МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО – МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

на правах рукописи

ТРОФИМОВ Валерий Владимирович

ПОЛНАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА НА БОРЕЛЕВСКИХ ПОДАЛГЕБРАХ ПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

(01.01.04 – геометрия и топология)

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
А.Т.ФОМЕНКО

Москва – 1980

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время большое внимание было привлечено к задаче полной интегрируемости (по Лиувиллю) различных динамических систем. Важным примером, где возникают вполне интегрируемые динамические системы является уравнение Кортевега-де Фриза, хотя оно само является гамильтоновой системой с континуальным числом степеней свободы, из него можно извлечь конечномерные вполне интегрируемые динамические системы (см. [15], [16]). Из работ Б.А.Дубровина С.В.Манакову удалось извлечь первые интегралы для динамических систем на группе $SO(n)$ -аналогов движения твердого тела с закрепленной точкой [23]. Рассмотрим линейный оператор $A: so(n) \to so(n)$ на пространстве вещественных кососимметрических матриц, тогда уравнения Эйлера пишутся в виде $\dot{M} = [M, \Omega]$, $M = A(\Omega)$, $\Omega \in so(n)$. В случае свободного вращения n мерного твердого тела оператор A имеет вид $A(\Omega) = J\Omega + \Omega J$, J -симметрическая положительно определенная матрица (тензор инерции) и уравнение Эйлера перепишется в виде $J\dot{\Omega} + \dot{\Omega} J = [J, \Omega^2]$. В работе А.С.Мищенко [26] были обнаружены квадратичные интегралы $L_s(X) = tr \sum_{k=0}^{s} X J^k X J^{s-k}$ уравнения Эйлера; инволютивность этой серии интегралов была доказана Л.А. Диким в [12]. Этих интегралов хватает для полной интегрируемости уравнений Эйлера на $SO(4)$ (см. также работу [21]). В работе [23] С.В.Манаков показал, исходя из работ Б.А.Дубровина, что уравнения Эйлера для любого n имеют $\frac{1}{2}\left[\frac{n}{2}\right] + \frac{n(n-1)}{4}$ однозначных интегралов движения, а их общее решение выражается через Θ функции римановых поверхностей. Функциональная независимость первых интегралов в этой работе не доказана, впервые это сделано для $SO(n)$ (и вообще для любой полупростой алгебры Ли) А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко (см. [27]). Уравнения Эйлера пишутся на произвольной полупростой алгебре Ли G : $\dot{X} = [X, \varphi X]$, где оператор φ строится так. Если H подалгебра Картана, $G = H \oplus V$ разложение Картана, то $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{pmatrix}$ в соответствии с этим разложением, где $\varphi_1 : H \to H$ произвольный самосопряженный оператор относительно формы Картана-Киллинга, а $\varphi_2(x) = (ad_b)^{-1} \circ ad_a(x)$, $a, b \in H$, b такой, что для любого корня α алгебры G относительно H, $\alpha(b) \neq$ $\neq 0$. Доказательство полноты первых интегралов этого уравнения, которые возникают как сдвиги функций инвариантных относительно Ad_G, впервые получено в работе А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко [27]. В этой работе был обнаружен алгебраический механизм возникновения интегралов для уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли, связанный с существованием корневого разложения Картана полупростой алгебры Ли $G = H \oplus \sum_{\alpha \neq 0} G^{\alpha}$.

Уравнения Эйлера, описывающие движение твердого тела с полупростой группой (см. [29], [31]), связаны с операторными представлениями Лакса. М.В.Мещеряков в [25] рассмотрел следующий вопрос: какой явный вид имеет решение системы Эйлера для нормальной серии операторов в компактной вещественной подалгебре комплексной простой алгебры Ли A_n. В этой работе дана редукция указанной системы к динамической системе, имеющей вид системы дифференциальных уравнений для решений, которой с начальными данными вне множества ненулевой коразмерности в работе [16] указаны явные формулы через абелевы функции.

Связь вполне интегрируемых систем Лаксового типа с методом орбит в теории групп и алгебр Ли отмечена в работе Адлера [1]. А.Т.Рейманом, М.А.Семеновым-Тян-Шанским и И.Б.Френкелем в работе [36] было показано, что классическая цепочка Тода [42] реализуется на особой орбите коприсоединенного представления борелевской подалгебры в простой алгебре Ли типа A_n. Вполне интегрируемые системы обобщающие цепочку Тода построены О.И.Богоявленским в работе [4] .Все эти системы допускают $L-A$ пару.

В работах А.С.Мищенко,А.Т.Фоменко [28] , [30] показано,что большое значение имеет рассмотрение уравнений Эйлера не только на полупростых алгебрах Ли,но и на произвольных алгебрах Ли.Это связано с открытием в работах А.С.Мищенко,А.Т.Фоменко [28] , [30] некоммутативной теоремы Лиувилля (см. также [24]).Напомним,что в случае произвольной алгебры Ли уравнения Эйлера пишутся не на самой алгебре Ли,а на дуальном к ней пространстве G^* (см. [2]),если дана функция f на G^*,то можно написать уравнения Эйлера с гамильтонианом f : $\dot{x} = \operatorname{sgrad} f_x$,здесь $\operatorname{sgrad} f$ косой градиент f ,определяемый из условия $X(f) = \omega(\operatorname{sgrad} f, X)$ для любого X ,где ω форма Кириллова на орбитах представления Ad^* группы Ли $\mathcal{G}$,отвечающей алгебре Ли G .Эти же уравнения можно переписать в виде $\dot{x} = \{df_x, x\}$,где $\{a,f\}(b) = f([a,b])$, $a, b \in G$, $f \in G^*$, $\{a,f\} \in G^*$.

Напомним формулировку некоммутативной теоремы Лиувилля.Если на симплектическом многообразии M задан гамильтонов поток с алгеброй Ли интегралов V такой,что $\dim V + \operatorname{ind} V = \dim M$, тогда если совместная поверхность уровня интегралов V связна и компактна,то она является тором,размерность которого равна $\operatorname{ind} V$.На каждом торе можно выбрать криволинейные координаты так,что поток будет определять условно периодическое движение.

Здесь $\operatorname{ind} V$ есть,по определению,размерность аннулятора ковектора общего положения (см. [13]).В работе [17] доказано, что аннулятор ковектора общего положения является абелевой подалгеброй.Это естественное обобщение на произвольные алгебры Ли понятия подалгебры Картана.

Если алгебра интегралов коммутативна,то получаем классическую теорему Лиувилля.

В работах А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко были высказаны следующие гипотезы ([28]).

<u>Гипотеза I.</u> Пусть гамильтонова система с алгеброй Ли первых интегралов V на симплектическом многообразии M вполне интегрируема по Лиувиллю в некоммутативном смысле (т.е. $\dim V + \operatorname{ind} V = \dim M$), тогда, вероятно, эта система вполне интегрируема в обычном коммутативном (классическом) смысле т.е. существует коммутативная алгебра Ли V_0 функционально независимых первых интегралов гамильтоновой системы, причем $2\dim V_0 = \dim M$.

<u>Гипотеза 2.</u> Пусть V произвольная конечномерная алгебра Ли, тогда существует конечномерное пространство R функционально независимых функций, определенных на дуальном пространстве V^*, причем любая пара функций $f, g \in R$ находится в инволюции на всех орбитах коприсоединенного представления $Ad_g^*: V^* \to V^*$ и $\dim R = \frac{1}{2}(\operatorname{ind} V + \dim V)$ т.е. $\dim R$ равна половине размерности орбиты общего положения.

Оказывается, гипотезы I и 2 тесно связаны (см. [28]). Пусть M симплектическое многообразие, V алгебра Ли функционально независимых интегралов гамильтоновой системы, $\dim V + \operatorname{ind} V = \dim M$. Если для V выполнена гипотеза 2, то найдется другая, уже коммутативная алгебра Ли V_0 функционально независимых интегралов, причем $2\dim V_0 = \dim M$. Следовательно, в этом случае из некоммутативной интегрируемости по Лиувиллю вытекает классическая коммутативная интегрируемость. При этом алгебра V_0 состоит из функций, функционально зависящих от функций алгебры V.

В работах [29] , [31] , [27] гипотеза 2 была доказана для редуктивных алгебр Ли; из этого факта сразу вытекает доказательство полной интегрируемости уравнений движения многомерного твердого тела с неподвижной точкой.

Напомним, что в [29], [31], [27] для построения системы попарно инволютивных функций на дуальном пространстве V^* к алгебре Ли V группы $\mathcal{G}$ применялась следующая схема: рассматривались функции f на V^* постоянные на орбитах коприсоединенного представления, затем фиксировался какой-либо ковектор $b \in V^*$ и рассматривались всевозможные функции $f_\lambda(x)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), где $f_\lambda(x) = f(x+\lambda b)$. В полученном семействе все функции будут попарно находится в инволюции на орбитах коприсоединенного представления. В полупростом случае этих функций оказалось достаточно, чтобы набрать из них коммутативное семейство, размерность которого равнялась бы половине размерности орбиты общего положения [29], [31], для сингулярных орбит это доказано Дао Чонг Тхи [10].

Некоторые из интегралов в этой конструкции оказываются квадратичными, это как показали А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко связано с когомологиями алгебр Ли с одной стороны и с другой стороны, как показал Я.В.Татаринов, с существованием специальных деформаций метрики $g_{ij}(x;s)$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, так называемых, равностепенных деформаций, которые определяются условием: $\langle v_0, \Gamma v_0 \rangle$ вдоль любой геодезической величина постоянная, где Γ определяется из условия $\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial s} v^i w^j = \langle v, \Gamma w \rangle$, v_0 единичный касательный вектор к геодезической и геодезические рассматриваются для метрики $g_{ij}(x;0)$.

Следующим этапом в доказательстве гипотезы 2 было бы ее доказательство в случае разрешимых алгебр Ли т.к. по теореме Леви всякая конечномерная алгебра Ли G с радикалом S есть полупрямая сумма $G = L \oplus S$, где L некоторая полупростая подалгебра Ли.

Заметим, что если алгебра Ли не является полупростой, то к уравнению Эйлера не применима теория $L-A$ пар, разработанная в работах Б.А.Дубровина и С.В.Манакова. Как только мы отказываемся от условия полупростоты так мгновенно возникает ситуация когда функций постоянных на орбитах Ad^*, отличных от констант, вообще нет. Простейший пример такой группы доставляет группа аффинных преобразований прямой $x' = ax + b$, $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \setminus 0$, в этом случае коразмерность орбит максимальной размерности представления Ad^* равна 0 т.е. орбиты открытые всюду плотные подмножества. В работе [3] А.А.Архангельского показано, что в случае разрешимой алгебры Ли верхнетреугольных матриц четного порядка сдвигов инвариантов мало для построения полного семейства функций, находящихся в инволюции на всех орбитах Ad^*. В работе [36] дана алгебраическая схема для представления уравнений Эйлера $\dot{x} = ad^*_{df_x}(x)$ на произвольной алгебре Ли, без ограничения конечномерности, в коммутаторном виде. Эта методика основана на рассмотрении градуированных алгебр Ли.

Случай специальных разрешимых алгебр Ли, так называемых нильпотентных алгебр Ли, проинтегрирован в работе [45], исходя совсем из других соображений. Если G нильпотентная алгебра Ли, то существуют полиномы $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m$ на G^* ($m = \frac{1}{2} \dim O(f)$, $f \in G^*$, $O(f)$ -орбита в общем положении), инвариант C, открытое подмножество $U \neq \emptyset$ в G^*, инвариантное относительно Ad^* т.ч. $\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij} C$ и для любого $f \in U \subset G^*$, $p_i | O(f)$ и $q_j | O(f)$ осуществляют алгебраический изоморфизм $O(f)$ на $\mathbb{R}^{2m}$.

После отдельных примеров разрешимых алгебр Ли в работе [29], первым продвижением в направлении доказательства гипотезы 2 для произвольных разрешимых алгебр Ли была теорема А.А.Архангельского [3] .А.А.Архангельский обнаружил обобщение изложенной выше схемы для полупростого случая, а именно надо рассматривать функции f на V^* собственные для коприсоединенного представления т.е. удовлетворяющие условию $f(Ad_g^* x) = \chi(g) f(x)$ для любого $g \in \mathcal{H}$, где χ некоторый характер группы $\mathcal{H}$.Если $f_1, \dots, f_s$ набор собственных функций на дуальном пространстве V^* к алгебре Ли V, находящиеся попарно в инволюции, то при любом $b \in V^*$ в инволюции находятся также функции $f_{i,\lambda}(x) = f_i(x+\lambda b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le s$.Для алгебры Ли верхнетреугольных матриц сдвиги полуинвариантов (собственных функций Ad^*) дают полный набор функций, находящихся в инволюции на всех орбитах коприсоединенного представления.

Возникло естественное предположение, что указанных выше сдвигов собственных функций коприсоединенного представления достаточно для доказательства гипотезы 2 на других разрешимых алгебрах Ли. Однако оказалось, что это не так. Метод, разработанный А.А.Архангельским будучи применен к другим алгебрам Ли, дает не достаточный набор функций для полной интегрируемости. Для построения достаточно большого коммутативного семейства функций на орбитах общего положения в других разрешимых алгебрах Ли следует привлекать новые функции, конструируемые другим приемом.

В настоящей диссертации разработан новый метод построения функций в инволюции на орбитах коприсоединенного представления произвольной алгебры Ли. Рассмотрим следующую вещественную форму борелевской подалгебры простой алгебры Ли G : $BG = \oplus_i \mathbb{R}h_i \oplus \sum_{\alpha>0} \mathbb{R}e_\alpha$, где $\{h_i, e_\alpha\}$ базис Шевалле ([39]) алгебры Ли G .Предъявленные методы построения функций в инволюции позволяют доказать гипотезу 2, то есть построить функционально независимое семейство многочленов в инволюции в количестве $\frac{1}{2}\dim O$ (O орбита максимальной размерности представления Ad^* группы Ли $\mathcal{B}G$,отвечающей алгебре Ли BG),для описанных вещественных форм борелевских подалгебр в простых алгебрах Ли G .В эту конструкцию включается случай А.А.Архангельского: верхнетреугольные матрицы являются борелевской подалгеброй в простой алгебре Ли типа A_n .

Рассмотрим классические уравнения Эйлера $\dot{x}=[x, \varphi x]$ на полупростой алгебре Ли G ,где φ оператор А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко.Борелевская подалгебра инвариантна относительно потока,задаваемого этими уравнениями,поэтому они определяют там, так называемые,уравнения движения твердого тела с разрешимой группой $\mathcal{B}G$.Эти уравнения не являются гамильтоновыми на орбитах Ad^* .В работе [18] показано,что запас вполне интегрируемых систем на полупростой классической алгебре Ли G не увеличивается за счет расширений $G\subset G_1$,если предположить, что оператор φ в корневом базисе G имеет диагональный вид.В настоящей диссертации дано построение операторов "твердого тела" $\varphi_{a,b}$ ($a, b\in BG$) на борелевских подалгебрах в простых комплексных алгебрах Ли,для которых уравнения Эйлера $\dot{x}=\{\varphi_{a,b}x, x\}$ вполне интегрируемы по Лиувиллю на орбитах общего положения представления Ad^* группы $\mathcal{B}G$. Первые интегралы этих уравнений строятся с помощью подходящей цепочки подалгебр.

Более точно доказана следующая основная теорема.

Теорема (см. гл. III диссертации,где она доказывается по сериям). Пусть G простая комплексная алгебра Ли типа отличного от E_7 и E_8 ,тогда строится набор функций $f_1,\dots,\dots,f_s$ на пространстве дуальном к борелевской подалгебре в простой алгебре Ли G такой,что

1) функции f_i $(i=1,\dots,s)$ предъявлены в явном виде;

2) функции f_i $(i=1,\dots,s)$ полиномы на BG^*;

3) их количество s равно половине размерности орбиты максимальной размерности представления Ad^* группы,отвечающей подалгебре Бореля;

4) функции f_i $(i=1,\dots,s)$ функционально независимы на орбитах Ad^* общего положения.

В частности,

5) все гамильтоновы потоки гамильтонианы которых принадлежат построенному семейству функций,являются вполне интегрируемыми в классическом (коммутативном) смысле динамическими системами на орбитах общего положения представления Ad^*;

6) если G алгебра Ли типа A_n, C_n, D_n или G_2, то предъявляются операторы $\varphi: BG^* \longrightarrow BG$ типа А.С.Мищенко,А.Т.Фоменко такие,что классические уравнения Эйлера $\dot{x} = \{\varphi x, x\}$ вполне интегрируемы по Лиувиллю в классическом смысле и функции,предъявленные выше дают полный набор первых интегралов;

7) гамильтонов поток,отвечающий левоинвариантному продолжению квадратичной формы с построенными операторами ,на кокасательное расслоение к борелевской подгруппе,вполне интегрируем по Лиувиллю в классическом смысле.

Для построения полных инволютивных семейств предложено два новых метода построения функций в инволюции.Первый связан с рассмотрением фильтраций данной алгебры Ли G подалгебрами $G \supset H_1 \supset H_2 \supset \dots \supset H_p$ т.ч. $G \supset G' \supset H_1 \supset H_1' \supset H_2 \supset \dots \supset H_s$.Строя достаточно большой запас функций в инволюции на H_s^* и поднимая их на G^* (это можно сделать т.к. $G^* \to H_1^* \to \dots \to H_s^*$),и прибавляя на каждом шаге полуинварианты $Ad^*_{H_i}$ мы получим достаточно богатый запас функций на G^* ,которые находятся в инволюции на всех орбитах Ad^*. Этот метод продемонстрирован на примере борелевских подалгебр в классических алгебрах Ли. Выбором подходящей цепочки подалгебр в работе [33] Т.А.Певцова построила полное инволютивное семейство функций для простых комплексных алгебр Ли. Функциональная независимость построенных функций от интегралов из работы [31] не доказана.

Второй метод связан с рассмотрением сдвигов функций из конечномерных подпредставлений Ad^* группы $\mathcal{B}G$ в пространстве аналитических функций на дуальном пространстве к BG. Этот метод продемонстрирован на примере борелевских подалгебр в особых алгебрах Ли типа G_2, F_4, E_6.

Глава I посвящена методам построения функций в инволюции на орбитах коприсоединенного представления Ad^* группы $\mathcal{G}$.

В § I собраны необходимые сведения о гамильтоновых системах и геометрии орбит коприсоединенного представления.

В § 2 выписаны дифференциальные уравнения для инвариантов и полуинвариантов коприсоединенного представления. Они будут основным рабочим инструментом для проверки того, что данная функция является полуинвариантом представления Ad^*.

В § 3 доказано, что если рассмотреть конечномерные подпредставления Ad^* в пространстве аналитических функций на G^*, то тогда при некоторых ограничениях, сдвиги функций из этого подпредставления находятся в инволюции на всех орбитах Ad^*.

В § 4 обсуждается метод построения функций в инволюции, связанный с рассмотрением цепочек подалгебр $G \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_s$ в изучаемой алгебре Ли G.

Глава II посвящена исследованию орбит максимальной размерности представления Ad^* борелевских подалгебр и полуинвариантов (в частности инвариантов) представления Ad^* группы $\mathcal{B}G$.

В § I написаны дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют полуинварианты представления Ad^* борелевских подгрупп в простых комплексных группах Ли.

В § 2 сформулирована основная теорема о размерности орбиты общего положения для представления Ad^* борелевской подалгебры: пусть w_0 элемент группы Вейля максимальной длины, тогда $(-w_0)$ действует на схеме Дынкина (см. [6]); если $\Delta = \{\alpha_i\}$ система простых корней, $A = \{\alpha_i \in \Delta \mid (-w_0)\alpha_i \neq \alpha_i\}$, то $\operatorname{codim} O = \frac{1}{2} \operatorname{card} A$.

В § 3 доказывается теорема §2 в случае борелевской подалгебры в $Sp(n)$.

В § 4 описана в явном виде полная система собственных функций представления Ad^* для $BSp(n)$.

В § 5 описана в явном виде полная система собственных функций представления Ad^* для $BSO(n)$.

В § 6 доказана теорема §2 в случае борелевской подалгебры в $SO(n)$.

В § 7 доказана теорема §2 в случае борелевской подалгебры в BG_2 .

В § 8 описана в явном виде полная система собственных функций представления Ad^* для BF_4 .

В § 9 описана в явном виде полная система собственных функций представления Ad^* для BE_6 .

