислено нами в лемме 3.13. Приведем еще раз эту

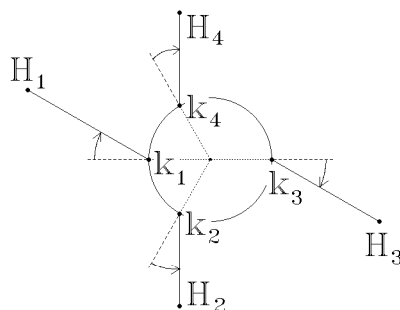


Рис. 3.19: Остов  $M' = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$

лемму в текущих обозначениях.

**Лемма 3.15** Пусть  $Z$  — некоторый концевой линейный участок-змея скелета  $S$ , состоящий из  $p$  ячеек. Обозначим через  $k$  соответствующую концевую вершину, и через  $H$  — главную вершину главного характеристического треугольника концевого линейного участка  $Z$ . Тогда расстояние  $\ell$  от  $k$  до  $H$  может быть вычислено так:

$$\ell = \frac{2}{\sin(\alpha)} \sin\left(\left[\frac{p+1}{2}\right]\right) \sin\left(\left[\frac{p+2}{2}\right]\right),$$

где  $\alpha = \pi/n$ , а через  $[z]$  обозначена целая часть числа  $z$ .

Нам нужно построить на множестве  $M'$  реализацию  $\Gamma'$  двойственной сети остова  $S'$  скелета  $S$ . Это минимальное бинарное дерево имеет две точки Штейнера, одна из которых, скажем  $s$ , должна быть соседней с вершинами  $H_1$  и  $H_2$ , а другая,  $s'$  — с вершинами  $H_3$  и  $H_4$ . Условие (1) предложения 3.10 состоит в том, что граничные ребра сети  $\Gamma'$  должны лежать в соответствующих  $H$ -допустимых углах концевых линейных участков-змей скелета  $S$ . Чтобы проверить выполнение этого условия, мы построим для каждого граничного ребра с помощью алгоритма Мелзака линию Симпсона, содержащую это ребро, и проверим, лежит ли она в соответствующем  $H$ -допустимом угле. Мы проделали эту работу с помощью пакета *Mathematica*<sup>®</sup> для нескольких пробных значений  $n = 6m + r$ , и установили, что если остаток  $r$  равен 1 или 4, то условие (1) предложения 3.10 не выполняется для граничного ребра сети  $\Gamma'$ , инцидентного вершине  $H_4$ , а если остаток  $r$  равен 2 или 5, то для граничного ребра, инцидентного вершине  $H_2$ . Этот компьютерный эксперимент подсказал нам, что достаточно проверять условие (1) предложения 3.10 только для указанных случаев.

Для вычисления линий Симпсона нам понадобится следующая очевидная лемма.



**Лемма 3.16** Пусть  $A$  и  $B$  — две произвольные точки на стандартно ориентированной плоскости. Тогда вершина  $C$  правильного треугольника  $ABC$ , такого что репер, составленный из векторов  $AB$  и  $AC$ , имеет положительную ориентацию, может быть найдена так:

$$C = e^{-i\pi/3}A + e^{i\pi/3}B.$$

Вспользуемся этой леммой для вычисления линий Симпсона, содержащих граничные ребра сети  $\Gamma'$ , инцидентные вершинам  $H_2$  и  $H_4$ . Обозначим через  $\sigma_2$  и  $\sigma_4$  векторы с началом соответственно в точках  $H_2$  и  $H_4$ , и концами — в оставшихся точках этих линий Симпсона. Тогда имеем пару противонаправленных векторов:

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= H_4 - H_2 + e^{-i\pi/3}(H_1 - H_3); \\ \sigma_4 &= H_2 - H_4 + e^{-i\pi/3}(H_3 - H_1).\end{aligned}$$

Пусть  $\alpha_i$  обозначает  $H$ -допустимый угол с вершиной в  $H_i$ . Напомним, что угол  $\alpha_i$ , по определению, ограничен лучом  $H_i k_i$  и его образом при повороте на  $\pm\alpha$  вокруг точки  $H_i$ , где выбор знака зависит от индекса концевой линейной участка  $Z_i$ , или, что равносильно, от его четности. Обозначим через  $n_i$  единичный вектор, сонаправленный с  $H_i k_i$ , а через  $n_i^\alpha$  — единичный вектор, сонаправленный с другой стороной угла  $\alpha_i$ .

Для проверки того, лежит ли линия Симпсона  $\sigma_i$  в  $H$ -допустимом угле  $\alpha_i$  с вершиной в  $H_i$ , можно рассмотреть определители  $\delta_i$  и  $\delta_i^\alpha$  матриц, один из столбцов которых составлен из координат вектора  $\sigma_i$ , а другой — из координат вектора  $n_i$  и  $n_i^\alpha$  соответственно. При правильном выборе порядка столбцов получим условие:  $\delta_i > 0$  и  $\delta_i^\alpha > 0$ . В нашем случае эти определители удобно вычислять в комплексной форме, в соответствии со следующей леммой.

**Лемма 3.17** Пусть  $z$  и  $w$  — произвольные комплексные числа. Тогда число  $\text{Im}(\bar{z}w)$ , где чертой обозначено комплексное сопряжение, совпадает с определителем матрицы, составленной из векторов-столбцов  $z$  и  $w$ .

Из геометрии паркетов  $S$  и из леммы 3.17 вытекает следующее утверждение.

**Лемма 3.18** Для того, чтобы концевое ребро минимальной реализации  $\Gamma'$  остова скелета  $S$ , инцидентное граничной вершине  $H_2$ , лежало в  $H$ -допустимом угле концевой линейной участка  $Z_2$ , необходимо, чтобы число  $\delta_2 = \text{Im}(\bar{\sigma}_2 n_2)$  было положительным.

Для того, чтобы концевое ребро минимальной реализации  $\Gamma'$  остова скелета  $S$ , инцидентное граничной вершине  $H_4$ , лежало в  $H$ -допустимом угле концевой линейной участка  $Z_4$ , необходимо, чтобы число  $\delta_4^\alpha = \text{Im}(\bar{\sigma}_4 n_4^\alpha)$  было положительным.

Отметим, что в лемме 3.18 можно сформулировать еще 6 аналогичных утверждений, однако, как показывает компьютерный эксперимент, для завершения доказательства предложения 3.12 достаточно проверить невыполнение именно тех двух условий из леммы 3.18.

Вычислим  $\delta_2$  и  $\delta_4^\alpha$ . Для этого запишем сначала вектора  $n_2$  и  $n_4^\alpha$ . Имеем:

$$n_2 = -e^{i(-2b_{23}\alpha + \pi/6 + e(z_2)\alpha)} \text{ и } n_4^\alpha = -e^{i(2b_{34}\alpha - \pi/6 - e(z_4)\alpha + \alpha)}.$$

Вычислим  $\delta_2$  для каждого из регулярных скелетов, вошедших в список предложения 3.18 для  $n = 6p + 1$  и  $n = 6p + 4$ , и  $\delta_4^\alpha$  — для каждого из регулярных скелетов из предложения 3.18 для  $n = 6p + 2$  и  $n = 6p + 5$ . Поскольку каждая из восьми серий предложения 3.18 зависит от двух параметров —  $p$  и  $t$ , мы получим восемь функций от  $p$  и  $t$ . Мы покажем, что каждая из полученных восьми функций отрицательна при всех допустимых парах  $(p, t)$ . Выпишем эти функции. Пусть, как и выше,  $\nu = (z_1, z_2, z_3)$  и  $\alpha = \pi/n$ .

Случай  $n = 6p + 1$ ,  $\nu = (2t, 2(p-t) - 1, 2(p+t) - 1)$ ,  $1 \leq t \leq p - 2$ ,  $p \geq 3$ .

$$\delta_2 = 2 \csc(\alpha) \sin\left(\frac{\alpha}{6}\right) \left( \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\alpha}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + \cos(\alpha) \cos\left(\frac{\alpha}{6}\right) - \sqrt{3} \cos\left(\frac{\alpha}{6}\right) \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6} + 2\alpha t\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{6}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{3} - 2\alpha t\right) \right)$$

Случай  $n = 6p + 1$ ,  $\nu = (2t + 1, 2(p-t) - 2, 2(p+t))$ ,  $1 \leq t \leq p - 2$ ,  $p \geq 3$ .

$$\delta_2 = 2 \csc(\alpha) \sin\left(\frac{\alpha}{6}\right) \left( \cos\left(\frac{\alpha}{6}\right) + \cos\left(\frac{5\alpha}{6} + \frac{\pi}{6}\right) \sin(\alpha) - \cos\left(\frac{\alpha}{6}\right) \cos\left(\frac{2\alpha}{3} + 2\alpha t\right) - \sqrt{3} \cos\left(\frac{\alpha}{6}\right) \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) \right)$$

Случай  $n = 6p + 2$ ,  $\nu = (2t, 2(p-t) - 1, 2(p+t))$ ,  $1 \leq t \leq p - 2$ ,  $p \geq 3$ .

$$\delta_4^\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + \csc(\alpha) \left( \sin\left(\frac{4\alpha}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{4\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) \right)$$

Случай  $n = 6p + 2$ ,  $\nu = (2t + 1, 2(p-t) - 2, 2(p+t) + 1)$ ,  $1 \leq t \leq p - 2$ ,  $p \geq 3$ .

$$\delta_4^\alpha = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cos\left(\frac{2\alpha}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) + \csc(\alpha) \left( \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{5\alpha}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{7\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{4\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) \right)$$

Случай  $n = 6p + 4$ ,  $\nu = (2t, 2(p-t), 2(p+t))$ ,  $1 \leq t \leq p - 1$ ,  $p \geq 2$ .

$$\delta_2 = \csc(\alpha) \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \left( 4 \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \sin(\alpha) - 2 \sin\left(\frac{2\alpha}{3} - \alpha t\right) \sin\left(\frac{\alpha}{3} + \alpha t\right) - \sqrt{3} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) \right)$$

Случай  $n = 6p + 4$ ,  $\nu = (2t + 1, 2(p - t) - 1, 2(p + t) + 1)$ ,  $1 \leq t \leq p - 2$ ,  $p \geq 3$ .

$$\delta_2 = \csc(\alpha) \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \left(1 - 2 \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \sin(\alpha) - \cos\left(\frac{2\alpha}{3} + 2\alpha t\right) - \sqrt{3} \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right)\right)$$

Случай  $n = 6p + 5$ ,  $\nu = (2t, 2(p - t), 2(p + t) + 1)$ ,  $1 \leq t \leq p - 1$ ,  $p \geq 2$ .

$$\delta_4^\alpha = \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{2\alpha}{3}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + \csc(\alpha) \left(\cos(\alpha) \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\alpha}{3}\right) \sin(\alpha) - \sin\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{4\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right)\right)$$

Случай  $n = 6p + 5$ ,  $\nu = (2t + 1, 2(p - t) - 1, 2(p + t) + 2)$ ,  $1 \leq t \leq p - 2$ ,  $p \geq 3$ .

$$\delta_4^\alpha = -\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + \csc(\alpha) \left(\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) \sin(\alpha) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{7\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{4\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} + 2\alpha t\right)\right)$$

Отметим, что ограничения на  $t$  и  $p$  вытекают из требования, в соответствии с которым рассматриваемый паркет является скелетом, т.е. каждый его концевой линейный участок состоит не менее чем из двух ячеек.

Легко видеть, что каждая из только что выписанных функций может быть представлена в виде  $A \cos(B + 2\alpha t)$ , где  $A$  и  $B$  — функции, зависящие только от  $\alpha$ , т.е. не зависящие от  $t$ . Поэтому, при фиксированном  $\alpha$ , на каждом отрезке величины меньше чем  $\frac{\pi}{2\alpha}$  (последняя величина равна половине периода для  $A \cos(B + 2\alpha t)$ ) каждая такая функция имеет не более одного экстремума. Мы покажем, что при каждом допустимом  $\alpha$  (напомним, что  $\alpha = \frac{\pi}{n}$ , а на  $n$  имеются естественные ограничения, вытекающие из ограничений на  $p$ ) рассматриваемые функции или монотонны по  $t$ , или на области изменения параметра  $t$  имеют локальный минимум. Иными словами, эти функции не могут иметь локального максимума в области изменения параметра  $t$ .

Для этого вычислим вторую производную по  $t$  от каждой из этих функций. Оказывается, эти вторые производные неотрицательны, что и доказывает отсутствие локальных максимумов. Ниже приведен список искомых вторых производных.

Случай  $n = 6p + 1$ ,  $\nu = (2t, 2(p - t) - 1, 2(p + t) - 1)$ ,  $1 \leq t \leq p - 2$ ,  $p \geq 3$ .

$$\frac{\partial^2 \delta_2}{\partial t^2} = 4\alpha^2 \csc(\alpha) \sin(\alpha/3) (\cos(\alpha/3 - 2\alpha t) + \sqrt{3} \cos(\alpha - \pi/6 + 2\alpha t)).$$

Случай  $n = 6p + 1$ ,  $\nu = (2t + 1, 2(p - t) - 2, 2(p + t))$ ,  $1 \leq t \leq p - 2$ ,  $p \geq 3$ .

$$\frac{\partial^2 \delta_2}{\partial t^2} = 4\alpha^2 \csc(\alpha) \sin(\alpha/3) (\cos(2\alpha/3 + 2\alpha t) + \sqrt{3} \sin(2\alpha + \pi/3 + 2\alpha t)).$$

Случай  $n = 6p + 2$ ,  $\nu = (2t, 2(p-t) - 1, 2(p+t))$ ,  $1 \leq t \leq p-2$ ,  $p \geq 3$ .

$$\frac{\partial^2 \delta_4^\alpha}{\partial t^2} = 2\alpha^2 \csc(\alpha) (-\sqrt{3} \cos(4\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t) + 2 \cos(\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t) \sin(\alpha/3 + \pi/3)).$$

Случай  $n = 6p + 2$ ,  $\nu = (2t + 1, 2(p-t) - 2, 2(p+t) + 1)$ ,  $1 \leq t \leq p-2$ ,  $p \geq 3$ .

$$\frac{\partial^2 \delta_4^\alpha}{\partial t^2} = 2\alpha^2 \csc(\alpha) (-\sqrt{3} \cos(7\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t) + 2 \cos(4\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t) \sin(\alpha/3 + \pi/3)).$$

Случай  $n = 6p + 4$ ,  $\nu = (2t, 2(p-t), 2(p+t))$ ,  $1 \leq t \leq p-1$ ,  $p \geq 2$ .

$$\frac{\partial^2 \delta_2}{\partial t^2} = 4\alpha^2 \csc(\alpha) \sin(\alpha/3) (\cos(\alpha/3 - 2\alpha t) + \sqrt{3} \sin(\alpha + \pi/3 + 2\alpha t)).$$

Случай  $n = 6p + 4$ ,  $\nu = (2t + 1, 2(p-t) - 1, 2(p+t) + 1)$ ,  $1 \leq t \leq p-2$ ,  $p \geq 3$ .

$$\frac{\partial^2 \delta_2}{\partial t^2} = 4\alpha^2 \csc(\alpha) \sin(\alpha/3) (\cos(2\alpha/3 + 2\alpha t) + \sqrt{3} \sin(2\alpha + \pi/3 + 2\alpha t)).$$

Случай  $n = 6p + 5$ ,  $\nu = (2t, 2(p-t), 2(p+t) + 1)$ ,  $1 \leq t \leq p-1$ ,  $p \geq 2$ .

$$\frac{\partial^2 \delta_4^\alpha}{\partial t^2} = 2\alpha^2 \csc(\alpha) (-\sqrt{3} \cos(4\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t) + 2 \cos(\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t) \sin(\alpha/3 + \pi/3)).$$

Случай  $n = 6p + 5$ ,  $\nu = (2t + 1, 2(p-t) - 1, 2(p+t) + 2)$ ,  $1 \leq t \leq p-2$ ,  $p \geq 3$ .

$$\frac{\partial^2 \delta_4^\alpha}{\partial t^2} = 2\alpha^2 \csc(\alpha) (-\sqrt{3} \cos(7\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t) + 2 \cos(4\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t) \sin(\alpha/3 + \pi/3)).$$

Легко видеть, что каждая из этих вторых производных неотрицательна при любых допустимых  $\alpha$  и  $t$ , что и требовалось.

Таким образом, каждая исследуемая функция  $\delta_2$  и  $\delta_4^\alpha$  принимает наибольшее значение на концах отрезка изменения параметра  $t$ . Оказывается, это наибольшее значение достигается на правом конце отрезка. Обозначим через  $\varepsilon_2$  (через  $\varepsilon_4^\alpha$ ) разность между значениями соответствующей функции  $\delta_2$  (функции  $\delta_4^\alpha$ ) на правом и левом концах отрезка изменения параметра  $t$ . Оказывается, все эти функции  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_4^\alpha$  неотрицательны при всех допустимых  $\alpha$ . Приведем список функций  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_4^\alpha$  во всех интересующих нас случаях.

Случай  $n = 6p + 1$ ,  $\nu = (2t, 2(p-t) - 1, 2(p+t) - 1)$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/19$ .

$$\varepsilon_2 = 4 \csc(\alpha) \sin(\alpha/6) \cos(\alpha/6) \sin(19\alpha/6 - \pi/6) * (\sqrt{3} \sin(\alpha/6) + \sin(3\alpha/2 - \pi/6)).$$

Случай  $n = 6p + 1$ ,  $\nu = (2t + 1, 2(p - t) - 2, 2(p + t))$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/19$ .

$$\varepsilon_2 = 4 \csc(\alpha) \sin(\alpha/6) \cos(\alpha/6) \sin(19\alpha/6 - \pi/6) * (-\sqrt{3} \sin(5\alpha/6) + \sin(\alpha/2 - \pi/6)).$$

Случай  $n = 6p + 2$ ,  $\nu = (2t, 2(p - t) - 1, 2(p + t))$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/20$ .

$$\varepsilon_4^\alpha = \csc(\alpha) \cos(10\alpha/3 + \pi/3) (-\sqrt{3} + 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha/3 + \pi/3)).$$

Случай  $n = 6p + 2$ ,  $\nu = (2t + 1, 2(p - t) - 2, 2(p + t) + 1)$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/20$ .

$$\varepsilon_4^\alpha = \csc(\alpha) \cos(10\alpha/3 + \pi/3) (-\sqrt{3} \cos(\alpha) + 2 \sin(\alpha/3 + \pi/3)).$$

Случай  $n = 6p + 4$ ,  $\nu = (2t, 2(p - t), 2(p + t))$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/16$ .

$$\varepsilon_2 = 8 \csc(\alpha) \sin(\alpha/3) \cos(\alpha/3 - \pi/3) \cos(\alpha/3 + \pi/3) * \sin(\alpha/3 - \pi/6) \sin(8\alpha/3 - \pi/6).$$

Случай  $n = 6p + 4$ ,  $\nu = (2t + 1, 2(p - t) - 1, 2(p + t) + 1)$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/22$ .

$$\varepsilon_2 = 2 \csc(\alpha) \sin(\alpha/3) \sin(11\alpha/3 - \pi/6) (-\sqrt{3} \sin(\alpha/3) + \sin(\alpha - \pi/6)).$$

Случай  $n = 6p + 5$ ,  $\nu = (2t, 2(p - t), 2(p + t) + 1)$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/17$ .

$$\varepsilon_4^\alpha = \csc(\alpha) \cos(\alpha/2) \cos(17\alpha/6 + \pi/3) (-\sqrt{3} + 2 \sin(\alpha/3 + \pi/3)).$$

Случай  $n = 6p + 5$ ,  $\nu = (2t + 1, 2(p - t) - 1, 2(p + t) + 2)$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/23$ .

$$\varepsilon_4^\alpha = \csc(\alpha) \cos(\alpha/2) \cos(23\alpha/6 + \pi/3) (-\sqrt{3} + 2 \sin(\alpha/3 + \pi/3)).$$

Несложно показать, что каждая из этих функций неотрицательна при всех допустимых  $\alpha$ . Приведем пример доказательства, скажем, для первого случая. Ясно, что  $\sqrt{3} \sin(\alpha/6) + \sin(3\alpha/2 - \pi/6)$  является возрастающей функцией при  $0 < \alpha \leq \pi/19$ , поэтому

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \sin(\alpha/6) + \sin(3\alpha/2 - \pi/6) &\leq (\sqrt{3} \sin(\alpha/6) + \sin(3\alpha/2 - \pi/6)) \Big|_{\alpha=\pi/19} \\ &\approx -0.224378 < 0. \end{aligned}$$

Кроме того,  $\sin(19\alpha/6 - \pi/6) \leq 0$  при  $0 < \alpha \leq \pi/19$ , откуда немедленно вытекает неотрицательность функции  $\varepsilon_2$  для первого случая. Неотрицательность остальных функций доказывается аналогично.

Итак, нам осталось проверить, что каждая из рассматриваемых функций  $\delta_2$  и  $\delta_4^\alpha$ , в которую вместо параметра  $t$  подставлено его максимальное допустимое значение (полученные функции мы обозначим через  $\varphi_2$  и  $\varphi_4^\alpha$  соответственно), при всех допустимых  $\alpha$  принимает лишь отрицательные значения.

Приведем список функций  $\varphi_2$  и  $\varphi_4^\alpha$  в интересующих нас случаях.

Случай  $n = 6p + 1$ ,  $\nu = (2(p - 2), 3, 4p - 5)$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/19$ .

$$\varphi_2 = 2 \csc(\alpha) \sin(\alpha/3) \left( \cos(\alpha/6) \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \sin(\alpha/6 + \pi/3) - \cos(\alpha/6) (-\cos(14\alpha/3 - \pi/3) + \sqrt{3} \cos(10\alpha/3 - \pi/6)) \right).$$

Случай  $n = 6p + 1$ ,  $\nu = (2(p - 2) + 1, 2, 4p - 4)$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/19$ .

$$\varphi_2 = 2 \csc(\alpha) \sin(\alpha/3) \left( \cos(\alpha/6) + \cos(5\alpha/6 + \pi/6) \sin(\alpha) + \cos(\alpha/6) (-\cos(11\alpha/3 - \pi/3) - \sqrt{3} \sin(7\alpha/3 + \pi/3)) \right).$$

Случай  $n = 6p + 2$ ,  $\nu = (2(p - 2), 3, 4p - 4)$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/20$ .

$$\varphi_4^\alpha = \csc(\alpha) \sin(2\alpha/3) \left( \cos(8\alpha/3) - 2 \cos(2\alpha/3) \cos(8\alpha/3) - 2 \cos(7\alpha/3) \cos(5\alpha/3 - \pi/3) + \sqrt{3} \cos(4\alpha/3 - \pi/6) \right).$$

Случай  $n = 6p + 2$ ,  $\nu = (2(p - 2) + 1, 2, 4p - 3)$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/20$ .

$$\varphi_4^\alpha = \csc(\alpha) \sin(\alpha/3) \left( -2 \cos(\alpha) \cos(7\alpha/3 - \pi/3) - \sqrt{3} \cos(8\alpha/3 - \pi/6) + 2 \cos(\alpha/3 + \pi/6)^2 \right).$$

Случай  $n = 6p + 4$ ,  $\nu = (2(p - 1), 2, 4p - 2)$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/16$ .

$$\varphi_2 = \csc(\alpha) \sin(\alpha/3) \left( 4 \cos(\alpha/3) \cos(\alpha/3 + \pi/6) \sin(\alpha) + \sqrt{3} \sin(7\alpha/3 - 2\pi/3) + 2 \sin(4\alpha/3 - \pi/6) \sin(7\alpha/3 - \pi/6) \right).$$

Случай  $n = 6p + 4$ ,  $\nu = (2(p - 2) + 1, 3, 4p - 3)$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/22$ .

$$\varphi_2 = \csc(\alpha) \sin(\alpha/3) \left( -2 \cos(\alpha/3 + \pi/6) \sin(\alpha) + \sqrt{3} \sin(10\alpha/3 - 2\pi/3) + 2 \sin(7\alpha/3 - \pi/6)^2 \right).$$

Случай  $n = 6p + 5$ ,  $\nu = (2(p - 1), 2, 4p - 1)$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/17$ .

$$\varphi_4^\alpha = 2 \csc(\alpha) \sin(\alpha/3) \left( -\cos(\alpha/3) \cos(3\alpha) + \cos(\alpha/2) \cos(\alpha/2 - \pi/3) - \sin(\alpha/6) \sin(\alpha/2) - \cos(\alpha/3 - \pi/6) \sin(3\alpha) \right).$$

Случай  $n = 6p + 5$ ,  $\nu = (2(p - 2) + 1, 3, 4p - 2)$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/23$ .

$$\varphi_4^\alpha = \csc(\alpha) \sin(\alpha/3) \left( 1/2 - \sqrt{3} \cos(11\alpha/3 - \pi/6) + 4 \cos(\alpha/3) \sin(\alpha/6) \sin(5\alpha/6 - \pi/3) + 2 \sin(4\alpha/3) \sin(3\alpha - \pi/3) \right).$$

Покажем, что эти функции  $\varphi_2$  и  $\varphi_4^\alpha$  отрицательны при всех допустимых  $\alpha$ . Для этого, очевидно, достаточно показать, что последний множитель каждой из этих функций меньше нуля. Соответствующие последние множители функций  $\varphi_2$  и  $\varphi_4^\alpha$  обозначим через  $\psi_2$  и  $\psi_4^\alpha$ . Рассмотрим каждый из восьми случаев.

Случай  $n = 6p + 1$ ,  $\nu = (2(p - 2), 3, 4p - 5)$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/19$ .

$$\begin{aligned} \psi_2 < & (\cos(\alpha/6) \cos(\alpha)) \Big|_{\alpha=0} + (\sin(\alpha) \sin(\alpha/6 + \pi/3)) \Big|_{\alpha=\pi/19} - \\ & \cos(\alpha/6) \Big|_{\alpha=\pi/19} * (-\cos(14\alpha/3 - \pi/3) + \sqrt{3} \cos(10\alpha/3 - \pi/6)) \Big|_{\alpha=0} \approx \\ & -0.854484 < 0. \end{aligned}$$

Случай  $n = 6p + 1$ ,  $\nu = (2(p - 2) + 1, 2, 4p - 4)$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/19$ . Отметим сначала, что

$$\begin{aligned} \cos(\alpha/6) (-\cos(11\alpha/3 - \pi/3) - \sqrt{3} \sin(7\alpha/3 + \pi/3)) = \\ -\cos(7\alpha/2 - \pi/3)/2 - \cos(23\alpha/6 - \pi/3)/2 - \\ \sqrt{3} \sin(13\alpha/6 + \pi/3)/2 - \sqrt{3} \sin(5\alpha/2 + \pi/3)/2, \end{aligned}$$

и все четыре функции в правой части равенства монотонно убывают при  $0 < \alpha \leq \pi/19$ , поэтому эта часть функции  $\psi_2$  ограничена сверху своим значением в точке  $\alpha = 0$ , т.е. при  $0 < \alpha \leq \pi/19$  имеем:

$$\cos(\alpha/6) (-\cos(11\alpha/3 - \pi/3) - \sqrt{3} \sin(7\alpha/3 + \pi/3)) < -2.$$

С другой стороны, оставшаяся часть функции  $\psi_2$ , т.е.  $\cos(\alpha/6) + \cos(5\alpha/6 + \pi/6) \sin(\alpha)$ , меньше 2, откуда и вытекает, что  $\psi_2 < 0$  при  $0 < \alpha \leq \pi/19$ .

Случай  $n = 6p + 2$ ,  $\nu = (2(p - 2), 3, 4p - 4)$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/20$ .

$$\begin{aligned} \psi_4^\alpha < & \cos(8\alpha/3) \Big|_{\alpha=0} - (2 \cos(2\alpha/3) \cos(8\alpha/3)) \Big|_{\alpha=\pi/20} - \\ & (2 \cos(7\alpha/3) \cos(5\alpha/3 - \pi/3)) \Big|_{\alpha=0} + \sqrt{3} \cos(4\alpha/3 - \pi/6) \Big|_{\alpha=\pi/20} \approx \\ & -0.169804 < 0. \end{aligned}$$

Случай  $n = 6p + 2$ ,  $\nu = (2(p - 2) + 1, 2, 4p - 3)$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/20$ .

$$\psi_4^\alpha < \psi_4^\alpha \Big|_{\alpha=0} = -1 < 0.$$

Случай  $n = 6p + 4$ ,  $\nu = (2(p - 1), 2, 4p - 2)$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/16$ .

$$\begin{aligned} \psi_2 < & (4 \cos(\alpha/3) \cos(\alpha/3 + \pi/6)) \Big|_{\alpha=0} * \sin(\alpha) \Big|_{\alpha=\pi/16} + \\ & (\sqrt{3} \sin(7\alpha/3 - 2\pi/3) + 2 \sin(4\alpha/3 - \pi/6) \sin(7\alpha/3 - \pi/6)) \Big|_{\alpha=0} \approx \\ & -0.324187 < 0. \end{aligned}$$

Случай  $n = 6p + 4$ ,  $\nu = (2(p - 2) + 1, 3, 4p - 3)$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/22$ .

$$\psi_2 < \psi_2 \Big|_{\alpha=0} = -1 < 0.$$

Случай  $n = 6p + 5$ ,  $\nu = (2(p - 1), 2, 4p - 1)$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/17$ .

$$\begin{aligned} \psi_4^\alpha < & -(\cos(\alpha/3) \cos(3\alpha)) \Big|_{\alpha=\pi/17} + \cos(\alpha/2) \Big|_{\alpha=0} \cos(\alpha/2 - \pi/3) \Big|_{\alpha=\pi/17} - \\ & (\sin(\alpha/6) \sin(\alpha/2) - \cos(\alpha/3 - \pi/6) \sin(3\alpha)) \Big|_{\alpha=0} \approx \\ & -0.270831 < 0. \end{aligned}$$

Случай  $n = 6p + 5$ ,  $\nu = (2(p - 2) + 1, 3, 4p - 2)$ ,  $0 < \alpha \leq \pi/23$ .

$$\psi_4^\alpha < \psi_4^\alpha \Big|_{\alpha=0} = -1 < 0.$$

Таким образом, предложение 3.12 полностью доказано.

## 8 Не существование правильной минимальной реализации у скелетов с пятью концевыми линейными участками

В настоящем параграфе мы разберем случай 5-скелетов.

**Предложение 3.19** *Скелеты с пятью концевыми линейными участками не имеют  $RM$ -реализации.*

Мы начнем с описания некоторых элементарных свойств индексов боковин.

**Лемма 3.19** *Сумма индексов всех боковин скелета  $S$  равна нулю.*

Две боковины  $B$  и  $B'$  называются *соседними*, если один из порождающих боковину  $B$  концевых линейных участков также является одним из концевых линейных участков, порождающих боковину  $B'$ .

**Лемма 3.20** *Соседние боковины не могут одновременно иметь индекс 1.*

**Лемма 3.21** *Соседние боковины не могут одновременно иметь индекс  $-1$ .*

Пусть  $S$  — скелет с пятью концевыми линейными участками, имеющий  $RM$ -реализацию.

**Следствие 3.11** *У скелета  $S$  имеется не более двух боковин индекса 1.*

**Следствие 3.12** *У скелета  $S$  имеется не более двух боковин индекса  $-1$ .*

**Следствие 3.13** *Существует ровно три возможности:*

- индексы всех боковин скелета  $S$  равны нулю;
- одна из боковин имеет индекс 1, еще одна — индекс  $-1$ , остальные три боковины имеют индекс 0;



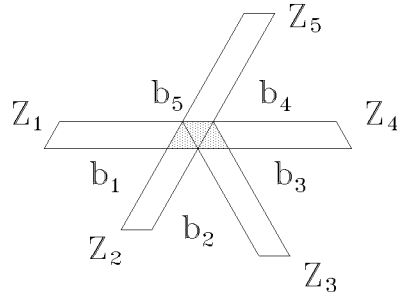


Рис. 3.20: Такие скелеты не имеют *RM*-реализации

- две боковины имеют индекс 1, две другие — индекс  $-1$ , и ровно одна боковина — индекс 0.

Пусть, опять же,  $S$  — скелет с пятью концевыми линейными участками, обладающий *RM*-реализацией на правильном  $n$ -угольнике. Обозначим через  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  и  $Z_5$  его последовательные концевые линейные участки и предположим, что  $Z_1$  и  $Z_2$  выходят из одной внутренней ячейки, и  $Z_3$  и  $Z_4$  тоже выходят из одной внутренней ячейки. Существует две возможности: углы между участками в каждой из пар  $(Z_1, Z_2)$  и  $(Z_3, Z_4)$  равны между собой и равны  $\pi/3$ ; в одной из этих пар, скажем в  $(Z_1, Z_2)$ , угол между участками равен  $2\pi/3$ , в то время как в оставшейся паре угол между участками равен  $\pi/3$ .

Рассмотрим первую возможность. Предположим, для определенности, что единственный угол между последовательными концевыми линейными участками, который может быть равен  $2\pi/3$  — это угол между  $Z_5$  и  $Z_1$ . По предложению 3.14, скелет  $S$  не имеет перегородок, поэтому, с точностью до симметрии, он имеет вид, изображенный на рис. 3.20.

**Предложение 3.20** *В сделанных выше предположениях, скелет  $S$ , в действительности, не может иметь *RM*-реализации.*

**Доказательство.** Обозначим через  $b_i$  длину боковины, порожденной концевыми линейными участками  $Z_i$  и  $Z_{i+1}$  (здесь и в дальнейшем сложение в индексах циклическое, а именно:  $i + j = 1 + (i + j - 1) \bmod 5$ ), и определим вектор  $b = (b_1, \dots, b_5)$  длин боковин. Предложение 3.13 влечет, что при  $i < 5$  имеем:  $b_i = \lfloor n/6 \rfloor - a_i$ , где  $a_i$  равно 0 или 1, а  $b_5 = \lfloor n/3 \rfloor - a_5$ , где  $a_5$  опять равно 0 или 1. Обозначим через  $a$  вектор  $(a_1, \dots, a_5)$ .

Далее, пусть  $z_i$  обозначает длину концевого линейного участка  $Z_i$ , т.е. количество ячеек, составляющих этот участок. Положим  $w_i = \lfloor z_i/2 \rfloor + \lfloor z_{i+1}/2 \rfloor$ , и пусть  $w = (w_1, \dots, w_5)$ . Обозначим через  $e_i$  функцию четности участка  $Z_i$ , а именно,  $e_i$  равно 0 если  $z_i$  четно, и равно 1 в противном случае. Теперь все готово, чтобы записать соотношение между длинами концевых

линейных участков и боковин скелета  $S$ . Непосредственные вычисления дают следующий результат:

$$\begin{aligned} b_1 &= [n/6] - a_1 = [z_1/2] + [z_2/2] = w_1, \\ b_2 &= [n/6] - a_2 = [z_2/2] + [z_3/2] + e_2 + e_3 = w_2 + e_2 + e_3, \\ b_3 &= [n/6] - a_3 = [z_3/2] + [z_4/2] = w_3, \\ b_4 &= [n/6] - a_4 = [z_4/2] + [z_5/2] + e_4 = w_4 + e_4, \\ b_5 &= [n/3] - a_5 = [z_5/2] + [z_1/2] + e_5 + e_1 = w_5 + e_5 + e_1. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая очевидное тождество  $z_i = 2[z_i/2] + e_i$ , получаем:

$$\begin{aligned} b \cdot (1, 1, -1, 1, -1) &= 2[n/6] - [n/3] + a \cdot (-1, -1, 1, -1, 1) \\ &= w \cdot (1, 1, -1, 1, -1) + e_2 + e_3 + e_4 - e_1 - e_5 \\ &= z_2 + e_3 + e_4 - e_1 - e_5, \end{aligned}$$

где “ $\cdot$ ” обозначает стандартное скалярное произведение векторов. Итак, имеем:

$$z_2 = e_1 + e_5 - e_3 - e_4 + (2[n/6] - [n/3]) + a \cdot (-1, -1, 1, -1, 1).$$

Положим, для краткости,  $E = e_1 + e_5 - e_3 - e_4$ ,  $N = 2[n/6] - [n/3]$  и  $A = a \cdot (-1, -1, 1, -1, 1)$ . Таким образом,  $z_2 = E + N + A$ . Отметим, что  $E \leq 2$ ,  $A \leq 2$ , и если  $n = 6p + r$ , где  $r$  — остаток от деления  $n$  на 6, то  $N = 0$  при  $0 \leq r \leq 2$ , и  $N = -1$  при  $3 \leq r \leq 5$ . Так как длина каждого концевого линейного участка не меньше 2, в частности,  $z_2 \geq 2$ , получаем, что при  $0 \leq r \leq 2$  должно быть  $A \geq 0$ , а при  $3 \leq r \leq 5$  имеем  $A \geq 1$ .

Далее, запишем условие того, что сумма длин всех боковин равна  $n - 5$ .

$$4[n/6] + [n/3] - \sum a_i = n - 5.$$

Подставляя в полученное равенство выражение  $n = 6p + r$ , найдем:

- $\sum a_i = 5 - r$  при  $0 \leq r \leq 2$ , и
- $\sum a_i = 6 - r$  при  $3 \leq r \leq 5$ .

Рассмотрим теперь случаи разных остатков  $r$ .

Пусть  $r = 0$ . Тогда  $\sum a_i = 5$ , поэтому каждое  $a_i$  равно 1. Отсюда  $A = -1$ , Противоречие.

Пусть  $r = 1$ , тогда  $\sum a_i = 4$ , поэтому ровно одно из  $a_i$  равно 0, и  $A \leq 0$ . Из условия  $z_2 \geq 2$  немедленно получаем:  $A = 0$  и  $E = 2$ , откуда, в частности,  $e_3 = e_4 = 0$ . Поэтому  $\text{ind}(B_3) = 1$ , и, по предложению 3.13,  $a_3 = 0$ . Отсюда  $A = -2$ , противоречие.

Пусть  $r = 2$ , тогда  $\sum a_i = 3$ , поэтому ровно два из  $a_i$  равны 0, и, так как  $A \geq 0$ , имеем  $A = 1$ . Тогда  $a_5 = 1$ , значит, по следствию 3.9,  $\text{ind}(B_5) = -1$ . Отсюда вытекает, что  $e_1 = e_5 = 0$ , поэтому  $E \leq 0$  и, значит,  $z_2 \leq 1$ , противоречие.

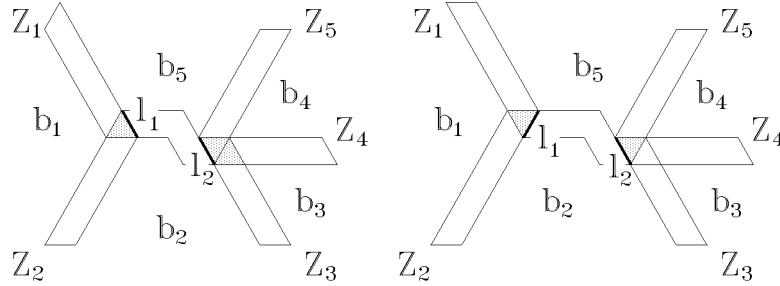


Рис. 3.21: Такие скелеты так же не имеют  $RM$ -реализации

Пусть  $r = 3$ , тогда  $\sum a_i = 3$ , поэтому ровно два из  $a_i$  равны 0, и необходимо  $A = 1$ ,  $E = 2$ , откуда  $e_1 = e_5 = 1$  и  $e_3 = e_4 = 0$ . Таким образом,  $\text{ind}(B_5) = 1$ . Однако, по предложению 3.13, при любом  $i < 5$  имеем:  $\text{ind}(B_i) = \pm 1$ . Но, в соответствие со следствием 3.13, индекс одной из боковин обязан равняться нулю, противоречие.

Пусть  $r = 4$ , тогда  $\sum a_i = 2$ , и ровно два из  $a_i$  равны 1. Следовательно, учитывая, что  $A \geq 1$ , получаем  $A = 2$ . Последнее необходимо влечет, что  $a_3 = 1$ . Отсюда  $\text{ind}(B_3) = -1$ , поэтому  $e_3 = e_4 = 1$ , и, значит,  $E \leq 0$ . Вспоминая, что  $N = -1$ , имеем  $z_2 \leq 1$ , противоречие.

Пусть  $r = 5$ , тогда  $\sum a_i = 1$ , и ровно одно из  $a_i$  равно 1. Поэтому  $A = 1$  и  $E = 2$ , откуда вытекает, что одно из  $a_3$  и  $a_5$  отлично от 0,  $e_1 = e_5 = 1$  и  $e_3 = e_4 = 0$ . Последние два условия дают:  $\text{ind}(B_3) = \text{ind}(B_5) = 1$ , поэтому  $a_3 = a_5 = 0$ , противоречие.

Предложение 3.20 доказано.

Перейдем теперь к рассмотрению второй возможности, а именно, в тех же обозначениях, предположим, что угол между концевыми линейными участками  $(Z_1, Z_2)$  равен  $2\pi/3$ .

**Предложение 3.21** *В сделанных выше предположениях, скелет  $S$ , в действительности, не может иметь  $RM$ -реализации.*

**Доказательство.** Отметим, что теперь с внутренней ячейки, пересекающейся по сторонам с концевыми линейными участками  $Z_1$  и  $Z_2$ , может выходить перегородка, которую мы обозначим через  $L$ . Обозначим через  $l_1$  и  $l_2$  ребра перегородки  $L$ , по которым  $L$  крепится к оставшейся части скелета  $S$ .

Возникает две возможности:  $l_1$  и  $l_2$  параллельны, и  $l_1$  и  $l_2$  не параллельны, рис. 3.21.

Пусть  $l_1$  параллельно  $l_2$ . Легко видеть, что в этом случае длины боковин перегородки  $L$  равны между собой, независимо от формы перегородки.

Добавив к введенным выше обозначениям величину  $x$ , равную длине боковины перегородки  $L$ , получаем:

$$\begin{aligned} b_1 &= [n/3] - a_1 = [z_1/2] + [z_2/2] + e_1 = w_1 + e_1, \\ b_2 &= [n/6] - a_2 = [z_2/2] + [z_3/2] + e_2 + e_3 + x = w_2 + e_2 + e_3 + x, \\ b_3 &= [n/6] - a_3 = [z_3/2] + [z_4/2] = w_3, \\ b_4 &= [n/6] - a_4 = [z_4/2] + [z_5/2] + e_4 = w_4 + e_4, \\ b_5 &= [n/3] - a_5 = [z_5/2] + [z_1/2] + e_5 + x = w_5 + e_5 + x. \end{aligned}$$

Отсюда, выводим:

$$\begin{aligned} b \cdot (-1, 1, -1, 1, 1) &= 2[n/6] - [n/3] + a \cdot (1, -1, 1, -1, -1) \\ &= w \cdot (-1, 1, -1, 1, 1) + e_5 + e_2 + e_3 + e_4 + 2x - e_1 \\ &= z_5 + e_2 + e_3 + e_4 + 2x - e_1. \end{aligned}$$

Итак, имеем:

$$z_5 = e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - 2x + (2[n/6] - [n/3]) + a \cdot (1, -1, 1, -1, -1).$$

Положим, для краткости,  $E = e_1 - e_2 - e_3 - e_4$ ,  $N = 2[n/6] - [n/3]$  и  $A = a \cdot (1, -1, 1, -1, -1)$ . Таким образом,  $z_5 = E - 2x + N + A$ . Отметим, что  $E \leq 1$ ,  $A \leq 2$ , и если  $n = 6p + r$ , то  $N = 0$  при  $0 \leq r \leq 2$ , и  $N = -1$  при  $3 \leq r \leq 5$ .

Легко видеть, что если  $x > 0$ , то, очевидно,  $z_5 \leq 1$ , противоречие. Поэтому  $x = 0$ .

Далее, если  $r \geq 3$ , то  $N = -1$ , и из условия  $z_5 \geq 2$  необходимо вытекает, что  $A = 2$ , поэтому  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = e_3 = e_4 = 0$ . Но тогда  $\text{ind}(B_2) = -1$ , поэтому  $a_2 = 1$ , значит  $A \leq 1$ , противоречие.

Итак, осталось рассмотреть случай  $r < 3$ . Но тогда, по предложению 3.13, при  $i > 1$  имеем:  $a_i = 0$  тогда и только тогда, когда  $\text{ind}(B_i) = 1$ . Ясно, что условие  $z_5 \geq 2$  влечет  $A \geq 1$ , однако последнее неравенство выполняется если только по крайней мере двое из трех  $a_2$ ,  $a_4$  и  $a_5$  равны нулю, т.е., по крайней мере две из трех боковин  $B_2$ ,  $B_4$  и  $B_5$  имеют индекс 1. Из леммы 3.20 получаем, что необходимо  $\text{ind}(B_2) = 1$ , следовательно,  $e_2 = e_3 = 1$ , откуда  $E \leq -1$  и, значит,  $z_5 \leq 1$ , противоречие.

Случай параллельных  $l_1$  и  $l_2$  полностью разобран.

Пусть теперь  $l_1$  не параллельно  $l_2$ . Легко видеть, что при выбранных обозначениях, длина той боковины перегородки  $L$ , которая содержится в  $B_5$ , меньше на 1, чем длина боковины из  $L$ , содержащейся в  $B_2$ . Обозначим через  $x$  длину боковины  $L \cap B_5$ , тогда длина боковины  $L \cap B_2$  равна  $x + 1$ .

Имеем:

$$\begin{aligned} b_1 &= [n/3] - a_1 = [z_1/2] + [z_2/2] + e_2 = w_1 + e_2, \\ b_2 &= [n/6] - a_2 = [z_2/2] + [z_3/2] + e_3 + x + 1 = w_2 + e_3 + x + 1, \\ b_3 &= [n/6] - a_3 = [z_3/2] + [z_4/2] = w_3, \\ b_4 &= [n/6] - a_4 = [z_4/2] + [z_5/2] + e_4 = w_4 + e_4, \\ b_5 &= [n/3] - a_5 = [z_5/2] + [z_1/2] + e_5 + e_1 + x = w_5 + e_5 + e_1 + x. \end{aligned}$$

Отсюда, выводим:

$$\begin{aligned} b \cdot (-1, 1, -1, 1, 1) &= 2[n/6] - [n/3] + a \cdot (1, -1, 1, -1, -1) \\ &= w \cdot (-1, 1, -1, 1, 1) + e_5 + e_1 + e_3 + e_4 + 2x + 1 - e_2 \\ &= z_5 + e_1 + e_3 + e_4 + 2x + 1 - e_2. \end{aligned}$$

Итак, имеем:

$$z_5 = e_2 - e_1 - e_3 - e_4 - 2x - 1 + N + A,$$

где  $N = 2[n/6] - [n/3]$  и  $A = a \cdot (1, -1, 1, -1, -1)$ . Отметим, что  $A \leq 2$ , и  $N \leq 0$ .

Из условия  $z_5 \geq 2$  вытекает, что необходимо  $A = 2$ , однако тогда  $a_3 = 1$ , поэтому  $\text{ind}(B_3) \neq 1$ , значит одно из  $e_3$  и  $e_4$  равно 1, следовательно,  $z_5 \leq 1$ , противоречие.

Случай непараллельных  $l_1$  и  $l_2$  полностью разобран. Тем самым, предложение 3.21 полностью доказано.

Теперь доказательство предложения 3.19 получается объединением доказательств предложений 3.20 и 3.21.

## 9 Правильная минимальная реализация скелетов с шестью концевыми линейными участками

В настоящем параграфе мы опишем серии скелетов с шестью концевыми линейными участками, которые могли бы иметь  $RM$ -реализацию. Тем самым, мы завершим доказательство основной теоремы 3.1.

Пусть  $S$  — скелет с шестью концевыми линейными участками, обладающий  $RM$ -реализацией на правильном  $n$ -угольнике. Обозначим через  $Z_1, \dots, Z_6$  его последовательные концевые линейные участки. По следствию 2.10 главы 2, угол между  $Z_i$  и  $Z_{i+1}$  равен  $\pi/3$  (здесь и далее сложение в индексах циклическое, а именно:  $i + j = 1 + (i + j - 1) \pmod{6}$ ).

Назовем два концевых линейных участка *смежными*, если они пересекают одну и ту же внутреннюю ячейку. Пару смежных концевых линейных участков будем также называть *усами*. В соответствии с теоремой 2.2 главы 2, имеются следующие три возможности:

- (1) скелет  $S$  имеет трое усов;
- (2) скелет  $S$  имеет двое усов, причем оставшиеся два концевых линейных участка последовательны;
- (3) скелет  $S$  имеет двое усов, причем оставшиеся два концевых линейных участка не последовательны.

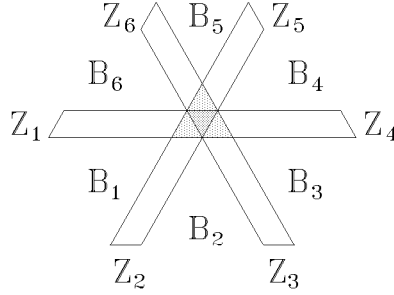


Рис. 3.22: Скелеты этого типа не имеют *RM*-реализации

Разберем первый случай. По предложению 3.14, такой скелет  $S$  не имеет перегородок, поэтому он содержит ровно один узел ветвления, представляющий собой правильный треугольник, в котором проведены три средние линии, рис. 3.22.

**Предложение 3.22** *В сделанных выше предположениях, скелет  $S$ , в действительности, не может иметь минимальной реализации на правильном  $n$ -угольнике.*

**Доказательство.** Пусть, для определенности, участки  $Z_1$  и  $Z_2$  формируют усы. Тогда усы также формируют пары концевых линейных участков  $(Z_3, Z_4)$  и  $(Z_5, Z_6)$ . Обозначим через  $B_i$  боковину, порожденную участками  $Z_i$  и  $Z_{i+1}$ , через  $b_i$  — длину боковины  $B_i$ , и через  $b$  — вектор  $(b_1, \dots, b_6)$ . Также, пусть  $z_i$  — длина участка  $Z_i$  (количество составляющих его ячеек),  $w_i = \lfloor z_i/2 \rfloor + \lfloor z_{i+1}/2 \rfloor$ ,  $w$  — вектор  $(w_1, \dots, w_6)$ .

По предложению 3.13,  $b_i = \lfloor n/6 \rfloor - a_i$ , где  $a_i$  равно или 0 или 1. Обозначим через  $a$  вектор  $(a_1, \dots, a_6)$ . Имеем:

$$\begin{aligned} b_1 &= \lfloor n/6 \rfloor - a_1 = w_1, \\ b_2 &= \lfloor n/6 \rfloor - a_2 = w_2 + e_2 + e_3, \\ b_3 &= \lfloor n/6 \rfloor - a_3 = w_3, \\ b_4 &= \lfloor n/6 \rfloor - a_4 = w_4 + e_4 + e_5, \\ b_5 &= \lfloor n/6 \rfloor - a_5 = w_5, \\ b_6 &= \lfloor n/6 \rfloor - a_6 = w_6 + e_6 + e_1. \end{aligned}$$

Далее,

$$b \cdot (-1, 1, -1, 1, -1, 1) = a_1 + a_3 + a_5 - a_2 - a_4 - a_6 = e_1 + \dots + e_6.$$

Сумму  $e_1 + \dots + e_6$  обозначим через  $E$ . Напишем условие того, что  $b_1 + \dots + b_6 = n - 6$ . Имеем:

$$6\lfloor n/6 \rfloor - \sum a_i = n - 6,$$

откуда, при  $n = 6[n/6] + r$ ,

$$\sum a_i = 6 - r.$$

Положим  $A = \sum a_i$ .

Пусть  $r = 0$ , тогда  $A = 6$ , поэтому все  $a_i$  равны 1. По предложению 3.13, индексы всех боковин равны 0. С другой стороны,  $E = 0$ , поэтому все  $e_i$  равны 0, но тогда  $\text{ind}(B_1) = 1$ , противоречие.

Пусть  $r = 1$ , тогда  $A = 5$ , поэтому ровно одно  $a_i$  равно 0, следовательно, индекс ровно одной боковины равен 1. С другой стороны,  $E$  должно равняться 1, поэтому ровно одно  $e_i$  равно 1. Так как пять концевых линейных участков имеют четную длину, то четыре последовательные боковины порождены концевыми линейными участками четной длины, откуда вытекает, что, по крайней мере, две боковины имеют индекс 1, противоречие.

Пусть  $r = 2$ , тогда  $A = 4$ , и, значит, ровно две боковины имеют индекс 1. С другой стороны,  $E$  может быть равно или 2 или 0. Если  $E = 0$ , то, очевидно, существуют три боковины индекса 1, противоречие. Пусть  $E = 2$ . Тогда  $a_1 = a_3 = a_5 = 1$ . В силу симметрии, положим, без ограничения общности, что  $a_6$  так же равно 1, а  $a_2 = a_4 = 0$ . Но тогда  $\text{ind}(B_2) = \text{ind}(B_4) = 1$ , поэтому  $e_2 = e_3 = e_4 = e_5 = 1$ , противоречие.

Пусть  $r = 3$ , тогда, по предложению 3.13, не существует боковин индекса 0. Так как  $A = 3$ , то имеется три боковины индекса 1, и три боковины индекса  $-1$ . По леммам 3.20 и 3.21, такие боковины чередуются, поэтому или все концевые линейные участки четной длины, т.е.  $E = 0$ , или все концевые линейные участки нечетной длины, т.е.  $E = 6$ . Однако, из условия  $A = 3$  вытекает, что  $E$  может равняться или 3 или 1, противоречие.

Пусть  $r = 4$ , тогда  $A = 2$ , значит ровно два  $a_i$  равны 1, поэтому ровно две боковины имеют индекс  $-1$ . Кроме того,  $E$  равно или 2 или 0. Если  $E = 0$ , то все концевые линейные участки четные, поэтому есть три боковины индекса  $-1$ , противоречие. Если же  $E = 2$ , то  $a_2 = a_4 = a_6 = 0$ . В силу симметрии, предположим, без ограничения общности, что  $a_5 = 0$ , а  $a_1 = a_3 = 1$ . Но тогда  $\text{ind}(B_1) = \text{ind}(B_3) = -1$ , откуда  $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = 1$ , противоречие.

И, наконец, пусть  $r = 5$ , тогда  $A = 1$ , поэтому ровно одна боковина имеет индекс  $-1$ . Кроме того,  $E = 1$ , поэтому ровно одно  $e_i$  равно 1. Однако, так как пять концевых линейных участков имеют четную длину, существует четыре последовательных боковины, порожденных концевыми линейными участками четной длины, поэтому две из этих боковин имеют индекс  $-1$ , противоречие.

Предложение 3.22 полностью доказано.

Разберем теперь второй случай, т.е. когда скелет  $S$  имеет двое усов, причем оставшиеся два концевых линейных участка последовательны, см. рис. 3.23.

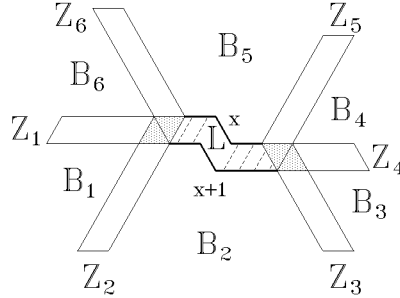


Рис. 3.23: Скелеты этого типа так же не имеют  $RM$ -реализации

**Предложение 3.23** В сделанных выше предположениях, скелет  $S$ , в действительности, не может иметь минимальной реализации на правильном  $n$ -угольнике.

**Доказательство.** По предложению 3.14, скелет  $S$  может иметь лишь одну перегородку  $L$ , причем эта перегородка третьего уровня (соответствует ребру третьего уровня в коде). Для определенности, будем считать, что пары  $(Z_1, Z_2)$  и  $(Z_3, Z_4)$  состоят из концевых линейных участков, выходящих с одной внутренней ячейки. Добавляя к введенным выше обозначениям длину  $x$  боковины  $B_5 \cap L$  перегородки  $L$ , и замечая, что оставшаяся боковина перегородки  $L$ , т.е.  $B_2 \cap L$ , имеет длину  $x + 1$ , запишем следующую систему уравнений, описывающую связь между длинами боковин и длинами концевых линейных участков скелета  $S$ .

$$\begin{aligned} b_1 &= [n/6] - a_1 = w_1, \\ b_2 &= [n/6] - a_2 = w_2 + e_2 + e_3 + x + 1, \\ b_3 &= [n/6] - a_3 = w_3, \\ b_4 &= [n/6] - a_4 = w_4 + e_4, \\ b_5 &= [n/6] - a_5 = w_5 + e_5 + e_6 + x, \\ b_6 &= [n/6] - a_6 = w_6 + e_1. \end{aligned}$$

Далее,

$$b \cdot (-1, 1, -1, 1, -1, 1) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - e_5 - e_6 + 1 = a_1 + a_3 + a_5 - a_2 - a_4 - a_6.$$

Обозначим  $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - e_5 - e_6$  через  $E$ . Отметим, что  $-2 \leq E \leq 4$ . Таким образом, получаем:

$$E = a_1 + a_3 + a_5 - a_2 - a_4 - a_6 - 1.$$

Как и выше, положив  $A = \sum a_i$ , и  $n = 6[n/6] + r$ , найдем, что  $A = 6 - r$ .

Разберем теперь случаи разных  $r$ .

Пусть  $r = 0$ , тогда, по предложению 3.13, скелет  $S$  не содержит боковин индексов  $\pm 1$ . Поэтому, если  $e_1 = 0$ , то  $e_2 = 1, e_3 = 0, e_4 = e_5 = 1$  и  $e_6 = 0$ ,



следовательно,  $E = 1$ . Но  $A = 6$ , поэтому  $E = -1$ , противоречие. Если же  $e_1 = 1$ , то  $e_2 = 0$ ,  $e_3 = 1$ ,  $e_4 = e_5 = 0$  и  $e_6 = 1$ , откуда  $E = 1$ , что опять противоречит условию  $A = 6$ .

