ФГБОУ ВО МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 514.8+517.958+517.984

Цветкова Анна Валерьевна

Геометрические свойства волнового уравнения на графах и сингулярных пространствах постоянной кривизны

01.01.04 – геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор А. И. Шафаревич

Москва – 2016

Оглавление

Введение

В последние несколько десятилетий появилось множество работ, посвященных дифференциальным уравнениям и краевым задачам на геометрических объектах. Дифференциальные уравнения на плоских графах используются при моделировании различных задач естествознания, например, колебаний упругих сеток. Дифференциальные уравнения на сингулярных пространствах или, как их еще называют, декорированных графах, то есть топологических постранствах, полученных из плоских графов заменой вершин на многоообразия размерности не выше трех, используются, например, для моделирования состояния электронов в молекулах.

Подобные объекты впервые появились в работе Б.С. Павлова и М. Д. Фаддеева [5]. Для определения дифференциальных операторов на сингулярных пространствах в этой работе была применена теория самосопряженных расширений. Среди работ, посвященных дифференциальным операторам на сингулярных пространствах, также можно отметить работу Й. Брюнинга и В. Гейлера [15], в которой изучались свойства операторов на многообразиях с присоединенной струной. Интерес также представляет работа А.А. Толченникова [9], в которой исследовались свойства ядра оператора Лапласа - Бельтрами на декорированных графах. Существуют также работы, посвященные получению аналогов классических результатов теории дифференциальных уравнений на геометрических графах. Многие из результатов описаны в книге Ю.В. Покорного, О.М. Пенкина, В.Л. Прядиева и др. [8].

Настоящая диссертационная работа посвящена нахождению точного решения задачи Коши для волнового уравнения на сингулярных пространствах постоянной кривизны и однородном дереве, а также изучению некоторых его свойств.

Структура работы

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка публикаций по теме диссертации и списка литературы.

В первой главе работы вводятся определения и даются предварительные сведения.

Вторая глава настоящей диссертационной работы посвящена нахождению точного решения задачи Коши для волнового уравнения на простейших сингулярных пространствах постоянной кривизны, а именнно, состоящих из поверхности постоянной кривизны с приклеенным лучом. Начальные условия задаются гладкой функцией u_0, имеющей компактный носитель на луче. В работе рассматриваются четыре поверхности: двумерное и трехмерное Евклидовы пространства, а также двумерная и трехмерная сферы.

Оператор Лапласа - Бельтрами на сингулярных пространствах определяется, опираясь на два требования: этот оператор должен быть самосопряженным и на каждой компоненте сингулярного пространства должен действовать как классический оператор Лапласа - Бельтрами. Таким образом, оператором Лапласа - Бельтрами на сингулярном пространстве называется любое самосопряженное расширение оператора A_0 – прямой суммы операторов Лапласа - Бельтрами на отрезках и многообразиях, из которых состоит сингулярное пространство, ограниченных на функции, зануляющиеся в точках склейки.

Каждое самосопряженное расширение может быть задано с помощью граничных условий в точках склейки многообразий и отрезков. Они должны удовлетворять некоторым уравнениям, которые определяются унитарной матрицей. В параграфе 2.1 дано описание тех унитарных матриц, которые задают неотрицательно определенный оператор Лапласа - Бельтрами на рассматриваемых сингулярных пространствах постоянной кривизны.

Далее описаны аналоги классических формул Кирхгофа для простейших сингулярных пространств постоянной кривизны. В параграфе 2.2 рассматривается декорированный граф, содержащий трехмерное Евклидово пространство. В этом параграфе найдено решение задачи Коши для волнового уравнения на описанном геометрическом объекте. В случае трехмерного Евклидова пространства формулы имеют наиболее простой вид: на луче решение описывается функцией $u_0(z+ct)+v(z-ct)$, где функция v задает волну, отраженную от поверхности. На Евклидовом пространстве решение имеет вид: $\frac{f(r-ct)}{r}$. Унитарная матрица, определяющая самосопряженное расширение, задает связь между функциями u_0, v и f.

В параграфе 2.3 найдено решение задачи Коши на простейшем сингулярном пространстве, содержащем двумерное Евклидово пространство. Параграф 2.4 посвящен нахождению решения задачи Коши на простейшем декорированном графе, содержащем трехмерную сферу, а в параграфе 2.5 описано решение в случае графа, содержащего двумерную сферу.

В параграфе 2.6 рассматриваются особые случаи, а именно, случай полного отражения волны от поверхности и случай полного прохождения, характеризующийся тем, что волна не отражается от поверхности, а полностью уходит на нее. Для всех рассматриваемых сингулярных пространств постоянной кривизны полное отражение реализуется в случае, когда самосопряженное расширение задано матрицей

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\rho_1} & 0 \\ 0 & e^{i\rho_2} \end{pmatrix},\ \rho_1 \in [0,\pi],\ \rho_2 \in [\pi; 2\pi].$$

Для графа, содержащего трехмерное Евклидово пространство, полное прохождение реализуется, если самосопряженное расширение задается матрицей

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1-4\pi}{1+4\pi} & x_2 \\ -\overline{x_2} & \frac{1-4\pi}{1+4\pi} \end{pmatrix},\ |x_2| = \frac{4\sqrt{\pi}}{1+4\pi}.$$

Для остальных рассматриваемых простейших сингулярных пространств случай полного прохождения не реализуется. Это означает, что какая бы унитарная матрица ни задавала самосопряженное расширение, доля энергии волны отразится от поверхности. Отсюда возникает вопрос о распределении энергии волны, являющейся решением задачи Коши на различных сингулярных пространствах, в зависимости от самосопряженного расширения. Для некоторых сингулярных пространств ответ на этот вопрос дается в третьей главе.

Третья глава настоящей диссертационной работы посвящена распределению энергии решения задачи Коши для волнового уравнения на двух видах декорированных графов постоянной кривизны, содержащих трехмерное Евклидово пространство. В параграфе 3.1 рассматривается декорированный граф, состоящий из трехмерного Евклидова пространства с присоединенным лучом. Для каждой унитарной матрицы, задающей самосопряженное расширение, найдена доля энергии, которая остается на луче, и доля энергии, уходящая на поверхность после отражения.

В параграфе 3.2 рассматривается сингулярное пространство, состоящее из двух трехмерных Евклидовых пространств, соединенных лучом. Описано решение задачи Коши на данном геометрическом объекте, а также поведение энергии волны, являющейся решением, при стремлении времени к бесконечности. Если хотя бы в одной из точек склейки унитарная матрица, задающая самосопряженое расширение, не является матрицей полного отражения, то энергия волны на отрезке стремится к нулю при стремлении времени к бесконечности. Также найдены доли энергии, которые концентрируются на каждой из поверхностей при стремлении времени к бесконечности.

Четвертая глава посвящена нахождению решения задачи Коши для волнового уравнения на бесконечном однородном дереве, а также описанию распределения энергии при стремлении времени к бесконечности. Оператор Лапласа на плоском графе определяется из тех же соображений, что и оператор Лапласа - Бельтрами на сингулярных пространствах. Таким образом, оператором Лапласа на плоском графе называется любое самосопряженное расширение оператора A_0 – прямой суммы операторов $-\frac{d^2}{dx^2}$ на ребрах графа, ограниченных на функции, зануляющиейся в вершинах графа.

Однородным деревом называется бесконечное корневое дерево, из корня которого выходит ровно одно ребро, а из любой другой вершины выходит $b > 1$ ребер. В работе А. Соболева и М. Соломяка [13] изучаются спектральные свойства оператора Шредингера на однородном дереве. В этой работе рассматривается оператор Лапласа, самосопряженное расширение которого определяется условиями Кирхгофа в вершинах однородного дерева. В работе [11] А.А. Толченникова, В.Л. Чернышева и А.И. Шафаревича рассматривается распространение гауссовых пакетов на однородном дереве с описанным оператором Лапласа. Компьютерный эксперимент показывает, что не вся энергия уходит на бесконечность, т.е. некоторая доля энергии остается на конечном участке дерева при стремлении времени к бесконечности.

В четвертой главе настоящей диссертационной работы вводится некоторое обобщение оператора Лапласа, рассматриваемого в работах А. Соболева и М. Соломяка, а также А.А. Толченникова, В.Л. Чернышева и А.И. Шафаревича. Самосопряженное расширение определяется следующими условиями в вершинах дерева:

1. $f|_{e_v^-}(v) = \frac{1}{\gamma} f|_{e_v^1}(v) = ... = \frac{1}{\gamma} f|_{e_v^b}$;
2. $f'|_{e_v^-}(v) = \gamma(f'|_{e_v^1}(v) + ... + f'|_{e_v^b}(v))$;
3. $f(o) = 0$.

Здесь "o" – корень дерева, $v \neq$ "o" – некорневая вершина, e_v^- – ребро, входящее в вершину v, e_v^1, $e_v^2, ...,$ e_v^b – ребра, выходящие из вершины v, $\gamma > 0$ – некоторая константа. Заметим, что если $\gamma = 1$, то заданные условия совпадают с условиями Кирхгофа.

Описанный оператор Лапласа Δ определен на пространстве $L^2(\Gamma) = \sum_{e \in E(\Gamma)} \oplus L^2(e)$, где Γ – однородное дерево, $E(\Gamma)$ – множество его ребер. В параграфе 4.2 найден оператор Δ_0 в $L^2(\mathbb{R}_+)$, который унитарно эквивалентен оператору Δ, ограниченному на функции, симметричные относительно корня дерева. Также описан спектр оператора Δ_0. В случае, когда $\gamma^2 b > 1$, он содержит и дискретную, и непрерывную часть, а в случае $0 < \gamma^2 b \leq 1$ спектр чисто непрерывный.

В параграфе 4.3 описано решение задачи Коши для волнового уравнения, в случае, когда начальное условие локализовано на ребре дерева, выходящем из корня.

В параграфе 4.4 аналитически найдено распределение энергии волны, являющейся решением задачи Коши, при стремлении времени к бесконечности. Доказано, что волна $w(x,t)$, порожденная непрерывным спектром, уходит на бесконечность, то есть для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ и $x \in (n-1, n)$

$$\lim_{t \to \infty} w(x,t) = 0.$$

Прямым следствием этого результата является утверждение о том, что если $0 < \gamma^2 b \leq 1$, то при стремлении времени к бесконечности вся энергия "уходит на бесконечность," то есть предел энергии на каждом уровне графа при стремлении времени к бесконечности равен нулю. В этом параграфе также сформулирована теорема, утверждающая, что в случае $\gamma^2 b > 1$ некоторая доля энергии остается на каждом уровне дерева при стремлении времени к бесконечности. А именно, предел энергии на уровне $n \in \mathbb{N}$ равен $\frac{(\gamma^2 b-1)^2}{(\gamma^2 b)^{n+1}} E_0$, где E_0 – энергия начальной волны. Доля энергии, которая остается на конечном участке дерева, равна $\frac{\gamma^2 b-1}{\gamma^2 b}$.

В параграфе 4.5 рассматривается локальное поведение энергии в окрестности вершины. Оказывается, что после того, как волна достигает вершины, доля энергии, остающаяся на ребре, входящем в вершину, равна $\frac{(1-\gamma^2 b)^2}{(1+\gamma^2 b)^2}$. В зависимости от выбора констаты γ данное выражение принимает любое значение из промежутка $[0; 1)$. Таким образом, при надлежащем выборе константы рассматриваемый оператор Лапласа дает любое локальное поведение энергии, кроме полного отражения. Случай полного отражения реализуется, например, если самосопряженное расширение определяется диагональной матрицей $diag\{1, ..., 1\}$. В этом случае вся энергия остается на ребре дерева, выходящем из корня.

Список основных результатов, выносимых на защиту

Результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Описание унитарных матриц, задающих неотрицательно определенный оператор Лапласа - Бельтрами на простейших сингулярных пространствах постоянной кривизны (Теорема 5);

2. Описание решений задачи Коши для волнового уравнения на простейших сингулярных пространствах постоянной кривизны, содержащих двумерное и

трехмерное Евклидовы пространства, а также двумерную и трехмерную сферы (Теорема 6, Теорема 7, Теорема 8 и Теорема 9);

3. Описание унитарных матриц, задающих полное отражение и полное прохождение волны для рассматриваемых сингулярных пространств (Следствие 1, Следствие 2 и Следствие 3);

4. Описание распределения энергии волны, являющейся решением задачи Коши, при стремлении времени к бесконечности на простейшем сингулярном пространстве постоянной кривизны, содержащем трехмерное Евклидово пространство, а также на декорированном графе, состоящем из двух трехмерных Евклидовых пространств, соединенных отрезком (Теорема 10 и Теорема 11);

5. Описание спектра оператора Лапласа с обобщенными условиями Кирхгофа на однородном дереве (Теорема 14 и Теорема 15);

6. Описание решения задачи Коши для волнового уравнения на однородном дереве (Теорема 16);

7. Описание распределения энергии волны на однородном дереве при стремлении времени к бесконечности в зависимости от выбора оператора Лапласа (Теорема 17 и Теорема 18).

Методы исследования

В диссертации применяются методы геометрии и топологии гибридных пространств, методы теории расширений и спектральной теории, а также используется теория специальных функций, связанных с пространствами постоянной кривизны.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- на Международной научной конференции «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ» (Уфа, 1-3 октября 2015),

- на 58-ой научной конференции МФТИ (Москва, 23-28 ноября 2015),
- на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов–2016» (МГУ, 11-15 апреля 2016),
- на Международной научной конференции «Александровские чтения –2016» (МГУ, 23-25 мая 2016),
- на Международной научной конференции «Дни дифракции –2016» (Санкт-Петербург, 27 июня - 1 июля 2016),
- на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 8-12 июля 2016),
- на Международной конференции «Анализ, вероятность и геометрия» (МГУ, 26 сентября - 1 октября 2016).

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в трех статьях [1.1, 1.2, 1.3] и пяти тезисах [1.4 – 1.8], из них в журналах из перечня ВАК — 3 статьи.

Благодарности

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Шафаревичу Андрею Игоревичу за постановку задач, ценные советы и постоянное внимание к работе, а также всему коллективу кафедры дифференциальной геометрии и приложений за доброжелательную и творческую атмосферу.

Глава 1

Предварительные сведения

1.1 Начальные определения и теоремы

Пусть A – линейный оператор в гильбертовом пространстве H, область определения которого $D(A)$ всюду плотна в H.

Определение 1. Множество элементов $(x, Ax) \in H \oplus H$, где $x \in D(A)$, называется *графиком оператора* A.

Определение 2. Линейный оператор B называется *расширением оператора* A, если его график содержит график оператора A.

Если B является линейным расширением оператора A, то будем писать $A \subset B$.

Рассмотрим элемент $x \in D(A)$. Ему соответствует единственный элемен $y^* \in H$, такой что

$$(Ax, y) = (x, y^*).$$

Определение 3. Линейный оператор A^* называется *сопряженным к оператору* A, если $A^*y = y^*$, т. е. для любого $x \in D(A)$ выполнено равенство $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

Определение 4. Оператор A называется *симметрическим*, если $(Ax, y) = (x, Ay)$ $\forall x, y \in D(A)$.

Определение 5. Оператор A называется *самосопряженным*, если $A = A^*$, т. е. $D(A) = D(A^*)$ и $Ax = A^*x$ $\forall x \in D(A)$.

В дальнейшем нам нужно будет описывать самосопряженные расширения операторов. Для этого мы воспользуемся следующими теоремами.

Определение 6. Пусть A – симметрический оператор. Обозначим

$$N_+ = Ker(i - A^*),\ N_- = Ker(i + A^*).$$

Множества $N_\pm$ называются *дефектными пространствами* оператора A. Пара чисел $n_\pm = dim N_\pm$ называются *индексами дефекта* оператора A.

Теорема 1. [4] Пусть A – замкнутый симметрический оператор с индексами дефекта n_+ и n_-. Тогда

1. A самосопряжен тогда и только тогда, когда $n_+ = n_- = 0$.
2. A обладает самосопряженным расширением тогда и только тогда, когда $n_+ = n_-$.

Определение 7. Пусть A – замкнутый симметрический оператор с конечными и равными индексами дефекта. Пусть X – Евклидово пространство, а $\Gamma^{(i)} : D(A^*) \to X$ $(i = 1, 2)$ – линейные отображения. Тройка $(X, \Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)})$ называется *пространством граничных значений*, если

1. для любых $x, y \in X$ существует такой вектор $a \in D(A^*)$, что $\Gamma^{(1)}a = x,\ \Gamma^{(2)}a = y$;
2. для любых $a, b \in D(A^*)$ выполнено условие:

$$(a, A^*b) - (A^*a, b) = (\Gamma^{(1)}a, \Gamma^{(2)}b) - (\Gamma^{(2)}a, \Gamma^{(1)}b).$$

Определение 8. Пусть X – Евклидово пространство. Подпространство $\Lambda \subset X \oplus X$ называется *лагранжевым*, если оно совпадает со своим косоортогональным дополнением относительно формы $[x, y] = (x_1, y_2) - (x_2, y_1)$ на $X \oplus X$.

Теорема 2. [15] Пусть A – симметрический оператор с конечными и равными индексами дефекта и пусть $(X, \Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)})$ – пространство граничных значений для A. Для любого лагранжева подпространства $\Lambda \subset X \oplus X$ множество

$\{a \in D(A^*) \mid \Gamma a \in \Lambda\}$, где $\Gamma = (\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)})$ является областью определения самосопряженного расширения A^Λ оператора A. Более того, это соответствие $\Lambda \leftrightarrow A^\Lambda$ является биекцией.

Таким образом, самосопряженное расширение задается лагранжевым подпространством, а его можно задать с помощью унитарной матрицы.

Теорема 3. [15] Для любого лагранжева подпространства $\Lambda \in X \oplus X$ существует однозначно определенный унитраный оператор U_Λ, действующий на X, такой что отношение $(x_1, x_2) \in \Lambda$ эквивалентно равенству $i(I + U_\Lambda)x_1 = (I - U_\Lambda)x_2$, где I – единичная матрица.