В § I0 описана в явном виде полная система собственных функций представления Ad^* для BE_7 .

В § II описана в явном виде полная система собственных функций представления Ad^* для BE_8 .

В § I2 доказана теорема §2 в случаях F_4 , E_6 , E_7 , E_8 .

В § I3 описываются характеры для которых можно найти собственную функцию представления Ad^* группы $\mathcal{B}G$: характер допустимый тогда и только тогда когда его числовые отметки на схеме Дынкина простой алгебры Ли G инвариантны относительно действия элемента $(-w_0)$, где w_0 описанный выше элемент группы Вейля алгебры Ли G .

Глава III посвящена применению методов главы I и информации об орбитах и полуинвариантах из главы II к построению вполне интегрируемых динамических систем на орбитах общего положения представления Ad^*. Только в одном случае $BSp(n)$ удается построить полный инволютивный набор функций старым методом - методом сдвига полуинвариантов. В остальных случаях сдвигов полуинвариантов мало для полной интегрируемости.

В § I доказана полная интегрируемость в случае $BSp(n)$, полный набор функций в инволюции строится с помощью сдвигов полуинвариантов Ad^*. Также доказано, что в случае A_n полный набор функций в инволюции можно построить методом цепочек подалгебр.

В § 2 доказана полная интегрируемость в случае $BSO(n)$, функции в инволюции строятся с помощью подходящей цепочки подалгебр.

В § 3 доказана полная интегрируемость в случае BG_2 , функции в инволюции строятся с помощью цепочки подалгебр, эти же функции можно построить и из некоторого подпредставления Ad^*.

В § 4 доказана полная интегрируемость в случае BF_4 , функции в инволюции строятся с помощью некоторого подпредставления Ad^* в пространстве аналитических функций на пространстве дуальном к алгебре Ли BF_4 .

В § 5 доказана полная интегрируемость в случае BE_6 , функции в инволюции строятся с помощью некоторого подпредставления Ad^* в пространстве аналитических функций на пространстве дуальном к алгебре Ли BE_6 .

В § 6 дано построение операторов "твердого тела" на борелевских подалгебрах в простых комплексных алгебрах Ли.Доказана полная интегрируемость уравнений Эйлера с построенными операторами.Кроме того,используя некоммутативную теорему Лиувилля,показано,что если рассмотреть левоинвариантное продолжение на кокасательный пучок $T^*\mathcal{D}G$ квадратичных форм,отвечающих операторам "твердого тела" на BG ,то полученные продолжения определяют вполне интегрируемую в классическом смысле динамическую систему на $T^*\mathcal{D}G$ (на кокасательном пучке используется стандартная симплектическая структура,см. [40]).

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [43] , [44] .

Выражаю глубокую благодарность д.ф.м.н. А.Т.Фоменко,руководившему работой над диссертацией.

ГЛАВА I

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ИНВОЛЮЦИИ НА ОРБИТАХ КОПРИСОЕДИНЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

§I. Определения и предварительные результаты.

Напомним предварительные результаты и определения (см. [7], [8], [20], [29], [40]).

Определение I.I. Пусть $\mathcal{M}$ есть $2n$ мерное дифференцируемое многообразие. Мы назовем $\mathcal{M}$ симплектическим многообразием если задана замкнутая 2-форма Ω ранга $2n$, определенная всюду на $\mathcal{M}$.

На симплектическом многообразии мы имеем взаимно-однозначное соответствие между пространством векторных полей и пространством линейных форм. Для векторного поля X определим форму ω_X формулой $\omega_X(Y)=\Omega(X,Y)$ для любого векторного поля Y. Отображение $X \mapsto \omega_X$ есть взаимно-однозначное отображение на. Обозначим обратное отображение через $\omega \mapsto X_\omega$. Таким образом $\omega(Z)=\Omega(X_\omega, Z)$ для любого векторного поля Z. Мы можем перенести операцию, определяемую для векторных полей скобкой Ли, на дифференциальные формы. Эта операция, называемая скобкой Пуассона, будет обозначаться $[\omega_1, \omega_2]$. Имеем

$$[\omega_1,\omega_2](Z)=\Omega([X_{\omega_1}, X_{\omega_2}], Z)$$

для любого векторного поля Z.

Определение I.2. Пусть f и g две дифференцируемые функции на $\mathcal{M}^{2n}$ и α и β дифференциалы f и g. Скобкой Пуассона (относительно симплектической структуры на $\mathcal{M}^{2n}$) функций f и g называется дифференцируемая функция

$$\{f,g\}=\omega(X_\alpha, X_\beta)=-X_\alpha g=X_\beta f.$$

Известно, что скобка Пуассона определяет в пространстве гладких функций на M^{2n} $C^\infty(M^{2n})$ структуру алгебры Ли.

Определение I.3. Две формы α и β на симплектическом многообразии (M^{2n}, Ω) находятся в инволюции, если $\Omega(X_\alpha, X_\beta) = 0$. Мы скажем, что две гладкие функции f и g на M^{2n} находятся в инволюции, если их дифференциалы находятся в инволюции.

Две гладкие функции f и g находятся в инволюции тогда и только тогда когда их скобка Пуассона $\{f, g\}$ равна нулю.

Определение I.4. Пусть f гладкая функция на симплектическом многообразии (M^{2n}, Ω), то ее косым градиентом $\operatorname{sgrad} f$ называется векторное поле $\operatorname{sgrad} f = X_{df}$ т.е.

$$df(Z) = \Omega(\operatorname{sgrad} f, Z)$$

для любого векторного поля Z. Функция f называется гамильтонианом векторного поля $\operatorname{sgrad} f$.

Функция g является первым интегралом потока $\operatorname{sgrad} f$ тогда и только тогда когда $\{f, g\} \equiv 0$.

Определение I.5. Будем говорить, что система функций $f_1, \ldots, f_k \in C^\infty(M^{2n})$ независима в существенном, если множество

$$\{x \in M^{2n} \mid \operatorname{rang}(df_1|_x, \ldots, df_k|_x) < k\}$$

не содержит внутренних точек. Степенью симметричности $s(h)$ гамильтониана h назовем такое максимально возможное число k, что существует независимая в существенном система функций $f_1, \ldots, f_k \in C^\infty(M^{2n})$ для которой

$$\{f_i, f_j\} = \{f_p, h\} \equiv 0$$

$$(1 \leq i, j, p \leq k).$$

Известно, что $1 \leq s(h) \leq n$.

<u>Определение I.6.</u> Гамильтонова система $\mathrm{sgrad}\, h$ на симплектическом многообразии (M^{2n}, Ω) называется вполне интегрируемой, если $s(h) = n$.

Пусть $\mathcal{G}$ группа Ли, G ее алгебра Ли, $Ad^*: \mathcal{G} \to GL(G^*)$ ее априсоединенное представление или K -представление:

$$(Ad_g^* f)(\xi) = f(Ad_{g^{-1}}\xi),\ f \in G^*,\ \xi \in G,\ g \in \mathcal{G}.$$

Рассмотрим орбиты K -представления группы $\mathcal{G}$ в дуальном пространстве G^* к алгебре Ли G .На каждой такой орбите имеется симплектическая структура (называемая формой Кириллова).

Определим отображение: $\{,\} : G \times G^* \longrightarrow G^*$,

$$\{\xi, f\}(\eta) = f([\xi, \eta]),\ \xi, \eta \in G,\ f \in G^*.$$

<u>Предложение I.I.</u> (См. [2]).Пусть $O_f = \{h \in G^* / h = Ad_g^* f,\ g \in \mathcal{G}\}$,тогда $T_f O_f = \{\{\xi, f\} \mid \xi \in G\}$.

<u>Определение I.7.</u> Пусть $f \in G^*$,тогда аннулятором f называется $Ann(f) = \{\xi \in G \mid \{\xi, f\} \equiv 0\}$.

Имеем линейное отображение $G \longrightarrow T_f O_f$, $\xi \mapsto \{\xi, f\}$. Это отображение "на" ,поэтому $T_f O_f \cong G / Ann(f)$.Легко проверяется,что $Ann(f)$ некоторая подалгебра в G .Пусть e_i базис G , e^j сопряженный базис G^*, $x = x^i e_i \in G$, $f = f_i e^i \in G^*$, $y = y^j e_j \in G$, $f([x, y]) = C_{ij}^k f_k x^i y^j$,тогда $Ann(f)$ определяется системой линейных однородных уравнений $f_k x^i C_{ij}^k = 0$, $j = 1, \dots, n$ с матрицей $\| f_k C_{ij}^k \|$,где C_{ij}^k структурный тензор алгебры Ли G в базисе e_i .

<u>Определение I.8.</u> (См. [13]).Рангом ковектора $f \in G^*$ назовем число $r(f) = \dim Ann(f)$.Положим

$$r = \inf_f \dim Ann(f)$$

Число $r = ind(G)$ называется индексом алгебры Ли G .Элемент

f пространства G^* называется регулярным, если $r(f) = r$.

Известно, что множество функций $f \in G^*$, для которых $r(f) = r$ открыто в G^*. Если алгебра Ли G полупроста, то ее ранг равен ее индексу.

<u>Лемма I.I.</u> Для любого ковектора $f \in G^*$ имеем

$$\dim O_f = rk \, \| C_{ij}^{k} f_k \| .$$

<u>Доказательство.</u>

$$\dim O_f = \dim T_f O_f = \dim G - \dim Ann(f),$$

$$\dim Ann(f) = \dim G - rk \, \| C_{ij}^{k} f_k \| .$$

<u>Теорема I.I.</u> (См. [13] , [17]). Если $f \in G^*$ регулярный ковектор, то $Ann(f)$ абелева подалгебра.

<u>Лемма I.2.</u> (См. [19]). На $G/Ann(f)$, для любого $f \in G^*$ определена кососимметрическая, невырожденная билинейная форма

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = f([\xi_1, \xi_2]) .$$

<u>Следствие.</u> Пространство $G/Ann(f)$ всегда четномерно.

Итак, на орбитах Ad^* получаем дифференциальную форму:

$$\xi_1, \xi_2 \in T_f O_f \Longrightarrow \xi_1 = \{\eta_1, f\}, \; \xi_2 = \{\eta_2, f\} \quad \text{и}$$

$$\omega(\xi_1, \xi_2) = \langle \eta_1, \eta_2 \rangle , \; \eta_1, \eta_2 \in G .$$

Эта форма на орбитах определяет симплектическую структуру то есть форма ω замкнута: $d\omega = 0$ (см. [2] , [19]).

Пусть есть функция H на G^* , тогда на каждой орбите Ad^* возникает гамильтоново векторное поле, касательное к этой орбите. Получающееся так векторное поле имеет вид (см. [29]):

$$\operatorname{sgrad} H_x = \{dH_x, x\}.$$

Система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \{dH_x, x\}$$

называется уравнениями Эйлера.

Простейший способ построения вполне интегрируемых гамильтонианов на орбитах K -представления дает следующая теорема.

Теорема I.2. (См. [29], [31]). Пусть f, g две функции на G^*, постоянные на орбитах K -представления, а $a \in G^*$ фиксированный ковектор, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ фиксированные числа. Функции $f_\lambda(t) = f(t+\lambda a)$ и $g_\mu(t) = g(t+\mu a)$ находятся в инволюции на каждой орбите O_f относительно определенной выше симплектической структуры.

Вообще говоря, построенных этим методом функций на G^* мало для полной интегрируемости уравнений Эйлера на орбитах общего положения K -представления, т.е. количество функционально независимых функций, которые можно построить с помощью теоремы I.2 меньше половины размерности орбиты общего положения K -представления. Если G полупростая алгебра Ли (или редуктивная), то, как показано в работе [31], теорема I.2 дает полный набор функций в инволюции на орбитах K -представления. В следующих параграфах дается описание новых методов для построения функций не постоянных на орбитах и находящихся в инволюции на всех орбитах Ad^*.

§2. Дифференциальные уравнения для инваринтов и полуинвариантов K -представления.

Пусть $\mathcal{G}$ связная группа Ли, G ее алгебра Ли, G^* сопряженное пространство к G, $Ad: \mathcal{G} \to GL(G)$ присоединенное представление и $Ad^*: \mathcal{G} \to GL(G^*)$ коприсоединенное представление. При построении динамических систем будем использовать инварианты и полуинварианты представления Ad^*. В этом параграфе мы напишем систему дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют (полу)инварианты. Через $H(G^*)$ обозначим пространство аналитических функций на G^*.

Определение 2.I. Функция $f \in H(G^*)$ называется инвариантом, если для любых $g \in \mathcal{G}$, $x \in G^*$ имеем $f(Ad_g^* x) = f(x)$ и полуинвариантом, если $f(Ad_g^* x) = \chi(g) f(x)$, где χ характер группы Ли $\mathcal{G}$.

Пусть U открытое подмножество в G^*, $\mathcal{D}(U)$ пространство векторных полей на U, $\mathcal{D}(U)$ является алгеброй Ли относительно скобки Ли. Имеется представление алгебр Ли $\varphi: G \to \mathcal{D}(U)$, которое на базисе $e_1, \dots, e_n$ в G определяется так

$$X_i = X(e_i) = \varphi(e_i) = C_{ik}^j x_j \frac{\partial}{\partial x_k},$$

$$i = 1, \dots, n,$$

здесь C_{ik}^j структурный тензор алгебры G, x_j координаты в G^*, соответствующие базису e^j такому, что $e^j(e_i) = \delta_i^j$. Так как используемые здесь операции имеют тензорный характер, то полученное представление не зависит от выбора базиса в G. Векторные поля X_i, как следует из тождества Якоби, удовлетворяют соотношению $[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$, откуда вытекает, что φ представление алгебр Ли. Будем говорить, что оператор X_i отвечает базисному вектору $e_i \in G$.

Лемма 2.I. Пусть функция $F \in H(G^*)$, тогда

$$\frac{d^n}{dt^n}\Big|_{t=0} F(Ad^*_{\exp t\xi} f) = \left[(-\varphi(\xi))^n F \right](f).$$

Доказательство. Имеет место равенство:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(Ad^*_{\exp t\xi} f) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(f) \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} x_i(Ad^*_{\exp t\xi} f) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x_i}(f) \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(Ad_{\exp(-t\xi)} e_i),$$

так как

$$x_i(Ad^*_{\exp t\xi} f) =$$

$$= (Ad^*_{\exp t\xi} f)(e_i) = f(Ad_{\exp(-t\xi)} e_i).$$

В силу того,что f линейная функция и дифференциал Ad есть ad имеем

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(Ad_{\exp(-t\xi)} e_i) = f(-[\xi, e_i]) =$$

$$= -f(C^k_{ji} \xi^j e_k) = -C^k_{ji} \xi^j f_k .$$

Итак,

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(Ad^*_{\exp t\xi} f) = -C^j_{ki} \xi^k f_j \frac{\partial F}{\partial x_i}(f) = (-\varphi(\xi)F)(f),$$

т.е. при $n=1$ лемма доказана.При любом n имеем

$$\left[(-\varphi(\xi))^n F \right](f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left[(-\varphi(\xi))^{n-1} F \right](Ad^*_{\exp t\xi} f) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}}\Big|_{\tau=0} F(Ad^*_{\exp\tau\xi} Ad^*_{\exp t\xi} f) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}}\Big|_{\tau=0} F(Ad^*_{\exp(\tau+t)\xi} f) =$$

$$= \frac{d^n}{ds^n}\Big|_{s=0} F(Ad^*_{\exp s\xi} f), \quad s = t+\tau.$$

Лемма 2.2. Если функция $F \in H(G^*)$, то

$$F(Ad^*_{\exp t\xi} f) = F(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\varphi(\xi))^n F}{n!}(f) \cdot t^n.$$

Доказательство вытекает из разложения $F(Ad^*_{\exp t\xi} f)$ в ряд Тейлора с использованием леммы 2.I.

Предложение 2.I. Пусть функция $F \in H(G^*)$, тогда

а) F инвариант K-представления группы $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда $X_i F = 0$, $i = 1, \dots, n$, $n = \dim G$.

б) F полуинвариант K-представления группы $\mathcal{G}$, отвечающий характеру χ, тогда и только тогда, когда $X_i F = -\lambda_i F$, $i = 1, \dots, n$, где $n = \dim G$, $\lambda_i = d\chi(e_i)$, $d\chi$ производная χ в единице группы $\mathcal{G}$.

Доказательство. а) Так как $F(Ad^*_{\exp t\xi} f) = F(f)$, то $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(Ad^*_{\exp t\xi} f) = 0$ и поэтому по лемме 2.I при $n = 1$ получаем $X_i F = 0$, $i = 1, \dots, n$. Обратно, если $X_i F = 0$, то $\varphi(\xi) F = 0$ и потому $[-\varphi(\xi)]^n F = 0$ и тогда по лемме 2.2 $F(Ad^*_{\exp t\xi} f) = F(f)$. Так как $\mathcal{G}$ связная группа, то $F(Ad^*_g f) = F(f)$ для любого $g \in \mathcal{G}$.

б) Из равенства $F(Ad^*_{\exp t\xi} f) = \chi(\exp t\xi) F(f)$ следует

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(Ad^*_{\exp t\xi} f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \chi(\exp t\xi)\cdot F(f)$$

и, следовательно, имеем равенство

$$[(-\varphi(\xi))F](f) = \chi_*(\xi)F(f).$$

Обратно, $[(-\varphi(\xi))^n]F = [\chi_*(\xi)]^n F$, поэтому по лемме 2.2

$$F(Ad^*_{\exp t\xi} f) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\chi_*(\xi)]^n}{n!} t^n\right]\cdot F(f)$$

и так как $\chi(\exp t\xi) = \exp(t\chi_*(\xi))$, то получаем утверждение.

Окончательно получаем, что для того чтобы найти инварианты, надо решить систему дифференциальных уравнений

$$C^{\kappa}_{ij}\, x_{\kappa} \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0,\ i = 1, \dots, n,$$

а для полуинвариантов

$$C^{\kappa}_{ij}\, x_{\kappa} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \lambda_i F,\ i = 1, \dots, n.$$

Методы решений этих систем см. в [9], [14], [32], [35]. Система для полуинвариантов имеет решение, вообще говоря, не для любого характера.

Определение 2.2. Характер χ называется допустимым, если существует функция $F \in H(G^*)$, $F \not\equiv 0$ такая, что

$$F(Ad^*_g f) = \chi(g)F(f),\ g \in \mathcal{G},\ f \in G^*.$$

В терминах операторов X_i можно дать критерий инвариантности подпространства $V \subset H(G^*)$ относительно операторов Ad^*_g.

Предложение 2.2. Пусть V конечномерное подпространство в $H(G^*)$ и $f \in H(G^*)$, тогда для любого $g \in \mathcal{G}$ ($\mathcal{G}$ односвязная группа Ли, соответствующая алгебре Ли G) $f(Ad^*_g x) \in V$ тогда и только тогда, когда $X_i f \in V$, $i=1,\dots,n=\dim G$.

Доказательство. Если $f \in V$, то из того, что $f(Ad_g^* x) \in V$ для любого $g \in \mathcal{G}$ следует, что $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(Ad^*_{\exp t\xi} x) \in V$, так как любое конечномерное подпространство замкнуто (см. [37]) и тогда по лемме 2.I $X_i f \in V$. Обратно, достаточно проверить, что $f(Ad_g^* x) \in V$ для $g = \exp t\xi$ т.к. связная группа Ли порождается любой своей окрестностью единицы, а достаточно малая окрестность единицы порождается однопараметрическими подгруппами. Имеем

$$f(Ad^*_{\exp t\xi} x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\varphi(\xi))^n}{n!} f(x)\, t^n$$

и т.к. V замкнуто, то $f(Ad^*_{\exp t\xi} x) \in V$.

§3. Представления групп Ли и вполне интегрируемые динамические системы на орбитах Ad^*.

Пусть есть подпространство W в пространстве $H(G^*)$ т.ч.

I) $\dim W < \infty$,

2) для любых $g \in \mathcal{G}$, $f \in W$ имеем $f(Ad_g^* x) \in W$.

Если в W фиксировать базис $f_1, \dots, f_s$, то каждая функция $f \in W$ определяет на группе $\mathcal{G}$, отвечающей алгебре Ли G, набор функций c_f^i: $f(Ad_g^* x) = c_f^i(g) f_i(x)$ и набор линейных функционалов $c_*^i(f)$ на G, т.е. $c_*^i(f) \in G^*$:

$$c_*^i(f)(\xi) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} c_f^i(\exp t\xi) = dc_f^i(\xi),$$

$c_*^i(f)$ дифференциал отображения c_f^i в единице группы.