Пусть  $r = 1$ , тогда  $A = 5$ , поэтому ровно одна боковина имеет индекс 1. Кроме того,  $E$  может равняться или 0, или  $-2$ . Пусть  $E = -2$ , тогда  $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = 0$ , а  $e_5 = e_6 = 1$ . Но отсюда вытекает, что  $\text{ind}(B_1) = \text{ind}(B_3) = 1$ , противоречие. Пусть теперь  $E = 0$ . Тогда  $a_1 = a_3 = a_5 = 1$ , и одно из  $a_i$  с четными номерами равно 0. Так как случай  $a_4 = 0$  симметричен случаю  $a_6 = 0$ , рассмотрим всего две возможности:  $a_2 = 0$  или  $a_4 = 0$ . Пусть  $a_2 = 0$ , значит  $e_2 = e_3 = 1$ . Но тогда  $e_5 = e_6 = 1$ , поэтому  $\text{ind}(B_2) = \text{ind}(B_5) = 1$ , противоречие. Рассмотрим второй случай,  $a_4 = 0$ , тогда  $e_4 = 1$ , а  $e_5 = 0$ . Следовательно,  $e_6 = 1$  и  $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ , поэтому  $\text{ind}(B_1) = \text{ind}(B_4) = 1$ , противоречие.

Пусть  $r = 2$ , тогда  $A = 4$  и  $E$  может равняться или 1 или  $-1$ . Пусть  $E = 1$ , тогда  $a_1 = a_3 = a_5 = 1$ . Из симметрии, достаточно рассмотреть только два случая:  $a_2 = 1$  или  $a_4 = 1$ . Пусть  $a_2 = 1$ , тогда  $a_4 = a_6 = 0$ , откуда  $e_4 = 1$ ,  $e_5 = e_6 = 0$  и  $e_1 = 1$ . Но тогда  $E \geq 2$ , противоречие. Пусть  $a_4 = 1$ , тогда  $a_2 = a_6 = 0$ , откуда  $e_2 = e_3 = 1$ ,  $e_6 = 0$ , а  $e_1 = 1$ , поэтому  $E \geq 2$ , противоречие. Рассмотрим теперь случай  $E = -1$ . Тогда одно из  $e_5$  и  $e_6$  равно 1. Так как эти случаи симметричны, положим  $e_5 = 1$ . Возникает две возможности:  $e_6 = 0$  или  $e_6 = 1$ . Пусть  $e_6 = 0$ , тогда необходимо  $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = 0$ , откуда  $a_1 = a_3 = 0$ , следовательно,  $E = -3$ , противоречие. Пусть  $e_6 = 1$ , тогда  $a_5 = 0$ , откуда  $a_1 = a_3 = 1$ , следовательно, один из  $e_1$  и  $e_2$  должен равняться 1, и один из  $e_3$  и  $e_4$  должен равняться 1, поэтому  $E \geq 0$ , противоречие.

Пусть  $r = 3$ , тогда нет боковин индекса 0, т.е. все боковины могут быть только индекса 1 или  $-1$ . Так как  $A = 3$ , то трое боковин имеют индекс 1, а трое других — индекс  $-1$ . Из лемм 3.20 и 3.21 вытекает, что боковины с индексами 1 и  $-1$  чередуются. Пусть  $\text{ind}(B_1) = 1$ , тогда  $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = 0$ , а  $e_5 = e_6 = 1$ , значит  $E = -2$ . Но  $a_1 = a_3 = a_5 = 0$ , а  $a_2 = a_4 = a_6 = 1$ , поэтому  $E = -4$ , противоречие. Пусть  $\text{ind}(B_1) = 0$ , тогда  $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = 1$ , а  $e_5 = e_6 = 0$ , значит  $E = 4$ . Но из  $A = 3$  вытекает, что  $E \leq 2$ , противоречие.

Пусть  $r = 4$ , тогда  $A = 2$ , и  $E$  может равняться или 1, или  $-1$ . Пусть  $E = 1$ , тогда  $a_2 = a_4 = a_6 = 0$ , и ровно одно из  $a_i$  с нечетными номерами равно 0. Из симметрии вытекает, что достаточно рассмотреть лишь две возможности:  $a_1 = 0$  и  $a_5 = 0$ . Пусть  $a_1 = 0$ , тогда  $a_3 = a_5 = 1$ , поэтому  $e_3 = e_4 = 1$ , а  $e_5 = e_6 = 0$ . Следовательно,  $E \geq 2$ , противоречие. Пусть  $a_5 = 0$ , тогда  $a_1 = a_3 = 1$ , поэтому  $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = 1$ , значит  $E \geq 2$ , противоречие. Рассмотрим теперь случай  $E = -1$ . Тогда одно из  $e_5$  и  $e_6$  равно 1. Из симметрии, можно положить  $e_5 = 1$ . Возникает две возможности:  $e_6 = 0$  и  $e_6 = 1$ . Пусть  $e_6 = 0$ , тогда  $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = 0$ , откуда  $a_2 = a_4 = 1$ ,  $a_1 = a_3 = a_5 = a_6 = 0$ , следовательно,  $E = -3$ , противоречие. Пусть теперь  $e_6 = 1$ , тогда  $a_5 = 0$ , а один из  $a_1$  и  $a_3$  равен 1.

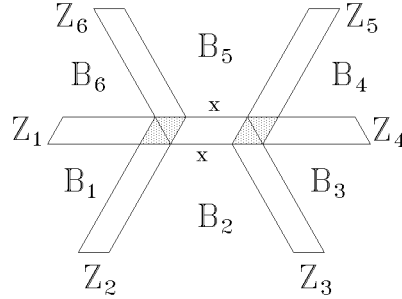


Рис. 3.24: Конечное число таких скелетов имеет  $RM$ -реализацию

Из симметрии, можно положить  $a_1 = 1$ , тогда  $e_1 = e_2 = 1$ , следовательно,  $E \geq 0$ , противоречие.

Пусть  $r = 5$ , тогда  $A = 1$ , т.е. ровно одна боковина имеет индекс  $-1$ , и  $E$  может равняться или  $0$  или  $-2$ . Пусть  $E = -2$ , тогда  $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = 0$ , и  $e_5 = e_6 = 1$ , но  $\text{ind}(B_2) = \text{ind}(B_4) = -1$ , противоречие. Пусть  $E = 0$ , тогда  $a_2 = a_4 = a_6 = 0$ , и лишь один из  $a_i$  с нечетными номерами равен  $1$ . Из симметрии, достаточно рассмотреть только два случая:  $a_1 = 1$  и  $a_5 = 1$ . Пусть  $a_1 = 1$ , тогда  $e_1 = e_2 = 1$ , поэтому  $e_3 = e_4 = 0$ , а  $e_5 = e_6 = 1$ , но тогда  $\text{ind}(B_1) = \text{ind}(B_4) = -1$ , противоречие. Пусть теперь  $a_5 = 1$ , тогда  $e_5 = e_6 = 0$ , откуда  $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = 0$ , но тогда  $\text{ind}(B_2) = \text{ind}(B_5) = -1$ , противоречие.

Предложение 3.23 полностью доказано.

Разберем, наконец, последний третий случай, а именно, пусть теперь скелет  $S$  имеет двое усов, причем оставшиеся два концевых линейных участка не последовательны. Для определенности, будем считать, что пары  $(Z_1, Z_2)$  и  $(Z_4, Z_5)$  состоят из концевых линейных участков, выходящих с одной внутренней ячейки, рис. 3.24.

Начнем с доказательства следующего предложения.

**Предложение 3.24** *В сделанных выше предположениях, перегорodka скелета  $S$  может быть лишь змеей, параллельной концевым линейным участкам  $Z_1$  и  $Z_4$ .*

**Доказательство.** Предложение 3.24 будет получено как следствие из следующей, существенно более общей леммы.

Пусть  $S$  — нелинейный скелет, имеющий  $RM$ -реализацию, и  $L$  — некоторый линейный подпаркет в  $S$ , не являющийся змеей и содержащий концевую змею  $Z$  скелета  $S$ . Ориентируем  $L$  от концевого линейного участка  $Z$  и разобьем линейный паркет  $L$  на последовательные змеи. Предположим, что первая ячейка  $\Delta$  второй змеи из  $L$  не является внутренней ячейкой скелета  $S$ .

Рассмотрим единственную боковину  $B$  скелета  $S$ , пересекающуюся с  $\Delta$  по ребру. Ориентация паркета  $L$  определяет ориентацию этой боковины. Обозначим через  $Z'$  второй, в смысле этой ориентации боковины  $B$ , концевой линейный участок скелета  $S$ , пересекающийся с  $B$ .

**Лемма 3.22** *В сделанных выше предположениях, угол между направлением концевого линейного участка  $Z'$  и концевого линейного участка  $Z$ , измеренный вдоль супербоковины, содержащей боковину  $B$ , не меньше чем  $\pi$ .*

Заметим, что из леммы 3.22 немедленно вытекает предложение 3.24. В самом деле, если единственная возможная перегородка скелета  $S$  не является змеей, параллельной концевому линейному участку  $Z_1$ , то легко построить требуемый в лемме 3.22 линейный подпаркет  $L$  скелета  $S$ , состоящий из концевого линейного участка  $Z_1$ , инцидентного ему узла ветвления и перегородки. Тогда, в силу леммы 3.22, угол между направлением участка  $Z_1$  и направлением участка  $Z_i$ , где  $i$  равно или 3, или 5, в зависимости от того, в какую сторону первый раз поворачивает линейный паркет  $L$ , должен быть не меньше чем  $\pi$ , что невозможно.

**Доказательство леммы 3.22.** Обозначим через  $m \in M$  концевую вершину змеи  $Z$ . Рассмотрим максимальный, содержащий  $Z$ , подпаркет-змеей  $\tilde{Z}$  из  $L$ . Ясно, что первая ячейка змеи  $\tilde{Z}$  — это концевая ячейка концевого линейного участка  $Z$ , а последняя — это ячейка  $\Delta$ . Пусть  $\gamma$  — ручеек, соответствующий змее  $\tilde{Z}$ . Последнее звено этого ручейка совпадает с отростком  $a$ , соответствующим ячейке  $\Delta$ .

В силу леммы 3.8, весь построенный ручеек,  $a$ , значит, и отросток  $a$ , лежит в характеристическом угле  $U(Z)$  концевого линейного участка  $Z$ . Напомним, что угол  $U(Z)$  имеет величину  $\pi/3 + \alpha$ , где  $\alpha = \pi/n$ , и образован лучами, составляющими с радиусом  $mO$  углы в  $\pi/6$  и  $\pi/6 + \alpha$  (здесь  $O$  — начало координат, совпадающее с центром окружности, в которую вписан многоугольник  $M$ ). Поэтому угловое расстояние между точкой  $m$  и концевой точкой  $A$  отростка  $a$  строго больше чем  $2\pi/3 - 2\alpha$ . Далее, угловое расстояние между точкой  $A$  и концевой вершиной  $m'$  концевого линейного участка  $Z'$  не меньше чем  $4\alpha$ , так как концевой линейный участок  $Z'$  состоит не меньше чем из 2 ячеек. Поэтому, угловое расстояние  $\varphi$  между  $m$  и  $m'$  вдоль дуги окружности  $S^1$ , содержащей точку  $A$ , строго больше чем  $2\pi/3 + 2\alpha$ .

Кроме того, из предложения 3.13 вытекает, что если угол между направлениями концевых линейных участков  $Z$  и  $Z'$  равен  $\pi l/3$ , то

$$\left| \varphi - \frac{\pi l}{3} \right| < 2\alpha.$$

В частности,

$$\varphi < \frac{\pi l}{3} + 2\alpha,$$

а так как, с другой стороны,  $\varphi > 2\pi/3 + 2\alpha$ , то  $l > 2$ , что и требовалось.

Предложение 3.24 доказано.

Воспользуемся теперь предложением 3.13 и следствием 3.9 для изучения возможных четностей концевых линейных участков скелета  $S$ . Пусть  $e$  — вектор четностей концевых линейных участков скелета  $S$ , т.е. вектор  $(e_1, \dots, e_6)$ .

**Предложение 3.25** *В сделанных выше предположениях, вектор  $e$  четностей концевых линейных участков скелета  $S$  может быть лишь следующего вида (здесь, как всегда,  $r$  обозначает остаток от деления  $n$  на 6):*

- если  $r = 0$ , то  $(0, 1, 0, 0, 1, 0)$  или  $(1, 0, 1, 1, 0, 1)$ ;
- если  $r = 1$ , то  $(0, 1, 1, 1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 1, 0, 1)$ , или  $(1, 0, 0, 0, 1, 1)$ ;
- если  $r = 2$ , то  $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 0, 1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0, 1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1, 0, 1, 1)$ , или  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ;
- если  $r = 3$ , то  $(0, 0, 0, 1, 1, 1)$  или  $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$ ;
- если  $r = 4$ , то  $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 0, 1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0, 1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1, 0, 1, 1)$ , или  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ;
- если  $r = 5$ , то  $(0, 1, 1, 1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 1, 0, 1)$ , или  $(1, 0, 0, 0, 1, 1)$ .

**Доказательство.** Так же, как и в предыдущем случае, скелет  $S$  может иметь лишь одну перегородку  $L$  третьего уровня, однако теперь длины обеих ее боковин  $B_5 \cap L$  и  $B_2 \cap L$  равны между собой. Обозначим эти длины через  $x$  и опять запишем систему уравнений, описывающую связь между длинами боковин и длинами концевых линейных участков скелета  $S$ . Имеем:

$$\begin{aligned} b_1 &= [n/6] - a_1 = w_1, \\ b_2 &= [n/6] - a_2 = w_2 + e_2 + e_3 + x, \\ b_3 &= [n/6] - a_3 = w_3 + e_4, \\ b_4 &= [n/6] - a_4 = w_4, \\ b_5 &= [n/6] - a_5 = w_5 + e_5 + e_6 + x, \\ b_6 &= [n/6] - a_6 = w_6 + e_1. \end{aligned}$$

Далее,

$$b \cdot (-1, 1, -1, 1, -1, 1) = e_1 + e_2 + e_3 - e_4 - e_5 - e_6 = a_1 + a_3 + a_5 - a_2 - a_4 - a_6.$$

Обозначим  $e_1 + e_2 + e_3 - e_4 - e_5 - e_6$  через  $E$ . Отметим, что  $-3 \leq E \leq 3$ . Таким образом, получаем:

$$E = a_1 + a_3 + a_5 - a_2 - a_4 - a_6.$$

Как и выше, положив  $A = \sum a_i$ , и  $n = 6[n/6] + r$ , найдем, что  $A = 6 - r$ .

Прежде, чем разбирать случай разных  $r$ , отметим еще одно свойство скелетов, имеющих  $RM$ -реализацию, непосредственно вытекающее из следствия 3.9.

**Утверждение 3.14** Пусть  $Z$  и  $Z'$  — два противоположно направленных концевых линейных участка произвольного скелета, обладающего  $RM$ -реализацией на правильном  $n$ -угольнике, где  $n = 6[n/6] + r$ . Тогда, если  $r$  — четно, то  $\text{ind}(Z, Z') = 0$ , в противном случае,  $\text{ind}(Z, Z') = \pm 1$ .

Отсюда мгновенно получается следующее утверждение.

**Утверждение 3.15** Для рассматриваемого скелета  $S$  с шестью концевыми линейными участками, имеем:

- если  $r$  четно, то  $e_4 = e_1$ ,  $e_5 = e_2$ , и  $e_6 = e_3$ , поэтому  $E = 0$ ;
- если  $r$  нечетно, то  $e_4 = 1 - e_1$ ,  $e_5 = 1 - e_2$ , и  $e_6 = 1 - e_3$ , поэтому  $E = 2(e_1 + e_2 + e_3) - 3$ .

Пусть  $r = 0$ . Тогда, по предложению 3.13, индексы всех боковин равны 0, поэтому если  $e_1 = 0$ , то  $e = (0, 1, 0, 0, 1, 0)$ , а если  $e_1 = 1$ , то  $e = (1, 0, 1, 1, 0, 1)$ .

Пусть  $r = 1$ , тогда  $A = 5$ , поэтому  $E$  может равняться или 1 или  $-1$ , следовательно,  $e_1 + e_2 + e_3$  равно или 2 или 1. В первом случае, ровно двое из  $e_1, e_2, e_3$  равны 1, а во втором случае — ровно одна из этих четностей равна 1. Получаем полный список возможных векторов четностей концевых линейных участков:  $(0, 1, 1, 1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 1, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 0, 0, 1, 1)$ .

Пусть  $r = 2$ , тогда  $A = 4$ , но, по утверждению 3.15,  $E = 0$ , поэтому ровно одно из  $a_i$  с нечетным номером равно 0, и ровно одно из  $a_i$  с четным номером равно нулю. С другой стороны,  $a_i$  равно нулю тогда и только тогда, когда  $B_i$  имеет индекс 1. Так как боковины индекса 1 не могут быть соседними, получаем:

- если  $a_1 = 0$ , то  $a_4 = 0$ , поэтому  $e_1 = e_2 = e_4 = e_5 = 0$ , и, в силу утверждения 3.15, или  $e_3 = e_6 = 0$ , или  $e_3 = e_6 = 1$ , поэтому имеем два возможных вектора четностей:  $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$  и  $(0, 0, 1, 0, 0, 1)$ ;
- аналогично, если  $a_3 = 0$ , то  $a_6 = 0$ , поэтому имеем:  $(1, 0, 0, 1, 0, 0)$  и  $(1, 1, 0, 1, 1, 0)$ ;

- если же  $a_5 = 0$ , то  $a_2 = 0$ , поэтому имеем:  $(0, 1, 1, 0, 1, 1)$  и  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ .

Пусть  $r = 3$ , тогда индексы всех боковин могут быть равны или 1 или  $-1$ . Поэтому, если  $e_1 = 0$ , то  $e = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$ , а если  $e_1 = 1$ , то  $e = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$ .

Для разбора оставшихся двух случаев, введем следующее определение. Вектор  $e'$  из 0 и 1 назовем *двойственным* к вектору  $e$  той же размерности, также состоящему из 0 и 1, если для любого  $k$ ,  $k$ -ые координаты векторов  $e$  и  $e'$  различны.

Заметим теперь, что при  $r = 4$  ситуация двойственна к случаю  $r = 2$ : ровно одно из  $a_i$  с нечетным номером равно 1, ровно одно из  $a_i$  с четным номером равно 1, и условие  $a_i = 1$  равносильно тому, что  $\text{ind}(B_i) = -1$ . С другой стороны, вектора четностей концевых линейных участков, порождающих боковину  $B_i$ , противоположны при  $\text{ind}(B_i) = 1$  и  $\text{ind}(B_i) = -1$ . Поэтому список векторов четностей концевых линейных участков в этом случае — это список векторов, противоположных векторам четностей для  $r = 2$ . Но последний список содержит вместе с каждым вектором двойственный к нему. Таким образом, множества возможных векторов четностей для случаев  $r = 2$  и  $r = 4$  совпадают.

Аналогичные рассуждения верны и для случаев  $r = 5$  и  $r = 1$ , т.е. множества возможных векторов четностей в этих случаях также совпадают.

Предложение 3.25 доказано.

В действительности, в подавляющем большинстве случаев, описанных в предложении 3.25, скелет  $S$  вообще не может иметь перегородки. А именно, имеет место следующее утверждение:

**Утверждение 3.16** Пусть  $S$  — скелет из предложения 3.25. Тогда если  $z_6 = z_2$  или  $z_3 = z_5$ , то  $S$  не может иметь перегородки. Поэтому, лишь те скелеты  $S$  из предложения 3.25, вектора четности которых приведены ниже, могли бы иметь перегородку:

- если  $r = 1$ , то  $(1, 0, 1, 0, 1, 0)$  и  $(0, 1, 0, 1, 0, 1)$ ;
- если  $r = 2$ , то  $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$  и  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ;
- если  $r = 4$ , то  $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$  и  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ;
- если  $r = 5$ , то  $(1, 0, 1, 0, 1, 0)$  и  $(0, 1, 0, 1, 0, 1)$ .

**Доказательство.** Пусть  $\Gamma$  — некоторая минимальная реализация скелета  $S$  на правильном  $n$ -угольнике  $M$ , вписанном в единичную окружность  $S^1$ . Для любого подпаркета  $T$  в  $S$  обозначим через  $\Gamma_T$  соответствующее поддерево в  $\Gamma$ .

Предположим, что перегородка  $L$  скелета  $S$  непуста. Тогда  $L$  состоит, по крайней мере, из двух ячеек и, в силу предложения 3.24, является змеей,

параллельной концевому линейному участку  $Z_1$  (оси концевых линейных участков  $Z_1$  и перегородки  $L$  параллельны).

Проведем рассуждения для концевых линейных участков  $Z_1$  (рассуждения для концевых линейных участков  $Z_4$  такие же). Ориентируем перегородку  $L$  от того узла ветвления, к которому примыкает участок  $Z_1$ . Пусть  $a$  — первый, в смысле введенной ориентации, отросток перегородки  $\Gamma_L$ , и  $A$  — вершина из  $M$ , инцидентная отростку  $a$ . Отметим, что отростки перегородки  $\Gamma_L$  параллельны отросткам участка-змеи  $\Gamma_{Z_1}$ .

Далее, обозначим через  $m$  концевую вершину концевых линейных участков  $\Gamma_{Z_1}$ , и пусть  $l$  — прямая, проходящая через  $a$ . Так как  $l$  параллельна отросткам змеи  $\Gamma_{Z_1}$ , то, очевидно,  $l$  содержит ровно одну вершину из  $M$ , а именно, вершину  $A$ .

Рассмотрим открытую полуплоскость  $\Pi$ , ограниченную прямой  $l$  и содержащую вершину  $m$  многоугольника  $M$ . Полуплоскость  $\Pi$  высекает из окружности  $S^1$ , описанной вокруг  $n$ -угольника  $M$ , открытую дугу  $\Delta = S^1 \cap \Pi$ . Ясно, что  $m \in \Delta$ .

Выбросим  $m$  из  $\Delta$ . Тогда  $\Delta$  распадется на две открытые дуги. Пусть  $\delta$  — та из них, замыкание которой содержит  $A$ , а  $\delta'$  — оставшаяся открытая дуга. Отметим следующие очевидные свойства дуг  $\Delta$ ,  $\delta$  и  $\delta'$ :

- все вершины из  $M$ , затянутаые концевым линейным участком  $\Gamma_{Z_1}$ , лежат на  $\Delta$ ;
- все вершины, затянутаые концевым линейным участком  $\Gamma_{Z_2}$ , лежат на  $\delta$ ;
- все вершины, лежащие на  $\delta$ , затянутаые концевыми линейными участками  $\Gamma_{Z_1}$  и  $\Gamma_{Z_2}$ ;
- все вершины, лежащие на  $\delta'$ , затянутаые концевыми линейными участками  $\Gamma_{Z_1}$  и  $\Gamma_{Z_6}$ .

Следующая лемма очевидна:

**Лемма 3.23** *Если  $e_1 = 0$ , то дуги  $\delta$  и  $\delta'$  содержат одинаковое число вершин из  $M$ . В противном случае, т.е. если  $e_1 = 1$ , дуга  $\delta'$  содержит на одну вершину больше, чем дуга  $\delta$ .*

Пусть  $e_1 = 0$ . В силу леммы 3.23, дуги  $\delta$  и  $\delta'$  содержат одинаковое число вершин из  $M$ , поэтому участок  $Z_6$  затягивает не меньше вершин из  $M$ , чем участок  $Z_2$ , т.е.  $z_6 \geq z_2$ . Возникает четыре возможности, в зависимости от четности длин участков  $Z_6$  и  $Z_2$ .

Пусть  $e_6 = e_2 = 0$ . Тогда  $\text{ind}(B_6) = 0$ , а  $\text{ind}(B_1) = 1$ . Значит,  $r$  отлично от 0 и 3. Пусть  $r \leq 2$ , тогда  $b_6 < b_1$ , поэтому  $z_6 < z_2$ , противоречие. Если же  $r \geq 4$ , то  $b_6 = b_1$ , поэтому  $z_6 = z_2$ .

Пусть  $e_6 = 0$ , а  $e_2 = 1$ . Тогда  $\text{ind}(B_6) = \text{ind}(B_1) = 0$ , поэтому  $b_6 = b_1$ , откуда  $z_6 < z_2$ , противоречие.

Пусть  $e_6 = 1$ , а  $e_2 = 0$ . Тогда  $\text{ind}(B_6) = -1$ , а  $\text{ind}(B_1) = 1$ , поэтому  $b_6 < b_1$ , откуда  $z_6 < z_2$ , противоречие.

Пусть  $e_6 = e_2 = 1$ . Тогда  $\text{ind}(B_6) = -1$ , а  $\text{ind}(B_1) = 0$ . Значит,  $r$  отлично от 0 и 3. Пусть  $r \leq 2$ , тогда  $b_6 = b_1$ , поэтому  $z_6 = z_2$ . Если же  $r \geq 4$ , то  $b_6 < b_1$ , поэтому  $z_6 < z_2$ , противоречие.

Рассмотрим теперь случай  $e_1 = 1$ . Тогда, дуга  $\delta'$  содержит на одну точку из  $M$  больше, чем дуга  $\delta$ . С другой стороны, участок  $Z_1$  затягивает на одну точку больше на дуге  $\delta'$ , чем на дуге  $\delta$ , поэтому, опять же, получаем, что необходимо  $z_6 \geq z_2$ . Снова рассмотрим четыре возможности, в зависимости от четности длин концевых линейных участков  $Z_6$  и  $Z_2$ .

Пусть  $e_6 = e_2 = 0$ . Тогда  $\text{ind}(B_6) = 1$ , а  $\text{ind}(B_1) = 0$ . Значит,  $r$  отлично от 0 и 3. Пусть  $r \leq 2$ , тогда  $b_6 = b_1 + 1$ , поэтому  $z_6 = z_2$ . Если же  $r \geq 4$ , то  $b_6 = b_1$ , поэтому  $z_6 < z_2$ , противоречие.

Пусть  $e_6 = 0$ , а  $e_2 = 1$ , но  $b_6 \leq b_1 + 1$ , откуда  $z_6 < z_2$ , противоречие.

Пусть  $e_6 = 1$ , а  $e_2 = 0$ . Тогда  $\text{ind}(B_6) = \text{ind}(B_1) = 0$ , поэтому  $b_6 = b_1$ , откуда  $z_6 < z_2$ , противоречие.

Пусть  $e_6 = e_2 = 1$ . Тогда  $\text{ind}(B_6) = 0$ , а  $\text{ind}(B_1) = -1$ . Значит,  $r$  отлично от 0 и 3. Пусть  $r \leq 2$ , тогда  $b_6 = b_1$ , поэтому  $z_6 < z_2$ , противоречие. Если же  $r \geq 4$ , то  $b_6 = b_1 + 1$ , поэтому  $z_6 = z_2$ .

Предложение 3.25 и утверждение 3.16, а также предложение 3.13 позволяют нам разрешить систему уравнений из доказательства предложения 3.25, описывающую связь между длинами концевых линейных участков и длинами боковин интересующих нас скелетов. Выберем, в качестве параметров решения, следующие величины:  $t = [z_1/2]$ ,  $p = [n/6]$ ,  $x$  — половина длины перегородки  $L$  (иными словами, длина боковины перегородки  $L$ ). Для удобства ссылок, занумеруем все случаи парой  $rA$ , где  $r$  — остаток от деления  $n$  на 6, а  $A$  — буква  $a, b, c, d, e$  или  $f$ , в зависимости от номера интересующего нас случая внутри группы с постоянным остатком  $r$  (мы сохраняем порядок из предложения 3.25). Кроме того, положим  $\alpha_{max}$  равным максимальной величине угла  $\alpha = \pi/n$  для каждой из 28 серий скелетов. Итак, в следующем предложении приводится список векторов  $z = (z_1, \dots, z_6)$  длин концевых линейных участков во всех 28 случаях из предложения 3.25, а также описываются области изменения параметров, полученные из того соображения, что длины концевых линейных участков скелета не могут быть меньше 2.

**Предложение 3.26** *Лишь скелеты со следующими векторами длин концевых линейных участков могли бы иметь правильную минимальную реализацию:*

при  $r = 0$ ,

(0a):  $2 \leq t \leq p - 2$ ,  $p \geq 4$ ,  $\alpha_{max} = \pi/24$ ,



$$(2t, -1 + 2(p-t), -2 + 2t, 2(p-t), -1 + 2t, -2 + 2(p-t)),$$

(0b):  $2 \leq t \leq p-3, p \geq 5, \alpha_{max} = \pi/30,$   
 $(1 + 2t, -2 + 2(p-t), -1 + 2t, -1 + 2(p-t), 2t, -3 + 2(p-t));$

$$npu \ r = 1,$$

(1a):  $3 \leq t \leq p-2, p \geq 5, \alpha_{max} = \pi/31,$   
 $(2t, 2(p-t), -3 + 2t, 1 + 2(p-t), -1 + 2t, -2 + 2(p-t)),$   
 (1b):  $x + 2 \leq t \leq p-2, 0 \leq x \leq p-4, p \geq 4, \alpha_{max} = \pi/25,$   
 $(2t, -1 + 2(p-t), -2 + 2(t-x), 1 + 2(p-t+x), -2 + 2(t-x), -1 + 2(p-t)),$   
 (1c):  $2 \leq t \leq p-2, p \geq 4, \alpha_{max} = \pi/25,$   
 $(2t, -1 + 2(p-t), -1 + 2t, -1 + 2(p-t), 2t, -2 + 2(p-t)),$   
 (1d):  $1 \leq t \leq p-3, p \geq 4, \alpha_{max} = \pi/25,$   
 $(1 + 2t, -2 + 2(p-t), 2t, -2 + 2(p-t), 1 + 2t, -3 + 2(p-t)),$   
 (1e):  $x + 2 \leq t \leq p-2, 0 \leq x \leq p-4, p \geq 4, \alpha_{max} = \pi/25,$   
 $(1 + 2t, -2 + 2(p-t), -1 + 2(t-x), 2(p-t+x), -1 + 2(t-x), -2 + 2(p-t)),$   
 (1f):  $2 \leq t \leq p-3, p \geq 5, \alpha_{max} = \pi/31,$   
 $(1 + 2t, -1 + 2(p-t), -2 + 2t, 2(p-t), 2t, -3 + 2(p-t));$

$$npu \ r = 2$$

(2a):  $2 \leq t \leq p-2, p \geq 4, \alpha_{max} = \pi/26,$   
 $(2t, 2(p-t), -2 + 2t, 2(p-t), 2t, -2 + 2(p-t)),$   
 (2b):  $3 \leq t \leq p-2, p \geq 5, \alpha_{max} = \pi/32,$   
 $(2t, 2(p-t), -3 + 2t, 2 + 2(p-t), -2 + 2t, -1 + 2(p-t)),$   
 (2c):  $x + 2 \leq t \leq p-2, 0 \leq x \leq p-4, p \geq 4, \alpha_{max} = \pi/26,$   
 $(2t, -1 + 2(p-t), -1 + 2(t-x), 2(p-t+x), -1 + 2(t-x), -1 + 2(p-t)),$   
 (2d):  $x + 1 \leq t \leq p-2, 0 \leq x \leq p-3, p \geq 3, \alpha_{max} = \pi/20,$   
 $(1 + 2t, -2 + 2(p-t), 2(t-x), -1 + 2(p-t+x), 2(t-x), -2 + 2(p-t)),$   
 (2e):  $2 \leq t \leq p-2, p \geq 4, \alpha_{max} = \pi/26,$   
 $(1 + 2t, -1 + 2(p-t), -2 + 2t, 1 + 2(p-t), -1 + 2t, -2 + 2(p-t)),$   
 (2f):  $2 \leq t \leq p-3, p \geq 5, \alpha_{max} = \pi/32,$   
 $(1 + 2t, -1 + 2(p-t), -1 + 2t, -1 + 2(p-t), 1 + 2t, -3 + 2(p-t));$

$$npu \ r = 3,$$

(3a):  $2 \leq t \leq p-2, p \geq 4, \alpha_{max} = \pi/27,$   
 $(2t, 2(p-t), -2 + 2t, 1 + 2(p-t), -1 + 2t, -1 + 2(p-t)),$   
 (3b):  $2 \leq t \leq p-2, p \geq 4, \alpha_{max} = \pi/27,$   
 $(1 + 2t, -1 + 2(p-t), -1 + 2t, 2(p-t), 2t, -2 + 2(p-t));$

$$npu \ r = 4,$$

(4a):  $x + 2 \leq t \leq p-1, 0 \leq x \leq p-3, p \geq 3, \alpha_{max} = \pi/22,$   
 $(2t, 2(p-t), -2 + 2(t-x), 2 + 2(p-t+x), -2 + 2(t-x), 2(p-t)),$   
 (4b):  $2 \leq t \leq p-2, p \geq 4, \alpha_{max} = \pi/28,$   
 $(2t, 2(p-t), -1 + 2t, 2(p-t), 2t, -1 + 2(p-t)),$

- (4c):  $3 \leq t \leq p-2$ ,  $p \geq 5$ ,  $\alpha_{max} = \pi/34$ ,  
 $(2t, 1+2(p-t), -3+2t, 2+2(p-t), -1+2t, -1+2(p-t))$ ,  
(4d):  $2 \leq t \leq p-2$ ,  $p \geq 4$ ,  $\alpha_{max} = \pi/28$ ,  
 $(1+2t, 2(p-t), -2+2t, 1+2(p-t), 2t, -2+2(p-t))$ ,  
(4e):  $1 \leq t \leq p-2$ ,  $p \geq 3$ ,  $\alpha_{max} = \pi/22$ ,  
 $(1+2t, -1+2(p-t), 2t, -1+2(p-t), 1+2t, -2+2(p-t))$ ,  
(4f):  $x+2 \leq t \leq p-2$ ,  $0 \leq x \leq p-4$ ,  $p \geq 4$ ,  $\alpha_{max} = \pi/28$ ,  
 $(1+2t, -1+2(p-t), -1+2(t-x), 1+2(p-t+x), -1+2(t-x), -1+2(p-t))$ ;

при  $r = 5$ ,

- (5a):  $x+2 \leq t \leq p-1$ ,  $0 \leq x \leq p-3$ ,  $p \geq 3$ ,  $\alpha_{max} = \pi/23$ ,  
 $(2t, 2(p-t), -1+2(t-x), 1+2(p-t+x), -1+2(t-x), 2(p-t))$ ,  
(5b):  $2 \leq t \leq p-2$ ,  $p \geq 4$ ,  $\alpha_{max} = \pi/29$ ,  
 $(2t, 1+2(p-t), -2+2t, 1+2(p-t), 2t, -1+2(p-t))$ ,  
(5c):  $3 \leq t \leq p-1$ ,  $p \geq 4$ ,  $\alpha_{max} = \pi/29$ ,  
 $(2t, 1+2(p-t), -3+2t, 3+2(p-t), -2+2t, 2(p-t))$ ,  
(5d):  $2 \leq t \leq p-2$ ,  $p \geq 4$ ,  $\alpha_{max} = \pi/29$ ,  
 $(1+2t, 2(p-t), -2+2t, 2+2(p-t), -1+2t, -1+2(p-t))$ ,  
(5e):  $2 \leq t \leq p-2$ ,  $p \geq 4$ ,  $\alpha_{max} = \pi/29$ ,  
 $(1+2t, 2(p-t), -1+2t, 2(p-t), 1+2t, -2+2(p-t))$ ,  
(5f):  $x+1 \leq t \leq p-2$ ,  $0 \leq x \leq p-3$ ,  $p \geq 3$ ,  $\alpha_{max} = \pi/23$ ,  
 $(1+2t, -1+2(p-t), 2(t-x), 2(p-t), 2(t-x), -1+2(p-t))$ .

Для завершения доказательства основной теоремы 3.1, применим предложение 3.10. Для этого сначала фиксируем положение возможной  $RM$ -реализации  $\Gamma$  скелета  $S$ , а именно, будем считать, что концевая вершина концевой линейной участка  $Z_3$  совпадает с 1 (мы отождествляем точки плоскости  $\mathbb{R}^2$  и соответствующие комплексные числа). Кроме того, без ограничения общности будем считать, что концевые линейные участки  $Z_1, Z_2, \dots, Z_6$  встречаются последовательно при обходе границы  $\partial S$  скелета  $S$  в положительном направлении (т.е. против часовой стрелки), и вершины правильного  $n$ -угольника  $M$ , вписанного, как всегда, в единичную окружность  $S^1$  с центром в нуле, упорядочены в соответствии с положительным обходом окружности  $S^1$ ; при этом, естественно, граничное отображение  $\partial G : \partial S \rightarrow M$ , порожденное  $RM$ -реализацией  $\Gamma$ , считается уважающим введенные порядки на  $\partial S$  и  $M$ .

Далее, для каждого из скелетов, описанных в предложении 3.26, построим остов  $M'$  множества  $M$ , заменив, для каждого концевой линейной участка  $Z_j$ , вершины из  $M$ , затянутаые его реализацией, на главную вершину  $H(Z_j)$  этого концевой линейной участка. Координаты вершин  $H(Z_j)$  приведены в следующем списке:

$$\begin{aligned} H(Z_1) &= e^{-2i(b_1+b_2+b_3)\alpha} (1 + \ell_1 e^{-i(\pi/6+e_1\alpha)}), \\ H(Z_2) &= e^{-2i(b_2+b_3)\alpha} (1 + \ell_2 e^{i(\pi/6+e_2\alpha)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(Z_3) &= e^{-2i b_3 \alpha} (1 + \ell_3 e^{-i(\pi/6 + \epsilon_3 \alpha)}) \\
H(Z_4) &= 1 + \ell_4 e^{-i(\pi/6 + \epsilon_4 \alpha)} \\
H(Z_5) &= e^{2i b_4 \alpha} (1 + \ell_5 e^{i(\pi/6 + \epsilon_5 \alpha)}) \\
H(Z_6) &= e^{2i(b_4 + b_5) \alpha} (1 + \ell_6 e^{-i(\pi/6 + \epsilon_6 \alpha)})
\end{aligned}$$

Здесь, как и выше,  $b_j$  — длина боковины  $B_j$ , порожденной концевыми линейными участками  $Z_j$  и  $Z_{j+1}$ ,  $\epsilon_j$  — четность концевого линейного участка  $Z_j$ , а  $\ell_j = \ell(z_j)$ , где

$$\ell(z) = \frac{2}{\sin(\alpha)} \sin\left(\left[\frac{z+1}{2}\right]\right) \sin\left(\left[\frac{z+2}{2}\right]\right).$$

Построим теперь  $H$ -допустимые углы  $\alpha(Z_j)$  концевых линейных участков  $Z_j$ . Если  $m_j$  — концевая вершина концевого линейного участка  $Z_j$ , то направление стороны  $H(Z_j)m_j$  угла  $\alpha(Z_j)$  обозначим через  $n_j$ . Направление другой стороны этого угла обозначим через  $n_j^\alpha$ . Ниже приведен список направлений сторон  $H$ -допустимых углов для всех концевых линейных участков интересующих нас скелетов.

$$\begin{aligned}
n_1 &= -e^{-2i(b_1 + b_2 + b_3)\alpha - i(\epsilon_1 \alpha + \pi/6)} \\
n_2 &= -e^{-2i(b_2 + b_3)\alpha + i(\epsilon_2 \alpha + \pi/6)} \\
n_3 &= -e^{-2i b_3 \alpha - i(\epsilon_3 \alpha + \pi/6)} \\
n_4 &= -e^{-i(\epsilon_4 \alpha + \pi/6)} \\
n_5 &= -e^{2i b_4 \alpha + i(\epsilon_5 \alpha + \pi/6)} \\
n_6 &= -e^{2i(b_4 + b_5)\alpha - i(\epsilon_6 \alpha + \pi/6)} \\
n_1^\alpha &= -e^{i\alpha} n_1 \\
n_2^\alpha &= -e^{-i\alpha} n_2 \\
n_3^\alpha &= -e^{i\alpha} n_3 \\
n_4^\alpha &= -e^{i\alpha} n_4 \\
n_5^\alpha &= -e^{-i\alpha} n_5 \\
n_6^\alpha &= -e^{i\alpha} n_6
\end{aligned}$$

Далее, воспользовавшись алгоритмом Мелзака (см. главу 1), вычислим направления всех линий Симпсона, соответствующих граничным ребрам минимальной реализации остова  $S'$  на остове  $M'$ . Положим, для краткости,  $H_i = H(Z_i)$ . Если  $S$  не содержит перегородки, то вычислим линию Симпсона  $H_1 H_1^s$ , соответствующую граничному ребру, инцидентному главной вершине  $H_1$  концевого линейного участка  $Z_1$ . Легко видеть, что точка  $H_1^s$  может быть выражена через главные вершины  $H_j$  остальных концевых линейных участков  $Z_j$  так:

$$H_1^s = e^{i\pi/3} H_2 + e^{i\pi/3} H_3 + H_4 - e^{i\pi/3} H_5 - e^{i\pi/3} H_6.$$

Положим  $s_1$  равным вектору  $H_1 H_1^s$ , т.е.  $s_1 = H_1^s - H_1$ .

Пусть теперь скелет  $S$  содержит перегородку  $L$  длины  $x$ . Ориентируем перегородку  $L$  от узла ветвления, пересекающегося с участком  $Z_1$ , и пусть

$m_b$  и  $m_t$  — вершины  $n$ -угольника  $M$ , в которые приходят первый и второй отрезки реализации перегородки  $L$ . Непосредственно вычисляется, что

$$m_b = e^{-2i(b_2+b_3-[(z_2+1)/2]-1)\alpha} \quad \text{и} \quad m_t = e^{2i(b_5+b_4-[(z_6+1)/2]-1)\alpha}.$$

Применим алгоритм Мелзака к главным вершинам  $H_1$ ,  $H_2$  и  $H_6$ , заменив их на одну точку  $H_{216}$ . Аналогично, применяя алгоритм Мелзака к главным вершинам  $H_3$ ,  $H_4$  и  $H_5$ , получим точку  $H_{543}$ . Легко вычислить координаты этих точек:

$$H_{216} = H_1 - e^{i\pi/3}H_2 + e^{i\pi/3}H_6 \quad \text{и} \quad H_{543} = e^{i\pi/3}H_3 + H_4 - e^{i\pi/3}H_5.$$

Далее, применим алгоритм Мелзака к точке  $H_{216}$  и вершинам из  $M$ , занятым реализацией перегородки  $L$ . Полученную точку обозначим через  $H$ . Непосредственные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} H = & H_{216} + e^{-2i\pi/3}m_b \underbrace{(1 + e^{2i\alpha} + e^{4i\alpha} + \dots)}_{x \text{ штук}} + e^{i\pi/3}m_t \underbrace{(1 + e^{-2i\alpha} + e^{-4i\alpha} + \dots)}_{x \text{ штук}} = \\ & H_{216} + e^{i\pi/3} \left( m_t \frac{(e^{-2i\alpha x} - 1)}{(e^{-2i\alpha} - 1)} - m_b \frac{(e^{2i\alpha x} - 1)}{(e^{2i\alpha} - 1)} \right). \end{aligned}$$

Положим  $s_1$  равным вектору  $HH_{543}$ , т.е.  $s_1 = H_{543} - H$ .

Легко видеть, что в обоих случаях вектор  $s_1$  равен вектору, соединяющему начальную точку линии Симпсона, соответствующей вершине  $H_1$ , с конечной точкой этой линии Симпсона. Кроме того, все остальные линии Симпсона, соответствующие вершинам  $H_j$ , аналогичным образом порождают вектора  $s_j$ , связанные с  $s_1$  так:

$$s_2 = e^{2i\pi/3}s_1 = s_3, \quad s_4 = -s_1, \quad \text{и} \quad s_5 = e^{-i\pi/3}s_1 = s_6.$$

Определим теперь функции  $f_j$  и  $f_j^\alpha$ , равные векторным произведениям между  $s_j$  и векторами  $n_j$  и  $n_j^\alpha$  соответственно, таким что положительность обеих этих функций является критерием того, что линия Симпсона, соответствующая главной вершине  $H_j$ , направлена внутрь  $H$ -допустимого угла  $\alpha(Z_j)$  концевого линейного участка  $Z_j$  (именно это требуется в предложении 3.10 как необходимое условие существования  $RM$ -реализации скелета  $S$ ). Обозначим через  $\text{vec}(a, b)$  векторное произведение векторов  $a$  и  $b$ , точнее, ориентированную площадь параллелограмма, натянутого на вектора  $a$  и  $b$ , и выпишем определения функций  $f_j$  и  $f_j^\alpha$ .

$$\begin{aligned} f_1 &= \text{vec}(n_1, s_1), & f_1^\alpha &= \text{vec}(s_1, n_1^\alpha), \\ f_2 &= \text{vec}(s_2, n_2), & f_2^\alpha &= \text{vec}(n_2^\alpha, s_2), \\ f_3 &= \text{vec}(n_3, s_3), & f_3^\alpha &= \text{vec}(s_3, n_3^\alpha), \\ f_4 &= \text{vec}(n_4, s_4), & f_4^\alpha &= \text{vec}(s_4, n_4^\alpha), \\ f_5 &= \text{vec}(s_5, n_5), & f_5^\alpha &= \text{vec}(n_5^\alpha, s_5), \\ f_6 &= \text{vec}(n_6, s_6), & f_6^\alpha &= \text{vec}(s_6, n_6^\alpha). \end{aligned}$$

Теперь мы должны вычислить эти функции для каждого из 28 случаев из предложения 3.26. Мы проделали эту работу с помощью пакета *Mathematica*<sup>®</sup> для нескольких пробных значений в каждом из 28 случаев и установили, что во всех случаях, за исключением (0a), одна из 12 функций  $f_j$  и  $f_j^\alpha$  отрицательна при всех допустимых значениях параметров. В случае же (0a) имеется функция, которая отрицательна для всех допустимых значений параметров, за исключением конечного числа их значений, что дает описанную в основном предложении конечную серию шестилапых. Отметим, что значения всех этих функций были чрезвычайно громоздки, тем не менее, используя пакет *Mathematica*<sup>®</sup>, нам удалось преобразовать каждую из них к достаточно компактному виду. Итак, приведем выражения существенных для нас функций  $f_j$  и  $f_j^\alpha$ .

при  $r = 0$ ,

$$(0a): f_1^\alpha = 6 \cos[\alpha - \pi/3] - 2\sqrt{3} \cos[\alpha] \sin[\pi/3 + 2\alpha t];$$

$$(0b): f_1^\alpha = 3 - 2\sqrt{3} \cos[\alpha] \sin[\alpha + \pi/3 + 2\alpha t];$$

при  $r = 1$ ,

$$(1a): f_1^\alpha = 1/2 + \cos[\alpha - \pi/3] + 4\sqrt{3} \cos[2\alpha/3 - \pi/3] * \cos[2\alpha/3 + \pi/3] \sin[\alpha/3 - \pi/3 - 2\alpha t];$$

$$(1b): f_3^\alpha = 1/2 + \cos[\alpha - \pi/3] + 2(\sqrt{3} \cos[4\alpha/3 + \alpha x] + \cos[\pi/6 + \alpha x]) * \csc[\alpha] \sin[\alpha/3] \sin[\alpha/3 - \pi/3 - 2\alpha t + \alpha x];$$

$$(1c): f_2 = 1/2 + \cos[\alpha - \pi/3] - \sqrt{3} \sin[2\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t];$$

$$(1d): f_2 = 1/2 + \cos[\alpha - \pi/3] - \sqrt{3} \sin[5\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t];$$

$$(1e): f_3^\alpha = 1/2 + \cos[\alpha - \pi/3] - 2(\sqrt{3} \cos[4\alpha/3 + \alpha x] + \cos[\pi/6 + \alpha x]) * \csc[\alpha] \sin[\alpha/3] \sin[2\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t - \alpha x];$$

$$(1f): f_1^\alpha = 1/2 + \cos[\alpha - \pi/3] - 4\sqrt{3} \cos[2\alpha/3 - \pi/3] * \cos[2\alpha/3 + \pi/3] \sin[2\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t];$$

при  $r = 2$ ,

(2a):

$$f_1^\alpha = 2 \cos[\alpha - \pi/3] - 4\sqrt{3} \cos[\alpha/3 - \pi/3] \cos[\alpha/3 + \pi/3] \sin[\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t];$$

$$(2b): f_3^\alpha = 1 + 4\sqrt{3} \cos[2\alpha/3 - \pi/3] \cos[2\alpha/3 + \pi/3] \sin[2\alpha/3 - \pi/3 - 2\alpha t];$$

$$(2c): f_2 = 2 \cos[\alpha - \pi/3] + \csc[\alpha] \sin[\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t - \alpha x] * (2 \sin[\alpha/3 + \pi/3] \sin[\alpha x] - \sqrt{3} \sin[\alpha + \alpha x]);$$

$$(2d): f_2 = 1 + \csc[\alpha] \sin[4\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t - \alpha x] * (2 \sin[\alpha/3 + \pi/3] \sin[\alpha x] - \sqrt{3} \sin[\alpha + \alpha x]);$$

$$(2e): f_3^\alpha = 2 \cos[\alpha - \pi/3] - 4\sqrt{3} \cos[2\alpha/3 - \pi/3] * \cos[2\alpha/3 + \pi/3] \sin[\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t];$$

$$(2f): f_1^\alpha = 1 - 4\sqrt{3} \cos[\alpha/3 - \pi/3] \cos[\alpha/3 + \pi/3] \sin[4\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t];$$

при  $r = 3$ ,

$$(3a): f_1^\alpha = 3/2 + 3 \cos[\alpha - \pi/3] - 2\sqrt{3} \cos[\alpha] \sin[\pi/3 + 2\alpha t];$$

$$(3b): f_1^\alpha = 3/2 + 3 \cos[\alpha - \pi/3] - 2\sqrt{3} \cos[\alpha] \sin[\alpha + \pi/3 + 2\alpha t];$$

при  $r = 4$ ,

$$(4a): f_3^\alpha = 2 \cos[\alpha - \pi/3] + 2(\sqrt{3} \cos[4\alpha/3 + \alpha x] + \cos[\pi/6 + \alpha x]) * \\ \csc[\alpha] \sin[\alpha/3] \sin[\alpha/3 - \pi/3 - 2\alpha t + \alpha x];$$

$$(4b): f_2 = 1 - \sqrt{3} \sin[2\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t];$$

$$(4c): f_1^\alpha = 2 \cos[\alpha - \pi/3] + 4\sqrt{3} \cos[2\alpha/3 - \pi/3] * \\ \cos[2\alpha/3 + \pi/3] \sin[\alpha/3 - \pi/3 - 2\alpha t];$$

$$(4d): f_1^\alpha = 1 - 4\sqrt{3} \cos[2\alpha/3 - \pi/3] \cos[2\alpha/3 + \pi/3] \sin[2\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t];$$

$$(4e): f_2 = 2 \cos[\alpha - \pi/3] - \sqrt{3} \sin[5\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t];$$

$$(4f): f_3^\alpha = 1 - 2 \csc[\alpha] \sin[\alpha/3] (\sqrt{3} \cos[4\alpha/3 + \alpha x] + \sin[\pi/3 - \alpha x]) * \\ \sin[2\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t - \alpha x].$$

при  $r = 5$ ,

$$(5a): f_2 = 1/2 + \cos[\alpha - \pi/3] + \csc[\alpha] \sin[\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t - \alpha x] * \\ (2 \sin[\alpha/3 + \pi/3] \sin[\alpha x] - \sqrt{3} \sin[\alpha + \alpha x]);$$

$$(5b): f_1^\alpha = 1/2 + \cos[\alpha - \pi/3] - 4\sqrt{3} \cos[\alpha/3 - \pi/3] * \\ \cos[\alpha/3 + \pi/3] \sin[\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t];$$

$$(5c): f_3^\alpha = 1/2 + \cos[\alpha - \pi/3] + 4\sqrt{3} \cos[2\alpha/3 - \pi/3] * \\ \cos[2\alpha/3 + \pi/3] \sin[2\alpha/3 - \pi/3 - 2\alpha t];$$

$$(5d): f_3^\alpha = 1/2 + \cos[\alpha - \pi/3] - 4\sqrt{3} \cos[2\alpha/3 - \pi/3] * \\ \cos[2\alpha/3 + \pi/3] \sin[\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t];$$

$$(5e): f_1^\alpha = 1/2 + \cos[\alpha - \pi/3] - 4\sqrt{3} \cos[\alpha/3 - \pi/3] * \\ \cos[\alpha/3 + \pi/3] \sin[4\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t];$$

$$(5f): f_2 = 1/2 + \cos[\alpha - \pi/3] + \csc[\alpha] \sin[4\alpha/3 + \pi/3 + 2\alpha t - \alpha x] * \\ (2 \sin[\alpha/3 + \pi/3] \sin[\alpha x] - \sqrt{3} \sin[\alpha + \alpha x]).$$

Чтобы завершить доказательство основной теоремы 3.1, мы оценим эти функции сверху. Пусть  $f$  — соответствующая функция  $f_j$  или  $f_j^\alpha$ , приведенная в только что рассмотренной таблице для текущего случая. Тогда, как легко заметить, функция  $f$  имеет вид  $A(\alpha) + B(\alpha) \sin[k\alpha/3 \pm (\pi/3 + 2\alpha t)]$  для скелетов  $S$  без перегородки, и  $A(\alpha) + B(\alpha, x) \sin[k\alpha/3 \pm (\pi/3 + 2\alpha t - \alpha x)]$  для скелетов с перегородкой, где  $k$  равно 1, 2, 3, 4 или 5. В силу неравенств из предложения 3.26, ограничивающих область изменения параметров, можно найти значение выражений  $k\alpha/3 \pm (\pi/3 + 2\alpha t)$  и  $k\alpha/3 \pm (\pi/3 + 2\alpha t - \alpha x)$  на концах отрезка изменения параметра  $t$ , а также середину  $\text{mid}$  этого отрезка. Оказывается,  $\text{mid}$  имеет вид  $\pm\pi/2 \pm d\alpha/2$ , где  $d$  может равняться  $\pm 1$  или 0, см. ниже. Последнее позволяет найти, при каких значениях  $t$  функции  $A(\alpha) + B(\alpha) \sin[k\alpha/3 \pm (\pi/3 + 2\alpha t)]$  и  $A(\alpha) + B(\alpha, x) \sin[k\alpha/3 \pm (\pi/3 + 2\alpha t - \alpha x)]$  принимают свои наименьшие и наибольшие значения. Далее, учитывая знак функций  $B(\alpha)$  и  $B(\alpha, x)$ , мы напишем оценку сверху на функцию  $f$ , подставляя соответствующие значения  $t$ . Оказывается, во всех

рассматриваемых случаях значение  $t_0$  параметра  $t$ , дающее оценку сверху на функцию  $f$ , совпадает с одним из концевых линейных участков отрезка изменения параметра  $t$ . Приведем соответствующие результаты.

- (0a):  $\text{mid} = \pi/2, t_0 = 2$   
 (0b):  $\text{mid} = \pi/2, t_0 = 2$   
 (1a):  $\text{mid} = -\pi/2 - \alpha/2, t_0 = p - 2$   
 (1b):  $\text{mid} = -\pi/2 + \alpha/2, t_0 = x + 2$   
 (1c):  $\text{mid} = \pi/2 + \alpha/2, t_0 = p - 2$   
 (1d):  $\text{mid} = \pi/2 - \alpha/2, t_0 = 1$   
 (1e):  $\text{mid} = \pi/2 + \alpha/2, t_0 = p - 2$   
 (1f):  $\text{mid} = \pi/2 - \alpha/2, t_0 = 2$   
 (2a):  $\text{mid} = \pi/2, t_0 = 2$   
 (2b):  $\text{mid} = -\pi/2, t_0 = 3$   
 (2c):  $\text{mid} = \pi/2, t_0 = x + 2$   
 (2d):  $\text{mid} = \pi/2, t_0 = x + 1$   
 (2e):  $\text{mid} = \pi/2, t_0 = 2$   
 (2f):  $\text{mid} = \pi/2, t_0 = 2$   
 (3a):  $\text{mid} = \pi/2 - \alpha/2, t_0 = 2$   
 (3b):  $\text{mid} = \pi/2 + \alpha/2, t_0 = p - 2$   
 (4a):  $\text{mid} = -\pi/2, t_0 = x + 2$   
 (4b):  $\text{mid} = \pi/2, t_0 = 2$   
 (4c):  $\text{mid} = -\pi/2, t_0 = 3$   
 (4d):  $\text{mid} = \pi/2, t_0 = 2$   
 (4e):  $\text{mid} = \pi/2, t_0 = 1$   
 (4f):  $\text{mid} = \pi/2, t_0 = x + 2$   
 (5a):  $\text{mid} = \pi/2 + \alpha/2, t_0 = p - 1$   
 (5b):  $\text{mid} = \pi/2 - \alpha/2, t_0 = 2$   
 (5c):  $\text{mid} = -\pi/2 - \alpha/2, t_0 = p - 1$   
 (5d):  $\text{mid} = \pi/2 - \alpha/2, t_0 = 2$   
 (5e):  $\text{mid} = \pi/2 + \alpha/2, t_0 = p - 2$   
 (5f):  $\text{mid} = \pi/2 - \alpha/2, t_0 = x + 1$

Таким образом, функция  $f$  может быть оценена сверху функцией  $\varphi = f|_{t=t_0}$ . Приведем список функций  $\varphi$  для всех рассматриваемых случаев.