1.2 Оператор Лапласа на плоском графе

Пусть G – геометрический граф. Обозначим ребра графа $\{e_i\}_{i=1}^n$, а вершины графа $\{v_j\}_{j=1}^m$. Введем оператор Лапласа на данном графе. Рассмотрим пространство

$$L^2(G) = \oplus_{i=1}^n L^2(e_i).$$

На каждом ребре e_i рассмотрим самосопряженный оператор $\delta_i = -\frac{d^2}{dx^2}$ с условиями Неймана. Определим оператор $\delta_{0,i} \subset \delta_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$:

$$D(\delta_{0,i}) = \{f \in D(\delta_i) \mid f(v_i^1) = f(v_i^2) = 0\},$$

где v_i^1, v_i^2 – вершины, лежащие на ребре e_i.

Обозначим $A_0 = \oplus_{i=1}^n \delta_{i,o}$. Этот оператор является симметрическим с совпадающими индексами дефекта.

Определение 9. Всякое самосопряженное расширение A оператора A_0 называется *оператором Лапласа* на геометрическом графе G.

Самосопряженные расширения оператора A_0 можно описать с помощью пространства граничных значений. В данном случае $\Gamma^{(k)} : D(A_0^*) \to \mathbb{C}^{2n}$ $(k = 1, 2)$ определены равенством:

$$\Gamma^{(1)} f = (-f_1'(v_1^1), f_1'(v_1^2), ..., -f_n'(v_n^1), f_n'(v_n^1)),$$

$$\Gamma^{(2)} f = (f_1(v_1^1), f_1(v_1^2), ..., f_n(v_n^1), f_n(v_n^1)),$$

где f_i $(i = 1, ..., n)$ – ограничение f на e_i.

По теореме 3 самосопряженное расширение оператора A_0 можно задать с помощью унитарной матрицы. Таким образом, оператором Лапласа на графе G называется оператор A, определенный на множестве функций из пространства Соболева $f(x) \in \oplus_{i=1}^n H^2(e_i)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$i\,(I+U)\begin{pmatrix} -f_1'(v_1^1) \\ ... \\ f_n'(v_n^2) \end{pmatrix} = (I-U)\begin{pmatrix} f_1(v_1^1) \\ ... \\ f_n(v_n^2) \end{pmatrix},$$

где U – некоторая унитарная матрица.

1.3 Оператор Лапласа на декорированном графе

Определение 10. Рассмотрим набор отрезков $\{I_j = [0, l_j]\}_{j=1}^n$, а также набор гладких, замкнутых, связных, римановых многообразий $\{M_i\}_{i=1}^m$ размерности 2 или 3. Концам отрезков поставим в соответствие точки на многообразиях, причем так, чтобы разным концам отрезков соответствовали разные точки на многообразиях. Полученное топологическое пространство T будем назвать *сингулярным пространством или декорированным графом.*

Обозначим $k_1(j),\ k_2(j)$ номера многообразий, к которым примыкает отрезок I_j. Обозначим $q_1(j) \in M_{k_1(j)}, q_2(j) \in M_{k_2(j)}$ точки, в которых отрезок I_j примыкает к многообразиям. Будем называть их точками склейки.

Теперь определим оператор Лапласа - Бельтрами на этом топологическом пространстве. Пусть $\{\triangle_i\}_{i=1}^m$ – самосопряженные операторы Лапласа - Бельтрами на многообразиях M_i соответственно, т. е. замыкание оператора

$$-\sum_{k,l=1}^{dim M_i} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{g} g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^k}\right),$$

определенного на $C^\infty(M_i)$. Пусть $\{\delta_j\}_{j=1}^n$ – самосопряженные операторы $-\frac{d^2}{dx^2}$ на I_j с условиями Неймана ($f'(0) = f'(l_j) = 0,\ j = 1, ..., n$).

Определим операторы $\triangle_{0,i} \subset \triangle_i$ $(i = 1, ..., m)$ и $\delta_{0,j} \subset \delta_j$ $(j = 1, .., n)$:
$D(\triangle_{0,i}) = \{f \in D(\triangle_i) \mid f(q) = 0$, где q – точка склейки $M_i\}$ $(i = 1, ..., m)$,
$D(\delta_{0,j}) = \{f \in D(\delta_j) \mid f(0) = f(l_j) = 0\}$ $(j = 1, ..., n)$.

Обозначим $A_0 = \oplus_{i=1}^{m} \triangle_{0,i} \oplus_{j=1}^{n} \delta_{0,j}$. Это симметрический оператор.

Определение 11. Всякое самосопряженное расширение A оператора A_0 будем называть *оператором Лапласа - Бельтрами* на декорированном графе T.

Для того, чтобы описать самосопряженные расширения оператора A_0, будем использовать теорему:

Теорема 4. [15] Любая функция $f \in D(\triangle_{0,i}^*)$ $(i = 1, ..., m)$ имеет следующее асимптотическое разложение в окрестности точки склейки q_j:

$$f(x) = a_j(f) F_0(x, q_j) + b_j(f) + o(1),$$

где $a_j(f),\ b_j(f) \in \mathbb{C}$, при этом

$$F_0(x, q) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln\left(d\left(x, q\right)\right), & \dim \mathrm{M} = 2; \\ \frac{1}{4\pi} d(x, q)^{-1}, & \dim \mathrm{M} = 3, \end{cases}$$

где $d(x, q)$ – геодезическое расстояние.

Для топологического пространства T линейные операторы $\Gamma^{(j)} : D(A_0^*) \to \mathbb{C}^{4n} (j = 1, 2)$ определены равенством:

$$\Gamma^{(1)} f = (a_{q_1(1)}(f_{k_1(1)}), a_{q_2(1)}(f_{k_2(1)}), ..., a_{q_1(n)}(f_{k_1(n)}), a_{q_2(n)}(f_{k_2(n)}), -f'_{m+1}(0), f'_{m+1}(l_1), ..., -f'_{m+n}(0), f'_{m+n}(l_n)),$$

$$\Gamma^{(2)} f = (b_{q_1(1)}(f_{k_1(1)}), b_{q_2(1)}(f_{k_2(1)}), ..., b_{q_1(n)}(f_{k_1(n)}), b_{q_2(n)}(f_{k_2(n)}), f_{m+1}(0), f_{m+1}(l_1), ..., f_{m+n}(0), f_{m+n}(l_n)),$$

где f_i $(i = 1, ..., m)$ – ограничение f на M_i, f_{m+j} $(j = 1, ..., n)$ – ограничение f на I_j.

Глава 2

Задача Коши для волнового уравнения на простейших декорированных графах постоянной кривизны

Определение 12. *Простейшим декорированным графом постоянной кривизны* будем называть граф, состоящий из поверхности постоянной кривизны размерности два или три, к которой приклеен луч.

Рассмотирим простейшие декорированные графы постоянной кривизны, содережащие двумерное и трехмерное Евклидовы пространства, а также двумерную и трехмерную сферы.

Найдем решение задачи Коши для волного уравнения на подобных графах:

$$\begin{cases} u_{tt} = -c^2 Au, \\ u|_{t=0} = u_0(z), \\ u_t|_{t=0} = cu_0'(z). \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь A – оператор Лапласа на декорированном графе, а $u_0(z)$ – гладкая функция, которая имеет компактный носитель в окрестности точки z_0, лежащей на луче, такой что $z_0 > 0$, и точка $z = 0$ не принадлежит этому носителю. Точка $z = 0$ – точка пересечения луча и поверхности.

Для начала рассмотрим решение задачи Коши на луче. Оно будет иметь вид:

$$u(z,t) = u_0(z+ct) + v(z-ct). \tag{2.2}$$

Здесь функция $v(z,t)$ является неизвестной и задает волну, которая отразилась от поверхности. При этом $v(z) = 0$ для любого $z \geq 0$ (т. к. должны выполняться граничные условия), т. е. функция v имеет носитель на отрицательной части прямой.

Заметим также, что по теореме 4 граничные условия для нашей задачи зависят только от геодезического расстояния. Следовательно, в силу симметричности, решение на поверхности тоже должно зависеть только от геодезического расстояния. Действительно, рассмотрим изометрии, которые оставляют точку склейки на месте. Такие изометрии переводят решение в решение, значит, в силу единственности решения задачи Коши для волнового уравнения, оно должно зависеть только от геодезического расстояния.

Теперь рассмотрим наш декорированный граф. Пространство граничных значений на нем определяется следующим образом:

$$\Gamma^{(1)} = (a(t), -h'(0,t)),$$

$$\Gamma^{(2)} = (b(t), h(0,t)),$$

где функция $h(0,t)$ – это решение задачи на луче в точке 0.

Мы требуем, чтобы пространство граничных значений принадлежало лагранжевой плоскости (Теорема 2), тогда должно выполняться условие (Теорема 3):

$$i(I+U)\begin{pmatrix} a(t) \\ -h'(0,t) \end{pmatrix} = (I-U)\begin{pmatrix} b(t) \\ h(0,t) \end{pmatrix},$$

где $U = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ – унитарная матрица. Это условие задает систему из двух уравнений, которые связывают неизвестные функции a, b и v:

$$(I-U)\begin{pmatrix} b(t) \\ v(-ct)+u_0(ct) \end{pmatrix} = i(U+I)\begin{pmatrix} a(t) \\ -v'(-ct)-u_0'(ct) \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

2.1 Матрицы, задающие неотрицательно определенный оператор

Заметим, что задача Коши корректна тогда и только тогда, когда оператор Лапласа неотрицательно определен. Найдем условия на унитарные матрицы, при которых оператор Лапласа будет неотрицательно определенным для простейших декорированых графов постоянной кривизны.

Теорема 5. Унитарная матрица, определяющая самосопряженное расширение, задает неотрицательно определенный оператор на декорированном графе, содержащем трехмерное Евклидово пространство, тогда и только тогда, когда она имеет один из следующих видов

1. $U = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha \in \mathbb{R} : \ \alpha^2 = 1$;

2. $U = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, где $A_3 \neq 0$ и $i\frac{A_4}{A_3} \geq 0, \ i\overline{\frac{A_1}{A_3}} \geq 0$;

3. $U = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, где $A_2 \neq 0$ и $i\frac{A_4}{A_2} \geq 0, \ i\overline{\frac{A_1}{A_2}} \geq 0$.

Здесь

$$\begin{cases} A_1 = 1 - e^{i\rho} - x_1 + x_4, \\ A_2 = 1 + e^{i\rho} + x_1 + x_4, \\ A_3 = 1 + e^{i\rho} - x_1 - x_4, \\ A_4 = 1 - e^{i\rho} + x_1 - x_4, \end{cases} \tag{2.4}$$

$e^{i\rho}$ – определитель матрицы $U = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Рассмотрим декорированный граф, состоящий из трехмерного Евклидова пространства, к которому приклеен луч. Будем считать, что точка склейки на Евклидовом пространстве – точка начала координат, т. е. $r = 0$.

Оператор $\delta = -\frac{d^2}{dx^2}$ действует на луче. Пусть функция $u \in Dom(\delta)$, тогда

$$(\delta u, u) = -\int_0^\infty u''(x)\overline{u}dx = u'(0)\overline{u(0)} + \int_0^\infty |u'(x)|^2 dx.$$

Оператор Δ – оператор Лапласа - Бельтрами на трехмерном Евклидовом пространстве, $f \in Dom(\Delta)$. Будем считать, что f зависит только от r. По теореме 4 функция f имеет следующее асимптотическое разложение в окрестности точки склейки (т. е. в окрестности точки $r = 0$)

$$f(r) = \frac{a}{4\pi r} + \psi(r),$$

где $\psi(r)$ – непрерывная функция, $\psi(0) = b$. Тогда

$$(\Delta f, f) = (\Delta\psi, \frac{a}{4\pi r} + \psi) = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\psi'\right)\left(\frac{\overline{a}}{4\pi r} + \overline{\psi}\right)\sin\theta dr d\theta d\varphi =$$

$$= \overline{a}b + 4\pi\int_0^\infty r^2|\psi'(r)|^2 dr.$$

Тогда для самосопряженного расширения A оператора $A_0 = \delta \oplus \Delta$ и функции $g = u \oplus f$ верно следующее равенство

$$(Ag, g) = u'(0)\overline{u(0)} + \overline{a}b + \int_0^\infty |u'(x)|^2 dx + 4\pi\int_0^\infty r^2|\psi'(r)|^2 dr.$$

Для того, чтобы самосопряженное расширение A оператора A_0 являлось неотрицательно определенным оператором, т. е. $(Ag, g) \geq 0\ \forall g \in Dom(A)$, необходимо и достаточно, чтобы $u'(0)\overline{u(0)} + \overline{a}b \geq 0\ \forall u(0), u'(0), a, b \in \mathbb{C}$. Достаточность этого условия очевидна. Докажем необходимость. Пусть при некоторых $a_1, b_1, c, d \in \mathbb{C}$ выражение $d\overline{c} + \overline{a_1}b_1 = -\epsilon < 0$. Выберем функцию g так, чтобы функции $u'(x)$ и $\psi(x)$ являлись гладкими, на бесконечности были равны 0, причем $u'(0) = d$, $\psi(0) = b_1$, а также $\int_0^\infty r^2|\psi'(r)|^2 dr < \frac{\epsilon}{4}$ и $\int_0^\infty |u'(x)|^2 dx < \frac{\epsilon}{4}$. Тогда оператор не является неотрицательно определенным.

Опишем унитарные матрицы, для которых $u'(0)\overline{u(0)} + \overline{a}b \geq 0\ \forall u(0), u'(0), a, b \in \mathbb{C}$. Пусть

$$U = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

– унитарная матрица, задающая некоторое самосопряженное расширение. Тогда выполняется равенство

$$i\begin{pmatrix} 1+x_1 & x_2 \\ x_3 & 1+x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ -u'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x_1 & -x_2 \\ -x_3 & 1-x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ u(0) \end{pmatrix}. \qquad (2.5)$$

Пусть матрицы $(I+U)$ и $(I-U)$ не являются обратимыми. Это означает, что коэффициенты

$$\begin{cases} A_2 = 1 + x_1 + x_4 + e^{i\rho} = 0, \\ A_3 = 1 - x_1 - x_4 + e^{i\rho} = 0, \end{cases}$$

откуда матрица U имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & x_2 \\ \overline{x_2} & -\alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha^2 + |x_2|^2 = 1$.

Если $\alpha \neq -1$, то из равенства (2.5) получаем

$$a = \frac{x_2}{1+\alpha}u'(0),\ u(0) = \frac{\overline{x_2}}{1+\alpha}b,$$

т. е. приходим к неравенству $u'(0)\overline{u(0)} + \overline{a}b = \frac{x_2}{1+\alpha}\overline{b}u'(0) + \frac{\overline{x_2}}{1+\alpha}\overline{u'(0)}b \geq 0$. Поскольку неравенство должно выполняться для любых $u'(0)$ и b, в том числе $u'(0) = b$ и $u'(0) = -b$, получаем $x_2 = -\overline{x_2}$, откуда $x_2 = i\beta,\ \beta \in \mathbb{R}$. Следовательно, $u'(0)\overline{u(0)} + \overline{a}b = -\frac{\beta}{1+\alpha}2Im(\overline{b}u'(0)) \geq 0$, откуда $\beta = 0$.

Аналогично можно убедиться, что при $\alpha = -1$ матрица также должна быть диагональной. Таким образом, матрицы вида

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}:\ \alpha^2 = 1$$

задают неотрицательно определенный оператор Лапласа.

Теперь пусть одна из матриц $(I+U)$ и $(I-U)$ обратима. Предположим, что это матрица $(I-U)$, т. е. $A_3 \neq 0$. Тогда

$$\begin{pmatrix} b \\ u(0) \end{pmatrix} = i(I-U)^{-1}(I+U)\begin{pmatrix} a \\ -u'(0) \end{pmatrix} = \frac{i}{A_3}\begin{pmatrix} A_4 & 2x_2 \\ 2x_3 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ -u'(0) \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$u'(0)\overline{u(0)} + \overline{a}b = -i\frac{2\overline{x_3}}{\overline{A_3}}u'(0)\overline{a} + i\frac{\overline{A_1}}{\overline{A_3}}|u'(0)|^2 + i\frac{A_4}{A_3}|a|^2 - i\frac{2x_2}{A_3}u'(0)\overline{a}.$$

Заметим, что $-i\frac{2\overline{x_3}}{\overline{A_3}} - i\frac{2x_2}{A_3} = 0$. Отсюда получаем условия $i\frac{A_4}{A_3} \geq 0,\ i\frac{\overline{A_1}}{\overline{A_3}} \geq 0$. Таким образом, все унитарные матрицы

$$U = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

для которых $A_3 \neq 0$ и $i\frac{A_4}{A_3} \geq 0,\ i\frac{\overline{A_1}}{\overline{A_3}} \geq 0$ задают неотрицательно определенный оператор Лапласа.

Случай, когда $A_2 \neq 0$, т. е. когда матрица $(I+U)$ обратима, рассматривается аналогично. В этом случае приходим к условиям $i\frac{A_4}{A_2} \geq 0,\ i\frac{\overline{A_1}}{\overline{A_2}} \geq 0$.

Заметим, что для действительных матриц с определителем, равным единице, хотя бы один из коэффициентов A_2 или A_3 не равен нулю, при этом $A_1 = A_4 = 0$. Значит, ортогональные матрицы с определителем 1 задают неотрицательно определенный оператор Лапласа.

$\square$

Для остальных рассматриваемых простейших сингулярных пространств доказательство аналогично.

Рассмотрим пример, который нам понадобится в дальнейшем. Опишем все диагональные унитарные матрицы, задающие неотрицательно определенный оператор Лапласа. Определим, при каких условиях на ρ_1 и ρ_2 матрица

$$U_1 = \begin{pmatrix} e^{i\rho_1} & 0 \\ 0 & e^{i\rho_2} \end{pmatrix}$$

удовлетворяет одному из условий предыдущей теоремы. Для данной матрицы $A_3 = (1-e^{i\rho_1})(1-e^{i\rho_2}) \neq 0$, если $e^{i\rho_1} \neq 1$ и $e^{i\rho_2} \neq 1$. Предположим, что $A_3 \neq 0$. Тогда $A_1 = (1-e^{i\rho_1})(1+e^{i\rho_2}),\ A_4 = (1+e^{i\rho_1})(1-e^{i\rho_2})$. Отсюда

$i\frac{A_4}{A_3} = i\frac{1+e^{i\rho_1}}{1-e^{i\rho_1}} \geq 0$, если $\sin\rho_1 \leq 0$, т. е. $\rho_1 \in [\pi; 2\pi)$.