Предложение 3.I. При сделанных выше предположениях утверждается, что

$$(\operatorname{sgrad} f)(x) = c_*^1(f) f_1(x) + \dots + c_*^s(f) f_s(x).$$

Доказательство. Продифференцируем равенство

$$f(Ad^*_{\exp t\xi}x) = c^1(\exp t\xi)f_1(x) + \ldots + c^s(\exp t\xi)f_s(x)$$

по t при $t=0$: $c^1_*(\xi)f_1(x) + \ldots + c^s_*(\xi)f_s(x) =$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(Ad^*_{\exp t\xi}x) = f_{*,x}\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad^*_{\exp t\xi}x\Big) =$$

$$= f_*(ad^*_\xi x) = (ad^*_\xi x)(f_{*,x}) = x([\xi, f_{*,x}]) =$$

$$= -x([f_{*,x}, \xi]) = -\{f_{*,x}, x\}(\xi),$$

здесь $f_{*,x} \in (G^*)^*$, но $(G^*)^* \cong G$, поэтому $f_{*,x} \in G$.
Итак, мы получили $\{f_{*,x}, x\} = -c^1_* f_1(x) - \ldots - c^s_* f_s(x)$.
Проверим, что определение векторного поля $\operatorname{sgrad} f$ будет выполнено, если положить $\operatorname{sgrad} f = c^1_* f_1 + \ldots + c^s_* f_s$, в силу невырожденности симплектической структуры ω тем самым все будет доказано.

$$\omega(c^i_* f_i(x), \{\xi, x\}) = \omega(-\{f_{*,x}, x\}, \{\xi, x\}) =$$

$$= x(-[f_{*,x}, \xi]) = x([\xi, f_{*,x}]) =$$

$$= \{\xi, x\}(f_{*,x}) = df_x(\{\xi, x\}).$$

Лемма 3.I. Пусть функция $f \in W \subset H(G^*)$, где W конечномерное инвариантное подпространство, тогда, если $X_i f = c^j_{*i} f_j$, то $c^j_*(f) = c^j_{*i} e^i$.

Доказательство. Утверждение вытекает из равенства (см. §2)

$$(X_i f)(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(Ad^*_{\exp te_i} x).$$

<u>Лемма 3.2.</u> Пусть f, g гладкие функции на G^*, тогда $\{f,g\} \equiv 0$ на всех орбитах Ad^* тогда и только тогда, когда

$$C^k_{ij} x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \equiv 0$$

здесь e_i базис в G, C^k_{ij} структурный тензор G в базисе e_i, e^j сопряженный базис G^*, x_i координаты отвечающие базису e^j.

<u>Доказательство.</u> Для косого градиента имеем выражение $\operatorname{sgrad} f_x = \{df_x, x\}$. Поэтому $\{f,g\}_x =$

$$= \omega(\operatorname{sgrad} f_x, \operatorname{sgrad} g_x) = df_x(\operatorname{sgrad} g_x) = df_x(\{dg_x, x\}) =$$

$$= \{dg_x, x\}(df_x) = x([dg_x, df_x]) =$$

$$= x([e_i, e_j]) \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = C^k_{ij} x_k \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j};$$

$$dg_x = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) e_i, \quad df_x = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) e_i.$$

<u>Теорема 3.I.</u> Пусть в $H(G^*)$ выделено конечномерное подпространство W, инвариантное относительно K-представления группы $\mathcal{G}$, отвечающей алгебре Ли G, $f_1, \ldots, f_s$ базис W. Если в W заданы функции $h_1, \ldots, h_p \in W$ такие, что

$$C^k_{j*}(dh_{i,x}) \equiv 0, \quad 1 \le i,j \le p, \quad 1 \le k \le s,$$

где $C^k_{j*} = C^k_*(h_j)$ относительно базиса $f_1, \ldots, f_s$, то утверждается, что

I) $\{h_i, h_j\} = 0$, $1 \le i,j \le p$ на всех орбитах K-представления группы $\mathcal{G}$.

2) сдвиги h_i в инволюции на всех орбитах K -представления $\mathcal{G}$:

$$\{h_i(x+\lambda a), h_j(x+\mu a)\} \equiv 0,$$

$$1 \le i,j \le p, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ a \in G^*$$

<u>Доказательство.</u> Проверим, что

$$C_{ij}^{k} x_k \frac{\partial h_\alpha}{\partial x_i}(x+\lambda a) \frac{\partial h_\beta}{\partial x_j}(x+\mu a) = 0. \qquad (3.1)$$

Обозначим $x+\lambda a = y$, тогда левая часть (3.1) даст

$$A = C_{ij}^{k} y_k \frac{\partial h_\alpha}{\partial y_i}(y) \frac{\partial h_\beta}{\partial y_j}(y+\nu a) -$$

$$- \lambda C_{ij}^{k} a_k \frac{\partial h_\alpha}{\partial y_i}(y) \frac{\partial h_\beta}{\partial y_j}(y+\nu a),$$

где $\nu = \mu - \lambda$. Из равенства

$$C_{ij}^{k}(y_k + \nu a_k) \frac{\partial h_\beta}{\partial y_j}(y+\nu a) = C_{\beta * i}^{\gamma} f_\gamma(y+\nu a)$$

($C_{\beta * i}^{\gamma}$ i -ая координата ковектора $C_{\beta *}^{\gamma}$, $1 \le \gamma \le p$, $1 \le \beta \le s$)
следует, что

$$C_{ij}^{k} a_k \frac{\partial h_\beta}{\partial y_j}(y+\nu a) = \frac{1}{\nu}\left[C_{\beta * i}^{\gamma} f_\gamma(y+\nu a) - C_{ij}^{k} y_k \frac{\partial h_\beta}{\partial y_j}(y+\nu a)\right],$$

поэтому

$$A = C_{ij}^{k} y_k \frac{\partial h_\alpha}{\partial y_i}(y) \frac{\partial h_\beta}{\partial y_j}(y+\nu a) - \frac{\lambda}{\nu}\left[C_{\beta * i}^{\gamma} f_\gamma(y+\nu a) -\right.$$

$$\left. - C_{ij}^{k} y_k \frac{\partial h_\beta}{\partial y_j}(y+\nu a)\right] \frac{\partial h_\alpha}{\partial y_i}(y) = \left(1+\frac{\lambda}{\nu}\right) C_{ij}^{k} y_k \frac{\partial h_\alpha}{\partial y_i}(y) \times$$

$$\times \frac{\partial h_\beta}{\partial y_j}(y+\nu a) - \frac{\lambda}{\nu} C_{\beta * i}^{\gamma} f_\gamma(y+\nu a) \frac{\partial h_\alpha}{\partial y_i}(y) =$$

$$= -\left(1+\frac{\lambda}{\nu}\right) C^{\delta}_{\alpha * j}\, h_\delta(y) \frac{\partial h_\beta}{\partial y_i}(y+\nu a) - \frac{\lambda}{\nu} C^{\gamma}_{\beta * i}\, f_\gamma(y+\nu a) \times$$

$$\times \frac{\partial h_\alpha}{\partial y_i}(y) = -\left(1+\frac{\lambda}{\nu}\right) C^{\delta}_{\alpha *}(dh_\beta(y+\nu a))\, h_\delta(y) -$$

$$- \frac{\lambda}{\nu} C^{\gamma}_{\beta *}(dh_\alpha(y))\, f_\gamma(y+\nu a) \equiv 0 .$$

Наконец,предельный переход в (3.I) доказывает это равенство при $\nu = \mu - \lambda = 0$,что и требовалось доказать.

§4. Индуктивное построение вполне интегрируемых динамических систем на орбитах Ad^* (цепочки подалгебр).

Пусть $e_1,\dots, e_n$ базис алгебры Ли G , $e^1,\dots, e^n$ сопряженный базис G^* ,соответствующие координаты будем обозначать $x^1,\dots, x^n$ и $x_1,\dots, x_n$.Пусть H подалгебра алгебры Ли G ,имеем проекцию $G^* \longrightarrow H^*$,которая определяется ограничением линейных функционалов.В этом случае функции,заданные на H^* можно поднимать на G^* .

<u>Лемма 4.I.</u> Пусть f и g функции на H^* находящиеся в инволюции на всех орбитах $Ad^*(\mathcal{H})$.Рассмотрим продолжение этих функций на G^* ,тогда они останутся в инволюции на всех орбитах представления Ad^* группы $\mathcal{G}$,отвечающей алгебре Ли G .

<u>Доказательство.</u> Пусть $e_1,\dots, e_s$ базис H ,дополним его до базиса $e_1,\dots, e_s, e_{s+1},\dots, e_n$ в G .Пусть $i,\dots = 1,\dots, s$, $\alpha,\dots = s+1,\dots, n$, $a,\dots = 1,\dots, n$.Эти обозначения сохраним до конца параграфа.В этом случае подъем функций с H^* на G^* не зависит от координат x_α . Инволютивность будем проверять с помощью леммы 3.2.Имеем

$$C^{c}_{ab} x_c \frac{\partial f}{\partial x_a} \frac{\partial g}{\partial x_b} = C^{c}_{\alpha\beta} x_c \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \frac{\partial g}{\partial x_\beta} +$$

$$+C_{i\alpha}^{c} x_c \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_\alpha} + C_{\alpha i}^{c} x_c \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \frac{\partial g}{\partial x_i} +$$

$$+C_{ij}^{c} x_c \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} = C_{ij}^{c} x_c \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} =$$

$$= C_{ij}^{k} x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} = 0 .$$

Мы воспользовались тем,что $\frac{\partial g}{\partial x_\beta} = 0$ и т.к. $[e_i, e_j] \in H$,то $C_{ij}^{\alpha} = 0$.Окончательно получаем 0 в силу того,что

$$\{f,g\} = C_{ij}^{k} x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \equiv 0$$

на всех орбитах K -представления группы $\mathcal{H}$.

Лемма 4.2. Пусть есть цепочка подалгебр $G \supset H$ тогда,если f инвариант K -представления $\mathcal{G}$,а g подъем функции с H^* ,то f и g в инволюции на всех орбитах K -представления группы $\mathcal{G}$,отвечающей G .

Доказательство вытекает из равенства

$$C_{ij}^{k} x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} = \left(C_{ij}^{k} x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \frac{\partial g}{\partial x_j} \equiv 0 .$$

Лемма 4.3. Если $H \subset G'$,где G' -производная алгебра Ли и f полуинвариант K -представления G ,а $\frac{\partial g}{\partial x_\alpha} = 0$,то $\{f,g\} = 0$ на всех орбитах K -представления G .

Доказательство. Функция f полуинвариант Ad^* тогда и только тогда,когда $C_{ij}^{k} x_k \frac{\partial f}{\partial x_j} = \lambda_i f$,поэтому

$$C_{bc}^{a} x_a \frac{\partial f}{\partial x_b} \frac{\partial g}{\partial x_c} = \left(C_{bc}^{a} x_a \frac{\partial f}{\partial x_b} \right) \frac{\partial g}{\partial x_c} =$$

$$= (X_c f) \frac{\partial g}{\partial x_c} = \lambda_c \frac{\partial g}{\partial x_c} \cdot f = \left(\lambda_i \frac{\partial g}{\partial x_i} + \right.$$

$$\left. + \lambda_\alpha \frac{\partial g}{\partial x_\alpha} \right) \cdot f = 0 ,$$

$\lambda_i = 0$ т.к. характер на производной алгебре тождественный нуль.

Итак, по каждой цепочке подалгебр $G \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_s$ такой, что $G \supset G' \supset H_1 \supset H_1' \supset H_2 \supset H_2' \supset \ldots \supset H_{s-1}' \supset H_s$ можно строить функции в инволюции на G^*, используя достаточно большой запас функций в инволюции на H_s^*, например, полученных с помощью сдвигов инвариантов, и на каждом шаге присоединяя полуинварианты K-представления группы $\mathcal{G}_i$, отвечающей алгебре H_i.

Оказывается, на каждом шаге можно добавлять не только полуинварианты, но и функции из некоторых представлений.

<u>Лемма 4.4.</u> Пусть $\mathcal{K}$ подалгебра G и $V \subset H(G^*)$ инвариантное относительно $Ad^*_{\mathcal{G}}$ конечномерное подпространство в пространстве аналитических функций на G^*. Функция $f \in V$, как описано в предыдущем параграфе, при выборе базиса в V определяет некоторые ковекторы $c^i_* \in G^*$. Если продолжение функции $g \in H(\mathcal{K}^*)$ постоянно вдоль этих ковекторов, то оно находится в инволюции с функцией f на всех орбитах K-представления группы $\mathcal{G}$.

<u>Доказательство</u> этой леммы аналогично доказательству леммы 4.3.

Процесса, описанного в лемме 4.4 уже достаточно для полной интегрируемости борелевских подалгебр в простых алгебрах Ли.

Простейший вариант конструкции, когда H_s максимальная абелева подалгебра в G'. В качестве инвариантов абелевой подалгебры можно взять любой ее элемент, рассматриваемый как функция на дуальном пространстве. Вообще говоря, инвариантов максимальной абелевой подалгебры не хватает для построения вполне интегрируемых систем и приходится использовать несколько подалгебр.

<u>Лемма 4.5.</u> Если есть цепочка подалгебр $G \supset H_1 \supset H_2$ т.ч

$$G \supset G' \supset H_1 \supset H_1' \supset H_2 \ , \ H_2' = 0,$$

$$[H_1, H_2] = 0 \ ,$$

то любая функция $f \in H(H_1^*)$ и элементы H_2 ,которые рассматриваются как функции на H_2^* ,в инволюции на всех орбитах $Ad^*_{\mathcal{G}}(G^*)$.

<u>Доказательство.</u> В силу условия $[H_1, H_2] = 0$ в X_d нет дифференцирований по координатам,сопряженным к координатам в H_1 , а функция f не зависит от остальных координат,поэтому имеем

$$C^a_{bc} x_a \frac{\partial f}{\partial x_b} \frac{\partial x_d}{\partial x_c} = C^a_{bc} x_a \frac{\partial f}{\partial x_b} \delta^d_c =$$

$$= C^a_{bd} x_a \frac{\partial f}{\partial x_b} = X_d f = 0.$$

Итог подводит следующая теорема.

<u>Теорема 4.I.</u> Пусть есть цепочка подалгебр $V \supset S$ тогда, если функции f , g на S^* в инволюции на всех орбитах $Ad^*_{\mathcal{P}}$, где $\mathcal{P}$ группа Ли,отвечающая алгебре Ли S ,то $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ в инволюции на всех орбитах $Ad^*_{\mathcal{U}}$,где $\mathcal{U}$ группа Ли,отвечающая алгебре Ли V и $\tilde{f} = f \circ \pi$, $\tilde{g} = g \circ \pi$, $\pi: V^* \longrightarrow S^*$ отображение ограничения; если f инвариант K -представления группы $\mathcal{U}$ и $\tilde{g}$ подъем $g \in H(S^*)$,то $\{f, \tilde{g}\} \equiv 0$ на всех орбитах $Ad^*_{\mathcal{U}}$; если цепочка $V \supset S$ такова,что $V \supset V' \supset S$, f полуинвариант $Ad^*_{\mathcal{U}}$ и $\tilde{g}$ подъем $g \in H(S^*)$,то $\{f, \tilde{g}\} \equiv 0$ на всех орбитах $Ad^*_{\mathcal{U}}$.

ГЛАВА II

ОРБИТЫ МАКСИМАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ И ПОЛУИНВАРИАНТЫ КОПРИСОЕДИНЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БОРЕЛЕВСКИХ ПОДАЛГЕБР

§I. Дифференциальные уравнения для инвариантов и полуинвариантов K -представления борелевской подалгебры в простой алгебре Ли.

Основным объектом нашего внимания будет вещественная форма борелевской подалгебры простой алгебры Ли G над $\mathbb{C}$.Пусть H подалгебра Картана алгебры G тогда,как известно,имеет место корневое разложение (см. [11])

$$G = H \oplus \dot{\sum_{\alpha \in \Sigma \setminus \{0\}}} G^{\alpha} ,$$

где Σ система корней G относительно H , $\dim_{\mathbb{C}} G^{\alpha} = 1$. Зафиксируем базис Δ системы Σ ,тогда Δ определяет отношение частичной упорядоченности $>$ на H^* ,причем неотрицательными являются элементы вида $\sum_{\alpha \in \Delta} c_{\alpha} \alpha$, $c_{\alpha} \geqslant 0$.

<u>Определение I.I.</u> Подалгебра $\mathcal{B}G$ в G ,определяемая формулой

$$\mathcal{B}G = H \oplus \dot{\sum_{\alpha > 0}} G^{\alpha} ,$$

называется подалгеброй Бореля.

Мы будем рассматривать специальную вещественную форму,которая выделяется базисом Шевалле (см. [39]).

Для каждого корня α обозначим $h_{\alpha} = \frac{2h'_{\alpha}}{(\alpha, \alpha)}$,где h'_{α} определяется из условия $\alpha(h) = (h, h'_{\alpha})$,для любого $h \in H$, и пусть $h_i = h_{\alpha_i}$, $\{\alpha_i\} = \Delta$.Тогда любой h_{α} является целочисленной линейной комбинацией элементов h_i. Пусть α - серия корня β имеет вид:

$$\beta - r(\alpha,\beta)\alpha, \ \ldots, \ \beta, \ \ldots, \ \beta + q(\alpha,\beta)\alpha,$$

тогда элементы $e_\alpha \in G^\alpha$ можно выбрать так, чтобы

I) $[h_i, h_j] = 0$,

2) $[h_i, e_\alpha] = \langle \alpha, \alpha_i \rangle e_\alpha$,

3) $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$ = целочисленная линейная комбинация векторов h_i,

4) $[e_\alpha, e_\beta] = \pm(r(\alpha,\beta)+1)\, e_{\alpha+\beta}$

если $\alpha+\beta$ корень,

5) $[e_\alpha, e_\beta] = 0$, $\alpha+\beta$ не корень, $\alpha+\beta \neq 0$,

здесь $\langle \alpha,\beta \rangle = \dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$ числа Картана. Знаки $\pm$ уточняются в работе Титса [41], при этом нужно изменить систему индексации элементов e_α.

Обозначим через BG следующую вещественную форму борелевской подалгебры $\mathcal{B}G$:

$$BG = \bigoplus_{i=1}^{s} h_i \mathbb{R} \oplus \dot{\sum_{\alpha>0}} e_\alpha \mathbb{R},$$

здесь $\{h_i, e_\alpha\}$ базис Шевалле, описанный выше, s ранг G. Группу Ли, отвечающую алгебре Ли BG, будем обозначать $\mathcal{B}G$. Так как $G^\alpha \perp G^\beta$ ($\alpha+\beta \neq 0$) в метрике Картана-Киллинга, то она определяет невырожденное спаривание

$$BG \times CG \longrightarrow \mathbb{R},$$

где

$$CG = \bigoplus_{i=1}^{s} h_i \mathbb{R} \oplus \dot{\sum_{\alpha<0}} e_\alpha \mathbb{R}$$

и поэтому можно произвести отождествление $BG^* = CG$. Всюду в дальнейшем при записи функций на BG^* будем использовать это отождествление. При таком изоморфизме Ad_g^* переходит в $\pi \circ Ad_g$, где $\pi : G \to CG$ проекция G на CG вдоль $\bigoplus_{\alpha>0} e_\alpha \mathbb{R}$. Это вытекает из того, что Ad_g ортогональное преобразование в метрике Картана-Киллинга.

<u>Лемма I.I.</u> Пусть $a \in BG$, $b \in CG$ тогда имеем

$$ad_a^* b = \pi([a, b]).$$

<u>Доказательство.</u> Для $a, c \in BG$, $b \in CG$ имеем

$$\{b, a\}(c) = b([a, c]) = (b, [a, c]) =$$

$$= ([b, a], c) = (\pi[b, a])(c),$$

так как $\left(\bigoplus_{\alpha>0} e_\alpha \mathbb{R}, \bigoplus_{\alpha>0} e_\alpha \mathbb{R}\right) = 0$.