- (0a):  $6 \cos[\alpha - \pi/3] - 2\sqrt{3} \cos[\alpha] \sin[4\alpha + \pi/3];$   
 (0b):  $3 - 2\sqrt{3} \cos[\alpha] \sin[5\alpha + \pi/3];$   
 (1a):  $1/2 + \cos[\alpha - \pi/3] -$   
 $4\sqrt{3} \cos[2\alpha/3 - \pi/3] \cos[2\alpha/3 + \pi/3] \sin[14\alpha/3 + \pi/3];$   
 (1b):  $1/2 + \cos[\alpha - \pi/3] - 2 \left( \sqrt{3} \cos[4\alpha/3 + \alpha x] + \cos[\pi/6 + \alpha x] \right) *$   
 $\text{csc}[\alpha] \sin[\alpha/3] \sin[11\alpha/3 + \pi/3 + \alpha x];$   
 (1c):  $1/2 + \cos[\alpha - \pi/3] - \sqrt{3} \sin[11\alpha/3 + \pi/3];$   
 (1d):  $1/2 + \cos[\alpha - \pi/3] - \sqrt{3} \sin[11\alpha/3 + \pi/3];$





средственно проверяется, что максимальное значение каждой из функций  $\varphi$  достигается при максимально возможном  $x$ . Подставляя соответствующее значение  $x$  в выражение для функции  $\varphi$ , получим следующий список функций.

$$\begin{aligned}
 (1b): & 1/2 + \cos[\alpha - \pi/3] - \\
 & \quad 2 \cos[\alpha/2] \left( \cos[25\alpha/6 - \pi/3] + \sqrt{3} \cos[17\alpha/6 - \pi/6] \right) \csc[\alpha] \sin[\alpha/3]; \\
 (1e): & 1/2 + \cos[\alpha - \pi/3] - \\
 & \quad 2 \cos[\alpha/2] \left( \cos[25\alpha/6 - \pi/3] + \sqrt{3} \cos[17\alpha/6 - \pi/6] \right) \csc[\alpha] \sin[\alpha/3]; \\
 (2c): & 2 \cos[\alpha - \pi/3] - \\
 & \quad 2 \left( \cos[13\alpha/3 - \pi/3] + \sqrt{3} \cos[11\alpha/3 - \pi/6] \right) \csc[\alpha] \sin[\alpha/3]; \\
 (2d): & 1 - 2 \left( \cos[10\alpha/3 - \pi/3] + \sqrt{3} \cos[8\alpha/3 - \pi/6] \right) \csc[\alpha] \sin[\alpha/3]; \\
 (4a): & 2 \cos[\alpha - \pi/3] - 2 \left( \cos[11\alpha/3 - \pi/3] + \sqrt{3} \cos[7\alpha/3 - \pi/6] \right) \csc[\alpha] \sin[\alpha/3]; \\
 (4f): & 1 - 2 \left( \cos[14\alpha/3 - \pi/3] + \sqrt{3} \cos[10\alpha/3 - \pi/6] \right) \csc[\alpha] \sin[\alpha/3]; \\
 (5a): & 1/2 + \cos[\alpha - \pi/3] - \\
 & \quad 2 \cos[\alpha/2] \left( \cos[23\alpha/6 - \pi/3] + \sqrt{3} \cos[19\alpha/6 - \pi/6] \right) \csc[\alpha] \sin[\alpha/3]; \\
 (5f): & 1/2 + \cos[\alpha - \pi/3] - \\
 & \quad 2 \cos[\alpha/2] \left( \cos[23\alpha/6 - \pi/3] + \sqrt{3} \cos[19\alpha/6 - \pi/6] \right) \csc[\alpha] \sin[\alpha/3].
 \end{aligned}$$

Итак, мы оценили сверху функцию  $f$ , зависящую от двух переменных  $\alpha$  и  $t$  для случая, когда перегородок нет, и от трех переменных  $\alpha$ ,  $t$  и  $x$  в случае перегородок, через функцию от одной переменной  $\alpha$ . Для завершения доказательства основной теоремы 3.1, осталось непосредственно проверить, что для всех случаев, отличных от (0a), каждая из полученных оценок отрицательна при всех  $\alpha$  из полуинтервала  $(0, \alpha_{max}]$ , а в случае (0a) эта оценка отрицательна при  $0 < \alpha \leq \pi/48$ . Для каждого из остальных допустимых  $\alpha$ , а именно, для  $\alpha$ , равных 24, 30, 36 и 42, непосредственным применением алгоритма Мелзака, убеждаемся в существовании ровно одного, с точностью до симметрии, скелета  $S$ , имеющего  $RM$ -реализацию. Таким образом, случай (0a) порождает, с точностью до изометрии, четыре локально минимальных бинарных дерева с правильной границей. Основная теорема 3.1 полностью доказана.

## Глава 4

# Наросты и линейные участки минимальных сетей с выпуклыми границами

В настоящей главе мы продолжаем исследование минимальных бинарных деревьев, затягивающих множества  $M$  вершин выпуклых многоугольников. Для удобства изложения, мы обобщим некоторые понятия, введенные в предыдущих главах для описания скелетов. Как было отмечено в главе 2, узлы ветвления определены однозначно не только для скелетов, но и для пакетов общего вида. Пусть  $D$  — деревянный паркет. Тогда связанные компоненты паркета  $D$ , из которого выброшены узлы ветвления, назовем *линейными участками паркета  $D$* . Если  $D$  — скелет, то линейные участки такого паркета  $D$  совпадают с введенными в главе 2 линейными участками скелета  $D$ .

Пусть  $D$  — деревянный паркет, и  $S$  — произвольный его скелет. Тогда линейный участок паркета  $D$ , содержащий концевой линейный участок скелета  $S$ , будем называть *концевым линейным участком паркета  $D$* . Если для паркета  $D$  выбран некоторый скелет  $S$ , то линейный участок паркета  $D$  назовем *змеей*, *лестницей* или *ломаной змеей*, если пересечение этого участка со скелетом  $S$  относится к соответствующему типу. В частности, если паркет  $D$  не содержит концевых наростов, то его скелет  $S$  определен однозначно, поэтому предыдущее определение мы будем применять к такому паркету  $D$ , без апелляции к его скелету  $S$ .

Пусть  $E$  — концевой линейный участок паркета  $D$ , и  $E_S$  — концевой линейный участок скелета  $S$  паркета  $D$ , содержащийся в  $E$ . Обозначим через

$\Delta$  концевую ячейку конца  $E_S$ . Тогда участки  $E$  и  $E_S$  с отмеченной ячейкой  $\Delta$  будем называть  $\Delta$ -концами паркета  $D$  и скелета  $S$  соответственно.

Мы приведем серию тонких оценок на возможные расположения наростов и на формы линейных участков общих деревянных паркетов исходя из различных геометрических характеристик граничных множеств  $M$ . Эта техническая глава будет использована в дальнейшем для построения бесконечной серии таких выпуклых граничных множеств, лежащих на окружности и не сильно отличающихся от вершин правильных многоугольников, для которых не существует ни одного минимального бинарного дерева, их стягивающих. Кроме того, мы обобщим на произвольные паркеты из  $\mathcal{WP}_2^*$  предложение предыдущей главы, утверждающее, что концевые линейные участки скелетов, имеющих правильную минимальную реализацию, суть змеи.

## 1 Концевые наросты

Пусть  $D$  — произвольный паркет из  $\mathcal{WP}_2^*$ , и  $\Delta$  — его нарост. Напомним, что нарост  $\Delta$  называется *концевым*, если единственная внутренняя ячейка паркета  $D$ , на которую крепится  $\Delta$ , смежна еще с одним наростом, отличным от  $\Delta$ , который мы обозначим через  $\Delta'$ . Отметим, что  $\Delta'$  тоже является концевым наростом. Таким образом, всегда можно говорить о *паре концевых наростов*.

Предположим теперь, что паркет  $D$  имеет минимальную реализацию  $\Gamma$  на множестве  $M$  вершин выпуклого многоугольника. Тогда, очевидно, граничные ребра сети  $\Gamma$ , соответствующие паре концевых наростов  $\Delta$  и  $\Delta'$ , приходят в четыре последовательные вершины многоугольника  $M$ . Две средние соседние вершины из этих четырех назовем *концевой парой* вершин из  $M$ , соответствующей паре концевых наростов  $\Delta$  и  $\Delta'$  сети  $\Gamma$ .

**Предложение 4.1** Пусть паркет  $D$  имеет минимальную реализацию на множестве  $M$  вершин выпуклого многоугольника. Пусть  $t$  и  $t'$  — концевая пара вершин из  $M$ , соответствующая паре концевых наростов  $\Delta$  и  $\Delta'$  паркета  $D$ . Тогда сумма внутренних углов многоугольника  $M$  в вершинах  $t$  и  $t'$  больше  $\pi$  и меньше  $5\pi/3$ .

**Доказательство.** Выбросим из многоугольника  $\text{conv } M$  сеть  $\Gamma$  и рассмотрим замыкания полученных связанных компонент, содержащие одну из точек  $t$  и  $t'$ . Ясно, что имеется ровно три таких компонента: один пятиугольник, углы которого в вершинах  $t$  и  $t'$  в сумме равны  $\pi$ , и два треугольника, углы которых в вершинах  $t$  и  $t'$  строго меньше  $\pi/3$ , рис. 4.1. Доказательство закончено.

Рис. 4.1: Пара концевых наростов

**Следствие 4.1** *Предположим, что паркет  $D$  из  $\mathcal{WP}_5^2$  имеет минимальную реализацию  $\Gamma$  на множестве  $M$  вершин выпуклого многоугольника, такого что сумма любых его двух последовательных внутренних углов или не меньше  $5\pi/3$ , или не больше  $\pi$ . Тогда  $D$  не имеет концевых наростов.*

**Следствие 4.2** *Паркет  $D$  из  $\mathcal{WP}_5^2$ , имеющий минимальную реализацию на множестве  $M$  вершин  $n$ -угольника, все углы которого равны между собой, в частности, на правильном  $n$ -угольнике, при  $n \geq 12$  не имеет концевых наростов.*

**Следствие 4.3** *Пусть  $D$  — паркет из  $\mathcal{WP}_5^2$ , имеющий минимальную реализацию на множестве вершин  $M$  выпуклого многоугольника  $W$ , вписанного в окружность. Предположим, что сумма угловых величин  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  любых трех последовательных сторон многоугольника  $W$  удовлетворяет следующему соотношению:*

$$\alpha_2 + \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} \leq \frac{\pi}{3} \quad \text{или} \quad \alpha_2 + \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} \geq \pi.$$

*Тогда  $D$  не имеет концевых наростов.*

**Доказательство.** Пусть  $A$  и  $B$  — две последовательные вершины многоугольника  $W$ ,  $\alpha_2$  — угловая величина стороны  $AB$ , а  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  — угловые величины сторон многоугольника  $W$ , отличных от  $AB$  и пересекающихся с  $AB$ . Обозначим через  $\Sigma$  сумму угловых величин всех остальных сторон многоугольника  $W$ , а через  $\alpha$  и  $\beta$  внутренние углы в  $W$  при вершинах  $A$  и  $B$  соответственно. Имеем:

$$\alpha + \beta = \frac{\alpha_3 + \Sigma}{2} + \frac{\alpha_1 + \Sigma}{2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} + 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 2\pi - \alpha_2 - \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}.$$

Поэтому  $\alpha + \beta \geq 5\pi/3$  или  $\alpha + \beta \leq \pi$ . Теперь утверждение вытекает из предложения 4.1.

Лежащее на окружности  $S^1$  множество  $M$ , состоящее из  $n$  точек, назовем *квазиравильным*, если существует вписанный в  $S^1$  правильный  $n$ -угольник, такой что внутри каждой высекаемой им дуги окружности  $S^1$  лежит ровно одна точка из  $M$ .

**Следствие 4.4** Пусть  $M$  — квазиравильный  $n$ -угольник, и  $D$  — паркет из  $\mathcal{WP}_5$ , имеющий на  $M$  минимальную реализацию. Тогда, если  $n \geq 18$ , то  $D$  не имеет концевых наростов.

**Доказательство.** Воспользуемся следствием 4.3. Пусть  $\alpha = \pi/n$ . Тогда, в обозначениях следствия 4.3, имеем:

$$4\alpha < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 8\alpha, \quad 0 < \alpha_2 < 4\alpha.$$

Поэтому, так как  $\alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_3)/2 = \alpha_2/2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)/2$ , получаем

$$2\alpha < \alpha_2 + \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} < 6\alpha,$$

и, так как, при  $n \geq 18$  выполнено неравенство  $6\alpha \leq \pi/3$ , то концевые наросты в этом случае отсутствуют. Следствие доказано.

## 2 О концевых вершинах

Пусть  $D$  — произвольный паркет из  $\mathcal{WP}_5$ , не имеющий концевых наростов, и пусть  $\Gamma$  — некоторая минимальная реализация паркета  $D$  на множестве  $M$  вершин выпуклого многоугольника  $W$ . Обозначим через  $k$  концевую вершину сети  $\Gamma$ , соответствующую некоторому концевому линейному участку  $Z$  из  $D$ , а через  $m$  и  $m'$  — соседние с  $k$  вершины многоугольника  $W$ .

**Предложение 4.2** В сделанных выше предположениях, внутренний угол многоугольника  $W$  при вершине  $k$  меньше  $\pi$ . Более того, углы треугольника  $kmm'$  при вершинах  $m$  и  $m'$  меньше  $2\pi/3$ .

**Доказательство.** Пусть  $\Delta$  — концевая ячейка паркета  $D$ , соответствующая концевой вершине  $k$  сети  $\Gamma$ , и  $\Delta'$  — единственная ячейка из  $D$ , смежная с  $\Delta$ . Обозначим через  $s$  и  $s'$  точки Штейнера сети  $\Gamma$ , соответствующие  $\Delta$  и  $\Delta'$ , см. рис. 4.2. Для определенности, будем считать, что вершина  $s$  — соседняя с  $m$ , а вершина  $s'$  — соседняя с  $m'$ . Так как в треугольнике  $ksm$  угол при вершине  $s$  равен  $2\pi/3$ , то угол  $mks$  меньше  $\pi/3$ . Так как в четырехугольнике  $kss'm'$  углы при вершинах  $s$  и  $s'$  равны  $2\pi/3$ , то угол  $skm'$  меньше  $2\pi/3$ . Поэтому  $mkm' = mks + skm'$ , что и доказывает первое утверждение предложения.

Докажем теперь второе утверждение. Ясно, что отрезки  $ss'$  и  $mm'$  пересекаются в некоторой точке  $p$ . Рассмотрим два четырехугольника:

Рис. 4.2: Концевая вершина

$kspm$  и  $kspm'$ . Так как в первом из них угол при вершине  $s$  равен  $4\pi/3$ , то сумма оставшихся его углов равна  $2\pi/3$ , поэтому угол  $kmm'$  меньше чем  $2\pi/3$ . Во втором четырехугольнике угол при вершине  $s$  равен  $2\pi/3$ , а при вершине  $p$  — больше чем  $2\pi/3$ . Поэтому угол  $mm'k$  меньше чем  $2\pi/3$ . Доказательство закончено.

**Следствие 4.5** *В сделанных выше предположениях, если угол в концевой вершине  $k$  равен  $\pi$ , то на концевом линейном участке  $Z$  имеется концевой нарост.*

### 3 Геометрия концевых линейных участков

Пусть  $D$  — произвольный паркет из  $\mathcal{WP}_3$ , и  $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$  — некоторое его разложение на скелет и наросты. Пусть  $\Delta$  — произвольная концевая ячейка паркета  $D$ . В дальнейшем, для удобства, концевой линейный участок скелета  $S$ , содержащий ячейку  $\Delta$ , будем называть  $\Delta$ -концом.

Назовем  $\Delta$ -змеей (связный) подпаркет в  $S$ , содержащий  $\Delta$  и такой, что его пересечение с осью скелета  $S$  является отрезком прямой. Максимальная  $\Delta$ -змея называется *концевой  $\Delta$ -змеей паркета  $D$* , а подпаркет в  $D$ , состоящий из концевой  $\Delta$ -змеи и всех наростов из  $D$ , которые к ней крепятся, называется  *$\Delta$ -хвостом паркета  $D$* . Максимальная  $\Delta$ -змея, на которую не крепится ни одного нароста паркета  $D$ , называется  *$\Delta$ -жалам*. Ясно, что у паркета без концевых наростов длина каждого жала не меньше 2, а у паркета с парой концевых наростов  $\Delta$  и  $\Delta'$  длина  $\Delta$ -жала равна длине  $\Delta'$ -жала и равна 1.

Пусть  $E$  — концевой линейный участок из  $D$ , содержащий  $\Delta$ . Если концевой линейный участок  $E$  не является змеей (как линейный участок), то будем говорить, что концевой линейный участок  $E$  *имеет излом* или *поворачивает*, и ячейку участка  $E$ , смежную с концевой  $\Delta$ -змеей и не принадлежащую этой змее, назовем *ячейкой поворота*. Если  $\Gamma$  — минимальная реализация паркета  $D$ , и  $s$  — точка Штейнера из  $\Gamma$ , соответствующая

ячейке поворота участка  $E$ , то отросток скелета  $S$  (рассматриваемого как подсеть в  $\Gamma$ ), инцидентный вершине  $s$ , а также соответствующее граничное ребро скелета  $S$ , назовем *ребром поворота концевого линейного участка  $E$  сети  $\Gamma$  и паркета  $D$*  соответственно.

В настоящем параграфе мы оценим наименьшую возможную длину каждого  $\Delta$ -жала и  $\Delta$ -хвоста паркета  $D$ , имеющего минимальную реализацию на некотором выпуклом многоугольнике, исходя из геометрии этого многоугольника. Кроме того, мы изучим взаимное расположение двух различных концевых линейных участков. Так как для рассматриваемых нами приложений — правильных и квазиправильных  $n$ -угольников, начиная с  $n \geq 12$  в правильном случае и начиная с  $n \geq 18$  в квазиправильном случае, концевых наростов быть не может, мы всюду ниже будем предполагать, что паркет  $D$  не имеет концевых наростов.

Итак, пусть концевых наростов нет. Мы начнем с оценки длины жала концевой змеи в предположении, что либо на концевой змее имеются наросты, либо на концевой змее наростов нет, но соответствующий концевой линейный участок имеет излом.

### 3.1 Длина жала: на концевой змее есть наросты

Пусть  $D$  — произвольный паркет из  $\mathcal{WP}_3$ , и  $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$  — некоторое его разложение на скелет и наросты. Пусть  $\Delta$  — концевая ячейка скелета  $S$ , и предположим что на  $\Delta$ -конце  $E$  нет концевых наростов, а на концевой  $\Delta$ -змее наросты есть. Обозначим через  $\Delta'$  ближайший к  $\Delta$  нарост из  $\Delta$ -хвоста паркета  $D$ . Пусть  $k$  — концевое ребро ячейки  $\Delta$ , а  $e$  — отличное от  $k$  граничное ребро из  $\Delta$ . Ориентируем оба отрезка  $e$  и  $k$  от их общей вершины. Пара  $(e, k)$  образует некоторый репер на плоскости. Определим *тип  $\Delta$ -хвоста* равным 1, 2, 3 или 4 в соответствии с номером одной из следующих четырех возможностей, см. также рис. 4.3.

1. Репер  $(e, k)$  ориентирован положительно, и нарост  $\Delta'$  расположен на боковине концевой  $\Delta$ -змеи  $Z$ , не содержащей ребро  $e$ .
2. Репер  $(e, k)$  ориентирован положительно, и нарост  $\Delta'$  расположен на боковине концевой  $\Delta$ -змеи  $Z$ , содержащей ребро  $e$ .
3. Репер  $(e, k)$  ориентирован отрицательно, и нарост  $\Delta'$  расположен на боковине концевой  $\Delta$ -змеи  $Z$ , не содержащей ребро  $e$ .
4. Репер  $(e, k)$  ориентирован отрицательно, и нарост  $\Delta'$  расположен на боковине концевой  $\Delta$ -змеи  $Z$ , содержащей ребро  $e$ .

Пусть  $M$  — произвольный выпуклый  $n$ -угольник, и  $\{m_i\}_{i=0}^{n-1}$  — последовательные его вершины при обходе  $M$ , скажем, против часовой стрелки. Для удобства будем считать, что индексы  $i$  вершин  $m_i$  — это элементы из циклической группы порядка  $n$ , т.е. из  $\mathbb{Z}_n$ . Рассмотрим произвольную

Рис. 4.3: Типы хвостов

вершину  $m_k$  многоугольника  $M$ . Пусть паркет  $D$  имеет минимальную реализацию  $\Gamma$  на  $M$ , такую что точка  $m_k \in M$  является концевой вершиной, соответствующей концевой ячейке  $\Delta$  из  $D$ . Так как, по предположению, на концевом линейном участке  $E$  паркета  $D$ , содержащем ячейку  $\Delta$ , нет концевых наростов, из предложения 4.2 вытекает, что внутренний угол многоугольника  $M$  в вершине  $m_k$  меньше  $\pi$ .

Обозначим через  $\alpha_{k\pm 1}$  величину угла  $m_k m_{k\pm 1} m_{k\mp 1}$ . Для каждого целого  $p$ ,  $1 \leq p \leq n$ , определим  $\beta_p$  равным величине положительного угла<sup>1</sup> между направлениями векторов  $m_{k-1} m_{k+1}$  и  $m_{k+p-1} m_{k+p}$ , и для целого  $q$ ,  $1 \leq q \leq n$ , положим  $\gamma_q$  равным величине отрицательного угла между направлениями векторов  $m_{k+1} m_{k-1}$  и  $m_{k-q+1} m_{k-q}$ . Ясно, что  $\beta_1$  и  $\gamma_1$  не равны нулю, так как угол при вершине  $m_k$  меньше  $\pi$ . Кроме того, обе последовательности  $\{\beta_p\}$  и  $\{\gamma_q\}$  монотонно возрастают (не обязательно строго). При этом, так как  $\beta_n = 2\pi - \alpha_{k-1}$ , а  $\gamma_n = 2\pi - \alpha_{k+1}$ , и, по предложению 4.2, углы  $\alpha_{k\pm 1}$  меньше  $2\pi/3$ , имеем:  $\beta_n > 4\pi/3$ , и  $\gamma_n > 4\pi/3$ .

Определим теперь четверку чисел, отвечающих за возможную длину  $\Delta$ -жала в зависимости от типа  $\Delta$ -хвоста.

1. Пусть  $q_0$  — это такое первое  $q$ , что  $\pi/3 - \alpha_{k+1} < \gamma_q < 2\pi/3$ . Положим  $g_o^+(m_k) = 2q_0 - 3$ .
2. Пусть  $p_0$  — это такое первое  $p$ , что  $\pi/3 < \beta_p < 2\pi/3 + \alpha_{k+1}$ . Положим  $g_e^-(m_k) = 2p_0 - 4$ .
3. Пусть  $p_0$  — это такое первое  $p$ , что  $\pi/3 - \alpha_{k-1} < \beta_p < 2\pi/3$ . Положим  $g_o^-(m_k) = 2p_0 - 3$ .
4. Пусть  $q_0$  — это такое первое  $q$ , что  $\pi/3 < \gamma_q < 2\pi/3 + \alpha_{k-1}$ . Положим  $g_e^+(m_k) = 2q_0 - 4$ .

<sup>1</sup> *Положительным (отрицательным) углом от  $a$  до  $b$*  называется величина дуги единичной окружности направлений, проходимой при движении в положительную (отрицательную) сторону от направления вектора  $a$  к направлению вектора  $b$ . Эти углы меняются в пределах  $[0, 2\pi)$ .



Наконец, определим *наростовый вектор*  $g(m_k)$  точки  $m_k$  как вектор  $(g_o^+(m_k), g_e^-(m_k), g_o^-(m_k), g_e^+(m_k))$ . Отметим, что по определению, если какого-нибудь  $p_0$  или  $q_0$  не существует, то соответствующая компонента вектора  $g(m_k)$  равна бесконечности. Обозначим через  $g(m_k)[i]$  компоненту вектора  $g(m_k)$  с номером  $i$ . Подчеркнем, что наростовый вектор  $g(m_k)$  зависит только от геометрии самого множества  $M$  и выбора точки  $m_k$ .

**Предложение 4.3** *Предположим, что к концевой  $\Delta$ -змею паркета  $D$  крепится по крайней мере один нарост, и  $\Delta$ -хвост имеет тип  $i$ . Тогда  $i$ -ая компонента  $g(m_k)[i]$  наростового вектора  $g(m_k)$  вершины  $m_k$  конечна, и длина  $\Delta$ -жала не меньше, чем  $g(m_k)[i]$ . Более того, для каждого  $g_0 \geq 2$ , среди рассматриваемых множеств  $M$  и паркетов  $D$  с  $\Delta$ -хвостом типа  $i$  существуют такие, что  $g(m_k)[i] = g_0$  и длина  $\Delta$ -жала в точности равна  $g(m_k)[i]$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\Delta'$  — нарост на концевой  $\Delta$ -змею, ближайший к концевой ячейке  $\Delta$ , и  $e$  — не концевое граничное ребро ячейки  $\Delta$ . Имеется две возможности: ребро  $e$  и нарост  $\Delta'$  пересекают или разные, или одну и ту же боковину концевой  $\Delta$ -змею. Боковину концевой  $\Delta$ -змею, пересекающуюся с отростком сети, инцидентным вершине  $m_{k+1}$ , назовем *нижней*, а другую боковину этой змею — *верхней*.

Для определенности, будем предполагать, что отросток сети  $\Gamma$ , соответствующий ребру  $e$ , инцидентен вершине  $m_{k+1}$ , т.е. пересекает нижнюю боковину концевой  $\Delta$ -змею. Этот отросток мы также обозначим через  $e$  и ориентируем его от точки  $m_{k+1}$ .

Рассмотрим первый случай (тип  $\Delta$ -хвоста равен 1): ребро  $e$  и нарост  $\Delta'$  пересекают разные боковины концевой  $\Delta$ -змею, нарост  $\Delta'$  расположен на верхней боковине концевой  $\Delta$ -змею, см. рис. 4.4. Так как мы предполагаем, что концевых наростов нет, отросток  $e$  лежит в угле  $m_k m_{k+1} m_{k-1}$ . Пусть  $m_{k-q+1}$  и  $m_{k-q}$  — вершины из  $M$ , инцидентные граничным ребрам нароста  $\Delta'$ . Построим на этих вершинах правильный треугольник  $m_{k-q+1} m_{k-q} m_{k-q}$ , лежащий вне многоугольника  $M$ . Рассмотрим прямую, проходящую через единственное внутреннее ребро сети  $\Gamma$ , инцидентное точке Штейнера из нароста  $\Delta'$ . Ясно, что эта прямая, во-первых, параллельна  $e$ , и, во-вторых, проходит через точку  $m_{k-q}$ . Более того, эта прямая пересекает сторону  $m_{k-q+1} m_{k-q}$  построенного правильного треугольника.

Рассмотрим два положительных угла: первый — от вектора  $m_{k+1} m_{k-1}$  к вектору  $m_{k+1} m_k$ , и второй — от вектора  $m_{k-q+1} m_{k-q}$  к вектору  $m_{k-q} m_{k-q}$ . Из вышесказанного вытекает, что внутренности этих углов пересекаются, что приводит к следующей системе неравенств:

$$0 < -\gamma_q + 2\pi/3 \quad \text{и} \quad \alpha_{k+1} > -\gamma_q + \pi/3,$$

откуда  $\pi/3 - \alpha_{k+1} < \gamma_q < 2\pi/3$ .

Рис. 4.4: Первый случай

С другой стороны, длина  $\Delta$ -жала в этом случае, очевидно, равна  $2q - 3$ , см. рис. 4.3. Поэтому

$$g(m_k)[1] = g_o^+(m_k) \leq 2q - 3,$$

т.е. длина  $\Delta$ -жала больше или равна  $g(m_k)[1]$ .

Если тип  $\Delta$ -хвоста равен 3, т.е. отросток  $e \in \Gamma$  приходит в точку  $m_{k-1}$ , а соответствующее ребро  $e$  из  $D$  и нарост  $\Delta'$  пересекают разные боковины концевой  $\Delta$ -змеи (нарост  $\Delta'$  расположен на нижней боковине концевой  $\Delta$ -змеи), то, аналогично,  $\pi/3 - \alpha_{k-1} < \beta_p < 2\pi/3$ . Так как длина  $\Delta$ -жала в этом случае равна  $2p - 3$ , то

$$g(m_k)[3] = g_o^-(m_k) \leq 2p - 3,$$

т.е. длина  $\Delta$ -жала больше или равна  $g(m_k)[3]$ .

Теперь рассмотрим второй случай (тип  $\Delta$ -хвоста равен 2): ребро  $e$  и нарост  $\Delta'$  пересекают одну и ту же боковину концевой  $\Delta$ -змеи (нарост  $\Delta'$  расположен на нижней боковине концевой  $\Delta$ -змеи), см. рис. 4.5. Так как мы предполагаем, что концевых наростов нет, отросток  $e$  лежит в угле  $m_k m_{k+1} m_{k-1}$ . Пусть  $m_{k+p-1}$  и  $m_{k+p}$  — вершины из  $M$ , инцидентные граничным ребрам нароста  $\Delta'$ . Построим на этих вершинах правильный треугольник  $m_{k+p-1} m_+ m_{k+p}$ , лежащий вне многоугольника  $M$ . Рассмотрим прямую, проходящую через единственное внутреннее ребро сети  $\Gamma$ , инцидентное точке Штейнера из нароста  $\Delta'$ . Ясно, что эта прямая, во-первых, параллельна  $e$ , и, во-вторых, проходит через точку  $m_+$ . Более того, эта прямая пересекает сторону  $m_{k+p-1} m_{k+p}$  построенного правильного треугольника.

Рассмотрим два положительных угла: первый — от вектора  $m_{k-1} m_{k+1}$  к вектору  $m_k m_{k+1}$ , и второй — от вектора  $m_{k+p} m_+$  к вектору  $m_{k+p-1} m_+$ . Из вышесказанного вытекает, что внутренности этих углов пересекаются, что приводит к следующей системе неравенств:

$$0 < \beta_p - \pi/3 \quad \text{и} \quad \alpha_{k+1} > \beta_p - 2\pi/3,$$

Рис. 4.5: Второй случай

Рис. 4.6: Длина жала равна компоненте наростового вектора

откуда  $\pi/3 < \beta_p < 2\pi/3 + \alpha_{k+1}$ . Так как длина  $\Delta$ -жала в этом случае равна  $2p - 4$ , то

$$g(m_k)[2] = g_e^-(m_k) \leq 2p - 4,$$

т.е. длина  $\Delta$ -жала больше или равна  $g(m_k)[2]$ .

Наконец, если тип  $\Delta$ -хвоста равен 4, т.е. отросток  $e \in \Gamma$  приходит в точку  $m_{k-1}$ , а соответствующее ребро  $e$  из  $D$  и нарост  $\Delta'$  пересекают одну и ту же боковину концевой  $\Delta$ -змеи (нарост  $\Delta'$  расположен на верхней боковине концевой  $\Delta$ -змеи), то, аналогично,  $\pi/3 < \gamma_q < 2\pi/3 + \alpha_{k-1}$ . Так как длина  $\Delta$ -жала в этом случае равна  $2q - 4$ , то

$$g(m_k)[4] = g_e^+(m_k) \leq 2q - 4,$$

т.е. длина  $\Delta$ -жала больше или равна  $g(m_k)[4]$ .

Таким образом, первое утверждение предложения полностью доказано.

Пример, доказывающий второе утверждение предложения, может быть построен так, как показано на рисунке 4.6. Здесь мы разберем подробно только случай хвостов типа 2. Для остальных типов конструкция аналогична.

Пусть  $g_0 \geq 2$  — произвольное четное число. Рассмотрим произвольный ориентированный дождь  $R$ , состоящий из  $z = g_0 + 1$  прямых, и пусть

$m$  — некоторая точка на плоскости, лежащая вне полосы, ограниченной крайними прямыми дождя. Пусть  $Z$  — бесконечная змея с началом в  $m$ , соответствующая дождю  $R$ . Рассмотрим ручеек  $\text{br}(m, R)$  с началом в  $m$ , и пусть  $r_i$  обозначает  $i$ -ый отросток змеи  $Z$  вдоль ручейка  $\text{br}(m, R)$ . Построим два луча  $l_1$  и  $l_2$ , выходящие из  $m$  и такие, что луч  $l_i$  пересекает внутренность луча  $r_i$ ,  $i = 1, 2$ , в точке  $m_i$  под углом, меньшим чем  $\pi/6$ . Ясно, что угол  $\varphi$  между лучами  $l_1$  и  $l_2$  больше чем  $2\pi/3$  и содержит ручеек  $\text{br}(m, R)$ .

Обозначим через  $m_z$  точку пересечения отростка  $r_z$  с границей угла  $\varphi$ . Выпустим из точки  $m_z$  луч  $l_3$  так, чтобы часть отростка  $r_z$ , попавшая в угол между лучами  $l_3$  и  $m_z m$ , принадлежала биссектрисе этого угла. Из сказанного выше вытекает, что луч  $l_3$  пересекает бесконечное концевое ребро змеи  $Z$  в некоторой внутренней точке  $m'$ .

Проведем в окрестности вершины  $m_z$  перпендикуляр  $\ell$  к отростку  $r_z$  так, чтобы точки  $m$ ,  $m'$ , и все точки  $m_i$ ,  $i \neq z$ , лежали в одной открытой полуплоскости относительно  $\ell$ , а точка  $m_z$  — в другой. Более того, потребуем чтобы точка  $m'_z$ , симметричная  $m_z$  относительно  $\ell$ , попала внутрь отростка  $r_z$ . Точки пересечения прямой  $\ell$  с лучами  $m_z m$  и  $l_3$  обозначим через  $n_1$  и  $n_2$ . Определим множество  $M'$  равным  $\{m, m', n_1, n_2, m_1, \dots, m_{z-1}\}$ . Ясно, что  $M'$  — это множество вершин некоторого выпуклого многоугольника.

Обозначим через  $\Gamma'$  пересечение змеи  $Z$  с выпуклой оболочкой  $\text{conv } M'$  множества  $M'$ , и пусть  $r'_z$  — часть отростка  $r_z$ , попавшая в  $\Gamma'$ . Обозначим через  $s$  единственную точку Штейнера из  $\Gamma'$ , инцидентную  $r'_z$ . Перестроим сеть  $\Gamma'$ , заменив ребро  $r'_z$  на единственную минимальную сеть, затягивающую вершины треугольника  $n_1 n_2 s$ . Очевидно, эта сеть состоит из трех ребер. Перестроенную сеть  $\Gamma'$  снова обозначим через  $\Gamma'$ . Далее, на граничном ребре  $sm'$  сети  $\Gamma'$  выберем точку  $s'$ , и выпустим из нее два различных луча  $l_4$  и  $l_5$  под углами в  $\pi/3$  по отношению к лучу  $s'm'$ . Ясно, что один из этих лучей, скажем  $l_5$ , параллелен отростку  $r_2$ . Перестроим сеть  $\Gamma'$ , заменив ребро  $sm'$  на три ребра, одно из которых — это  $ss'$ , другое — пересечение луча  $l_4$  с выпуклой оболочкой  $\text{conv } M'$ , а третье — пересечение луча  $l_5$  с углом  $\varphi$ . Перестроенную таким образом сеть  $\Gamma'$  обозначим через  $\Gamma$ . Множество всех вершин степени 1 сети  $\Gamma$  обозначим через  $M$ . Ясно, что  $M$  — это множество вершин некоторого выпуклого многоугольника.

Сеть  $\Gamma$  представляет собой змею с наростом. Если обозначить через  $\Delta$  ту концевую ячейку паркета, соответствующего сети  $\Gamma$ , которая отвечает вершине  $m$ , то длина  $\Delta$ -жала будет равна  $g_0$ . С другой стороны, число  $g(m)[2]$ , вычисленное для вершины  $m$  множества  $M$ , тоже равно  $g_0$ . Доказательство предложения закончено.

Отметим, что если множество  $M$  симметрично относительно некоторой прямой, проходящей через вершину  $m_k$ , то  $g_e^-(m_k) = g_e^+(m_k)$  и  $g_o^-(m_k) = g_o^+(m_k)$ . Поэтому в этом случае под наростовым вектором удобно понимать

вектор  $g_s(m_k)$ , состоящий из двух компонент, соответствующих первому и второму типам  $\Delta$ -хвоста:

$$g_s(m_k) = (g_o^+(m_k), g_e^-(m_k)).$$

Обозначим через  $G(m_k)$  наименьшую из компонент наростового вектора  $g(m_k)$  и назовем ее *наростовым числом точки  $m_k$* .

**Следствие 4.6** *Предположим, что к концевой  $\Delta$ -змею паркета  $D$  крепится по крайней мере один нарост. Тогда длина  $\Delta$ -жала не меньше наростового числа  $G(m_k)$ .*

Применим предложение 4.3 к случаю правильного многоугольника.

**Следствие 4.7** *Пусть  $M$  — множество вершин правильного  $n$ -угольника, и  $n \geq 12$ . Тогда наростовый вектор любой вершины  $m \in M$  равен*

$$g_s(m) = \left( 2 \left[ \frac{n}{6} \right] - 1, 2 \left[ \frac{n+3}{6} \right] - 2 \right),$$

а наростовое число  $G(m)$  равно  $[n/3] - 2$ . Поэтому, если  $D$  — произвольный паркет, имеющий минимальную реализацию на правильном  $n$ -угольнике,  $n \geq 12$ , то любое его  $\Delta$ - жало, не совпадающее с  $\Delta$ -хвостом (т.е. такое, что на концевой  $\Delta$ -змею имеются наросты), содержит по крайней мере  $[n/3] - 2$  ячейки.

**Доказательство.** В силу следствия 4.2, при  $n \geq 12$  концевые наросты отсутствуют, значит мы находимся в условиях предложения 4.3. Легко сосчитать, что для правильного  $n$ -угольника угол  $\beta_p$  равен  $(2p - 1)\alpha$ , где  $\alpha = \pi/n$ , а угол  $\gamma_q$  равен  $(2q - 1)\alpha$ . Если тип  $\Delta$ -хвоста равен 1, то  $g_o^+(m) = 2q_0 - 3$ , где  $q_0$  — наименьшее из  $q$ , для которых выполнены неравенства

$$\pi/3 - \alpha < (2q - 1)\alpha < 2\pi/3,$$

откуда  $n/3 + 1/2 > q > n/6$ . Так как  $n \geq 12$ , разность между верхней и нижней границами допустимого для  $q$  интервала больше 2. Поэтому

$$g_o^+(m) = 2([n/6] + 1) - 3 = 2[n/6] - 1.$$

Далее, если тип  $\Delta$ -хвоста равен 2, то  $g_e^-(m) = 2p_0 - 4$ , где  $p_0$  — наименьшее из  $p$ , для которых выполнены неравенства

$$\pi/3 < (2p - 1)\alpha < 2\pi/3 + \alpha,$$

откуда  $n/3 > p > n/6 + 1/2$ . Так как  $n \geq 12$ , разность между верхней и нижней границами допустимого для  $p$  интервала больше 1. Поэтому

$$g_e^-(m) = 2 \left[ \frac{n+3}{6} \right] - 2.$$

Рис. 4.7: Точки на окружности

Осталось заметить, что

$$G(m) = \min\left\{2\left[\frac{n+3}{6}\right] - 2, 2\left[\frac{n}{6}\right] - 1\right\} = \left[\frac{n}{3}\right] - 2.$$

Следствие доказано.

Рассмотрим еще один интересный частный случай. Пусть  $M$  — произвольное конечное подмножество окружности, и  $\{m_i\}_{i=0}^{n-1}$  — последовательные его вершины при обходе  $M$ , скажем, против часовой стрелки. Как и выше, будем считать, что индексы  $i$  вершин  $m_i$  — это элементы из  $\mathbb{Z}_n$ . Рассмотрим произвольную вершину  $m_k$ , и пусть  $\delta_{\pm}$  обозначает угловую величину стороны  $m_k m_{k\pm 1}$ , см. рис. 4.7. Опустим на каждую сторону  $m_{k\pm(i-1)} m_{k\pm i}$  многоугольника  $M$  перпендикуляр  $r_i^{\pm}$  из центра окружности, и ориентируем его от центра окружности. Обозначим через  $\varphi_i^+$  величину положительного угла от  $r_1^+$  до  $r_i^+$ . Аналогично, через  $\varphi_i^-$  обозначим величину отрицательного угла от  $r_1^-$  до  $r_i^-$ .

1. Пусть  $q_0$  — это такое первое  $q$ , что

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\delta_- + \delta_+}{2} < \varphi_q^- < \frac{2\pi}{3} - \frac{\delta_+}{2}.$$

2. Пусть  $p_0$  — это такое первое  $p$ , что

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\delta_-}{2} < \varphi_p^+ < \frac{2\pi}{3}.$$

3. Пусть  $p'_0$  — это такое первое  $p$ , что

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\delta_- + \delta_+}{2} < \varphi_p^+ < \frac{2\pi}{3} - \frac{\delta_-}{2}.$$

4. Пусть  $q'_0$  — это такое первое  $q$ , что

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\delta_+}{2} < \varphi_q^- < \frac{2\pi}{3}.$$

**Следствие 4.8** В сделанных предположениях, наростовый вектор  $g(m_k)$  вершины  $m_k$  множества  $M \subset S^1$  равен

$$(2q_0 - 3, 2p_0 - 4, 2p'_0 - 3, 2q'_0 - 4).$$

**Следствие 4.9** Пусть  $M$  — множество вершин квазиравильного  $n$ -угольника, и  $n \geq 18$ . Тогда все компоненты наростового вектора любой вершины  $m \in M$  конечны, и наростовый вектор вершины  $m$  покомпонентно больше или равен следующему вектору

$$\left( 2 \left[ \frac{n}{6} \right] - 3, 2 \left[ \frac{n+3}{6} \right] - 4, 2 \left[ \frac{n}{6} \right] - 3, 2 \left[ \frac{n+3}{6} \right] - 4 \right),$$

а наростовое число  $G(m)$  больше или равно  $\lfloor n/3 \rfloor - 4$ . Поэтому, если  $D$  — произвольный паркет, имеющий минимальную реализацию на квазиравильном  $n$ -угольнике, то любое его  $\Delta$ -жало, не совпадающее с  $\Delta$ -хвостом (т.е. на концевой  $\Delta$ -змеи имеются наросты), содержит по крайней мере  $\lfloor n/3 \rfloor - 4$  ячеек.

**Доказательство.** Конечность компонент наростового вектора вытекает из того, что разность между верхними и нижними границами, в которых должны лежать величины углов  $\varphi_i^\pm$ , больше чем  $\pi/3$ . С другой стороны, разность между  $\varphi_{i+1}^\pm$  и  $\varphi_i^\pm$  не превосходит угловой величины двух сторон правильного  $n$ -угольника  $P$  из определения квазиравильного многоугольника  $M$ , т.е.  $4\pi/n$ . Так как  $n \geq 18$ , указанная разность меньше чем  $\pi/3$ , поэтому одно из  $\varphi_i^\pm$  попадает в нужный интервал для каждой из четырех компонент наростового вектора.

Для завершения доказательства достаточно оценить компоненты наростового вектора произвольной вершины  $m_k$  квазиравильного многоугольника  $M$ . Прежде всего отметим, что в силу симметричности правильного многоугольника, достаточно оценить только две компоненты наростового вектора, скажем, первую и вторую.

Для оценки первой компоненты необходимо оценить снизу такое наименьшее  $q$ , для которого выполнены следующие неравенства:

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\delta_- + \delta_+}{2} < \varphi_q^- < \frac{2\pi}{3} - \frac{\delta_+}{2}.$$

Перепишем первое из них в виде

$$(4.1) \quad \varphi_q^- + \frac{\delta_- + \delta_+}{2} > \frac{\pi}{3}.$$

Ясно, что величина, стоящая в левой части, — это величина отрицательного угла от срединного перпендикуляра  $r_1^+$  до срединного перпендикуляра  $r_q^-$ . Легко видеть, что этот угол меньше отрицательного угла от срединного перпендикуляра, опущенного на сторону правильного многоугольника  $P$ , соответствующую  $m_{k+1}$ , до срединного перпендикуляра, опущенного на сторону из  $P$ , соответствующую  $m_{k-q}$ . Поэтому

$$\varphi_q^- + \frac{\delta_- + \delta_+}{2} < (q + 1) \frac{2\pi}{n}.$$

Пусть  $q_0$  — наименьшее  $q$ , такое что выполняется неравенство 4.1. Тогда

$$\frac{\pi}{3} < (q_0 + 1) \frac{2\pi}{n},$$

откуда

$$q_0 > \frac{n}{6} - 1,$$

и, значит,  $q_0 \geq [n/6]$ . Поэтому  $g_o^+(m_k) \geq 2[n/6] - 3$ .

Для оценки второй компоненты наростового вектора нужно оценить снизу такое наименьшее  $p$ , для которого выполнены неравенства

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\delta_-}{2} < \varphi_p^+ < \frac{2\pi}{3}.$$

Перепишем первое из них в виде

$$(4.2) \quad \varphi_p^+ + \frac{\delta_-}{2} > \frac{\pi}{3}.$$

Ясно, что величина, стоящая в левой части, — это величина положительного угла от радиус вектора вершины  $m_k$  до срединного перпендикуляра  $r^+p$ . Легко видеть, что этот угол меньше чем положительный угол от радиус вектора вершины правильного многоугольника  $P$ , лежащей на дуге  $m_k m_{k-1}$ , до срединного перпендикуляра к стороне из  $P$ , соответствующей вершине  $m_{k+p}$ . Поэтому

$$\varphi_p^+ + \frac{\delta_-}{2} < (p + \frac{1}{2}) \frac{2\pi}{n}.$$

Пусть  $p_0$  — наименьшее  $p$ , такое что выполняется неравенство 4.2. Тогда

$$\frac{\pi}{3} < (p_0 + \frac{1}{2}) \frac{2\pi}{n},$$

откуда

$$p_0 > \frac{n}{6} - \frac{1}{2},$$

и, значит,  $p_0 \geq [(n - 3)/6] + 1$ . Поэтому  $g_e^-(m_k) \geq 2[(n - 3)/6] - 2 = 2[(n + 3)/6] - 4$ .



Итак, наростовый вектор произвольной вершины  $m_k$  покомпонентно больше или равен следующему вектору

$$\left( 2\left[\frac{n}{6}\right] - 3, 2\left[\frac{n+3}{6}\right] - 4, 2\left[\frac{n}{6}\right] - 3, 2\left[\frac{n+3}{6}\right] - 4 \right).$$

Поэтому, как нетрудно проверить, наростовое число  $G(m_k)$  больше или равно  $\lfloor n/3 \rfloor - 4$ . Доказательство закончено.

### 3.2 Длина жала: на концевой змее наростов нет, концевой линейный участок имеет излом

Пусть  $D$  — произвольный паркет из  $\mathcal{WP}_3$ , и  $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$  — некоторое его разложение на скелет и наросты;  $\Delta$  — концевая ячейка скелета  $S$ , и  $E$  —  $\Delta$ -конец паркета  $D$ . Обозначим через  $E_S$  соответствующий  $E$  концевой линейный участок скелета  $S$ , т.е.  $E_S = E \cap S$ . Пусть  $Z$  — концевая  $\Delta$ -змея. Предположим, что на  $Z$  наростов нет (в этом случае  $Z$  совпадает с  $\Delta$ -жалом). Предположим что  $\Delta$ -конец  $E$  имеет излом. Обозначим через  $e$  единственное граничное не концевое ребро ячейки  $\Delta$ , и через  $t$  — ребро поворота концевого линейного участка  $E$  паркета  $D$ .

Далее, пусть, как и выше,  $M$  — произвольный выпуклый  $n$ -угольник, и  $\{m_i\}_{i=0}^{n-1}$  — последовательные его вершины при обходе  $M$  против часовой стрелки. Снова будем считать, что индексы  $i$  вершин  $m_i$  — это элементы из  $\mathbb{Z}_n$ . Рассмотрим произвольную вершину  $m_k$  многоугольника  $M$ . Пусть паркет  $D$  имеет минимальную реализацию  $\Gamma$  на  $M$ , такую что точка  $m_k \in M$  является концевой вершиной, соответствующей концевой ячейке  $\Delta$  из  $D$ .

Мы оценим длину концевой змеи  $Z$ , рассмотрев для этого четыре возможных случая, в зависимости от того, на одной или разных боковинах концевого линейного участка  $E_S$  скелета  $S$  расположены ребра  $e$  и  $t$ , а также в зависимости от того, крепится ли к ребру  $e$  нарост или нет. С формальной точки зрения, мы должны различать также в какую из вершин  $m_{k+1}$  или  $m_{k-1}$  приходит отросток сети  $\Gamma$ , соответствующий ребру  $e$ . Однако, так как эти случаи полностью аналогичны, мы предположим, что этот отросток приходит в точку  $m_{k+1}$ , а для случая  $m_{k-1}$  приведем только ответы.

Мы начнем с определения так называемых характеристических полуплоскостей и соответствующих им  $t$ -множеств и  $t$ -чисел. Отметим, что эти определения не зависят от того, есть ли на концевой змее  $Z$  наросты, отличные от концевых.

#### Характеристические полуплоскости

Мы определим сначала характеристические полуплоскости первого типа, и проиллюстрируем как работает это понятие. Затем, поступая по аналогии,

мы определим характеристические полуплоскости остальных трех типов.

Пусть сначала ребра  $e$  и  $t$  лежат на разных боковинах концевого линейного участка  $E_S$ . Рассмотрим замкнутую полуплоскость, ограниченную прямой  $m_k m_{k+1}$  и содержащую многоугольник  $M$ . Повернем эту полуплоскость вокруг точки  $m_k$  в положительном направлении на угол  $120^\circ$ . Полученная замкнутая полуплоскость называется *характеристической полуплоскостью первого типа точки  $m_k$*  и обозначается  $\Pi_o^+(m_k)$ . Положим  $T_o^+(m_k) = \Pi_o^+(m_k) \cap M \setminus \{m_k\}$ , и пусть

$$t_o^+(m_k) = 2\#T_o^+(m_k),$$

где через  $\#T_o^+(m_k)$  обозначено количество элементов множества  $T_o^+(m_k)$ . Множество  $T_o^+(m_k)$  называется  *$t$ -множеством первого типа точки  $m_k$* , а число  $t_o^+(m_k)$  —  *$t$ -числом первого типа точки  $m_k$* .

**Предложение 4.4** *В сделанных предположениях, если к ребру  $t$  не крепится нарост, то все точки из  $t$ -множества первого типа точки  $m_k$  затачиваются отростками концевой змеи  $Z$ , длина которой не меньше чем  $t_o^+(m_k)$ . Если же к ребру  $t$  крепится нарост, то отростки концевой змеи  $Z$  затачивают все точки из множества  $T_o^+(m_k)$  кроме, быть может, одной. Длина концевой змеи  $Z$  в этом случае не меньше чем  $t_o^+(m_k) - 2$ .*

**Доказательство.** Легко видеть, что ребро поворота концевого линейного участка  $E$  сети  $\Gamma$  лежит вне характеристической полуплоскости  $\Pi_o^+(m_k)$  первого типа точки  $m_k$ . Прямая  $m_k m_{k+1}$  разбивает полуплоскость  $\Pi_o^+(m_k)$  на два замкнутых угла: угол  $A_1$  в  $60^\circ$  и угол  $A_2$  в  $120^\circ$ . Так как множество  $M$  целиком лежит в замкнутой полуплоскости, ограниченной прямой  $m_k m_{k+1}$  и содержащей угол  $A_1$ , и так как угол многоугольника  $M$  в точке  $m_k$ , в силу следствия 4.5, меньше  $180^\circ$ , то в угле  $A_2$  не содержится точек из  $M$ , отличных от  $m_k$ . Поэтому все точки из множества  $T_o^+(m_k)$  лежат в угле  $A_1$ .

Если на ребре  $t$  нароста нет, то все точки из  $T_o^+(m_k)$  затачиваются отростками с верхней боковины концевой змеи  $Z$ . Так как в рассматриваемом случае боковины концевой змеи  $Z$  равны, количество ячеек в змее  $Z$  не меньше удвоенного числа точек из  $T_o^+(m_k)$ , т.е. не меньше чем  $t_o^+(m_k)$ .

Если же на ребре  $t$  есть нарост, то не более чем одна из точек множества  $T_o^+(m_k)$  может быть затачена граничным ребром этого нароста, а все остальные точки из  $T_o^+(m_k)$  — вновь затачиваются отростками с верхней боковины концевой змеи  $Z$ . Поэтому теперь количество ячеек в змее  $Z$  не меньше чем  $t_o^+(m_k) - 2$ . Доказательство закончено.

Определим теперь характеристические полуплоскости и соответствующие им  $t$ -множества и  $t$ -числа всех остальных типов. Третий тип получается из первого типа простой “заменой знака”. А именно, рассмотрим замкнутую полуплоскость, ограниченную прямой  $m_k m_{k-1}$  и содержащую

многоугольник  $M$ . Повернем эту полуплоскость вокруг точки  $m_k$  в отрицательном направлении на угол  $120^\circ$ . Полученная замкнутая полуплоскость называется *характеристической полуплоскостью третьего типа точки  $m_k$*  и обозначается  $\Pi_o^-(m_k)$ . Положим  $T_o^-(m_k) = \Pi_o^-(m_k) \cap M \setminus \{m_k\}$ , и пусть

$$t_o^-(m_k) = 2\#T_o^-(m_k).$$

Множество  $T_o^-(m_k)$  называется  *$t$ -множеством третьего типа точки  $m_k$* , а число  $t_o^-(m_k)$  —  *$t$ -числом третьего типа точки  $m_k$* .

Перейдем теперь ко второму и четвертому типам. Проведем через  $m_k$  прямую  $l$ , параллельную прямой  $m_{k-1}m_{k+1}$ , рассмотрим замкнутую полуплоскость, ограниченную прямой  $l$  и содержащую  $M$ , и повернем ее вокруг точки  $m_k$  в отрицательном направлении на угол  $120^\circ$ . Полученная замкнутая полуплоскость называется *характеристической полуплоскостью второго типа точки  $m_k$*  и обозначается  $\Pi_e^-(m_k)$ . Положим  $T_e^-(m_k) = \Pi_e^-(m_k) \cap M \setminus \{m_k\}$ , и пусть

$$t_e^-(m_k) = 2\#T_e^-(m_k) - 1.$$

Множество  $T_e^-(m_k)$  называется  *$t$ -множеством второго типа точки  $m_k$* , а число  $t_e^-(m_k)$  —  *$t$ -числом второго типа точки  $m_k$* .

Наконец, проведем через  $m_k$  прямую  $l$ , параллельную прямой  $m_{k-1}m_{k+1}$ , рассмотрим замкнутую полуплоскость, ограниченную прямой  $l$  и содержащую  $M$ , и повернем ее вокруг точки  $m_k$  в положительном направлении на угол  $120^\circ$ . Полученная замкнутая полуплоскость называется *характеристической полуплоскостью четвертого типа точки  $m_k$*  и обозначается  $\Pi_e^+(m_k)$ . Положим  $T_e^+(m_k) = \Pi_e^+(m_k) \cap M \setminus \{m_k\}$ , и пусть

$$t_e^+(m_k) = 2\#T_e^+(m_k) - 1.$$

Множество  $T_e^+(m_k)$  называется  *$t$ -множеством четвертого типа точки  $m_k$* , а число  $t_e^+(m_k)$  —  *$t$ -числом четвертого типа точки  $m_k$* .

### Оценки на длину жала

Чтобы сформулировать общий результат для всех рассмотренных случаев, удобно ввести еще функцию  $d(E)$ , равную 1, если на ребре  $t$  есть нарост, и равную 0 в противном случае. Кроме того, мы отнесем каждый из рассматриваемых случаев взаимного расположения ребер  $e$  и  $t$  и расположения отрезка  $e$  по отношению к вершинам  $m_{k-1}$  и  $m_{k+1}$  к одному из четырех классов излома. Это соответствие показано на рис. 4.8.

Наконец, определим *вектор поворота  $t(m_k)$  для точки  $m_k$* , положив

$$t(m_k) = (t_o^+(m_k), t_o^-(m_k), t_e^-(m_k), t_e^+(m_k)),$$

а также *число поворота  $T(m_k)$  точки  $m_k$*  как

$$T(m_k) = \min\{t_o^+(m_k), t_o^-(m_k), t_e^-(m_k), t_e^+(m_k)\} = \min_i t(m_k)[i].$$

Рис. 4.8: Четыре класса поворачивающих концевых линейных участков  $E$

Имеет место следующий результат, доказательство которого полностью аналогично доказательству предложения 4.4.

**Предложение 4.5** Пусть  $D$  — паркет из  $\mathcal{WR}_5$ , имеющий минимальную реализацию на выпуклом многоугольнике  $M$ . Пусть, для некоторого разложения паркета  $D$  на скелет и наросты, ячейка  $\Delta$  является концевой. Пусть  $\Delta$ -конец  $E$  имеет излом, и к концевой  $\Delta$ -змею  $Z$  наросты не крепятся. Обозначим через  $t$  ребро поворота концевой линейного участка  $E$ , а через  $m_k \in M$  — концевую вершину, соответствующую ячейке  $\Delta$ . Тогда если концевой линейный участок  $E$  относится к  $i$ -ому классу излома, то концевая змея  $Z$  содержит не менее  $t(m_k)[i] - 2d(E)$  ячеек.

**Следствие 4.10** В предположениях предложения 4.5, в не зависимости от класса излома, концевая змея  $Z$  содержит не менее  $T(m_k) - 2$  ячеек.