Аналогично,

$i\frac{\overline{A_1}}{\overline{A_3}} = i\frac{1+e^{-i\rho_2}}{1-e^{-i\rho_2}} \geq 0$, если $\sin\rho_2 \geq 0$, т. е. $\rho_2 \in (0; \pi]$.

Пусть один из диагональных элементов равен единице. Предположим, что это $e^{i\rho_1}$. Тогда $A_2 = (1+e^{i\rho_1})(1+e^{i\rho_2}) = 2(1+e^{i\rho_2})$. Если $e^{i\rho_2} \neq -1$, то $i\frac{A_4}{A_2} = i\frac{1-e^{i\rho_2}}{1+e^{i\rho_2}} \geq 0$ при $\rho_2 \in [0;\pi)$, $i\frac{\overline{A_1}}{A_2} = 0$. Если $e^{i\rho_2} = -1$, то получаем ортогональную диагональную матрицу с определителем, равным -1. В теореме было доказано, что такие матрицы задают неотрицательно определенный оператор.

Случай, когда $e^{i\rho_2} = 1$, рассматривается аналогично. При этом приходим к условию $\rho_1 \in [\pi, 2\pi]$.

Таким образом, унитарные диагональные матрицы, задающие неотрицательно определенный оператор Лапласа, имеют вид

$$U_1 = \begin{pmatrix} e^{i\rho_1} & 0 \\ 0 & e^{i\rho_2} \end{pmatrix}, \ \rho_1 \in [\pi; 2\pi], \ \rho_2 \in [0, \pi].$$

Теперь перейдем к описанию решений волнового уравнения на каждом из графов.

2.2 Случай трехмерного Евклидова пространства

Теорема 6. Решение волнового уравнения (2.1) на декорированном графе, состоящем из трехмерного Евклидова пространства с присоединенной к нему струной, имеет следующий вид:

$$u(z,t) = u_0(z+ct) + v(z-ct)$$

– решение задачи на струне,

$$u(r,t) = \frac{f(r-ct)}{r}$$

– решение задачи на поверхности, где r – сферическая координата.

Функции f и v удовлетворяют системе:

$$\left\{ (I-U) \begin{pmatrix} f'(-ct) \\ v(-ct) + u_0(ct) \end{pmatrix} = i(I+U) \begin{pmatrix} 4\pi f(-ct) \\ -v'(-ct) - u_0'(ct) \end{pmatrix} \right.,$$

где U – унитарная матрица из теоремы 5, соответствующая самосопряженному расширению, I – единичная матрица.

Доказательство. Решение задачи на луче было получено в предыдущем параграфе. Найдем решение задачи на поверхности. Перейдем к сферической системе координат (r, φ, θ). Как было сказано ранее, решение зависит только от r. Получаем задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right), \\ u|_{r \to 0} = \frac{1}{4\pi r} a(t) + b(t), \\ u(r, 0) = u'_t(r, 0) = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Сделав замену $u = \frac{w}{r}$, получим уравнение $w_{tt} = c^2 w_{rr}$, решением которого является функция $w(r, t) = f(r - ct) + g(r + ct)$. Следовательно,

$$u(r, t) = \frac{f(r - ct) + g(r + ct)}{r}.$$

Разложив функции f и g по формуле Тейлора в точке $r = 0$, получим, что решение уравнения представляется в таком виде: $u(r, t) = \frac{f(-ct) + g(ct)}{r} + f'(-ct) + g'(ct) + O(r)$.

Тогда, учитывая второе условие системы (2.6), приходим к уравнениям:
$\frac{1}{4\pi} a(t) = f(-ct) + g(ct)$,
$b(t) = f'(-ct) + g'(ct)$.
Отсюда

$$a'(t) = -4\pi c b(t) + 8\pi c g'(ct). \tag{2.7}$$

Из уравнения на граничные условия известно, что
$a(t) = A_1(u'_0(ct) + v'(-ct)) + A_2(u_0(ct) + v(-ct))$,
$b(t) = B_1(u'_0(ct) + v'(-ct)) + B_2(u_0(ct) + v(-ct))$,
где A_1, A_2, B_1, B_2 – комплексные коэффициенты, определяемые унитарной матрицей. Тогда

$$a'(t) = A_1 \left(c u''_0(ct) - c v''(-ct) \right) + A_2 \left(c u'_0(ct) - c v'(-ct) \right).$$

Учитывая предыдущие уравнения и уравнение (2.7), получим равенство:

$$K_1 v''(-ct) + K_2 v'(-ct) + K_3 v(-ct) + R_1 u''_0(ct) + R_2 u'_0(ct) + R_3 u_0(ct) = 8\pi g'(ct),$$

здесь $K_1, K_2, K_3, R_1, R_2, R_3$ – некоторые комплексные коэффициенты, определяемые элементами унитарной матрицы.

По условию $u_0(z) = 0$ при $z \leq 0$ и $v(z) = 0$ при $z \geq 0$, значит $g'(ct) = 0$ при $t \leq 0$, т. е.

$$g'(z) = 0,\ z \leq 0.$$

Таким образом, $g(-z) \equiv const = M \in \mathbb{R},\ z \geq 0$.

Из уравнений (2.3) и (2.2) получаем, что

$$a(t) = 4\pi\left(f(-ct) + g(ct)\right) = \alpha_1 u_0(ct) + \alpha_2 u_0'(ct) + \beta_1 v(-ct) + \beta_2 v'(-ct),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ – некоторые комплексные коэффициенты, определяемые унитарной матрицей.

Тогда:

$$f(z) = \alpha_1 u_0(-z) + \alpha_2 u_0'(-z) + \beta_1 v(z) + \beta_2 v'(z) - g(-z),$$

при этом $u_0(-z) = 0,\ v(z) = 0,\ g(-z) = M = const$ при $z \geq 0$, значит,

$$f(z) = -M,\ z \geq 0.$$

Заметим, что $f(z) + g(z) = 0$ при $z \geq 0$, т. к. $u(r, 0) = 0,\ r \geq 0$ из условия задачи. Получаем, что $g(z) = M$ на положительной полуоси, т. е. решение волнового уравнения будет выглядеть следующим образом:

$$u(r,t) = \frac{f(r - ct)}{r}.$$

Уравнения
$a(t) = 4\pi f(-ct)$,
$b(t) = f'(-ct)$
замыкают систему уравнений (2.3). □

Замечание 1. *Данная система может быть решена в Фурье - образах:*

$$\hat{v}(-y) = \frac{A_1 y^2 + y\left(4\pi A_2 - A_3\right) - 4\pi A_4}{A_1 y^2 + y\left(4\pi A_2 + A_3\right) + 4\pi A_4}\hat{u}_0(y),$$

$$\hat{f}(-y) = \frac{4iyx_2}{A_1 y^2 + iy\left(4\pi A_2 + A_3\right) + 4\pi A_4}\hat{u}_0(y),$$

где $A_1 = 1 - e^{i\rho} - x_1 + x_4$,

$A_2 = 1 + e^{i\rho} + x_1 + x_4,$

$A_3 = 1 + e^{i\rho} - x_1 - x_4,$

$A_4 = 1 - e^{i\rho} + x_1 - x_4,$

$e^{i\rho}$ – *определитель унитарной матрицы,* $\hat{g}$ – *преобразование Фурье функции* $g(z)$.

2.3 Случай двумерного Евклидова пространства

Теорема 7. Решение волнового уравнения (2.1) на декорированном графе, состоящем из двумерного Евклидова пространства с присоединенной к нему струной, имеет следующий вид:

$$u(z,t) = u_0(z+ct) + v(z-ct)$$

– решение задачи на струне,

$$u(r,t) = \frac{c}{4}\int_0^\infty \varphi(\lambda)\left[\int_0^t sin(c\lambda(t-\xi))a(\xi)d\xi\right] J_0(\lambda r)d\lambda$$

– решение задачи на поверхности, где r – полярная координата, J_0 – функция Бесселя первого рода, функция $\varphi(\lambda)$ определяется равенством

$$\varphi(\lambda) = \int_0^\infty \left((1-\lambda^2)Y_0(r)f(r) - Y_0(r)f''(r) + 2f'(r)Y_1(r) - \frac{1}{r}Y_0(r)f'(r)\right) J_0(\lambda r)rdr,$$

Y_0, Y_1 – функции Бесселя второго рода, а $f(r)$ – некоторая срезающая функция.

Функции a, b и v удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} (I-U)\begin{pmatrix} b(t) \\ v(-ct)+u_0(ct) \end{pmatrix} = i(U+I)\begin{pmatrix} a(t) \\ -v'(-ct)-u_0'(ct) \end{pmatrix}, \\ b(t) = \frac{a(t)}{2\pi}(\ln 2 - \gamma) + \frac{a(t)}{4}\int_0^\infty \lambda\varphi_1(\lambda)J_0(\lambda r)d\lambda\Big|_{r=0} + \\ + \frac{c}{4}\int_0^t \left[\int_0^\infty \varphi(\lambda)\sin(c\lambda(t-\xi))J_0(\lambda r)d\lambda\right]\Big|_{r=0} a(\xi)d\xi, \end{cases}$$

где γ – постоянная Эйлера, U – унитарная матрица, соответствующая самосопряженному расширению, I – единичная матрица,

$$\varphi_1(\lambda) = \int_0^\infty f(\xi)Y_0(\xi)J_0(\lambda\xi)\xi d\xi.$$

Доказательство. Решение задачи на струне было найдено ранее. Будем решать нашу задачу на двумерном Евклидовом пространстве. Перейдем к полярной системе координат (r, φ). Решение зависит только от r. Следовательно, получаем задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right), \\ u|_{r\to 0} = -\frac{1}{2\pi}\ln(r)a(t) + b(t), \\ u(r,0) = u'_t(r,0) = 0. \end{cases}$$

Сделаем замену:

$$w(r,t) = u(r,t) + \frac{a(t)}{4}Y_0(r)f(r),$$

где $f(r)$ – срезающая функция, т. е. гладкая функция, которая в окрестности точки $r = 0$ тождественно равна 1, а на бесконечности – 0, $Y_0(r)$ – функция Бесселя второго рода. Асимтотика $Y_0(r)$ около нуля имеет следующий вид:

$$Y_0(r)\Big|_{r\to 0} = \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{r}{2} + \gamma\right),$$

где γ – постоянная Эйлера. Тогда

$$w\Big|_{r\to 0} = b(t) - \frac{a(t)}{2\pi}(\ln 2 - \gamma).$$

Таким образом, функция $w(r,t)$ не имеет особенности в точке $r = 0$.

Отсюда получаем новую систему:

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2\left(w_{rr} + \frac{1}{r}w_r\right) + c^2\frac{a(t)}{4}\left(Y_0(r)f(r) - Y_0(r)f''(r) + 2Y_1(r)f'(r) - \frac{1}{r}Y_0(r)f'(r)\right) + \\ + \frac{a''(t)}{4}Y_0(r)f(r), \\ w|_{r\to 0} = b(t) - \frac{a(t)}{2\pi}(\ln 2 - \gamma), \\ w(r,0) = w'_t(r,0) = 0. \end{cases}$$

Последнее уравнение системы имеет именно такой вид, поскольку $a(0) = a'(0) = 0$.

Для начала найдем решение однородного уравнения $w_{tt} = c^2(w_{rr} + \frac{1}{r}w_r)$ с граничным условием $w\Big|_{r\to 0} = b(t) - \frac{a(t)}{2\pi}(\ln 2 - \gamma)$. Будем искать решение в виде $w(r,t) = R(r)T(t)$. После подстановки получим:

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \frac{R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)}{R(r)} = -\lambda^2,$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Таким образом, приходим к уравнению:

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \lambda^2 R(r) = 0.$$

Это уравнение Бесселя. Его решением является линейная комбинация $m(\lambda)J_0(\lambda r)+n(\lambda)Y_0(\lambda r)$, где $J_0(\lambda r)$ – функция Бесселя первого рода, $Y_0(\lambda r)$ – функция Бесселя второго рода. Решение нашего уравнения не должно иметь особенности в нуле, значит коэффициент $n(\lambda) = 0$, поскольку функция $Y_0(\lambda r)$ имеет особенность. Таким образом, $R_\lambda(r) = m(\lambda)J_0(\lambda r)$. Значит, решение новой задачи будем искать в виде

$$w(r,t) = \int_0^\infty T(t,\lambda)J_0(\lambda r)d\lambda.$$

Подставляя в систему, получаем уравнение:

$$\int_0^\infty \left(T''_{tt}(t,\lambda) + c^2\lambda^2 T(t,\lambda)\right) J_0(\lambda r)d\lambda = Y_0(r)f(r)\left(\frac{c^2}{4}a(t) + \frac{a''(t)}{4}\right) +$$

$$+\left(-Y_0(r)f''(r) + 2f'(r)Y_1(r) - \frac{1}{r}Y_0(r)f'(r)\right)\frac{c^2}{4}a(t)$$

$$= \int_0^\infty \lambda\left[\left(\frac{c^2}{4}a(t) + \frac{a''(t)}{4}\right)\varphi_1(\lambda) - \frac{c^2}{4}a(t)\varphi_2(\lambda)\right]J_0(\lambda r)d\lambda,$$

где

$$\varphi_1(\lambda) = \int_0^\infty f(r)Y_0(r)J_0(\lambda r)rdr,$$

$$\varphi_2(\lambda) = \int_0^\infty \left(Y_0(r)f''(r) - 2f'(r)Y_1(r) + \frac{1}{r}Y_0(r)f'(r)\right)J_0(\lambda r)rdr.$$

Учитывая начальные и краевые условия, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} T''_{tt}(t,\lambda) + \lambda^2 c^2 T(t,\lambda) = \left(\frac{c^2}{4}a(t) + \frac{a''(t)}{4}\right)\lambda\varphi_1(\lambda) - \frac{c^2}{4}a(t)\lambda\varphi_2(\lambda), \\ T(0,\lambda) = T'_t(0,\lambda) = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы является функция:

$$T(t,\lambda) = \frac{a(t)}{4}\lambda\varphi_1(\lambda) + \frac{c}{4}\left((1-\lambda^2)\varphi_1(\lambda) - \varphi_2(\lambda)\right)\int_0^t sin(c\lambda(t-\xi))a(\xi)d\xi.$$

Тогда

$$w(r,t)=\frac{a(t)}{4}\int_0^\infty \lambda\varphi_1(\lambda)J_0(\lambda r)d\lambda+$$

$$+\frac{c}{4}\int_0^\infty \left((1-\lambda^2)\varphi_1(\lambda)-\varphi_2(\lambda)\right)\left[\int_0^t sin(c\lambda(t-\xi))a(\xi)d\xi\right]J_0(\lambda r)d\lambda.$$

В итоге получаем

$$u(r,t)=w(r,t)-\frac{a(t)}{4}Y_0(r)f(r)=$$

$$=\frac{c}{4}\int_0^\infty \varphi(\lambda)\left[\int_0^t sin(c\lambda(t-\xi))a(\xi)d\xi\right]J_0(\lambda r)d\lambda,$$

где

$$\varphi(\lambda)=\int_0^\infty \left((1-\lambda^2)Y_0(r)f(r)-Y_0(r)f''(r)+2f'(r)Y_1(r)-\frac{1}{r}Y_0(r)f'(r)\right)J_0(\lambda r)rdr.$$

Учитывая поведение функций $w(r,t)$ и в окрестности точки $r=0$, получаем связь функций $a(t)$ и $b(t)$:

$$\frac{a(t)}{4}\int_0^\infty \lambda\varphi_1(\lambda)J_0(\lambda r)d\lambda\Big|_{r=0}+\frac{c}{4}\int_0^t\left[\int_0^\infty \varphi(\lambda)sin(c\lambda(t-\xi))J_0(\lambda r)d\lambda\right]\Big|_{r=0}a(\xi)d\xi=$$

$$=b(t)-\frac{a(t)}{2\pi}\left(\ln 2-\gamma\right).$$

Это уравнение замыкает систему уравнений (2.3) . □

2.4 Случай трехмерной сферы

Теорема 8. Решение волнового уравнения (2.1) на декорированном графе, состоящем из трехмерной сферы с присоединенной к ней струной, имеет следующий вид:

$$u(z,t)=u_0(z+ct)+v(z-ct)$$

– решение задачи на струне,

$$u(\chi,t)=$$

$$\frac{1}{2\pi^2 sin(\chi)}\sum_{k=2}^\infty \frac{ck\sin(k\chi)}{\sqrt{k^2-1}}\int_0^t \sin\left(c\sqrt{k^2-1}(t-\xi)\right)a(\xi)d\xi+\frac{c^2}{2\pi^2}\int_0^t\int_0^\xi a(\eta)d\eta d\xi.$$

– решение задачи на сфере, где координата χ отвечает за геодезическое расстояние.

Функции a, b и v удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} (I-U)\begin{pmatrix} b(t) \\ v(-ct)+u_0(ct) \end{pmatrix} = i(U+I)\begin{pmatrix} a(t) \\ -v'(-ct)-u_0'(ct) \end{pmatrix}, \\ b(t) = \frac{c^2}{2\pi^2}\int_0^t\int_0^\xi a(\eta)d\eta d\xi + \int_0^t \frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{ck\sin(k\chi)}{2\pi^2\sqrt{k^2-1}}\sin\left(c\sqrt{k^2-1}(t-\xi)\right)\right)\Big|_{\chi=0} a(\xi)d\xi, \end{cases}$$

где U – унитарная матрица, соответствующая самосопряженному расширению, I – единичная матрица.

Доказательство. Решение задачи на струне было описано ранее. Будем решать нашу задачу на трехмерной сфере, радиус которой равен 1. На сфере заданы три координаты (χ, ψ, φ). При этом координата χ соответствует геодезическому расстоянию. Решение зависит только от χ. Следовательно, получаем задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2(u_{\chi\chi} + 2ctg(\chi)u_\chi), \\ u|_{\chi\to 0} = \frac{1}{4\pi\chi}a(t) + b(t), \\ u(\chi, 0) = u_t'(\chi, 0) = 0. \end{cases}$$

Сделаем замену $w(\chi, t) = \sin(\chi)u(\chi, t)$ и получим уравнение:

$$w_{tt} = c^2(w_{\chi\chi} + w),$$

при этом должно выполняться краевое условие:

$$w|_{\chi\to 0} = \frac{1}{4\pi}a(t) + \chi b(t) + O(\chi^2)$$

(разложили $\sin(\chi)$ по формуле Тейлора).