Мы будем изучать конечномерные подпредставления Ad^* группы Ли $\mathcal{B}G$ в пространстве аналитических функций на пространстве сопряженном к BG и, в частности, инварианты и полуинварианты представления Ad^*. Выпишем систему дифференциальных уравнений из § 2 гл. I для нахождения инвариантов и полуинвариантов K -представления группы $\mathcal{B}G$. Введем переменные x_i, отвечающие базису $h_i \in H$, и x_α, отвечающие e_α, $\alpha \in \Sigma$. Из предыдущего получаем следующее утверждение.

<u>Предложение I.I.</u> В алгебре Ли BG, где G простая комплексная алгебра Ли, существует базис h_i, e_α, в котором операторы $X(h_i)$, $X(e_\alpha)$ имеют следующий вид:

$$X(h_i) = \sum_{\alpha>0} \langle \alpha, \alpha_i \rangle x_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

$$X(e_\alpha) = -x_\alpha \sum_{j=1}^{s} \langle \alpha, \alpha_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} +$$

$$+ \sum_{\substack{\beta > 0 \\ \alpha+\beta \in \Sigma}} \pm (r(\alpha,\beta)+1)\, x_{\alpha+\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta},$$

здесь $s = \dim H$ ранг алгебры Ли G.

<u>Лемма I.2.</u> Пусть $F \in H(BG^*)$, тогда F полуинвариант K-представления группы $\mathcal{B}G$ тогда и только тогда когда

$$X(h_i)F = \lambda_i F, \quad i = 1, \ldots, s,$$

$$X(e_{\alpha_i})F = 0, \quad i = 1, \ldots, s,$$

где $\{\alpha_i\}_{i=1}^{s}$ система простых корней алгебры G.

<u>Доказательство.</u> Лемма вытекает из того факта, что $\varphi: BG \longrightarrow \mathcal{D}(BG^*)$ представление алгебр Ли, и коммутаторы элементов h_i, e_{α_j} порождают алгебру Ли BG.

§2. Максимальная размерность орбит представления Ad^* для BG, где G -простая алгебра Ли.

Рассмотрим простую комплексную алгебру Ли G, пусть H ее подалгебра Картана, Σ система не нулевых корней алгебры G относительно H. В пространстве H имеется подпространство H_Q над полем рациональных чисел Q, содержащее все вектора $h'_\alpha \in \in H$. На H_Q метрика Картана-Киллинга, которую будем обозначать $(\,,\,)$, является положительно определенной евклидовой метрикой. Линейное преобразование

$$r_\alpha(x) = x - \frac{2(x,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha, \quad x \in H_Q^*$$

пространства H_Q^* ,дуального к H_Q ,определяет отражение относительно гиперплоскости ортогональной α ,где $(\alpha,\beta) = (h'_\alpha, h'_\beta)$.Группа $W(\Sigma) = W(G,H)$,порожденная отражениями r_α , $\alpha \in \Sigma$,где Σ система корней G относительно H ,называется группой Вейля; $W(\Sigma)$ конечная группа. Если $\{\alpha_i\} = \Delta$ базис системы корней Σ ,то будем обозначать $w_i = r_{\alpha_i}$ -фундаментальные отражения.Множество $\{r_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ является системой образующих группы $W(\Sigma)$.Для каждого элемента $w \in W(\Sigma)$ обозначим через $l(w)$ минимальную из длин всевозможных разложений w в произведение фундаментальных отражений, $l(w)$ называется длиной $w \in W(\Sigma)$.Имеет место следующее утверждение (см. [6]).

<u>Предложение 2.I.</u> В $W(\Sigma)$ существует единственный элемент w_0 наибольшей длины.Его длина равна числу положительных корней. Этот элемент обладает такими свойствами: $w_0(\Sigma^+) = \Sigma^-$, $w_0(\Delta) = -\Delta$, $w_0^2 = 1$,где $\Sigma^+ = \{\alpha \mid \alpha > 0\}$ и $\Sigma^- = \{\alpha \mid \alpha < 0\}$.

<u>Теорема 2.I.</u> Пусть G простая алгебра Ли, H ее подалгебра Картана, BG описанная выше вещественная форма борелевской подалгебры, $w_0 \in W(G,H)$ элемент группы Вейля максимальной длины,тогда если $\mathcal{O}$ орбита максимальной размерности представления $Ad^*: \mathcal{B}G \to GL(BG^*)$,где $\mathcal{B}G$ односвязная группа Ли,отвечающая алгебре Ли BG ,то

$$\operatorname{codim} \mathcal{O} = \frac{1}{2}\operatorname{card} A,$$

$$A = \{\alpha_i \in \Delta \mid (-w_0)\alpha_i \neq \alpha_i\}.$$

Одна из целей настоящей главы–доказательство теоремы 2.I. Эта теорема полностью описывает $\dim \mathcal{O}$ в терминах системы корней исходной простой алгебры Ли. В терминах элемента w_0 позже будет дан критерий того когда данный характер является допустимым. Теорема 2.I определяет число функций необходимых для полной интегрируемости уравнений Эйлера на орбитах общего положения K -представления группы $\mathcal{B}G$:

$$i = \frac{1}{2}(\dim BG + \operatorname{codim} \mathcal{O}).$$

Все простые алгебры Ли исчерпываются классическими сериями A_n, B_n, C_n, D_n и пятью особыми алгебрами G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 (см. [11]). Каждая простая алгебра Ли определяется схемой Дынкина. Действие элемента $(-w_0)$ на схеме Дынкина по сериям приведено в таблице 2.I, в ней же выписаны $\operatorname{codim} \mathcal{O}$ для орбит $\mathcal{O}$ максимальной размерности представления Ad^* группы $\mathcal{B}G$ (см. [6]). Доказательство теоремы будет проведено отдельно для каждой серии. Случай A_n этой теоремы доказан в работе А.А.Архангельского [3] .

Пусть теперь L произвольная алгебра Ли, $e_1, \dots, e_n$ базис L , $e^1, \dots, e^n$ сопряженный базис L^*, x^i и x_j соответствующие координаты, C_{ij}^k структурный тензор алгебры L в базисе e_i . Матрица $A = \|C_{ij}^k f_k\|$ определяет всю геометрию орбит Ad^* в L^* .

<u>Предложение 2.2.</u> По матрице A в точке $f = f_k e^k \in L^*$ восстанавливаются следующие объекты:

I) операторы X_i :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

2) касательная плоскость $T_f \mathcal{O}_f$,где $\mathcal{O}_f = \{ l \in L^* / l = Ad_g^* f,\ g \in \mathcal{L} \}$.

$$\{x, f\} = -(e^1, \ldots, e^n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

при всевозможных $(x_1, \ldots, x_n)$ мы получаем всю плоскость $T_f \mathcal{O}_f$, здесь $x = x^i e_i$,

3) симплектическая структура на орбитах

$$\omega(\{x, f\}, \{y, f\}) = x^* A y,$$

4) $\dim \mathcal{O}_f = \mathrm{rk}\, A$.

Это предложение непосредственно вытекает из §I гл.I.

Приведем схему доказательства теоремы 2.I.При доказательстве теоремы будем использовать пункт 4 предложения 2.2.В следующих параграфах мы дадим оценку на размерность орбиты общего положения $\mathcal{O}$ представления Ad^* группы $\mathcal{B}G$,отвечающей алгебре Ли BG ,вычисляя $\mathrm{rk} \| C_{ij}^k f_k \|$ в специальной точке $f \in BG^*$: $\dim \mathcal{O} \geq \mathrm{rk} \| C_{ij}^k f_k \|$.Оценку сверху дают инварианты, которые вычислим позже.Если группа $\mathcal{B}G$ имеет K функционально независимых инвариантов,то $\dim \mathcal{O} \leq \dim BG - K$ и если указать точку $f \in BG^*$,в которой $\mathrm{rk} \| C_{ij}^k f_k \| = \dim BG - K$, то максимальная размерность орбит будет равна $\mathrm{rk} \| C_{ij}^k f_k \|$.

Замечание. Топологическое строение орбит представлений разрешимых экспоненциальных групп описано в работе [34] ,при условии,что веса этого представления имеют вид $(1 + i\alpha)\lambda$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и λ вещественная линейная форма.

§3. Максимальная размерность орбит представления Ad^* в случае $BSp(n)$.

Теорема 3.I. Для орбит общего положения представления Ad^* группы $BSp(n)$ имеем $\mathrm{codim}\, \mathcal{O} = 0$.

Доказательство. Как следует из предыдущего параграфа, достаточно проверить, что $\det \| C_{ij}^k f_k \| \neq 0$. Для этого покажем, что система линейных алгебраических уравнений $X_{ij} = 0$ относительно $\partial/\partial x_{ij}$ имеет только нулевое решение т.к. по предложению 2.2 матрица этой системы совпадает с $\| C_{ij}^k f_k \|$. Для $\alpha \in \Sigma$ обозначим $\Sigma_\alpha = \{ \beta \in \Sigma^+ | \quad \alpha + \beta \in \Sigma \}$.

В случае C_n положительные корни таковы: $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, $1 \le i < j \le n$, $2\varepsilon_i$, базис $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, ..., $\alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$, $\alpha_n = 2\varepsilon_n$, где ε_i стандартный базис $\mathbb{R}^n$.

Будем использовать следующие обозначения для переменных: $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ соответствует переменная x_{ij}, $\varepsilon_i + \varepsilon_j$ - y_{ij}, $2\varepsilon_i$ - z_i, базису h_i в подалгебре Картана отвечают переменные x_i.

I. Будем выписывать наши уравнения в таком порядке:

$$X(2\varepsilon_1);\ X(\varepsilon_1+\varepsilon_2),\ X(2\varepsilon_2);\ \ldots\ldots\ldots;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$X(\varepsilon_1+\varepsilon_k),\ X(\varepsilon_2+\varepsilon_k),\ \ldots,\ X(\varepsilon_{k-1}+\varepsilon_k),\ X(2\varepsilon_k);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$X(\varepsilon_1+\varepsilon_n),\ X(\varepsilon_2+\varepsilon_n),\ \ldots,\ X(\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n),\ X(2\varepsilon_n).$$

Имеем $\Sigma_{2\varepsilon_1} = \varnothing$, поэтому

$$X(2\varepsilon_1) = 2z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} = 0 \implies \frac{\partial}{\partial x_1} = 0.$$

Очевидно, что

$$\sum_{\varepsilon_k+\varepsilon_i} = \{\varepsilon_1-\varepsilon_k, \ldots, \varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k; \quad \varepsilon_1-\varepsilon_i, \varepsilon_2-\varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i\},$$

$$\sum_{2\varepsilon_i} = \{\varepsilon_1-\varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i\}.$$

Так как $\sum_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} = \{\varepsilon_1-\varepsilon_2\}, \sum_{2\varepsilon_2} = \{\varepsilon_1-\varepsilon_2\}$,то

$$\begin{cases} X(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = -y_{12}\dfrac{\partial}{\partial x_2} + a z_1 \dfrac{\partial}{\partial x_{12}} = 0 \\ X(2\varepsilon_2) = -\left(2\dfrac{\partial}{\partial x_2} - \dfrac{\partial}{\partial x_1}\right) z_2 + b y_{12}\dfrac{\partial}{\partial x_{12}} = 0, \end{cases}$$

$$a \neq 0, \quad b \neq 0,$$

и поэтому $\dfrac{\partial}{\partial x_2} = \dfrac{\partial}{\partial x_{12}} = 0$.Член $-x_\alpha \sum_{j=1}^{n} \langle \alpha, \alpha_j \rangle \dfrac{\partial}{\partial x_j} = \text{ч}\Lambda_H(\alpha)$ в $X(e_\alpha)$ будем называть членом,соответствующим подалгебре Картана.Имеем

$$\text{ч}\Lambda_H(\varepsilon_i+\varepsilon_j) = -y_{ij}\sum_{j=1}^{n} \langle \alpha, \alpha_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} =$$

$$= -y_{ij}\sum_{k=2}^{n} \langle \varepsilon_i+\varepsilon_j, \varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_{k-1}} - y_{ij}\langle \varepsilon_i + \varepsilon_j, 2\varepsilon_n \rangle \frac{\partial}{\partial x_n} = -y_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} - \frac{\partial}{\partial x_{j-1}} + \delta_{in}\frac{\partial}{\partial x_n} + \delta_{jn}\frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

По индукции докажем,что если $\dfrac{\partial}{\partial x_{ij}} = 0 \ (i<j)$ при $j \leq k$ и $\partial/\partial x_i = 0$, $i \leq k$,то $\partial/\partial x_{k+1} = 0$ и $\partial/\partial x_{i,k+1} = 0$.

а) Пусть $k+1 < n$.Напишем операторы

$$X(\varepsilon_1+\varepsilon_{k+1}), \ldots, X(\varepsilon_k+\varepsilon_{k+1}), X(2\varepsilon_{k+1}).$$

Имеем, что

$$\sum\nolimits_{\varepsilon_i+\varepsilon_{k+1}} = \{ \varepsilon_1-\varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i; \\ \varepsilon_1-\varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_k-\varepsilon_{k+1} \}.$$

По предположению индукции производные по x_{ji} $(j=1,\ldots,i-1)$ равны 0. Легко проверить, что член $\mathrm{ч}\lambda_H(\varepsilon_i+\varepsilon_{k+1})$ дает вклад $\partial/\partial x_{k+1}$. В итоге получаем квадратную систему на

$$\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}, \frac{\partial}{\partial x_{1,k+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{k,k+1}}.$$

Матрица этой системы имеет вид:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2z_{k+1} & y_{1,k+1} & y_{2,k+1} & \ldots & y_{k-1,k+1} & y_{k,k+1} \\ -y_{1,k+1} & 2z_1 & y_{1,2} & \ldots & y_{1,k-1} & y_{1,k} \\ -y_{2,k+1} & y_{2,1} & 2z_2 & \ldots & y_{2,k-1} & y_{2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -y_{k,k+1} & y_{k,1} & y_{k,2} & \ldots & y_{k-1,k} & 2z_k \end{pmatrix}$$

Очевидно, что $\det B_1 \neq 0$, поэтому соответствующая однородная система имеет только нулевое решение.

б) Пусть $k+1=n$, в этом случае все аналогично предыдущему случаю, только немного изменится матрица B_1 за счет членов из подалгебры Картана:

$$\mathrm{ч}\lambda_H(2\varepsilon_n) = -z_n\left(2\frac{\partial}{\partial x_n} - 2\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + \right. \\ \left. + 2\delta_{n,n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right) = -4z_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

в силу того, что $\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} = 0$ по предложению индукции; аналогично для $\text{чл}_H(\varepsilon_i+\varepsilon_n)$. В итоге первый столбец в B_1 умножится на 2.

Итак, по индукции доказано, что $\frac{\partial}{\partial x_i}=0$, $\frac{\partial}{\partial x_{ij}}=0$.

2. Теперь рассмотрим операторы $X(e_{\varepsilon_i-\varepsilon_j})$ и $X(h_k)$. Их будем вычислять в следующем порядке $(X(e_{\varepsilon_i-\varepsilon_j})=X(\varepsilon_i-\varepsilon_j))$:

$$X(\varepsilon_1-\varepsilon_n), X(\varepsilon_2-\varepsilon_n), \ldots, X(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n), X(h_{2\varepsilon_n});$$

$$X(\varepsilon_1-\varepsilon_{n-1}), X(\varepsilon_2-\varepsilon_{n-1}), \ldots, X(\varepsilon_{n-2}-\varepsilon_{n-1}), X(h_{2\varepsilon_{n-1}});$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$X(\varepsilon_1-\varepsilon_2), X(h_{2\varepsilon_2});$$

$$X(h_{2\varepsilon_1}).$$

При нахождении $\sum_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$ мы можем не учитывать корни вида $\varepsilon_i-\varepsilon_j$ т.к. производные по соответствующим переменным равны нулю. С учетом этого имеем:

$$\sum_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}=\{\varepsilon_1+\varepsilon_j, \ldots, \varepsilon_{j-1}+\varepsilon_j;\ 2\varepsilon_j;$$

$$\varepsilon_j+\varepsilon_{j+1}, \ldots, \varepsilon_j+\varepsilon_n\}.$$

Легко видеть, что

$$\text{чл}_H(\varepsilon_i-\varepsilon_j)=\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_{i-1}}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_{j-1}}+\delta_{in}\frac{\partial}{\partial x_n}-\delta_{jn}\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)(-x_{ij})\equiv 0.$$

Рассмотрим операторы $X(\varepsilon_i-\varepsilon_n)$, $1\le i\le n-1$, $X(h_{2\varepsilon_n})$.

$$X(h_{2\varepsilon_n})=\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\langle\alpha, 2\varepsilon_n\rangle x_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}=$$

$$= 2z_n \frac{\partial}{\partial z_n} + \sum_{i=1}^{n-1} y_{in} \frac{\partial}{\partial y_{in}} ,$$

$$\sum_{\varepsilon_i - \varepsilon_n} = \{ \varepsilon_1 + \varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n, 2\varepsilon_n \},$$

$$1 \leq i \leq n-1 ,$$

в итоге получаем линейную алгебраическую систему на $\frac{\partial}{\partial y_{1,n}}$, . . . , $\frac{\partial}{\partial y_{n-1,n}}$, $\frac{\partial}{\partial z_n}$ с матрицей B_2 равной

$$B_2 = \begin{pmatrix} z_1 & y_{1,2} & \ldots & y_{1,n-1} & y_{1,n} \\ y_{1,2} & z_2 & \ldots & y_{2,n-1} & y_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{1,n-1} & y_{2,n-1} & \ldots & z_{n-1} & y_{n-1,n} \\ y_{1,n} & y_{2,n} & \ldots & y_{n-1,n} & z_n \end{pmatrix}$$

Очевидно, что $\det B_2 \neq 0$.Дальше пойдем по индукции вниз: пусть $\frac{\partial}{\partial y_{ij}} = 0$ при $j = k, \ldots, n$, $\frac{\partial}{\partial z_j} = 0$ при $j = k, \ldots, n$,докажем, что $\frac{\partial}{\partial y_{i,k-1}} = 0$, $\frac{\partial}{\partial z_{k-1}} = 0$. Достаточно выписать операторы $X(\varepsilon_1 - \varepsilon_{k-1})$, . . . ,$X(\varepsilon_{k-2} - \varepsilon_{k-1})$, $X(h_{2\varepsilon_{k-1}})$.С учетом

$$\sum_{\varepsilon_i - \varepsilon_{k-1}} = \{ \varepsilon_1 + \varepsilon_{k-1}, \ldots, \varepsilon_{k-2} + \varepsilon_{k-1} ;$$

$$2\varepsilon_{k-1} ; \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k , \ldots , \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_n \}$$

и предположения индукции $\frac{\partial}{\partial y_{k-1,k}} = \ldots = \frac{\partial}{\partial y_{k-1,n}} = 0$ получим квадратную систему на $\frac{\partial}{\partial z_{k-1}}$, $\frac{\partial}{\partial y_{1,k-1}}$, . . . , $\frac{\partial}{\partial y_{k-2,k-1}}$

с матрицей B_3 равной

$$B_3 = \begin{pmatrix} z_1 & y_{1,2} & \dots & y_{1,k-2} & y_{1,k-1} \\ y_{1,2} & z_2 & \dots & y_{2,k-2} & y_{2,k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{1,k-2} & y_{2,k-2} & \dots & z_{k-2} & y_{k-2,k-1} \\ y_{1,k-1} & y_{2,k-1} & \dots & y_{k-1,k-2} & z_{k-1} \end{pmatrix}$$

Очевидно, что $\det B_3 \neq 0$, что завершает доказательство теоремы 3.I.

Замечание. Из доказательства теоремы ясно, что полуинварианты не зависят от координат в подалгебре Картана и x_{ij}.

§4. Собственные функции в случае $BSp(n)$.