**Следствие 4.11** В предположениях предложения 4.5, если паркет  $D$  является скелетом, то в не зависимости от класса излома, концевая змея  $Z$  содержит не менее  $T(m_k)$  ячеек.

Отметим, что если множество  $M$  симметрично относительно некоторой прямой, проходящей через точку  $m_k$ , то первая и третья, а также вторая и четвертая компоненты вектора поворота для точки  $m_k$  совпадают. Поэтому в этом случае удобно понимать под вектором поворота для  $m_k$  вектор

$$t_s(m_k) = (t_o^+(m_k), t_o^-(m_k)).$$

**Следствие 4.12** Пусть  $M$  — правильный  $n$ -угольник. Тогда вектор поворота для его произвольной вершины  $m$  имеет вид

$$t_s(m) = \left( 2\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 2, 2\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1 \right),$$

а число поворота  $T(m)$  равно  $2\lceil n/3 \rceil - 2$ . Поэтому, в сделанных предположениях, при  $n \geq 12$ , если  $D$  — скелет, то длина концевой змеи не меньше чем  $2\lceil n/3 \rceil - 2$ , а в общем случае — не меньше чем  $2\lceil n/3 \rceil - 4$ .

Более того, длина боковины поворота концевой змеи концевого линейного участка  $E$  в случае излома класса 1 или 3 не меньше чем  $\lfloor n/3 \rfloor - 1 - d(E)$ , а в случае изломов класса 2 или 4 — не меньше чем  $\lfloor n/3 \rfloor - d(E)$ . Длина противоположной боковины в случае излома класса 1 или 3 не меньше чем  $\lfloor n/3 \rfloor - 1 - d(E)$ , а в случае изломов класса 2 или 4 — не меньше чем  $\lfloor n/3 \rfloor - d(E)$ .

**Следствие 4.13** Пусть  $M$  — квазиравильный  $n$ -угольник. Тогда вектор поворота для произвольной его вершины  $t_k$  покомпонентно не меньше чем вектор

$$\left( 2\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 4, 2\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 5, 2\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 4, 2\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 5 \right),$$

поэтому число поворота  $T(t_k)$  вершины  $t_k$  не меньше чем  $2\lfloor n/3 \rfloor - 5$ . Поэтому, в сделанных предположениях, при  $n \geq 18$ , если  $D$  — скелет, то длина концевой змеи не меньше чем  $2\lfloor n/3 \rfloor - 5$ , а в общем случае — не меньше чем  $2\lfloor n/3 \rfloor - 7$ .

**Доказательство.** Прежде всего отметим, что, в силу симметричности правильного многоугольника, достаточно оценить только две компоненты вектора поворота, скажем, первую и вторую.

Обозначим через  $t'$  отличную от  $t_k$  точку пересечения прямой  $l$ , ограничивающей характеристическую полуплоскость, с окружностью  $S^1$ . Предположим, что вершины  $p_k$  правильного многоугольника  $P$  занумерованы элементами из  $\mathbb{Z}_n$  так, чтобы на дуге  $p_{k-1}p_k$  окружности  $S^1$  лежит точка  $t_k$  из  $M$ .

Оценим первую компоненту. Рассмотрим предельное положение  $\Pi$  характеристической полуплоскости  $\Pi_o^+(m_k)$ , соответствующее случаю, когда  $t_{k+1} = p_{k+1}$  и  $t_k = p_{k-1}$ . Ясно, что для любого возможного расположения вершин из  $M$  по отношению к  $P$ , полуплоскость  $\Pi_o^+(m_k)$  содержит  $\Pi \cap S^1$ . Поэтому  $\#T_o^+(m_k)$  не меньше чем  $\#(\Pi \cap M)$ . С другой стороны,  $\#(\Pi \cap M)$  не меньше чем количество сторон многоугольника  $P$ , попавших в  $\Pi$ . Это число равно

$$\left[ \left( \frac{2\pi}{3} - 2 \frac{2\pi}{n} \right) / \frac{2\pi}{n} \right] = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2,$$

поэтому  $t_o^+(m_k) \geq 2\lfloor n/3 \rfloor - 4$ .

Оценим теперь вторую компоненту. Рассмотрим предельное положение  $\Pi$  характеристической полуплоскости  $\Pi_e^-(m_k)$ , соответствующее случаю  $t_{k-1} = p_{k-2}$  и  $t_k = t_{k+1} = p_k$ . Ясно, что для любого возможного расположения вершин из  $M$  по отношению к  $P$ , полуплоскость  $\Pi_e^-(m_k)$  содержит  $\Pi \cap S^1$ . Поэтому  $\#T_e^-(m_k)$  не меньше чем  $\#(\Pi \cap M)$ . С другой стороны,  $\#(\Pi \cap M)$  не меньше чем количество сторон многоугольника  $P$ , попавших в  $\Pi$ . Это число равно

$$\left[ \left( \frac{2\pi}{3} - 2 \frac{2\pi}{n} \right) / \frac{2\pi}{n} \right] = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2,$$

поэтому  $t_e^-(m_k) \geq 2\lfloor n/3 \rfloor - 5$ . Следствие доказано.

### 3.3 Длина хвоста: концевой линейный участок имеет излом и на концевой змее есть наросты

Пусть  $D$  — произвольный паркет из  $\mathcal{WP}_3$ , и  $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$  — некоторое его разложение на скелет  $S$  и наросты;  $\Delta$  — концевая ячейка скелета  $S$ , и  $E$  —  $\Delta$ -конец паркета  $D$ . Обозначим через  $E_S$  соответствующий  $E$  концевой линейный участок скелета  $S$ , т.е.  $E_S = E \cap S$ . Пусть  $Z$  — концевая  $\Delta$ -змея. Предположим, что на  $Z$  нет концевых наростов, но другие наросты имеются. Предположим что  $\Delta$ -конец  $E$  имеет излом. Обозначим через  $e$  единственное граничное не концевое ребро ячейки  $\Delta$ , и через  $t$  — ребро поворота концевой линейного участка  $E$  паркета  $D$ . Назовем *боковиной поворота концевой линейного участка  $E$*  ту из двух его боковин, которая пересекается (возможно, по двум точкам) с ребром поворота  $t$ , а противоположную боковину концевой линейного участка  $E$  назовем *подчиненной боковиной*.

Далее, пусть, как и выше,  $M$  — произвольный выпуклый  $n$ -угольник, и  $\{m_i\}_{i=0}^{n-1}$  — последовательные его вершины при обходе  $M$  против часовой стрелки, занумерованные элементами из  $\mathbb{Z}_n$ . Рассмотрим произвольную вершину  $m_k$  многоугольника  $M$ . Пусть паркет  $D$  имеет минимальную реализацию  $\Gamma$  на  $M$ , такую что точка  $m_k \in M$  является концевой вершиной, соответствующей концевой ячейке  $\Delta$  из  $D$ .

Мы оценим длину концевой  $\Delta$ -змеи  $Z$  и  $\Delta$ -хвоста  $X$ , рассмотрев для этого те же четыре возможных случая, что и выше, в зависимости от того, на одной или разных боковинах концевой линейного участка  $E_S$  скелета  $S$  расположены ребра  $e$  и  $t$ , а также в зависимости от того, крепится ли к ребру  $e$  нарост или нет. С формальной точки зрения, мы должны различать также в какую из вершин  $m_{k+1}$  или  $m_{k-1}$  приходит отросток сети  $\Gamma$ , соответствующий ребру  $e$ . Однако, так как эти случаи полностью аналогичны, мы предположим, что этот отросток приходит в точку  $m_{k+1}$ , а для случая  $m_{k-1}$  приведем только ответы. Кроме того, нам придется в каждом случае различать на какой боковине концевой змеи  $Z$  расположен первый, считая от концевой ячейки  $\Delta$ , нарост  $\Delta'$ . Наконец, мы будем учитывать, крепится или нет нарост к ребру поворота  $t$ , используя для этого определенную выше функцию  $d(E)$ .

Мы воспользуемся определением характеристических полуплоскостей, данным в предыдущем разделе, и соответствующих им  $t$ -множеств и  $t$ -чисел. Отметим еще раз, что эти определения не зависят от того, есть ли на концевой змее  $Z$  наросты, отличные от концевых. Следующее предложение доказывается точно так же, как предложение 4.5.

**Предложение 4.6** Пусть  $D$  — паркет из  $\mathcal{WP}_3$ , имеющий минимальную реализацию на выпуклом многоугольнике  $M$ . Пусть, для некоторого раз-

ложения паркета  $D$  на скелет и наросты, ячейка  $\Delta$  является концевой. Пусть  $\Delta$ -конец  $E$  имеет излом, и на концевой  $\Delta$ -змеи  $Z$  нет концевых наростов, но другие наросты есть. Обозначим через  $t$  ребро поворота концевого линейного участка  $E$ , а через  $m_k \in M$  — концевую вершину, соответствующую ячейке  $\Delta$ . Пусть концевой линейный участок  $E$  относится к  $i$ -ому классу излома. Если на ребре поворота  $t$  нароста нет, то все точки из соответствующего  $t$ -множества затягиваются граничными ребрами  $\Delta$ -хвоста из боковины поворота, а если на ребре  $t$  нарост есть, то граничные ребра  $\Delta$ -хвоста из боковины поворота затягивают все точки из соответствующего  $t$ -множества кроме, быть может, одной.

Пусть излом концевого линейного участка  $E$  относится к первому классу. Предположим сначала, что нарост  $\Delta'$  расположен на боковине поворота концевого линейного участка  $E$ . Тогда  $\Delta$ -жало имеет тип 1 и его длина, в силу предложения 4.3, не меньше чем  $g_o^+(m_k)$ . Пусть  $x$  — длина боковины поворота  $\Delta$ -хвоста,  $y$  — длина боковины поворота  $\Delta$ -жала, и  $z$  — такое что  $y + z$  равно длине боковины поворота концевой  $\Delta$ -змеи  $Z$ . Тогда, в силу определения  $\Delta$ -жала первого типа и предложения 4.6, имеют место следующие неравенства

$$x \geq \frac{t_o^+(m_k)}{2} - d(E), \quad y \geq \frac{g_o^+(m_k) - 1}{2}.$$

С другой стороны, длина концевой  $\Delta$ -змеи  $Z$  равна, очевидно,  $2(y + z)$ , а длина  $\Delta$ -хвоста — не меньше чем  $x + y + z$ . Чтобы оценить  $z$  снизу, заметим, что  $z$  принимает наименьшее значение, если на боковине поворота концевой  $\Delta$ -змеи  $Z$  расположено наибольшее возможное число наростов. Ясно, что таких наростов не больше, чем  $(x - y)/2$ . Таким образом, если  $x - y$  четно, то  $z \geq (x - y)/2$ , а если  $x - y$  нечетно, то  $z \geq [(x - y)/2] + 1$ . Иными словами,

$$z \geq x - y - \left[ \frac{x - y}{2} \right],$$

откуда

$$z + y \geq x - \left[ \frac{x - y}{2} \right].$$

Пусть  $e(k)$  равно единице, если  $k$  нечетно, и нулю в противном случае. Представим  $x$  и  $y$  в виде  $x = 2a + e(x)$  и  $y = 2b + e(y)$ . Тогда, как легко видеть,

$$x - \left[ \frac{x - y}{2} \right] = a + b + e(x) - \left[ \frac{e(x) - e(y)}{2} \right] = \left[ \frac{x + y + 1}{2} \right].$$

Итак,

$$z + y \geq \left[ \frac{x + y + 1}{2} \right] \geq \left[ \frac{t_o^+(m_k) + g_o^+(m_k) + 1 - 2d(E)}{4} \right],$$

а

$$x + y + z \geq \left[ \frac{3t_o^+(m_k) + g_o^+(m_k) + 1 - 6d(E)}{4} \right].$$

Таким образом, доказано следующее предложение.

**Предложение 4.7** *В сделанных предположениях, длина концевой  $\Delta$ -змеи не меньше чем*

$$2 \left[ \frac{t_o^+(m_k) + g_o^+(m_k) + 1 - 2d(E)}{4} \right],$$

*а длина  $\Delta$ -хвоста не меньше чем*

$$\left[ \frac{3t_o^+(m_k) + g_o^+(m_k) + 1 - 6d(E)}{4} \right].$$

Предположим теперь, что нарост  $\Delta'$  расположен на подчиненной боковине  $B$  концевой змеи  $Z$ . Тогда  $\Delta$ -жало имеет тип 2 и его длина, в силу предложения 4.3, не меньше чем  $g_e^-(m_k)$ . Пусть  $x$  — длина боковины поворота  $\Delta$ -хвоста,  $y$  — длина боковины поворота  $\Delta$ -жала, и  $z$  — такое что  $y+z$  равно длине боковины поворота концевой  $\Delta$ -змеи  $Z$ . Тогда, в силу определения  $\Delta$ -жала второго типа и предложения 4.6, имеют место следующие неравенства

$$x \geq \frac{t_o^+(m_k)}{2} - d(E), \quad y \geq \frac{g_e^-(m_k)}{2}.$$

С другой стороны, длина концевой  $\Delta$ -змеи  $Z$  равна, очевидно,  $2(y+z)$ , а длина  $\Delta$ -хвоста — не меньше чем  $x+y+z+1$ , где единица соответствует наросту  $\Delta'$ . Чтобы оценить  $z$  снизу, заметим, что  $z$  принимает наименьшее значение, если на боковине поворота концевой  $\Delta$ -змеи  $Z$  расположено наибольшее возможное число наростов. Ясно, что таких наростов не больше, чем  $(x-y)/2$ . Таким образом,

$$z \geq x - y - \left[ \frac{x - y}{2} \right],$$

откуда

$$z + y \geq x - \left[ \frac{x - y}{2} \right] = \left[ \frac{x + y + 1}{2} \right].$$

Итак,

$$z + y \geq \left[ \frac{x + y + 1}{2} \right] \geq \left[ \frac{t_o^+(m_k) + g_e^-(m_k) + 2 - 2d(E)}{4} \right],$$

а

$$x + y + z + 1 \geq \left[ \frac{3t_o^+(m_k) + g_e^-(m_k) + 6 - 6d(E)}{4} \right].$$

Таким образом, доказано следующее предложение.



**Предложение 4.8** *В сделанных предположениях, длина концевой  $\Delta$ -змеи не меньше чем*

$$2 \left[ \frac{t_o^+(m_k) + g_e^-(m_k) + 2 - 2d(E)}{4} \right],$$

*а длина  $\Delta$ -хвоста не меньше чем*

$$\left[ \frac{3t_o^+(m_k) + g_e^-(m_k) + 6 - 6d(E)}{4} \right].$$

Случай первый полностью разобран.

Легко видеть, что если концевой линейный участок  $E$  имеет излом класса 3, то мы находимся в ситуации, симметричной разобранным первому случаю. Это позволяет сразу выписать ответ.

**Предложение 4.9** *Пусть концевой линейный участок  $E$  имеет излом класса 3. Если нарост  $\Delta'$  расположен на боковине поворота, то длина концевой  $\Delta$ -змеи не меньше чем*

$$2 \left[ \frac{t_o^-(m_k) + g_e^-(m_k) + 1 - 2d(E)}{4} \right],$$

*а длина  $\Delta$ -хвоста не меньше чем*

$$\left[ \frac{3t_o^-(m_k) + g_e^-(m_k) + 1 - 6d(E)}{4} \right].$$

*Если же нарост  $\Delta'$  расположен на подчиненной боковине, то длина концевой  $\Delta$ -змеи не меньше чем*

$$2 \left[ \frac{t_o^-(m_k) + g_e^+(m_k) + 2 - 2d(E)}{4} \right],$$

*а длина  $\Delta$ -хвоста не меньше чем*

$$\left[ \frac{3t_o^-(m_k) + g_e^+(m_k) + 6 - 6d(E)}{4} \right].$$

Рассмотрим теперь случай, когда концевой линейный участок  $E$  имеет излом второго типа. Пусть, как и выше,  $x$  — длина боковины поворота  $\Delta$ -хвоста,  $y$  — длина боковины поворота  $\Delta$ -жала, и  $z$  — такое что  $y + z$  равно длине боковины поворота концевой  $\Delta$ -змеи  $Z$ .

Пусть нарост  $\Delta'$  расположен на боковине поворота концевого линейного участка  $E$ . Тогда  $\Delta$ -жало имеет тип 2 и его длина, в силу предложения 4.3, не меньше чем  $g_e^-(m_k)$ . В силу определения  $\Delta$ -жала второго типа и предложения 4.6, имеют место следующие неравенства

$$x \geq \frac{t_e^-(m_k) + 1}{2} - d(E), \quad y \geq \frac{g_e^-(m_k)}{2}.$$

С другой стороны, длина концевой  $\Delta$ -змеи  $Z$  равна, очевидно,  $2(y+z)-1$ , а длина  $\Delta$ -хвоста — не меньше чем  $x+y+z-1$ . Так же как и выше, получаем следующую оценку на  $z$ :

$$z \geq x - y - \left\lfloor \frac{x-y}{2} \right\rfloor,$$

откуда

$$z + y \geq x - \left\lfloor \frac{x-y}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x+y+1}{2} \right\rfloor.$$

Таким образом,

$$2(z+y) - 1 \geq 2 \left\lfloor \frac{x+y+1}{2} \right\rfloor - 1 \geq 2 \left\lfloor \frac{t_e^-(m_k) + g_e^-(m_k) + 3 - 2d(E)}{4} \right\rfloor - 1,$$

а

$$x + y + z - 1 \geq \left\lfloor \frac{3t_e^-(m_k) + g_e^-(m_k) + 1 - 6d(E)}{4} \right\rfloor.$$

Предположим теперь, что нарост  $\Delta'$  расположен на подчиненной боковине концевой змеи  $Z$ . Тогда  $\Delta$ -жало имеет тип 1 и его длина, в силу предложения 4.3, не меньше чем  $g_o^+(m_k)$ . Тогда, в силу определения  $\Delta$ -жала первого типа и предложения 4.6, имеют место следующие неравенства

$$x \geq \frac{t_e^-(m_k) + 1}{2} - d(E), \quad y \geq \frac{g_o^+(m_k) + 1}{2}.$$

С другой стороны, длина концевой  $\Delta$ -змеи  $Z$  равна, очевидно,  $2(y+z)-1$ , а длина  $\Delta$ -хвоста — не меньше чем  $x+y+z$ . Также как и выше, получаем

$$z + y \geq \left\lfloor \frac{x+y+1}{2} \right\rfloor.$$

Итак,

$$2(z+y) - 1 \geq 2 \left\lfloor \frac{t_e^-(m_k) + g_o^+(m_k) + 4 - 2d(E)}{4} \right\rfloor - 1,$$

а

$$x + y + z \geq \left\lfloor \frac{3t_e^-(m_k) + g_o^+(m_k) + 6 - 6d(E)}{4} \right\rfloor.$$

Таким образом, доказано следующее предложение.

**Предложение 4.10** Пусть концевой линейный участок  $E$  имеет излом класса 2. Если нарост  $\Delta'$  расположен на боковине поворота, то длина концевой  $\Delta$ -змеи не меньше чем

$$2 \left\lfloor \frac{t_e^-(m_k) + g_e^-(m_k) + 3 - 2d(E)}{4} \right\rfloor - 1,$$

а длина  $\Delta$ -хвоста не меньше чем

$$\left\lfloor \frac{3t_e^-(m_k) + g_e^-(m_k) + 1 - 6d(E)}{4} \right\rfloor.$$

Если же нарост  $\Delta'$  расположен на подчиненной боковине, то длина концевой  $\Delta$ -змеи не меньше чем

$$2 \left[ \frac{t_e^-(m_k) + g_o^+(m_k) + 4 - 2d(E)}{4} \right] - 1,$$

а длина  $\Delta$ -хвоста не меньше чем

$$\left[ \frac{3t_e^-(m_k) + g_o^+(m_k) + 6 - 6d(E)}{4} \right].$$

Случай второй также полностью разобран.

Наконец, легко видеть, что если концевой линейный участок  $E$  имеет излом класса 4, то мы находимся в ситуации, симметричной разобранному второму случаю. Это позволяет сразу выписать ответ.

**Предложение 4.11** Пусть концевой линейный участок  $E$  имеет излом класса 4. Если нарост  $\Delta'$  расположен на боковине поворота, то длина концевой  $\Delta$ -змеи не меньше чем

$$2 \left[ \frac{t_e^+(m_k) + g_e^+(m_k) + 3 - 2d(E)}{4} \right] - 1,$$

а длина  $\Delta$ -хвоста не меньше чем

$$\left[ \frac{3t_e^+(m_k) + g_e^+(m_k) + 1 - 6d(E)}{4} \right].$$

Если же нарост  $\Delta'$  расположен на подчиненной боковине, то длина концевой  $\Delta$ -змеи не меньше чем

$$2 \left[ \frac{t_e^+(m_k) + g_o^-(m_k) + 4 - 2d(E)}{4} \right] - 1,$$

а длина  $\Delta$ -хвоста не меньше чем

$$\left[ \frac{3t_e^+(m_k) + g_o^-(m_k) + 6 - 6d(E)}{4} \right].$$

Итак, мы разобрали все возможные комбинации классов поворота и расположения наростов на концевой змее. Полученные выше результаты удобно представить в виде следующих двух таблиц.

**Предложение 4.12** Пусть  $D$  — паркет из  $\mathcal{WP}_5$ , имеющий минимальную реализацию на выпуклом многоугольнике  $M$ . Пусть, для некоторого разложения паркета  $D$  на скелет и наросты, ячейка  $\Delta$  является концевой. Пусть  $\Delta$ -конец  $E$  имеет излом, и на концевой  $\Delta$ -змее  $Z$  нет концевых наростов, а другие наросты имеются. Пусть  $\Delta'$  — ближайший к  $\Delta$  нарост на концевой  $\Delta$ -змее. Обозначим через  $m_k \in M$  — концевую вершину, соответствующую ячейке  $\Delta$ . Тогда длины концевой  $\Delta$ -змеи и  $\Delta$ -хвоста, а также длины боковин  $\Delta$ -хвоста, оцениваются снизу величинами, приведенными в следующих таблицах.

Оценки на длину концевой змеи.		
Тип излома	$\Delta'$ на боковине поворота	$\Delta'$ не на боковине поворота
1	$2 \left\lfloor \frac{t_o^+(m_k) + g_o^+(m_k) + 1 - 2d(E)}{4} \right\rfloor$	$2 \left\lfloor \frac{t_o^+(m_k) + g_e^-(m_k) + 2 - 2d(E)}{4} \right\rfloor$
2	$2 \left\lfloor \frac{t_e^-(m_k) + g_e^-(m_k) + 3 - 2d(E)}{4} \right\rfloor - 1$	$2 \left\lfloor \frac{t_e^-(m_k) + g_o^+(m_k) + 4 - 2d(E)}{4} \right\rfloor - 1$
3	$2 \left\lfloor \frac{t_o^-(m_k) + g_o^-(m_k) + 1 - 2d(E)}{4} \right\rfloor$	$2 \left\lfloor \frac{t_o^-(m_k) + g_e^+(m_k) + 2 - 2d(E)}{4} \right\rfloor$
4	$2 \left\lfloor \frac{t_e^+(m_k) + g_e^+(m_k) + 3 - 2d(E)}{4} \right\rfloor - 1$	$2 \left\lfloor \frac{t_e^+(m_k) + g_o^-(m_k) + 4 - 2d(E)}{4} \right\rfloor - 1$

Оценки на длину хвоста.		
Тип излома	$\Delta'$ на боковине поворота	$\Delta'$ не на боковине поворота
1	$\left\lfloor \frac{3t_o^+(m_k) + g_o^+(m_k) + 1 - 6d(E)}{4} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{3t_o^+(m_k) + g_e^-(m_k) + 6 - 6d(E)}{4} \right\rfloor$
2	$\left\lfloor \frac{3t_e^-(m_k) + g_e^-(m_k) + 1 - 6d(E)}{4} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{3t_e^-(m_k) + g_o^+(m_k) + 6 - 6d(E)}{4} \right\rfloor$
3	$\left\lfloor \frac{3t_o^-(m_k) + g_o^-(m_k) + 1 - 6d(E)}{4} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{3t_o^-(m_k) + g_e^+(m_k) + 6 - 6d(E)}{4} \right\rfloor$
4	$\left\lfloor \frac{3t_e^+(m_k) + g_e^+(m_k) + 1 - 6d(E)}{4} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{3t_e^+(m_k) + g_o^-(m_k) + 6 - 6d(E)}{4} \right\rfloor$

Оценки на длину боковины поворота $\Delta$ -хвоста.	
Тип излома	Оценка
1	$t_o^+(m_k)/2 - d(E)$
2	$(t_e^-(m_k) + 1)/2 - d(E)$
3	$t_o^-(m_k)/2 - d(E)$
4	$(t_e^+(m_k) + 1)/2 - d(E)$

Оценки на длину подчиненной боковины $\Delta$ -хвоста поворота; здесь в обозначениях опущены указания на точку $m_k$ .	
Тип излома	Оценка
1	$\min \left\{ \left\lfloor \frac{t_o^+ + g_o^+ + 1 - 2d(E)}{4} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{t_o^+ + g_e^- + 2 - 2d(E)}{4} \right\rfloor + 1 \right\}$
2	$\min \left\{ \left\lfloor \frac{t_e^- + g_e^- + 3 - 2d(E)}{4} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{t_e^- + g_o^+ + 4 - 2d(E)}{4} \right\rfloor \right\}$
3	$\min \left\{ \left\lfloor \frac{t_o^- + g_o^- + 1 - 2d(E)}{4} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{t_o^- + g_e^+ + 2 - 2d(E)}{4} \right\rfloor + 1 \right\}$
4	$\min \left\{ \left\lfloor \frac{t_e^+ + g_e^+ + 3 - 2d(E)}{4} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{t_e^+ + g_o^- + 4 - 2d(E)}{4} \right\rfloor \right\}$

**Следствие 4.14** Пусть, в предположениях предложения 4.12, множество  $M$  — это правильный  $n$ -угольник, и  $n \geq 12$ . Тогда таблицы оценки длины концевой змеи, хвоста и боковин хвоста выглядят так.

Оценки на длину концевой змеи для правильного $n$ -угольника.						
Тип излома	$\Delta'$ на боковине поворота			$\Delta'$ не на боковине поворота		
1,3	$2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 2$	$\lfloor \frac{n+3+6d(E)}{12} \rfloor - 2$		$2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 2$	$\lfloor \frac{n+6d(E)}{12} \rfloor - 2$	
2,4	$2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 2$	$\lfloor \frac{n-6+6d(E)}{12} \rfloor - 3$		$2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 2$	$\lfloor \frac{n-9+6d(E)}{12} \rfloor - 3$	

Оценки на длину хвоста для правильного $n$ -угольника.						
Тип излома	$\Delta'$ на боковине поворота			$\Delta'$ не на боковине поворота		
1,3	$2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$	$\lfloor \frac{n+15+18d(E)}{12} \rfloor - 1$		$2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$	$\lfloor \frac{n+18d(E)}{12} \rfloor - 1$	
2,4	$2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$	$\lfloor \frac{n+6+18d(E)}{12} \rfloor - 1$		$2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$	$\lfloor \frac{n-9+18d(E)}{12} \rfloor - 1$	

Оценки на длину боковины поворота $\Delta$ -хвоста в случае правильного $n$ -угольника.	
Тип излома	Оценка
1,3	$\lfloor n/3 \rfloor - 1 - d(E)$
2,4	$\lfloor n/3 \rfloor - d(E)$

Оценки на длину подчиненной боковины $\Delta$ -хвоста в случае правильного $n$ -угольника.	
Оценка	
1,3	$\min \left\{ \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - \lfloor \frac{n+15+6d(E)}{12} \rfloor, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - \lfloor \frac{n+6d(E)}{12} \rfloor \right\} = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - \lfloor \frac{n+15+6d(E)}{12} \rfloor$
2,4	$\min \left\{ \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - \lfloor \frac{n+18+6d(E)}{12} \rfloor, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - \lfloor \frac{n+3+6d(E)}{12} \rfloor \right\} = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - \lfloor \frac{n+18+6d(E)}{12} \rfloor$

**Следствие 4.15** В предположениях следствия 4.14, в не зависимости от класса поворота и расположения первого нароста  $\Delta'$ , длина  $\Delta$ -хвоста не меньше чем

$$2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - \lfloor \frac{n+15+18d(E)}{12} \rfloor - 1 \geq 2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - \lfloor \frac{n+9}{12} \rfloor - 3.$$

Из следствий 4.12 и 4.14 получается следующий полезный результат.

**Следствие 4.16** Пусть  $D$  — паркет из  $\mathcal{WP}_5^*$ , имеющий минимальную реализацию на правильном  $n$ -угольнике,  $n \geq 12$ . Пусть, для некоторого разложения паркета  $D$  на скелет и наросты, ячейка  $\Delta$  является концевой. Пусть  $\Delta$ -конец  $E$  имеет излом. Тогда боковина поворота  $\Delta$ -хвоста не меньше чем  $\lfloor n/3 \rfloor - 1 - d(E)$ , а подчиненная боковина  $\Delta$ -хвоста не меньше чем

$$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1 - \lfloor \frac{n+6+6d(E)}{12} \rfloor.$$

**Следствие 4.17** Пусть, в предположениях предложения 4.12, множество  $M$  — это квазиправильный  $n$ -угольник, и  $n \geq 18$ . Тогда таблицы оценки длины концевой змеи, хвоста и боковин хвоста выглядят так.

Оценки на длину концевой змеи для квазиправильного $n$ -угольника.										
Тип излома	$\Delta'$ на боковине поворота				$\Delta'$ не на боковине поворота					
1,3	2	$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$	- 2	$\lfloor \frac{n+15+6d(E)}{12} \rfloor$	- 2	2	$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$	- 2	$\lfloor \frac{n+15+6d(E)}{12} \rfloor$	- 2
2,4	2	$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$	- 2	$\lfloor \frac{n+15+6d(E)}{12} \rfloor$	- 3	2	$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$	- 2	$\lfloor \frac{n+9+6d(E)}{12} \rfloor$	- 3

Оценки на длину хвоста для квазиправильного $n$ -угольника.										
Тип излома	$\Delta'$ на боковине поворота				$\Delta'$ не на боковине поворота					
1,3	2	$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$	-	$\lfloor \frac{n+3+18d(E)}{12} \rfloor$	- 4	2	$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$	-	$\lfloor \frac{n-9+18d(E)}{12} \rfloor$	- 4
2,4	2	$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$	-	$\lfloor \frac{n+15+18d(E)}{12} \rfloor$	- 4	2	$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$	-	$\lfloor \frac{n-3+18d(E)}{12} \rfloor$	- 4

Оценки на длину боковины поворота $\Delta$ -хвоста в случае квазиправильного $n$ -угольника.	
Тип излома	Оценка
1,2,3,4	$\lfloor n/3 \rfloor - 2 - d(E)$

Оценки на длину подчиненной боковины $\Delta$ -хвоста в случае квазиправильного $n$ -угольника.	
	Оценка
1,3	$\min \left\{ \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+3+6d(E)}{12} \right\rfloor - 2, \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+6d(E)}{12} \right\rfloor - 1 \right\} =$ $= \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+3+6d(E)}{12} \right\rfloor - 2$
2,4	$\min \left\{ \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+6d(E)}{12} \right\rfloor - 3, \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-3+6d(E)}{12} \right\rfloor - 2 \right\} =$ $= \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+6d(E)}{12} \right\rfloor - 3$

**Следствие 4.18** В предположениях следствия 4.17, в не зависимости от класса поворота и расположения первого нароста  $\Delta'$ , длина концевой  $\Delta$ -змеи не меньше чем

$$2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n+15+6d(E)}{12} \right\rfloor - 3 \geq 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n+9}{12} \right\rfloor - 5,$$

а длина  $\Delta$ -хвоста не меньше чем

$$2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+15+18d(E)}{12} \right\rfloor - 4 \geq 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+9}{12} \right\rfloor - 6.$$

**Следствие 4.19** Пусть  $D$  — паркет из  $WP_5$ , имеющий минимальную реализацию на квазиправильном  $n$ -угольнике,  $n \geq 18$ . Пусть, для некоторого разложения паркета  $D$  на скелет и наросты, ячейка  $\Delta$  является концевой. Пусть  $\Delta$ -конец  $E$  имеет излом. Тогда боковина поворота  $\Delta$ -хвоста

не меньше чем  $\lfloor n/3 \rfloor - 2 - d(E)$ , а подчиненная боковина  $\Delta$ -хвоста не меньше чем

$$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n + 6d(E)}{12} \right\rfloor - 3.$$

### 3.4 Взаимное расположение концевых линейных участков

Пусть  $D$  — произвольный паркет из  $\mathcal{WP}_3$ , и  $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$  — некоторое его разложение на скелет и наросты;  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  — концевые ячейки скелета  $S$ , и  $E_i$ ,  $i = 1, 2$ , —  $\Delta_i$ -конец паркета  $D$ . Предположим, что на концевых линейных участках  $E_1$  и  $E_2$  нет концевых наростов. Обозначим через  $Z_i$  концевые змеи концевых линейных участков  $E_i$ , и назовем положительный угол от направления коневой змеи  $Z_1$  к направлению концевой змеи  $Z_2$  (напомним, что концевые змеи ориентируются к своим концевым ячейкам) *углом от концевого линейного участка  $E_1$  к концевому линейному участку  $E_2$* . Отметим, что угол  $\varphi$  принимает лишь значения вида  $q\pi/3$ ,  $q = 1, \dots, 5$ .

Далее, пусть, как и выше,  $M$  — произвольный выпуклый  $n$ -угольник, и  $\{m_i\}_{i=0}^{n-1}$  — последовательные его вершины при обходе  $M$  против часовой стрелки, занумерованные элементами из  $\mathbb{Z}_n$ . Пусть паркет  $D$  имеет минимальную реализацию  $\Gamma$  на  $M$ , такую что точки  $m_k$  и  $m_r$  из  $M$  являются концевыми вершинами, соответствующими концевым ячейкам  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ .

Пусть  $\Delta$  — концевая ячейка скелета  $S$ , и предположим что на  $\Delta$ -конце  $E$  нет концевых наростов. Пусть  $e_1$  — концевое ребро ячейки  $\Delta$ , а  $e_2$  — отличное от  $e_1$  граничное ребро из  $\Delta$ . Ориентируем оба отрезка  $e_1$  и  $e_2$  от их общей вершины. Пара  $(e_2, e_1)$  образует некоторый репер на плоскости. Определим *индекс концевого линейного участка  $E$*  равным 1, если репер  $(e_2, e_1)$  положителен, и равным 2 в противном случае. Индекс концевого линейного участка  $E$  обозначим через  $\text{ind } E$ .

Пусть  $m_p$  — произвольная вершина из  $M$ . Рассмотрим вертикальный угол, порожденный прямыми  $m_p m_{p+1}$  и  $m_{p-1} m_{p+1}$  и содержащий угол  $m_p m_{p+1} m_{p-1}$ , и перенесем его трансляцией на вектор  $m_{p+1} m_p$  в вершину  $m_p$ . Полученный в результате вертикальный угол назовем *углом направлений первого типа в точке  $m_p$*  и обозначим через  $A^1(m_p)$ . Далее, рассмотрим вертикальный угол, порожденный прямыми  $m_p m_{p-1}$  и  $m_{p-1} m_{p+1}$  и содержащий угол  $m_p m_{p-1} m_{p+1}$ , и перенесем его трансляцией на вектор  $m_{p-1} m_p$  в вершину  $m_p$ . Полученный в результате вертикальный угол назовем *углом направлений второго типа в точке  $m_p$*  и обозначим через  $A^2(m_p)$ .

Будем говорить, что прямая *лежит внутри вертикального угла  $A$* , если она целиком лежит в  $A$  и пересекается с границей угла  $A$  в точности по вершине этого угла.

Пусть  $A^i(m_p)$  — угол направлений  $i$ -го типа точки  $m_p$ . Заметим, что произвольная прямая  $\ell$ , лежащая внутри угла  $A^i(m_p)$ , является опорной пря-

мой для многоугольника  $M$ , поэтому корректно определен вектор нормали  $N(\ell)$  к прямой  $\ell$ , направленный в ту открытую полуплоскость, ограниченную  $\ell$ , которая не содержит вершин из  $M$ . Ориентируем все прямые  $\ell$ , лежащие в  $A^i(m_p)$ , задав на каждой из них направление  $l$  так, чтобы пара  $(N(\ell), l)$  образовывала положительный репер. В дальнейшем всегда будем предполагать, что все прямые из каждого  $A^i(m_p)$  ориентированы таким образом.

Имеют место следующие очевидные утверждения.

**Предложение 4.13** Пусть паркет  $D$  имеет минимальную реализацию  $\Gamma$  на  $M$ , такую что точка  $m_p$  из  $M$  является концевой вершиной, соответствующей концевой ячейке  $\Delta$  концевого линейного участка  $E$ , на котором нет концевых наростов. Тогда, если концевой линейный участок  $E$  имеет индекс  $i$ , то прямая, проходящая через отросток сети  $\Gamma$ , соответствующий ячейке  $\Delta$ , параллельна некоторой прямой, лежащей внутри угла направлений  $A^i(m_p)$ .

**Предложение 4.14** Пусть паркет  $D$  имеет минимальную реализацию  $\Gamma$  на  $M$ , такую что точки  $m_k$  и  $m_r$  из  $M$  являются концевыми вершинами, соответствующими концевым ячейкам  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  концевых линейных участков  $E_1$  и  $E_2$ . Пусть  $l_i$  — прямая, проходящая через отросток сети  $\Gamma$ , соответствующий ячейке  $\Delta_i$ . Обозначим через  $N_i$  направления концевых  $\Delta_i$ -змей из  $\Gamma$ . Ориентируем прямую  $l_i$ , выбрав на ней направление  $l_i$  так, чтобы пара  $(N_i, l_i)$  образовывала положительный репер. Пусть  $\varphi$  — угол от концевого линейного участка  $E_1$  к концевому линейному участку  $E_2$ . Тогда ориентированная прямая  $l_1$  может быть переведена в ориентированную прямую  $l_2$  композицией поворота в положительном направлении на угол  $\varphi$  и некоторого сдвига с сохранением ориентации.

**Следствие 4.20** В предположениях предложения 4.14, пусть  $i_1$  и  $i_2$  — индексы концевых линейных участков  $E_1$  и  $E_2$  соответственно. Пусть  $\xi$  — движение плоскости, переводящее точку  $m_k$  в точку  $m_r$  и являющееся композицией поворота на угол  $\varphi$  в положительном направлении и некоторого сдвига. Тогда вертикальные углы  $\xi(A^{i_1}(m_k))$  и  $A^{i_2}(m_r)$  с общей вершиной  $\xi(m_k) = m_r$  пересекаются по внутренности. Более того, существуют такие прямые  $l_1$  из  $A^{i_1}(m_k)$  и  $l_2$  из  $A^{i_2}(m_r)$ , что отображение  $\xi$  переводит ориентированную прямую  $l_1$  в ориентированную прямую  $l_2$  с сохранением ориентации.

Обозначим через  $\alpha_k^\pm$  величину угла  $m_k m_{k\pm 1} m_{k\mp 1}$ . Для каждого целого  $p$ ,  $1 \leq p \leq n$ , определим  $\beta_p$  равным величине положительного угла от вектора  $m_{k-1} m_{k+1}$  к вектору  $m_{k+p} m_{k+p+1}$ .

Определим теперь четверку множеств, отвечающих за возможное расположение концевого линейного участка  $E_2$  по отношению к концевому линейному участку  $E_1$ .



1. К множеству  $\Omega_{1,1}(m_k, \varphi)$  отнесем все такие точки  $m_{k+p}$ , что

$$\varphi < \beta_p < \varphi + \alpha_k^+ + \alpha_{k+p}^+.$$

2. К множеству  $\Omega_{1,2}(m_k, \varphi)$  отнесем все такие точки  $m_{k+p}$ , что

$$\varphi - \alpha_{k+p}^- < \beta_{p-1} < \varphi + \alpha_k^+.$$

3. К множеству  $\Omega_{2,1}(m_k, \varphi)$  отнесем все такие точки  $m_{k+p}$ , что

$$\varphi - \alpha_k^- < \beta_p < \varphi + \alpha_{k+p}^+.$$

4. К множеству  $\Omega_{2,2}(m_k, \varphi)$  отнесем все такие точки  $m_{k+p}$ , что

$$\varphi - \alpha_k^- - \alpha_{k+p}^- < \beta_{p-1} < \varphi.$$

Определенные только-что множества назовем  $\Omega$ -множествами. Отметим, что  $\Omega$ -множества определяются только геометрией множества  $M$  и величиной угла  $\varphi$ .

**Предложение 4.15** *В сделанных выше предположениях, если  $\varphi$  — это угол от концевого линейного участка  $E_1$  к концевому линейному участку  $E_2$ , на концевых линейных участках нет концевых наростов, и паркет  $D$  имеет минимальную реализацию на  $M$ , такую что точки  $m_k$  и  $m_r$  из  $M$  являются концевыми вершинами, соответствующими концевым ячейкам  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , а  $i = \text{ind } E_1$  и  $j = \text{ind } E_2$ , то  $m_r$  принадлежит множеству  $\Omega_{i,j}(m_k, \varphi)$ .*

**Доказательство.** Это предложение доказывается абсолютно аналогично предложению 4.3.

Далее, пусть  $\varphi = q\pi/3$  и  $m_k$  — произвольная вершина из  $M$ . В каждом  $\Omega$ -множестве  $\Omega_{i,j}(m_k, \varphi)$  выберем самую близкую от  $m_k$  точку  $A$  и самую далекую от  $m_k$  точку  $B$  при движении от  $m_k$  в положительном направлении. Количество пройденных при таком движении точек из  $M$  в первом и во втором случае обозначим через  $a_{i,j}(m_k, \varphi)$  и  $b_{i,j}(m_k, \varphi)$  соответственно. Положим:

$$a_{i,j}(\varphi) = \min_{m_k} a_{i,j}(m_k, \varphi), \quad b_{i,j}(\varphi) = \max_{m_k} b_{i,j}(m_k, \varphi),$$

и назовем  $a_{i,j}(\varphi)$  и  $b_{i,j}(\varphi)$  нижним и верхним боковыми числами типа  $(i, j)$  множества  $M$ , соответствующими углу  $\varphi$ . Из предложения 4.15 немедленно вытекает следующий результат.

**Следствие 4.21** В сделанных выше предположениях, если  $\varphi$  — это угол от концевого линейного участка  $E_1$  к концевому линейному участку  $E_2$ , на концевых линейных участках нет концевых наростов, паркет  $D$  имеет минимальную реализацию на  $M$ , такую что точка  $m_k$  из  $M$  является концевой вершиной, соответствующей концевой ячейке  $\Delta_1$  концевого линейного участка  $E_1$ , а  $i = \text{ind } E_1$  и  $j = \text{ind } E_2$ , то длина  $l$  супербоковины паркета  $D$  от концевого линейного участка  $E_1$  к концевому линейному участку  $E_2$  лежит в пределах

$$a_{i,j}(m_k, \varphi) \leq l \leq b_{i,j}(m_k, \varphi).$$

**Следствие 4.22** В сделанных выше предположениях, если  $\varphi$  — это угол от концевого линейного участка  $E_1$  к концевому линейному участку  $E_2$ , на концевых линейных участках нет концевых наростов, паркет  $D$  имеет минимальную реализацию на  $M$ , и  $i = \text{ind } E_1$  и  $j = \text{ind } E_2$ , то длина  $l$  супербоковины паркета  $D$  от концевого линейного участка  $E_1$  к концевому линейному участку  $E_2$  лежит в пределах

$$a_{i,j}(\varphi) \leq l \leq b_{i,j}(\varphi).$$

Применим предложение 4.15 и следствия 4.21 и 4.22 к случаю правильного  $n$ -угольника.

**Следствие 4.23** Пусть, в предположениях предложения 4.15,  $M$  — это правильный  $n$ -угольник,  $n \geq 12$ . Пусть  $\varphi = q\pi/3$ , и  $l_{i,j}(\varphi)$  — длина супербоковины паркета  $D$  от концевого линейного участка  $E_1$  к концевому линейному участку  $E_2$ . Пусть  $R$  — остаток от деления числа  $nq$  на 6. Тогда

- множество  $\Omega_{1,1}(m_k, \varphi)$  состоит не более чем из одной точки  $m_{k+p}$ , и имеет место следующее неравенство:

$$\left| \frac{nq}{6} - p \right| < \frac{1}{2};$$

длина супербоковины  $l_{1,1}(\varphi)$  определена однозначно и вычисляется так:

$$l_{1,1}(\varphi) = \begin{cases} \left[ \frac{nq}{6} \right] - 1 & \text{при } R = 0, 1, 2, \\ \text{не реализуется} & \text{при } R = 3, \\ \left[ \frac{nq}{6} \right] & \text{при } R = 4, 5; \end{cases}$$

- множество  $\Omega_{1,2}(m_k, \varphi)$  состоит не более чем из одной точки  $m_{k+p}$ , и имеет место следующее неравенство:

$$\left| \frac{nq}{6} - p + \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2};$$

длина супербоковины  $l_{1,2}(\varphi)$  определена однозначно и вычисляется так:

$$l_{1,2}(\varphi) = \begin{cases} \text{не реализуется} & \text{при } R = 0, \\ \left[ \frac{nq}{6} \right] & \text{при } R = 1, \dots, 5; \end{cases}$$

- множество  $\Omega_{2,1}(m_k, \varphi)$  состоит не более чем из одной точки  $m_{k+p}$ , и имеет место следующее неравенство:

$$\left| \frac{nq}{6} - p - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2};$$

длина супербоковины  $l_{2,1}(\varphi)$  определена однозначно и вычисляется так:

$$l_{2,1}(\varphi) = \begin{cases} \text{не реализуется} & \text{при } R = 0, \\ \left[ \frac{nq}{6} \right] - 1 & \text{при } R = 1, \dots, 5; \end{cases}$$

- множество  $\Omega_{2,2}(m_k, \varphi)$  состоит не более чем из одной точки  $m_{k+p}$ , и имеет место следующее неравенство:

$$\left| \frac{nq}{6} - p \right| < \frac{1}{2}.$$

длина супербоковины  $l_{2,2}(\varphi)$  определена однозначно и вычисляется так:

$$l_{2,2}(\varphi) = \begin{cases} \left[ \frac{nq}{6} \right] - 1 & \text{при } R = 0, 1, 2, \\ \text{не реализуется} & \text{при } R = 3, \\ \left[ \frac{nq}{6} \right] & \text{при } R = 4, 5; \end{cases}$$

В частности,  $r = k + p$  удовлетворяет соответствующему неравенству в зависимости от индексов концевых линейных участков  $E_1$  и  $E_2$ .

Более того, в не зависимости от индексов концевых линейных участков  $E_1$  и  $E_2$ , длина супербоковины от  $E_1$  к  $E_2$  не меньше чем  $\left[ \frac{nq}{6} \right] - 1$  и не больше чем  $\left[ \frac{nq}{6} \right]$ .

**Доказательство.** Ясно, что в случае правильного  $n$ -угольника все углы  $\alpha_p^\pm$  равны  $\alpha = \pi/n$ , а угол  $\beta_p$  равен  $(2p + 1)\alpha$ . Поэтому определяющие неравенства для  $\Omega$ -множеств произвольной точки  $m_k \in M$  имеют следующий вид.

- Для множества  $\Omega_{1,1}(m_k, q\pi/3)$ :

$$\frac{\pi}{3}q < (2p + 1)\frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{3}q + 2\frac{\pi}{n},$$

откуда

$$\left| \frac{nq}{6} - p \right| < \frac{1}{2}.$$

- Для множества  $\Omega_{1,2}(m_k, q\pi/3)$ :

$$\frac{\pi}{3}q - \frac{\pi}{n} < (2p-1)\frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{3}q + \frac{\pi}{n},$$

откуда

$$\left| \frac{nq}{6} - p + \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}.$$

- Для множества  $\Omega_{2,1}(m_k, q\pi/3)$ :

$$\frac{\pi}{3}q - \frac{\pi}{n} < (2p+1)\frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{3}q + \frac{\pi}{n},$$

откуда

$$\left| \frac{nq}{6} - p - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}.$$

- Для множества  $\Omega_{2,2}(m_k, q\pi/3)$ :

$$\frac{\pi}{3}q - \frac{2\pi}{n} < (2p-1)\frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{3}q,$$

откуда

$$\left| \frac{nq}{6} - p \right| < \frac{1}{2}.$$

Доказательство закончено.

Применим теперь предложение 4.15 к случаю квазиправильного  $n$ -угольника.

**Следствие 4.24** Пусть, в предположениях предложения 4.15,  $M$  — это квазиправильный  $n$ -угольник,  $n \geq 18$ . Пусть  $\varphi = q\pi/3$ , и  $l_{i,j}(\varphi)$  — длина супербоковины паркета  $D$  от концевого линейного участка  $E_1$  к концевому линейному участку  $E_2$ . Пусть  $R$  — остаток от деления числа  $nq$  на 6.

- Если  $\text{ind } E_1 = \text{ind } E_2 = 1$ , т.е. точка  $m_r = m_{k+p}$  принадлежит множеству  $\Omega_{1,1}(m_k, \varphi)$ , то

$$\left| \frac{nq}{6} - p \right| < \frac{3}{2},$$

а длина супербоковины  $l_{1,1}(\varphi)$  принимает одно из следующих значений:

$$l_{1,1}(\varphi) = \begin{cases} \left[ \frac{nq}{6} \right] - 2, \left[ \frac{nq}{6} \right] - 1, \left[ \frac{nq}{6} \right], & \text{при } R = 0, 1, 2, \\ \left[ \frac{nq}{6} \right] - 1, \left[ \frac{nq}{6} \right], & \text{при } R = 3, \\ \left[ \frac{nq}{6} \right] - 1, \left[ \frac{nq}{6} \right], \left[ \frac{nq}{6} \right] + 1, & \text{при } R = 4, 5. \end{cases}$$

- Если  $\text{ind } E_1 = 1$ , а  $\text{ind } E_2 = 2$ , т.е. точка  $m_r = m_{k+p}$  принадлежит множеству  $\Omega_{1,2}(m_k, \varphi)$ , то

$$\left| \frac{nq}{6} - p + \frac{1}{2} \right| < \frac{3}{2},$$

а длина супербоковины  $l_{1,2}(\varphi)$  принимает одно из следующих значений:

$$l_{1,2}(\varphi) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor, & \text{при } R = 0, \\ \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor, \left\lceil \frac{nq}{6} \right\rceil + 1, & \text{при } R = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

- Если  $\text{ind } E_1 = 2$ , а  $\text{ind } E_2 = 1$ , т.е. точка  $m_r = m_{k+p}$  принадлежит множеству  $\Omega_{2,1}(m_k, \varphi)$ , то

$$\left| \frac{nq}{6} - p - \frac{1}{2} \right| < \frac{3}{2}.$$

а длина супербоковины  $l_{2,1}(\varphi)$  принимает одно из следующих значений:

$$l_{2,1}(\varphi) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 2, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1, & \text{при } R = 0, \\ \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 2, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1, \left\lceil \frac{nq}{6} \right\rceil, & \text{при } R = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

- Если  $\text{ind } E_1 = \text{ind } E_2 = 2$ , т.е. точка  $m_r = m_{k+p}$  принадлежит множеству  $\Omega_{2,2}(m_k, \varphi)$ , то

$$\left| \frac{nq}{6} - p \right| < \frac{3}{2}.$$

а длина супербоковины  $l_{2,2}(\varphi)$  принимает одно из следующих значений:

$$l_{2,2}(\varphi) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 2, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1, \left\lceil \frac{nq}{6} \right\rceil, & \text{при } R = 0, 1, 2, \\ \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor, & \text{при } R = 3, \\ \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{nq}{6} \right\rfloor, \left\lceil \frac{nq}{6} \right\rceil + 1, & \text{при } R = 4, 5. \end{cases}$$

В частности, каждое из  $\Omega$ -множеств состоит не более чем из трех элементов.

Более того, в не зависимости от индексов концевых линейных участков  $E_1$  и  $E_2$ , длина супербоковины от  $E_1$  к  $E_2$  не меньше чем  $\lfloor nq/6 \rfloor - 2$  и не больше чем  $\lfloor nq/6 \rfloor + 1$ .

**Доказательство.** Пусть  $Q = \{q_i\}$  — правильный  $n$ -угольник из определения квазиправильного многоугольника  $M$ , причем вершины его занумерованы так, что на дуге окружности  $S^1$  от  $m_k$  до  $m_{k+1}$  лежит вершина  $q_{k+1}$ . Обозначим через  $\beta_p$  положительный угол от  $m_{k-1}m_{k+1}$  до  $m_{k+p}m_{k+p+1}$ , а через  $\bar{\beta}_p$  — положительный угол от  $q_{k-1}q_{k+1}$  до  $q_{k+p}q_{k+p+1}$ . Легко видеть, что  $\bar{\beta}_p = (2p + 1)\alpha$ , где  $\alpha = \pi/n$ . Обозначим, как и выше, через  $\alpha_s^\pm$  угол  $m_s m_{s\pm 1} m_{s\mp 1}$ . Ясно, что величины этих углов лежат в интервале  $(0, 2\alpha)$ .

Пусть  $\text{ind } E_1 = \text{ind } E_2 = 1$ , т.е. точка  $m_r = m_{k+p}$  принадлежит множеству  $\Omega_{1,1}(m_k, \varphi)$ . Обозначим через  $\alpha'$  положительный угол от вектора  $q_{k-1}q_{k+1}$  до вектора  $m_{k-1}m_{k+1}$ , а через  $\alpha''$  — положительный угол от вектора  $m_{k+p}m_{k+p+1}$  до вектора  $q_{k+p+1}q_{k+p+2}$ . Ясно, что углы  $\alpha'$  и  $\alpha''$  принимают значения из интервала  $(0, 2\alpha)$ , и

$$\beta_p = \bar{\beta}_{p+1} - \alpha' - \alpha'' = (2p + 3)\alpha - \alpha' - \alpha''.$$

Так как точка  $m_r = m_{k+p}$  принадлежит множеству  $\Omega_{1,1}(m_k, \varphi)$ , то

$$\varphi < \beta_p < \varphi + \alpha_k^+ + \alpha_{k+p}^+,$$

откуда

$$\varphi + \alpha' + \alpha'' < (2p + 3)\alpha < \varphi + (\alpha_k^+ + \alpha') + (\alpha_{k+p}^+ + \alpha'').$$

Рассмотрим сумму углов  $\alpha_k^+ + \alpha'$ . Легко видеть, что эта сумма равна величине положительного угла от  $q_{k+1}q_{k-1}$  до  $m_{k+1}m_k$ . Величина этого угла лежит в интервале  $(0, 3\alpha)$ . Далее, рассмотрим сумму углов  $\alpha_{k+p}^+ + \alpha''$ . Эта сумма равна величине положительного угла от  $m_{k+p-1}m_{k+p+1}$  до  $q_{k+p+1}q_{k+p+2}$ . Величина этого угла также лежит в интервале  $(0, 3\alpha)$ . Поэтому

$$\varphi + 0 + 0 < (2p + 3)\alpha < \varphi + 3\alpha + 3\alpha,$$

откуда

$$\|2p\alpha - \varphi\| < 3\alpha.$$

Подставляя в полученное неравенство значения для  $\alpha$  и  $\varphi$ , получаем требуемое. Первый случай доказан.

Пусть  $\text{ind } E_1 = 1$ , а  $\text{ind } E_2 = 2$ , т.е. точка  $m_r = m_{k+p}$  принадлежит множеству  $\Omega_{1,2}(m_k, \varphi)$ . Обозначим через  $\alpha'$  положительный угол от вектора  $q_{k-1}q_{k+1}$  до вектора  $m_{k-1}m_{k+1}$ , а через  $\alpha''$  — положительный угол от вектора  $q_{k+p-1}q_{k+p}$  до вектора  $m_{k+p-1}m_{k+p}$ . Ясно, что углы  $\alpha'$  и  $\alpha''$  принимают значения из интервала  $(0, 2\alpha)$ , и

$$\beta_{p-1} = \bar{\beta}_{p-1} - \alpha' + \alpha'' = (2p - 1)\alpha - \alpha' + \alpha''.$$

Так как точка  $m_r = m_{k+p}$  принадлежит множеству  $\Omega_{1,2}(m_k, \varphi)$ , то

$$\varphi - \alpha_{k+p}^- < \beta_{p-1} < \varphi + \alpha_k^+,$$

откуда

$$\varphi - (\alpha_{k+p}^- + \alpha'') + \alpha' < (2p - 1)\alpha < \varphi + (\alpha_k^+ + \alpha') - \alpha''.$$

Как и в первом случае, сумма углов  $\alpha_k^+ + \alpha'$  лежит в интервале  $(0, 3\alpha)$ . Далее, рассмотрим сумму углов  $\alpha_{k+p}^- + \alpha''$ . Эта сумма равна величине положительного угла от  $q_{k+p-1}q_{k+p}$  до  $m_{k+p-1}m_{k+p+1}$ . Величина этого угла также лежит в интервале  $(0, 3\alpha)$ . Поэтому

$$\varphi - 3\alpha + 0 < (2p - 1)\alpha < \varphi + 3\alpha - 0,$$

откуда

$$\|(2p - 1)\alpha - \varphi\| < 3\alpha.$$

Подставляя в полученное неравенство значения для  $\alpha$  и  $\varphi$ , получаем требуемое. Второй случай доказан.