Приходим к задаче:

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2(w_{\chi\chi} + w), \\ w|_{\chi=0} = \frac{1}{4\pi}a(t), w|_{\chi=\pi} = 0, \\ w|_{t=0} = w_t'|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Пусть $w = h + g$, где $g = \frac{1}{4\pi}a(t)(1-\frac{\chi}{\pi})$, т. е. $g|_{\chi=0} = \frac{1}{4\pi}a(t)$, $g|_{\chi=\pi} = 0$.

Следовательно, получаем систему:

$$\begin{cases} h_{tt} = c^2 \left(h_{\chi\chi} + h \right) + \frac{1}{4\pi} \left(1 - \frac{\chi}{\pi} \right) \left(c^2 a(t) - a''(t) \right), \\ h|_{\chi=0} = h|_{\chi=\pi} = 0, \\ h|_{t=0} = h'_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Ищем решение в виде:

$$h(\chi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin(k\chi),$$

поскольку $\sin(k\chi)$ – собственные функции для данной задачи. После подстановки в систему получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(T_k''(t) + (c^2k^2 - c^2)T_k(t) \right) sin(k\chi) = \frac{1}{4\pi} \left(1 - \frac{\chi}{\pi} \right) \left(c^2 a(t) - a''(t) \right).$$

Разложив функцию $\frac{1}{4\pi} \left(1 - \frac{\chi}{\pi} \right)$ в ряд Фурье по синусам, получим:

$$\left(c^2 a(t) - a''(t) \right) \frac{1}{4\pi} \left(1 - \frac{\chi}{\pi} \right) = \left(c^2 a(t) - a''(t) \right) \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{sin(k\chi)}{k}, \chi \in (0; \pi].$$

Приходим к системе:

$$\begin{cases} T_k''(t) + c^2 \left(k^2 - 1 \right) T_k(t) = \frac{1}{2\pi^2 k} \left(c^2 a(t) - a''(t) \right), \\ T_k(0) = 0, \ T_k'(0) = 0. \end{cases}$$

Решением данной системы является функция:

$$T_k(t) = \begin{cases} \frac{ck}{2\pi^2\sqrt{k^2-1}} \int_0^t \sin\left(c\sqrt{k^2-1}(t-\xi) \right) a(\xi) d\xi - \frac{a(t)}{2\pi^2 k}, \ k \neq 1, \\ \frac{c^2}{2\pi^2} \int_0^t \int_0^\xi a(\eta) d\eta d\xi - \frac{a(t)}{2\pi^2}, \ k = 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$u(\chi, t) =$$

$$\frac{1}{2\pi^2 sin(\chi)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{ck \sin(k\chi)}{\sqrt{k^2-1}} \int_0^t \sin\left(c\sqrt{k^2-1}(t-\xi) \right) a(\xi) d\xi + \frac{c^2}{2\pi^2} \int_0^t \int_0^\xi a(\eta) d\eta d\xi.$$

Учитывая поведение функции $u(\chi, t)$ в окрестности точки $\chi = 0$, получаем уравнение связи, которое замыкает систему уравнений (2.3):

$$b(t) =$$

$$= \frac{c^2}{2\pi^2}\int_0^t\int_0^\xi a(\eta)d\eta d\xi + \int_0^t \frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{ck\sin(k\chi)}{2\pi^2\sqrt{k^2-1}}\sin\left(c\sqrt{k^2-1}(t-\xi)\right)\right)\Bigg|_{\chi=0} a(\xi)d\xi.$$

$\square$

2.5 Случай двумерной сферы

Теорема 9. Решение волнового уравнения (2.1) на декорированном графе, состоящем из двумерной сферы с присоединенной к ней струной, имеет следующий вид:

$$u(z,t) = u_0(z+ct) + v(z-ct)$$

– решение задачи на струне,

$$u(\varphi,t) = \frac{c}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)P_k(\cos\varphi)}{\sqrt{k(k+1)}}\int_0^t \sin\left(c\sqrt{k(k+1)}(t-\xi)\right)a(\xi)d\xi -$$

$$-\frac{3c^2}{16\pi}\int_{-1}^{1} Q_{\frac{1}{2}}(x)dx\int_0^t\int_0^\xi a(\eta)d\eta d\xi$$

– решение задачи на сфере, где координата φ отвечает за геодезическое расстояние, P_k – многочлены Лежандра, $Q_{\frac{1}{2}}$ – функция Лежандра второго рода.

Функции a, b и v удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} (I-U)\begin{pmatrix} b(t) \\ v(-ct)+u_0(ct)\end{pmatrix} = i(I+U)\begin{pmatrix} a(t) \\ -v'(-ct)-u_0'(ct)\end{pmatrix}, \\ \frac{c}{4\pi}\int_0^t\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)}{\sqrt{k(k+1)}}\sin\left(c\sqrt{k(k+1)}(t-\xi)\right)P_k\left(\cos\varphi\right)\right)\Big|_{\varphi=0} a(\xi)d\xi - \\ -\frac{3c^2}{16\pi}\int_{-1}^{1}Q_{\frac{1}{2}}(x)dx\int_0^t\int_0^\xi a(\eta)d\eta d\xi - \frac{a(t)}{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}M_kP_k\left(\cos\varphi\right)\right)\big|_{\varphi=0} = \\ = \left(\gamma+\psi(\frac{3}{2})-\ln 2\right)\frac{a(t)}{2\pi} + b(t), \end{cases}$$

где γ – постоянная Эйлера, ψ – логарифмическая производная Гамма - функции, U – унитарная матрица, соответствующая самосопряженному расширению, I – единичная матрица,

$$M_k = \begin{cases} \frac{2k+1}{(2k-1)(k+\frac{3}{2})},\ k\neq 0, \\ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}Q_{\frac{1}{2}}(x)dx,\ k=0. \end{cases}$$

Доказательство. Будем решать нашу задачу на двумерной сфере, радиус которой равен 1. На сфере заданы две координаты (φ, ψ). При этом координата φ соответствует геодезическому расстоянию. Решение зависит только от φ. Следовательно, получаем задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2(u_{\varphi\varphi} + ctg(\varphi)u_{\varphi}), \\ u|_{\varphi\to 0} = -\frac{a(t)}{2\pi}\ln(\varphi) + b(t), \\ u(\varphi, 0) = u_t'(\varphi, 0) = 0. \end{cases}$$

Сделаем замену $w = u - Q_{\frac{1}{2}}(\cos\varphi)\frac{a(t)}{2\pi}$. Здесь $Q_{\frac{1}{2}}$ – функция Лежандра второго рода. Она не имеет особенности в окрестности точки $\varphi = \pi$, а в окрестности точки $\varphi = 0$ ведет себя следующим образом:

$$Q_{\frac{1}{2}}(\cos\varphi)\Big|_{\varphi\to 0} = -\ln\varphi + \ln 2 - \gamma - \psi(\frac{3}{2}),$$

где γ – постоянная Эйлера, $\psi(x)$ – логарифмическая производная Гамма - функции.

Функция $Q_{\frac{1}{2}}(\cos\varphi)$ является решением уравнения Лежандра:

$$y_{\varphi\varphi} + ctg(\varphi)y_{\varphi} + \frac{3}{4}y = 0.$$

Таким образом, получаем задачу:

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2(w_{\varphi\varphi} + \operatorname{ctg}(\varphi)w_{\varphi}) - Q_{\frac{1}{2}}(\cos\varphi)\left[\frac{3c^2}{8\pi}a(t) + \frac{a''(t)}{2\pi}\right], \\ w|_{\varphi=0} = b(t) + \left(\gamma + \psi(\frac{3}{2}) - \ln 2\right)\frac{a(t)}{2\pi}, \\ w|_{t=0} = w_t'|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде $w(\chi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)P_k(\cos\varphi)$, где $P_k(\cos\varphi)$ – полиномы Лежандра. Они являются собственными функциями данной задачи, поскольку не имеют особенности ни в точке $\varphi = 0$, ни в точке $\varphi = \pi$.

После подстановки в систему получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(T_k''(t) + c^2k(k+1)T_k(t)\right)P_k(\cos\varphi) = -Q_{\frac{1}{2}}(\cos\varphi)\left[\frac{3c^2}{8\pi}a(t) + \frac{a''(t)}{2\pi}\right].$$

Разложение функции $Q_{\frac{1}{2}}(\cos\varphi)$ в ряд по функциям $P_k(\cos\varphi)$ выглядит следующим образом:

$$Q_{\frac{1}{2}}(\cos\varphi) = \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} Q_{\frac{1}{2}}(x)dx\right) P_0(cos\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k+1}{(2k-1)(k+\frac{3}{2})}\right) P_k(cos\varphi).$$

Подставив это выражение в предыдущую формулу, придем к системе: при $k \neq 0$

$$\begin{cases} T_k''(t) + c^2 k\,(k+1)\,T_k(t) + \left[\frac{3c^2}{8\pi}a(t) + \frac{a''(t)}{2\pi}\right]\frac{2k+1}{(2k-1)(k+\frac{3}{2})} = 0, \\ T_k(0) = T_k'(0) = 0, \end{cases}$$

при $k = 0$

$$\begin{cases} T_k''(t) + \left[\frac{3c^2}{16\pi}a(t) + \frac{a''(t)}{4\pi}\right]\int_{-1}^{1} Q_{\frac{1}{2}}(x)dx = 0, \\ T_0(0) = T_0'(0) = 0. \end{cases}$$

Решением этих систем являются функции:

$$T_k(t) = \begin{cases} \frac{c(2k+1)}{4\pi\sqrt{k(k+1)}}\int_0^t \sin\left(c\sqrt{k(k+1)}(t-\xi)\right)a(\xi)d\xi - \frac{2k+1}{(2k-1)(k+\frac{3}{2})}\frac{a(t)}{2\pi},\ k \neq 0, \\ -\int_{-1}^{1} Q_{\frac{1}{2}}(x)dx\left(\frac{3c^2}{16\pi}\int_0^t\int_0^{\xi} a(\eta)d\eta d\xi + \frac{a(t)}{4\pi}\right),\ k = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$u(\varphi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)P_k(\cos\varphi) + \frac{a(t)}{2\pi}Q_{\frac{1}{2}}(\cos\varphi) =$$

$$= \frac{c}{4\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)}{\sqrt{k(k+1)}}\left[\int_0^t \sin\left(c\sqrt{k(k+1)}(t-\xi)\right)a(\xi)d\xi\right]P_k(\cos\varphi) +$$

$$-\frac{3c^2}{16\pi}\int_{-1}^{1} Q_{\frac{1}{2}}(x)dx\int_0^t\int_0^{\xi} a(\eta)d\eta d\xi.$$

Учитывая поведение функции $w(\varphi, t)$ в окрестности точки $\varphi = 0$, получаем:

$$w(\varphi, t)|_{\varphi=0} =$$

$$= \frac{c}{4\pi}\int_0^t \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)}{\sqrt{k(k+1)}}\sin\left(c\sqrt{k(k+1)}(t-\xi)\right)P_k(\cos\varphi)\right)\Bigg|_{\varphi=0} a(\xi)d\xi -$$

$$-\frac{3c^2}{16\pi}\int_{-1}^{1} Q_{\frac{1}{2}}(x)dx\int_0^t\int_0^{\xi} a(\eta)d\eta d\xi - \frac{a(t)}{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty} M_k P_k(\cos\varphi)\right)\Bigg|_{\varphi=0} =$$

$$= \left(\gamma + \psi(\frac{3}{2}) - \ln 2\right) \frac{a(t)}{2\pi} + b(t),$$

где

$$M_k = \begin{cases} \frac{2k+1}{(2k-1)(k+\frac{3}{2})}, \ k \neq 0, \\ \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} Q_{\frac{1}{2}}(x)dx, \ k = 0. \end{cases}$$

Это уравнение замыкает систему уравнений (2.3).

□

2.6 Полное отражение и полное прохождение

Следствие 1. *Для всех простейших декорированных графов, изученных в этой главе, случай полного отражения волны, т. е. случай, когда волна доходит до поверхности, полностью отражается от нее, а по самой поверхности не распространяется, реализуется для следующих унитарных матриц:*

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\rho_1} & 0 \\ 0 & e^{i\rho_2} \end{pmatrix}, \ \rho_1 \in [0, \pi], \ \rho_2 \in [\pi, 2\pi].$$

Доказательство. В случае полного отражения для всех рассмотренных выше декорированных графов решение на поверхности – тождественный ноль, а значит $a(t) \equiv 0$, $b(t) \equiv 0$. Возьмем преобразование Фурье системы уравнений (2.3). Получаем:

$$\begin{cases} x_2\,(1-y)\,\hat{v}(-y) = x_2\,(1+y)\,\hat{u}_0(y), \\ (y\,(x_4+1) + (1-x_4))\,\hat{v}(-y) = (y\,(x_4+1) - (1-x_4))\,\hat{u}_0(y). \end{cases}$$

Данная система имеет решение для любого $\hat{u}_0(y)$ тогда и только тогда, когда $x_2 = 0$. В этом случае унитарная матрица U имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\rho_1} & 0 \\ 0 & e^{i\rho_2} \end{pmatrix}.$$

Если самосопряженое расширение задается такой матрицей, то из второго уравнения системы (2.3) получаем уравнение

$$\hat{v}(-y)(y(1+e^{i\rho_2}) + (1-e^{i\rho_2})) = \hat{u}_0(y)(y(1+e^{i\rho_2}) - (1-e^{i\rho_2})),$$

откуда
$$|\hat{v}(-y)|^2 = \frac{y^2(2+2\cos\rho_2)+(2-2\cos\rho_2)}{y^2(2+2\cos\rho_2)+(2-2\cos\rho_2)}|\hat{u}_0(y)|^2 = |\hat{u}_0(y)|^2,$$
т. е. для любой матрицы такого вида реализуется полное отражение.

Таким образом, матрицы, задающие полное отражение, имеют вид:
$$U = \begin{pmatrix} e^{i\rho_1} & 0 \\ 0 & e^{i\rho_2} \end{pmatrix}.$$
Отбирая те матрицы, которые соответсвуют неотрицательно определенному оператору Лапласа, получаем ограничение на ρ_1 и ρ_2: $\rho_1 \in [0,\pi]$, $\rho_2 \in [\pi, 2\pi]$.

□

Следствие 2. *Для простейшего декорированного графа, содержащего трехмерное Евклидово пространство, случай полного прохождения волны, т. е. случай, когда волна доходит до поверхности, полностью распространяется по ней, а от поверхности ничего не отражается, реализуется для следующих унитарных матриц*
$$U = \begin{pmatrix} \frac{1-4\pi}{1+4\pi} & x_2 \\ -\overline{x_2} & \frac{1-4\pi}{1+4\pi} \end{pmatrix}, \; |x_2| = \frac{4\sqrt{\pi}}{1+4\pi}.$$
Доказательство. В случае полного прохождения $v \equiv 0$, поэтому из замечания 1 получаем, что
$$A_1 y^2 + iy\,(4\pi A_2 - A_3) - 4\pi A_4 = 0$$
для любого y.

Приходим к системе:
$$\begin{cases} 1 - e^{i\rho} - x_1 + x_4 = 0, \\ 4\pi\left(1 + e^{i\rho} + x_1 + x_4\right) - \left(1 + e^{i\rho} - x_1 - x_4\right) = 0, \\ 1 - e^{i\rho} + x_1 - x_4 = 0. \end{cases}$$
Если $e^{i\rho} \neq 1$, то система не имеет решений. Если $e^{i\rho} = 1$, то
$$x_1 = x_4 = \frac{1-4\pi}{1+4\pi}.$$

Отсюда получаем, что матрицы, при которых реализуется полное прохождение, имеют вид

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1-4\pi}{1+4\pi} & x_2 \\ -\overline{x_2} & \frac{1-4\pi}{1+4\pi} \end{pmatrix},\ |x_2| = \frac{4\sqrt{\pi}}{1+4\pi}.$$

Все матрицы такого вида удовлетворяют теореме 5, поскольку $A_1 = A_4 = 0$. □

Следствие 3. *Для остальных простейших декорированных графов, рассмотренных в этой главе, случай полного прохождения волны, т. е. случай, когда волна доходит до поверхности, полностью распространяется по ней, а от поверхности ничего не отражается, не реализуется ни для каких унитарных матриц.*

Доказательство. Для данных графов если $v \equiv 0$, то мы имеем систему вида:

$$\begin{cases} (I-U)\begin{pmatrix} b(t) \\ u_0(ct) \end{pmatrix} = i(I+U)\begin{pmatrix} a(t) \\ -u_0'(ct) \end{pmatrix}, \\ \\ b(t) = \gamma a(t) + \int_0^t f(t-\xi)a(\xi)d\xi. \end{cases}$$

Заметим, что последнее уравнение системы является интегральным уравнением Вольтерра с разностным ядром. Образ решения этого уравнения при преобразовании Лапласа удовлетворяет следующему соотношению:

$$\tilde{b}(y) = \tilde{a}(y)\tilde{K}(y),$$

где $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ – образы функций a и b при преобразовании Лапласа, $\tilde{K}(y) = \gamma + \tilde{f}(y)$

Применяя преобразование Лапласа к первым двум уравнениям и подставляя в них предыдущее соотношение, получаем систему:

$$\begin{cases} 2x_3c^2\tilde{a}(y) = (-iA_3c + yA_1)\,\tilde{u_0}(\frac{y}{c}), \\ 2x_3c^2\tilde{a}(y)\tilde{K}(y) = (A_4c + iyA_2)\,\tilde{u_0}(\frac{y}{c}). \end{cases}$$

Из этой системы следует, что для любого y должно выполняться равенство :

$$A_4c + iyA_2 + iA_3c\tilde{K}(y) - A_1y\tilde{K}(y) = 0.$$

Если функции 1, y, $\tilde{K}(y)$ и $y\tilde{K}(y)$ линейно независимы, то приходим к системе уравнений $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$, которая не имеет решений. Докажем линейную независимость функций. Пусть они линейно зависимы, т.е. для некоторых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ выполнено равенство:

$$\alpha_1 + \alpha_2 y + \alpha_3 \tilde{K}(y) + \alpha_4 y \tilde{K}(y) = 0.$$

Тогда $\tilde{K}(y) = -\frac{\alpha_1+\alpha_2 y}{\alpha_3+\alpha_4 y}$, откуда

$$K(t) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_4}\delta(t) - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_4} - \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_4^2}\right) e^{-\frac{\alpha_3}{\alpha_4}t}.$$

Для наших графов функция $K(t)$ не принимает такой вид, значит, указанные функции линейно независимы. $\square$

Глава 3

Задача Коши для волнового уравнения на декорированных графах, содержащих трехмерное Евклидово пространство. Поведение энергии

В этой главе мы опишем решение задачи Коши для волнового уравнения на некоторых декорированных графах постоянной кривизны, содержащих трехмерное Евклидово пространство. Также изучим поведение энергии волны в этих случаях.