Для вычисления собственных функций $BSp(n)$ перепишем систему дифференциальных уравнений из §2 гл.I для BSp в минимальном представлении Sp, соответствующем квадратичной форме с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы будем рассматривать в качестве $BSp(n)$ нижнетреугольные матрицы, если $A \in BSp(n)$, то

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix}.$$

Если τ транспонирование относительно второй диагонали, то

$$\gamma = -\beta^{\tau}, \quad \alpha^{\tau} = \alpha .$$

Пусть E_{ij} матрица, у которой все элементы равны 0 кроме $a_{ij} = 1$. В качестве базиса BSp возьмем следующие матрицы:

$$f_{ji} = E_{ji} - E_{2n+1-i,2n+1-j}, \quad 1 \le i \le j \le n,$$

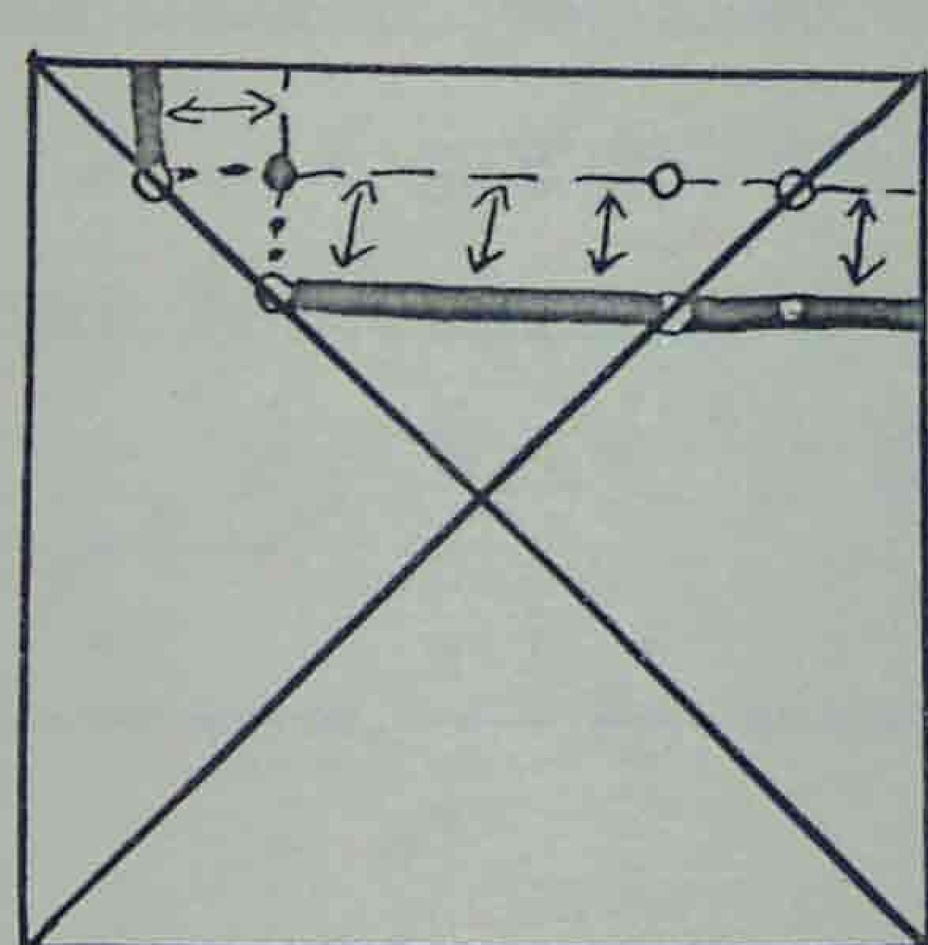
$$f_{j+n,i} = E_{j+n,i} + E_{2n-i+1,n-j+1}, \quad i+j \le n,$$

$$f_{2n+1-i,i} = E_{2n+1-i,i}, \quad 1 \le i \le n$$

Простые вычисления доказывают следующее утверждение.

Предложение 4.I. В базисе f_{ji} $(1 \le i \le j \le n)$, $f_{j+n,i}$ $(i+j \le n)$, $f_{2n+1-i,i}$ $(1 \le i \le n)$ операторы X_{ij} для борелевской подалгебры в $Sp(n)$ имеют вид указанный в таблице 4.I.

Геометрически эти операторы можно изобразить следующей схемой:



,

жирные линии указывают переменные, по которым идет дифференцирование, а пунктирные, соответствующие коэффициенты при производных.

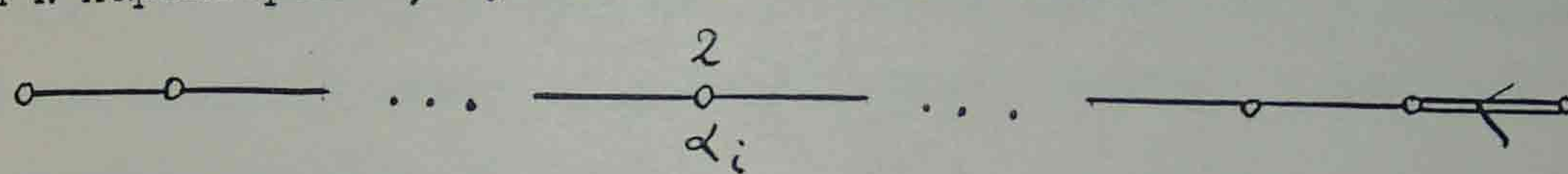
При отождествлении $BSp(n)^*$ с $BSp^+ = \bigoplus_i \mathbb{R}h_i \oplus \bigoplus_{\alpha>0} \mathbb{R}e_\alpha$, мы получим, что $BSp(n)^*$ это верхнетреугольные матрицы с теми же самыми симметриями, что $BSp(n)$. На $BSp(n)^*$ рассмотрим следующие функции $d_i(X)$: у матрицы X элементы по побочной диагонали удваиваются и затем у полученной матрицы вычисляется верхний правый угловой минор порядка i.

Замечание. Любой характер борелевской подалгебры определяется своими значениями на подалгебре Картана т.к. характер на производной алгебре тождественный 0. Любая линейная функция β на H определяется своими числовыми отметками

$$\langle \beta, \alpha_i \rangle = \frac{2(\beta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = m_i ,$$

которые мы, как обычно, будем отмечать на схеме Дынкина, около соответствующих простых корней.

Теорема 4.I. Функции d_i $(1 \leq i \leq n)$ являются полуинвариантами представления Ad^* группы $BSp(n)$, которые относятся к характерам χ_i с числовыми отметками



Доказательство. Мы будем проверять операторы X_{ij} не для базиса Шевалле, а для базиса, указанного выше, поэтому ясно, что действие характера χ_i с указанными числовыми отметками заключается в возведении диагональных элементов в следующие степени:

$$\underbrace{(\underbrace{2, \ldots, 2}_{i}, 0, \ldots, 0)}_{n} .$$

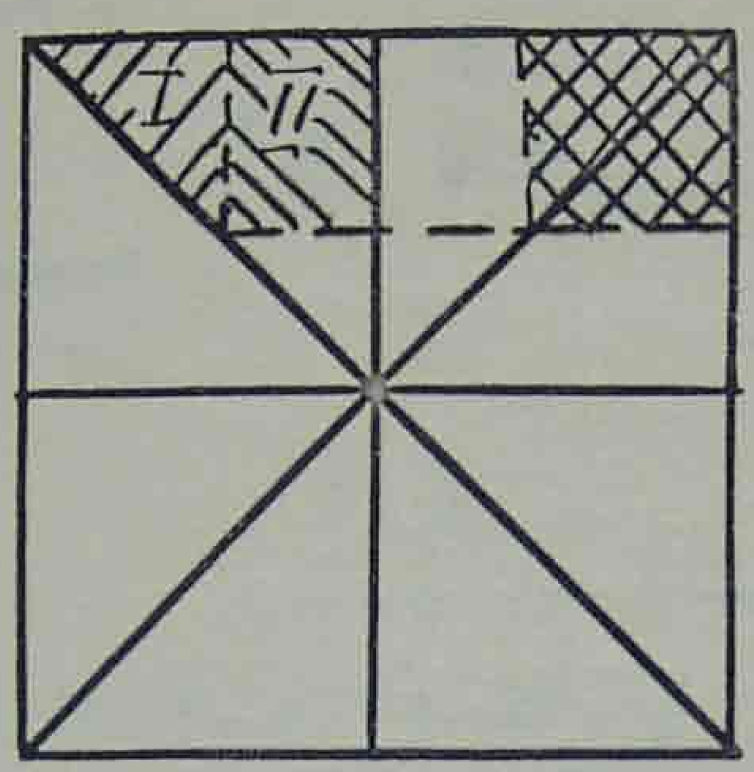
Для доказательства теоремы будем проверять систему из предложения 4.I.

I) Операторы X_{ii} $(1 \leq i \leq n)$.

При $i \geq k+1$, $X_{ii} d_k = 0$ т.к. дифференцирование в X_{ii} идет по переменным, от которых d_k не зависит. Утверждается, что $X_{ii}\, d_k = 2 d_k \quad (1 \le i \le k)$. Чтобы продифференцировать минор d_k по x_{jp}, разложим его по j -ой строке и продифференцируем; зависимость от x_{jp} имеется в $2n+1-j$ столбце, разложим по нему и продифференцируем, в итоге получим два минора один разложен по j строке, другой по $2n+1-j$ столбцу.

2) Операторы $X_{ij} \quad (1 \le i < j \le n)$.

Рассмотрим две области изменения индексов (i, j) :



В области II дифференцирование ведется по переменным, от которых d_k не зависит. В области I легко проследить, что получаются два минора, у одного одинаковые две строчки, а у другого два столбца, что дает 0.

3) В операторах $X_{i, j+n}$, $i+j \le n$ и $X_{i, 2n+1-i}$, $1 \le i \le n$ дифференцирование идет по переменным, от которых d_k не зависит.

<u>Следствие.</u> Любой характер $BSp(n)$ допустимый. Функция, отвечающая характеру, который возводит диагональные члены в степени $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, равна

$$d_1^{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}\, d_2^{\frac{\lambda_2-\lambda_3}{2}} \cdots d_{n-1}^{\frac{\lambda_{n-1}-\lambda_n}{2}}\, d_n^{\frac{\lambda_n}{2}} .$$

§5. Собственные функции в случае $BSO(n)$.

Для записи операторов из §I гл.2 используем минимальное представление алгебры $so(n)$ в виде кососимметрических матриц относительно второй диагонали. Тогда борелевская подалгебра-верхне треугольные матрицы. В $Bso(n)$ матрицы $e_{ij} = E_{ij} - E_{n+1-j,n+1-i}$ ($1 \le j \le n-i$; $i = 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$) образуют базис. В этом базисе операторы X_i имеют следующий вид:

$$X_{ij} = -\sum_{s=1}^{i} x_{sj}\frac{\partial}{\partial x_{si}} + \sum_{s=j}^{n-j} x_{is}\frac{\partial}{\partial x_{js}} +$$

$$+\sum_{s=1}^{i-1} x_{s,n+1-i}\frac{\partial}{\partial x_{s,n+1-j}} - \sum_{s=i+1}^{j-1} x_{i,n+1-s}\frac{\partial}{\partial x_{s,n+1-j}}.$$

Геометрически эти операторы в терминах матричных элементов изобразятся так же как и в случае $BSp(n)$.

Обозначим $\Delta_i(X)$ нижний левый угловой минор матрицы X, порядка i ; $\Delta_{2k+1}(X) = 0$ в силу косой симметрии; $O_{ij}(s)$ окаймление минора $\Delta_s(X)$,соответствующее элементу x_{ij}.

Положим, если $n = 2k$, то

$$J_s = \sum_{p=s+1}^{k} O_{pp}(s),$$

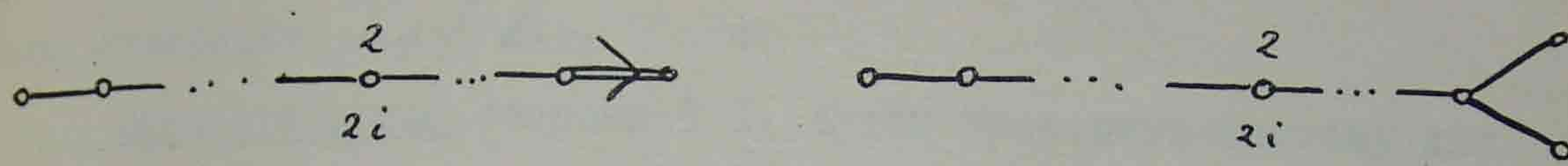
если $n = 2k+1$, то

$$J_s = \sum_{p=s+1}^{k} O_{pp}(s) + \frac{1}{2} O_{k+1,k+1}(s).$$

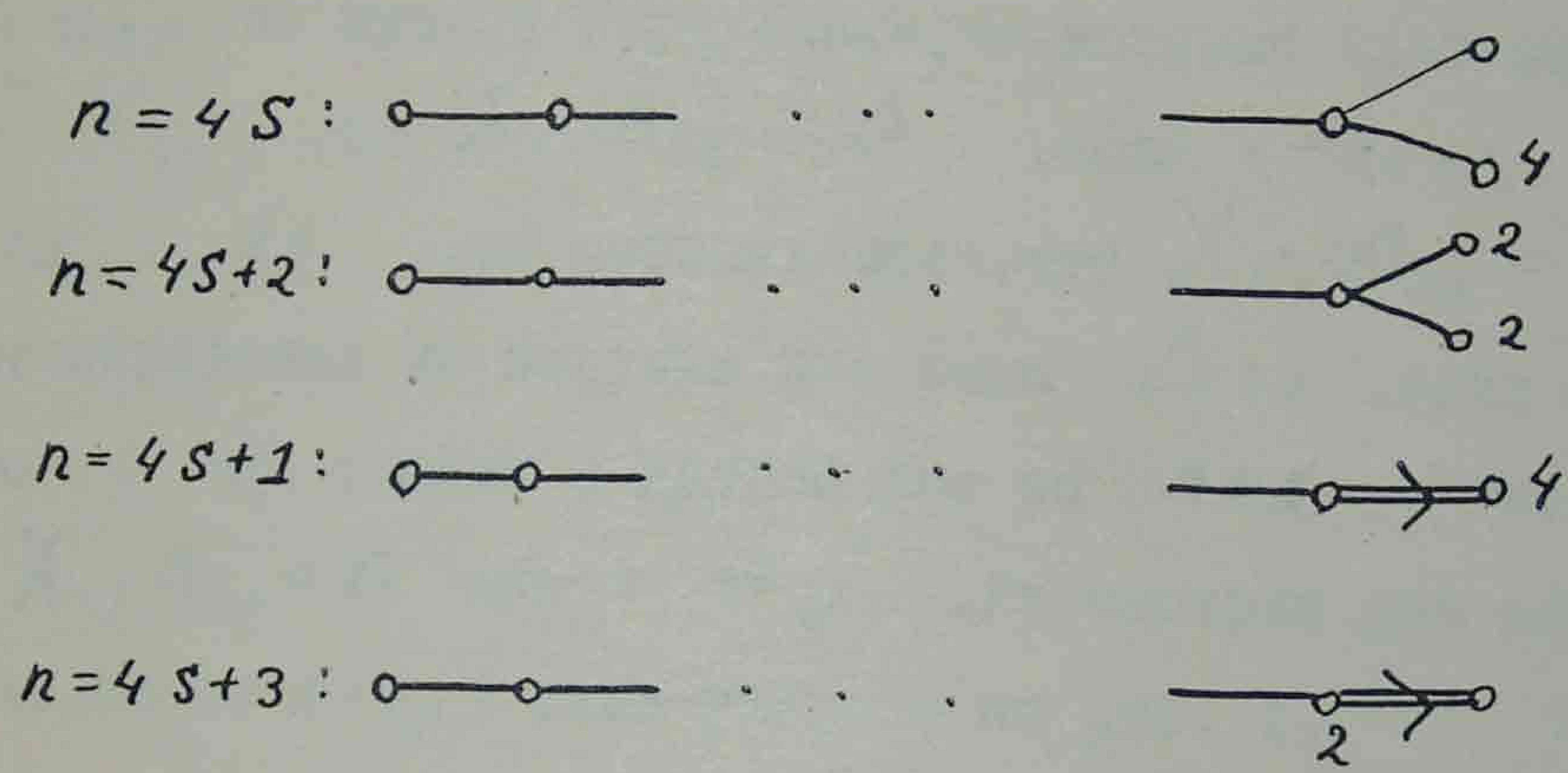
<u>Теорема 5.I.</u> Функции Δ_{2s} , $s = 1, \ldots, \frac{m}{2}$, где

$$m(n) = \begin{cases} k, & n = 2k, \ k = 2s \\ k-1, & n = 2k, \ k = 2s+1 \\ k, & n = 2k+1, \ k = 2s \\ k-1, & n = 2k+1, \ k = 2s+1 \end{cases}$$

являются полуинвариантам представления Ad^* группы $BSO(n)$. Причем Δ_{2i}, $2i < m(n)$ относится к характеру χ_{2i} с числовыми отметками:



в зависимости от четности n. $\Delta_{m(n)}$ относится к характеру

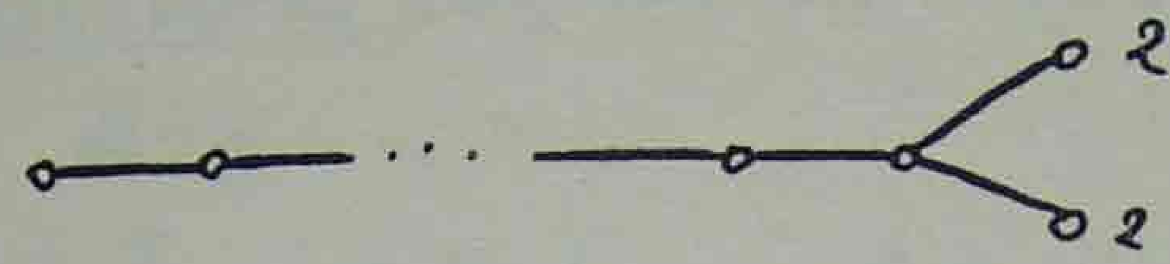


Замечание. На языке матриц характер χ_{2i} запишется так:

$$\chi_{2i} \begin{bmatrix} a_1 & & & & & * \\ & \ddots & & & & \\ & & a_k & & & \\ & & & a_1^{-1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & a_k^{-1} \end{bmatrix} = a_1^{\lambda_1} \ldots a_k^{\lambda_k}, \quad n = 2k,$$

где $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = (\underbrace{2, \ldots, 2}_{2i}, 0, \ldots, 0)$.

Теорема 5.2. а) Пусть $n = 4s+2$, тогда функция J_{2s} является полуинвариантом Ad^*, отвечающим характеру с числовыми отметками



б) Функции J_{2i-1} , $i=1,\dots,\frac{m}{2}$ полуинварианты $BSO(n)$,отвечающие характерам $(\underbrace{\underbrace{2,\dots,2}_{2i-1},0,\dots,0}_{[\frac{n}{2}]})$.

<u>Следствие.</u> Представление Ad^* группы $BSO(4s+2)$ имеет один инвариант J_{2s}/Δ_{2s} .

<u>Доказательство</u> теоремы 5.I. Будем проверять систему для полуинвариантов,написанную выше.

I) Операторы X_{ii} ($i=1,\dots,[\frac{n}{2}]$).

Так как в Δ_{2s} не входят переменные,по которым идет дифференцирование в X_{ii} ,то $X_{ii}\Delta_{2s}=0$,если $i=2s+1,\dots,[\frac{n}{2}]$. Если же $i=1,\dots,2s$,то утверждается,что $X_{ii}\Delta_{2s}=2\Delta_{2s}$. При дифференцировании мы получим два раза Δ_{2s} ,один раз разложенный по i -ой строке и другой раз по $n+1-i$ столбцу.

2) $X_{ij}\Delta_{2s}=0$ при $i\neq j$.Рассмотрим две области изменения индексов (i,j) ,как указано на рис. I.