Пусть  $\text{ind } E_1 = 2$ , а  $\text{ind } E_2 = 1$ , т.е. точка  $m_r = m_{k+p}$  принадлежит множеству  $\Omega_{2,1}(m_k, \varphi)$ . Обозначим через  $\alpha'$  положительный угол от вектора  $m_{k-1}m_{k+1}$  до вектора  $q_kq_{k+2}$ , а через  $\alpha''$  — положительный угол от вектора  $m_{k+p}m_{k+p+1}$  до вектора  $q_{k+p+1}q_{k+p+2}$ . Ясно, что углы  $\alpha'$  и  $\alpha''$  принимают значения из интервала  $(0, 2\alpha)$ , и

$$\beta_p = \bar{\beta}_p + \alpha' - \alpha'' = (2p + 1)\alpha + \alpha' - \alpha''.$$

Так как точка  $m_r = m_{k+p}$  принадлежит множеству  $\Omega_{2,1}(m_k, \varphi)$ , то

$$\varphi - \alpha_k^- < \beta_p < \varphi + \alpha_{k+p}^+,$$

откуда

$$\varphi - (\alpha_k^- + \alpha') + \alpha'' < (2p + 1)\alpha < \varphi + (\alpha_{k+p}^+ + \alpha'') - \alpha'.$$

Рассмотрим сумму углов  $\alpha_k^- + \alpha'$ . Эта сумма равна величине положительного угла от  $m_{k-1}m_{k+1}$  до  $q_kq_{k+2}$ , которая лежит в интервале  $(0, 3\alpha)$ . Далее, рассмотрим сумму углов  $\alpha_{k+p}^+ + \alpha''$ . Эта сумма равна величине положительного угла от  $m_{k+p-1}m_{k+p+1}$  до  $q_{k+p+1}q_{k+p+2}$ . Величина этого угла также лежит в интервале  $(0, 3\alpha)$ . Поэтому

$$\varphi - 3\alpha + 0 < (2p + 1)\alpha < \varphi + 3\alpha - 0,$$

откуда

$$\|(2p + 1)\alpha - \varphi\| < 3\alpha.$$

Подставляя в полученное неравенство значения для  $\alpha$  и  $\varphi$ , получаем требуемое. Третий случай доказан.

Пусть  $\text{ind } E_1 = \text{ind } E_2 = 2$ , т.е. точка  $m_r = m_{k+p}$  принадлежит множеству  $\Omega_{2,2}(m_k, \varphi)$ . Обозначим через  $\alpha'$  положительный угол от  $m_{k-1}m_{k+1}$  до

$q_k q_{k+2}$ , а через  $\alpha''$  — положительный угол от  $q_{k+p-1} q_{k+p}$  до  $m_{k+p-1} m_{k+p}$ . Ясно, что углы  $\alpha'$  и  $\alpha''$  принимают значения из интервала  $(0, 2\alpha)$ , и

$$\beta_{p-1} = \bar{\beta}_{p-2} + \alpha' + \alpha'' = (2p-3)\alpha + \alpha' + \alpha''.$$

Так как точка  $m_r = m_{k+p}$  принадлежит множеству  $\Omega_{2,2}(m_k, \varphi)$ , то

$$\varphi - \alpha_k^- - \alpha_{k+p}^- < \beta_{p-1} < \varphi,$$

откуда

$$\varphi - (\alpha_k^- + \alpha') - (\alpha_{k+p}^- + \alpha'') < (2p-3)\alpha < \varphi - \alpha' - \alpha''.$$

Рассмотрим сумму углов  $\alpha_k^- + \alpha'$ . Легко видеть, что эта сумма равна величине положительного угла от вектора  $m_{k-1} m_k$  до вектора  $q_k q_{k+1}$ . Величина этого угла лежит в интервале  $(0, 3\alpha)$ . Далее, рассмотрим сумму углов  $\alpha_{k+p}^- + \alpha''$ . Эта сумма равна величине положительного угла от  $q_{k+p-1} q_{k+p}$  до  $m_{k+p-1} m_{k+p+1}$ . Величина этого угла также лежит в интервале  $(0, 3\alpha)$ . Поэтому

$$\varphi - 3\alpha - 3\alpha < (2p-3)\alpha < \varphi + 0 + 0,$$

откуда

$$\|2p\alpha - \varphi\| < 3\alpha.$$

Подставляя в полученное неравенство значения для  $\alpha$  и  $\varphi$ , получаем требуемое. Четвертый случай доказан. Доказательство закончено.



## Глава 5

# Квазиправильные границы, которые нельзя затянуть ни одним минимальным бинарным деревом

В настоящем разделе мы построим серию примеров квазиправильных  $n$ -угольников, вершины которых нельзя затянуть ни одним минимальным бинарным деревом. Сформулируем основную теорему настоящей главы.

Пусть  $P = \{p_i\}$  — правильный  $n$ -угольник, и  $\varepsilon$  — положительное число, меньшее чем  $\alpha/2$ , где  $\alpha = \pi/n$ . Пусть  $s = (s_1, \dots, s_n)$  — произвольная последовательность из  $\pm 1$ . Обозначим через  $m_i$  точку, полученную из  $p_i$  поворотом на угол  $s_i 2\varepsilon$ , и пусть  $M = \{m_i\}$ . Пусть  $P'$  — правильный  $n$ -угольник, составленный из середин дуг окружности  $S^1$ , на которые многоугольник  $P$  ее делит. Легко доказывается следующая лемма.

**Лемма 5.1** *Множество  $M$ , построенное выше, является квазиправильным  $n$ -угольником, соответствующим правильному  $n$ -угольнику  $P'$ .*

**Определение.** Квазиправильный многоугольник  $M$ , построенный выше, называется  $\varepsilon$ -квазиправильным многоугольником типа  $s$ .

**Теорема 5.1** *Пусть  $s$  — периодическая последовательность длины  $n = 10k$  с периодом  $(-1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1)$ , и  $\varepsilon$  — произвольное положительное число, такое что  $\alpha/4 \leq \varepsilon < \alpha/2$ . Тогда при  $k \geq 8$  множество  $M$*

Рис. 5.1: Пример квазиправильного 80-угольника, который нельзя затянуть ни одним минимальным бинарным деревом.

*вершин  $\varepsilon$ -квазиправильного  $n$ -угольника типа  $s$  не затягивается ни одним минимальным бинарным деревом.*

Один из таких  $\varepsilon$ -квазиправильных 80-угольников изображен на рис. 5.1.

## 1 Жаловый модуль

Пусть  $D$  — произвольный паркет из  $\mathcal{WP}_5$ , имеющий минимальную реализацию на множестве  $M$  вершин выпуклого многоугольника. Обозначим через  $\xi(D)$  длину наибольшего жала паркета  $D$ . Положим

$$\xi(M) = \min_D \xi(D).$$

Если ни один такой паркет не имеет минимальной реализации на множестве  $M$ , то положим  $\xi(M) = \infty$ . Определенное так  $\xi(M)$  называется *жаловым модулем множества  $M$* .

Пусть теперь ни один паркет из  $\mathcal{WP}_5$ , имеющий концевые наросты, не обладает минимальной реализацией на множестве  $M$ . Пусть  $G(m)$  — наростовое число вершины  $m \in M$ . Определим *наростовое число  $G(M)$  множества  $M$*  как минимум наростовых чисел  $G(m)$  всех вершин  $m$  из  $M$ . Далее, пусть  $T(m)$  — число поворота вершины  $m \in M$ . Определим *число поворота  $T(M)$  множества  $M$*  как минимум чисел поворота  $T(m)$  по всем вершинам  $m \in M$ . Наконец, пусть  $a_{i,j}(\varphi)$  — нижнее боковинное число типа  $(i, j)$  множества  $M$ , соответствующее углу  $\varphi$ . Положим

$$a(M) = \min_{(i,j)} a_{i,j}\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Назовем число  $a(M)$  *главным боковинным числом множества  $M$* . Имеет место следующий результат.

**Предложение 5.1** Пусть  $M$  — множество вершин произвольного выпуклого  $n$ -угольника, такого что ни один паркет из  $\mathcal{WP}_5$  с концевыми наростами не имеет минимальной реализации на  $M$ . Тогда жаловый модуль  $\xi(M)$  множества  $M$  оценивается снизу следующим образом:

$$\xi(M) \geq \min\left\{G(M), T(M) - 2, n - 2, 2\left[\frac{a(M) + 1}{2}\right] - 1\right\}.$$

**Доказательство.** Пусть  $D$  — паркет из  $\mathcal{WP}_5$ , имеющий минимальную реализацию на  $M$ , такой что  $\xi(D) = \xi(M)$ . По условию предложения,  $D$  не имеет концевых наростов. Пусть  $T$  — жало из  $D$ , длина которого равна  $\xi(D)$ . Обозначим через  $Z$  и  $E$  соответственно концевую змею и концевой линейный участок паркета  $D$ , содержащие  $T$ . Наконец, обозначим через  $\mu$  правую часть доказываемого неравенства.

Предположим, что на концевой змее  $Z$  имеется нарост. Тогда, в силу следствия 4.6 главы 4, длина жала  $T$  больше или равна  $G(M)$ . Поэтому в этом случае  $\xi(M) \geq G(M) \geq \mu$ .

Пусть теперь на концевой змее  $Z$  наростов нет. Предположим сначала, что концевой линейный участок  $E$  имеет излом. Тогда, в силу следствия 4.10 главы 4, длина концевой змеи  $Z$ , совпадающая в этом случае с длиной жала  $T$ , больше или равна  $T(M) - 2$ . Поэтому в этом случае  $\xi(M) \geq T(M) - 2 \geq \mu$ .

Пусть теперь концевой линейный участок  $E$  не имеет излома. Если  $D$  — линейный паркет, то, в силу сделанных предположений,  $D$  является змеей, поэтому в этом случае длина жала  $T$  совпадает с количеством ячеек в  $D$  и равна  $n - 2$ . Таким образом, в этом случае  $\xi(M) \geq n - 2 \geq \mu$ .

Пусть теперь  $D$  — нелинейный паркет. В сделанных предположениях участок  $E$  не имеет излома и не содержит наростов, т.е. совпадает со своим жалом. Если какой-нибудь другой концевой линейный участок паркета  $D$  не является змеей как линейный участок, то к нему применимы предыдущие рассуждения, и длина его жала оценивается как и выше. Так как жало концевого линейного участка  $E$ , по предположению, самое длинное, мы снова получаем для него одну из предыдущих оценок. Таким образом, без ограничения общности можно предполагать, что все концевые линейные участки паркета  $D$  в рассматриваемом случае являются змеями как линейные участки.

Обозначим через  $E'$  и  $E''$  такие концевые линейные участки паркета  $D$ , которые примыкают к одной и той же ячейке ветвления (очевидно, что такие всегда есть). Обозначим через  $B$  их общую боковину. Тогда, в силу следствия 4.22 главы 4, длина  $b$  боковины  $B$  не меньше чем  $a(M)$ . Без ограничения общности, предположим что длина боковины  $B'$  участка  $E'$ , содержащейся в  $B$ , не меньше, чем длина боковины участка  $E''$ , содержащейся в  $B$ . Тогда, очевидно, длина  $b'$  боковины  $B'$  больше или равна  $\lceil (b + 1)/2 \rceil$ , поэтому длина участка  $E'$  больше или равна  $2\lceil (b + 1)/2 \rceil - 1$ . Так как жало

участка  $E$ , по предположению, самое длинное, то и его длина больше или равна чем

$$2\left[\frac{b+1}{2}\right] - 1 \geq 2\left[\frac{a(M)+1}{2}\right] - 1.$$

Предложение доказано.

Из полученных выше оценок на наростовые числа, числа поворота и длины боковин в случае правильных и квазиправильных  $n$ -угольников, вытекают следующие результаты.

**Следствие 5.1** Пусть  $M$  — множество вершин правильного  $n$ -угольника,  $n \geq 12$ . Тогда жаловый модуль  $\xi(M)$  множества  $M$  оценивается снизу следующим образом:

$$\xi(M) \geq 2\left[\frac{n}{12}\right].$$

**Доказательство.** Для случая правильного  $n$ -угольника рассуждения, приведенные в доказательстве предложения 5.1, можно усилить. А именно, вычисляя длину концевой линейного участка  $E'$  по длине его боковины  $b'$ , можно рассмотреть следующие два случая.

Если угол между участками  $E'$  и  $E''$  равен  $\pi/3$ , то, на самом деле, длина участка  $E'$  больше или равна  $2b'$ , откуда длина участка  $E'$  оценивается снизу как

$$\left[\frac{a(M)+1}{2}\right].$$

С другой стороны, при  $n \geq 12$  для правильного  $n$ -угольника нижние боковинные числа  $a_{i,j}(\varphi)$  строго больше чем  $a_{i,j}(\pi/3)$ , если  $\varphi = q\pi/3$ ,  $q = 2, 3, 4, 5$ . Поэтому, если угол  $\varphi$  между  $E'$  и  $E''$  больше чем  $\pi/3$ , то снова, как легко видеть, длина участка  $E'$  оценивается снизу как

$$\left[\frac{a(M)+1}{2}\right].$$

Таким образом,

$$\xi(M) \geq \min\left\{\left[\frac{n}{3}\right] - 2, 2\left[\frac{n}{3}\right] - 4, n - 2, 2\left[\frac{1}{2}\left[\frac{n}{6}\right]\right] = 2\left[\frac{n}{12}\right]\right\} = 2\left[\frac{n}{12}\right].$$

Доказательство закончено.

**Следствие 5.2** Пусть  $M$  — множество вершин квазиправильного  $n$ -угольника,  $n \geq 18$ . Тогда жаловый модуль  $\xi(M)$  множества  $M$  оценивается снизу следующим образом:

$$\xi(M) \geq 2\left[\frac{n-6}{12}\right].$$

**Доказательство.** Это следствие доказывается точно так же, как и предыдущее.

Пусть  $M$  — произвольный выпуклый  $n$ -угольник,  $m_k \in M$  — некоторая его вершина,  $p$  — неотрицательное целое число, не превосходящее  $[(n-1)/2]$ , и  $\sigma$  равно  $-1$ ,  $0$  или  $1$ . Обозначим через  $S(m_k, p, \sigma)$  множество вершин из  $M$  вида  $\{m_{k-p}, \dots, m_{k+p}\} \cup \{m_{k+\sigma(p+1)}\}$ . Будем говорить, что множество  $S(m_k, p, \sigma)$  *затягивается ростком змеи с началом в  $m_k$* , если существует такая точка  $m \in \text{conv } M$ , что множество  $S(m_k, p, \sigma) \cup \{m\}$  затягивается некоторой минимальной змеей  $Z$ , одно из концевых ребер которой, скажем  $e$ , приходит в точку  $m_k$ , другое — в точку  $m$ , а последовательные отростки, начиная с отростка, смежного с ребром  $e$ , — в точки  $m_{k+\sigma}, m_{k-\sigma}, m_{k+2\sigma}, m_{k-2\sigma}, \dots$ . Ясно, что длина минимальной змеи  $Z$  в этом случае равна  $2p + |\sigma|$ . Далее, будем говорить, что *из точки  $m_k \in M$  можно выпустить росток змеи длины  $z$* , если существует такое множество  $S(m_k, p, \sigma)$ , что  $z = 2p + |\sigma|$ , и множество  $S(m_k, p, \sigma)$  затягивается ростком змеи с началом в  $m_k$ . Минимальное  $z$ , для которого из точки  $m_k \in M$  можно выпустить росток змеи длины  $z$ , называется *жаловым submodule точки  $m_k$*  и обозначается через  $\xi_s(m_k)$ . Наконец, *жаловым submodule множества  $M$*  называется минимум жаловых submodule  $\xi_s(m_k)$  по всем  $m_k \in M$ . Следующее предложение очевидно.

**Предложение 5.2** Пусть  $M$  — множество вершин выпуклого многоугольника. Тогда  $\xi(M) \geq \xi_s(M)$ .

Теперь все готово, чтобы доказать теорему 5.1.

## 2 Доказательство теоремы 5.1

Из следствия 5.2 вытекает, что при  $n \geq 80$  жаловый модуль произвольного квазиправильного  $n$ -угольника больше 10. Поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить, см. предложение 5.2, что из произвольной точки  $m_k \in M$  нельзя выпустить росток змеи длины 10. Покажем это.

Как обычно, будем предполагать, что вершины многоугольника  $M$  занумерованы элементами из  $\mathbb{Z}_n$ . Пусть  $\sigma = \pm 1$ . Определим ломаную  $L_\sigma(m_k)$  набором ее последовательных вершин так:

$$L_\sigma(m_k) = \{m_k, m_{k+\sigma}, m_{k-\sigma}, m_{k+2\sigma}, m_{k-2\sigma}, \dots\}.$$

Пусть из точки  $m_k$  можно выпустить росток змеи длины 10. Пусть первый отросток этой змеи, считая от концевого ребра  $e$ , инцидентного точке  $m_k$ , приходит в вершину  $m_{k+\sigma}$ . Тогда, как легко видеть, для каждой внутренней вершины  $m'$  ломаной  $L_\sigma(m_k)$ , меньший угол, порожденный лучами, выходящими из  $m'$  и содержащими звенья из  $L_\sigma(m_k)$  инцидентные  $m'$ , содержит внутри себя отросток минимальной змеи, приходящий в вершину

$m'$ . Поэтому все соответствующие вертикальные углы, после совмещения их вершин, содержат внутри себя некоторую общую прямую  $\ell$ .

Обозначим через  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , величину угла  $m_{k+i-1}m_{k-i}m_{k+i}$ , а через  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , — величину угла  $m_{k-i+1}m_{k+i}m_{k-i}$ . Пусть, для определенности,  $\sigma = 1$ . Рассмотрим на плоскости  $\mathbb{R}^2$  положительно ориентированную ортогональную систему координат, с осью абсцисс, сонаправленной с вектором  $m_{k+1}m_{k-1}$ . Тогда угол от оси абсцисс до вектора  $m_{k+1}m_k$  равен  $\beta_1$ , а углы от оси абсцисс до векторов  $m_{k+i+1}m_{k-i}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , равны

$$\alpha_{i+1} + \sum_{j=2}^i (\alpha_j - \beta_j),$$

а углы от оси абсцисс до векторов  $m_{k+i}m_{k-i}$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , равны

$$\sum_{j=2}^i (\alpha_j - \beta_j).$$

Условие того, что все соответствующие вертикальные углы, после совмещения их вершин, содержат внутри себя некоторую общую прямую  $\ell$ , состоит в том, что наименьший угол от оси абсцисс до векторов  $m_{k+i+1}m_{k-i}$ ,  $i = 0, \dots, 4$ , больше чем наибольший угол от оси абсцисс до векторов  $m_{k+i}m_{k-i}$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Поэтому, если выполнено следующее неравенство

$$\begin{aligned} & \min\{\beta_1, \alpha_2, \alpha_2 - \beta_2 + \alpha_3, \alpha_2 - \beta_2 + \alpha_3 - \beta_3 + \alpha_4, \\ & \alpha_2 - \beta_2 + \alpha_3 - \beta_3 + \alpha_4 - \beta_4 + \alpha_5\} \leq \\ & \leq \max\{0, \alpha_2 - \beta_2, \alpha_2 - \beta_2 + \alpha_3 - \beta_3, \alpha_2 - \beta_2 + \alpha_3 - \beta_3 + \alpha_4 - \beta_4, \\ & \alpha_2 - \beta_2 + \alpha_3 - \beta_3 + \alpha_4 - \beta_4 + \alpha_5 - \beta_5\}, \end{aligned}$$

то из точки  $m_k$  нельзя выпустить росток змеи длины 10, первый отросток которого приходит в точку  $m_{k+1}$ .

Аналогично, рассматривая случай  $\sigma = -1$ , заключаем, что если выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \min\{\alpha_1, \beta_2, \beta_2 - \alpha_2 + \beta_3, \beta_2 - \alpha_2 + \beta_3 - \alpha_3 + \beta_4, \\ & \beta_2 - \alpha_2 + \beta_3 - \alpha_3 + \beta_4 - \alpha_4 + \beta_5\} \leq \\ & \leq \max\{0, \beta_2 - \alpha_2, \beta_2 - \alpha_2 + \beta_3 - \alpha_3, \beta_2 - \alpha_2 + \beta_3 - \alpha_3 + \beta_4 - \alpha_4, \\ & \beta_2 - \alpha_2 + \beta_3 - \alpha_3 + \beta_4 - \alpha_4 + \beta_5 - \alpha_5\}, \end{aligned}$$

то из точки  $m_k$  нельзя выпустить росток змеи длины 10, первый отросток которого приходит в точку  $m_{k-1}$ .

Таким образом, для завершения доказательства теоремы остается убедиться, что для предъявленных квазиправильных многоугольников приведенные выше неравенства выполнены для каждой вершины  $m_k$ . В силу

периодической структуры наших многоугольников достаточно проверить выполнение неравенств для любых 10 последовательных вершин.

Обозначим через  $\gamma$  вектор

$$(\beta_5, \beta_4, \beta_3, \beta_2, \beta_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5).$$

Тогда, для любых 10 последовательных вершин из  $M$ , с точностью до циклической перестановки, вектор  $\gamma$  принимает следующие значения:

$$\begin{aligned} &(\alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha), \\ &(\alpha, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon), \\ &(\alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha), \\ &(\alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha), \\ &(\alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha, \alpha - 2\varepsilon), \\ &(\alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha), \\ &(\alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon), \\ &(\alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon), \\ &(\alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon), \\ &(\alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon). \end{aligned}$$

Поэтому оба неравенства в каждом из имеющихся 10 случаев имеют вид:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \min\{\alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha\} &= \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, 0, 2\varepsilon, 0, -2\varepsilon\} = 2\varepsilon, \\ \min\{\alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon\} &= \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, 0, -2\varepsilon, 0, 2\varepsilon\} = 2\varepsilon; \end{aligned}$$

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \min\{\alpha + 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha + 4\varepsilon\} &= \alpha \leq \max\{0, 2\varepsilon, 2\varepsilon, 2\varepsilon, 4\varepsilon\} = 4\varepsilon, \\ \min\{\alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha - 4\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon\} &= \alpha - 4\varepsilon \leq \\ &\leq \max\{0, -2\varepsilon, -2\varepsilon, -2\varepsilon, -4\varepsilon\} = 0; \end{aligned}$$

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \min\{\alpha - 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha - 4\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha\} &= \alpha - 4\varepsilon \leq \max\{0, -4\varepsilon, -4\varepsilon, 0, 0\} = 0, \\ \min\{\alpha + 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha + 4\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha\} &= \alpha \leq \max\{0, 4\varepsilon, 4\varepsilon, 0, 0\} = 4\varepsilon; \end{aligned}$$

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \min\{\alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 4\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon\} &= \alpha \leq \max\{0, 2\varepsilon, 2\varepsilon, 2\varepsilon, 4\varepsilon\} = 4\varepsilon, \\ \min\{\alpha - 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha - 4\varepsilon\} &= \alpha - 4\varepsilon \leq \\ &\leq \max\{0, -2\varepsilon, -2\varepsilon, -2\varepsilon, -4\varepsilon\} = 0; \end{aligned}$$

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \min\{\alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon\} &= \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, 0, 2\varepsilon, 0, -2\varepsilon\} = 2\varepsilon, \\ \min\{\alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha\} &= \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, 0, -2\varepsilon, 0, 2\varepsilon\} = 2\varepsilon; \end{aligned}$$

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \min\{\alpha, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha\} &= \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, 2\varepsilon, 0, 0, -2\varepsilon\} = 2\varepsilon, \\ \min\{\alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon\} &= \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, -2\varepsilon, 0, 0, 2\varepsilon\} = 2\varepsilon; \end{aligned}$$

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \min\{\alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha\} &= \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, 0, 0, -2\varepsilon, 2\varepsilon\} = 2\varepsilon, \\ \min\{\alpha, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha\} &= \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, 0, 0, 2\varepsilon, -2\varepsilon\} = 2\varepsilon; \end{aligned}$$

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \min\{\alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha - 4\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon\} &= \alpha - 4\varepsilon \leq \\ &\leq \max\{0, -4\varepsilon, -4\varepsilon, 0, -4\varepsilon\} = 0, \\ \min\{\alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha + 4\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon\} &= \alpha \leq \max\{0, 4\varepsilon, 4\varepsilon, 0, 4\varepsilon\} = 4\varepsilon; \end{aligned}$$

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \min\{\alpha, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon, \alpha\} &= \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, 0, 0, -2\varepsilon, 2\varepsilon\} = 2\varepsilon, \\ \min\{\alpha - 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha\} &= \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, 0, 0, 2\varepsilon, -2\varepsilon\} = 2\varepsilon; \end{aligned}$$

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \min\{\alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha, \alpha + 2\varepsilon, \alpha - 2\varepsilon\} &= \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, 2\varepsilon, 0, 0, -2\varepsilon\} = 2\varepsilon, \\ \min\{\alpha, \alpha, \alpha - 2\varepsilon, \alpha + 2\varepsilon, \alpha\} &= \alpha - 2\varepsilon \leq \max\{0, -2\varepsilon, 0, 0, 2\varepsilon\} = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ясно, что все эти неравенства выполнены, если  $\alpha \leq 4\varepsilon$ . Теорема доказана.

**Замечание.** Оказывается, найденные нами  $\varepsilon$ -квазиправильные многоугольники в некотором смысле оптимальны. А именно, оказывается, росток змеи длины  $z \leq 9$  всегда можно выпустить из некоторой вершины любого  $\varepsilon$ -квазиправильного  $n$ -угольника,  $n \geq z + 1$ . Этот факт был обнаружен как результат вычислительного эксперимента, выполненного в пакете *Mathematica*<sup>®</sup>. Идея использованного алгоритма состоит в следующем. Сначала моделируются все возможные блоки  $\gamma = (\beta_i, \beta_{i-1}, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i)$ , где  $i = \lceil (z + 1)/2 \rceil$ . Среди них отбираются те, для которых выполняются неравенства, аналогичные приведенным выше, и гарантирующие невозможность выпустить змею длины  $z$ . Затем, строится ориентированный граф,



вершины которого — отобранные блоки, и вершина  $\gamma_p$  соединяется с вершиной  $\gamma_q$  ориентированной дугой с началом в  $\gamma_p$  если и только если блок  $\gamma_p$  с выброшенным первым элементом совпадает с блоком  $\gamma_q$  с выброшенным последним элементом. Все замкнутые маршруты этого ориентированного графа соответствуют всем  $\varepsilon$ -квазиравильным  $n$ -угольникам, из каждой вершины которых нельзя выпустить росток змеи длины  $z$ . Оказалось, что при  $z \leq 9$  полученные ориентированные графы ацикличны. При  $z = 10$  соответствующий граф имеет ровно два непересекающихся цикла, причем  $\varepsilon$ -квазиравильные  $n$ -угольники, соответствующие этим циклам, получают друг из друга движением плоскости, меняющим ориентацию.

## Глава 6

# Концевые линейные участки паркетов из $\mathcal{WP}_5$ , имеющих $RM$ -реализацию

В данной главе мы применим разработанную выше технику к исследованию локально минимальных бинарных деревьев общего вида, затягивающих вершины правильных многоугольников. Случай скелетов был полностью разобран нами в предыдущих главах. Главным результатом данного раздела является следующая теорема.

**Теорема 6.1** Пусть  $D$  — паркет из  $\mathcal{WP}_5$ , имеющий минимальную реализацию на правильном  $n$ -угольнике,  $n \geq 12$ . Тогда все концевые линейные участки скелета  $S$  паркета  $D$  — змеи.

### 1 Линейные паркеты с правильной границей

В данном разделе мы докажем теорему 6.1 для случая линейных паркетов.

**Предложение 6.1** Пусть  $D$  — линейный паркет, имеющий минимальную реализацию на правильном  $n$ -угольнике,  $n \geq 12$ . Тогда  $D$  — змея, возможно, с наростами.

**Доказательство.** Предположим противное, т.е.  $D$  имеет излом. Пусть  $E_1$  и  $E_2$  — концевые линейные участки паркета  $D$ . Пусть сначала концевые змеи паркета  $D$  имеют противоположные направления. Отметим, что в этом случае ось скелета  $S$  паркета  $D$  состоит по крайней мере из трех звеньев, одно из которых не параллельно концевым змеям. Длина этого звена, очевидно, не меньше 2. Поэтому, часть  $C$  контура скелета  $S$ , состоящая

из всех граничных ребер скелета  $S$ , не принадлежащих концевым змеям, состоит по крайней мере из двух ребер. Более того, ребра поворота обоих концевых линейных участков различны и принадлежат  $C$ . Обозначим через  $C'$  часть контура паркета  $D$ , состоящую из всех граничных ребер паркета  $D$ , не принадлежащих хвостам. Из сказанного выше вытекает, что  $C'$  состоит не менее чем из  $2 + d(E_1) + d(E_2)$  ребер, где, напомним,  $d(E_i)$  равно нулю, если на ребре поворота концевого линейного участка  $E_i$  нет нароста, и равно единице в противном случае.

Воспользуемся теперь оценкой на длину хвоста в случае наличия излома, см. следствие 4.15 главы 4, в силу которой длина хвоста концевого линейного участка  $E_i$  не меньше чем

$$2\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n + 15 + 18d(E_i)}{12}\right] - 1.$$

Получаем, что длина контура паркета  $D$  больше или равна

$$4\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n + 15 + 18d(E_1)}{12}\right] - \left[\frac{n + 15 + 18d(E_2)}{12}\right] - 2 + (2 + d(E_1) + d(E_2)) + 2,$$

где 2 в конце формулы соответствует двум концевым ребрам паркета  $D$ . С другой стороны, контур паркета  $D$  состоит из  $n$  ребер, поэтому должно быть выполнено следующее неравенство:

$$n \geq 4\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n + 15 + 18d(E_1)}{12}\right] - \left[\frac{n + 15 + 18d(E_2)}{12}\right] + d(E_1) + d(E_2) + 2. \quad (*)$$

Рассмотрим отдельно случаи возможных значений чисел  $d(E_i)$ . Если  $d(E_1) = d(E_2) = 0$ , то неравенство (\*) имеет вид

$$n \geq 4\left[\frac{n}{3}\right] - 2\left[\frac{n + 15}{12}\right] + 2.$$

Однако, это неравенство на интервале  $n \geq 12$  выполняется лишь при  $n = 14$ . Далее, если одно из чисел  $d(E_i)$ , скажем  $d(E_1)$ , равно нулю, а другое — единице, то неравенство (\*) имеет вид

$$n \geq 4\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n + 15}{12}\right] - \left[\frac{n + 33}{12}\right] + 3.$$

Однако, это неравенство на интервале  $n \geq 12$  выполняется лишь при  $n = 14$  и  $n = 17$ . Наконец, если  $d(E_1) = d(E_2) = 1$ , то неравенство (\*) имеет вид

$$n \geq 4\left[\frac{n}{3}\right] - 2\left[\frac{n + 33}{12}\right] + 4.$$

Однако, это неравенство на интервале  $n \geq 12$  выполняется лишь при  $n = 14$ ,  $n = 16$ ,  $n = 17$  и  $n = 20$ . Рассмотрим теперь оставшиеся возможности.

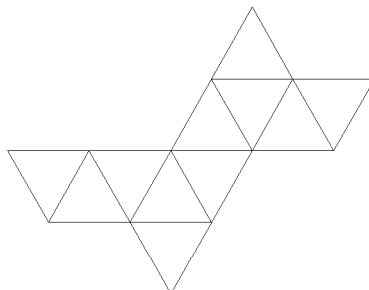


Рис. 6.1: Этот паркет не имеет минимальной реализации на правильном 14-угольнике

**Случай  $n = 14$**  Выпишем сначала все имеющиеся у нас общие оценки. Длина жала, в силу следствия 4.7 главы 4, не меньше чем  $\lceil n/3 \rceil - 2 = 2$ . Далее, в силу следствия 4.23 главы 4 для угла  $\varphi = \pi$ , индексы концевых линейных участков  $E_1$  и  $E_2$  одинаковы, и длина  $s_i$  каждой из двух супербоковин равна  $\lceil nq/6 \rceil - 1 = 6$ . Обозначим через  $b_i$  длину боковины поворота участка  $E_i$ , а через  $c_i$  — длину подчиненной боковины участка  $E_i$ .

Пусть  $d(E_1) = d(E_2) = 0$ . Тогда, в силу следствия 4.16 главы 4,  $b_i \geq \lceil n/3 \rceil - 1 - d(E_i) = 3$ , а

$$c_i \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1 - \left\lceil \frac{n + 6 + 6d(E)}{12} \right\rceil = 2.$$

Так как  $s_i = 6$ , то множество  $C'$ , состоящее, напомним, из всех граничных ребер паркета, не принадлежащих его хвостам, состоит не более чем из 2 ребер, т.е. содержит только ребра поворота, каждое из которых лежит в своей супербоковине. Более того, с необходимостью  $b_i = 3$ , а  $c_i = 2$ . Из совпадения индексов концевых линейных участков  $E_i$  вытекает, что имеется ровно две возможности: или на обеих боковинах поворота концевых змей расположено по одному наросту, положение которых определено однозначно условием отсутствия концевых наростов, или наростов нет. В последнем случае паркет является скелетом и не имеет минимальной реализации, как показано в [53]. В первом случае соответствующий паркет выглядит так, как показано на рис. 6.1. Отсутствие у него минимальной реализации на правильном 14-угольнике проверяется непосредственно.

Пусть теперь одно из  $d(E_i)$ , скажем  $d(E_1)$ , равно 1, а другое,  $d(E_2)$ , равно 0. Тогда, так же как и выше, получаем следующие оценки:  $b_1 \geq 2$ ,  $b_2 \geq 3$ ,  $c_1 \geq 1$ , и  $c_2 \geq 2$ . Кроме того, так как на ребре поворота первого концевого линейного участка нарост есть, а  $s_i = 6$ , то  $b_1 = c_2 = 2$ . Далее, ясно что  $3 \leq b_2 \leq 4$ . Если  $b_2 = 4$ , то  $c_1 = 1$ , и на боковине поворота концевой змеи участка  $E_2$  должен находиться один нарост. Этот нарост может быть размещен двумя способами, изображенными на рис. 6.2.



Рис. 6.2: Эти паркеты не имеют минимальной реализации на правильном 14-угольнике

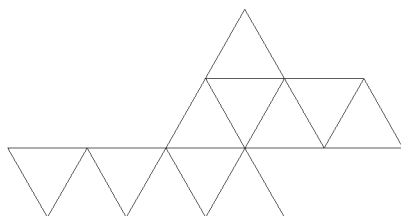


Рис. 6.3: Этот паркет тоже не имеет минимальной реализации на правильном 14-угольнике

Пусть теперь  $b_2 = 3$ . Тогда  $c_1 = 2$ , и, из совпадения индексов конечных линейных участков  $E_i$ , получаем, что на боковине поворота конечной змеи участка  $E_2$  должен находиться нарост. Его положение определено однозначно, см. рис. 6.3.

Отсутствие минимальной реализации на правильном 14-угольнике у найденных в этом случае трех паркетов проверяется непосредственно.

Пусть наконец  $d(E_1) = d(E_2) = 1$ . Тогда, так же как и выше, получаем следующие оценки:  $b_i \geq 2$ , и  $c_i \geq 1$ . Для определенности предположим, что  $b_1 \geq b_2$ . Так как на каждом ребре поворота расположен нарост,  $b_i \leq 3$ . Пусть сначала  $b_1 = 3$ . Тогда  $c_2 = 1$ . Если на боковине поворота конечной змеи участка  $E_1$  имеется нарост, то положение этого нароста определено однозначно, и  $c_1$  может равняться или 1, или 2. Если  $c_1 = 1$ , то  $b_2 = 3$ , и, в силу совпадения индексов конечных линейных участков  $E_i$ , на боковине поворота конечной змеи из  $E_2$  также имеется нарост. Полученный паркет изображен на рис. 6.4.

Если же  $c_1 = 2$ , то  $b_2 = 2$ , что невозможно в силу совпадения индексов конечных линейных участков  $E_i$ . Далее, если на боковине поворота кон-

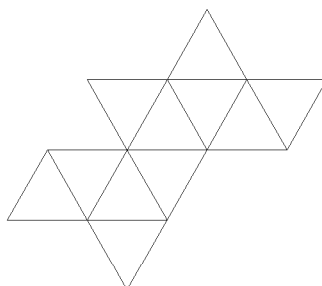


Рис. 6.4: Этот паркет тоже не имеет минимальной реализации на правильном 14-угольнике

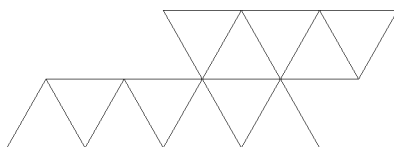


Рис. 6.5: Этот паркет тоже не имеет минимальной реализации на правильном 14-угольнике

цевой змеи участка  $E_1$  наростов нет, то  $c_1 \geq 2$ , и значит  $b_2 \leq 2$ , откуда  $c_1 = b_2 = 2$ . Полученный в результате паркет изображен на рис. 6.5.

Пусть, наконец,  $b_1 = 2$ . В этом случае множество  $C'$  может состоять не более чем из 6 элементов, четыре из которых соответствуют наростам, расположенным на ребрах поворота. Непосредственно проверяется, что  $C'$  состоит или из 4 или из 6 элементов. Если  $C'$  состоит из 6 элементов, то  $b_1 = b_2 = 2$ , и  $c_1 = c_2 = 1$ . Два получающихся в этом случае паркеты приведены на рис. 6.6.

Если же  $C'$  состоит из 4 элементов, то, так как в силу предположения  $b_1 \geq b_2$ , то  $b_2 = 2$ . Значит  $c_1 = c_2 = 2$ , наростов на концевых змеях нет, и получается паркет, изображенный на рис. 6.7.

Отсутствие минимальной реализации на правильном 14-угольнике у пяти найденных в этом случае паркетов проверяется непосредственно. Случай  $n = 14$  полностью разобран.

**Случай  $n = 16$**  Снова выпишем все имеющиеся у нас общие оценки. Длина жала, в силу следствия 4.7 главы 4, не меньше чем  $\lceil n/3 \rceil - 2 = 3$ .

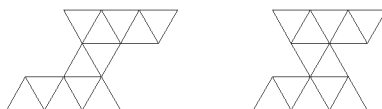


Рис. 6.6: Эти паркеты не имеют минимальной реализации на правильном 14-угольнике

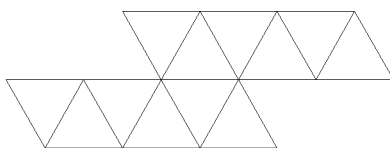


Рис. 6.7: Этот паркет тоже не имеет минимальной реализации на правильном 14-угольнике

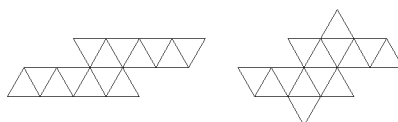


Рис. 6.8: Эти паркеты не имеют минимальной реализации на правильном 16-угольнике

Далее, в силу следствия 4.23 главы 4 для угла  $\varphi = \pi$ , индексы концевых линейных участков  $E_1$  и  $E_2$  одинаковы, и длина  $s_i$  каждой из двух супербоковин равна  $[nq/6] - 1 = 7$ . Обозначим через  $b_i$  длину боковины поворота участка  $E_i$ , а через  $c_i$  — длину подчиненной боковины участка  $E_i$ .

Нас интересует лишь случай  $d(E_1) = d(E_2) = 1$ . Тогда, в силу следствия 4.16 главы 4,  $b_i \geq [n/3] - 1 - d(E_i) = 3$ , а

$$c_i \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1 - \left\lfloor \frac{n + 6 + 6d(E)}{12} \right\rfloor = 2.$$

Так как длины обеих супербоковин равны 7, и на обоих ребрах поворота крепятся наросты, имеем:  $b_1 = b_2 = 3$ , и  $c_1 = c_2 = 2$ . Из совпадения индексов концевых линейных участков вытекает, что имеется ровно две возможности, изображенных на рис. 6.8.

Отсутствие минимальной реализации на правильном 16-угольнике у найденных в этом случае двух паркетов проверяется непосредственно. Случай  $n = 16$  полностью разобран.

**Случай  $n = 17$**  Снова выпишем все имеющиеся у нас общие оценки. Длина жала, в силу следствия 4.7 главы 4, не меньше чем  $[n/3] - 2 = 3$ . Далее, в силу следствия 4.23 главы 4 для угла  $\varphi = \pi$ , если индексы концевых линейных участков  $E_1$  и  $E_2$  одинаковы, то длина  $s_i$  каждой из двух супербоковин равна  $[nq/6] - 1 = 7$ , чего быть не может так как  $n$  нечетно. Если же индексы различны, то длины супербоковин равны 7 и 8. Обозначим через  $b_i$  длину боковины поворота участка  $E_i$ , а через  $c_i$  — длину подчиненной боковины участка  $E_i$ .

Так как нас не интересует случай  $d(E_1) = d(E_2) = 0$ , предположим сначала, без ограничения общности, что  $d(E_1) = 1$ , а  $d(E_2) = 0$ . Тогда, в силу следствия 4.16 главы 4,  $b_1 \geq 3$ ,  $b_2 \geq 4$ , а  $c_1 \geq 2$ , и  $c_2 \geq 3$ . Так как, на ребре поворота участка  $E_1$  расположен нарост, то длина соответствующей супербоковины не меньше чем  $b_1 + c_2 + 2 \geq 8$ . Поэтому длина этой





Рис. 6.9: Эти паркеты не имеют минимальной реализации на правильном 17-угольнике

супербоконины равна 8, а длина противоположной супербоконины равна 7. Отсюда получаем: индекс конечного линейного участка  $E_1$  равен 1, индекс конечного линейного участка  $E_2$  равен 2, и, более того,  $b_1 = 3$ ,  $b_2 = 4$ , а  $c_1 = 2$ , и  $c_2 = 3$ . Так как индекс участка  $E_1$  равен 1,  $c_1 = 2$ , нет конечных наростов, и  $b_1 = 3$ , то на конечной змее участка  $E_1$  наростов нет. Далее, так как на ребре поворота участка  $E_1$  имеется нарост, то на подчиненной боковине участка  $E_2$  наростов нет (иначе паркет  $D$  не из  $\mathcal{WP}_3$ ). Учитывая так же то, что индекс участка  $E_2$  равен 2, заключаем, что на боковине поворота конечной змеи участка  $E_2$  обязан находиться ровно один нарост. Для этого нароста имеется две возможности, приведенные на рис. 6.9.

Пусть теперь  $d(E_1) = d(E_2) = 1$ . Тогда, в силу следствия 4.16 главы 4,  $b_1 \geq 3$ ,  $b_2 \geq 3$ , а  $c_1 \geq 2$ , и  $c_2 \geq 2$ . Без ограничения общности предположим, что индекс конечного линейного участка  $E_1$  равен 1, а индекс конечного линейного участка  $E_2$  равен 2. Тогда, так как на ребрах поворота имеются наросты,  $c_1 = 2$ , а  $b_2 = 3$ . Кроме того,  $b_1 \leq 4$ . Так как индекс участка  $E_1$  равен 1, для боковины поворота этого участка имеется ровно две возможности: или  $b_1 = 3$  и на  $E_1$  наростов нет, или  $b_1 = 4$  и на  $E_1$  имеется ровно один нарост, положение которого однозначно определяется ограничением на длину жала.

Если  $b_1 = 3$ , то  $c_2 = 3$ . На подчиненной боковине конечной змеи участка  $E_2$  наростов нет, так как есть нарост на ребре поворота участка  $E_1$ . Так как индекс участка  $E_2$  равен 2, участок  $E_2$  в этом случае также не содержит наростов. Соответствующий паркет тем самым однозначно определен и изображен на рис. 6.10.

Если же  $b_1 = 4$ , то  $c_2 = 2$ , и, так как индекс конечного линейного участка  $E_2$  равен 2, то на боковине поворота конечной змеи участка  $E_2$  обязан располагаться нарост, расположение которого определено однозначно. Соответствующий паркет изображен на рис. 6.11.

Отсутствие минимальной реализации на правильном 17-угольнике у четырех найденных в этом случае паркетов проверяется непосредственно.

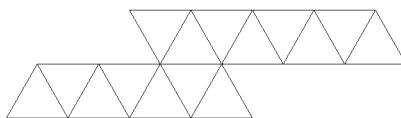


Рис. 6.10: Этот паркет не имеет минимальной реализации на правильном 17-угольнике

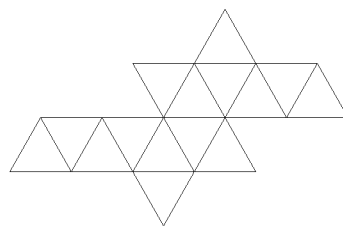


Рис. 6.11: Этот паркет не имеет минимальной реализации на правильном 17-угольнике

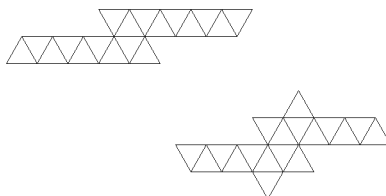


Рис. 6.12: Эти паркеты не имеют минимальной реализации на правильном 20-угольнике

Случай  $n = 17$  полностью разобран.

**Случай  $n = 20$**  Снова выпишем все имеющиеся у нас общие оценки. Длина жала, в силу следствия 4.7 главы 4, не меньше чем  $\lceil n/3 \rceil - 2 = 4$ . Далее, в силу следствия 4.23 главы 4 для угла  $\varphi = \pi$ , индексы концевых линейных участков  $E_1$  и  $E_2$  одинаковы, и длины  $s_i$  супербоковин равны  $\lceil nq/6 \rceil - 1 = 9$ .

Нас интересует только случай  $d(E_1) = d(E_2) = 1$ . В силу следствия 4.16 главы 4,  $b_i \geq 4$ , а  $c_i \geq 3$ . Так как длины супербоковин равны 9, и на каждом из ребер поворота сидит нарост, имеем:  $b_i = 4$ , а  $c_i = 3$ . Так как на ребрах поворота обоих концевых линейных участков наросты есть, на подчиненных боковинах концевых змей наростов нет. В силу совпадения индексов концевых линейных участков, и оценки на длину жала, имеется ровно две возможности, изображенных на рис. 6.12.

Отсутствие минимальной реализации на правильном 20-угольнике у найденных в этом случае двух паркетов проверяется непосредственно. Случай  $n = 20$  полностью разобран. Тем самым, для линейных паркетов, концевые змеи которых имеют противоположные направления, теорема доказана.

Пусть теперь направления концевых змей не противоположны. Очевидно, достаточно рассмотреть два случая: угол между направлениями концевых змей равен  $\pi/3$  или  $2\pi/3$ .

Пусть угол  $\varphi$  от направления концевой змеи из  $E_1$  до направления концевой змеи из  $E_2$  равен  $\pi/3$ . В силу следствия 4.23 главы 4 для угла  $\varphi = \pi/3$ , длина супербоковины  $s$  от  $E_1$  к  $E_2$  в этом случае не превосходит  $\lceil n/6 \rceil$ . С другой стороны, длины боковин концевых линейных участков  $E_i$ , в силу следствия 4.16 главы 4, не меньше чем  $\lceil n/3 \rceil - \lceil n/12 \rceil - 2$ . Так как сумма длин этих боковин не превосходит длины супербоковины  $s$ , имеем:

$$2\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n}{12} \right\rceil - 2\right) \leq \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil.$$

Однако, это неравенство при  $n \geq 12$  выполняется, лишь если  $n = 12, 13$  или  $14$ , причем в этих трех случаях оно является равенством.

Если  $n = 12$ , то в силу следствия 4.23 главы 4, так как  $12$  делится на  $6$ , длина супербоковины  $s$  равна  $\lfloor n/6 \rfloor - 1$ , а не  $\lfloor n/6 \rfloor$ . Поэтому наша оценка может быть улучшена так:

$$2\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 2\right) \leq \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - 1,$$

что при  $n = 12$  не верно.

Далее, из следствия 4.23 главы 4 вытекает, что при  $n = 13$  и  $14$  длина супербоковины  $s$  равна  $\lfloor n/6 \rfloor$  только если индекс конечного линейного участка  $E_1$  равен  $1$ , а индекс конечного линейного участка  $E_2$  равен  $2$ . В остальных случаях длина супербоковины  $s$  равна  $\lfloor n/6 \rfloor - 1$  и применимы рассуждения, сделанные для  $n = 12$ . Итак, пусть  $n = 13$  или  $14$ , а индексы участков  $E_1$  и  $E_2$  равны  $1$  и  $2$  соответственно. Тогда длина супербоковины  $s$  равна  $\lfloor n/6 \rfloor = 2$ , поэтому боковины участков  $E_i$ , принадлежащие  $s$ , являются подчиненными боковинами этих участков, и их длины равны  $1$ . Так как концевых наростов нет, а индексы концевых линейных участков определены, боковины поворота обоих концевых линейных участков имеют длину  $1$ , что невозможно, поскольку в силу следствия 4.16 главы 4 они не меньше  $2$ . Случай угла  $\varphi = \pi/3$  полностью разобран.

Пусть теперь  $\varphi = \pi/3$ . Предположим сначала, что супербоковина скелета паркета  $D$  от  $E_1$  к  $E_2$  состоит более чем из двух звеньев. Обозначим через  $C'$  ту часть супербоковины  $s$  паркета  $D$  от  $E_1$  к  $E_2$ , каждое ребро которой не принадлежит концевым линейным участкам. Пусть  $C'$  состоит не менее чем из трех ребер. В силу следствия 4.23 главы 4 для угла  $\varphi = 2\pi/3$ , длина супербоковины  $s$  не превосходит  $\lfloor n/3 \rfloor$ . С другой стороны, длины боковин концевых линейных участков  $E_i$ , в силу следствия 4.16 главы 4, не меньше чем  $\lfloor n/3 \rfloor - \lfloor n/12 \rfloor - 2$ . Так как сумма длин этих боковин и числа ребер, попавших в  $C'$ , не превосходит длины супербоковины  $s$ , имеем:

$$2\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 2\right) + 3 \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor.$$

Однако, при  $n \geq 12$  это неравенство не выполняется. Таким образом, нам осталось рассмотреть случаи, когда  $C'$  состоит из  $2$  или  $1$  ребра.

Пусть  $C'$  состоит из двух ребер. Тогда, как легко проверить, возможны лишь следующие три конфигурации, приведенные на рис. 6.13.

В случаях (a) и (b) одна из боковин концевых линейных участков  $E_i$ , принадлежащая  $s$ , скажем боковина участка  $E_1$ , является боковиной поворота, а другая — подчиненной боковиной. Кроме того, на ребре поворота участка  $E_1$  в этом случае нароста быть не может, поэтому наши оценки уточняются следующим образом: длина  $s$  равна  $b_1 + c_2 + 2$ , причем  $b_1 \geq \lfloor n/3 \rfloor - 1$ , а  $c_2 \geq \lfloor n/3 \rfloor - \lfloor n/12 \rfloor - 2$ , откуда

$$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 1 + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 2 + 2 \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor.$$

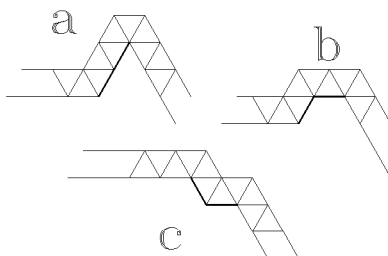


Рис. 6.13: Возможные типы излома линейного паркета,  $\varphi = 2\pi/3$ , число ребер в  $C'$  равно 2

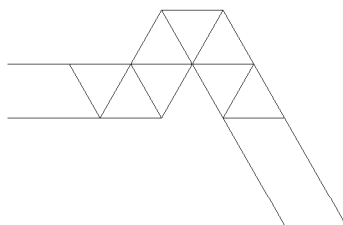


Рис. 6.14: Возможные типы излома линейного паркета,  $\varphi = 2\pi/3$ , число ребер в  $C'$  равно 1

Однако, при  $n \geq 12$  это неравенство не выполняется.

В случае (c) обе боковины участков  $E_i$ , принадлежащие  $s$ , не являются боковинами поворота, и, как легко видеть, наросты не могут располагаться одновременно на обоих ребрах поворота участков  $E_i$ . Поэтому

$$c_1 + c_2 \geq 2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(n+6)}{12} \right\rfloor - 3,$$

и, так как длина  $s$  равна  $c_1 + c_2 + 2$ , имеем:

$$2 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(n+6)}{12} \right\rfloor - 3 + 2 \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor.$$

Однако, при  $n \geq 12$  это неравенство не выполняется. Случай, когда множество  $C'$  состоит из 2 элементов полностью разобран.

Пусть теперь  $C'$  состоит из одного элемента. Тогда, как легко видеть, имеется ровно одна возможная конфигурация, изображенная на рис. 6.14.

Рассуждая также как и выше в случаях (a) и (b), получаем следующее неравенство:

$$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 1 + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{12} \right\rfloor - 2 + 1 \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor,$$

которое при  $n \geq 12$  так же не имеет места. Таким образом случай, когда супербоковина скелета паркета  $D$  от  $E_1$  к  $E_2$  состоит более чем из двух звеньев, полностью разобран.

Итак, пусть теперь супербоковина скелета паркета  $D$  от  $E_1$  к  $E_2$  состоит ровно из двух звеньев. В этом случае скелет паркета  $D$  состоит ровно из двух змей, которые пересекаются по единственному ребру, которое мы обозначим через  $a$ . Обозначим через  $\Delta_i^1, \Delta_i^2$  и  $\Delta_i^3$  — три последовательных ячейки концевой змеи участка  $E_i$ , такие что  $\Delta_i^1$  содержит ребро  $a$ . Пусть  $\Gamma$  — минимальная реализация паркета  $D$  на правильном  $n$ -угольнике. Проведем через ребра сети  $\Gamma$ , соответствующие отрезкам скелета паркета  $D$  из ячеек  $\Delta_i^2$ , прямые  $\ell_i$ . Очевидно, угол между прямыми  $\ell_i$  равен  $\pi/3$ . Обозначим через  $U$  тот из двух углов величины  $\pi/3$ , образованный прямыми  $\ell_i$ , который высекает из окружности  $S^1$  две дуги. Эти дуги мы обозначим через  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , предполагая, что дуга  $\delta_1$  меньше дуги  $\delta_2$ . Ясно, что величина  $|\delta_1|$  дуги  $\delta_1$  не меньше чем  $2\alpha$ , где  $\alpha = \pi/n$ .

Проведем через ребра сети  $\Gamma$ , соответствующие отрезкам скелета паркета  $D$  из ячеек  $\Delta_i^3$ , прямые  $\ell'_i$ . Угол между прямыми  $\ell'_i$  тоже равен  $\pi/3$ . Обозначим через  $U'$  тот из двух углов величины  $\pi/3$ , образованный прямыми  $\ell'_i$ , который высекает из окружности  $S^1$  две дуги. Обозначим эти дуги через  $\delta'_1$  и  $\delta'_2$ , где  $\delta'_1$  — меньшая из этих двух дуг. Ясно, что  $U \subset U'$ . Кроме того, если  $g$  — количество наростов, крепящихся к ячейкам  $\Delta_i^1$  и  $\Delta_i^2$ ,  $i = 1, 2$ , то внутри дуги  $\delta'_2$  лежит, как легко видеть, не более  $2 + g$  вершин  $n$ -угольника, где  $g \leq 4$ . Поэтому внутри дуги  $\delta_2$  также лежит не больше  $2 + g$  вершин  $n$ -угольника.

Так как к ячейкам  $\Delta_i^2$  одновременно не могут крепиться наросты, одна из прямых  $\ell_i$ , скажем  $\ell_1$ , проходит через вершину многоугольника, совпадающую с граничной точкой дуги  $\delta_1$ . Так как  $\ell_1$  параллельна прямой дожда концевой змеи участка  $E_1$ , то она не может пересекать окружность по двум вершинам  $n$ -угольника, в частности, соответствующая граничная точка дуги  $\delta_2$  не является вершиной  $n$ -угольника. Поэтому, если  $k$  — количество вершин  $n$ -угольника, попавших внутрь дуги  $\delta_2$ , то величина  $|\delta_2|$  дуги  $\delta_2$  строго меньше чем  $2\alpha(k + 1)$ . С другой стороны,  $|\delta_2| = 2\pi/3 + |\delta_1|$ , откуда

$$\frac{2\pi}{3} + 2\alpha \leq |\delta_2| < 2\alpha(k + 1).$$

Следовательно  $k \geq [n/3] + 1$ . Однако, как было отмечено выше,  $k \leq 2 + g$ . Таким образом, доказана следующая лемма.

**Лемма 6.1** *В сделанных обозначениях, имеет место неравенство*

$$\left[ \frac{n}{3} \right] \leq g + 1.$$

Пусть  $g \leq 2$ . Тогда из леммы 6.1 вытекает, что  $[n/3] \leq 3$ . Однако, при  $n \geq 12$  это неравенство не имеет места.

Рис. 6.15: Этот паркет не имеет минимальной реализации на правильном 13-угольнике

Пусть  $g = 3$ . Тогда неравенство из леммы 6.1 имеет вид  $[n/3] \leq 4$ . При  $n \geq 12$  это неравенство выполнено лишь для  $n = 12, 13$  и  $14$ . Однако наименьший паркет, обладающий всеми перечисленными свойствами, содержит 13 граничных ребер. Поэтому остается рассмотреть лишь случаи  $n = 13$  и  $14$ . При  $n = 13$  возможна единственная конфигурация, приведенная на рис. 6.15.

Отсутствие минимальной реализации на правильном 13-угольнике у этого паркета проверяется непосредственно.