Определение 13. *Энергией волны u*, являющейся решением задачи Коши, будем называть следующее выражение

$$E(t) = \frac{1}{2}(u'_t, u'_t) + \frac{c^2}{2}(u, Au).$$

3.1 Граф, состоящий из трехмерного Евклидова пространства, к которому прикреплена струна

Решение задачи Коши (2.1) для данного графа было найдено в предыдущей главе. Изучим поведение энергии волны, а именно, для каждой унитарной матрицы

$$U = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

задающей самосопряженное расширение, определим, какая доля энергии отразится от поверхности, а какая доля энергии уйдет на поверхность.

Будем считать, что энергия начальной волны равна единице, т. е.

$$E_0 = c^2 \int_0^\infty |u_0'(z)|^2 dz = 1.$$

Решение задачи Коши для данного графа в Фурье - образах имеет вид:

$$\hat{v}(-y) = \frac{A_1 y^2 + y\,(4\pi A_2 - A_3) - 4\pi A_4}{A_1 y^2 + y\,(4\pi A_2 + A_3) + 4\pi A_4} \hat{u_0}(y),$$

$$\hat{f}(-y) = \frac{4iyx_2}{A_1 y^2 + y\,(4\pi A_2 + A_3) + 4\pi A_4} \hat{u_0}(y),$$

где коэффициенты A_j $(j = 1, 2, .., 4)$ определяются системой (2.4).

Функция $v(z-ct)$ описывает волну, которая отразилась от поверхности и стала распространяться по лучу. Энергия этой волны равна

$$E_{R_+}(t) = c^2 \int_0^\infty |v'(z-ct)|^2 dz + \frac{c^2}{2} v(-ct)\overline{v'(-ct)}.$$

Учитывая, что функция v имеет компактный носитель, получаем, что начиная с некоторого достаточно большого $t = t_1$, $v(-ct) \equiv 0$. Отсюда, начиная с некоторого момента, энергия волны на луче не меняется. Используя равенство Парсеваля, приходим к следующему выражению

$$E_{R_+} = c^2 \int_{-\infty}^\infty |v'(x)|^2 dx = c^2 \int_{-\infty}^\infty |\hat{v'}(y)|^2 dy = \frac{c^2}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |y\hat{v}(y)|^2 dy.$$

Таким образом,

$$E_{R_+} = \frac{c^2}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left| \frac{A_1 y^2 + y\,(4\pi A_2 - A_3) - 4\pi A_4}{A_1 y^2 + y\,(4\pi A_2 + A_3) + 4\pi A_4} \right| |y\hat{u_0}(y)|^2 dy =$$

$$= \frac{c^2}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{|A_1|^2|y|^4 + (16\pi^2|A_2|^2 + |A_3|^2)|y|^2 + 16\pi^2|A_4|^2 - 32\pi|y|^2|x_2|^2}{|A_1|^2|y|^4 + (16\pi^2|A_2|^2 + |A_3|^2)|y|^2 + 16\pi^2|A_4|^2 + 32\pi|y|^2|x_2|^2} |y\hat{u_0}(y)|^2 dy.$$

Найдем энергию волны, которая распространяется по поверхности. Решение задачи на Евклидовом пространстве имеет вид $u(r,t) = \frac{f(r-ct)}{r}$, откуда

$$E_{R^3}(t) = \frac{4\pi}{2} \int_0^\infty |u_t'|^2 r^2 dr - \frac{4\pi c^2}{2} \int_0^\infty ru \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\overline{ru}\right) dr = 2\pi c^2 \overline{f'(-ct)} f(-ct) +$$

$$+4\pi c^2 \int_0^\infty |f'(r-ct)|^2 dr.$$

Заметим, что функция f имеет компактный носитель, поэтому, начиная с некоторого достаточно большого $t = t_2$, $f(-ct) \equiv 0$, значит, с этого момента энергия волны на поверхности не меняется и равна

$$E_{R^3} = 4\pi c^2 \int_{-\infty}^{\infty} |f'(z)|^2 dz = 2c^2 \int_{-\infty}^{\infty} |y\hat{f}(y)|^2 dy.$$

Отсюда получаем

$$E_{R^3} = 2c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{4iyx_2}{A_1 y^2 + y\left(4\pi A_2 + A_3\right) + 4\pi A_4} \right|^2 |y\hat{u}_0(y)|^2 dy =$$

$$= \frac{c^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{64\pi |yx_2|^2}{|A_1|^2|y|^4 + (16\pi^2|A_2|^2 + |A_3|^2)|y|^2 + 16\pi^2|A_4|^2 + 32\pi|y|^2|x_2|^2} |y\hat{u}_0(y)|^2 dy.$$

Таким образом, приходим к теореме:

Теорема 10. Энергия волны, являющейся решением задачи Коши (2.1) на сингулярном пространстве, состоящем из трехмерного Евклидова постранства с приклеенным лучом, при стремлении времени к бесконечности распределяется следующим образом: энергия волны, которая остается на луче, равна

$$E_{R_+} = \frac{c^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|A_1|^2|y|^4 + (16\pi^2|A_2|^2 + |A_3|^2)|y|^2 + 16\pi^2|A_4|^2 - 32\pi|y|^2|x_2|^2}{|A_1|^2|y|^4 + (16\pi^2|A_2|^2 + |A_3|^2)|y|^2 + 16\pi^2|A_4|^2 + 32\pi|y|^2|x_2|^2} |y\hat{u}_0(y)|^2 dy,$$

энергия волны, которая распространяется по поверхности, равна

$$E_{R^3} = \frac{c^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{64\pi |yx_2|^2}{|A_1|^2|y|^4 + (16\pi^2|A_2|^2 + |A_3|^2)|y|^2 + 16\pi^2|A_4|^2 + 32\pi|y|^2|x_2|^2} |y\hat{u}_0(y)|^2 dy.$$

Замечание 2. *Нетрудно убедиться, что сумма полученных энергий равна энергии начальной волны:*

$$E_{R_+} + E_{R^3} = \frac{c^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |y\hat{u}_0(y)|^2 dy = E_0.$$

3.2 Граф, состоящий из двух трехмерных Евклидовых пространств, соединенных отрезком

Рассмотрим сингулярное пространство, состоящее из двух трехмерных Евклидовых пространств, соединенных отрезком. С первым Евклидовым пространством отрезок пересекается точке $z = 0$, со вторым – в точке $z = 1$. Хотим найти решение задачи Коши (2.1) для волнового уравнения на этом графе. При этом предполагается, что функция u_0 имеет компактный носитель в окрестности точки z_0 , такой что $0 < z_0 < 1$, и точки $z = 0$, $z = 1$ не принадлежат этому носителю.

Решение задачи на первой поверхности будем искать в виде:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(r - ct)}{r},$$

решение задачи на второй поверхности – в виде:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k(\rho - ct)}{\rho},$$

и решение задачи на луче – в виде:

$$v(z - ct) + w(z + ct),$$

где r, ρ – геодезические расстояния на соответсвенно первой и второй поверхностях от точек склейки.

Пусть в окрестности прикрепления струны к первой поверхности краевые условия задаются матрицей

$$U_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

а в окрестности прикрепления струны ко второй поверхности – матрицей

$$U_2 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что одновременно эти матрицы не могут быть матрицами, задающими полное отражение. В противном случае волна будет двигаться по отрезку, полностью отражаясь от обеих поверхностей, поэтому с изменением времени энергия волны на отрезке будет постоянна.

Тогда краевые условия в окрестности прикрепления струны к первой поверхности описываются уравнениями:

$$\begin{pmatrix} 1 - x_1 & -x_2 \\ -x_3 & 1 - x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_k'(-ct) \\ w_{k-1}(ct) + v_k(-ct) \end{pmatrix} =$$

$$= i \begin{pmatrix} 1+x_1 & x_2 \\ x_3 & 1+x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4\pi f_k(-ct) \\ -w'_{k-1}(ct) - v'_k(-ct) \end{pmatrix}, \ k \in \mathbb{N},$$

при этом $w_0 = u_0$. Краевые условия в окрестности прикрепления струны ко второй поверхности описываются уравнениями:

$$\begin{pmatrix} 1-y_1 & -y_2 \\ -y_3 & 1-y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'_k(-ct) \\ w_k(1+ct) + v_k(1-ct) \end{pmatrix} =$$

$$= i \begin{pmatrix} 1+y_1 & y_2 \\ y_3 & 1+y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4\pi g_k(-ct) \\ w'_k(1+ct) + v'_k(1-ct) \end{pmatrix}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Сделаем замену $x = ct$ и возьмем преобразование Фурье по x. Таким образом, получим решение задачи Коши на данном сингулярном пространстве в Фурье - образах. Для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$\hat{v}_k(-y) = \frac{A_1 y^2 + y(4\pi A_2 - A_3) - 4\pi A_4}{A_1 y^2 + y(4\pi A_2 + A_3) + 4\pi A_4} \hat{w}_{k-1}(y) = \frac{a_-(y)}{a_+(y)} \hat{w}_{k-1}(y) = A(y) \hat{w}_{k-1}(y),$$

$$\hat{f}_k(-y) = \frac{4iyx_2}{A_1 y^2 + y(4\pi A_2 + A_3) + 4\pi A_4} \hat{w}_{k-1}(y),$$

$$\hat{w}_k(y) = e^{-2iy} \frac{B_1 y^2 + y(4\pi B_2 - B_3) - 4\pi B_4}{B_1 y^2 + y(4\pi B_2 + B_3) + 4\pi B_4} \hat{v}_k(-y) = e^{-2iy} \frac{b_-(y)}{b_+(y)} \hat{v}_k(-y) =$$

$$= e^{-2iy} B(y) \hat{v}_k(-y),$$

$$\hat{g}_k(-y) = \frac{4iyy_2 e^{-iy}}{B_1 y^2 + y(4\pi B_2 + B_3) + 4\pi B_4} \hat{v}_k(-y),$$

где

$$\begin{cases} A_1 = 1 - e^{i\phi} - x_1 + x_4, \ B_1 = 1 - e^{i\eta} - y_1 + y_4, \\ A_2 = 1 + e^{i\phi} + x_1 + x_4, \ B_2 = 1 + e^{i\eta} + y_1 + y_4, \\ A_3 = 1 + e^{i\phi} - x_1 - x_4, \ B_3 = 1 + e^{i\eta} - y_1 - y_4, \\ A_4 = 1 - e^{i\phi} + x_1 - x_4, \ B_4 = 1 - e^{i\eta} + y_1 - y_4, \end{cases} \tag{3.1}$$

здесь $e^{i\phi}, e^{i\eta}$ – определители соответственно матриц U_1 и U_2.

Теперь опишем поведение энергии волны при стремлении времени к бесконечности. После $2n$ $(n \in \mathbb{N})$ отражений волна на отрезке описывается функцией $w_n(z+ct)$, такой что

$$\hat{w}_n(y) = \left(e^{-2iy}\frac{B_1y^2 + y(4\pi B_2 - B_3) - 4\pi B_4}{B_1y^2 + y(4\pi B_2 + B_3) + 4\pi B_4}\right)^n \left(\frac{A_1y^2 + y(4\pi A_2 - A_3) - 4\pi A_4}{A_1y^2 + y(4\pi A_2 + A_3) + 4\pi A_4}\right)^n \hat{u}_0(y).$$

После $2n-1$ $(n \in \mathbb{N})$ отражений волна на отрезке описывается функцией $v_n(z-ct)$, такой что

$$\hat{v}_n(-y) = \left(e^{-2iy}\frac{B_1y^2 + y(4\pi B_2 - B_3) - 4\pi B_4}{B_1y^2 + y(4\pi B_2 + B_3) + 4\pi B_4}\right)^{n-1} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{A_1y^2 + y(4\pi A_2 - A_3) - 4\pi A_4}{A_1y^2 + y(4\pi A_2 + A_3) + 4\pi A_4}\right)^n \hat{u}_0(y).$$

Энергия волны на отрезке стремится к нулю при стремлении времени к бесконечности, поскольку

$$|B(y)|^2 = \left|\frac{B_1y^2 + y(4\pi B_2 - B_3) - 4\pi B_4}{B_1y^2 + y(4\pi B_2 + B_3) + 4\pi B_4}\right|^2 =$$

$$= \frac{|B_1|^2|y|^4 + (16\pi^2|B_2|^2 + |B_3|^2)|y|^2 + 16\pi^2|B_4|^2 - 32\pi|y|^2|y_2|^2}{|B_1|^2|y|^4 + (16\pi^2|B_2|^2 + |B_3|^2)|y|^2 + 16\pi^2|B_4|^2 + 32\pi|y|^2|y_2|^2} \leq 1,$$

и, аналогично,

$$|A(y)| = \left|\frac{A_1y^2 + y(4\pi A_2 - A_3) - 4\pi A_4}{A_1y^2 + y(4\pi A_2 + A_3) + 4\pi A_4}\right| \leq 1,$$

причем единица достигается только в случае полного отражения.

Теперь найдем предел энергии волны на каждой из поверхностей. При k-ом $(k \in \mathbb{N})$ отражении от левой поверхности по ней начинает распространяться волна $\frac{f_k(r-ct)}{r}$. Энергия этой волны равна

$$E_1^k = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{32|y|^2|x_2|^2}{|a_+|^2} \left|B(y)A(y)\right|^{2k-2} |y\hat{u}_0(y)|^2 dy.$$

Таким образом, сумма энергий всех волн, распространяющихся по левой поверхности, при стремлении времени к бесконечности равна

$$E_1 = \sum_{k=1}^{\infty} E_1^k = c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{32|y|^2|x_2|^2}{|a_+|^2} \left(\frac{1}{1 - \left|B(y)A(y)\right|^2}\right) |y\hat{u}_0(y)|^2 dy =$$

$$= c^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{32|y|^2|x_2|^2|b_+|^2}{|a_+|^2|b_+|^2-|a_-|^2|b^-|^2}|y\hat{u}_0(y)|^2dy =$$

$$=\frac{c^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x_2|^2\left(|B_1|^2|y|^4+(16\pi^2|B_2|^2+|B_3|^2)|y|^2+16\pi^2|B_4|^2+32\pi|y|^2|y_2|^2\right)}{|y_2|^2\left(|A_1|^2|y|^4+(16\pi^2|A_2|^2+|A_3|^2)|y|^2+16\pi^2|A_4|^2\right)+ +|x_2|^2\left(|B_1|^2|y|^4+(16\pi^2|B_2|^2+|B_3|^2)|y|^2+16\pi^2|B_4|^2\right)}|y\hat{u}_0(y)|^2dy.$$

Аналогично можно доказать, что энергия, которая концентрируется на правой поверхности при стремлении времени к бесконечности, равна

$$E_2=\frac{c^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|y_2|^2\left(|A_1|^2|y|^4+(16\pi^2|A_2|^2+|A_3|^2)|y|^2+16\pi^2|A_4|^2-32\pi|y|^2|x_2|^2\right)}{|y_2|^2\left(|A_1|^2|y|^4+(16\pi^2|A_2|^2+|A_3|^2)|y|^2+16\pi^2|A_4|^2\right)+ +|x_2|^2\left(|B_1|^2|y|^4+(16\pi^2|B_2|^2+|B_3|^2)|y|^2+16\pi^2|B_4|^2\right)}|y\hat{u}_0(y)|^2dy.$$

Таким образом, приходим к теореме:

Теорема 11. Энергия волны, являющейся решением задачи Коши (2.1) на сингулярном пространстве, состоящем из двух трехмерных Евклидовых постранств, соединенных отрезком, при стремлении времени к бесконечности распределяется следующим образом: энергия волны, которая распространяется по отрезку, стремится к нулю. Предельная энергия, которая концентрируется на первой поверхности, равна

$$E_1=\frac{c^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x_2|^2\left(|B_1|^2|y|^4+(16\pi^2|B_2|^2+|B_3|^2)|y|^2+16\pi^2|B_4|^2+32\pi|y|^2|y_2|^2\right)}{|y_2|^2\left(|A_1|^2|y|^4+(16\pi^2|A_2|^2+|A_3|^2)|y|^2+16\pi^2|A_4|^2\right)+ +|x_2|^2\left(|B_1|^2|y|^4+(16\pi^2|B_2|^2+|B_3|^2)|y|^2+16\pi^2|B_4|^2\right)}|y\hat{u}_0(y)|^2dy,$$

энергия, которая концентрируется на второй поверхности, равна

$$E_2=\frac{c^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|y_2|^2\left(|A_1|^2|y|^4+(16\pi^2|A_2|^2+|A_3|^2)|y|^2+16\pi^2|A_4|^2-32\pi|y|^2|x_2|^2\right)}{|y_2|^2\left(|A_1|^2|y|^4+(16\pi^2|A_2|^2+|A_3|^2)|y|^2+16\pi^2|A_4|^2\right)+ +|x_2|^2\left(|B_1|^2|y|^4+(16\pi^2|B_2|^2+|B_3|^2)|y|^2+16\pi^2|B_4|^2\right)}|y\hat{u}_0(y)|^2dy.$$

Замечание 3. *Нетрудно убедиться, что сумма энергий на поверхностях при стремлении времени к бесконечности равна энергии начальной волны:*

$$E_1+E_2=\frac{c^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|y\hat{u}_0(y)|^2dy=E_0.$$

Глава 4

Задача Коши для волного уравнения на однородном дереве

Рассмотрим бесконечное дерево Γ с корнем o, из которого выходит ровно одно ребро, а из любой вершины $v \neq o$ выходит ровно $b > 1$ ребер: $e_v^1, e_v^2, ..., e_v^b$. Ребро, которое входит в вершину v, будем обозначать e_v^-. Длина каждого ребра равна 1.

Определение 14. Описанное дерево называется *однородным* с числом ветвления b.