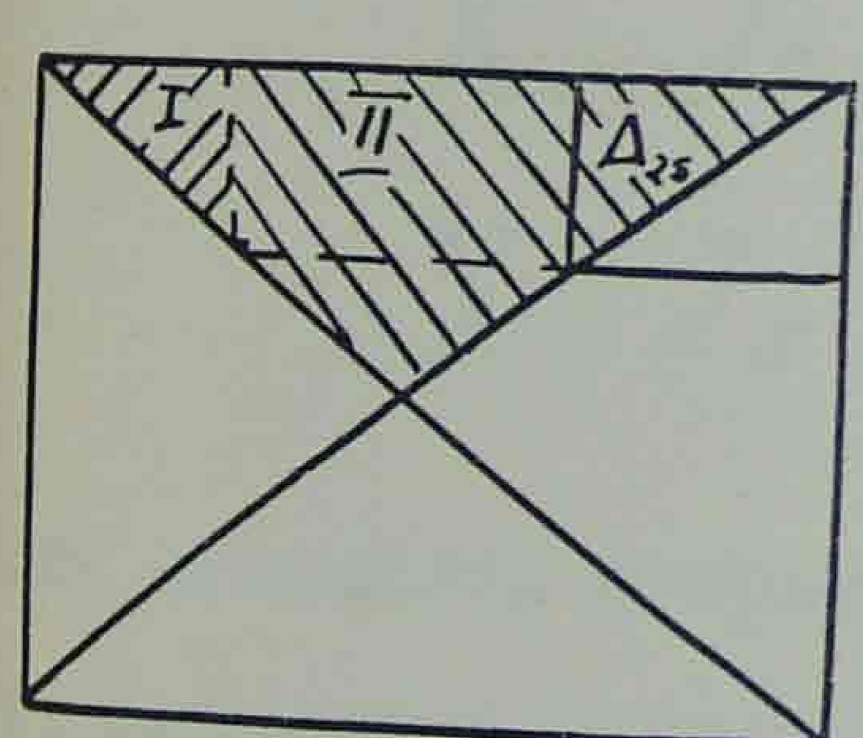


рис. 1

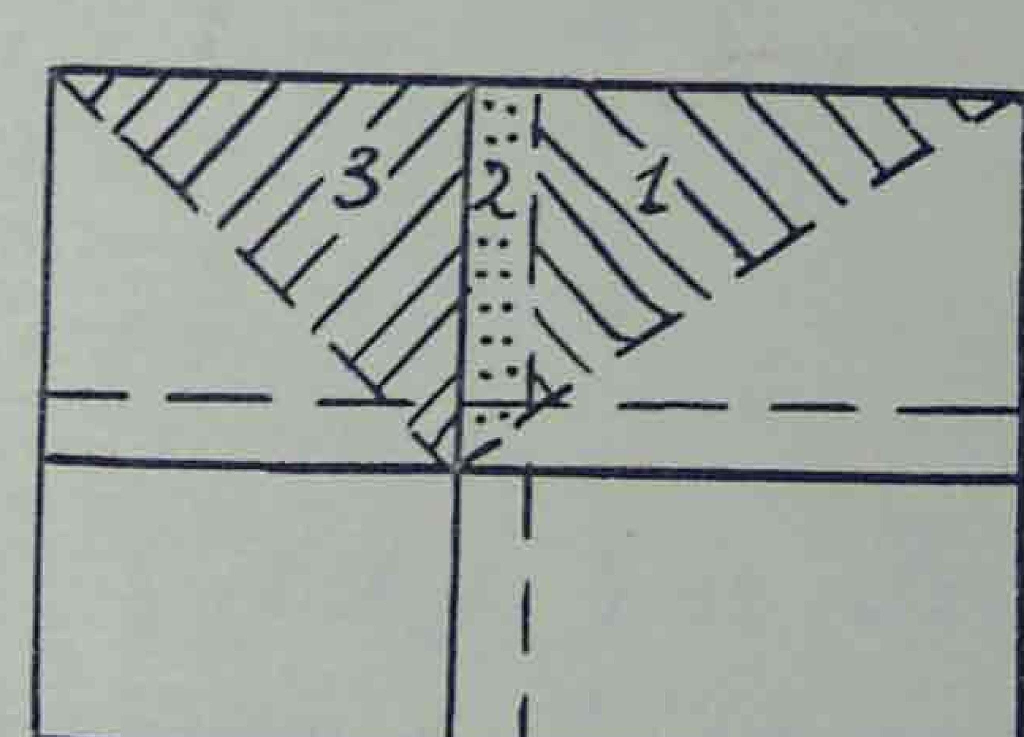


рис. 2

В области $\overline{II}$ дифференцирование в операторах X_{ij} ведется по переменным,от которых Δ_{2s} не зависит.В области $\overline{I}$ получается два минора,у одного совпадают две строчки,а у другого два столбца,что дает в результате 0.

Доказательство теоремы 5.2. а) Функция J_{2s} является окаймлением Δ_{2s}.

I) $X_{ii}J_{k-1} = 2J_{k-1}$, $1 \le i \le k-1$ т.к. получается два определителя,один разложен по i -ой строке,а другой по $n+1-i$ столбцу.Очевидно,что $X_{kk}J_{k-1} = -J_k + J_{k-1} = 0$.

2) $X_{ij}J_{k-1} = 0$, $i \ne j$.Рассмотрим три области изменения индексов (i,j) ,как указано на рис. 2.В первой области дифференцируем по переменным,от которых J_{k-1} не зависит, поэтому получаем 0.Во второй области функция J_{k-1} дифференцируется по k -ому столбцу и умножается на элементы $n+1-i$ столбца,который лежит в рассматриваемом миноре и в результате получаем определитель с двумя равными столбцами.В третьей области стандартным образом получаем определитель с двумя равными строками.

б) Легко проверяются следующие свойства окаймлений:

$$X_{ii}\,\mathcal{O}_{jj}(k) = 2\,\mathcal{O}_{jj}(k),\ 1 \le i \le k,$$

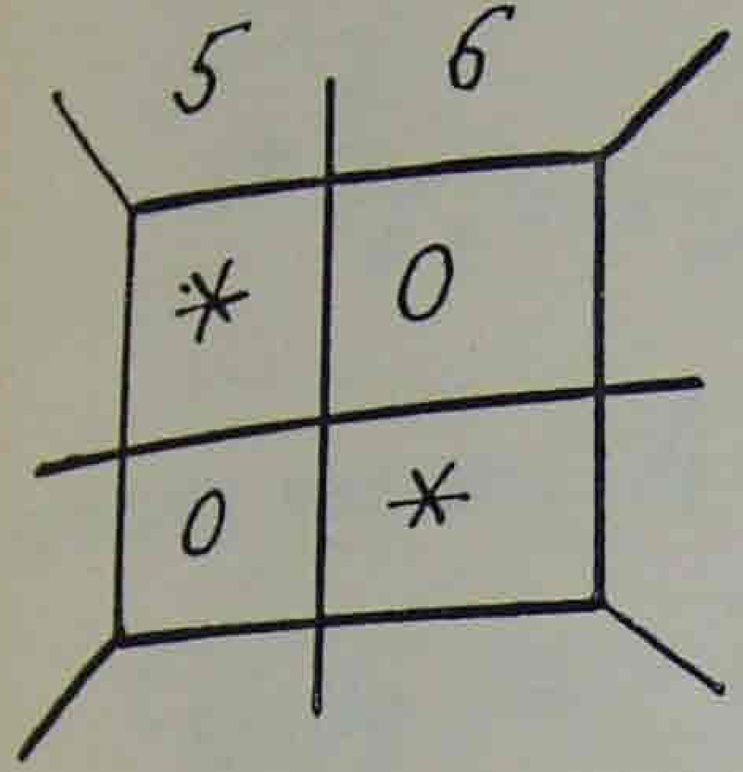
$$X_{ii}\,\mathcal{O}_{jj}(k) = 0,\ i > k.$$

Используя эти соотношения,получаем,что

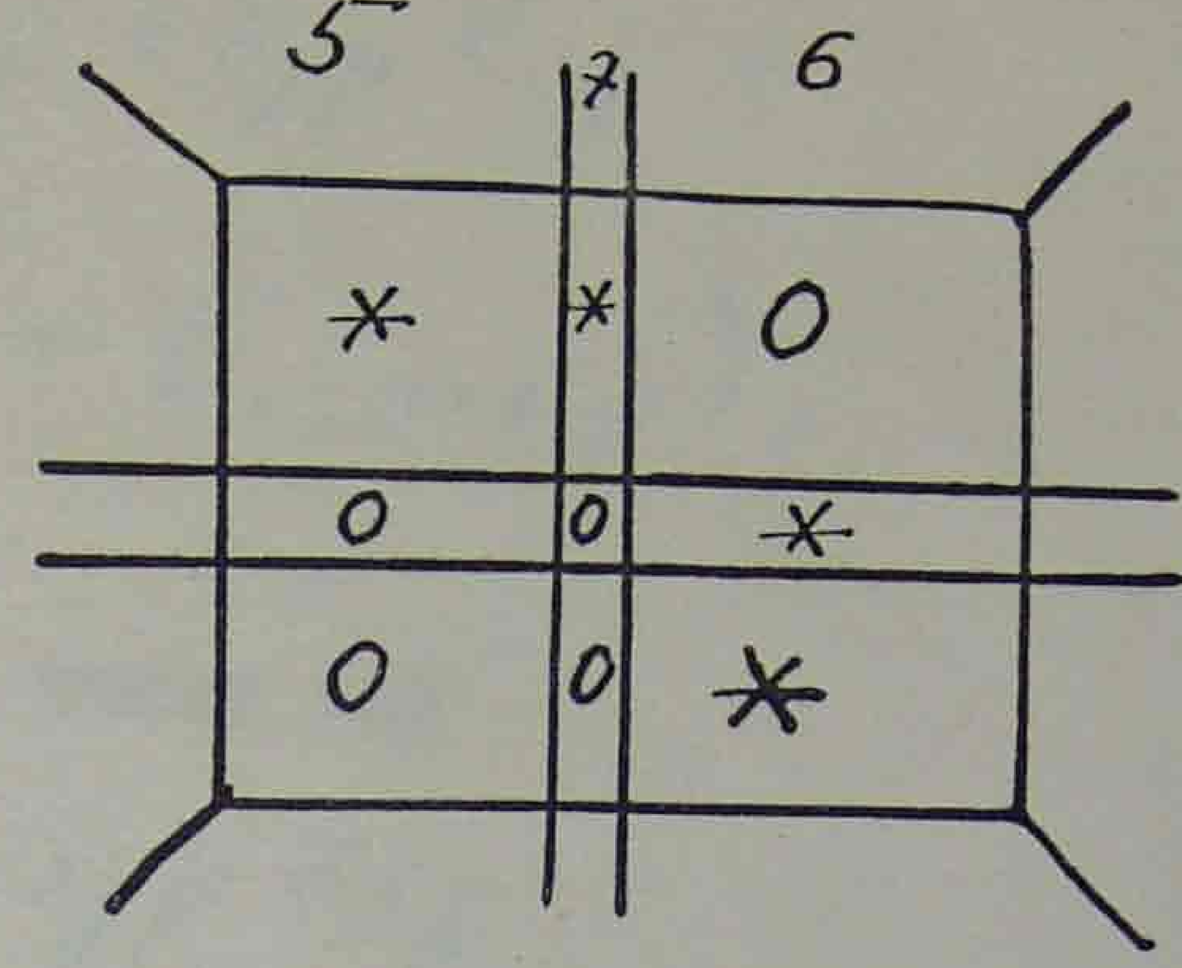
$$X_{ii}J_s = 2J_s,\ 1 \le i \le s,$$

$$X_{ii}J_s = 0,\ i > s.$$

Для вычисления операторов X_{ij} ($i \ne j$) от J_{2i-1} надо рассмотреть 6 областей изменения индексов (ij) :



$n \equiv 0 \pmod 2$



$n \equiv 1 \pmod 2$

Элементарный просмотр показывает, что требуемое соотношение выполнено.

§6. Максимальная размерность орбит представления Ad^* в случае $BSO(n)$.

<u>Теорема 6.I.</u> Размерность орбит общего положения представления Ad^* для $BSO(n)$ дается следующей таблицей:

n	$4s$	$4s+2$	$4s+1$	$4s+3$
$\dim O$	$4s^2$	$4s^2+4s$	$4s^2+2s$	$4s^2+6s+2$
$\operatorname{codim} O$	0	1	0	0

<u>Доказательство.</u> Оценки сверху на размерность орбит получены в предыдущем параграфе: $BSO(4s+2)$ имеет инвариант поэтому $\operatorname{codim} O \geqslant 1$, а для остальных n, $\operatorname{codim} O \geqslant 0$. Мы покажем, что эти оценки точные. Для этого укажем точку из G^* в которой $\operatorname{rk} \| C_{ij}^k f_k \|$ принимает значение, указанное в таблице

Имеем следующее соотношение:

$$[e_{ij}, e_{pq}] = -\delta_{qi}\, e_{pj} + \delta_{jp}\, e_{iq} +$$

$$+\delta_{q,n+1-j}\,(E_{p,n+1-i} - E_{i,n+1-p}),$$

поэтому матрица $A = \|C_{ij}^{k} f_k\|$ имеет вид

$$C_{ij,pq} = -\delta_{qi}\, x_{pj} + \delta_{jp}\, x_{iq} -$$

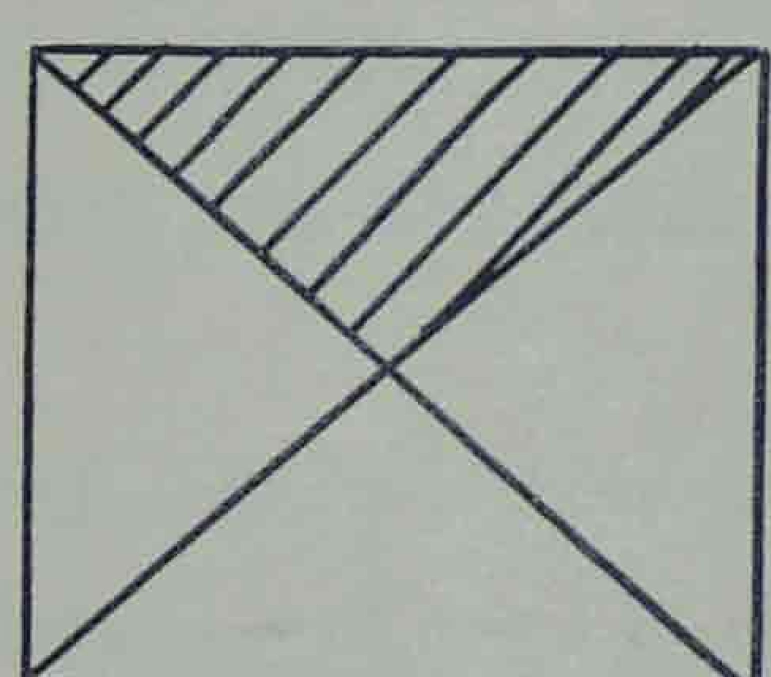
$$-\delta_{q,n+1-j}\, x_{i,n+1-p},$$

причем предпологается условие кососимметричности

$$x_{ij} = -x_{n+1-j,\, n+1-i},$$

$$i \le j, \quad i+j \le n.$$

В заштрихованной области матрицы $f = \|x_{ij}\|$

$f =$ 

положим все четные строки равными 0, а так же все элементы $2i+1$ строки, кроме $x_{2i+1,\, n-2i-1}$ и $x_{2i+1,\, 2i+2}$ тогда матрица A будет иметь вид $A = \mathrm{diag}(\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_l)$, где

$$\mathcal{D}_i = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline A_4 & 0 & A_5 \\ \hline A_6 & A_5 & 0 \\ \hline \end{array}\ , \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & x_{i,i+1} \\ x_{i,i+1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2=\begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} x_{i,n-i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{i,i+1} \end{matrix} & 0 \end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{i,n-i} \end{matrix} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_6=\begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} x_{i,i+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix},\ A_5=\begin{pmatrix} 0 & & x_{i,n-i} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ x_{i,n-i} & & 0 \end{pmatrix}.$$

I) $n=2k$, $k=2s$ в этом случае $\det A=\det \mathcal{D}_1 \cdot \ldots \cdot \det \mathcal{D}_s$. A вычисляется в точке

$$f=E_{1,2}+E_{3,4}+\ldots+E_{k-1,k}+E_{1,n-1}+E_{3,n-3}+\ldots$$
$$\ldots+E_{k-1,k+1}-E_{n-1,n}-E_{n-3,n-2}-\ldots-E_{k+2,k+3}-$$
$$-E_{2,n}-E_{4,n-2}-\ldots-E_{k,k+2}.$$

Раскладывая $\mathcal{D}_i$ по столбцам, начиная с последнего и пропуская те столбцы, где имеется два ненулевых элемента, получим следующий детерминант

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

2) $n=2k$, $k=2s+1$. Вычеркнем из матрицы A строку и столбец с номером (k,k) , тогда оставшийся минор в точке f равен 4^s , где

$$f=E_{1,2}+E_{3,4}+\ldots+E_{k-2,k-1}+E_{1,n-1}+E_{3,n-3}+\ldots+E_{k-2,k+2}-$$

$-E_{n-1,n}-E_{n-3,n-2}-\ldots-E_{k+3,k+4}-E_{2,n}-E_{4,n-2}-\ldots-E_{k-1,k+3}.$

3) $n=2k+1$, $k=2s$, тогда $\det A=\det\mathcal{D}_1\cdot\ldots$
$\ldots\cdot\det\mathcal{D}_s=4^s$ в точке

$$f=E_{1,2}+E_{2,3}+\ldots+E_{k-1,k}+E_{1,n-1}+E_{3,n-3}+\ldots+E_{k-1,k+2}-$$

$$-E_{n-1,n}-E_{n-3,n-2}-\ldots-E_{k+3,k+4}-E_{2,n}-E_{4,n-2}-\ldots-E_{k,k+3}.$$

4) $n=2k+1$, $k=2s+1$, в этом случае кроме множителей $\det\mathcal{D}_i$ в $\det A$ появится еще один сомножитель

$$\det A=\det\mathcal{D}_1\cdot\ldots\cdot\det\mathcal{D}_s\cdot x^2_{k,k+1}.$$

В точке

$$f=E_{1,2}+E_{3,4}+\ldots+E_{k-2,k-3}+E_{1,n-1}+E_{3,n-3}+\ldots+E_{k-2,k+3}-$$

$$-E_{n-1,n}-E_{n-3,n-2}-\ldots-E_{k+4,k+5}-E_{2,n}-\ldots-E_{k-1,k+4}.$$

имеем $\det A=\det\mathcal{D}_1\cdot\ldots\cdot\det\mathcal{D}_s=4^s\neq 0.$

§7. Орбиты максимальной размерности и полуинварианты представления Ad^* в случае BG_2.

Положительные корни G_2 : $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+\alpha_2, 3\alpha_1+2\alpha_2$, базис $\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2, \alpha_2=-2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$.
Положительным корням в указанном порядке сопоставим переменные: $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$, переменные отвечающие базису $h_{\alpha_1}, h_{\alpha_2}$ в подалгебре Картана, обозначим y_7, y_8.

<u>Предложение 7.I.</u> В алгебре BG_2 существует базис, в котором операторы X_i имеют вид:

$$X_1 = y_3\frac{\partial}{\partial y_2} + 2y_4\frac{\partial}{\partial y_3} + 3y_5\frac{\partial}{\partial y_4} - 2y_1\frac{\partial}{\partial y_7} + y_1\frac{\partial}{\partial y_8},$$

$$X_2 = -y_3\frac{\partial}{\partial y_1} + y_6\frac{\partial}{\partial y_5} + 3y_2\frac{\partial}{\partial y_7} - 2y_2\frac{\partial}{\partial y_8},$$

$$X_3 = -2y_4\frac{\partial}{\partial y_1} - 3y_6\frac{\partial}{\partial y_4} + y_3\frac{\partial}{\partial y_7} - y_3\frac{\partial}{\partial y_8},$$

$$X_4 = -3y_5\frac{\partial}{\partial y_1} + 3y_6\frac{\partial}{\partial y_3} - y_4\frac{\partial}{\partial y_7},$$

$$X_5 = -y_6\frac{\partial}{\partial y_2} - 3y_5\frac{\partial}{\partial y_7} + y_5\frac{\partial}{\partial y_8},$$

$$X_6 = -y_6\frac{\partial}{\partial y_8},$$

$$X_7 = 2y_1\frac{\partial}{\partial y_1} - 3y_2\frac{\partial}{\partial y_2} - y_3\frac{\partial}{\partial y_3} + y_4\frac{\partial}{\partial y_4} + 3y_5\frac{\partial}{\partial y_5},$$

$$X_8 = -y_1\frac{\partial}{\partial y_1} + 2y_2\frac{\partial}{\partial y_2} + y_3\frac{\partial}{\partial y_3} - y_5\frac{\partial}{\partial y_5} + y_6\frac{\partial}{\partial y_6}.$$

Доказательство. Надо проверить только выбор знаков. Если $[e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}] = -e_{\alpha_1+\alpha_2}$, то изменим знак у e_{α_2}, если $[e_{\alpha_1}, e_{\alpha_1+\alpha_2}] = -2e_{2\alpha_1+\alpha_2}$, то изменим знак у $e_{2\alpha_1+\alpha_2}$, если $[e_{\alpha_1}, e_{2\alpha_1+\alpha_2}] = -3e_{3\alpha_1+\alpha_2}$, то изменим знак у $e_{3\alpha_1+\alpha_2}$, если $[e_{\alpha_2}, e_{3\alpha_1+\alpha_2}] = -e_{3\alpha_1+2\alpha_2}$, то изменим знак у $e_{3\alpha_1+2\alpha_2}$. Тогда автоматически $[e_{\alpha_1+\alpha_2}, e_{2\alpha_1+\alpha_2}] = -e_{3\alpha_1+2\alpha_2}$, действительно

$$[[e_{\alpha_1}, e_{2\alpha_1+\alpha_2}], e_{\alpha_2}] + [[e_{2\alpha_1+\alpha_2}, e_{\alpha_2}], e_{\alpha_1}] + [[e_{\alpha_2}, e_{\alpha_1}], e_{2\alpha_1+\alpha_2}] = 0,$$

$$[e_{3\alpha_1+\alpha_2}, e_{\alpha_2}] - [e_{\alpha_1+\alpha_2}, e_{2\alpha_1+\alpha_2}] = 0,$$

$$[e_{\alpha_1+\alpha_2}, e_{2\alpha_1+\alpha_2}] = -[e_{\alpha_2}, e_{3\alpha_1+\alpha_2}] = -e_{3\alpha_1+2\alpha_2},$$

что доказывает предложение.