При  $n = 14$  соответствующий паркет получается из паркета для  $n = 13$  добавлением одной ячейке или к концевым ребрам, или к боковине  $s$ . В каждом из этих случаев длина боковины  $s$  становится равной 4. Однако, из следствия 4.23 главы 4, это возможно лишь если индекс концевого линейного участка  $E_1$  равен 1, а индекс концевого линейного участка  $E_2$  равен 2. Последнее невозможно, так как у паркета, построенного для  $n = 13$ , индекс участка  $E_1$  равен 2, а индекс участка  $E_2$  равен 1.

Пусть, наконец,  $g = 4$ . Тогда неравенство из леммы 6.1 имеет вид  $[n/3] \leq 5$ . При  $n \geq 12$  это неравенство имеет место лишь при  $n = 12, \dots, 17$ . Однако наименьший паркет, обладающий всеми перечисленными свойствами, содержит 16 граничных ребер. Поэтому остается рассмотреть лишь случаи  $n = 16$  и  $17$ . При  $n = 16$  возможна единственная конфигурация, приведенная на рис. 6.16.

Отсутствие минимальной реализации на правильном 16-угольнике у этого паркета проверяется непосредственно.

При  $n = 17$  соответствующий паркет получается из паркета для  $n = 16$  добавлением одной ячейке или к концевым ребрам, или к боковине  $s$ . В каждом из этих случаев длина боковины  $s$  становится равной 5. Однако, из следствия 4.23 главы 4, это возможно лишь если индекс концевого линейного участка  $E_1$  равен 1, а индекс концевого линейного участка  $E_2$  равен 2. Последнее невозможно, так как у паркета, построенного для  $n = 16$ , индекс участка  $E_1$  равен 2, а индекс участка  $E_2$  равен 1.

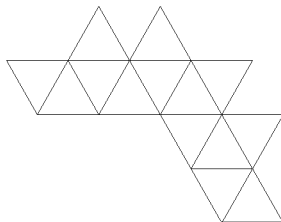


Рис. 6.16: Этот паркет не имеет минимальной реализации на правильном 16-угольнике

Таким образом, теорема полностью доказана.

## 2 Произвольные паркеты с правильной границей

В данном разделе мы докажем теорему 6.1 в общем случае.

Пусть  $D$  — паркет, имеющий минимальную реализацию  $\Gamma$  на правильном  $n$ -угольнике  $M$ ,  $n \geq 12$ , и  $\Delta$  — концевая ячейка из  $D$ . Предположим, что  $\Delta$ -конец  $E$  паркета  $D$  имеет излом. Обозначим через  $t$  и  $t'$  соответственно боковину поворота и подчиненную боковину  $\Delta$ -хвоста паркета  $D$ , а через  $t_z$  — боковину поворота концевой  $\Delta$ -змеи. Так как  $n \geq 12$ , то длина боковины  $t$  не меньше чем  $\lfloor n/3 \rfloor - 2 \geq 2$ , откуда, так как концевых наростов нет, вытекает, что и боковина  $t_z$  состоит не менее чем из двух ребер.

Пусть  $a_1$  — ребро из  $t_z$ , пересекающееся с ребром поворота концевого линейного участка  $E$ , и  $a_2$  — единственное смежное с  $a_1$  ребро из  $t_z$ . Для  $i = 1, 2$  определим функцию  $d_i$ , положив ее равной 1, если к ребру  $a_i$  крепится нарост, и равной 0 в противном случае. Кроме того, определим функцию  $\text{ind}_t$ , положив ее равной 1, если неконцевое граничное ребро ячейки  $\Delta$  лежит в  $t$ , и 0 в противном случае.

Для дальнейшего нам понадобится следующее предложение.

**Предложение 6.2** *Длина  $|t'|$  боковины  $t'$  может быть оценена снизу через длину  $|t|$  боковины  $t$  следующим образом:*

$$|t'| \geq |t| - \text{ind}_t - d_1 - d_2.$$

**Доказательство.** Обозначим через  $t'_z$  подчиненную боковину концевой  $\Delta$ -змеи, и ориентируем боковины  $t$ ,  $t'$ ,  $t_z$  и  $t'_z$  в сторону от их концевых вершин, принадлежащих концевому ребру ячейки  $\Delta$ . Пусть  $a'$  — последнее



ребро из  $t'_z$  в порядке, индуцированном введенной ориентацией. Обозначим через  $m_k$  вершину из  $M$ , инцидентную концевому ребру  $\Delta$ -конца  $E$ . Проведем через ребро  $e'$  сети  $\Gamma$ , соответствующее  $a'$ , прямую  $\ell'$ . Далее, проведем прямую  $\ell_1$ , параллельную  $\ell'$ , через ту из вершин многоугольника  $M$ , которая соответствует последнему ребру боковины  $t$  (если на ребре  $a_1$  нароста нет, то это ребро, очевидно, совпадает с  $a_1$ ). Наконец, если на ребре  $a_2$  есть нарост, то проведем прямую  $\ell_2$ , параллельную  $\ell'$ , через вершину из  $M$ , соответствующую первому граничному ребру этого нароста в смысле ориентации боковины  $t$ . Если же на  $a_2$  нароста нет, то прямую  $\ell_2$  проведем через вершину из  $M$ , соответствующую  $a_2$ . Ясно, что прямая  $\ell'$  лежит между  $\ell_1$  и  $\ell_2$ , и все эти прямые параллельны прямым дождя концевой  $\Delta$ -змеи.

Пусть  $\Pi_1$  — открытая полуплоскость, ограниченная  $\ell_1$  и содержащая  $m_k$ . Обозначим через  $\Psi$  открытую дугу  $S^1 \cap \Pi_1$  окружности  $S^1$ . Обозначим через  $\psi$  и  $\psi'$  связные компоненты множества  $\Psi \setminus \{m_k\}$ , причем будем предполагать, что точки из  $M$ , в которые приходят граничные ребра боковины поворота  $t$ , лежат на  $\psi$ , а точки из  $M$ , в которые приходят граничные ребра боковины  $t'$  — на  $\psi'$ .

Легко доказывается следующая лемма.

**Лемма 6.2** Пусть  $m$  и  $m'$  — количество точек из  $M$ , попавших на  $\psi$  и  $\psi'$  соответственно. Тогда

$$m' = m + 1 - \text{ind}_t.$$

Далее, пусть  $v'$  — точка пересечения прямой  $\ell'$  с дугой  $\psi'$ , а  $v_1$  — граничная точка дуги  $\psi'$ , принадлежащая прямой  $\ell_1$ . Обозначим через  $\delta_1$  полуоткрытую дугу  $[v', v_1)$  между точками  $v'$  и  $v_1$ , такую что  $\delta_1 \in \psi'$ , и пусть  $\beta$  — величина дуги  $\delta_1$ . Следующая лемма проверяется непосредственно.

**Лемма 6.3** Величина  $\beta$  дуги  $\delta_1$  оценивается сверху так:

$$\beta < 2\alpha(1 + d_1 + d_2),$$

где  $\alpha = \pi/n$ . В частности, на полуоткрытой дуге  $\delta_1$  лежит не более  $1 + d_1 + d_2$  вершин из  $M$ .

Далее, обозначим через  $\delta_2 \subset \psi'$  открытую дугу, ограниченную точками  $m_k$  и  $v'$ . Ясно, что  $|t'|$  равно количеству точек  $|\delta_2|$ , попавших на  $\delta_2$ , плюс одна точка:  $|t'| = |\delta_2| + 1$ . С другой стороны, количество  $m'$  точек из  $M$ , попавших на  $\psi'$ , равно количеству точек из  $M$ , попавших на  $\delta_2$ , плюс количество точек  $|\delta_1|$ , попавших на  $\delta_1$ , т.е.  $m' = |d\ell_1| + |\delta_2|$ . Далее, по определению дуги  $\psi$ , очевидно, что  $m = |t| - 1$ . Таким образом, в силу леммы 6.2, имеем:

$$m' = |\delta_1| + |\delta_2| = |\delta_1| + |t'| - 1 = m + 1 - \text{ind}_t = |t| - 1 + 1 - \text{ind}_t = |t| - \text{ind}_t,$$

откуда

$$|t'| = |t| - \text{ind}_t - |\delta_1| + 1.$$

В силу леммы 6.3, имеем:

$$|t'| \geq |t| - \text{ind}_t - (1 + d_1 + d_2) + 1 = |t| - \text{ind}_t - d_1 - d_2,$$

что и требовалось.

**Следствие 6.1** *В предположениях предложения 6.2, всегда имеет место неравенство  $|t'| \geq |t| - 3$ . Более того, если длина боковины поворота  $t$  меньше 5 и не меньше 3, то  $|t'| \geq |t| - 2$ , а если длина боковины поворота  $t$  меньше 3, то  $|t'| \geq |t| - 1$ .*

Далее, предположим, что паркет  $D$  из  $\mathcal{WP}_3^2$  не менее чем с тремя концевыми линейными участками имеет минимальную реализацию  $\Gamma$  на множестве вершин правильного  $n$ -угольника. Напомним, что паркеты не менее чем с тремя концевыми линейными участками называются нелинейными. Пусть в  $D$  содержится по крайней мере два концевых линейных участка, скажем,  $E_1$  и  $E_2$ , имеющих излом. Тогда, в силу следствия 4.16 главы 4, длина  $|t_i|$  боковины поворота  $t_i$  хвоста участка  $E_i$  не меньше чем  $\varphi_i(n) = \lfloor n/3 \rfloor - 1 - d(E_i)$ . Далее, определим функцию  $\psi_i(n)$ , положив

$$\psi_i(n) = \begin{cases} \varphi_i(n) - 3, & \text{если } \varphi_i(n) \geq 5; \\ \varphi_i(n) - 2, & \text{если } 5 > \varphi_i(n) \geq 3; \\ \varphi_i(n) - 1, & \text{если } 3 > \varphi_i(n). \end{cases}$$

В силу следствия 6.1, длина  $|t'_i|$  противоположной боковины  $t'_i$  хвоста участка  $E_i$  больше или равна  $\psi_i(n)$ . Поэтому, длина хвоста  $\tau_i(n)$  участка  $E_i$  не меньше чем  $\varphi_i(n) + \psi_i(n)$ . Таким образом, концевой линейный участок  $E_i$  затягивает не менее  $\tau_i(n) + 2 + d(E_i)$  вершин многоугольника. Третий концевой линейный участок, который существует по предположению, затягивает не менее трех вершин многоугольника. Таким образом, выполняется следующее неравенство:

$$\tau_1(n) + \tau_2(n) + 4 + d(E_1) + d(E_2) + 3 \leq n.$$

Если оба  $d(E_i)$  одновременно не равны 1, то при  $n \geq 12$  это неравенство не имеет места. Если же  $d(E_1) = d(E_2) = 1$ , то неравенство выполнено лишь при  $n = 17$  и  $23$ . Чтобы разобрать два последних случая, мы докажем следующую лемму.

**Лемма 6.4** *В сделанных выше предположениях, одно из  $d(E_i)$  равно нулю.*

**Доказательство.** В следующей главе мы определим направление концевого линейного участка произвольного односвязного паркета. Неформально

говоря, для этого достаточно ориентировать каждую боковину концевой линейного участка в сторону концевой ребра, и множество направлений звеньев так ориентированных боковин назвать *направлением* этого участка. Кроме того, в следующей главе будет доказано предложение 7.5, из которого немедленно вытекает, что направления всех концевых линейных участков паркетов из  $\mathcal{WP}_3$  различны. Легко видеть, что концевой линейный участок, имеющий излом и нарост на ребре поворота, имеет не менее трех направлений. Если оба концевых линейных участка  $E_1$  и  $E_2$  имеют наросты на их ребрах поворота, то оба эти концевых линейных участка в сумме имеют 6 направлений. Так как возможных направлений всего шесть, то паркет  $D$  не может содержать концевых линейных участков, отличных от  $E_i$ . Лемма доказана.

Таким образом, доказано следующее предложение.

**Предложение 6.3** *Если нелинейный паркет  $D$  имеет минимальную реализацию на множестве вершин правильного  $n$ -угольника,  $n \geq 12$ , то все его концевые линейные участки, за исключением быть может одного, являются змеями (возможно, с наростами).*

Пусть теперь лишь один концевой линейный участок  $E$  паркета  $D$  имеет излом, а все остальные концевые линейные участки — змеи. Предположим сначала, что один из соседних с  $E$  концевых линейных участков, скажем  $\bar{E}$ , составляет с концевой змеей участка  $E$  угол в  $\pi/3$ . Отметим, что в этом случае на общей боковине участков  $E$  и  $\bar{E}$  лежит подчиненная боковина участка  $E$ . Без ограничения общности будем предполагать, что угол от  $E$  к  $\bar{E}$  равен  $\pi/3$ .

Как и выше, длина  $|t|$  боковины поворота  $t$  участка  $E$  оценивается снизу функцией  $\varphi(n)$ , а длина  $|t'|$  подчиненной боковины — функцией  $\psi(n)$ . Если подчиненная боковина участка  $E$  содержит ребра, не входящие в хвост, то длина общей боковины участков  $E$  и  $\bar{E}$  не меньше чем  $\psi(n) + 1 + 1$ , где первая единица соответствует описанному только что дополнительным ребрам, а вторая — боковине участка  $\bar{E}$ . С другой стороны, в силу следствия 4.23 главы 4, длина общей боковины участков  $E$  и  $\bar{E}$  не больше чем  $[n/6]$ . Поэтому должно выполняться следующее неравенство:

$$\psi(n) + 2 \leq [n/6].$$

Однако, при  $n \geq 12$ , это неравенство не имеет места. Поэтому в сделанных предположениях подчиненная боковина участка  $E$  не содержит ребер, не входящих в хвост. Таким образом, мы находимся в ситуации, изображенной на рис. 6.17.

Чтобы получить более точную, чем в предыдущем случае оценку на длину  $|t'|$  противоположной боковины, определим функцию  $\psi(n, \text{ind}_t)$ , за-

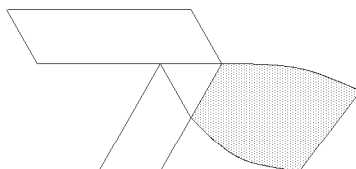


Рис. 6.17: Два концевых линейных участка под углом в  $\pi/3$

висящую не только от  $n$ , но и функции  $\text{ind}_t$  участка  $E$ , положив:

$$\psi(n, \text{ind}_t) = \begin{cases} \varphi(n) - 2 - \text{ind}_t, & \text{если } \varphi(n) \geq 5; \\ \varphi(n) - 1 - \text{ind}_t, & \text{если } 5 > \varphi(n) \geq 3; \\ \varphi(n) - \text{ind}_t, & \text{если } 3 > \varphi(n). \end{cases}$$

В силу предложения 6.2, имеет место неравенство  $|t'| \geq \psi(n, \text{ind}_t)$ . Далее, если индекс  $\text{ind}(\bar{E})$  концевой линейного участка  $\bar{E}$  равен 2, то, в рассматриваемом случае, длина боковины участка  $\bar{E}$ , лежащей в общей боковине участков  $E$  и  $\bar{E}$ , не меньше 2. Поэтому, длина общей боковины участков  $E$  и  $\bar{E}$  не меньше

$$\psi(n, \text{ind}_t) + \text{ind}(\bar{E}).$$

Вычислим теперь длину  $s(n, \text{ind}_t, \text{ind}(\bar{E}))$  общей боковины участков  $E$  и  $\bar{E}$  с помощью следствия 4.23 главы 4. Обозначим через  $R$  остаток от деления  $n$  на 6. Отметим, что  $\text{ind}(E) = 1 + \text{ind}_t$ , поэтому:

$$s(n, 0, \text{ind}(\bar{E})) = \begin{cases} [n/6] - 2 + \text{ind}(\bar{E}), & \text{если } R \leq 2; \\ [n/6], & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

и

$$s(n, 1, \text{ind}(\bar{E})) = \begin{cases} [n/6] - 1, & \text{если } R \leq 2; \\ [n/6] - 2 + \text{ind}(\bar{E}), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, должно быть выполнено следующее неравенство:

$$\psi(n, \text{ind}_t) + \text{ind}(\bar{E}) \leq s(n, \text{ind}_t, \text{ind}(\bar{E})).$$

Однако, при  $n \geq 12$ , это неравенство не выполняется для произвольного выбора значений  $\text{ind}_t$  и  $\text{ind}(\bar{E})$ . Итак, доказано следующее предложение.

**Предложение 6.4** Пусть нелинейный паркет  $D$  имеет минимальную реализацию на множестве вершин правильного  $n$ -угольника,  $n \geq 12$ , и некоторый его концевой линейный участок  $E$  имеет излом. Тогда все концевые линейные участки из  $D$ , отличные от  $E$ , — змеи, и угол между

концевой змеей участка  $E$  и любым другим концевым линейным участком из  $D$  не меньше чем  $2\pi/3$ .

Предположим теперь, что углы между имеющим излом концевым линейным участком  $E$  паркета  $D$  и любым другим концевым линейным участком из  $D$  больше или равны  $2\pi/3$ . Пусть в  $D$  имеется концевой линейный участок  $\bar{E}$ , такой что угол между  $\bar{E}$  и концевой змеей участка  $E$  равен  $2\pi/3$ , причем общая боковина участков  $E$  и  $\bar{E}$  содержит боковину поворота участка  $E$ . Ясно, что в этом случае на ребре поворота участка  $E$  нароста быть не может, поэтому длина боковины поворота участка  $E$  не меньше чем  $[n/3] - 1$ . Следовательно, общая боковина участков  $E$  и  $\bar{E}$  не меньше чем  $[n/3] - 1 + 1 + 1$ , где последняя единица соответствует боковине участка  $\bar{E}$  лежащей в общей боковине рассматриваемых концевых линейных участков, а предпоследняя единица — ребру поворота участка  $E$ . Однако, в силу следствия 4.23 главы 4, длина общей боковины участков  $E$  и  $\bar{E}$  не превосходит  $[n/3]$ . Из полученного противоречия вытекает следующий результат.

**Предложение 6.5** Пусть нелинейный паркет  $D$  имеет минимальную реализацию на множестве вершин правильного  $n$ -угольника,  $n \geq 12$ , и некоторый его концевой линейный участок  $E$  имеет излом. Тогда все концевые линейные участки из  $D$ , отличные от  $E$ , — змеи, угол между концевой змеей участка  $E$  и любым другим концевым линейным участком из  $D$  не меньше чем  $2\pi/3$ , и, более того, угол между участком  $E$  и соседним с  $E$  концевым линейным участком  $\bar{E}$ , таким что общая боковина участков  $E$  и  $\bar{E}$  содержит боковину поворота участка  $E$ , не меньше  $\pi$ .

Пусть теперь нелинейный паркет  $D$  имеет минимальную реализацию на множестве вершин правильного  $n$ -угольника,  $n \geq 12$ , и некоторый его концевой линейный участок  $E$  имеет излом. Из предложения 6.5 вытекает, что в этом случае паркет  $D$  имеет ровно три концевых линейных участка  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$ , причем два из этих участков, скажем  $E_2$  и  $E_3$ , являются змеями (поэтому излом имеет участок  $E_1$ ), а угол между направлением концевой змеи участка  $E_1$  и одним из оставшихся концевых линейных участков, скажем  $E_3$ , равен  $\pi$ . В этих предположениях угол между направлением концевой змеи участка  $E_1$  и участком  $E_2$  равен  $2\pi/3$ , и, более того, боковина поворота участка  $E_1$  содержится в общей боковине участков  $E_1$  и  $E_3$ . Без ограничения общности будем считать, что угол от концевой змеи из  $E_1$  к  $E_2$  равен  $+2\pi/3$ , и, поэтому, угол от  $E_2$  к  $E_3$  равен  $\pi/6$ , а от  $E_3$  к концевой змее из  $E_1$  — равен  $\pi$ .

Обозначим через  $B_{ij}$  общую боковину участков  $E_i$  и  $E_j$ , и  $b_{ij}$  — длина боковины  $B_{ij}$ . Далее, обозначим через  $Z$  концевую змею участка  $E_1$ , и положим  $d_i$ ,  $i = 1, 2$ , равным 1, если на  $i$ -ом ребре ориентированной от ребра поворота боковины поворота змеи  $Z$  расположен нарост, и равным 0 в противном случае. Далее, как и выше, положим  $d(E_1)$  равным нулю,

если на ребре поворота участка  $E_1$  нароста нет, и равным 1 в противном случае.

Пусть  $T$  — хвост участка  $E_1$ . Обозначим через  $t$  и  $t'$  соответственно, длины боковин хвоста  $T$ , лежащих в  $B_{31}$  и  $B_{12}$ . Далее, обозначим через  $P$  часть участка  $E_1$ , полученную из  $E_1$  выбрасыванием хвоста  $T$ . Пусть  $p$  и  $p'$  — длины боковин подпаркета  $P$ , соответствующих  $B_{31}$  и  $B_{12}$ . Наконец, пусть  $x$  и  $x'$  — длины боковин участка  $E_2$ , лежащих в  $B_{23}$  и  $B_{12}$ .

**Лемма 6.5** *В сделанных обозначениях,*

$$p' + x' \leq 1 + d(E_1) + d_1 + d_2 \leq 4.$$

**Доказательство.** По определению,  $t' + p' + x' = b_{12}$ . В силу предложения 6.2,  $t' \geq t - \text{ind}_t - d_1 - d_2$ , где  $\text{ind}_t = \text{ind}(E_1) - 1$ . Далее, в силу следствия 4.16 главы 4,  $t \geq [n/3] - 1 - d(E_1)$ . Итак,

$$p' + x' = b_{12} - t' \leq b_{12} - [n/3] + 1 + d(E_1) + \text{ind}_t + d_1 + d_2.$$

С другой стороны, в силу следствия 4.23 главы 4,  $b_{12} \leq [n/3] - \text{ind}_t$ . Действительно, если  $\text{ind}_t = 1$ , т.е.  $\text{ind}(E_1) = 2$ , то  $b_{12} = [n/3] - 1$  при любом индексе концевой линейного участка  $E_2$ . Если же  $\text{ind}_t = 0$ , то  $b_{12} \leq [n/3]$ . Окончательно,

$$p' + x' \leq 1 + d(E_1) + d_1 + d_2 \leq 4.$$

Лемма доказана.

**Следствие 6.2** *В сделанных предположениях,  $p' \leq d(E_1) + d_1 + d_2 \leq 3$ .*

Обозначим через  $S_P$  пересечение паркета  $P$  со скелетом  $S$  паркета  $D$ , и пусть  $p'_S$  — длина боковины подпаркета  $S_P$ , соответствующей  $B_{12}$ . В силу следствия 6.2,  $p'_S \leq d(E_1) + d_1 + d_2 \leq 3$ .

Пусть  $p'_S = 3$ . В силу следствия 6.2, на ребре поворота участка  $E_1$  в этом случае обязан располагаться нарост. Поэтому, на конце  $E_3$  наростов нет. Более того, на боковине подпаркета  $S_P \cup E_2$ , соответствующей  $B_{12}$ , также нет наростов. В частности, наростов нет на участке  $E_2$ . Таким образом, мы находимся в условиях следующего предложения.

**Предложение 6.6** *Пусть паркет  $D$  имеет два концевых линейных участка-змеи  $E$  и  $E'$ , угол между направлениями которых равен  $\pi/3$ . Предположим, что единственная ячейка  $\Delta'$  паркета  $D$ , не лежащая ни в  $E$ , ни в  $E'$ , и смежная с той его внутренней ячейкой  $\Delta$ , к которой крепятся эти концевые линейные участки, не является внутренней ячейкой паркета  $D$ . Кроме того, предположим, что единственное граничное ребро ячейки  $\Delta'$  параллельно направлению участка  $E$ , и участок  $E$  не содержит наростов (на участке  $E'$  наросты могут быть). Тогда  $D$  не имеет минимальной реализации на правильном многоугольнике.*

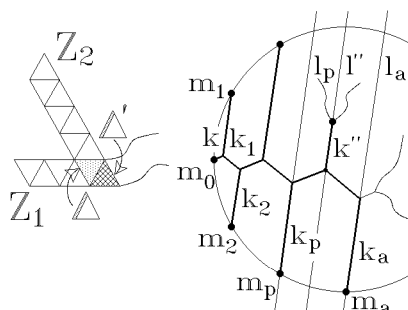


Рис. 6.18: Доказательство предложения 6.6

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. паркет  $D$  имеет минимальную реализацию  $\Gamma$  на множестве  $M = \{m_i\}$  вершин правильного многоугольника.

Так как ячейка  $\Delta'$  — не внутренняя, то существует отросток  $k_a$  дерева  $\Gamma$ , выходящий из точки Штейнера, которая соответствует ячейке  $\Delta'$ . Ясно, что  $k_a$  параллелен отросткам конечного линейного участка  $E$ . Пусть  $m_a$  — вершина из  $M$ , инцидентная  $k_a$ , см. рис. 6.18.

Обозначим через  $k$  конечное ребро из  $\Gamma$ , а через  $m_0$  — конечную вершину из  $M$ , соответствующие участку  $E$ . Пусть  $k_1, \dots, k_p$  — последовательные отростки участка  $E$ , нумерация которых порождается ориентацией участка  $E$  от конечной ячейки. Пусть  $m_i$  — вершина из  $M$ , в которую приходит отросток  $k_i$ . Ясно, что  $m_p$  и  $m_a$  — соседние вершины из  $M$ .

Проведем через  $k_a$  прямую  $l_a$ . Эта прямая, очевидно, параллельна отросткам участка  $E$ . Обозначим через  $\Pi$  открытую полуплоскость, ограниченную прямой  $l_a$  и содержащую вершину  $m_0$ . Легко видеть, что в полуплоскости  $\Pi$  содержится самое большое одна вершина из  $M$ , не инцидентная граничным ребрам змеи  $E$ .

Обозначим через  $k''$  единственное ребро участка  $E'$ , принадлежащее внутренней ячейке  $\Delta$ , и через  $l''$  — прямую, проходящую через  $k''$ . Легко видеть, что  $k''$  и, значит,  $l''$ , параллельны отросткам участка  $E$ . Кроме того, если  $l_p$  — прямая, проходящая через  $k_p$ , то прямая  $l''$  содержится в полосе между прямыми  $l_p$  и  $l_a$ .

Далее, пусть  $\Pi''$  — открытая полуплоскость, ограниченная прямой  $l''$ , такая что конечное ребро участка  $E'$  содержится в  $\Pi''$ . Очевидно, что  $\Pi'' \subset \Pi$ . Легко видеть, что в полуплоскости  $\Pi''$  лежит не менее 2 точек из  $M$ , инцидентных граничным ребрам участка  $E'$ . Но граничные ребра участков  $E$  и  $E'$  инцидентны различным вершинам из множества  $M$ . Это противоречие и заканчивает доказательство.

Итак, если  $p'_S = 3$ , то паркет  $D$  не может иметь минимальной реализации на множестве вершин правильного многоугольника.

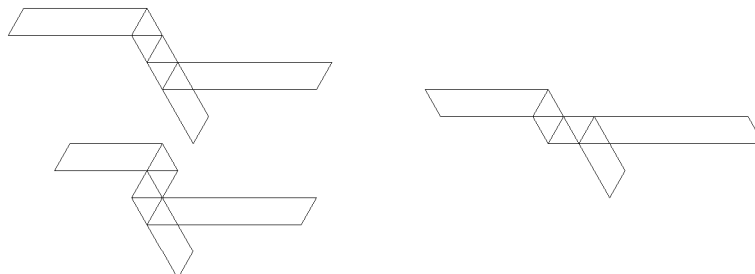


Рис. 6.19: Три возможных скелета  $S$

Пусть теперь  $p'_S = 2$ . В этом случае скелет  $S$  паркета  $D$  может быть устроен так, как в одном из трех случаев, показанных на рис. 6.19.

Рассмотрим первые два случая, изображенные на рис. 6.19 слева. Обозначим через  $\Delta'$  единственную ячейку паркета  $D$ , не лежащую ни в  $E_2$ , ни в  $E_3$ , и смежную с той внутренней ячейкой паркета  $D$ , к которой крепятся эти концевые линейные участки. Напомним, что  $p'_S = 2$ , поэтому, в силу леммы 6.5, боковина участка  $E_2$ , соответствующая боковине  $B_{12}$ , не больше 2. Отсюда вытекает, что на участке  $E_2$  наростов нет. Если к ячейке  $\Delta'$  нарост не крепится, то мы снова оказываемся в условиях предложения 6.6 и заключаем, что паркет  $D$  не имеет минимальной реализации на правильном многоугольнике.

Пусть теперь к ячейке  $\Delta'$  крепится нарост. Тогда, в силу леммы 6.5  $d(E_1) = d_1 = d_2 = 1$ , участок  $E_2$  не содержит наростов и имеет длину 2. Обобщим на этот случай предложение 6.6.

**Предложение 6.7** Пусть паркет  $D$  имеет два концевых линейных участка-змеи  $E$  и  $E'$ , угол между направлениями которых равен  $\pi/3$ . Предположим, что единственная ячейка  $\Delta'$  паркета  $D$ , не лежащая ни в  $E$ , ни в  $E'$ , и смежная с той его внутренней ячейкой  $\Delta$ , к которой крепятся эти концевые линейные участки, является внутренней ячейкой паркета  $D$ , причем к ней крепится нарост. Кроме того, предположим, что единственное ребро ячейки  $\Delta'$ , пересекающееся с этим наростом, параллельно направлению концевого линейного участка  $E$ , и концевой линейный участок  $E$  не содержит наростов (на концевом линейном участке  $E'$  наросты могут быть). Тогда, если  $D$  имеет минимальную реализацию на правильном многоугольнике, то длина концевого линейного участка  $E'$  не больше 3.

**Доказательство.** Пусть паркет  $D$  имеет минимальную реализацию  $\Gamma$  на множестве  $M = \{m_i\}$  вершин правильного многоугольника.

Обозначим через  $\Delta'_g$  нарост, крепящийся к ячейке  $\Delta'$ , и пусть  $k_a$  — ребро дерева  $\Gamma$ , соединяющее точки Штейнера, соответствующие ячейкам



$\Delta'$  и  $\Delta'_g$ . Ясно, что  $k_a$  параллелен отросткам концевому линейного участка  $E$ . Пусть  $m_a$  и  $m_b$  — соседние вершины из  $M$ , инцидентные граничным ребрам нароста  $\Delta'_g$ .

Обозначим через  $k$  концевое ребро из  $\Gamma$ , а через  $m_0$  — концевую вершину из  $M$ , соответствующие концевому линейному участку  $E$ . Пусть  $k_1, \dots, k_p$  — последовательные отростки концевому линейному участку  $E$ , нумерация которых порождается ориентацией концевому линейному участку  $E$  от концевой ячейки. Пусть  $m_i$  — вершина из  $M$ , в которую приходит отросток  $k_i$ . Ясно, что  $m_p$  и одна из вершин  $m_a$  и  $m_b$ , скажем  $m_a$ , — соседние вершины из  $M$ .

Проведем через  $m_a$  и  $m_b$  прямые  $l_a$  и  $l_b$ , параллельные отросткам концевому линейному участку-змеи  $E$ . Обозначим через  $\Pi_a$  и  $\Pi_b$  открытые полуплоскости, ограниченные соответственно прямыми  $l_a$  и  $l_b$  и содержащие вершину  $m_0$ . Легко видеть, что в полуплоскости  $\Pi_a$  содержится самое большое одна вершина из  $M$ , не инцидентная граничным ребрам змеи  $E$ . Так как параллельные прямые  $l_a$  и  $l_b$  проходят через соседние вершины многоугольника  $M$ , то в полуплоскости  $\Pi_b$  содержится самое большое две вершины из  $M$ , не инцидентные граничным ребрам змеи  $E$ .

Обозначим через  $k''$  единственное ребро концевому линейному участку  $E'$ , принадлежащее внутренней ячейке  $\Delta$ , и через  $l''$  — прямую, проходящую через  $k''$ . Легко видеть, что  $k''$  и, значит,  $l''$ , параллельны отросткам концевому линейному участку  $E$ . Кроме того, если  $l_p$  — прямая, проходящая через  $k_p$ , то прямая  $l''$  содержится в полосе между прямыми  $l_p$  и  $l_b$ .

Далее, пусть  $\Pi''$  — открытая полуплоскость, ограниченная прямой  $l''$ , такая что концевое ребро концевому линейному участку  $E'$  содержится в  $\Pi''$ . Очевидно, что  $\Pi'' \subset \Pi_b$ . Обозначим через  $z$  длину концевому линейному участку  $E'$ . Легко видеть, что в полуплоскости  $\Pi''$  лежит не менее  $[z/2] + 1$  точек из  $M$ , инцидентных граничным ребрам концевому линейному участку  $E'$  (а именно, все  $[z/2]$  точек боковины концевому линейному участку  $E'$ , соответствующей общей боковине концевых линейных участков  $E$  и  $E'$ , и одна концевая вершина концевому линейному участку  $E'$ ). Поэтому,  $[z/2] + 1 \leq 2$ , откуда  $z \leq 3$ . Предложение доказано.

Рассмотрим боковину  $B_{23}$  паркета  $D$ . Так как длина концевому линейному участку  $E_2$  равна 2, а, в силу предложения 6.7, длина боковины концевому линейному участку  $E_3$ , соответствующей  $B_{23}$ , не больше 1, то длина боковины  $B_{23}$  не больше 2. С другой стороны, в силу следствия 4.23 главы 4, длина боковины  $B_{23}$  не меньше чем  $[n/6] - 1$ . Отсюда  $[n/6] \leq 3$ , другими словами,  $n \leq 23$ . Таким образом, паркет  $D$  не имеет минимальной реализации на правильном  $n$ -угольнике при  $n \geq 24$ .

Пусть  $n \leq 23$ . В силу следствия 4.16 главы 4 длина боковины хвоста концевому линейному участку  $E_1$ , соответствующей  $B_{12}$ , не меньше чем  $[n/3] - [n/12] - 2$ , поэтому длина боковины  $B_{12}$  не меньше чем  $[n/3] - [n/12] +$

2. С другой стороны, в силу следствия 4.23 главы 4, длина боковины  $B_{12}$  не больше чем  $\lceil n/3 \rceil$ , откуда  $\lceil n/12 \rceil \geq 2$ , и, значит,  $n \geq 24$ . Таким образом, паркеты двух рассматриваемых типов не имеют минимальной реализации на правильном многоугольнике.

Рассмотрим теперь паркет  $D$ , скелет которого изображен на рис 6.19 справа. Если  $d(E_1) = 1$ , т.е. на ребре поворота участка  $E_1$  расположен нарост, то на участке  $E_3$  и на единственной ячейке участка  $E_1$ , примыкающей к узлу ветвления, наростов нет. Поэтому мы находимся в условиях предложения 6.6, где  $E = E_3$ , и  $E' = E_2$ , откуда получаем, что паркет  $D$  не имеет минимальной реализации на правильном многоугольнике.

Пусть теперь  $d(E_1) = 0$ . Нам понадобится следующее обобщение предложения 6.7.

**Предложение 6.8** Пусть паркет  $D$  имеет два концевых линейных участка-змеи  $E$  и  $E'$ , угол между направлениями которых равен  $\pi/3$ . Пусть на участке  $E$  наростов нет. Обозначим через  $B_S$  ту боковину скелета  $S$  паркета  $D$ , которая содержит боковину участка  $E$  и не является общей боковиной участков  $E$  и  $E'$ , а через  $B$  — соответствующую боковину паркета  $D$ . Предположим, что  $B_S$  содержит ребро  $b$ , параллельное направлению участка  $E$  и не лежащее в боковине этого участка. Пусть  $\Delta$  — внутренняя ячейка из  $D$ , к которой крепятся участки  $E$  и  $E'$ . Обозначим через  $A_1$  вершину ячейки  $\Delta$ , лежащую на  $B$ , а через  $A_2$  — вершину ребра  $b$ , дальнюю от  $A_1$  вдоль  $B_S$ . Пусть  $x$  — количество ребер боковины  $B$  между  $A_1$  и  $A_2$ . Тогда если  $D$  имеет минимальную реализацию на правильном многоугольнике, то длина  $z$  концевой змеи участка  $E'$  не больше чем  $2x - 1$ .

**Доказательство.** Пусть паркет  $D$  имеет минимальную реализацию  $\Gamma$  на множестве  $M = \{m_i\}$  вершин правильного многоугольника.

Обозначим через  $k_a$  ребро дерева  $\Gamma$ , соответствующее  $b$ . В силу сделанных предположений,  $k_a$  параллельно отросткам участка  $E$ . Пусть  $B'$  — часть боковины  $B$  между точками  $A_1$  и  $A_2$ , и  $m_a$  — вершина из  $M$ , соответствующая ребру из  $B'$ , содержащему  $A_2$ .

Обозначим через  $k$  концевое ребро из  $\Gamma$ , а через  $m_0$  — концевую вершину из  $M$ , соответствующие участку  $E$ . Пусть  $k_1, \dots, k_p$  — последовательные отростки участка  $E$ , нумерация которых порождается ориентацией участка  $E$  от концевой ячейки. Пусть  $m_i$  — вершина из  $M$ , в которую приходит отросток  $k_i$ . Ясно, что между  $m_p$  и  $m_a$  лежит ровно  $x - 1$  вершин из  $M$ , соответствующих ребрам боковины  $B$ .

Проведем через  $m_a$  и  $m_p$  прямые  $l_a$  и  $l_p$ , параллельные отросткам участка  $E$ . Обозначим через  $\Pi_a$  и  $\Pi_p$  открытые полуплоскости, ограниченные соответственно прямыми  $l_a$  и  $l_p$  и содержащие вершину  $m_0$ . Легко видеть, что в полуплоскости  $\Pi_p$  не содержится вершин из  $M$ , не инцидентных граничным ребрам змеи  $E$ . Так как между параллельными прямыми  $l_a$  и  $l_p$

лежит ровно  $x - 1$  вершин из многоугольника  $M$ , то в полуплоскости  $\Pi_a$  содержится самое большое  $x$  вершин из  $M$ , не инцидентных граничным ребрам змеи  $E$ .

Обозначим через  $k''$  единственное ребро участка  $E'$ , принадлежащее внутренней ячейке  $\Delta$ , и через  $l''$  — прямую, проходящую через  $k''$ . Легко видеть, что  $k''$  и, значит,  $l''$ , параллельны отрезкам участка  $E$ . Кроме того, прямая  $l''$  содержится в полосе между прямыми  $l_p$  и  $l_a$ .

Далее, пусть  $\Pi''$  — открытая полуплоскость, ограниченная прямой  $l''$ , такая что концевое ребро участка  $E'$  содержится в  $\Pi''$ . Очевидно, что  $\Pi'' \subset \Pi_a$ . Легко видеть, что в полуплоскости  $\Pi''$  лежит не менее  $[z/2] + 1$  точек из  $M$ , инцидентных граничным ребрам участка  $E'$  (а именно, все  $[z/2]$  точек боковины участка  $E'$ , соответствующей общей боковине участков  $E$  и  $E'$ , и одна концевая вершина участка  $E'$ ). Поэтому,  $[z/2] + 1 \leq x$ , откуда  $z \leq 2x - 1$ . Предложение доказано.

Из предложения 6.8 вытекает, что в рассматриваемом случае длина концевого линейного участка  $E_3$  не превосходит  $2p' - 1$ . Так как, в силу следствия 6.2,  $p' = 2$ , то длина участка  $E_3$  не больше 3. В силу леммы 6.5, длина концевого линейного участка  $E_2$  равна 2, поэтому длина боковины  $B_{23}$  равна 2. С другой стороны, в силу следствия 4.23 главы 4, длина боковины  $B_{23}$  лежит в пределах от  $[n/6] - 1$  до  $[n/6]$ , поэтому  $12 \leq n \leq 23$ . Далее, так как индекс концевого линейного участка  $E_2$  равен 1, то, в силу следствия 4.23 главы 4, длина боковины  $B_{12}$  равна  $[n/3] - 1$ . С другой стороны, в силу следствия 4.16 главы 4, длина боковины хвоста участка  $E_1$ , соответствующей  $B_{12}$ , не меньше чем  $[n/3] - [(n+6)/12] - 1$ , откуда длина боковины  $B_{12}$  не меньше чем  $[n/3] - [(n+6)/12] + 2$ . Поэтому имеет место неравенство  $[(n+6)/12] \geq 3$ , откуда  $n \geq 30$ . Таким образом рассматриваемый паркет не имеет минимальной реализации на правильном многоугольнике. Случай  $p'_S = 2$  полностью разобран.

Пусть, наконец,  $p'_S = 1$ . Обозначим через  $\Delta'$  ячейку из участка  $E_1$ , смежную с узлом ветвления. Пусть сначала хотя бы одно из чисел  $d(E_1)$ ,  $d_1$  и  $d_2$  равно нулю. Тогда, в силу леммы 6.5, длина боковины участка  $E_2$ , соответствующей  $B_{12}$ , не больше 2, поэтому на участке  $E_2$  наростов нет. Если к ячейке  $\Delta'$  нарост не крепится, то, по предложению 6.6, паркет  $D$  не имеет минимальной реализации на правильном многоугольнике. Пусть теперь к ячейке  $\Delta'$  крепится нарост. Тогда, в силу леммы 6.5, длина участка  $E_2$  равна 2, а в силу предложения 6.7, длина участка  $E_3$  не превосходит 3, и, в частности, длина боковины  $B_{23}$  равна 2. Отсюда, как и выше, вытекает, что  $n \leq 23$ . С другой стороны, в силу следствия 4.16 главы 4, длина боковины участка  $E_1$ , соответствующей боковине  $B_{12}$ , не меньше чем  $[n/3] - [(n+6+6d(E_1))/12] - 1$ , откуда длина боковины  $B_{12}$  не меньше чем  $[n/3] - [(n+6+6d(E_1))/12] + 2$ . Так как индекс концевого линейного участка  $E_2$  равен 1, осталось воспользоваться следствием 4.23 главы 4, и заключить, что длина боковины  $B_{12}$  равна  $[n/3] - 1$ . Поэтому

$n + 6 + 6d(E_1) \geq 36$ , откуда  $n \geq 24$ , и, значит, паркет  $D$  не имеет минимальной реализации на правильном многоугольнике.

Пусть теперь  $d(E_1) = d_1 = d_2 = 1$ . Предположим сначала, к ячейке  $\Delta'$  крепится нарост. Тогда, в силу леммы 6.5, длина  $x'$  боковины участка  $E_2$ , соответствующей  $B_{12}$ , не превосходит 2, поэтому на участке  $E_2$  наростов нет. Кроме того, в силу предложения 6.7, длина участка  $E_3$  не превосходит 3. Поэтому длина боковины  $B_{23}$  равна  $x' + 2 - \text{ind}(E_2)$ . С другой стороны, в силу следствия 4.23 главы 4, длина боковины  $B_{23}$  больше или равна  $[n/6] - 1$ , откуда  $[n/6] \leq x' + 3 - \text{ind}(E_2)$ .

Без ограничения общности можно предполагать, что тип излома конечного линейного участка  $E_1$  равен или 1, или 4. Пусть тип излома участка  $E_1$  равен 1. Тогда, в силу следствия 4.14 главы 4, длина боковины хвоста участка  $E_1$ , соответствующей  $B_{12}$ , не меньше чем  $[n/3] - [(n+9)/12] - 1$ , откуда длина боковины  $B_{12}$  не меньше чем  $[n/3] - [(n+9)/12] + 1 + x'$ . С другой стороны, так как  $\text{ind}(E_1) = 1$ , в силу следствия 4.23 главы 4, длина боковины  $B_{12}$  равна  $[n/3] + \text{ind}(E_2) - 2$ . Поэтому

$$[n/3] + \text{ind}(E_2) - 2 \geq [n/3] - [(n+9)/12] + 1 + x',$$

т.е.  $[(n+9)/12] \geq x' + 3 - \text{ind}(E_2)$ . Если  $x' = 1$ , то, очевидно,  $\text{ind}(E_2) = 1$ , поэтому  $[(n+9)/12] \geq 3$ , откуда  $n \geq 27$ . С другой стороны,  $[n/6] \leq x' + 3 - \text{ind}(E_2) = 3$ , откуда  $n \leq 23$ , противоречие. Пусть теперь  $x' = 2$ . Если  $\text{ind}(E_2) = 1$ , то  $[(n+9)/12] \geq 4$ , откуда  $n \geq 39$ . С другой стороны,  $[n/6] \leq x' + 3 - \text{ind}(E_2) = 4$ , откуда  $n < 30$ , противоречие. Если же  $\text{ind}(E_2) = 2$ , то  $[(n+9)/12] \geq 3$ , откуда  $n \geq 27$ . С другой стороны,  $[n/6] \leq x' + 3 - \text{ind}(E_2) = 3$ , откуда  $n < 24$ , противоречие.

Пусть теперь тип излома участка  $E_1$  равен 4. Тогда, в силу следствия 4.14 главы 4, длина боковины хвоста участка  $E_1$ , соответствующей  $B_{12}$ , не меньше чем  $[n/3] - [n/12] - 2$ , откуда длина боковины  $B_{12}$  не меньше чем  $[n/3] - [n/12] + x'$ . С другой стороны, так как  $\text{ind}(E_1) = 2$ , в силу следствия 4.23 главы 4, длина боковины  $B_{12}$  равна  $[n/3] - 1$ . Поэтому

$$[n/3] - 1 \geq [n/3] - [n/12] + x',$$

т.е.  $[n/12] \geq x' + 1$ . Если  $x' = 1$ , то  $[n/12] \geq 2$ , откуда  $n \geq 24$ . С другой стороны,  $[n/6] \leq x' + 3 - \text{ind}(E_2) \leq 3$ , откуда  $n \leq 23$ , противоречие. Пусть теперь  $x' = 2$ . Тогда  $[n/12] \geq 3$ , откуда  $n \geq 36$ . С другой стороны,  $[n/6] \leq x' + 3 - \text{ind}(E_2) \leq 4$ , откуда  $n < 30$ , противоречие. Таким образом, если к ячейке  $\Delta'$  крепится нарост, то паркет  $D$  не имеет минимальной реализации на правильном многоугольнике.

Пусть теперь к ячейке  $\Delta'$  нарост не крепится. Если на участке  $E_2$  наростов нет, то, в силу предложения 6.6, паркет  $D$  не имеет минимальной реализации на правильном многоугольнике. Пусть к участку  $E_2$  крепятся наросты. Так как, в силу леммы 6.5, длина боковины участка  $E_2$ , соответствующей  $B_{12}$ , не больше 3, то к  $E_2$  крепится ровно один нарост, и длина

этой боковины равна 3. Нам понадобится следующее обобщение предложения 6.6.

**Предложение 6.9** Пусть паркет  $D$  имеет два концевых линейных участка-змеи  $E$  и  $E'$ , угол между направлениями которых равен  $\pi/3$ . Предположим, что единственная ячейка  $\Delta'$  паркета  $D$ , не лежащая ни в  $E$ , ни в  $E'$ , и смежная с той его внутренней ячейкой  $\Delta$ , к которой крепятся эти концевые линейные участки, не является внутренней ячейкой паркета  $D$ . Кроме того, предположим, что единственное граничное ребро ячейки  $\Delta'$  параллельно направлению концевого линейного участка  $E$ . Пусть  $g$  — количество наростов на участке  $E$ . Тогда, если паркет  $D$  имеет минимальную реализацию на правильном многоугольнике, то длина концевого линейного участка  $E'$  не превосходит  $2g + 1$ .

**Доказательство.** Пусть паркет  $D$  имеет минимальную реализацию  $\Gamma$  на множестве  $M = \{m_i\}$  вершин правильного многоугольника.

Обозначим через  $k_a$  ребро дерева  $\Gamma$ , соответствующее граничному ребру ячейки  $\Delta'$ . В силу сделанных предположений,  $k_a$  параллельно отрезкам концевого линейного участка  $E$ . Обозначим через  $k$  концевое ребро из  $\Gamma$ , а через  $m_0$  — концевую вершину из  $M$ , соответствующие участку  $E$ . Далее, обозначим через  $B$  боковину участка  $E$ , не пересекающуюся с общей боковиной участков  $E$  и  $E'$ , и пусть  $b$  — длина боковины  $B$ .

Проведем через  $k_a$  прямую  $l_a$ , параллельную отрезкам участка  $E$ . Обозначим через  $\Pi_a$  открытую полуплоскость, ограниченную прямой  $l_a$  и содержащую вершину  $m_0$ . Легко видеть, что в полуплоскости  $\Pi_a$  содержится не более чем  $1 + g$  вершин из  $M$ , не инцидентных граничным ребрам змеи  $E$ .

Обозначим через  $k''$  единственное ребро участка  $E'$ , принадлежащее внутренней ячейке  $\Delta$ , и через  $l''$  — прямую, проходящую через  $k''$ . Легко видеть, что  $k''$  и, значит,  $l''$ , параллельны отрезкам участка  $E$ . Кроме того, прямая  $l''$  содержится в полуплоскости  $\Pi_a$ .

Далее, пусть  $\Pi''$  — открытая полуплоскость, ограниченная прямой  $l''$ , такая что концевое ребро концевого линейного участка  $E'$  содержится в  $\Pi''$ . Очевидно, что  $\Pi'' \subset \Pi_a$ . Легко видеть, что в полуплоскости  $\Pi''$  лежит не менее  $[z/2] + 1$  точек из  $M$ , инцидентных граничным ребрам участка  $E'$  (а именно, все  $[z/2]$  точек боковины участка  $E'$ , соответствующей общей боковине концевых линейных участков  $E$  и  $E'$ , и одна концевая вершина участка  $E'$ ). Поэтому,  $[z/2] + 1 \leq g + 1$ , откуда  $z \leq 2g + 1$ . Предложение доказано.

В силу предложения 6.9, длина участка  $E_3$  не превосходит 3. Поэтому длина боковины  $B_{23}$  равна  $4 - \text{ind}(E_2)$ . С другой стороны, в силу следствия 4.23 главы 4, длина боковины  $B_{23}$  больше или равна  $[n/6] - 1$ , откуда  $[n/6] \leq 5 - \text{ind}(E_2)$ .

Как и выше, без ограничения общности можно предполагать, что тип излома концевой линейного участка  $E_1$  равен или 1, или 4. Пусть тип излома участка  $E_1$  равен 1. Тогда, в силу следствия 4.14 главы 4, длина боковины хвоста участка  $E_1$ , соответствующей  $B_{12}$ , не меньше чем  $[n/3] - [(n+9)/12] - 1$ , откуда длина боковины  $B_{12}$  не меньше чем  $[n/3] - [(n+9)/12] + 3$ . С другой стороны, так как  $\text{ind}(E_1) = 1$ , в силу следствия 4.23 главы 4, длина боковины  $B_{12}$  равна  $[n/3] + \text{ind}(E_2) - 2$ . Поэтому

$$[n/3] + \text{ind}(E_2) - 2 \geq [n/3] - [(n+9)/12] + 3,$$

т.е.  $[(n+9)/12] \geq 5 - \text{ind}(E_2)$ . Если  $\text{ind}(E_2) = 1$ , то  $[(n+9)/12] \geq 4$ , откуда  $n \geq 39$ . С другой стороны,  $[n/6] \leq 5 - \text{ind}(E_2) = 4$ , откуда  $n < 30$ , противоречие. Если же  $\text{ind}(E_2) = 2$ , то  $[(n+9)/12] \geq 3$ , откуда  $n \geq 27$ . С другой стороны,  $[n/6] \leq 5 - \text{ind}(E_2) = 3$ , откуда  $n < 24$ , противоречие.

Пусть теперь тип излома концевой линейного участка  $E_1$  равен 4. Тогда, в силу следствия 4.14 главы 4, длина боковины хвоста участка  $E_1$ , соответствующей  $B_{12}$ , не меньше чем  $[n/3] - [n/12] - 2$ , откуда длина боковины  $B_{12}$  не меньше чем  $[n/3] - [n/12] + 2$ . С другой стороны, так как  $\text{ind}(E_1) = 2$ , в силу следствия 4.23 главы 4, длина боковины  $B_{12}$  равна  $[n/3] - 1$ . Поэтому

$$[n/3] - 1 \geq [n/3] - [n/12] + 2,$$

т.е.  $[n/12] \geq 3$ , откуда  $n \geq 36$ . Однако,  $[n/6] \leq 5 - \text{ind}(E_2) \leq 4$ , откуда  $n < 30$ , противоречие. Таким образом, и в этом случае паркет  $D$  не имеет минимальной реализации на правильном многоугольнике. Объединяя все полученные результаты, получаем доказательство основной теоремы 6.1.

## Глава 7

# Невырожденные минимальные сети с выпуклой границей. Циклический случай

В настоящей главе мы обобщим теоремы классификации минимальных бинарных деревьев с выпуклой границей на случай невырожденных минимальных сетей с циклами. В главе 1, рассматривая вопросы минимальной реализации сетей с циклами, мы ввели понятие фундаментального цикла. Оказывается, фундаментальные циклы невырожденных сетей Штейнера, имеющих выпуклую минимальную реализацию, устроены максимально просто. Кроме того, имеется возможность обобщить понятие числа вращения на случай невырожденных сетей Штейнера, все фундаментальные циклы которых устроены именно так.

### 1 Фундаментальные циклы невырожденных минимальных сетей с выпуклой границей. Тривиальные сети

Пусть  $\Gamma$  — плоская невырожденная сеть Штейнера, и  $\gamma$  — ее фундаментальный цикл. Предположим, что  $\text{ind } \gamma = 6$ . Тогда, очевидно,  $\gamma$  состоит не менее чем из 6 ребер, причем, если число ребер равно 6, то все вершины цикла  $\gamma$  — внешние.

**Определение.** Фундаментальный цикл индекса 6, состоящий ровно из шести ребер, назовем *тривиальным*. Плоскую невырожденную сеть Штейнера  $\Gamma$ , все фундаментальные циклы которой тривиальны, назовем *тривиальной сетью*.

**Предложение 7.1** Пусть  $\Gamma$  — плоская невырожденная сеть Штейнера, имеющая выпуклую минимальную реализацию. Тогда  $\Gamma$  — тривиальная сеть.

**Доказательство.** Поскольку, как было показано выше, каждая плоская минимальная сеть лежит в выпуклой оболочке множества своих граничных вершин, то, если эта сеть имеет хотя бы одно ребро, множество ее граничных вершин состоит не менее чем из двух элементов.

Пусть  $\gamma$  — произвольный фундаментальный цикл сети  $\Gamma$ . Если  $\gamma$  — нетривиален, то он имеет внутреннюю вершину  $A$ , к которой крепится подсеть  $\Gamma'$ , целиком лежащая в области, ограниченной циклом  $\gamma$ . В силу сделанного выше замечания, подсеть  $\Gamma'$  имеет граничную вершину, отличную от  $A$ . Поэтому, внутри области, ограниченной циклом  $\gamma$ , а, значит, и внутри выпуклой оболочки множества граничных вершин сети  $\Gamma$ , содержится граничная вершина сети  $\Gamma$ . Полученное противоречие и завершает доказательство предложения.

Из предложения 7.1 вытекает, что при изучении топологии невырожденных минимальных сетей с выпуклой границей, можно ограничиться рассмотрением тривиальных сетей. В дальнейшем, нам будет полезно следующее утверждение, вытекающее непосредственно из предложения 1.9 главы 1.

**Утверждение 7.1** Индекс произвольного цикла тривиальной сети равен 6.

Приведем еще одно важное свойство тривиальных сетей.

**Утверждение 7.2** У каждой тривиальной сети имеется вершина степени 1.

**Доказательство.** Предположим противное. Тогда все вершины рассматриваемой сети имеют степень 3. Разобьем ребра тривиальной сети на три класса. Ребро назовем внутренним, если оно одновременно входит в два фундаментальных цикла, и полувнутренним, если оно входит ровно в один фундаментальный цикл. Остальные ребра назовем внешними. Отметим, что полувнутренние и внешние ребра лежат на границе единственной неограниченной грани рассматриваемой сети.

Обозначим через  $k$  число внутренних ребер, через  $l$  — число полувнутренних, и через  $m$  — число внешних ребер. Тогда, как легко видеть,



количество граней равно  $(2k+l)/6+1$ , число ребер равно  $k+l+m$ , а число вершин равно  $2(k+l+m)/3$ . По формуле Эйлера:

$$\frac{2k+l}{6} + 1 - (k+l+m) + \frac{2}{3}(k+l+m) = 2,$$

откуда  $-l/6 - m/3 = 1$ . Противоречие.

### 1.1 Число вращения тривиальной сети

Оказывается, для тривиальных сетей, несмотря на наличие циклов, также можно корректно определить число вращения.

Пусть  $\Gamma$  — тривиальная сеть, и пусть  $a$  и  $b$  — пара ее граничных ребер. Предположим, что  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — пути в  $\Gamma$ , каждый из которых соединяет ребро  $a$  с ребром  $b$ . Так же, как и выше, числом вращения  $\text{tw}_{\gamma_i}(a, b)$  пары ребер  $(a, b)$  вдоль пути  $\gamma_i$  назовем разность количеств поворотов “налево” и “направо” во внутренних вершинах пути  $\gamma_i$  при движении по  $\gamma_i$  от  $a$  к  $b$ .

**Утверждение 7.3** Число вращения пары  $(a, b)$  граничных ребер тривиальной сети  $\Gamma$  не зависит от пути, их соединяющего:

$$\text{tw}_{\gamma_1}(a, b) = \text{tw}_{\gamma_2}(a, b),$$

для любых путей  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , каждый из которых соединяет  $a$  с  $b$ .

**Доказательство.** Пусть  $U_i$  — семейство областей, зажатых между путями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Множества  $U_i$  представляют собой ограниченные связные компоненты плоскости без путей  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Предположим сначала, что существует только одна такая область  $U_i = U$ .