Множество вершин этого дерева будем обозначать $V(\Gamma)$, множество ребер $E(\Gamma)$. Введем частичное упорядочение на дереве: для двух точек $x, y \in \Gamma$ пишем $x \preceq y$, если x лежит на единственном простом пути, соединяющем корень с точкой y. Длину пути обозначим $|y|$. Пусть $< y, z >:= \{x \in \Gamma : y \preceq x \preceq z\}$. Тогда ребро $e =< v, w >$ имеет начальную вершину v, а конечную w.

Введем следующие обозначения:

$$F_\Gamma = \{f \in L^2(\Gamma) |\ \forall x, y \in \Gamma : |x| = |y| \Rightarrow f(x) = f(y)\},$$

для поддерева T дерева Γ

$$F_T = \{f \in L^2(\Gamma) |\ f(x) = 0\ \forall x \in \Gamma \setminus T,\ f(x) = f(y)\ \forall x, y \in T : |x| = |y|\},$$

для вершины $v \in V(\Gamma)$ и ребра $e =< v, w >\in E(\Gamma)$ положим

$$T_v = \{x \in \Gamma : x \succeq v\},\ T_e = e \bigcup T_w,$$

$$F_v = \{f \in F_{T_{e_v^1}} \oplus ... \oplus F_{T_{e_v^b}} : \sum_{x \in T_v : |x| = t} f(x) = 0\}.$$

Тогда можно сформулировать следующее утверждение:

Теорема 12. [13]

$$L^2(\Gamma) = F_\Gamma \oplus \sum_{v \in V(\Gamma) \setminus o} \oplus F_v.$$

4.1 Оператор Лапласа на однородном дереве с обобщенными условиями Кирхгофа

Оператор Лапласа на подобных деревьях с условиями согласования Кирхгофа в вершинах вводился в работах [13] и [14]. Мы хотим обобщить эти условия. В первой главе мы определили оператор Лапласа как самосопряженное расширение оператора A_0. Каждое самосопряженное расширение может быть описано с помощью пространства граничных значений. Выберем граничные условия, которые будут симметричны относительно корня дерева, при этом будут являться обобщением условий Кирхгофа. Для этого рассмотрим следующие лагранжевы плоскости:

$$\Lambda_\gamma = \left\{ \left(\begin{matrix} \gamma\left(\alpha_1 + \alpha_2 + ...\alpha_b\right) \\ -\alpha_1 \\ ... \\ -\alpha_b \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} \beta \\ \gamma\beta \\ ... \\ \gamma\beta \end{matrix} \right) \middle| \alpha_1, ..., \alpha_b, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

Здесь $\gamma > 0$ – некоторое фиксированное действительно число.

Граничные условия, соответствующие таким лагранжевым плоскостям, задают самосопряженный оператор. Таким образом, мы приходим к определению

Определение 15. *Оператором Лапласа Δ с обобщенными условиями Кирхгофа* на однородном дереве Γ с числом ветвления b будем называть самосопряженный оператор в $L^2(\Gamma)$, который определен на множестве функций из пространства Соболева $f(x) \in \oplus \sum_{e \in E(\Gamma)} H^2(e)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $f|_{e_v^-}(v) = \frac{1}{\gamma} f|_{e_v^1}(v) = ... = \frac{1}{\gamma} f|_{e_v^b}$;

2. $f'|_{e_v^-}(v) = \gamma(f'|_{e_v^1}(v) + ... + f'|_{e_v^b}(v))$;

3. $f(o) = 0$.

При этом на каждом ребре $e \in E(\Gamma)$
$$\Delta f(x) = -\frac{d^2 f(x)}{dx^2}.$$

4.2 Спектр оператора Лапласа с обобщенными условиями Кирхгофа

Рассмотрим оператор Δ_0 в $L^2(\mathbb{R}_+)$, определенный на множестве функций $y \in H^2(0,1) \times H^2(1,2) \times ... \times H^2(n-1,n) \times ...$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $y(n+) = \gamma b^{1/2} y(n-),\ y'(n+) = \gamma^{-1} b^{-1/2} y'(n-),\ \forall n \in \mathbb{N}$;

2. $y(0) = 0$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1,n)} |y''(t)|^2 dt < \infty$,

и на каждом интервале $(n-1, n),\ n \in \mathbb{N}$ действующий следующим образом:
$$\Delta_0 y = -y''.$$

Теорема 13. Ограничение оператора Δ на пространство F_Γ унитарно эквивалентно оператору Δ_0 в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Доказательство. Каждой функции $f \in F_\Gamma$ поставим в соответствие функцию $\varphi(t) = f(x)$ для любых $x : |x| = t$. Оператор $P : f \to \varphi$ изометрично отображает пространство F_Γ в пространство $L^2(\mathbb{R}_+, b_\Gamma)$ с нормой
$$||\varphi||^2_{L^2(\mathbb{R}_+, b_\Gamma)} = \int_{\mathbb{R}_+} |\varphi(t)|^2 b_\Gamma(t) dt,$$
где $b_\Gamma(t) = b^{k-1},\ k-1 \le t < k,\ k \in \mathbb{N}$. Здесь под $\int_{\mathbb{R}_+}$ понимается $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^{n}$.

Оператору Δ соответствует следующая квадратичная форма:
$$a[f] = \int_\Gamma |f'|^2 dx,\ f \in H^{1,0}(\Gamma) = \{g \in H^1(\Gamma) | g(o) = 0\}.$$

Применяя преобразование P, получаем

$$\tilde{a}[\varphi] = a[f] = \int_{\mathbb{R}_+} |\varphi'(t)|^2 b_\Gamma(t) dt,\ \varphi \in H^{1,0}(\mathbb{R}_+, b_\Gamma).$$

Сделав замену $y(t) = b_\Gamma(t)^{\frac{1}{2}}\varphi(t)$, перейдем в пространство $L^2(\mathbb{R}_+)$, в котором

$$a_0[y] = a[f] = \int_{\mathbb{R}_+} |y'(t)|^2 dt,\ y \in H^1(0,1) \times H^1(1,2) \times ... \times H^1(n-1,n) \times ...,\quad (4.1)$$

поскольку функция $b_\Gamma(t)$ ступенчатая, то $y(t)$ имеет скачки в точках $n \in \mathbb{N}$.

Для функции $f \in Dom(\Delta) \cap F_\Gamma$ верны следующие условия: $f(o) = 0$ и $f|_{e_v^-}(v) = \frac{1}{\gamma} f|_{e_v^1}(v) = ... = \frac{1}{\gamma} f|_{e_v^b},\ \forall v \in V(\Gamma) \setminus \{o\}$. Отсюда получаем, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(n-) = \frac{1}{\gamma}\varphi(n+)$, следовательно,

$$y(0) = 0,\ y(n+) = \gamma b^{1/2} y(n-),\ n \in \mathbb{N}.$$

Самосопряженный оператор, соответствующий квадратичной форме (4.1), на каждом интервале действует следующим образом:

$$\Delta_0 y = -y'',\ y \in H^2(0,1) \times H^2(1,2) \times ... \times H^2(n-1,n) \times ...,$$

при этом $y'(n+) = \gamma^{-1} b^{-1/2} y'(n-)$, поскольку $f \in Dom(\Delta) \cap F_\Gamma$, откуда $f'|_{e_v^-}(v) = \gamma b f'|_{e_v^1}(v)$, следовательно, $\varphi'(n-) = \gamma b \varphi(n+)$. □

Рассмотрим оператор B в $L^2(\mathbb{R})$, определенный на множестве функций $y \in H^2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm n\},\ n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$y(n+) = \gamma b^{1/2} y(n-),\ y'(n+) = \gamma^{-1} b^{-1/2} y'(n-),\ \forall n \in \mathbb{Z},\quad (4.2)$$

такой что

$$By(t) = -y''(t),\ t \notin \mathbb{Z}.$$

Лемма 1. *Спектр оператора B состоит из промежутков $b_l = [(\pi(l-1) + \theta)^2, (\pi l - \theta)^2]$, где $\theta = \arccos(\frac{1}{R}),\ R = \frac{\gamma b^{1/2} + \gamma^{-1} b^{-1/2}}{2}$.*

Доказательство. Для нахождения спектра оператора B рассмотрим уравнение

$$y'' + \mu^2 y = 0.$$

Опираясь на теорию Флоке, получим, что для решения $y(t)$ такого уравнения верно $y(t+1) = e^{i\xi}y(t)$, где $\xi \in [0, 2\pi)$ – некоторый параметр. Отсюда получаем

$$y(1+) = e^{i\xi}y(0+),\ y'(1+) = e^{i\xi}y'(0+).$$

Принимая во внимание условия (4.2), приходим к задаче

$$y''(t) + \mu^2 y(t) = 0,\ 0 < t < 1,$$

$$y(1-) = \gamma^{-1}b^{-1/2}e^{i\xi}y(0+),\ y'(1-) = \gamma b^{1/2}e^{i\xi}y'(0+).$$

Можно убедиться, что μ должно удовлетворять уравнению $\cos\mu = \frac{\cos\xi}{R}$, где $R = \frac{\gamma b^{1/2}+\gamma^{-1}b^{-1/2}}{2} > 1$. Отсюда

$$\mu_l(\xi) = \begin{cases} \pi(l-1) + \varphi(\xi), l = 2k-1, \\ \pi l - \varphi(\xi), l = 2k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{4.3}$$

$\varphi(\xi) = \arccos\frac{\cos\xi}{R}$.

Заметим, что функция $\varphi(\xi)$ взаимнооднозначно отображает отрезок $[0, \pi]$ в отрезок $[\theta, \pi - \theta]$, где $\theta = \arccos(\frac{1}{R})$. Отсюда получаем, что

$$b_l = \cup_\xi \mu_l^2(\xi) = [(\pi(l-1)+\theta)^2, (\pi l - \theta)^2],\ l \in \mathbb{N}$$

– спектр оператора B. □

Теорема 14. Существенный спектр оператора Δ_0 состоит из интервалов $b_l = [(\pi(l-1)+\theta)^2, (\pi l - \theta)^2],\ l \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Оператор Δ_0 неотрицательный, значит, его спектр лежит на интервале $[0, \infty)$. Докажем, что существенный спектр оператора A_0 состоит из промежутков b_l.

Рассмотрим оператор D, который определен на множестве функций $y \in H^1(0,1) \times H^1(1,2) \times ... \times H^1(n-1,n) \times ...$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $y(n+) = \gamma b^{1/2}y(n-)$;

2. $y(0+) = 0$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1,n)} |y'(t)|^2 dt < \infty$,

при этом на каждом интервале $(n-1, n), \ n \in \mathbb{N}$

$$(Dy)(t) = -iy'(t).$$

Можно убедиться в том, что сопряженный оператор D^* определен на множестве функций из прямого произведения $y \in H^1(0,1) \times H^1(1,2) \times ... \times H^1(n-1,n) \times ...$, удовлетворяющих условиям:

1. $y(n+) = \gamma^{-1} b^{-1/2} y(n-)$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1,n)} |y'(t)|^2 dt < \infty$,

и на каждом интервале $(n-1, n), \ n \in \mathbb{N}$ он действует следующим образом:

$$(D^* y)(t) = -iy'(t).$$

Заметим, что $\Delta_0 = D^* D$. Спектр сопряженного оператора совпадает со спектром исходного, откуда операторы Δ_0 и DD^* имеют одинаковый спектр. Функции из области определения оператора DD^* удовлетворяют условиям:

1. $y'(0+) = 0$;

2. $y(n+) = \gamma^{-1} b^{-1/2} y(n-)$;

3. $y'(n+) = \gamma b^{1/2} y'(n-)$,

при этом $DD^* y(t) = -y''(t)$ на каждом интервале $t \in (n-1, n), \ n \in \mathbb{N}$. Сделав замену $t_1 = -t$, из оператора DD^* получим оператор C_0 в $L^2(\mathbb{R}_-): \ C_0 y = -y''$, а функции из области определения удовлетворяют условиям:

1. $y'(0-) = 0$;

2. $y((-n)-) = \gamma^{-1} b^{-1/2} y((-n)+)$;

3. $y'((-n)-) = \gamma b^{1/2} y'((-n)+), \ n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим оператор $B' = \Delta_0 \oplus C_0$. Его область определения совпадает с областью определения оператора B из леммы 1, только условия в нуле заменены на $y(0+) = 0, y'(0-) = 0$. Операторы B и B' являются самосопряженными расширениями одного и того же оператора, следовательно, их существенные спектры совпадают. Отсюда спектр оператора B' состоит из промежутков b_l, а это есть объединение спектров операторов Δ_0 и C_0, но спектры этих операторов совпадают. В итоге получаем, что существенный спектр оператора Δ_0 состоит из промежутков $b_l = [(\pi(l-1)+\theta)^2, (\pi l - \theta)^2],\ l \in \mathbb{N}$. $\square$

Теорема 15. Если $\gamma^2 b > 1$, то дискретный спектр оператора Δ_0 состоит из простых собственных значений $\lambda_l = (\pi l)^2,\ l \in \mathbb{N}$. Соответствующие нормированные в $L^2(\mathbb{R}_+)$ собственные функции имеют вид

$$y_l(x) = \sqrt{2(\gamma^2 b - 1)}\gamma^{-n} b^{-\frac{n}{2}} \sin(\pi l x),\ x \in (n-1, n),\ n \in \mathbb{N}.$$

Если $0 < \gamma^2 b \leq 1$, то дискретный спектр оператора Δ_0 пуст.

Доказательство. Если $\gamma^2 b > 1$, то можно убедиться, что каждая функция y_l является собственной функцией, соответствующей собственному значению $(\pi l)^2$. Также можно проверить, что $\lambda = 0$ не является собственным значением.

Если $0 < \gamma^2 b \leq 1$, то $\lambda = 0$ также не является собственным значением. Докажем, что $\lambda = \pi s$ не является собственным значением оператора Δ_0 для любого $s \in \mathbb{N}$. Пусть это не так, тогда собственная функция должна быть пропорциональна функции

$$y(t) = \gamma^{-(n-1)} b^{-\frac{n-1}{2}} \sin(\pi s t),\ n-1 < t < n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Но эта функция не принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Теперь докажем, что в обоих случаях число $\lambda = k^2 > 0$ не является собственным значением, если $k \neq \pi s$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$. Найдем решение задачи

$$\begin{cases} y''(t) + k^2 y(t) = 0, \\ y(n+) = \gamma b^{1/2} y(n-),\ y'(n+) = \gamma^{-1} b^{-1/2} y'(n-). \end{cases} \tag{4.4}$$

В случае $R|\cos k| > 1$ решением данной задачи являются функции

$$y_j(t) = (\gamma b^{1/2} \sin k(n-t) + q_j \sin k(t-n+1)) q_j^{n-1},\ n-1 < t < n,\ n \in \mathbb{N},\ j = 1, 2,$$

где q_1, q_2 – корни уравнения

$$q^2 - 2Rq\cos k + 1 = 0,\ R = \frac{\gamma b^{1/2} + \gamma^{-1}b^{-1/2}}{2}.$$

Решения линейно зависимы в том и только том случае, когда их Вронскиан

$$W = y_1y_2' - y_1'y_2 = (q_1q_2)^{n-1}\gamma b^{1/2}(q_2 - q_1)k\sin k = 0,\ n-1 < t < n,\ n \in \mathbb{N},$$

то есть, если $k = 0$ или $k = \pi s$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$, но эти случаи были рассмотрены ранее.

Кроме условий из задачи (4.4) собственная функция должна также удовлетворять условию $y(0) = 0$. Заметим, что $y_1(0) = y_2(0) = \gamma b^{1/2}\sin k$, следовательно, собственная функция должна быть пропорциональна функции

$$y_0(t) = \frac{y_2(t) - y_1(t)}{q_2 - q_1} = b^{1/2}\gamma\frac{q_2^{n-1} - q_1^{n-1}}{q_2 - q_1}\sin k(n-t) + \frac{q_2^n - q_1^n}{q_2 - q_1}\sin k(t-n+1),$$
$$n-1 < t < n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Данная функция не принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R}_+)$, поскольку $q_1q_2 = 1, |q_2| > 1$, откуда

$$\left|\frac{q_2^n - q_1^n}{q_2 - q_1}\right| \geq \sum_{k=0}^{n-1}|q_1^k q_2^{n-1-k}| > \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

В случае $R\cos k = 1$ собственная функция должна быть пропорциональна функции

$$y_0(t) = \begin{cases} \sin(kt),\ 0 < t < 1, \\ (n-1)\gamma b^{1/2}\sin k(n-t) + n\sin k(t-n+1),\ n-1 < t < n,\ n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}. \end{cases}$$

Эта функция также не принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R}_+)$. Случай $R\cos k = -1$ рассматривается аналогично.

В остальных случаях $k^2 \in b_l$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$. Таким образом, теорема доказана. $\square$

4.3 Решение задачи Коши для волнового уравнения

Будем рассматривать следующую задачу Коши для волнового уравнения на однородном дереве:

$$\begin{cases} u''_{tt} = -\Delta u, \\ u|_{t=0} = u_0(z), \\ u'_t|_{t=0} = u'_0(z), \end{cases} \tag{4.5}$$

где $u_0(z)$ имеет компактный носитель на ребере дерева, выходящем из корня, причем вершины дерева не принадлежат носителю.

Если $f \in L^2(\Gamma)$ – решение данной задачи, то $\forall x, y \in \Gamma : |x| = |y| \Rightarrow f(x) = f(y)$, следовательно, по утверждению 12, необходимо рассматривать только действие оператора Лапласа на F_Γ. Опираясь на теорему 13, можно перейти к эквивалентной задаче в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$:

$$\begin{cases} y''_{tt} = y_{xx},\ x \in (n-1, n), \\ y|_{t=0} = b^{\frac{n-1}{2}} u_0(x),\ x \in (n-1, n), \\ y'_t|_{t=0} = b^{\frac{n-1}{2}} u'_0(x),\ x \in (n-1, n), \\ y(0, t) = 0, \\ y(n+, t) = \gamma b^{1/2} y(n-, t), \\ y'_x(n+, t) = \gamma^{-1} b^{-1/2} y'_x(n-, t), \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.6}$$

Рассмотрим случай $\gamma^2 b > 1$. Используя теоремы 14 и 15, получим, что решение задачи Коши (4.6) имеет вид:

$$y(x,t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{2(\gamma^2 b - 1)} \gamma^{-n} b^{-\frac{n}{2}} \sin(\pi l x) \left(A_l \sin(\pi l t) + B_l \cos(\pi l t) \right) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \int_{b_l} \zeta_l(x, \xi) \left(C_l(\xi) \sin(\mu_l(\xi) t) + D_l(\xi) \cos(\mu_l(\xi) t) \right) d\mu_l^2(\xi),\ x \in (n-1, n),\ n \in \mathbb{N},$$

где $\mu_l(\xi)$ определены системой (4.3), $\zeta_l(x, \xi)$– обобщенные функции непрерывного спектра оператора Δ_0.