Предложение 7.2. Пусть $\mathcal{O}$ орбита максимальной размерности представления Ad^* группы BG_2 ,тогда $\operatorname{codim} \mathcal{O} = 0$.

Доказательство. Докажем,что $\det A \neq 0$,где $A = \| C_{ij}^k x_k \|$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & y_3 & 2y_4 & 3y_5 & 0 & -2y_1 \\ -y_3 & 0 & 0 & 0 & y_6 & 3y_2 \\ -2y_4 & 0 & 0 & -3y_6 & 0 & y_3 \\ -3y_5 & 0 & 3y_6 & 0 & 0 & -y_4 \\ 0 & -y_6 & 0 & 0 & 0 & -3y_5 \\ 2y_1 & -3y_2 & -y_3 & y_4 & 3y_5 & 0 \end{vmatrix} .$$

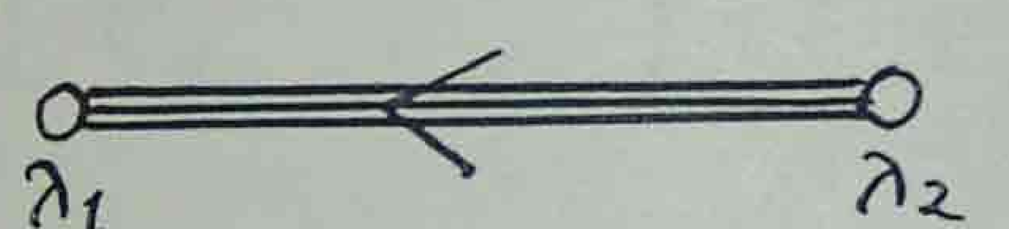
Элементарные вычисления показывают,что

$$\det A = -y_6^4 (6y_1 y_6 + 6y_5 y_3 - 2y_4^2)^2$$

и,следовательно, $\det A \neq 0$.

Полуинварианты BG_2 описывает следующая теорема.

Теорема 7.I. Любой характер BG_2 является допустимым. Собственной функцией,отвечающей характеру с числовыми отметками



будет

$$F = c\, y_6^{\lambda_2} \left(y_5 y_3 + y_1 y_6 - \frac{1}{3} y_4^2 \right)^{\frac{\lambda_1}{2}} .$$

Доказательство теоремы заключается в проверке системы из предложения 7.I для указанной выше функции F .

Замечание. Для вычислений в особых группах Ли можно использовать явные конструкции особых групп (см. [5] , [11]).

§8. Полуинварианты в случае BF_4 .

Положительные корни F_4 : ε_i $(1 \le i \le 4)$, $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \le i < j \le 4)$, $\frac{1}{2}(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4)$.Базис:
$\alpha_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\alpha_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4$, $\alpha_3 = \varepsilon_4$, $\alpha_4 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$.
Обозначения переменных,отвечающих положительным корням,приведены в таблице 8.I.

<u>Предложение 8.I.</u> В алгебре Ли BF_4 существует базис,в котором операторы X_i имеют вид (мы опускаем члены,соответствующие подалгебре Картана т.к. они нам не потребуются),приведенный в таблице 8.2.

<u>Доказательство</u> состоит в проверке того,что знаки можно выбрать так как указано в предложении.Путем изменения знаков можно добиться,чтобы таблица умножения имела вид:

$$[e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}] = e_{\alpha_1+\alpha_2}, \quad [e_{\alpha_2}, e_{\alpha_3}] = e_{\alpha_2+\alpha_3},$$

$$[e_{\alpha_3}, e_{\alpha_4}] = e_{\alpha_3+\alpha_4}.$$

Мы должны выбрать знаки только в следующих случаях: $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha,\beta}\, e_{\alpha+\beta}$,где α простой корень.Если для корня β имеем $\beta = \sum n_i \alpha_i$,где α_i простые корни,то $ht\,\beta = \sum n_i$ называется высотой корня β .Мы определим знаки индукцией по высоте.Системе положительных корней сопоставим граф: два положительных корня соединяем отрезком $\alpha \xrightarrow{X_i} \beta$, если $\alpha + \alpha_i = \beta$.Для случая F_4 этот граф изображен в таблице 8.3.Если в некоторую вершину β приходит одна стрелка, то изменяя знак у e_β мы можем считать,что $[e_{\alpha_i}, e_\alpha] = a^2 e_\beta$. Если несколько,то изменяя знак у e_β мы можем только у одного коммутатора $[e_{\alpha_{i_1}}, e_\alpha] = \pm q^2 e_\beta$ выбрать знак,знаки у остальных коммутаторов определяется исходя из тождества Якоби. Например, из тождества

$$[e_{\alpha_3}, [e_{\alpha_2}, e_{\alpha_1}]] + [e_{\alpha_2}, [e_{\alpha_1}, e_{\alpha_3}]] +$$

$$+ [e_{\alpha_1}, [e_{\alpha_3}, e_{\alpha_2}]] = 0$$

следует, что $[e_{\alpha_3}, e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}] = -[e_{\alpha_1}, e_{\varepsilon_3}]$, аналогично $[e_{\alpha_2}, e_{\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4)}] = -[e_{\alpha_4}, e_{\varepsilon_3}]$; выберем e_{ε_2} так, чтобы $[e_{\alpha_3}, e_{\varepsilon_2-\varepsilon_4}] = e_{\varepsilon_2}$, тогда $[e_{\alpha_1}, e_{\varepsilon_3}] = -e_{\varepsilon_2}$. Выберем $e_{\varepsilon_3+\varepsilon_4}$ так, чтобы $[e_{\alpha_3}, e_{\varepsilon_3}] = 2e_{\varepsilon_3+\varepsilon_4}$ и $e_{\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)}$ так, чтобы $[e_{\alpha_2}, e_{\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4)}] = e_{\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4)}$ тогда $[e_{\alpha_4}, e_{\varepsilon_3}] = -e_{\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_4)}$. Аналогично для остальных коммутаторов.

Рассмотрим на $(BF_4)^*$ следующие функции:

$$A = x_{11}x_5 + x_6 x_{12} - x_{13} x_7 + \frac{1}{4} x_1^2,$$

$$B = x_{21} x_5 + x_{19} x_6 - x_{18} x_7 + \frac{1}{2} x_{17} x_1,$$

$$C = x_{10} x_5 + x_6 x_9 - x_8 x_7 + \frac{1}{4} x_{17}^2,$$

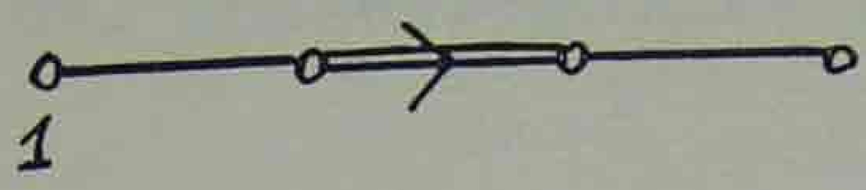
$$D = -2x_5 x_{22} + 2x_6 x_{20} - x_{18} x_1 + 2x_{13} x_{17},$$

$$E = x_3 x_5 + x_6 x_2 - x_8 x_1 + \frac{1}{2} x_{18} x_{17},$$

$$F = x_{16} x_5 - x_6 x_{15} + x_{13} x_8 - x_{18}^2.$$

<u>Теорема 8.I.</u> Следующие функции дают полный набор полуинвариантов представления Ad^* группы $\mathcal{B}F_4$:

I) $f_1 = x_5$, относится к характеру с числовыми отметками

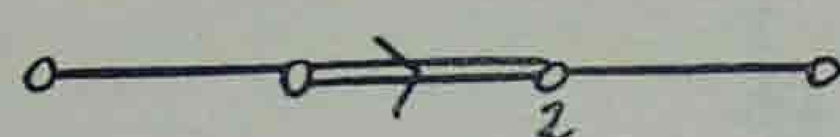


2) $f_2 = -\frac{1}{2}D^2C + 2FB^2 - 2AE^2 - 8CAF + EBD$

относится к характеру с числовыми отметками

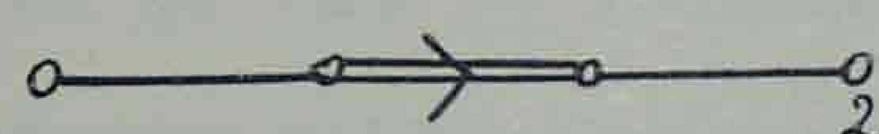
3) $f_3 = B^2 - 4CA$

относится к характеру с числовыми отметками



4) $f_4 = A$

относится к характеру с числовыми отметками



Доказательство состоит в непосредственном вычислении операторов X_i из предложения 8.I. Операторы X_i от функций A , B , C , D , E , F приведены в таблице:

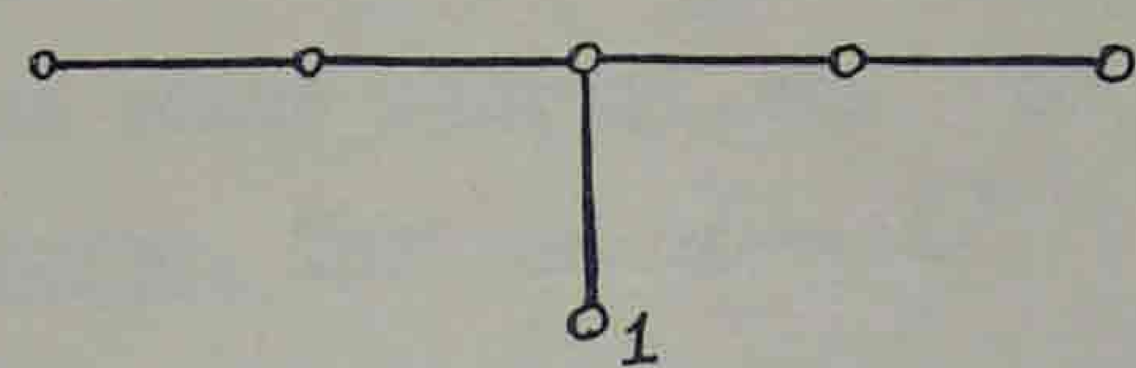
	A	B	C	D	E	F
X_1	0	0	0	0	0	0
X_2	0	0	0	0	0	0
X_3	0	0	0	$2B$	$2C$	$-E$
X_4	0	$2A$	B	0	$\frac{1}{2}D$	0

Полнота вытекает из теоремы 2.I гл. II .

§9. Полуинварианты в случае BE_6.

В этом параграфе мы будем пользоваться отождествлением BG^* с $\bigoplus_i h_i\mathbb{R}\oplus\sum_{\alpha<0}\mathbb{R}e_\alpha$, оператора Ad_g^* с $\pi\circ Ad_g$. Пусть δ_0 минимальный корень, x координата соответствующая корневому вектору e_{δ_0}.

Лемма 9.I. Координата x является полуинвариантом представления Ad^* группы $\mathcal{B}E_6$. Полуинвариант x относится к характеру с числовыми отметками



Доказательство. Непосредственно проверяется, что система уравнений из §I гл. II выполнена для функции x.

Следующая лемма уточняет знаки коммутаторов базиса Шевалле.

Лемма 9.2. (См. Спрингер [38]). Предположим, что все корни имеют одну и ту же длину, пусть Δ система простых корней, которая будет фиксирована, тогда существуют структурные константы N_{rs} т.ч. $N_{rs}=0$ или 1, если $s\in\Delta$ и $ht(r)\geqslant 2$.

Эта лемма полностью описывает, в сочетании с §I, операторы X_i в базисе Шевалле.

Положительные корни алгебры Ли E_6 :

$$\pm\varepsilon_i+\varepsilon_j \quad (1\le i<j\le 5),$$

$$\frac{1}{2}\Big(\varepsilon_8-\varepsilon_7-\varepsilon_6+\sum_{i=1}^{5}(-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i\Big),$$

причем $\sum_{i=1}^{5}\nu(i)$ четная. Простые корни:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_1 - \frac{1}{2}(\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_5) + \frac{1}{2}(\varepsilon_8-\varepsilon_7-\varepsilon_6),$$

$$\alpha_2 = \varepsilon_1+\varepsilon_2 \quad , \quad \alpha_3 = \varepsilon_2-\varepsilon_1,$$

$$\alpha_4 = \varepsilon_3-\varepsilon_2 \quad , \quad \alpha_5 = \varepsilon_4-\varepsilon_3,$$

$$\alpha_6 = \varepsilon_5-\varepsilon_4 .$$

Лемма 9.3. Пусть $\mathcal{O}$ орбита максимальной размерности Ad^* для BE_6 ,на BE_6^* рассмотрим функцию x ,определенную выше,тогда можно считать,что $x|_{\mathcal{O}} \neq 0$.

Доказательство. Так как $\dim \mathcal{O}$ максимальна,то $rk\|c_{ij}^k x_k\|$ максимален.Если он достигает максимума в точке A_0 ,то он остается максимальным в некоторой окрестности точки $A_0 \in \mathcal{U}$,но окрестность не лежит в гиперплоскости $x=0$,поэтому существует $y_0 \in \mathcal{U}$ т.ч. $x(y_0)\neq 0$ и через y_0 проходит орбита максимальной размерности,но тогда $x|_{\mathcal{O}} \neq 0$ т.к.

$$x(Ad_g^* y_0) = \chi(g)\,x(y_0),\ \chi(g)\neq 0,\ x(y_0)\neq 0.$$

В системе корней E_6 рассмотрим подсистему Σ' -корни не содержащие в своем разложении по простым корням α_2 , это система корней типа A_5 ,поэтому алгебра Ли BA_5 естественным образом вложена в алгебру Ли BE_6 .

Если $y_0 \in \mathcal{O}$,то $y_0 = \sum\limits_{\alpha<0} x_\alpha e_\alpha + \sum m_i h_i$. Покажем,что в этом разложении мы можем убрать слагаемые $x_\alpha e_\alpha$, где $\alpha \notin \Sigma'$,кроме минимального корня δ_0 .

В таблице 9.I приведены разложения положительных корней по простым корням (см.[6]).Запись $112\,221$ в этой таблице обозначает корень $\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6$.Переменные будем обозначать при фиксированной высоте $ht\,\alpha = i$ так:

$x_i, y_i, z_i, v_i, w_i, u_i$ в том порядке как указано в таблице 9.I.

Лемма 9.4. Существует $g \in \mathcal{L}E_6$ такое, что если $y_0 \in \mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ орбита максимальной размерности такая, что $x|\mathcal{O} \neq 0$, то

$$Ad_g^* y_0 = x(y_0) e_{\delta_0} + y_0',$$

где $y_0' \in BA_5^*$. Разложим вектор y_0' по корневым векторам BA_5

$$y_0' = x_1' e_{x_1} + y_1' e_{y_1} + \ldots + x_{11}' e_{x_{11}}$$

тогда функции $x_1', y_1', \ldots, x_{11}'$ имеют вид

$$x_1' = \frac{x_1''}{x}, \; y_1' = \frac{y_1''}{x}, \; \ldots, \; x_{11}' = \frac{x_{11}''}{x},$$

где $x_1'', y_1'', \ldots, x_{11}''$ полиномы. Явный вид полиномов $x_1'', \ldots, x_{11}''$ приведен в таблице 9.3.

Доказательство. В таблице 9.2 приведены операторы, которые надо применить к y_0 такому, что $x(y_0) \neq 0$ (существование его гарантирует лемма 9.3), чтобы избавиться от корневых векторов, которые содержат α_2 в своем разложении по простым.

Лемма Спрингера ничего не говорит о знаках коммутаторов $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}$ когда α простой и $ht\,\beta = 1$. Выберем знаки в этом случае. Не нулевыми коммутаторами могут быть только следующие:

$$[e_{\alpha_1}, e_{\alpha_3}] = \varepsilon_{13} e_{\alpha_1+\alpha_3}, \; [e_{\alpha_4}, e_{\alpha_5}] = \varepsilon_{45} e_{\alpha_4+\alpha_5},$$

$$[e_{\alpha_2}, e_{\alpha_4}] = \varepsilon_{24} e_{\alpha_2+\alpha_4}, \; [e_{\alpha_5}, e_{\alpha_6}] = \varepsilon_{56} e_{\alpha_5+\alpha_6},$$

$$[e_{\alpha_3}, e_{\alpha_4}] = \varepsilon_{34} e_{\alpha_3+\alpha_4}.$$

Знаки подбираем используя тождество Якоби.Например,

$$[[e_{\alpha_2}, e_{\alpha_3}], e_{\alpha_4}] + [[e_{\alpha_3}, e_{\alpha_4}], e_{\alpha_2}] + $$
$$+ [[e_{\alpha_4}, e_{\alpha_2}], e_{\alpha_3}] = 0,$$

поэтому $\varepsilon_{34} = \varepsilon_{24} = \xi$.В итоге получаем

$$\varepsilon_{24} = \varepsilon_{34} = \varepsilon_{56} = \xi, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{45} = -\xi .$$

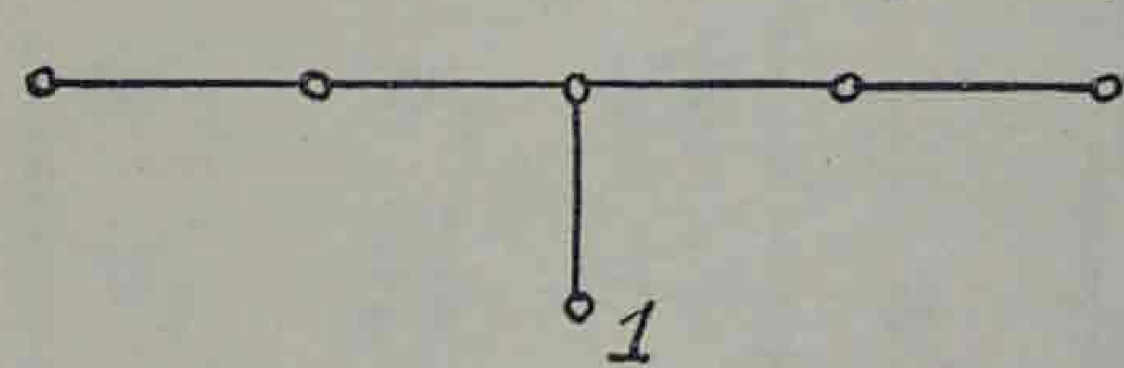
Операторы X_i от функций,указанных в лемме 9.4 приведены в таблице 9.4.Положим ($k_i, i=1,\dots,6$ координаты в подалгебре Картана, отвечающие базису Шевалле)

$$L' = -\frac{\xi}{6}(-k_1 - 2k_3 + 2k_5 + k_6)x + \frac{1}{2}v_3 y_8 - \frac{1}{2} z_4 z_7 -$$
$$- \frac{1}{2} z_3 x_8 + \frac{1}{2} v_4 x_7 ,$$