Обозначим через  $\delta$  границу области  $U$ , являющуюся, очевидно, циклом в  $\Gamma$ . Обозначим через  $\delta_i$  пересечение цикла  $\delta$  с путем  $\gamma_i$ . Ориентируем пути  $\gamma_i$  от  $a$  к  $b$ , что задаст нам ориентацию на ребрах из  $\delta_i$ . Имеет место следующая несложная техническая лемма.

**Лемма 7.1** Пересечение  $\delta_i$  цикла  $\delta$  с путем  $\gamma_i$  связно, т.е. является путем. Пути  $\delta_1$  и  $\delta_2$  пересекаются лишь по своим конечным вершинам. Более того, пусть  $X_i$  — первая, а  $Y_i$  — последняя вершина пути  $\delta_i$  при движении в выбранной ориентации. Тогда  $X_1 = X_2$ , а  $Y_1 = Y_2$ .

Докажем теперь наше утверждение для случая, когда пути  $\gamma_i$  ограничивают ровно одну область.

**Лемма 7.2** В сделанных выше предположениях, утверждение 7.3 имеет место.

**Доказательство.** Пусть  $x$  и  $y$  — общие ребра путей  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , инцидентные  $X = X_i$  и  $Y = Y_i$  соответственно. Предположим для определенности, что ориентация цикла  $\delta$  против часовой стрелки согласована с ориентацией пути  $\delta_2$ . Пусть  $a_i$  и  $b_i$  — количества внешних и внутренних вершин цикла  $\delta$  соответственно, попавших внутрь пути  $\delta_i$ . Тогда, очевидно, число вращения  $\text{tw}_1$  между  $x$  и  $y$  при движении от первого из них ко второму вдоль пути  $\delta_1$  равно  $2 - a_1 + b_1$ , а число вращения  $\text{tw}_2$  между  $x$  и  $y$  при движении от  $x$  к  $y$  вдоль  $\delta_2$  равно  $-2 + a_2 - b_2$ .

По утверждению 7.1, индекс цикла  $\delta$  равен 6. Поэтому,

$$(a_1 + a_2 + 2) - (b_1 + b_2) = 6,$$

где двойка в этой формуле соответствует внешним вершинам  $X$  и  $Y$  цикла  $\delta$ . Теперь ясно, что разность чисел вращения  $\text{tw}_1$  и  $\text{tw}_2$  равна нулю. Лемма доказана.

В частности, если область  $U$  из леммы 7.2 представляет собой фундаментальную область тривиального цикла  $\delta$ , то будем говорить, что пути  $\gamma_i$  получены друг из друга *флипом по циклу  $\delta$* .

**Следствие 7.1** Если путь  $\gamma_2$ , соединяющий граничные ребра  $a$  и  $b$  сети  $\Gamma$ , получен из пути  $\gamma_1$ , также соединяющего ребра  $a$  и  $b$ , некоторым флипом, то

$$\text{tw}_{\gamma_1}(a, b) = \text{tw}_{\gamma_2}(a, b).$$

**Лемма 7.3** Пусть  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — два пути из  $\Gamma$ , соединяющие граничные ребра  $a$  и  $b$ . Тогда путь  $\gamma_2$  может быть получен из пути  $\gamma_1$  последовательным применением некоторого количества флипов.

**Доказательство.** Пусть, как и выше,  $U_i$  — семейство областей, зажатых между путями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

**Лемма 7.4** Среди тривиальных циклов, чьи фундаментальные области содержатся в областях  $U_i$ , существует такой цикл  $\delta$ , что его пересечение с путем  $\gamma_1$  связно.

**Доказательство.** Предположим противное. Выберем произвольный фундаментальный цикл  $\delta'$ , фундаментальная область которого содержится в некоторой области  $U_i$ . Связные компоненты пересечения цикла  $\delta'$  с путем  $\gamma_1$  упорядочены в соответствие с ориентацией пути  $\gamma_1$  от  $a$  к  $b$ . Выберем из этих компонент две последовательные, и обозначим их через  $x$  и  $y$ . Пусть  $\gamma'$  — часть пути  $\gamma_1$ , лежащая между  $x$  и  $y$ . Так как  $x$  и  $y$  — последовательные связные компоненты, путь  $\gamma'$  не пуст и не содержит ребер из цикла  $\delta'$ .

Кроме того,  $x$  и  $y$ , очевидно, не смежны, поэтому найдется такой путь  $\gamma$ , лежащий на цикле  $\delta'$ , что путь  $\gamma'$  вместе с путем  $\gamma$ , ограничивает область

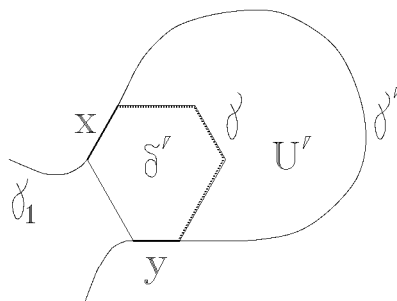


Рис. 7.1:

$U'$ , содержащуюся в объединении замыканий областей  $U_i$  и не содержащую фундаментальную область цикла  $\delta'$ .<sup>1</sup> При этом, путь  $\gamma$  не содержит ребер из  $\gamma_1$ , так как, в противном случае, путь  $\gamma_1$  должен был бы пересекать внутренность фундаментальной области цикла  $\delta'$ , что невозможно (см. рис. 7.1).

Рассмотрим теперь произвольный фундаментальный цикл  $\delta''$ , фундаментальная область которого содержится в области  $U'$ . Так как  $\gamma$  не содержит ребер пути  $\gamma_1$ , связные компоненты пересечения цикла  $\delta''$  с  $\gamma_1$  лежат на  $\gamma'$ . Повторив описанную выше процедуру, построим область  $U''$ , ограниченную связной частью пути  $\gamma'$  и путем, не имеющим общих ребер с  $\gamma_1$ . При этом, область  $U''$  будет содержать меньшее число фундаментальных областей, чем область  $U'$ . Поэтому, при неограниченном продолжении этого процесса, мы, в некоторый момент, исчерпаем все множество фундаментальных областей, попавших в  $U'$ . Однако, последнее противоречит тому, что на каждом шаге, в силу несвязности пересечения очередного выбранного фундаментального цикла из  $U'$  с путем  $\gamma_1$ , множество фундаментальных областей, содержащихся в перестроенной области  $U'$ , не пусто. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству леммы 7.3. В силу леммы 7.4, в одной из областей  $U_i$  содержится фундаментальный цикл  $\delta$ , пересечение которого с путем  $\gamma_1$  связно. Пусть  $\delta' = \delta \cap \gamma_1$ , а  $\delta''$  — часть цикла  $\delta$ , не попавшая на  $\gamma_1$ . Рассмотрим путь  $\gamma'_1$ , полученный из  $\gamma_1$  заменой участка  $\delta' \subset \gamma_1$  на участок  $\delta''$ . Ясно, что путь  $\gamma'_1$  получается из пути  $\gamma_1$  флипом по циклу  $\delta$ . Кроме того, общее число фундаментальных областей, зажатых между путями  $\gamma'_1$  и  $\gamma_2$ , на единицу меньше, чем между путями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Продолжив этот процесс до тех пор, пока не будет исчерпано множество всех фундаментальных областей из объединения  $U_i$ , мы перестроим путь  $\gamma_1$  в путь  $\gamma_2$ . Лемма

<sup>1</sup> Действительно, если  $\gamma'$  целиком содержится в замыкании области  $U_i$ , то  $U' \subset U_i$ . В противном случае, путь  $\gamma'$  пересекает границу области  $U_i$ . Тогда часть области  $U'$ , не попавшая в  $U_i$ , ограничена участками границы области  $U_i$  и участками пути  $\gamma' \subset \gamma_1$ . Поэтому,  $U'$  содержится в объединении замыканий областей  $U_i$ .

доказана.

Теперь утверждение 7.3 вытекает из леммы 7.3 и следствия 7.1. Доказательство закончено.

Утверждение 7.3 обосновывает корректность следующего определения.

**Определение.** *Числом вращения  $tw(a, b)$  пары  $(a, b)$  граничных ребер тривиальной сети  $\Gamma$  назовем число вращения между этими ребрами вдоль любого пути, их соединяющего. Числом вращения  $tw \Gamma$  тривиальной сети  $\Gamma$  назовем максимум чисел вращения, по всевозможным парам граничных ребер сети  $\Gamma$ :*

$$tw \Gamma = \max_{(a,b)} tw(a, b).$$

Дословно повторив доказательство предложения 2.3 из главы 2, получим следующий важный результат.

**Предложение 7.2** *Число вращения плоской минимальной тривиальной сети с выпуклой границей не превосходит пяти.*

Используя предыдущее предложение, мы обобщим теорему 2.1 о паркетной реализации на случай невырожденных сетей с циклами. Последнее позволит нам применить язык паркетов для описания невырожденных минимальных сетей, имеющих выпуклую минимальную реализацию.

## 2 Двойственный комплекс

Пусть  $\Gamma$  — произвольная невырожденная плоская сеть Штейнера, состоящая более чем из одного ребра. Построим по ней некоторый симплициальный комплекс следующим образом. Поставим в соответствие каждой точке Штейнера  $A$  сети  $\Gamma$  треугольник  $T(A)$ . Будем предполагать, что все эти треугольники расположены в той же плоскости, что и сеть  $\Gamma$ . Фиксируем на плоскости некоторую ориентацию. Установим взаимно однозначное соответствие между сторонами каждого треугольника  $T(A)$  и ребрами сети  $\Gamma$ , инцидентными точке Штейнера  $A$ . При этом будем предполагать, что построенное взаимно однозначное соответствие сохраняет циклические порядки на множествах сторон треугольника и ребер, инцидентных  $A$ .<sup>2</sup> Ориентируем стороны всех треугольников в соответствии с положительным направлением обхода. Склеим симплициальный комплекс  $\mathcal{S}(\Gamma)$  из треугольников  $T(A)$ , отождествляя те и только те их стороны, которые соответствуют

<sup>2</sup>У каждой точки Штейнера  $A$  существует такая круговая окрестность  $U$ , что пересечение ее с сетью  $\Gamma$  состоит из трех вложенных кривых — участков ребер сети  $\Gamma$ , инцидентных  $A$ , выходящих на границу окрестности  $U$  и пересекающихся только в точке  $A$ . Ориентация плоскости задает нам положительное направление обхода границы  $\partial U$  окрестности  $U$  и порождает, тем самым, циклический порядок на множестве ребер, инцидентных  $A$ . Кроме того, ориентация плоскости задает направление обхода каждого треугольника, и, значит, циклический порядок на множестве его ребер.

одним и тем же ребрам сети  $\Gamma$ . При этом, если  $XU$  и  $X'U'$  — ориентированные стороны треугольников  $T(A)$  и  $T(A')$ , отвечающие одному и тому же ребру  $AA'$  сети  $\Gamma$ , то начало  $X$  стороны  $XU$  склеивается с концом  $U'$  стороны  $X'U'$ , а конец  $U$  стороны  $XU$  — с началом  $X'$  стороны  $X'U'$ , т.е. стороны склеиваются с заменой ориентации.

**Определение.** Построенный так симплициальный комплекс  $\mathcal{S}(\Gamma)$  называется *двойственным комплексом* невырожденной плоской сети Штейнера  $\Gamma$ .

Отметим, что, в силу связности сети  $\Gamma$ , комплекс  $\mathcal{S}(\Gamma)$  также связан. Более того, по построению, к каждому 1-мерному симплексу комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  примыкает не более двух 2-мерных симплексов. Поэтому, двойственный комплекс плоской сети Штейнера представляет собой топологическую двумерную поверхность, с краем или без. Эта поверхность замкнута тогда и только тогда, когда степени всех вершин сети  $\Gamma$  равны трем. Напомним, что такие сети Штейнера называются замкнутыми.

По аналогии с тем, как мы это делали для паркетов, назовем сторону симплекса комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  *граничной*, если она не отождествляется ни с какими другими сторонами симплексов этого комплекса. Все остальные стороны симплексов из  $\mathcal{S}(\Gamma)$  будем называть *внутренними*. Внутреннюю сторону назовем *стороной разреза*, если комплекс  $\mathcal{S}(\Gamma)$  может быть представлен в виде двух связанных подкомплексов, склеенных по этому ребру.

**Определение.** *Контуром* комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  тривиальной сети  $\Gamma$  будем называть цикл, порожденный всеми граничными ребрами этого комплекса.

Далее, вершину симплекса из  $\mathcal{S}(\Gamma)$  назовем *граничной*, если она лежит на контуре  $K$  комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$ , и *внутренней* в противном случае. Отметим, что внутреннее ребро симплекса из  $\mathcal{S}(\Gamma)$  является ребром разреза, если и только если обе его вершины — граничные.

Наконец, симплекс комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  назовем *крайним*, если две его стороны лежат на контуре  $K$  комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$ , и *внутренним*, если ни одна из его сторон не лежит на  $K$ .

В дальнейшем нам будет полезно следующее предложение.

**Предложение 7.3** *Двойственный комплекс  $\mathcal{S}(\Gamma)$  тривиальной сети  $\Gamma$  стягивается по себе в точку.*

**Доказательство.** В силу утверждения 7.2, тривиальная сеть  $\Gamma$  имеет вершину  $A$  степени 1. Рассмотрим симплекс  $\Delta$  из  $\mathcal{S}(\Gamma)$ , соответствующий точке Штейнера  $S$ , инцидентной такой вершине. Ясно, что та сторона этого симплекса, которая соответствует граничному ребру  $SA$ , не отождествляется ни с какими другими сторонами симплексов из  $\mathcal{S}(\Gamma)$ , т.е. является граничной.

Возникает три возможности.

(1.) Симплекс  $\Delta$  имеет две граничных стороны. В этом случае точке Штейнера  $S$  инцидентны два граничных ребра сети. Стянем симплекс  $\Delta$  на ее неграничную сторону. Тогда перестроенный комплекс является, очевидно, двойственным комплексом сети  $\Gamma$  с выброшенной парой граничных ребер, инцидентных  $S$ . Очевидно, что так перестроенная сеть остается тривиальной.

(2.) Симплекс  $\Delta$  имеет ровно одну граничную сторону, причем соответствующая точка Штейнера  $S$  не лежит ни на одном фундаментальном цикле, а, значит, и ни на каком цикле вообще. В этом случае, стянем ячейку  $\Delta$  так, чтобы в результате отождествились две ее неграничных стороны. Эта перестройка комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  соответствует выбрасыванию из  $\Gamma$  единственного граничного ребра, инцидентного  $S$ , и объединению двух других инцидентных  $S$  ребер из  $\Gamma$  в одно ребро. Ясно, что так перестроенная сеть по-прежнему является тривиальной.

(3.) Симплекс  $\Delta$  имеет ровно одну граничную сторону, причем соответствующая точка Штейнера  $S$  лежит на некотором фундаментальном цикле  $C$ . Ясно, что такой цикл единственен. Так как сеть  $\Gamma$  тривиальна, то вершинам цикла  $C$  соответствуют 6 симплексов, склеенных так же, как треугольники, полученные при соединении отрезками некоторой внутренней точки выпуклого шестиугольника с его вершинами. Стянем симплекс  $\Delta$  на две его неграничных стороны. Эта перестройка комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  соответствует выбрасыванию из сети  $\Gamma$  единственного граничного ребра, инцидентного  $S$ , и разрезанию полученной сети по вершине  $S$ . Легко видеть, что полученная сеть  $\Gamma'$  является связной, и полученный комплекс является комплексом сети  $\Gamma'$ . Более того, сеть  $\Gamma'$  тривиальна, так как не возникло новых циклов, и оставшиеся циклы не изменились.

Итак, мы получили в результате симплициальный комплекс, который состоит из меньшего на единицу числа симплексов, чем исходный, и является двойственным комплексом некоторой тривиальной сети. Продолжая этот процесс, пока не будет исчерпано все множество симплексов, мы построим стягивание комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  по себе в точку. Доказательство закончено.

Из предложения 7.3 вытекают следующие полезные утверждения.

**Следствие 7.2** *Существует топологическое вложение двойственного комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  тривиальной сети  $\Gamma$  в плоскость.*

**Пример 7.1** *Двойственный комплекс плоской нетривиальной сети Штейнера, изображенной на рис. 7.2, является, как нетрудно видеть, двумерной сферой, и, поэтому, в плоскость не вкладывается.*

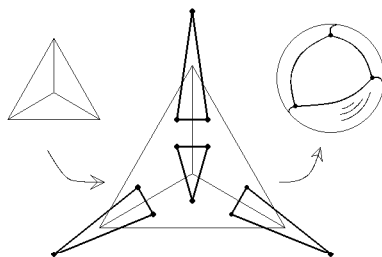


Рис. 7.2: Двойственный комплекс этой сети гомеоморфен сфере

**Следствие 7.3** Если рассматривать 1-остов комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  тривиальной сети  $\Gamma$  как топологический граф, то множество всех граничных ребер комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  образует цикл в этом графе.

### 2.1 Число вращения ребер контура двойственного комплекса тривиальной сети

В настоящем пункте мы применим разработанную для случая бинарных деревьев технику чисел вращения ребер контура паркета из  $\mathcal{WP}_2$  к контуру двойственного комплекса тривиальной сети.

Пусть  $K$  — контур двойственного комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  тривиальной сети  $\Gamma$ . Будем предполагать, что двойственный комплекс вложен в плоскость (следствие 7.2). Ориентируем контур  $K$  по часовой стрелке. Пусть  $a$  и  $b$  — соседние последовательные граничные ребра контура, стыкующиеся в его вершине  $A$ . Обозначим через  $k$  число симплексов комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$ , имеющих  $A$  своей вершиной. Числом вращения  $\text{tw}(a, b)$  пары  $(a, b)$  соседних последовательных ребер контура  $K$  назовем целое число  $k - 3$ .

Пусть теперь  $a$  и  $b$  — произвольные ребра из  $K$ , и пусть  $\gamma$  — тот из двух путей в  $K$ , соединяющих  $a$  и  $b$ , движение по которому от  $a$  к  $b$  происходит в положительном направлении.

**Определение.** Числом вращения  $\text{tw}(a, b)$  пары  $(a, b)$  произвольных ребер контура  $K$  назовем сумму чисел вращения между последовательными соседними ребрами пути  $\gamma$ , т.е., если  $\gamma = a = a_0, a_1, \dots, a_n = b$ , то

$$\text{tw}(a, b) = \sum_{i=1}^n \text{tw}(a_{i-1}, a_i).$$

Имеет место следующее важное утверждение, являющееся обобщением хорошо известного факта о равенстве  $\pm 2\pi$  полного угла поворота при обходе плоского замкнутого контура.

**Утверждение 7.4** Сумма всех чисел вращения последовательных соседних ребер контура  $K$  двойственного комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  тривиальной сети  $\Gamma$  равно  $-6$ .

**Доказательство.** Пусть  $A_1, \dots, A_n$  — последовательные вершины контура  $K$ . Обозначим через  $k_i$  количество симплексов из  $\mathcal{S}(\Gamma)$ , имеющих  $A_i$  своей вершиной. Тогда искомая сумма всех чисел вращения равна, очевидно,

$$\sum_{i=1}^n k_i - 3n.$$

Будем рассматривать 1-остов  $\mathcal{S}^1$  комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  как плоский граф. Обозначим через  $v$  количество вершин графа  $\mathcal{S}^1$ , не лежащих на контуре  $K$ . Тогда, как легко видеть, число граней  $f$  плоского графа  $\mathcal{S}^1$  равно

$$1 + \frac{1}{3} \left( 6v + \sum_{i=1}^n k_i \right),$$

число ребер графа  $\mathcal{S}^1$  равно

$$\frac{1}{2} (3(f-1) + n) = \frac{1}{2} \left( 6v + \sum_{i=1}^n k_i \right) + \frac{n}{2},$$

и, наконец, число вершин равно  $v + n$ . Тогда, по формуле Эйлера,

$$\left( 1 + \frac{1}{3} \left( 6v + \sum_{i=1}^n k_i \right) \right) - \left( \frac{1}{2} \left( 6v + \sum_{i=1}^n k_i \right) + \frac{n}{2} \right) + (v + n) = 2,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^n k_i - 3n = -6.$$

Утверждение доказано.

**Утверждение 7.5** Пусть  $a$  и  $b$  — произвольные граничные стороны контура  $K$  двойственного комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  тривиальной сети  $\Gamma$ , и пусть  $x$  и  $y$  — те ребра сети  $\Gamma$ , которые соответствуют этим сторонам. Тогда

$$\text{tw}_\Gamma(x, y) = \text{tw}_K(a, b) + 3.$$

**Доказательство.** Разобьем доказательство утверждения на несколько шагов.

**Лемма 7.5** Утверждение 7.5 справедливо для любой пары  $a$  и  $b$  последовательных соседних граничных сторон контура  $K$ .



**Доказательство.** Пусть  $A$  — общая вершина сторон  $a$  и  $b$ . Рассмотрим множество  $L$  всех симплексов комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$ , имеющих  $A$  своей вершиной. Легко видеть, что  $L$  — линейный деревянный скелет. Пусть  $\gamma$  — путь в  $\Gamma$ , соединяющий  $x$  и  $y$  и лежащий в  $L$ . Очевидно, при движении по  $\gamma$  от  $x$  к  $y$ , мы в каждом симплексе из  $L$  поворачиваем “налево” ровно один раз, т.е. каждая ячейка из  $L$  дает вклад в число вращения между  $x$  и  $y$ , равный 1. Поэтому,  $\text{tw}_\gamma(x, y) = \text{tw}_\Gamma(x, y)$  равно количеству ячеек в  $L$ , т.е., по определению числа вращения между последовательными ребрами контура  $K$ , равно  $\text{tw}_K(a, b) + 3$ .

Пусть теперь  $a$  и  $b$  — произвольные ребра контура  $K$ , и пусть  $k$  — соединяющий  $a$  и  $b$  путь на  $K$ , движение по которому от  $a$  к  $b$  происходит в положительном направлении. Пусть  $A_i, i = 1, \dots, n$  — последовательные внутренние вершины пути  $k$ , а  $z_i$  — граничные ребра из  $\Gamma$ , соответствующие сторонам  $a_i = A_i A_{i+1}$ . Обозначим через  $L_i$  множество всех симплексов из  $\mathcal{S}(\Gamma)$ , имеющих  $A_i$  своей вершиной, и пусть  $\gamma'_i$  — путь из  $\Gamma$ , лежащий в  $L_i$ , причем  $\gamma'_1$  соединяет  $x$  с  $z_1$ ;  $\gamma'_i, i = 2, \dots, n-1$  — ребро  $z_{i-1}$  с ребром  $z_i$ ; и  $\gamma'_n$  — ребро  $z_{n-1}$  с ребром  $y$ . Выбросим из пути  $\gamma'_i$  все входящие в него ребра  $z_j$ . Полученный путь обозначим через  $\gamma_i$ .

**Лемма 7.6** *Предположим, что каждый из путей  $\gamma_i$  состоит не менее чем из одного ребра, и, что объединение этих путей является некоторым путем  $\gamma$  в  $\Gamma$ . Тогда утверждение 7.5 справедливо.*

**Доказательство.** Ясно, что путь  $\gamma$  соединяет ребра  $x$  и  $y$ . Пусть  $S_i$  — точка Штейнера сети  $\Gamma$ , инцидентная ребру  $z_i$ . Тогда, очевидно, путь  $\gamma_1$  представляет собой начальный отрезок пути  $\gamma$  до точки  $S_1$ , путь  $\gamma_i, i = 2, \dots, n-1$ , — часть пути  $\gamma$  между  $S_{i-1}$  и  $S_i$ , а путь  $\gamma_n$  — конечный отрезок пути  $\gamma$  после  $S_n$ .

Ориентируем путь  $\gamma$  от  $x$  к  $y$ . Легко видеть, что

- число вращения вдоль пути  $\gamma_1$  между  $x$  и последним ребром  $v_1$  из  $\gamma_1$  на 1 меньше числа вращения вдоль пути  $\gamma'_1$  между  $x$  и  $z_1$ ;
- число вращения вдоль пути  $\gamma_i$  между начальным  $u_i$  и конечным  $v_i$  его ребрами на 2 меньше числа вращения вдоль пути  $\gamma'_i$  между  $z_{i-1}$  и  $z_i$ ;
- число вращения вдоль пути  $\gamma_n$  между первым его ребром  $u_n$  и ребром  $y$  на 1 меньше числа вращения вдоль пути  $\gamma'_n$  между  $z_{n-1}$  и  $y$ ;
- число вращения вдоль пути  $\gamma$  между последовательными ребрами, инцидентными  $S_i$ , равно  $-1$ .

Поэтому, в силу леммы 7.5,

$$\begin{aligned}
 \text{tw}(a, b) &= \text{tw}(a, a_1) + \sum_{i=2}^{n-1} \text{tw}(a_{i-1}, a_i) + \text{tw}(a_{n-1}, b) \\
 &= \text{tw}(x, z_1) - 3 + \sum_{i=2}^{n-1} (\text{tw}(z_{i-1}, z_i) - 3) + \text{tw}(z_{n-1}, y) - 3 \\
 &= \text{tw}(x, v_1) + 1 - 3 + \sum_{i=2}^{n-1} (\text{tw}(u_{i-1}, v_i) + 2 - 3) + \text{tw}(u_{n-1}, y) + 1 - 3 \\
 &= \text{tw}(x, v_1) + \sum_{i=2}^{n-1} \text{tw}(u_{i-1}, v_i) + \text{tw}(u_{n-1}, y) - n - 2 \\
 &= \text{tw}(x, y) - (n-1)(-1) - n - 2 = \text{tw}(x, y) - 3.
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть теперь  $a$  и  $b$  — произвольные ребра контура  $K$ , на расположение которых не накладывается никаких ограничений. Пусть  $\gamma$  — путь в сети  $\Gamma$ , соединяющий  $x$  и  $y$ . Пусть  $L$  — множество всех симплексов комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$ , через которые этот путь проходит. Снова обозначим через  $k$  соединяющий  $a$  и  $b$  путь на  $K$ , движение по которому от  $a$  к  $b$  происходит в положительном направлении.

Разрежем комплекс  $\mathcal{S}(\Gamma)$ , как область плоскости, по пути  $\gamma$ . В силу односвязности комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  и вложенности пути  $\gamma$ , полученные компоненты связности также связны и односвязны. Пусть  $A$  и  $B$  — концевые вершины пути  $\gamma$ . Выберем ту из двух компонент, которая содержит такую связную часть пути  $k$ , движение по которой от  $A$  к  $B$  происходит в положительном направлении.

Рассмотрим пересечение сети  $\Gamma$  с замыканием выбранной компоненты, и построим полученный подграф до сети  $\Gamma'$ , добавив к нему те невошедшие в него ребра из  $\Gamma$ , которые инцидентны точкам Штейнера сети  $\Gamma$ , лежащим на  $\gamma$ . Сеть  $\Gamma'$ , как легко видеть, является тривиальной. Обозначим через  $\mathcal{S}'$  двойственный комплекс сети  $\Gamma'$ , а через  $K'$  — его контур. Ясно, что определено естественное симплициальное погружение  $\varphi$  комплекса  $\mathcal{S}'$  в комплекс  $\mathcal{S}(\Gamma)$ , являющееся вложением внутри  $\mathcal{S}'$ , порожденное вложением подсети  $\Gamma'$  в сеть  $\Gamma$ . Построенные выше объекты, рассматриваемые как элементы комплекса  $\mathcal{S}'$ , его двойственного графа или контура, мы будем обозначать теми же буквами. Ограничения погружения  $\varphi$  на двойственный граф и на  $k$ , очевидно, являются вложениями. Поэтому, достаточно доказать справедливость утверждения на комплексе  $\mathcal{S}'$ .

Ориентируем контур  $K'$  по часовой стрелке. Обозначим через  $l$  соединяющий  $b$  с  $a$  путь на контуре  $K'$ , движение по которому от  $b$  к  $a$  происходит в положительном направлении. По построению, упорядоченная пара

$(b, a)$  ребер контура  $K'$  удовлетворяет предположениям леммы 7.6, причем, путь  $\gamma$  совпадает с одноименным путем, построенным в лемме 7.6. Поэтому,  $\text{tw}(b, a) = \text{tw}(y, x) - 3$ . По утверждению 7.4,  $\text{tw}(a, b) + \text{tw}(b, a) = -6$ , откуда, используя косую симметрию числа вращения  $\text{tw}(y, x)$ , получаем:  $\text{tw}(a, b) + 3 = \text{tw}(x, y)$ . Утверждение доказано.

Применяя утверждение 7.5 к двойственным комплексам тривиальных сетей, имеющих выпуклую минимальную реализацию, получаем

**Следствие 7.4** Число вращения тривиальной сети  $\Gamma$  не превосходит пяти тогда и только тогда, когда для любой пары  $a$  и  $b$  контура  $K$  ее двойственного комплекса справедлива следующая оценка:

$$-8 \leq \text{tw}_K(a, b) \leq 2.$$

Еще одно следствие из утверждения 7.5 будет нам полезно при доказательстве теоремы о паркетной реализации тривиальных сетей с непревосходящим пяти числом вращения.

**Следствие 7.5** Пусть  $K$  — контур двойственного комплекса тривиальной сети, число вращения которой не превосходит 5. Тогда на  $K$  существует такая сторона  $a$ , что  $-7 \leq \text{tw}(a, b) \leq 1$  для любой стороны  $b$  из контура  $K$ .

**Доказательство.** Ориентируем, как всегда, контур  $K$  по часовой стрелке. Пусть  $x$  — произвольная сторона контура  $K$ . Обозначим через  $y$  первую, считая от  $x$ , сторону контура  $K$ , такую что  $\text{tw}(x, y) > \text{tw}(x, u)$  для каждой стороны  $u$  контура  $K$ , лежащей между  $y$  и  $x$ . Тогда выберем в качестве  $a$  следующую за  $y$  сторону из  $K$ , и покажем, что  $a$  — искомая сторона. Прежде всего, отметим, что  $-2 \leq \text{tw}(y, a) < 0$ , а также  $-2 \leq \text{tw}(x, y) \leq 2$ . Последнее вытекает из того, что число вращения между  $x$  и следующим за ним ребром не меньше чем  $-2$ , и из определения стороны  $y$ .

Пусть  $b$  — произвольная сторона контура  $K$ . Покажем сначала, что  $\text{tw}(a, b) \leq 1$ . Пусть  $b$  лежит между  $y$  и  $x$ . Тогда  $\text{tw}(y, b) < 0$ , так как, в силу выбора ребра  $y$ , имеем:  $\text{tw}(x, b) = \text{tw}(x, y) + \text{tw}(y, b) < \text{tw}(x, y)$ . Далее, так как  $\text{tw}(y, a) \geq -2$ , а  $\text{tw}(y, b) < 0$ , и  $\text{tw}(a, b) = \text{tw}(y, b) - \text{tw}(y, a)$ , то  $\text{tw}(a, b) < 2$ .

Пусть теперь  $b$  лежит между  $x$  и  $y$ . Тогда, так как  $\text{tw}(x, y) = \text{tw}(x, b) + \text{tw}(b, y) \geq -2$ , и  $\text{tw}(x, b) \leq 2$ , имеем:  $\text{tw}(b, y) \geq -4$ . Далее, так как  $\text{tw}(y, a) \geq -2$ , то  $\text{tw}(b, a) = \text{tw}(b, y) + \text{tw}(y, a) \geq -6$ . Но  $\text{tw}(b, a) + \text{tw}(a, b) = -6$ , поэтому  $\text{tw}(a, b) \leq 0$ .

Покажем теперь, что  $\text{tw}(a, b) \geq -7$ . Очевидно, для этого достаточно показать, что  $\text{tw}(b, a) \leq 1$ . Заметим, что для любого  $b$ , отличного от  $a$ , сторона  $y$  лежит между  $b$  и  $a$ . Так как  $\text{tw}(y, a) < 0$ , а  $\text{tw}(b, y) \leq 2$ , имеем  $\text{tw}(b, a) = \text{tw}(b, y) + \text{tw}(y, a) \leq 1$ . Следствие доказано.

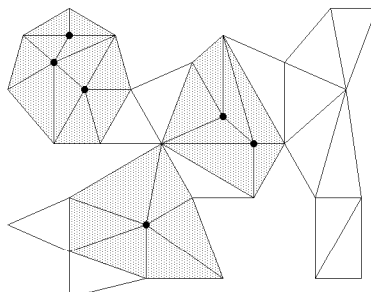


Рис. 7.3: Ядра двойственного комплекса

## 2.2 Ядра двойственного комплекса

Пусть  $\mathcal{S}$  — произвольный двумерный симплициальный комплекс, а  $M$  — произвольное множество вершин симплексов из  $\mathcal{S}$ . Путь  $\gamma$ , составленный из сторон симплексов комплекса  $\mathcal{S}$ , будем называть *путем во множестве  $M$* , если все вершины пути  $\gamma$  принадлежат  $M$ . Множество  $M$  назовем *связным*, если каждые две вершины из  $M$  могут быть соединены путем во множестве  $M$ . Максимальные по включению связные подмножества множества  $M$  будем называть *связными компонентами множества  $M$* .

**Определение.** *Симплициальной оболочкой множества  $M$*  называется совокупность всех симплексов комплекса, имеющих точки из  $M$  своими вершинами.

Пусть  $\mathcal{S}(\Gamma)$  — двойственный комплекс тривиальной сети  $\Gamma$ , и  $K$  — его контур. Рассмотрим множество всех внутренних вершин комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  и разобьем его на связные компоненты.

**Определение.** Симплициальные оболочки связных компонент множества внутренних вершин комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  называются *ядрами комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$*  (рис. 7.3).

Пусть  $a$  — произвольная сторона контура  $K$ .

**Определение.** Сторону  $a$  назовем *ядерной*, если  $a$  принадлежит некоторому ядру.

**Утверждение 7.6** Пусть  $\Gamma$  — тривиальная сеть,  $\text{tw } \Gamma \leq 5$ , и предположим, что двойственный комплекс  $\mathcal{S}(\Gamma)$  не содержит крайних симплексов. Тогда на контуре  $K$  комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  существует ядерная сторона  $a$ , такая что для любой стороны  $b$  из  $K$  имеет место следующая оценка:

$$-7 \leq \text{tw}(a, b) \leq 1.$$

**Доказательство.** Разобьем комплекс  $\mathcal{S}(\Gamma)$  на связные компоненты, выбросив из него все стороны разреза. Тогда, в силу односвязности, одна из его компонент содержит не более одной стороны разреза. Обозначим эту компоненту через  $J$ . В силу отсутствия у комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  крайних симплексов, компонента  $J$  является ядром.

Пусть сначала  $\mathcal{S}(\Gamma) = J$ . Тогда утверждение вытекает из следствия 7.5.

Далее, пусть  $\mathcal{S}(\Gamma) \neq J$ . Обозначим через  $x$  единственную сторону разреза, принадлежащую  $J$ . Пусть  $\gamma$  — пересечение контура  $K$  комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  с ядром  $J$ . Ориентируем контур  $K$  по часовой стрелке, и пусть  $u$  — первая, а  $v$  — последняя стороны пути  $\gamma$ . Так как  $J$  — ядро, а  $x$  — сторона некоторого симплекса  $\Delta$  из  $J$ , то в  $J$  входят шесть симплексов, имеющих общей вершину симплекса  $\Delta$ , не лежащую на  $x$ . Отсюда вытекает, что проверяется непосредственно, что  $\text{tw}(u, v) \leq -4$ .

Пусть  $y$  — первая из сторон пути  $\gamma$ , таких что для всех сторон  $y'$  из  $\gamma$ , следующих за  $y$ , имеет место:  $\text{tw}(u, y) > \text{tw}(u, y')$ ; пусть  $z$  — последняя из сторон пути  $\gamma$ , таких что для всех сторон  $z'$  из  $\gamma$ , предшествующих  $z$ , имеет место:  $\text{tw}(z, v) > \text{tw}(z', v)$ . Отметим, что, по определению  $y$  и  $z$ , имеют место неравенства:  $\text{tw}(u, y) \geq 0$ , и  $\text{tw}(z, v) \geq 0$ .

Покажем, что  $y$  предшествует  $z$ . Предположим противное. Тогда имеем:

$$\text{tw}(u, v) = \text{tw}(u, z) + \text{tw}(z, y) + \text{tw}(y, v) \leq -4,$$

но  $\text{tw}(u, z) + \text{tw}(z, y) = \text{tw}(u, y) \geq 0$ , поэтому  $\text{tw}(y, v) \leq -4$ . С другой стороны,  $\text{tw}(z, y) + \text{tw}(y, v) = \text{tw}(z, v) \geq 0$ , следовательно,  $\text{tw}(z, y) \geq 4$ , что невозможно в силу следствия 7.4.

Покажем теперь, что между  $y$  и  $z$  расположено не нулевое число сторон контура. В самом деле, так как

$$\text{tw}(u, v) = \text{tw}(u, y) + \text{tw}(y, z) + \text{tw}(z, v) \leq -4,$$

а  $\text{tw}(u, y) \geq 0$ , и  $\text{tw}(z, v) \geq 0$ , то  $\text{tw}(y, z) \leq -4$ . Однако, если  $y$  и  $z$  — соседние, то  $\text{tw}(y, z) \geq -2$ , что и требовалось.

В качестве  $a$  возьмем первую из сторон пути  $\gamma$ , лежащих между  $y$  и  $z$ . Из определения  $y$  и  $z$  вытекает, что  $\text{tw}(u, a) < \text{tw}(u, y)$ , и  $\text{tw}(a, v) < \text{tw}(z, v)$ .

Покажем, что  $a$  — искомая сторона. Для этого достаточно проверить неравенства из условия утверждения. Пусть  $b$  — произвольная сторона контура  $K$ . Если  $b$  не лежит на  $\gamma$ , то

$$\text{tw}(a, b) = \text{tw}(a, v) + \text{tw}(v, b) < \text{tw}(z, v) + \text{tw}(v, b) = \text{tw}(z, b) \leq 2.$$

Поэтому,  $\text{tw}(a, b) \leq 1$ . С другой стороны,

$$\text{tw}(b, a) = \text{tw}(b, u) + \text{tw}(u, a) < \text{tw}(b, u) + \text{tw}(u, y) = \text{tw}(b, y) \leq 2,$$

откуда  $\text{tw}(b, a) \leq 1$ , и, так как  $\text{tw}(b, a) + \text{tw}(a, b) = -6$ , имеем:  $\text{tw}(a, b) \geq -7$ . Таким образом, справедливость оценки установлена для любой стороны  $b$ , не лежащей на  $\gamma$ .

Если же  $b$  лежит на  $\gamma$ , то необходимая оценка вытекает из следствия 7.5 и следующей леммы.

**Лемма 7.7** *В сделанных предположениях, число вращения между  $a$  и  $b$  вдоль контура  $K$  равно числу вращения между этими сторонами вдоль контура ядра  $J$ .*

**Доказательство.** Если  $a$  предшествует  $b$ , то утверждение леммы тривиально.

Пусть теперь  $b$  предшествует  $a$ . Заметим, что  $J$ , очевидно, является двойственным комплексом некоторой тривиальной сети, поэтому, для контура  $K'$  комплекса  $J$  справедливо утверждение 7.4, т.е.  $\text{tw}_{K'}(a, b) + \text{tw}_{K'}(b, a) = -6$ . С другой стороны,  $\text{tw}_K(a, b) + \text{tw}_K(b, a) = -6$ . Кроме того,  $\text{tw}_{K'}(b, a) = \text{tw}_K(b, a)$ , откуда  $\text{tw}_K(a, b) = \text{tw}_{K'}(a, b)$ , что и требовалось.

Таким образом, утверждение 7.6 полностью доказано.

### 3 Паркетная реализация тривиальных сетей с числом вращения не более пяти

Теперь все готово, чтобы доказать теорему о паркетной реализации тривиальных сетей, число вращения которых не превосходит пяти.

**Теорема 7.1 (О паркетной реализации)** *Для каждой тривиальной сети  $\Gamma$  с числом вращения, не превосходящим пяти, существует односвязный паркет, двойственный граф которого эквивалентен  $\Gamma$ , а контур представляет собой вложенную ломаную.*

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{S}(\Gamma)$  — двойственный комплекс тривиальной сети  $\Gamma$ .

**Лемма 7.8** *Существует такой симплекс  $\Delta$  из  $\mathcal{S}(\Gamma)$ , что выбрасывание  $\Delta$  из комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  приводит к симплицальному комплексу  $\mathcal{S}'$ , являющемуся двойственным комплексом тривиальной сети, число вращения которой не превосходит 5.*

**Доказательство.** Или у комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  существует крайний симплекс, или, в силу утверждения 7.6, существует ядерная сторона  $a$  на контуре  $K$  комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$ , такая что  $-7 \leq \text{tw}(a, b) \leq 1$  для любой стороны  $b$  из  $K$ .

Рассмотрим первый случай. Пусть  $\Delta$  — крайний симплекс из  $\mathcal{S}(\Gamma)$ , и пусть  $x$  — принадлежащее  $\Delta$  ребро разреза комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$ . Обозначим через  $\mathcal{S}'$  комплекс, полученный из  $\mathcal{S}(\Gamma)$  отрезанием симплекса  $\Delta$  по стороне  $x$ . Ясно, что  $\mathcal{S}'$  — двойственный комплекс некоторой тривиальной сети  $\Gamma'$ . Покажем, число вращения сети  $\Gamma'$  не превосходит пяти. В самом деле, для

этого достаточно рассмотреть ребро  $e$  сети  $\Gamma'$ , соответствующее стороне  $x$ , являющееся, очевидно, граничным, и показать, что для любого граничного ребра  $f$  сети  $\Gamma'$  имеет место:  $|\text{tw}(e, f)| \leq 5$ . Действительно, если это не так, т.е. существует граничное ребро  $f$  из  $\Gamma'$ , не удовлетворяющее неравенству, то между одним из граничных ребер сети  $\Gamma$  из симплекса  $\Delta$  и ребром  $f$  число вращения, по модулю, больше 6. Противоречие.

Перейдем ко второму случаю. Пусть теперь  $\Delta$  — симплекс из  $\mathcal{S}(\Gamma)$ , содержащий ядерную сторону  $a$ . Пусть  $x$  и  $y$  — две отличных от  $a$  стороны симплекса  $\Delta$ . Отрежем симплекс  $\Delta$  от комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  по сторонам  $x$  и  $y$ . Так как симплекс  $\Delta$  принадлежит ядру, полученный в результате комплекс  $\mathcal{S}'$  является связным и односвязным, поэтому, он представляет собой двойственный комплекс некоторой тривиальной сети  $\Gamma'$ . Покажем, что  $\text{tw} \Gamma' \leq 5$ . Для этого достаточно рассмотреть ребра  $e$  и  $f$  сети  $\Gamma'$ , соответствующие сторонам  $x$  и  $y$ , и показать, что модуль числа вращения между каждым из них и произвольным граничным ребром  $g$  сети  $\Gamma'$  не превосходит пяти.

Приведем выкладки для ребра  $e$ . Пусть  $g$  — произвольное граничное ребро сети  $\Gamma'$ , и  $\gamma'$  — путь в  $\Gamma'$ , соединяющий  $e$  и  $g$ . Если  $g$  совпадает с  $f$ , то все очевидно. Пусть  $g \neq f$ . Тогда, рассмотрев путь  $\gamma'$  как путь в  $\Gamma$  и добавив к нему ребро  $h$ , соответствующее стороне  $a$ , получим, очевидно, некоторый путь  $\gamma$  в  $\Gamma$ . В силу выбора стороны  $a$ , число вращения между  $h$  и  $g$  по модулю не превосходит 4. Так как ребро  $e$  смежно с  $h$ , то число вращения  $\text{tw}(e, g)$  отличается от числа вращения  $\text{tw}(h, g)$  не более чем на 1, что и требовалось.

Доказательство теоремы проведем индукцией по числу  $n$  симплексов комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$ . Случай  $n = 1$  тривиален. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для всех  $n < N$ . Пусть  $\mathcal{S}(\Gamma)$  состоит из  $N$  симплексов. По лемме 7.8, существует такой симплекс  $\Delta$ , что симплициальный комплекс  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}(\Gamma) \setminus \Delta$  представляет собой двойственный комплекс некоторой тривиальной сети  $\Gamma'$ , число вращения которой не превосходит пяти. Поэтому, в силу предположения индукции, сеть  $\Gamma'$  эквивалентна двойственному графу некоторого паркета  $D'$ , контур которого является вложенной ломаной.

Пусть  $\Delta$  — крайний симплекс,  $x$  — сторона разреза, принадлежащая  $\Delta$ , и  $d$  — граничное ребро паркета  $D'$ , соответствующее  $x$ . Добавим к паркету  $D'$  единственную ячейку паркета плоскости, не лежащую в  $D'$  и примыкающую к  $d$ . Полученный паркет обозначим через  $D$ .

Пусть теперь  $\Delta$  — симплекс из ядра,  $x$  и  $y$  — внутренние стороны симплекса  $\Delta$ , и  $c$  и  $d$  — соответствующие им граничные ребра паркета  $D'$ . Пусть  $X$  — общая вершина сторон  $x$  и  $y$ . Поскольку  $\Delta$  — симплекс из ядра комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$ , вершина  $X$  является общей ровно для пяти симплексов комплекса  $\mathcal{S}'$ . Рассмотрим ячейки паркета  $D'$ , соответствующие этим пяти симплексам. Они, очевидно, также имеют общую вершину, поэтому ребра  $c$  и  $d$  принадлежат одной ячейке паркета плоскости, не принадлежа-

шей паркету  $D'$ . Добавим эту ячейку к паркету  $D'$ . Полученный паркет обозначим через  $D$ .

Покажем теперь, что ребра паркета  $D$ , соответствующие граничным сторонам симплекса  $\Delta$ , также являются граничными. В самом деле, если это не так, то, по аналогии с доказательством теоремы 2.1, найдется пара граничных ребер сети  $\Gamma$ , число вращения между которыми по модулю равно 6. Противоречие.

Нам осталось показать, что контур паркета  $D$  — вложенная ломаная. Мы отложим доказательство этого факта до следующего раздела.

Итак, из теоремы 7.1 следует, что для изучения тривиальных сетей, имеющих выпуклую минимальную реализацию, достаточно исследовать односвязные паркеты, число вращения которых не превосходит пяти. Множество всех односвязных паркетов с числом вращения, не превосходящим 5, будем обозначать через  $\mathcal{P}_5$ .

### 3.1 Число вращения ребер контура паркета

Выше было определено число вращения между граничными сторонами контура  $K$  двойственного комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  тривиальной сети. Это определение было чисто комбинаторным. Однако, если комплекс  $\mathcal{S}(\Gamma)$  может быть реализован в виде некоторого паркета  $D$ , то понятие числа вращения между сторонами контура  $K$  приобретает простой геометрический смысл. А именно, пусть  $K'$  — контур паркета  $D$ , и пусть  $a'$  и  $b'$  — ребра из  $K'$ , соответствующие сторонам  $a$  и  $b$  контура  $K$  комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$ . Тогда, очевидно,  $\text{tw}_K(a, b) = \text{tw}_{K'}(a', b')$ , где последнее совпадает с деленным на  $\pi/3$  углом поворота при движении от  $a'$  к  $b'$  вдоль  $K'$  по часовой стрелке.

**Завершение доказательства теоремы 7.1.** Напомним, что нам осталось доказать вложенность контура паркета  $D$ , построенного выше. Отметим, что единственная возможность получить не вложенный контур возникает при добавлении к паркету  $D'$  ячейки, соответствующей крайнему симплексу  $\Delta$  из  $\mathcal{S}(\Gamma)$ .

Предположим, что добавленная к паркету  $D'$  ячейка касается контура паркета  $D'$  той своей вершиной  $A$ , которая соответствует вершине симплекса  $\Delta$ , не принадлежащей стороне разреза. Тогда контур  $C$  паркета  $D$  разбивается вершиной  $A$  на две компоненты, каждая из которых представляет собой замкнутую ломаную.

Ориентируем контур  $K$  комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$  по часовой стрелке, что задаст нам ориентацию контура  $C$  паркета  $D$ . Обозначим через  $\gamma_1$  ту из двух компонент  $\gamma_i$  контура  $C$ , которая лежит в замыкании области, ограниченной другой из них,  $\gamma_2$ . Очевидно, число вращения между начальным и конечным ребрами ломаной  $\gamma_1$  (рассматриваемой как часть ориентированного контура  $C$ ) лежит в пределах от 5 до 7, поэтому в этих же пределах



должно лежать и число вращения между соответствующими граничными сторонами контура  $K$  комплекса  $\mathcal{S}(\Gamma)$ . Противоречие. Теорема 7.1 полностью доказана.

## 4 Описание паркетов общего вида

Цель настоящего пункта состоит в описании устройства паркетов общего вида. Как мы увидим, многие конструкции, разработанные нами в главе 2 для паркетов из  $\mathcal{WP}_3$ , применимы и в общем случае. Как и выше, мы представим каждый паркет в виде объединения некоторых “элементарных кирпичей” и опишем устройство этих “кирпичей”. Все паркеты на протяжении настоящего пункта будут предполагаться связными.

### 4.1 Скелет и наросты

Пусть  $D$  — произвольный паркет. В главе 2 было построено разложение произвольного паркета на его *скелет* и *наросты*:  $D = S \sqcup \{\Delta_i\}$ . Такое разложение будет нам чрезвычайно полезно и при изучении паркетов общего вида.

Главное отличие паркетов общего вида от деревянных паркетов состоит в том, что, вообще говоря, не все вершины ячеек произвольного паркета лежат на его контуре. Чтобы описать возникающие здесь новые эффекты, нам понадобятся понятие паркетной оболочки и ядра, к определению которых мы и переходим.

### 4.2 Паркетные оболочки и ядра

Пусть  $M$  — произвольное множество вершин паркета плоскости. Путь  $\gamma$ , составленный из ребер ячеек, будем называть *путем во множестве  $M$* , если все вершины пути  $\gamma$  принадлежат  $M$ . Множество  $M$  назовем *связным*, если каждые две вершины из  $M$  могут быть соединены путем во множестве  $M$ . Максимальные по включению связные подмножества множества  $M$  будем называть *связными компонентами множества  $M$* .

**Определение.** *Паркетной оболочкой множества  $M$*  называется совокупность всех ячеек паркета плоскости, имеющих точки из  $M$  своими вершинами.

### 4.3 Ядра паркета

Пусть  $D$  — произвольный паркет, и  $K$  — его контур. Как уже говорилось выше, вершины паркетов общего вида, в отличие от вершин деревянных паркетов, могут и не лежать на контуре паркета, т.е. находиться внутри паркета.

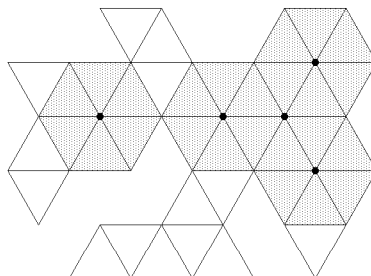


Рис. 7.4: Ядра паркета

**Определение.** Вершину паркета  $D$  назовем *граничной*, если она лежит на контуре  $K$  паркета  $D$ . Все остальные вершины паркета  $D$  будем называть *внутренними*.

Рассмотрим множество всех внутренних вершин паркета  $D$ , и разобьем его на связанные компоненты.

**Определение.** Паркетные оболочки связанных компонент множества внутренних вершин паркета  $D$  называются *ядрами паркета  $D$*  (рис. 7.4).

Ядра паркетов обладают следующими свойствами, непосредственно вытекающими из определений.

**Утверждение 7.7** Пусть  $D$  — произвольный паркет. Тогда

- каждое ядро паркета  $D$  содержится в  $D$ ;
- если два ядра паркета  $D$  имеют общую ячейку, то они совпадают;
- среди всех ядер паркета плоскости, содержащихся в  $D$ , ядра паркета  $D$  являются максимальными (по включению).

Итак, мы выделили в паркетах общего вида “элементарные кирпичи” — ядра, наличие которых отличает такие паркетные структуры от деревянных. Перейдем теперь к изучению скелетов произвольных паркетов.

#### 4.4 Узлы ветвления

Пусть  $S$  — произвольный скелет.

**Определение.** Внутреннюю ячейку скелета  $S$ , не входящую ни в какое ядро этого скелета, назовем *ячейкой ветвления скелета  $S$* . Связные подпаркеты в  $S$ , составленные из его ячеек ветвления, назовем *узлами ветвления скелета  $S$* .

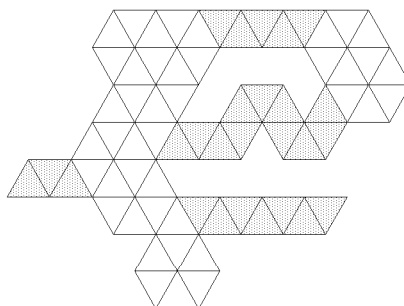


Рис. 7.5: Линейные участки

Отметим, что свойство данной ячейки произвольного паркета  $D$  быть ячейкой ветвления некоторого его скелета не зависит от разложения паркета  $D$  на скелет и наросты. Поэтому можно говорить о ячейках ветвления и узлах ветвления паркета (а не скелета). Оказывается узлы ветвления произвольного паркета устроены точно так же, как узлы ветвления деревянных паркетов. А именно, дословно повторяя доказательство предложения 2.6 главы 2, получаем следующее предложение.

**Предложение 7.4** *Узлы ветвления произвольных паркетов могут быть лишь тех же пяти типов, что и узлы ветвления деревянных паркетов, см. рис. 2.10 главы 2.*

#### 4.5 Линейные участки

Пусть, как и выше,  $S$  — произвольный скелет.

**Определение.** Связные компоненты паркета, который получается после выбрасывания из  $S$  всех ядер и узлов ветвления, называются *линейными участками скелета  $S$*  (см. рис. 7.5).

Имеет место следующее утверждение.

**Утверждение 7.8** *Если линейный участок  $L$  скелета  $S$  не совпадает со всем  $S$ , то  $L$  является линейным деревянным скелетом.*

**Доказательство.** Из определения вытекает, что произвольный линейный участок скелета  $S$  не содержит ни внутренних ячеек, ни внутренних вершин, поэтому, в частности,  $L$  является скелетом. Предположим, что двусторонний граф скелета  $L$  содержит цикл  $\gamma$ . Обозначим через  $P$  подпаркет в  $L$ , соответствующий этому циклу. Ясно, что каждая ячейка из  $P$  имеет ровно два внутренних ребра. Но тогда к паркету  $P$  нельзя добавить ни

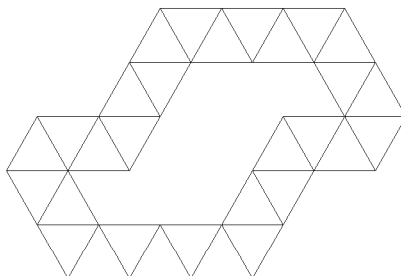


Рис. 7.6: Пример нелинейного паркета, совпадающего со своим единственным линейным участком

одной смежной с  $P$  ячейки паркета плоскости, не превратив при этом некоторую ячейку из  $P$  во внутреннюю ячейку перестроенного паркета. Поэтому  $P$  необходимо совпадает с  $L$ , а  $L$  — совпадает с  $S$ , так как иначе линейный участок  $L$  содержал бы внутренние ячейки.

**Пример 7.2** На рис. 7.6 приведен пример скелета, совпадающего со своим единственным линейным участком. Этот паркет, очевидно, не является деревянным, так как его двойственный граф содержит цикл.

## 4.6 Структурные элементы

Подведем некоторые итоги. В предыдущих разделах было построено разложение произвольного скелета  $S$  в объединение его ядер, узлов ветвления и линейных участков.

**Определение.** Структурными элементами скелета  $S$  будем называть его ядра, узлы ветвления и линейные участки.

Полезно разбить множество всех структурных элементов, отнеся их к следующим трем типам, в зависимости от того, как данный структурный элемент соединяется с другими структурными элементами. Назовем ребро скелета  $S$ , по которому пересекаются два различных структурных элемента этого скелета, *ребром крепления*.

**Определение.** Структурный элемент скелета  $S$  назовем *концевым*, если он содержит ровно одно ребро крепления, *соединительным*, если он содержит ровно два ребра крепления, и, наконец, *элементом ветвления*, если он содержит три и более ребер крепления (см. рис. 7.7).

Отметим, что узел ветвления всегда является элементом ветвления. Линейный участок, напротив, не может быть элементом ветвления и всегда

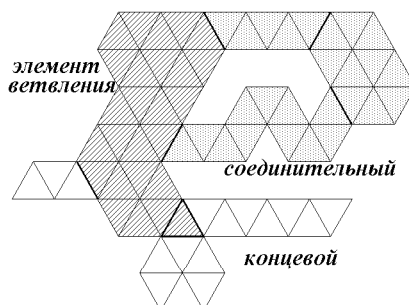


Рис. 7.7: Структурные элементы

является или конечным, или соединительным элементом. Ядра скелета могут попасть в любой из этих трех классов. Ядра, являющиеся элементами ветвления, будем называть *ядрами ветвления*.

#### 4.7 Макроэлементы и конечные линейные участки

Для многих наших дальнейших целей разбиение скелета на структурные элементы оказывается слишком мелким. Поэтому мы построим разбиение скелета на более крупные компоненты, объединив воедино смежные структурные элементы одного типа.

Пусть, как и выше,  $S$  — произвольный скелет.