Из начальных условий найдем коэффициенты A_l, B_l, $C_l(\xi)$ и $D_l(\xi)$:

$$\begin{cases} b^{\frac{n-1}{2}}u_0(x) = \sum_{l=1}^{\infty}\sqrt{2(\gamma^2 b-1)}\gamma^{-n}b^{\frac{-n}{2}}\sin(\pi l x)B_l + \sum_{l=1}^{\infty}\int_{b_l}\zeta_l(x,\xi)D_l(\xi)d\mu_l^2(\xi),\\ b^{\frac{n-1}{2}}u_0'(x) = \sum_{l=1}^{\infty}\sqrt{2(\gamma^2 b-1)}\gamma^{-n}b^{\frac{-n}{2}}\sin(\pi l x)\pi l A_l + \sum_{l=1}^{\infty}\int_{b_l}\zeta_l(x,\xi)\mu_l(\xi)C_l(\xi)d\mu_l^2(\xi),\\ x\in(n-1,n),\ n\in\mathbb{N}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} A_l = \frac{1}{\pi l}\sqrt{\frac{2(\gamma^2 b-1)}{\gamma^2 b}}\int_0^1 u_0'(x)\sin(\pi l x)dx,\\ B_l = \sqrt{\frac{2(\gamma^2 b-1)}{\gamma^2 b}}\int_0^1 u_0(x)\sin(\pi l x)dx = \frac{1}{\pi l}\sqrt{\frac{2(\gamma^2 b-1)}{\gamma^2 b}}\int_0^1 u_0'(x)\cos(\pi l x)dx,\\ C_l(\xi) = \frac{1}{\mu_l(\xi)}\int_0^1 u_0'(x)\overline{\zeta_l(x,\xi)}dx,\\ D_l(\xi) = \int_0^1 u_0(x)\overline{\zeta_l(x,\xi)}dx. \end{cases} \tag{4.7}$$

В случае $0<\gamma^2 b\le 1$ решение задачи Коши (4.6) имеет вид:

$$y(x,t) = \sum_{l=1}^{\infty}\int_{b_l}\zeta_l(x,\xi)\left(C_l(\xi)\sin(\mu_l(\xi)t) + D_l(\xi)\cos(\mu_l(\xi)t)\right)d\mu_l^2(\xi),$$

$$x\in(n-1,n),\ n\in\mathbb{N},$$

где C_l и D_l определяются системой (4.7).

Таким образом, получаем теорему:

Теорема 16. В случае $\gamma^2 b>1$ решением задачи Коши (4.6) для волнового уравнения на однородном дереве с числом ветвления b является следующая функция:

$$y(x,t) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{2(\gamma^2 b-1)}{\gamma^{n+1}b^{\frac{n+1}{2}}}\frac{\sin(\pi l x)}{\pi l}\int_0^1 u_0'(y)\cos(\pi l(t-y))dy +$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\int_{b_l}\zeta_l(x,\xi)\left(\frac{\sin(\mu_l(\xi)t)}{\mu_l(\xi)}\int_0^1 u_0'(y)\overline{\zeta_l(y,\xi)}dy + \cos(\mu_l(\xi)t)\int_0^1 u_0(y)\overline{\zeta_l(y,\xi)}dy\right)d\mu_l^2(\xi),$$

$x\in(n-1,n),\ n\in\mathbb{N}.$

В случае $0<\gamma^2 b\le 1$ решение задачи Коши имеет вид:

$$y(x,t) =$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}\int_{b_l}\zeta_l(x,\xi)\left(\frac{\sin(\mu_l(\xi)t)}{\mu_l(\xi)}\int_0^1 u_0'(y)\overline{\zeta_l(y,\xi)}dy + \cos(\mu_l(\xi)t)\int_0^1 u_0(y)\overline{\zeta_l(y,\xi)}dy\right)d\mu_l^2(\xi),$$

$x\in(n-1,n),\ n\in\mathbb{N}.$

Замечание 4. *Следует заметить, что ряды из теоремы 16 равномерно сходятся, поскольку*

$$\left|\frac{2(\gamma^2 b-1)}{\gamma^{n+1}b^{\frac{n+1}{2}}}\frac{\sin(\pi l x)}{\pi l}\int_0^1 u_0'(y)\cos(\pi l(y-t))dy\right| =$$

$$= \left|\frac{2(\gamma^2 b-1)}{\gamma^{n+1}b^{\frac{n+1}{2}}}\frac{\sin(\pi l x)}{(\pi l)^2}\int_0^1 u_0''(y)\sin(\pi l(y-t))dy\right| \leq \frac{const}{(\pi l)^2}.$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для второго ряда, так как функция $\zeta_l(y,\xi)$ является линейной комбинацией $\sin(\mu_l(\xi)y)$ и $\cos(\mu_l(\xi)y)$. Таким образом, решение задачи (4.6) является непрерывной функцией на каждом интервале $(n-1,n),\ n \in \mathbb{N}$.

4.4 Поведение энергии при стремлении времени к бесконечности

Возникает вопрос, как будет вести себя энергия волны, являющейся решением задачи (4.6), при стремлении времени к бесконечности. Вся ли энергия "уйдет на бесконечность", или будут ребра, на которых в пределе при стремлении времени к бесконечности энергия не будет стремиться к нулю. Чтобы ответить на этот вопрос, докажем следующую лемму:

Лемма 2. *Если нормированные обобщенные функции непрерывного спектра $\zeta_l(x,\xi)$, $\xi \in [0;\pi], l \in \mathbb{N}$ имеют непрерывные производные по ξ, то волна, порожденная непрерывным спектром, "уходит на бесконечность". Это означает, что*

$$\lim_{t\to+\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\int_{b_l}\zeta_l(x,\xi)\left(\frac{\sin(\mu_l(\xi)t)}{\mu_l(\xi)}\int_0^1 u_0'(y)\overline{\zeta_l(y,\xi)}dy+\right.$$

$$\left.+\cos(\mu_l(\xi)t)\int_0^1 u_0(y)\overline{\zeta_l(y,\xi)}dy\right)d\mu_l^2(\xi) = 0$$

для любого фиксированного $n \in \mathbb{N},\ x \in (n-1,n)$.

Доказательство. Обобщенные функции непрерывного спектра, удовлетворяющие условию нормировки

$$\int_{\mathbb{R}_+} \zeta_l(x,\xi)\overline{\zeta_l(x,\eta)}dx = \delta(\xi-\eta),\ l \in \mathbb{N},\ \xi,\eta \in [0;\pi],$$

имеют вид

$$\zeta_l(x,\xi) = \nu_l(\xi)\Big(P_n \sin\big(\mu_l(\xi)(n-x)\big) + Q_n \sin\big(\mu_l(\xi)(x-n+1)\big)\Big),\ n-1<x<n,$$

где $P_1 = 0,\ Q_1 = 1,\ P_{n+1} = \gamma b^{\frac{1}{2}} Q_n,\ Q_{n+1} = 2\cos(\xi)Q_n - Q_{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ \nu_l(\xi)$ – нормирующая функция. Нормирующую функцию можно определить следующим образом:

$$1 \equiv \nu_l^2(\xi)\left(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_{n-1}^{n}|\zeta_l(x,\xi)|^2dx\right).$$

Поскольку в интеграле

$$\int_{n-1}^{n}\Big(P_n \sin\big(\mu_l(\xi)(n-x)\big) + Q_n \sin\big(\mu_l(\xi)(x-n+1)\big)\Big)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(P_n^2 + Q_n^2 - 2\frac{\cos\xi}{R}P_nQ_n\right) - \frac{\sin(\mu_l(\xi))}{2\mu_l(\xi)}\left(\left(P_n^2+Q_n^2\right)\frac{\cos\xi}{R} - 2P_nQ_n\right)$$

от l зависит только коэффициент $\mu_l(\xi)$ в знаменателе, получаем, что $\nu_l(\xi)$ растет по l не быстрее $\mu_l(\xi)$. Аналогично, можно убедиться, что $\nu_l'(\xi)$ растет по l не быстрее, чем некоторая степень $\mu_l(\xi)$.

Из условий леммы следует, что нормирующая функция $\nu_l(\xi)$ и ее производная $\nu_l'(\xi)$ непрерывны по ξ на отрезке $[0;\pi]$, а значит, ограничены. Из условия нормировки было получено, что $\nu_l(\xi)$ и $\nu_l'(\xi)$ растут по l не быстрее, чем некоторая степень $\mu_l(\xi)$. Отсюда получаем, что существуют $m \in \mathbb{N}$ и $\nu \in \mathbb{R}$ такие что

$$\frac{|\nu_l(\xi)|^2}{|\mu_l(\xi)|^m} \le \nu,\ \frac{|\nu_l'(\xi)|^2}{|\mu_l(\xi)|^m} \le \nu,\ \forall\xi \in [0,\pi],\ l \in \mathbb{N}.$$

Для определенности будем полагать, что m – четное число.

Рассмотрим интервал $x \in (0,1)$. На нем функция $\zeta_l(x,\xi)$ имеет вид:

$$\zeta_l(x,\xi) = \nu_l(\xi)\sin(\mu_l(\xi)x).$$

Используя (4.7), получаем:

$$\begin{cases} \nu_l(\xi)\mu_l(\xi)C_l(\xi) = \nu_l(\xi)^2 \int_0^1 u_0'(x)\sin(\mu_l(\xi)x)dx = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}\nu_l(\xi)^2}{\mu_l(\xi)^m}\int_0^1 u_0^{(m+1)}(x)\sin(\mu_l(\xi)x)dx, \\ \nu_l(\xi)\mu_l(\xi)D_l(\xi) = \nu_l(\xi)^2 \int_0^1 u_0'(x)\cos(\mu_l(\xi)x)dx = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}\nu_l(\xi)^2}{\mu_l(\xi)^m}\int_0^1 u_0^{(m+1)}(x)\cos(\mu_l(\xi)x)dx. \end{cases}$$

Из (4.3) $\mu_l(\xi) = 2\pi k \pm \varphi(\xi)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, откуда

$$\nu_l(\xi)\mu_l(\xi)D_l(\xi) =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}\nu_l(\xi)^2}{\mu_l(\xi)^m}\int_0^1 u_0^{(m+1)}(x)\left[\cos(2\pi kx)\cos(\varphi(\xi)x) \mp \sin(2\pi kx)\sin(\varphi(\xi)x)\right]dx =$$

$$= (-1)^{\frac{m}{2}}\frac{\nu_l(\xi)^2}{\mu_l(\xi)^m}\left(a_{2k}(\xi) \mp \tilde{b}_{2k}(\xi)\right),$$

где $a_s(\xi)$ $(s = 1, 2...)$ – коэффициенты при косинусах в ряде Фурье функции $u_0^{(m+1)}(x)\cos(\varphi(\xi)x)$, $\tilde{b}_s(\xi)$ $(s = 1, 2, ...)$ – коэффициенты при синусах в ряде Фурье функции $u_0^{(m+1)}(x)\sin(\varphi(\xi)x)$, поскольку $u_0(x)$ – гладкая функция с компактным носителем на интервале $(0, 1)$. Аналогично,

$$\nu_l(\xi)\mu_l(\xi)C_l(\xi) = (-1)^{\frac{m}{2}}\frac{\nu_l(\xi)^2}{\mu_l(\xi)^m}\left(b_{2k}(\xi) \pm \tilde{a}_{2k}(\xi)\right),$$

где $b_s(\xi)$ $(s = 1, 2, ...)$ – коэффициенты при синусах в ряде Фурье функции $u_0^{(m+1)}(x)$ $\cos(\varphi(\xi)x)$, $\tilde{a}_s(\xi)$ $(s = 1, 2, ...)$ – коэффициенты при косинусах в ряде Фурье функции $u_0^{m+1}(x)\sin(\varphi(\xi)x)$. Поскольку для функций $u_0^{(m+1)}(x)\cos(\varphi(\xi)x)$ и $u_0^{(m+1)}(x)$ $\sin(\varphi(\xi)x)$ ряд из модулей коэффициентов Фурье сходится, а $\left|\frac{\nu_l(\xi)^2}{\mu_l(\xi)^m}\right|$ ограничен, получаем:

$$\sum_{l=1}^{\infty}|\nu_l(\xi)\mu_l(\xi)D_l(\xi)| \le \sum_{l=1}^{\infty}\left|\frac{\nu_l(\xi)^2}{\mu_l(\xi)^m}\right|\left(|a_{2l}(\xi)| + |\tilde{b}_{2l}(\xi)|\right) \le const, \tag{4.8}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}|\nu_l(\xi)\mu_l(\xi)C_l(\xi)| \le \sum_{l=1}^{\infty}\left|\frac{\nu_l(\xi)^2}{\mu_l(\xi)^m}\right|\left(|b_{2l}(\xi)| + |\tilde{a}_{2l}(\xi)|\right) \le const \tag{4.9}$$

при любом $\xi \in [0, \pi]$.

С помощью аналогичных рассуждений несложно доказать, что

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left|\frac{d}{d\xi}\Big(\nu_l(\xi)\mu_l(\xi)D_l(\xi)\Big)\right| \le \sum_{l=1}^{\infty}\left|\int_0^1 2\nu_l'(\xi)\nu_l(\xi)u_0'(y)\sin(\mu_l(\xi)y)dy\right| +$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\left|\int_0^1 \nu_l(\xi)^2 y u_0'(y)\cos(\mu_l(\xi)y)\mu_l'(\xi)dy\right| \leq const, \tag{4.10}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left|\frac{d}{d\xi}\Big(\nu_l(\xi)\mu_l(\xi)C_l(\xi)\Big)\right| \leq const,\ \forall\xi\in[0,\pi], \tag{4.11}$$

поскольку

$$|\mu_l'(\xi)| = \left|\frac{\sin\xi}{\sqrt{R^2-\cos^2(\xi)}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{R^2-1}} \leq const,$$

так как $R > 1$.

Теперь докажем лемму для $n = 1$. Проинтегрируем по частям функцию

$$w(x,t) = \sum_{l=1}^{\infty}\int_{b_l}\nu_l(\xi)\sin(\mu_l(\xi)x)\left(\sin(\mu_l(\xi)t)C_l(\xi)+\cos(\mu_l(\xi)t)D_l(\xi)\right)d\mu_l^2(\xi) =$$

$$= 2\sum_{l=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\nu_l(\xi)\sin(\mu_l(\xi)x)\mu_l(\xi)\mu_l'(\xi)\left(\sin(\mu_l(\xi)t)C_l(\xi)+\cos(\mu_l(\xi)t)D_l(\xi)\right)d\xi =$$

$$= \frac{2}{t}\sum_{l=1}^{\infty}\nu_l(\xi)\sin(\mu_l(\xi)x)\left[-\cos(\mu_l(\xi)t)\mu_l(\xi)C_l(\xi)+\sin(\mu_l(\xi)t)\mu_l(\xi)D_l(\xi)\right]\Big|_{\xi=0}^{\pi}+$$

$$\frac{2}{t}\int_0^{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\cos(\mu_l(\xi)t)\frac{d}{d\xi}\Big(\nu_l(\xi)\mu_l(\xi)C_l(\xi)\sin(\mu_l(\xi)x)\Big)d\xi-$$

$$-\frac{2}{t}\int_0^{\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\sin(\mu_l(\xi)t)\frac{d}{d\xi}\Big(\nu_l(\xi)\mu_l(\xi)D_l(\xi)\sin(\mu_l(\xi)x)\Big)d\xi. \tag{4.12}$$

Используя неравенства (4.8) и (4.9), оценим первое слагаемое в выражении (4.12):

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left|\nu_l(\pi)\sin(\mu_l(\pi)x)\left[-\cos(\mu_l(\pi)t)\mu_l(\pi)C_l(\pi)+\sin(\mu_l(\pi)t)\mu_l(\pi)D_l(\pi)\right]\right| \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^{\infty}\left(|\nu_l(\pi)\mu_l(\pi)C_l(\pi)|+|\nu_l(\pi)\mu_l(\pi)D_l(\pi)|\right) \leq const.$$

Аналогично,

$$\sum_{l=1}^{\infty}\Big|\nu_l(0)\sin(\mu_l(0)x)\left[-\cos(\mu_l(0)t)\mu_l(0)C_l(0)+\sin(\mu_l(0)t)\mu_l(0)D_l(0)\right]\Big| \leq const.$$

Используя неравенства (4.9) и (4.11), оценим выражения под интегралом в (4.12):

$$\left|\sum_{l=1}^{\infty}\cos(\mu_l(\xi)t)\frac{d}{d\xi}\left(\nu_l(\xi)\mu_l(\xi)C_l(\xi)\sin(\mu_l(\xi)x)\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{l=1}^{\infty}\cos(\mu_l(\xi)t)\mu_l'(\xi)x\cos(\mu_l(\xi)x)\nu_l(\xi)\mu_l(\xi)C_l(\xi)\right| +$$

$$+\left|\sum_{l=1}^{\infty}\cos(\mu_l(\xi)t)\sin(\mu_l(\xi)x)\frac{d}{d\xi}\big(\nu_l(\xi)\mu_l(\xi)C_l(\xi)\big)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{R^2-1}}\sum_{l=1}^{\infty}|\nu_l(\xi)\mu_l(\xi)C_l(\xi)| + \sum_{l=1}^{\infty}\left|\frac{d}{d\xi}\Big(\nu_l(\xi)\mu_l(\xi)C_l(\xi)\Big)\right| \leq const,$$

поскольку $|x| \leq 1,\ |\mu'(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{R^2-1}}$. Аналогично,

$$\left|\sum_{l=1}^{\infty}\sin(\mu_l(\xi)t)\frac{d}{d\xi}\Big(\nu_l(\xi)\mu_l(\xi)D_l(\xi)\sin(\mu_l(\xi)x)\Big)\right| \leq const,$$

следовательно, функция под интегралом ограничена.

Таким образом, $|w(x,t)| \leq \frac{const}{t}$, откуда

$$\lim_{t\to+\infty} w(x,t) = 0.$$

Следовательно, при $n = 1$ лемма доказана.

Для всех остальных уровней доказательство аналогино, поскольку для любого $n \in \mathbb{N}$ на уровне n функции $\zeta_l(x,\xi)$ являютя линейными комбинациями $\sin(\mu_l(\xi)x)$ и $\cos(\mu_l(\xi)x)$, следовательно, $|\zeta_l(x,\xi)|$ и $|\frac{d}{d\xi}\zeta_l(x,\xi)|$ ограничены для любого фиксированного $n \in N$ и для любого $x \in (n-1, n)$. $\square$

Опирась на предыдущую лемму, можно получить следующую теорему:

Теорема 17. Если $0 < \gamma^2 b \leq 1$, то для однородного дерева с числом ветвления b волна $y(x,t)$, являющаяся решением задачи Коши (4.6), "уйдет на бесконечность", то есть

$$\lim_{t\to\infty} y(x,t) = 0.$$

Теперь исследуем случай $0 < \gamma^2 b \leq 1$. Введем определения:

Определение 16. Для волны $y(x,t)$ *долей энергии, которая остается на уровне* n при стремлении времени к бесконечности, будем называть

$$e_n = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2E_0} \int_{n-1}^{n} |y_t'(x,t)|^2 + |y_x'(x,t)|^2 dx,$$

где E_0 – энергия начальной волны.

Определение 17. *Долей энергии волны, которая остается на конечном участке графа*, называем

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} e_n.$$

Теорема 18. Если $\gamma^2 b > 1$, то для однородного дерева с числом ветвления b доля энергии волны, являющейся решением задачи (4.6), которая остается на конечном участке графа, равна $\frac{\gamma^2 b-1}{\gamma^2 b}$. Для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ доля энергии, которая остается на уровне n, равна $\frac{(\gamma^2 b-1)^2}{(\gamma^2 b)^{n+1}}$.

Доказательство. По теореме 16 решение задачи (4.6) имеет следующий вид:

$$y(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

где $v(x,t)$ – волна, порожденная дискретным спектром, $w(x,t)$ – волна, порожденная непрерывным спектром.

По лемме 2 при стремлении времени к бесконечности на каждом фиксированном уровне однородного дерева функция $w(x,t)$ стремится к нулю. Отсюда получаем, что для каждого уровня $n \in \mathbb{N}$ при стремлении времени к бесконечности на этом уровне остается энергия

$$E_n = \frac{1}{2}\int_{n-1}^{n} |v_t'|^2 + |v_x'|^2 dx = \frac{\gamma^2 b - 1}{(\gamma^2 b)^n} \sum_{l=1}^{\infty} (\pi l)^2 \int_{n-1}^{n} \sin^2(\pi l x) \left(A_l \cos(\pi l t) - B_l \sin(\pi l t)\right)^2 dx +$$

$$+\frac{\gamma^2 b - 1}{(\gamma^2 b)^n} \sum_{l=1}^{\infty} (\pi l)^2 \int_{n-1}^{n} \cos^2(\pi l x) \left(A_l \sin(\pi l t) + B_l \cos(\pi l t)\right)^2 dx =$$

$$= \frac{\gamma^2 b - 1}{2(\gamma^2 b)^n} \sum_{l=1}^{\infty} (\pi l)^2 (A_l^2 + B_l^2) = (\gamma^2 b)^{-n+1} E_1.$$

Энергия исходной волны E_0 равняется $\int_0^1 |u_0'(x)|^2 dx$. Подставляя выражения (4.7) для A_l и B_l, а также используя равенство Парсеваля, получаем:

$$E_1 = \frac{(\gamma^2 b - 1)^2}{(\gamma^2 b)^2} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\left(\int_0^1 u_0'(x) \sin(\pi l x) dx \right)^2 + \left(\int_0^1 u_0'(x) \cos(\pi l x) dx \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{(\gamma^2 b - 1)^2}{(\gamma^2 b)^2} \int_0^1 |u_0'(x)|^2 dx = \frac{(\gamma^2 b - 1)^2}{(\gamma^2 b)^2} E_0,$$

поскольку $\int_{-1}^1 u_0'(x) dx = 0$, т. к. $u_0'(x)$ имеет компактный носитель на интервале $(0; 1)$.

Таким образом,

$$e_n = (\gamma^2 b)^{-n+1} e_1 = \frac{(\gamma^2 b - 1)^2}{(\gamma^2 b)^{n+1}}.$$

Отсюда получаем, что доля энергии волны, которая остается на начальном участке дерева, равна

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma^2 b - 1)^2}{(\gamma^2 b)^{n+1}} = \frac{\gamma^2 b - 1}{\gamma^2 b}.$$

$\square$

4.5 Локальное распределение энергии в окрестности вершины дерева

Рассмотрим однородное дерево с числом ветвления $b = 2$. Можно убедиться, что в этом случае обобщенные условия Кирхгофа в каждой вершине дерева, кроме корневой, задаются унитарной матрицей

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1-2\gamma^2}{1+2\gamma^2} & \frac{2\gamma}{1+2\gamma^2} & \frac{2\gamma}{1+2\gamma^2} \\ \frac{2\gamma}{1+2\gamma^2} & -\frac{1}{1+2\gamma^2} & \frac{2\gamma^2}{1+2\gamma^2} \\ \frac{2\gamma}{1+2\gamma^2} & \frac{2\gamma^2}{1+2\gamma^2} & -\frac{1}{1+2\gamma^2} \end{pmatrix}.$$

Фиксируем вершину v. Для каждого γ найдем энергию волны, которая отразится от вершины и пойдет обратно по ребру e_v^-, а также энергии волн, которые будут распространяться по ребрам e_v^1 и e_v^2.

Пусть волна, которая изначально распространялась по ребру e_v^-, задается функцией u_0 с компактным носителем. Пусть энергия этой волны равна единице, т. е.

$$E_0 = \int_0^1 |u_0'(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 |\hat{u}_0(y)|^2 dy = 1.$$

После того, как начальная волна достигает вершины v, решение задачи Коши на ребре e_v^- принимает вид

$$u_0(x-t) + w(x+t).$$

Здесь функция w задает отраженную волну. Решение задачи Коши на ребрах e_v^1 и e_v^2 будет задаваться функциями $w_1(x-t)$ и $w_2(x-t)$ соответственно. Используя граничные условия, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} w_1(1-t) = w_2(1-t), \\ u_0(1-t) + w(1+t) = \frac{1}{\gamma} w_1(1-t), \\ u_0'(1-t) + w'(1+t) = 2\gamma w_1'(1-t). \end{cases}$$

Сделав замену $s = 1-t$ и применив преобразование Фурье по s, получим решение данной системы в Фурье - образах:

$$\begin{cases} \hat{w}(-y) = e^{2iy} \frac{1-2\gamma^2}{1+2\gamma^2} \hat{u}_0(y), \\ \hat{w}_1(y) = \hat{w}_2(y) = \frac{2\gamma}{1+2\gamma^2} \hat{u}_0(y). \end{cases}$$

Применяя обратное преобразование Фурье, приходим к решению:

$$\begin{cases} w(z) = \frac{1-2\gamma^2}{1+2\gamma^2} u_0(2-z), \\ w_1(z) = w_2(z) = \frac{2\gamma}{1+2\gamma^2} u_0(z). \end{cases}$$

Таким образом, энергия, которая останется на ребре e_v^-, равна

$$E_{e_v^-} = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 |\hat{w}(-y)|^2 dy = \left(\frac{1-2\gamma^2}{1+2\gamma^2} \right)^2 E_0.$$

Энергия, которая уйдет на кажое из ребер e_v^1 и e_v^2, равна

$$E_{e_v^1} = E_{e_v^2} = \frac{4\gamma^2}{(1+2\gamma^2)^2} E_0.$$

Можно убедиться, что сумма энергий равна единице.

Заметим, что выражение $\left(\frac{1-2\gamma^2}{1+2\gamma^2}\right)^2$ принимает любые значения из полуинтервала $[0,1)$. При этом коэффициент $P=\frac{1-2\gamma^2}{1+2\gamma^2}$ в выражении для w принимает любые значения из интервала $(-1,1)$, в зависимости от $\gamma>0$. Таким образом, выбранные нами обобщенные условия Кирхгофа описывают все возможные случаи локального распределения энергии, кроме случая полного отражения волны. В этом случае вся энергия концентрируется на первом ребре.

Замечание 5. *Заметим, что если $2\gamma^2>1$, то коэффициент $P<0$. В этом случае по теореме 18 доля энергии остается на конечном участке дерева. Если $2\gamma^2=1$, то коэффициент $P=0$, что отвечает случаю полного прохождения, поэтому вся энергия уходит на бесконечность. В случае $2\gamma^2<1$ коэффициент $P>0$, и в этом случае по теореме 17 вся энергия тоже уходит на бесконечность.*

Однако, в случае, когда коэффициенты P одинаковы по модулю, но имеют разные знаки, распределение энергии локально в окрестности вершины одинаково, но глобально в одном случае доля энергия остается на конечном участке графа, а в другом – вся энергия "уходит на бесконечность".

Осталось рассмотреть случай полного отражения. Найдем унитарные матрицы, при которых реализуется этот случай. Рассмотрим матрицу

$$U_1=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Такая матрица задает следующие граничные условия:

$$f|_{e_v^-}(v)=f|_{e_v^1}(v)=f|_{e_v^2}(v)=0.$$

Откуда,

$$w(s)=-u_0(2-s),\ w_1(s)=w_2(s)\equiv 0.$$

В этом случае коэффициент $P=-1$.

Рассмотрим матрицу

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица задает следующие граничные условия:

$$f'|_{e_v^-}(v) = f'|_{e_v^1}(v) = f'|_{e_v^2}(v) = 0.$$

В этом случае решение имеет вид

$$w(s) = u_0(2 - s),\ w_1(s) = w_2(s) \equiv 0,$$

т. е. коэффициент $P = 1$.

Матрицы U_1 и U_2 описывают случаи полного отражения волны. В этом случае вся энергия концентрируется на первом ребре дерева. Заметим, что существуют и другие унитарны матрицы, задающие полное отражение, однако поведение энергии в этом случае не изменится.

Теперь рассмотрим общий случай, когда число ветвления равно $b > 2$. Пусть функция w описывает волну, которая отразилась от вершины и распространяется по ребру e_v^-, а функции $w_1, w_2, ..., w_b$ – волны, распространяющиеся по ребрам $e_v^1, e_v^2, ..., e_v^b$ соответственно . Для обобщенных условий Кирхофа с параметром $\gamma > 0$ получаем:

$$\begin{cases} \hat{w}(-y) = e^{2iy}\frac{1-\gamma^2 b}{1+\gamma^2 b}\hat{u}_0(y), \\ \hat{w}_1(y) = \hat{w}_2(y) = ... = \hat{w}_b(y) = \frac{2\gamma}{1+\gamma^2 b}\hat{u}_0(y), \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} w(z) = \frac{1-\gamma^2 b}{1+\gamma^2 b}u_0(2-z), \\ w_1(z) = w_2(z) = ... = w_b(z) = \frac{2\gamma}{1+\gamma^2 b}u_0(z). \end{cases}$$

В этом случае энергия, которая останется на ребре e_v^-, равна

$$E_{e_v^-} = \left(\frac{1 - b\gamma^2}{1 + b\gamma^2}\right)^2 E_0.$$

Энергия, которая уйдет на кажое из ребер $e_v^1, e_v^2, ...e_v^b$, равна

$$E_{e_v^1} = E_{e_v^2} = ... = E_{e_v^b} = \frac{4\gamma^2}{(1 + b\gamma^2)^2} E_0.$$

Сумма энергий равна энергии начальной волны.

Случай полного отражения реализуются, например, для матриц

$$U_1^b = diag\{-1, -1, ..., -1\},\ U_2^b = diag\{1, 1, ..., 1\}.$$

Заключение

В этом разделе мы еще раз перечислим основные результаты.

В работе описаны унитарные матрицы, задающие неотрицательно определенный оператор Лапласа на простейших сингулярных пространствах постоянной кривизны, содержащих двумерное и трехмерное Евклидовы пространства, а также двумерную и трехмерную сферы. Найдено решение задачи Коши для волнового уравнения на описанных объектах. Представлены унитарные матрицы, задающие случай полного отражения волны от поверхности, а также случай полного прохождения.

Для простейшего сингулярного пространства, содержащего трехмерное Евклидово пространство, а также для сингулярного пространства, состоящего их двух трехмерных Евклидовых пространств, соединенных отрезком, описано распределение энергии волны при стремлении времени к бесконечности.

Также рассмотрен оператор Лапласа с обобщенными условиями Кирхгофа на однородном дереве. Найден его спектр, и описано решение задачи Коши для волнового уравнения на данном геометрическом объекте. Изучено распределение энергии волны, являющейся решением задачи, при стремлении времени к бесконечности. Дано описание локального поведения энергии в окрестности вершины дерева.

Перечислим несколько задач, которые хотелось бы решить в дальнейшем:

1. Найти решение задачи Коши для волнового уравнения на простейших сингулярных пространствах постоянной кривизны, содержащих двумерное и трехмерное пространство Лобачевского;

2. Описать поведение энергии волны на произвольном конечном декорированном графе, содержащем трехмерные Евклидовы пространства;

3. Найти решение задачи Коши на однородном дереве в случае, когда начальное условие локализовано на произвольном ребре дерева.

Список публикаций по теме диссертации

[1.1] A. I. Shafarevich, A. V. Tsvetkova. *Solutions of the wave equation on hybrid spaces of constant curvature* // Rus. J. Math. Phys. – 2014. – Vol. 21, № 4. – pp. 509—520. (А. И. Шафаревичу принадлежат постановки задач, А. В. Цветковой принадлежат точные формулировки и доказательства утверждений.)

[1.2] А. В. Цветкова, А. И. Шафаревич. *Задача Коши для волнового уравнения на однородном дереве* // Математические заметки. – 2016. – Т. 100, № 6. – с. 923—931. (А. И. Шафаревичу принадлежат формулировки утверждений, А. В. Цветковой принадлежат доказательства утверждений.)

[1.3] A. V. Tsvetkova. *Distribution of energy of solutions of the wave equation on singular spaces of constant curvature and on a homogeneous tree* // Rus. J. Math. Phys. – 2016. – Vol. 23, № 4. – pp. 536–550.

[1.4] А. В. Цветкова. *Спектр оператора Лапласа и решения волнового уравнения на декорированных графах постоянной кривизны* // Международная конференция «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ», тезисы докладов. – БашГУ, 2015. – с. 146.

[1.5] А. В. Цветкова. *Волновое уравнение на бесконечном однородном дереве* // Международная конференция «Ломоносов–2016» , тезисы докладов. – МГУ, Москва, 2016.

[1.6] A. I. Shafarevich, A. V. Tsvetkova. *The Laplacian on a homogeneous tree with general matching conditions. The wave equation* // International conference «Days on diffraction 2016», abstracts. – St. Petersburg, 2016. – p. 114.

[1.7] А. В. Цветкова, А. И. Шафаревич. *Оператор Лапласа с общими условиями согласования и волновое уравнение на однородном дереве* // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, тезисы докладов. – Суздаль, 2016. – с. 225.

[1.8] A. V. Tsvetkova. *The wave equation on hybrid spaces of constant curvature. The behavior of the energy* // 4-th international workshop «Analysis, Geometry and Probability», book of abstracts. – MSU, Moscow, 2016. – pp. 62–63.

Литература

[1] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. *Обобщенные функции и действия над ними* // М.: Физматлит, 1959.

[2] Р. Курант. *Уравнения с частными производными* // М.: Мир, 1964.

[3] Г. Бейтман, А. Эрдейи. *Высшие трансцендентные функции* // М.: Наука, 1965.

[4] Н. И. Ахиезер, Н. М. Глазман. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве* // М.: Наука, 1966.

[5] Б. С. Павлов, М. Д. Фаддеев. *Модель свободных электронов и задача рассеяния* // ТМФ. – 1983. – Т. 55, № 2. – С. 257–268.

[6] Б. С. Павлов. *Модель потенциала нулевого радиуса с внутренней структурой* // ТМФ. – 1984. – Т. 59, № 3. – С. 345–353.

[7] В. И. Арнольд. *Комплексный лагранжев грассманиан* // Функц. анализ и его прил. – 2000. – Т. 34, № 3. – С. 63–65.

[8] Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабаров. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах* // М.: Физматлит, 2004.

[9] А. А. Толченников. *О ядре операторов Лапласа – Бельтрами с потенциалом нулевого радиуса и на декорированном графе* // Математический сборник. – 2008. – Т. 199, № 7. – С. 123–138.

[10] О. В. Коровина, В. Л. Прядиев. *Структура решения смешанной задачи для волнового уравнения на компактном геометрическом графе в случае ненулевой начальной скорости* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т. 9, № 3. – С. 37—46.

[11] А. А. Толченников, В. Л. Чернышев, А. И. Шафаревич. *Асимптотические свойства и классические динамические системы в квантовых задачах на сингулярных пространствах* // Нелинейная динамика. – 2010. – Т. 6, № 3. – С. 623–638.

[12] P. Exner, P. Seba. *Quantum motion on a half-line connected to a plane* // J. Math. Phys. – 1987. – Vol. 28. – P. 386–391.

[13] A. V. Sobolev, M. Solomyak. *Shrödinger operators on homogeneous metric trees: spectrum in gaps* // Rev. Math. Phys. – 2002. – Vol. 14, № 5. – P. 421–468.

[14] M. Solomyak. *Laplace and Shrödinger operators on regular metric trees: the discrete spectrum case* // Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis. – Birkhäuser, Basel, 2003. – P. 161–181.

[15] J. Bruning, V. A. Geyler. *Scattering on compact manifolds with infinitely thin horns* // J. Math. Phys. – 2003. – Vol. 44, № 2. – P. 371–405.

[16] V. L. Chernyshev, A. I. Shafarevich. *Semiclassical asymptotics and statistical properties of Gaussian packets for the nonstationary Schrödinger equation on a geometric graph* // Rus. J. Math. Phys. – 2008. –Vol. 15, № 1. – P. 25–34.

[17] G. Berkolaiko, P. Kuchment. *Introduction to Quantum Graphs* // Math. Surveys Monogr. – Vol. 186. – Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.

[18] V. L. Chernyshev, A. I. Shafarevich. *Statistics of Gaussian packets on metric and decorated graphs* // Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A: Math. Phys. Eng. Sci. – 2014. – Vol. 372, №2007. – P. 20130145.