**Определение.** Связные компоненты, на которые распадается скелет  $S$  после выбрасывания из него всех элементов ветвления, назовем *линейными макроэлементами* скелета  $S$ . Связные компоненты паркета, составленного из элементов ветвления скелета  $S$ , назовем *макроэлементами ветвления* скелета  $S$ . *Контуром макроэлемента* скелета  $S$  назовем пересечение контура скелета  $S$  с этим макроэлементом.

Таким образом, каждый скелет  $S$  может быть представлен в виде объединения своих линейных макроэлементов и макроэлементов ветвления. На рис. 7.8 приведен пример такого представления.

Построенное представление скелета в виде объединения его макроэлементов позволяет обобщить на случай произвольного скелета понятие конечного линейного участка, которое оказалось очень полезным для нас при изучении деревянных скелетов.

**Определение.** Линейный макроэлемент скелета  $S$ , содержащий некоторый конечный структурный элемент этого скелета, назовем *конечным линейным участком* скелета  $S$ . Все остальные линейные макроэлементы из  $S$  будем называть *перемычками*.

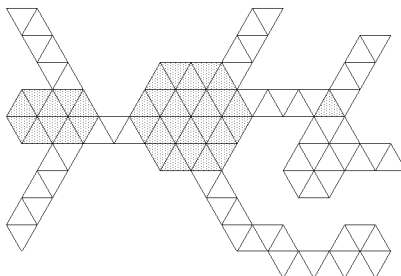


Рис. 7.8: Линейные макроэлементы и макроэлементы ветвления

Мы закончили описание “элементарных кирпичей”, из которых состоит произвольный скелет. Перейдем теперь к более подробному изучению паркетов из  $\mathcal{P}_5$ . Как и в случае  $\mathcal{WP}_5$ , мы сначала опишем устройство скелетов паркетов из  $\mathcal{P}_5$ , а затем — возможные расположения наростов паркетов из  $\mathcal{P}_5$  на их скелетах.

## 5 Скелеты из $\mathcal{P}_5$

Цель настоящего пункта — описать более подробно устройство скелетов паркетов из  $\mathcal{P}_5$ . Односвязность этих паркетов, а также условие на число вращения двойственного графа, оказываются весьма существенными ограничениями, что приводит к появлению у паркетов из  $\mathcal{P}_5$  многих свойств, сходных со свойствами ранее изученных паркетов из  $\mathcal{WP}_5$ . На протяжении настоящего пункта все паркеты предполагаются связными.

### 5.1 Структурные элементы

Пусть  $S$  — произвольный скелет из  $\mathcal{P}_5$ . Тогда, поскольку  $S$  односвязен, несложно показать, что каждый его подпаркет, составленный из структурных элементов, также односвязен. Более того, оказывается, структурные элементы скелета  $S$  могут стыковаться друг с другом лишь простейшим образом, а именно, имеет место следующее утверждение.

**Утверждение 7.9** *Любые два структурных элемента скелета  $S$  из  $\mathcal{P}_5$  пересекаются не более чем по одному ребру.*

**Доказательство.** Предположим противное. Пусть в пересечении структурных элементов  $U_1$  и  $U_2$  скелета  $S$  содержатся различные ребра  $a$  и  $b$  скелета  $S$ . Обозначим через  $K_i$  контур паркета  $U_i$ . Тогда, очевидно, ребра  $a$  и  $b$  содержатся в каждой из ломаных  $K_i$ . Если ребра  $a$  и  $b$  не являются соседними хотя бы на одной из ломаных  $K_i$ , то, как легко видеть, контур

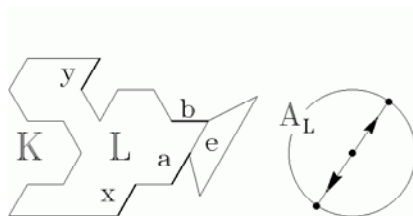


Рис. 7.9: Направления концевого линейного участка

паркета  $U$ , представляющего собой объединение структурных элементов  $U_1$  и  $U_2$ , состоит из нескольких компонент связности, что противоречит односвязности паркета  $U$ .

Если же ребра  $a$  и  $b$  являются соседними на каждой из ломаных  $K_1$  и  $K_2$ , то их общая вершина  $A$ , очевидно, является внутренней вершиной скелета  $S$ . Поэтому, все ячейки, примыкающие к  $A$ , принадлежат некоторому ядру скелета  $S$ , и не могут поэтому принадлежать разным структурным элементам. Доказательство закончено.

**Следствие 7.6** Или скелет  $S$  не содержит элементов ветвления, или он имеет не менее трех концевых линейных участков.

### 5.2 Направления концевых линейных участков скелетов из $\mathcal{P}_3$

В настоящем разделе мы обобщим понятие направлений концевого линейного участка скелета на случай скелетов из  $\mathcal{P}_3$  и докажем аналог предложения 2.11 главы 2 для случая скелетов из  $\mathcal{P}_3$ .

Пусть  $S$  — скелет из  $\mathcal{P}_3$ , и  $L$  — некоторый его концевой линейный участок. Обозначим через  $e$  единственное ребро крепления, входящее в  $L$ . Пусть  $K$  — контур скелета  $S$ , ориентированный по часовой стрелке, и пусть  $a$  и  $b$  — последовательные ребра из  $K$ , пересекающиеся с  $e$  и лежащие на контуре концевого линейного участка  $L$ , см. рис. 7.9. Обозначим через  $x$  и  $y$  такие ребра контура концевого линейного участка  $L$ , что число вращения между  $a$  и  $x$ , а также между  $y$  и  $b$  — максимально, т.е. выполнены следующие соотношения:

$$tw_K(a, x) = \max_z tw_K(a, z), \quad tw_K(y, b) = \max_z tw_K(z, b),$$

где максимумы берутся по всевозможным ребрам  $z$  контура концевого линейного участка  $L$  скелета  $S$ .

Рассмотрим на плоскости единичную окружность  $S^1$ , которую будем называть *окружностью направлений*. Каждая точка этой окружности соответствует, очевидно, некоторому направлению. Направлениям паркета плоскости соответствуют вершины правильного шестиугольника, вписанного в окружность направлений. Ориентируем  $S^1$  по часовой стрелке. Обозначим через  $A_L$  замкнутую дугу окружности направлений, начальная точка которой соответствует направлению ребра  $x$ , а конечная — направлению, противоположному направлению ребра  $y$ .

**Определение.** Направления паркета плоскости, попавшие на дугу  $A_L$ , будем называть *направлениями концевого линейного участка  $L$  скелета  $S$* .

Следующее предложение является непосредственным обобщением предложения 2.11.

**Предложение 7.5** Пусть  $S$  — скелет из  $\mathcal{P}_3$ , имеющий хотя бы один элемент ветвления. Тогда среди направлений любых двух его концевых линейных участков нет двух одинаковых.

**Доказательство.** Предположим противное. Пусть среди направлений концевых линейных участков  $L_1$  и  $L_2$  скелета  $S$  есть совпадающие. Обозначим через  $K_i$  контур концевого линейного участка  $L_i$ . Тогда, из определения направлений концевых линейных участков вытекает, что найдутся такие ребра  $a_i$  контура скелета,  $a_i \in K_i$ , что угол поворота при движении от одного из них к другому по контуру скелета  $S$  по часовой стрелке больше или равен  $\pi$ . Но это противоречит следствию 7.4. Доказательство закончено.

### 5.3 Коды скелетов из $\mathcal{P}_3$

Пусть, как и выше,  $S$  — произвольный скелет из  $\mathcal{P}_3$ . Из предложения 7.5 немедленно вытекает

**Следствие 7.7** Скелет  $S$  из  $\mathcal{P}_3$  имеет не более 6 концевых линейных участков, не более 4 макроэлементов ветвления и не более 3 перемычек.

По аналогии с тем, как это было сделано для скелетов из  $\mathcal{WP}_3$ , построим по каждому скелету  $S$  из  $\mathcal{P}_3$  плоский граф  $\mathfrak{C}(S)$ , называемый *кодом скелета  $S$* , объявив ребрами графа  $\mathfrak{C}(S)$  линейные макроэлементы скелета  $S$ , а внутренними вершинами  $\mathfrak{C}(S)$  — макроэлементы ветвления. Тогда имеет место следующий аналог следствия 2.9 главы 2.

**Следствие 7.8** Коды скелетов из  $\mathcal{P}_3$  представляют собой всевозможные плоские деревья не более чем с шестью вершинами степени 1.



## 5.4 Полиаросты

Оказывается, каждый линейный макроэлемент скелета из  $\mathcal{P}_5$  можно представить в виде объединения некоторого линейного скелета  $L$  из  $\mathcal{WP}_5$  и некоторого числа ячеек паркета плоскости, которые, вместе с ячейками из  $L$ , формируют ядра, входящие в этот макроэлемент.

Пусть  $D$  — произвольный паркет из  $\mathcal{P}_5$ , и пусть  $a$  и  $b$  — два произвольных ребра его контура. Рассмотрим связный подпаркет  $L$  в  $D$ , содержащий ребра  $a$  и  $b$  и состоящий из наименьшего возможного числа ячеек.

**Утверждение 7.10** *Паркет  $L$  является линейным скелетом из  $\mathcal{WP}_5$ .*

**Доказательство.** Покажем сначала, что паркет  $L$  деревянный. Действительно, если это не так, то рассмотрим подпаркет  $Q$  в  $L$ , соответствующий некоторому циклу двойственного графа  $\Gamma_L$  паркета  $L$ . Ясно, что из  $L$  можно выбросить одну из ячеек, входящую в  $Q$  и не содержащую ребер  $a$  и  $b$ , так чтобы оставшийся паркет по-прежнему был связан. Этот новый паркет имеет меньше чем паркет  $L$  число ячеек и снова содержит  $a$  и  $b$ , что противоречит выбору  $L$ .

Покажем теперь, что  $L$  является скелетом. В самом деле, если  $L$  содержит нарост, то он имеет не менее трех крайних ячеек. Выберем из них ту, которая не содержит ни  $a$ , ни  $b$ . Так как выбрасывание из паркета любой его крайней ячейки не нарушает связности этого паркета, выбранная крайняя ячейка может быть выброшена из  $L$ , что противоречит минимальности  $L$ .

Докажем, что  $L$  — линейен. Пусть  $L$  содержит узел ветвления. Тогда  $L$  имеет, по меньшей мере, три концевых линейных участка, и, следовательно, не менее трех концевых ячеек. Снова выбрасывая ту из концевых ячеек, которая не содержит ни  $a$ , ни  $b$ , получаем противоречие с минимальностью паркета  $L$ .

Осталось показать, что  $L$  принадлежит  $\mathcal{WP}_5$ . Для этого нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 7.9** *Пусть  $Z$  — некоторая змея на паркете плоскости, и пусть  $a$  — концевое ребро ее контура, а  $b$  — любое граничное ребро ее концевой ячейки, не содержащей  $a$ . Рассмотрим произвольный линейный скелет  $L$ , контур которого содержит ребра  $a$  и  $b$ . Тогда количество ячеек в змее  $Z$  не превосходит количества ячеек в скелете  $L$ , причем равенство достигается если и только если  $Z = L$ .*

**Доказательство.** Пусть сначала  $b$  — концевое ребро контура змеи  $Z$ . Рассмотрим ось  $\text{Sp } L$  скелета  $L$ , и добавим к ней те средние линии содержащих  $a$  и  $b$  ячеек  $\Delta_a$  и  $\Delta_b$  из  $L$ , которые выходят с середин сторон  $a$  и  $b$ . Так перестроенную ось  $\text{Sp } L$  обозначим через  $G$ . Ясно, что граф  $G$  связан. Пусть  $A$  и  $B$  — середины ребер  $a$  и  $b$  соответственно, и пусть  $\gamma$  — путь в  $G$ ,

соединяющий  $A$  и  $B$  и пересекающийся с каждой из ячеек  $\Delta_a$  и  $\Delta_b$  ровно по одной средней линии. Так как ось змеи  $Z$  совпадает с отрезком  $AB$ , то длина  $\ell(\gamma)$  ломаной  $\gamma$  больше или равна длине оси  $\text{Sp } Z$  змеи  $Z$ , причем равенство достигается тогда и только тогда, когда  $\gamma = \text{Sp } Z$ . Осталось заметить, что если  $d$  — длина средней линии ячейки паркета, то змея  $Z$  состоит из  $|AB|/d$  ячеек, а скелет  $L$  — не менее чем из  $\ell(\gamma)/d$  ячеек.

Пусть теперь  $b$  — не концевое ребро. Имеется две возможности: скелет  $L$  содержит отличное от  $a$  концевое ребро змеи  $Z$  или нет. В первом случае доказательство проводится точно так же, как выше. Рассмотрим второй случай.

Тогда к некоторым ребрам ячейки  $\Delta_b$ , отличным от  $b$ , примыкают ячейки скелета  $L$ . Добавим к оси  $\text{Sp } L$  скелета  $L$  средние линии ячеек  $\Delta_a$  и  $\Delta_b$ , выходящие из точек  $A$  и  $B$ , а также среднюю линию содержащей  $b$  концевой ячейки змеи  $Z$ , соединяющую точку  $B$  с серединой  $C$  концевого ребра этой ячейки. Ясно, что полученный граф, который мы обозначим через  $G$ , связан. Обозначим через  $\gamma$  путь в графе  $G$ , соединяющий  $A$  и  $C$ , пересекающий каждую из  $\Delta_a$  и  $\Delta_b$  ровно по одной средней линии. Так как скелет  $L$  не содержит отличного от  $a$  концевого ребра змеи  $Z$ , путь  $\gamma$  включает среднюю линию  $CB$ , а также некоторую среднюю линию из  $\Delta_b$ .

Если  $d$ , как и выше, — длина средней линии ячейки паркета, то для завершения доказательства леммы остается показать, что длина пути  $\gamma$  больше длины отрезка  $AC$  не менее чем на  $2d$ . Покажем это.

Спроектируем путь  $\gamma$  на прямую, параллельную  $AB$ . Длина проекции произвольной средней линии, очевидно, равна  $d$  или  $d/2$  в зависимости от того, параллельна ли эта средняя линия отрезку  $AB$  или нет. Отметим, что средние линии из  $\gamma$ , лежащие в содержащей  $b$  концевой ячейке змеи  $Z$  и в ячейке  $\Delta_b$ , не параллельны  $AB$ . С другой стороны, точка  $C$  является концевой для пути  $\gamma$ , поэтому, существует еще, по меньшей мере, две средние линии из  $\gamma$ , не параллельные  $AB$ . Поэтому, очевидно, количество средних линий, из которых состоит путь  $\gamma$ , превосходит  $|AC|/d$  не менее чем на 2. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству утверждения. Предположим противное, т.е. число вращения построенного выше скелета  $L$  больше пяти. Тогда на контуре скелета  $L$  имеется два ребра  $x$  и  $y$ , таких что  $\text{tw}(x, y) \geq 3$ . Ребра  $x$  и  $y$  не могут одновременно лежать на контуре паркета  $D$ , так как иначе число вращения между соответствующими этим ребрам граничными ребрами двойственного графа паркета  $D$  было бы больше 5 как в паркете  $L$ , так, значит, и в паркете  $D$ . Кроме того, как легко видеть, ребра  $x$  и  $y$  можно выбрать лежащими на одной связной компоненте контура паркета  $L$ , из которого выброшены  $a$  и  $b$ . Пусть, для определенности, ребро  $x$  не лежит на контуре паркета  $D$ .

Рассмотрим максимальную змею  $Z$ , лежащую в  $D$ , начинающуюся на  $x$  и не пересекающуюся с единственной ячейкой из  $L$ , примыкающей к  $x$ .

Среди ребер из  $L$  только ребро  $x$  лежит на контуре змеи  $Z$ , так как, в противном случае, в силу леммы 7.9, скелет  $L$  не был бы минимальным. Поэтому змея  $Z$  выходит на контур паркета  $D$ .

Далее, заметим, что существует ровно две таких змеи  $Z$ , оси которых образуют между собой угол в  $\pi/3$ . Пусть  $u$  и  $v$  — ребра двойственного графа  $\Gamma_L$  паркета  $L$ , соответствующие ребрам  $x$  и  $y$ . Рассмотрим путь в  $\Gamma_L$ , соединяющий  $u$  и  $v$ , и обозначим через  $L'$  подпаркет в  $L$ , составленный из всех ячеек, по которым проходит этот путь. Ориентируем, как всегда, контур паркета  $L'$  по часовой стрелке, и рассмотрим путь  $\gamma$  на этом контуре, идущий из  $x$  в  $y$ . Из двух возможных змей  $Z$ , выходящих из  $x$ , выберем ту, которая составляет с направлением первого ребра  $x$  пути  $\gamma$  угол в  $\pi/3$ . Эту змею обозначим через  $Z_x$ .

Пусть  $z$  — концевое ребро контура змеи  $Z_x$ , отличное от  $x$ . Это ребро, очевидно, лежит на контуре паркета  $D$ . Пусть  $w$  — ребро двойственного графа змеи  $Z_x$ , соответствующее  $z$ . Отметим, что число вращения между  $w$  и  $u$  по модулю не превосходит 1. Более того, в силу выбора змеи  $Z_x$ , число вращения  $\text{tw}(w, u) \geq 0$ .

Пусть  $t = \text{tw}_{\Gamma_L}(u, v)$ , тогда, по предположению,  $t \geq 6$ . Если ребро  $y$  лежит на контуре паркета  $D$ , то  $\text{tw}(w, v) = \text{tw}(w, u) + \text{tw}(u, v) \geq t \geq 6$ . Противоречие.

Пусть теперь  $y$  не лежит на контуре паркета  $D$ . Выпустим, по аналогии с тем, как мы это проделали для  $x$ , с ребра  $y$  ту максимальную содержащуюся в  $D$  змею  $Z_y$ , которая не содержит единственной ячейки из  $L$ , смежной с  $y$ , и направлена под углом  $2\pi/3$  к направлению последнего ребра  $y$  пути  $\gamma$ . Покажем, что пересечение змей  $Z_x$  и  $Z_y$ , если таковое существует, не может содержать ячейку паркета плоскости.

Действительно, предположим противное. Тогда путь  $\gamma$ , вместе с частями контуров змей  $Z_x$  и  $Z_y$ , образует замкнутую вложенную ломаную  $M$ . Ориентируем ломаную  $M$  так, чтобы движение по пути  $\gamma$  происходило в положительном направлении. Отметим, что эта ориентация совпадает с ориентацией против часовой стрелки.

Пусть  $X$  и  $Y$  — начальная и конечная вершины пути  $\gamma$ , а  $c$  и  $d$  — замыкающие к  $X$  и  $Y$  соответственно ребра ломаной  $M$ , не лежащие на  $\gamma$ . В силу выбора змей  $Z_x$  и  $Z_y$ , угол поворота при переходе с ребра  $c$  на  $x$ , а также с ребра  $y$  на  $d$ , равен  $2\pi/3$ . Кроме того, угол поворота при движении по пути  $\gamma$  от  $x$  к  $y$  не меньше чем  $\pi$ . Поэтому, в силу равенства  $2\pi$  полного угла поворота при обходе замкнутой вложенной ломаной против часовой стрелки, угол при переходе от  $d$  к  $c$  отрицателен, т.е. внутренни угол многоугольника  $M$  при точке пересечения ребер  $c$  и  $d$  больше  $\pi$ . Поэтому змеи  $Z_x$  и  $Z_y$  необходимо пересекают паркет  $L$  по ребрам, отличным от  $x$  и  $y$ , что невозможно.

Таким образом, змеи  $Z_x$  и  $Z_y$  не имеют общих ячеек. По аналогии с тем, как было проделано выше, можно показать, что число вращения между граничными ребрами двойственного графа паркета  $D$ , соответствующими

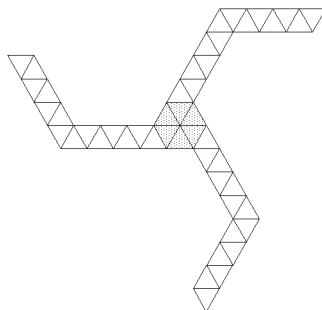


Рис. 7.10: Этот скелет из  $\mathcal{P}_5$  нельзя представить в виде скелета из  $\mathcal{WP}_5$  с полинаростами

концевым ребрам змей  $Z_x$  и  $Z_y$ , больше или равно 6. Доказательство утверждения закончено.

Пусть  $P$  — линейный макроэлемент скелета  $D$  из  $\mathcal{P}_5$ . Если  $P$  — перемычка, то обозначим через  $a$  и  $b$  ее ребра крепления.

Пусть теперь  $P$  — некоторый концевой линейный участок из  $D$ , и  $a$  — его единственное ребро крепления. Если концевой элемент  $Q$ , входящий в  $P$  — линейен, то возьмем его концевое ребро  $b$  и соединим  $a$  и  $b$  связным паркетом  $L$ , состоящим из наименьшего возможного числа ячеек, входящих в  $P$ . Если  $Q$  — концевое ядро, и  $c$  — его ребро крепления, то в качестве  $b$  выберем произвольное ребро контура элемента  $Q$ , не смежное с ребром  $c$ .

Из утверждения 7.10 вытекает, что линейный макроэлемент  $P$  может быть представлен в виде линейного скелета из  $\mathcal{WP}_5$ , соединяющего  $a$  и  $b$ , к которому добавлено некоторое число ячеек паркета плоскости, формирующих, вместе с ячейками этого линейного скелета, рассматриваемый макроэлемент. Ясно, что все добавленные ячейки входят в ядра скелета  $D$ , и их связные компоненты в дальнейшем будут называться *полинаростами*.

**Следствие 7.9** *Каждый линейный макроэлемент произвольного скелета из  $\mathcal{P}_5$  представляет собой змею, лестницу или ломаную змею, на которую посажено некоторое число полинаростов.*

Может возникнуть искушение представить в целом произвольный скелет из  $\mathcal{P}_5$  в виде объединения скелета из  $\mathcal{WP}_5$  и некоторого числа полинаростов. Однако, к сожалению, это представление в общем случае невозможно, как видно из примера, приведенного на рис. 7.10. Основное препятствие к существованию такого представления заключается в наличии ядер ветвления.

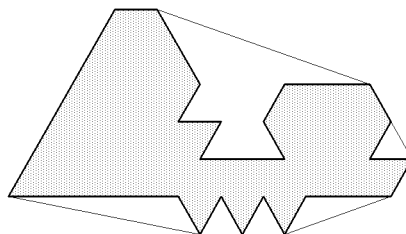


Рис. 7.11: Большие псевдобоквины

## 6 Расположение наростов в паркетах из $\mathcal{P}_5$ на их скелетах

В настоящем пункте мы опишем возможные расположения наростов паркетов из  $\mathcal{P}_5$  на их скелетах. Для этого нам придется обобщить понятие боковины контура на случай паркетов из  $\mathcal{P}_5$ .

### 6.1 Большие псевдобоквины

Пусть  $D$  — произвольный связный односвязный (как подмножество плоскости) паркет. Рассмотрим границу  $\gamma$  его выпуклой оболочки, и разобьем контур  $K$  паркета  $D$  на компоненты следующим образом. Выкинем из контура  $K$  все, что попало на  $\gamma$ . Рассмотрим замыкание  $\hat{K}$  полученного множества.

**Определение.** Связные компоненты множества  $\hat{K}$  называются *большими псевдобоквинами*. Замыкания связных компонент, на которые распадается контур после выбрасывания больших псевдобоквин, назовем *крайними элементами контура*.

На рис. 7.11 приведен пример разбиения контура некоторого паркета на большие псевдобоквины и крайние элементы. Отметим, что, по определению, связные компоненты множества  $K \setminus \gamma$ , отделенные одной точкой контура  $K$ , входят в одну и ту же большую псевдобоквину. С другой стороны, связные компоненты множества  $K \cap \gamma$ , представляющие собой изолированные точки, не включаются в множество крайних элементов контура  $K$ .

Оказывается, имеет место аналог предложения 2.7.

**Предложение 7.6** Пусть  $D$  — связный односвязный паркет, и  $\{B_j\}$  — множество всех его больших псевдобоквин. Ориентируем контур  $K$  паркета  $D$  по часовой стрелке. Тогда если  $D \in \mathcal{P}_5$ , то для любых двух последовательных ребер  $a$  и  $b$  произвольной большой псевдобоквины  $B_j$  имеет

место:  $-3 \leq \text{tw}(a, b) \leq 2$ . Обратно, если для любых двух последовательных ребер  $a$  и  $b$  произвольной большой псевдобоковины  $B_j$  число вращения  $\text{tw}_K(a, b)$  не превосходит 2, то  $D \in \mathcal{P}_5$ .

**Доказательство.** Пусть  $D \in \mathcal{P}_5$ , и пусть  $a$  и  $b$  — два произвольных последовательных ребра некоторой большой псевдобоковины  $B_i$ . То, что  $\text{tw}(a, b) \leq 2$ , вытекает из следствия 7.4. Далее, пусть  $a_i$  — начальное, и  $b_i$  — конечное ребра ломаной  $B_i$ . Тогда, по определению больших псевдобоковин,  $\text{tw}(a_i, b_i) > 0$ . Поэтому, так как

$$\text{tw}(a_i, b_i) = \text{tw}(a_i, a) + \text{tw}(a, b) + \text{tw}(b, b_i) > 0,$$

а, как мы установили,  $\text{tw}(a_i, a) \leq 2$ , и  $\text{tw}(b, b_i) \leq 2$ , имеем:  $\text{tw}(a, b) \geq -3$ .

Обратно, пусть  $\text{tw}(a, b) \leq 2$  для любых двух последовательных ребер произвольной большой псевдобоковины  $B_i$ . Мы должны показать, что  $D \in \mathcal{P}_5$ . В силу следствия 7.4, для этого достаточно проверить, что  $-8 \leq \text{tw}(x, y) \leq 2$ . Пусть  $x$  и  $y$  лежат на одной  $B_i$ .

Предположим, что  $y$  следует за  $x$  при движении по  $B_i$  в положительном направлении. Тогда,  $\text{tw}(x, y) \leq 2$  по условию. Пусть, как и выше,  $a_i$  — первое, а через  $b_i$  — последнее ребро ломаной  $B_i$ . Так как  $\text{tw}(a_i, x) \leq 2$  и  $\text{tw}(y, b_i) \leq 2$  по предположению, а  $\text{tw}(a_i, b_i) > 0$ , имеем, в силу той же выкладки, что и выше,  $\text{tw}(x, y) \geq -3$ , поэтому и по-прежнему  $\text{tw}(x, y) \geq -8$ .

Пусть теперь  $x$  следует за  $y$ . Так как  $\text{tw}(y, x) + \text{tw}(x, y) = -6$ , и, как было только что показано,  $-3 \leq \text{tw}(y, x) \leq 2$ , имеем  $-8 \leq \text{tw}(x, y) \leq -3$ . Что и требовалось.

Предположим теперь, что  $x$  и  $y$  лежат на разных больших псевдобоковинах, скажем, на  $B_i$  и  $B_j$ . Будем считать, что множество  $\{B_k\}$  последовательно занумеровано, и обозначим через  $C_i$  крайний элемент контура  $K$ , лежащий между  $B_i$  и  $B_{i+1}$ , где номера больших псевдобоковин рассматриваются по модулю количества элементов в  $\{B_k\}$ . Пусть  $c_i$  — начальное, и  $d_i$  — конечное ребра ломаной  $C_i$ . Тогда,

$$\begin{aligned} \text{tw}(x, y) = \text{tw}(x, b_i) + \sum_{k=i+1}^{j-2} (\text{tw}(b_k, a_{k+1}) + \text{tw}(a_{k+1}, b_{k+1})) \\ + \text{tw}(b_{j-1}, a_j) + \text{tw}(a_j, y). \end{aligned}$$

Но  $\text{tw}(b_k, a_{k+1}) \leq -2$ , поскольку при движении по контуру  $K$  углы поворота при переходе с  $b_k$  на ломаную  $C_k$  и с  $C_k$  на  $a_{k+1}$  не превосходят  $-\pi/3$ , а угол поворота по ломаной  $C_k$ , лежащей на границе выпуклой оболочки, меньше или равен нулю. Далее, все остальные слагаемые в этой формуле не превосходят 2, поэтому:

$$\text{tw}(x, y) \leq 2 + \sum (-2 + 2) + (-2) + 2 = 2.$$



**Утверждение 7.12** *В сделанных только что предположениях,*

$$\text{tw}(a, x) = 2, \quad \text{tw}(a, y) = -1, \quad \text{и} \quad \text{tw}(y, b) = 2.$$

**Доказательство.** Предположим противное. Так как  $\text{tw}(a, b) = \text{tw}(a, x) + \text{tw}(x, y) + \text{tw}(y, b) = 1$ , то  $\text{tw}(y, b) \geq 3$ . Противоречие. Последние два равенства очевидны.

Пусть теперь существует ребро  $z$  из  $B$ , такое что  $\text{tw}(a, z) = 2$ .

**Утверждение 7.13** *В сделанных только что предположениях, ребро  $y$  следует за  $z$  и  $\text{tw}(z, y) = -3$ .*

**Доказательство.** Покажем сначала, что  $y$  следует за  $z$ . Если это не так, то, в силу равенства  $\text{tw}(a, z) = \text{tw}(a, x) + \text{tw}(x, y) + \text{tw}(y, z) = 2$ , и утверждения 7.12, получаем:  $\text{tw}(y, z) = 3$ . Противоречие.

Итак,  $y$  следует за  $z$ . Вычислим  $\text{tw}(z, y)$ . В силу утверждения 7.12, имеем:  $-1 = \text{tw}(a, y) = \text{tw}(a, z) + \text{tw}(z, y)$ , следовательно,  $\text{tw}(z, y) = -3$ .

Пусть теперь существует ребро  $z$  из  $B$ , такое что  $\text{tw}(z, b) = 2$ .

**Утверждение 7.14** *В сделанных только что предположениях, ребро  $x$  предшествует  $z$  и  $\text{tw}(x, z) = -3$ .*

**Доказательство.** Это доказывается ровно так же, как и утверждение 7.13.

Пусть теперь  $x$  — последнее из ребер на  $B$ , для которых  $\text{tw}(a, x) = 2$ , и пусть  $y$  — первое из ребер на  $B$ , для которых  $\text{tw}(y, b) = 2$ . Из сказанного выше вытекает, что  $x$  предшествует  $y$ , и  $\text{tw}(x, y) = -3$ . Обозначим часть ломаной  $B$ , соединяющую  $a$  и  $x$ , через  $B_a$ , и назовем *начальной ломаной змеей*. Часть ломаной  $B$ , соединяющую  $y$  и  $b$ , обозначим через  $B_b$  и назовем *конечной ломаной змеей*. Далее, пусть  $\gamma$  — ломаная, составленная из ребер ломаной  $B$ , лежащих между  $x$  и  $y$ . Ломаную  $\gamma$  назовем *средней лестницей*. Последнее название оправдывается следующим утверждением.

**Утверждение 7.15** *Ломаная  $\gamma$  не пуста, и ее число вращения не превосходит 1.*

**Доказательство.** Ломаная  $\gamma$  не пуста, так как  $\text{tw}(x, y) = -3$ , поэтому  $x$  и  $y$  не могут быть соседними ребрами. Пусть  $u$  и  $v$  — произвольная пара последовательных ребер из  $\gamma$ . В силу выбора  $x$  и  $y$ , имеют место следующие оценки:

$$-2 \leq \text{tw}(x, u) \leq -1, \quad -2 \leq \text{tw}(v, y) \leq -1.$$

В самом деле, если  $\text{tw}(x, u) = -3$ , то  $\text{tw}(u, b) = 2$ , поэтому  $y$  не есть первое ребро. Если же  $\text{tw}(x, u) \geq 0$ , то  $\text{tw}(x, u) = 0$  (так как, в противном случае,



$\text{tw}(a, u) > 2$ ), и, значит,  $x$  — не последнее ребро. Рассуждения для  $\text{tw}(v, y)$  полностью аналогичны.

Поэтому, так как

$$-3 = \text{tw}(x, y) = \text{tw}(x, u) + \text{tw}(u, v) + \text{tw}(v, y),$$

получаем  $|\text{tw}(u, v)| \leq 1$ , что и требовалось.

Итак, доказано следующее предложение.

**Предложение 7.7** *Или число вращения большой псевдобокловины не превосходит 2, или эта большая псевдобокловина разбивается каноническим образом на начальную ломаную змею, среднюю лестницу и конечную ломаную змею так, как было описано выше. Число вращения каждой из этих трех ломаных не превосходит 2.*

**Определение.** *Псевдобокловинами паркета  $D$  будем называть как его большие псевдобокловины с числом вращения не больше 2, так и начальные и конечные ломаные змеи и средние лестницы, полученные при каноническом разложении больших псевдобокловин с числом вращения, равным 3.*

Итак, мы построили разбиение контура паркета из  $\mathcal{P}_3$  на крайние элементы и псевдобокловины.

**Определение.** *Крайние элементы контура и псевдобокловины будем называть каноническими компонентами контура.*

### 6.3 Расположение наростов на скелетах паркетов из $\mathcal{P}_3$

Оказывается, имеет место аналог предложения 2.14 главы 2.

#### **Предложение 7.8 (О независимости канонических компонент)**

*Пусть  $S$  — скелет из  $\mathcal{P}_3$ , а  $C_i$  — канонические компоненты его контура. Пусть  $D_i$  — паркет, скелет которого (для некоторого разложения на скелет и наросты) совпадает с  $S$ , причем множество  $A_i$  всех наростов паркета  $D_i$  крепится к одной канонической компоненте  $C_i$  контура скелета  $S$ . Предположим, что каждый паркет  $D_i$  принадлежит  $\mathcal{P}_3$ . Тогда паркет  $D$ , полученный из  $S$  присоединением всех наростов из множества  $\sqcup A_i$ , также принадлежит  $\mathcal{P}_3$ .*

**Доказательство.** Разобьем канонические компоненты на два класса: к первому из них отнесем крайние элементы и средние лестницы, а ко второму — все остальные. Заметим, что компоненты этих двух классов образуют на контуре чередующуюся последовательность.

Будем, как всегда, предполагать, что канонические компоненты занумерованы последовательно, причем номера рассматриваются по модулю числа канонических компонент. Пусть  $a_i$  и  $b_i$  — начальное и конечное ребра компоненты  $C_i$ . Тогда, как легко видеть,  $\text{tw}(b_i, a_{i+1}) \leq -1$ .

Пусть  $C_i$  — каноническая компонента первого класса, и  $x$  — произвольное ее ребро.

**Лемма 7.10** *Имеют место следующие неравенства:*

$$\text{tw}(b_{i-1}, x) \leq -1, \quad \text{tw}(x, a_{i+1}) \leq -1.$$

**Доказательство.** Возможны два случая:  $C_i$  является крайним элементом или средней лестницей. Рассмотрим первый из них. Тогда число вращения между любыми двумя последовательными ребрами из  $C_i$  меньше или равно 0. Поэтому,

$$\text{tw}(b_{i-1}, x) = \text{tw}(b_{i-1}, a_i) + \text{tw}(a_i, x) \leq -1.$$

Второе неравенство доказывается точно так же.

Рассмотрим второй случай. Тогда  $C_{i-1}$  и  $C_{i+1}$  — соответственно начальная и конечная ломаные змеи. В силу их максимальности,  $\text{tw}(a_{i-1}, x) \leq 1$ , и  $\text{tw}(x, b_{i+1}) \leq 1$ . Теперь доказательство леммы вытекает из того, что  $\text{tw}(a_{i-1}, b_{i-1}) = 2$ , и  $\text{tw}(a_{i+1}, b_{i+1}) = 2$ , а также аддитивности числа вращения.

Пусть теперь  $C_i$  — каноническая компонента второго класса, и  $x$  — произвольное ее ребро.

**Лемма 7.11** *Имеют место следующие неравенства:*

$$\text{tw}(b_{i-1}, x) \leq 1, \quad \text{tw}(x, a_{i+1}) \leq 1.$$

**Доказательство.** Утверждение леммы непосредственно вытекает из того, что  $\text{tw}(b_j, a_{j+1}) \leq -1$  для любого  $j$ , неравенства  $\text{tw}(a, b) \leq 2$ , имеющего место для любых  $a$  и  $b$ , в силу принадлежности  $S$  классу  $\mathcal{P}_j^S$ , и аддитивности числа вращения.

**Лемма 7.12** *Пусть  $x$  и  $y$  — произвольные ребра некоторых компонент  $C_i$  и  $C_j$  первого класса. Тогда  $\text{tw}(x, y) \leq 0$ .*

**Доказательство.** Если  $i = j$ , то лемма непосредственно вытекает из определений крайнего элемента и средней лестницы.

Далее, предположим, для определенности, что  $i < j$ . Пусть сначала  $j = i + 2$ . Тогда, в силу леммы 7.10, леммы 7.11 и того, что  $a_{i+2}$  и  $y$  лежат на одной компоненте первого класса, имеем:

$$\text{tw}(x, y) = \text{tw}(x, a_{i+1}) + \text{tw}(a_{i+1}, a_{i+2}) + \text{tw}(a_{i+2}, y) \leq -1 + 1 + 0 = 0.$$

Общий случай получается из рассмотренного с помощью соображений аддитивности числа вращения.

**Лемма 7.13** Пусть  $C_i$  и  $C_j$  — произвольные компоненты второго класса, и пусть  $i < j$ . Тогда  $\text{tw}(b_i, a_j) \leq -2$ .

**Доказательство.** Пусть  $x$  — произвольное ребро из компоненты  $C_{i+1}$ , а  $y$  — произвольное ребро из компоненты  $C_{j-1}$ . Тогда, в силу леммы 7.10 и леммы 7.12, имеем:

$$\text{tw}(b_i, a_j) = \text{tw}(b_i, x) + \text{tw}(x, y) + \text{tw}(y, a_j) \leq -1 + 0 - 1 = -2,$$

что и требовалось.

Пусть снова  $C_i$  — каноническая компонента первого класса, и  $x$  — произвольное ее ребро.

**Лемма 7.14** Пусть  $C_k$  и  $C_j$  — две компоненты второго класса, причем  $0 < k < i < j$ . Тогда имеют место следующие неравенства:

$$\text{tw}(b_k, x) \leq -1, \quad \text{tw}(x, a_j) \leq -1.$$

**Доказательство.** В самом деле, пусть  $u$  — произвольное ребро компоненты  $C_k + 1$ . Тогда, в силу леммы 7.10 и леммы 7.12, имеем:

$$\text{tw}(b_k, x) = \text{tw}(b_k, u) + \text{tw}(u, x) \leq -1 + 0.$$

Второе неравенство доказывается точно так же.

Пусть  $D_{ij}$  — объединение паркетов  $D_i$  и  $D_j$ , и пусть  $a$  и  $b$  — пара произвольных ребер контура этого паркета, причем  $a$  лежит в перестроенной  $C_i$ , а  $b$  — в перестроенной  $C_j$ .

**Лемма 7.15** Имеет место:  $\text{tw}(a, b) \leq 2$ .

**Доказательство.** Пусть  $a'$  обозначает или ребро  $a$ , если  $a$  лежит на контуре скелета  $S$ , или, в противном случае, ребро контура скелета  $S$ , по которому крепится нарост, содержащий  $a$ . Аналогично определим ребро  $b'$  контура скелета  $S$ .

Пусть, для определенности,  $i < j$ , и предположим, что одна из компонент, скажем  $C_i$ , относится к первому классу, а вторая,  $C_j$ , — ко второму. Пусть  $b' \neq a_j$ . Тогда  $\text{tw}(a_j, b) \leq 2$  по условию. По лемме 7.14,  $\text{tw}(a', a_j) \leq -1$ , поэтому  $\text{tw}(a', b) \leq 1$ , и, значит,  $\text{tw}(a, b) \leq 2$ .

Пусть теперь  $b' = a_j$ . Тогда, по лемме 7.14,  $\text{tw}(a', b') = \text{tw}(a', a_j) \leq -1$ , поэтому,  $\text{tw}(a, b) \leq 1$ .

Случай, когда  $C_i$  относится ко второму классу, а  $C_j$  — к первому, разбирается точно так же.

Пусть теперь  $C_i$  и  $C_j$  принадлежат к первому классу. Тогда, по лемме 7.12,  $\text{tw}(a', b') \leq 0$ , откуда  $\text{tw}(a, b) \leq 2$ .

Рассмотрим, наконец, случай, когда обе компоненты  $C_i$  и  $C_j$  принадлежат ко второму классу. Тогда, в силу леммы 7.14, имеем:

$$\text{tw}(a, b) = \text{tw}(a, b_i) + \text{tw}(b_i, a_j) + \text{tw}(a_j, b) \leq 2 + (-2) + 2 = 2,$$

что и требовалось.

Пусть  $a$  и  $b$  — два произвольных ребра контура паркета  $D$ . Тогда существует  $D_i$  и  $D_j$ , такие что  $a$  содержится в перестроенной  $C_i$ , а  $b$  — в перестроенной  $C_j$ . Ясно, что  $a$  и  $b$  лежат на контуре паркета  $D_{ij}$ , равного объединению паркетов  $D_i$  и  $D_j$ .

Рассмотрим путь  $\gamma'$  на контуре паркета  $D_{ij}$ , соединяющий  $a$  с  $b$ , движение по которому от  $a$  к  $b$  происходит в положительном направлении. Рассмотрим аналогичный путь  $\gamma$ , лежащий на контуре паркета  $D$ . По лемме 2.4,  $\text{tw}_\gamma(a, b) = \text{tw}_{\gamma'}(a, b)$ . Поэтому, по лемме 7.12,  $\text{tw}(a, b) \leq 2$ . Теперь предложение следует из предложения 7.6. Доказательство закончено.

Таким образом, из предложения о независимости канонических компонент вытекает, что для описания возможного расположения наростов паркетов из  $\mathcal{P}_5$  на их скелетах, достаточно описать возможное расположение наростов на одной канонической компоненте. Из сказанного выше непосредственно вытекает следующая теорема.

**Теорема 7.2 (О расположении наростов)** Пусть  $C$  — каноническая компонента контура скелета  $S$  паркета  $D$  из  $\mathcal{P}_5$ . Тогда наросты паркета  $D$  могут располагаться на  $C$  по следующим правилам.

(1) Если  $C$  — крайняя компонента, то на расположение наростов на  $C$  никаких ограничений нет.

(2) Если же  $C$  — псевдобокovina, то наросты на ней могут быть расположены в соответствии с теоремой 2.3 главы 2.

Тем самым, полностью описаны паркеты из  $\mathcal{P}_5$ . К сожалению, в случае паркетов из  $\mathcal{P}_5$  пока не удалось доказать аналог теоремы 2.4 о реализации, тем не менее, она, по-видимому, имеет место.

**Гипотеза 7.1** Двойственный граф произвольного паркета из  $\mathcal{P}_5$  эквивалентен некоторой плоской минимальной сети с выпуклой границей.

# Литература

- [1] *Brazil M., Cole J., Rubinstein J.H., Thomas A.D., Weng J.F., Wormald N.C.* Full minimal Steiner trees on lattice sets. Preprint.
- [2] *Brazil M., Rubinstein J.H., Thomas A.D., Weng J.F., Wormald N.C.* Minimal Steiner trees for  $2^k \times 2^k$  square lattices. J. Combin. Theory, accepted for publication.
- [3] *Brazil M., Rubinstein J.H., Thomas A.D., Weng J.F., Wormald N.C.* Minimal Steiner trees for generalizid checkerboards.
- [4] *Brazil M., Rubinstein J.H., Thomas A.D., Weng J.F., Wormald N.C.* Minimal Steiner trees for rectangular arrays of lattice points. Research Report N 24, 1995, Dept. of Math., Univ. of Melbourne, Australia.
- [5] *Clark R.C.*, Communication networks, soap films and vectors. Phys. Ed., 1981, vol. 16, pp. 32–37.
- [6] *Cockayne E.J.*, On the Steiner problem. Canad. J. Math., 1967, vol. 10, pp. 431–450.
- [7] *Chung F.R.K., Graham R.L.*, Steiner trees for ladders. Ann. Disc. Math, 1978, v. 2, 173–200.
- [8] *Chung F.R.K., Gardner M., Graham R.L.*, Steiner trees on a checkerboard. Math. Magazine 1989, v. 62, 83–96.
- [9] *B. Delaunay*, Sur la sphère vide, Bull. Acad. Sci. USSR(VII), Classe Sci. Mat. Nat., 1934, p. 793–800.
- [10] *Dijkstra E.W.*, A note on two problems with connection with graphs. Numer. Math., 1959, vol. 1, no. 5, pp. 269–271.
- [11] *D. Z. Du*, On Steiner Ratio Conjectures. Manuscript. Inst. Appl. Math. Academia Sinica, Beijing, China, 1989.
- [12] *Du D.Z., Hwang F.K.*, A New Bound for the Steiner Ratio. Trans. Amer. Math. Soc., 1983, vol. 278, no. 1, pp. 137–148.

- [13] *Du D.Z., Hwang F.K.*, A Proof of Gilbert–Pollak’s Conjecture on the Steiner Ratio. DIMACS Technical Report, 1990, no. 90–72.
- [14] *Du D.Z., Hwang F.K.*, An approach for proving lower bounds: solution of Gilbert–Pollak’s Conjecture on the Steiner Ratio. Proc of the 31st annual symp. on found. of comp. science, 1990.
- [15] *Du D.Z., Hwang F.K., Chao S.C.*, Steiner minimal trees for points on a circle. Proc. Amer. Math. Soc., 1985, vol. 95, no. 4, pp. 613–618.
- [16] *Du D.Z., Hwang F.K., Weng J.F.*, Steiner minimal trees for points on a zig-zag lines. Trans. Amer. Math. Soc., 1983, vol. 278, no. 1, pp. 149–156.
- [17] *Du D.Z., Hwang F.K., Weng J.F.*, Steiner minimal trees for Regular Polygons. Disc. and Comp. Geometry, 1987, vol. 2, pp. 65–84.
- [18] *Du D.Z., Hwang F.K., Yao E.N.*, The Steiner ratio conjecture is true for five points. J. Combin Th., Ser. A38, 1985, pp. 230–240.
- [19] *Du D.Z., Hwang F.K., Song G.D., Ting G.T.*, Steiner minimal trees on sets of four points. Discr. and Comp. Geometry, 1987, vol. 2, pp. 401–414.
- [20] *Garey M.R., Johnson D.S.*, The complexity of computing Steiner minimal trees. SIAM, J. Algebraic Discrete Methods, 1977, vol. 32, 835–859.
- [21] *Garey M.R., Graham R.L., Johnson D.S.*, Some *NP*-complete geometric problems. Eighth Annual Symp. on Theory of Comput., 1976, pp. 10–22.
- [22] *Gilbert E.N., Pollak H.O.*, Steiner minimal trees. SIAM J. Appl. Math., 1968, vol. 16, no. 1, pp. 1–29.
- [23] *Hildebrandt S., Tromba A.*, Mathematics and optimal form. An imprint of Scientific American Books, Inc., New York, 1984.
- [24] *Hwang F.K.*, A linear time algorithm for full Steiner trees. Oper. Res. Letter, 1986, vol. 5, pp. 235–237.
- [25] *Hwang F.K., Weng J.F.*, Hexagonal coordinate Systems and Steiner minimal trees. Disc. Math., 1986. vol. 62, pp. 49–57.
- [26] *Hwang F.K., Richards D.*, Steiner Tree Problem. Bell Laboratories, Murray Hill, NJ, Technical Memorandum 1989.
- [27] *Hwang F.K., Richards D., Winter P.*, The Steiners Tree Problem. Elsevier Science Publishers (to appear).
- [28] *Jarník V., Kössler M.*, O minimalnich grafeth obeahujicich n danijch bodu. Cas. Pest. Mat. a Fys., 1934, vol. 63, pp. 223–235.

- [29] *Kruskal J.B.*, On the shortest spanning subtree of a graph and traveling salesman problem. Proc. Amer. Math. Soc., 1956, vol. 7, pp. 48–50.
- [30] *Kuhn H.W.*, Steiner's problem revisited. In the book Studies in Optimization, ser. Studies in Math., vol. 10, Math. Assoc. Amer., edited by G. B. Dantzig and B. C. Eaves, 1975, pp. 53–70.
- [31] *Melzak Z.A.*, On the problem of Steiner. Canad. Math. Bull., 1960, vol. 4, pp. 143–148.
- [32] *Melzak Z.A.*, Companion to concrete mathematics. Wiley–Interscience, New York, 1973.
- [33] *Pollak H.O.*, Some remarks on the Steiner problem. J. Combin. Thy., Ser. A24, 1978, pp. 278–295.
- [34] *Preparata F., Shamos M.*, Computational Geometry. An introduction. New York, Springer-Verlag, 1985.
- [35] *Prim R.C.*, Shortest connecting networks and some generalizations. BSTJ, 1957, vol. 36, pp. 1389–1401.
- [36] *Rubinstein J.H., Thomas D.A.*, The Steiner ratio conjecture for six points. J. Combin. Thy., Ser. A58, 1989, pp. 54–77.
- [37] *Rubinstein J.H., Thomas D.A.*, Graham's problem on shortest networks for points on a circle, Algorithmica.
- [38] *Rubinstein J.H., Thomas D.A.*, A variational approach to the Steiner network problem. Ann. Oper. Res., 1991, v. 33, 481–499.
- [39] *Shamos M.I.*, Computational Geometry Ph. D. Thesis, Dept. of Comput. Sci., Yale Univ., 1978.
- [40] *W. D. Smith*, How to find Steiner minimal trees in Euclidean  $d$ -space. Algorithmica, 1992, N 7, p. 137–177.
- [41] *Thomas D.A., Rubinstein J.H., Cole T.*, The Steiner minimal network for convex configuration, The univ. of Melbourne, Depart. of Math., Research report, 1991, Preprint N 15.
- [42] *Zacharias M.*, Encyklopädie der Mathematischen, Wissenschaften, vol. III AB9.
- [43] *Емеличев В.А. и др.*, Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
- [44] *Дао Чонг Тхи, Фоменко А.Т.*, Минимальные поверхности и проблема Плато. М.: Наука, 1987.

- [45] *Фоменко А.Т.*, Топологические вариационные задачи. М.: Изд-во МГУ, 1984.
- [46] *Фоменко А.Т.*, Вариационные методы в топологии. М.: Наука, 1982.
- [47] *Тужилин А.А., Фоменко А.Т.*, Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. М.: Наука, 1991.
- [48] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, Решение задачи Штейнера для выпуклых границ. Успехи матем. наук, 1990, т. 45, 2, с. 207–208.
- [49] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, Задача Штейнера для выпуклых границ или плоские минимальные сети. Матем. сб., 1991, т. 182, 12, с. 1813–1844.
- [50] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато. Успехи матем. наук, 1992, т. 47, 2 (284), с. 53–115.
- [51] *Ivanov A.O., Tuzhilin A.A.*, The Steiner problem for convex boundaries, I: general case. Advances in Soviet Mathematics, 1993, vol. 15, pp. 15–92.
- [52] *Ivanov A.O., Tuzhilin A.A.*, The Steiner problem for convex boundaries, II: the regular case. Advances in Soviet Mathematics, 1993, vol. 15, pp. 93–131.
- [53] *Ivanov A.O., Tuzhilin A.A.*, Minimal Networks. The Steiner Problem and Its Generalizations. N.W., Boca Raton, Florida, CRC Press, 1994.
- [54] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, Топологии локально минимальных плоских бинарных деревьев. Успехи мат. наук, 1994, т. 49, вып. 6(300), с. 191–192.
- [55] *Ivanov A.O., Tuzhilin A.A.*, Some problems concerning minimal networks. International Journal of Shape Modeling, 1994, v. 1, N 1, p. 81–107.
- [56] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, Взвешенные минимальные бинарные деревья. Успехи мат. наук, 1995, т. 50, вып. 3, с. 155–156.
- [57] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, Геометрия плоских линейных деревьев, Успехи мат. наук, 1996, т. 51, вып. 2, с. 161–162.
- [58] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, Число вращения плоских линейных деревьев. Матем. сб., 1996, т. 187, N 8, с. 41–92.
- [59] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, О минимальных бинарных деревьях с правильной границей. Успехи матем. наук, 1996, т. 51, N 1, с. 139–140.



- [60] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, Структура множества плоских минимальных сетей с заданными топологией и границей, Успехи матем. наук, 1996, т. 51, N 3, с. 201–202.
- [61] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, Классификация минимальных скелетов с правильной границей, Успехи матем. наук, 1996, т. 51, N 4, с. 157–158.
- [62] *Ivanov A.O., Tuzhilin A.A.*, Planar Local Minimal Binary Trees with Convex, Quasiregular, and Regular Boundaries. Preprint, 1997, Sonderforschungsbereich 256, 490.
- [63] *Иванов А.О., Исхаков И.В., Тужилин А.А.*, Минимальные сети на правильных многоугольниках: реализация линейных паркетов. Вестник МГУ, сер. мат., 1993, N6, с. 77–80.
- [64] *Иванов А.О., Птицына И.В., Тужилин А.А.*, Классификация замкнутых минимальных сетей на плоских двумерных торах. Матем. Сборник, 1992, т. 183, 12, с. 3–44.
- [65] *Тужилин А.А.*, Минимальные бинарные деревья с правильной границей: случай скелетов с четырьмя концами. Матем. Сборник, 1996, т. 187, N 4, с. 117–159.
- [66] *Тужилин А.А.*, Минимальные бинарные деревья с правильной границей: случай скелетов с пятью концами. Матем. Заметки, 1997, т. 61, N 6.
- [67] *Тужилин А.А.*, Полная классификация локально минимальных бинарных деревьев с правильной границей, двойственные триангуляции которых являются скелетами. Фундаментальная и прикладная математика, 1996, т. 2, N 2, с. 511–562.

# Список работ по теме диссертации

- [47] *Тужилин А.А., Фоменко А.Т.*, Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. М.: Наука, 1991. (Добавление 1: теорема 1, теорема 2, предложения 4, 5, 7, 8, 9 доказаны А. А. Тужилиным).
- [48] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, Решение задачи Штейнера для выпуклых границ. Успехи матем. наук, 1990, т. 45, 2, с. 207–208. (Теорема и предложения 1, 2 доказаны А. А. Тужилиным).
- [49] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, Задача Штейнера для выпуклых границ или плоские минимальные сети. Матем. сб., 1991, т. 182, 12, с. 1813–1844. (Теоремы 1, 2.1, 3, 4.1, и предложения 1.2, 2.3–2.6, 3.1, 3.2, 3.5, 3.6, 3.8, 3.9, 3.12 доказаны А. А. Тужилиным).
- [50] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато. Успехи матем. наук, 1992, т. 47, 2 (284), с. 53–115. (Теоремы 1.2, 1.3, 3.1–3.8 и предложения 3.3, 3.4, 3.5, 3.9, 3.11–3.14, 3.17 доказаны А. А. Тужилиным).
- [51] *Ivanov A.O., Tuzhilin A.A.*, The Steiner problem for convex boundaries, I: general case. *Advances in Soviet Mathematics*, 1993, vol. 15, pp. 15–92. (Теоремы 1, 2, 3 и предложения 2.2, 4.1, 4.2, 8.1–8.5, 9.1, 10.2–10.7, 11.1, 11.2 доказаны А. А. Тужилиным).
- [52] *Ivanov A.O., Tuzhilin A.A.*, The Steiner problem for convex boundaries, II: the regular case. *Advances in Soviet Mathematics*, 1993, vol. 15, pp. 93–131. (Теоремы 1–6 и предложения 2.1, 2.2 доказаны А. А. Тужилиным).
- [53] *Ivanov A.O., Tuzhilin A.A.*, Minimal Networks. The Steiner Problem and Its Generalizations. N.W., Boca Raton, Florida, CRC Press, 1994. (Глава 4: Теоремы 2.1, 2.2; глава 6: теоремы 1.1–1.4, 2.1, 2.2 и предложения 1.1, 1.3, 1.5–1.11, 1.14–1.18, 2.2, 2.3, 2.5, 2.6; Глава 7: теоремы 2.1, 3.1, 4.1, 4.2, 5.1, 6.1 и предложения 2.1, 3.1 доказаны А. А. Тужилиным).

- [55] *Ivanov A.O., Tuzhilin A.A.*, Some problems concerning minimal networks. International Journal of Shape Modeling, 1994, v. 1, N 1, p. 81–107. (Теоремы 1–5 и предложения 2.1–2.6 доказаны Тужиным)
- [56] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, О минимальных бинарных деревьях с правильной границей. Успехи матем. наук, 1996, т. 51, N 1, с. 139–140. (Основная теорема доказана Тужиным)
- [61] *Иванов А.О., Тужилин А.А.*, Классификация минимальных скелетов с правильной границей, Успехи матем. наук, 1996, т. 51, N 4, с. 157–158. (Основная теорема доказана Тужиным)
- [62] *Ivanov A.O., Tuzhilin A.A.*, Planar Local Minimal Binary Trees with Convex, Quasiregular, and Regular Boundaries. Preprint, 1997, Sonderforschungsbereich 256, 490. (Теоремы 2.1–2.5, 3.1–3.2, 4.1–4.3 доказаны Тужиным)
- [65] *Тужилин А.А.*, Минимальные бинарные деревья с правильной границей: случай скелетов с четырьмя концами. Матем. Сборник, 1996, т. 187, N 4, с. 117–159.
- [66] *Тужилин А.А.*, Минимальные бинарные деревья с правильной границей: случай скелетов с пятью концами. Матем. Заметки, 1997, т. 61, N 6.
- [67] *Тужилин А.А.*, Полная классификация локально минимальных бинарных деревьев с правильной границей, двойственные триангуляции которых являются скелетами. Фундаментальная и прикладная математика, 1996, т. 2, N 2, с. 511–562.