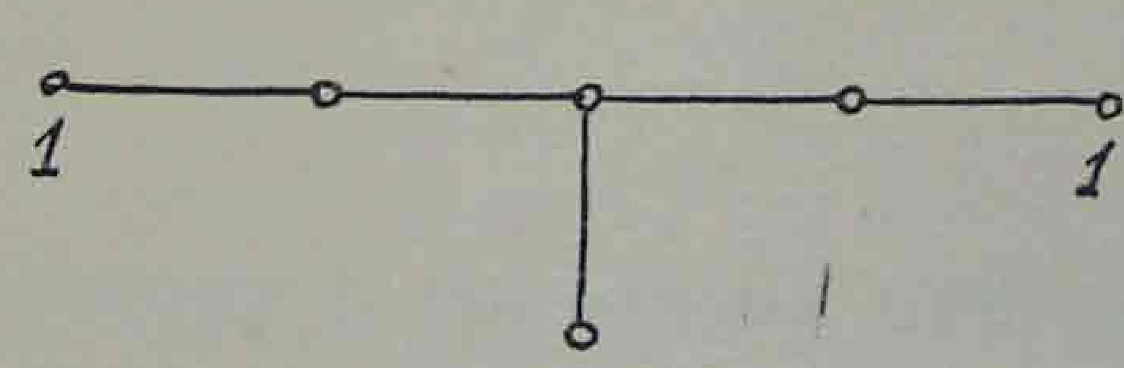
$$L'' = \frac{\xi}{3}(-2k_1 - k_3 + k_5 + 2k_6)x + v_4 x_7 - z_5 x_6 -$$
$$- z_4 z_7 + y_5 z_6 .$$

Теорема 9.I. Следующие функции дают полный набор полуинвариантов представления $\mathcal{A}d^*$ группы $\mathcal{L}E_6$:

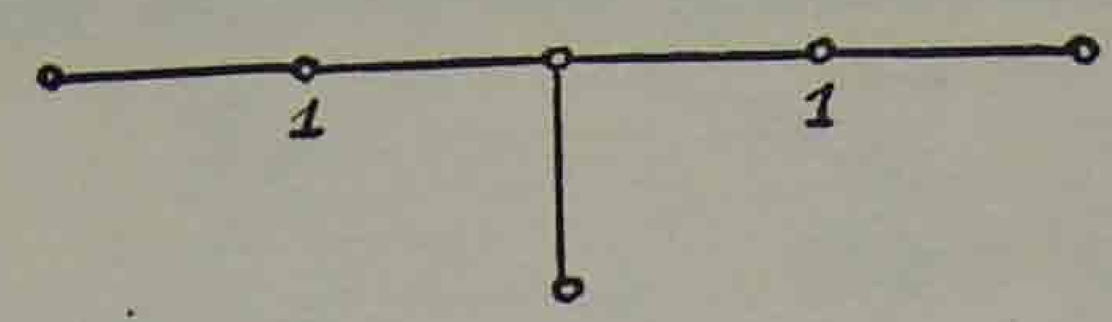
I) $f_1 = x$ относится к характеру с числовыми отметками



2) $f_2 = v'_5$ относится к характеру с числовыми отметками



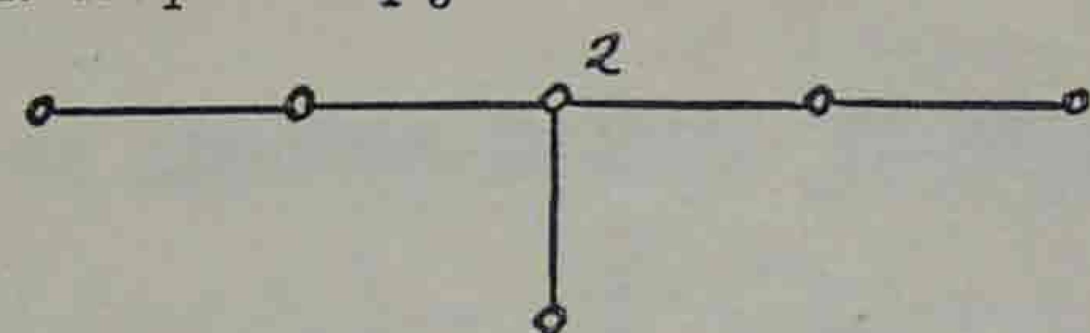
3) $f_3 = w'_4 x'_4 - v'_5 y'_3$ относится к характеру с числовыми отметками



4)

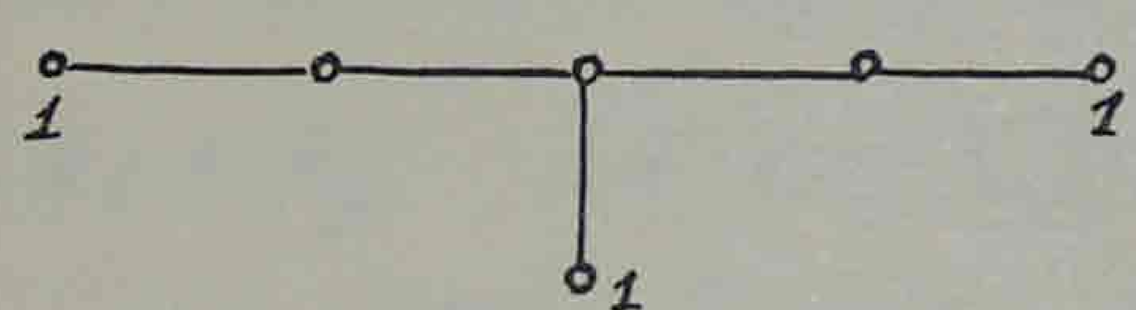
$$f_4 = \begin{vmatrix} w'_3 & w'_4 & v'_5 \\ x'_2 & y'_3 & x'_4 \\ z'_1 & y'_2 & x'_3 \end{vmatrix}$$

относится к характеру с числовыми отметками



5) $$f_5 = u'_1 x'_4 - w'_2 x'_3 - w'_3 z'_2 + w'_4 x'_1 + L''$$

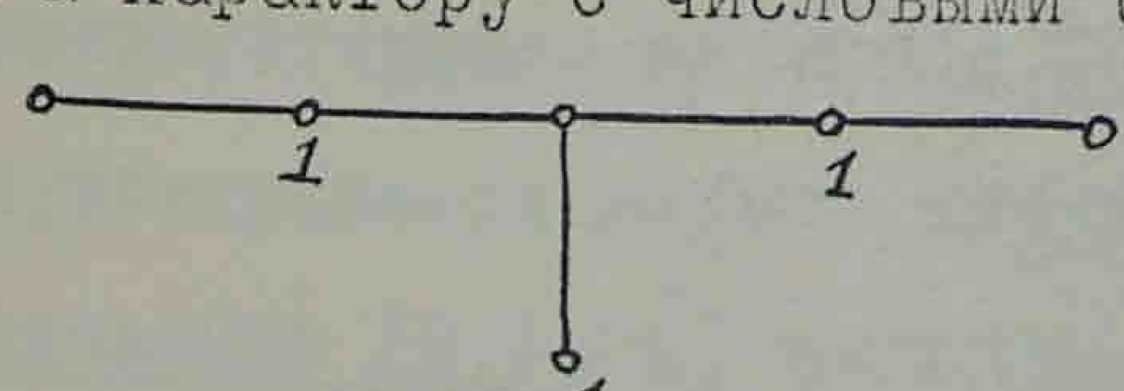
относится к характеру с числовыми отметками



6)

$$f_6 = \begin{vmatrix} w'_2 & w'_4 & v'_5 \\ v'_1 & y'_3 & x'_4 \\ L' & y'_2 & x'_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -w'_3 & w'_4 & v'_5 \\ -x'_2 & y'_3 & x'_4 \\ L' & y'_1 & z'_2 \end{vmatrix}$$

относится к характеру с числовыми отметками



<u>Следствие.</u> Представление Ad^* группы $\mathcal{L}E_6$ имеет два

функционально независимых инварианта

$$\mathcal{J}_1 = \frac{f_5}{f_1 f_2}, \quad \mathcal{J}_2 = \frac{f_6}{f_1 f_3}.$$

Доказательство теоремы состоит в проверке системы дифференциальных уравнений $X_i f_j = \lambda_{ij} f_j$ с использованием таблицы 9.4. Полнота предъявленной системы полуинвариантов вытекает из теоремы 2.I гл. $\overline{II}$.

§IO. Полуинварианты в случае BE_7.

Система простых корней алгебры Ли типа E_7:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7),$$

$$\alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \alpha_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \alpha_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2, \alpha_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3,$$

$$\alpha_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4, \alpha_7 = \varepsilon_6 - \varepsilon_5,$$

положительные корни (см. [6]):

$$\pm \varepsilon_i + \varepsilon_j \ (1 \le i < j \le 6), \ \varepsilon_8 - \varepsilon_7,$$

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 + \sum (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i\right), \quad \sum_{i=1}^{6} \nu(i) \equiv 1 \pmod 2.$$

Переменные будем обозначать при фиксированной высоте $ht\,\alpha = i$ так $x_i, y_i, z_i, u_i, v_i, w_i, t_i$ в том порядке как указано в таблице IO.I разложения положительных корней по простым (см. [6]).

В BE_7 лежит $B\mathcal{D}_6$,отбрасывая корень α_1 мы получим соответствующее вложение.Основным инструментом для построения полуинвариантов служит следующее предложение.

Предложение IO.I. а) Алгебру Ли BE_7 отождествляем с подпространством в E_7 ,натянутом на корневые вектора,отвечающие положительным корням, а $(BE_7)^*$ на корневые вектора e_α, для которых $\alpha<0$. Пусть δ_0 минимальный корень E_7, корневому вектору $e_0 = e_{\delta_0}$ отвечает координата x. Тогда для любого $y \in (BE_7)^*$ т.ч. $x(y) \neq 0$ существует $g \in \mathcal{B}E_7$ т.ч.

$$Ad^*_g y = x(y)\, e_0 + y(g),$$

где $y(g) \in BD_6^*$, BD_6 вложено в BE_7 как описано выше.

б) Разложим $y(g)$ по корневым векторам BD_6, получим 30 функций $v_1, \dots, v_{30}$. Утверждается, что v_i $(i=1,\dots,30)$ рациональные функции, знаменатели которых есть x: $v_i = u_i / x$.

в) Рассмотрим $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{30} \mathbb{R} u_i$ тогда $\mathcal{B}E_7$ представлена в V с помощью Ad^*, причем если $X_i u_j = a_{ij}^k u_k$ ($i \neq 1$), то a_{ij}^k совпадает со структурным тензором алгебры Ли BD_6 в базисе Шевалле.

<u>Дополнение</u> к предложению I0.I. Функции u_i в явном виде даны в таблице I0.2. В этой таблице штрихованная координата обозначает многочлен u_i, отвечающий корневому вектору, которому соответствует нештрихованная координата.

<u>Доказательство</u> предложения I0.I. В разложении $y = \sum\limits_{\alpha<0} y_\alpha e_\alpha$ мы будем постепенно убивать элементы e_α, для которых в разложение α по простым входит α_1. Рассмотрим множество

$$B = \{ \beta \in \Sigma_+ \mid \beta = \sum_{\gamma \in \Delta} n(\gamma)\gamma,\ n(\alpha_1) \neq 0 \}$$

отношение порядка в Σ индуцирует порядок в $B = \{\beta_1, \dots, \beta_N\}$, $\beta_1 \geqslant \dots \geqslant \beta_N$. На BE_7^* определим линейные операторы

$$A_j = Ad^*[\exp(N_j \frac{x_{\beta_j}}{x} e_{-\delta_0-\beta_j})], -\delta_0-\beta_j \in \Sigma,$$

где $[e_{-\delta_0-\beta_j}, e_{\delta_0}] = -N_j e_{-\beta_j}$ $(j = 1, \ldots, N)$.
Очевидно, что в разложении $A_1 y$ не содержится члена $x_{-\beta_1} e_{-\beta_1}$. В разложении $A_2(A_1 y)$ не содержится уже $x_{-\beta_2} e_{-\beta_2}$ и $x_{-\beta_1} e_{-\beta_1}$, причем оператор A_2 строится по разложению

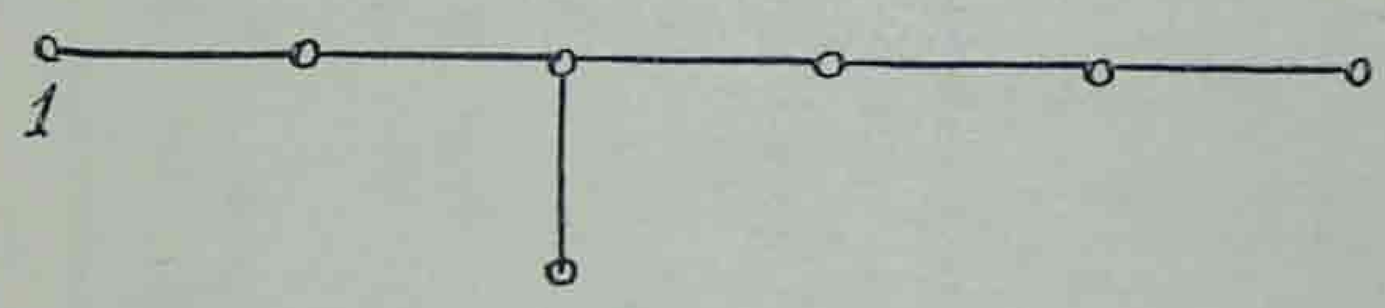
$$A_1 y = \sum_{\substack{\alpha<0 \\ \alpha+\beta_1\neq 0}} x_\alpha e_\alpha + \sum_{\beta\in\Delta} m_\beta h_\beta,$$

для вектора $A_1 y$. Продолжая этот процесс, мы придем к требуемому разложению.

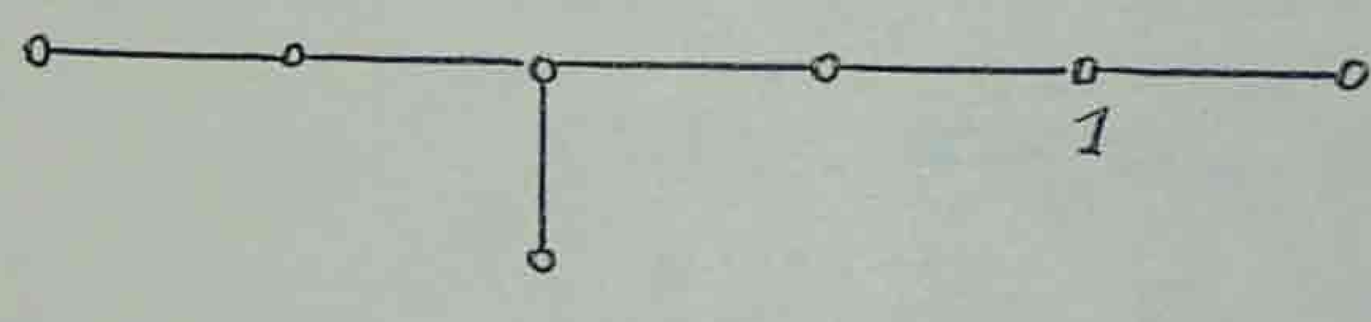
Вычисления показывают, что остальные координаты меняются по закону, указанному в дополнении. Пункт в) вытекает из вычислений операторов X_i от функций u_j. Эти вычисления приведены в таблице I0.3.

Теорема I0.I. Следующие функции дают полный набор полуинвариантов представления Ad^* группы $\mathcal{B}E_7$:

I) $f_1 = x_{17} (= x)$ относится к характеру с числовыми отметками

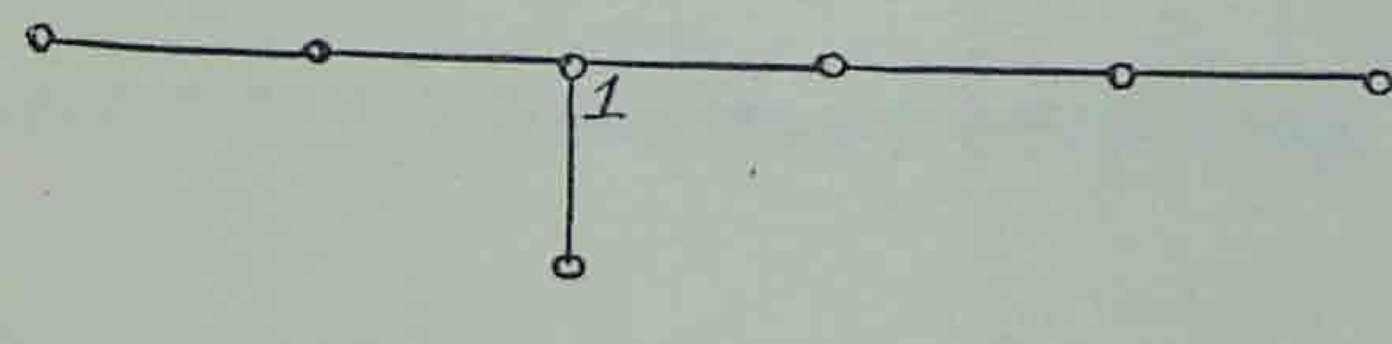


2) $f_2 = u'_9$ относится к характеру с числовыми отметками



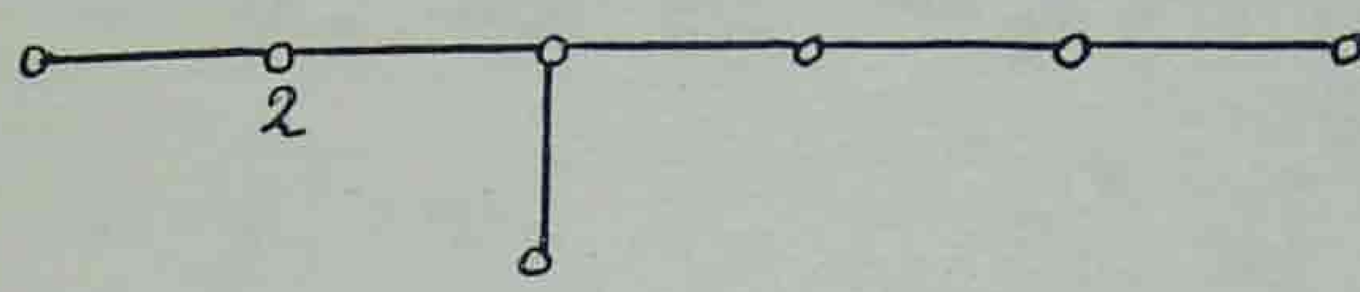
3) $f_3 = v'_7 z'_7 - u'_8 z'_6 + u'_9 u'_5$

относится к характеру с числовыми отметками



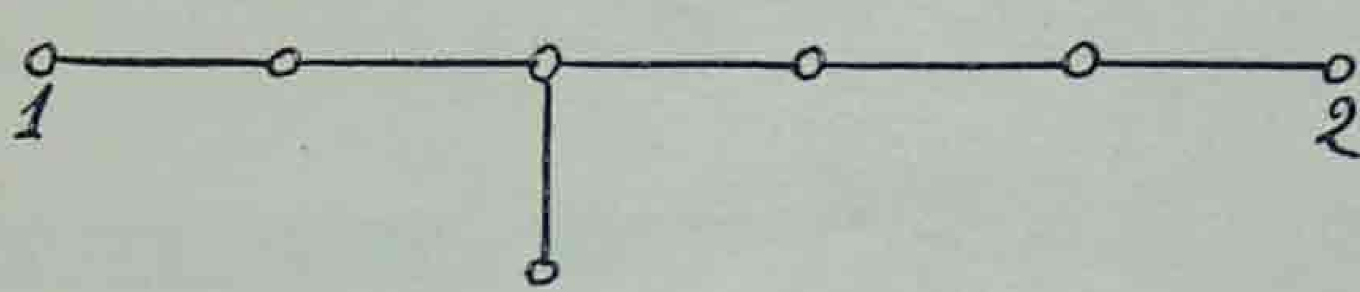
4) $$f_4 = v'_5 z'_5 u'_5 - v'_5 z'_6 u'_4 + v'_5 z'_7 z'_3 - v'_4 v'_6 u'_5 + v'_4 v'_7 u'_4 - v'_4 z'_3 u'_8 + u'_3 v'_6 z'_6 - u'_3 v'_7 z'_5 + u'_3 z'_3 u'_9 - v'_2 v'_6 z'_7 + v'_2 z'_5 u'_8 - v'_2 u'_4 u'_9 + z'_1 v'_7 z'_7 - z'_1 z'_6 u'_8 + z'_1 u'_5 u'_9$$

относится к характеру с числовыми отметками



5) $$f_5 = t'_1 u'_9 - w'_2 u'_8 + w'_3 v'_7 - w'_4 v'_6 + w'_5 v'_5$$

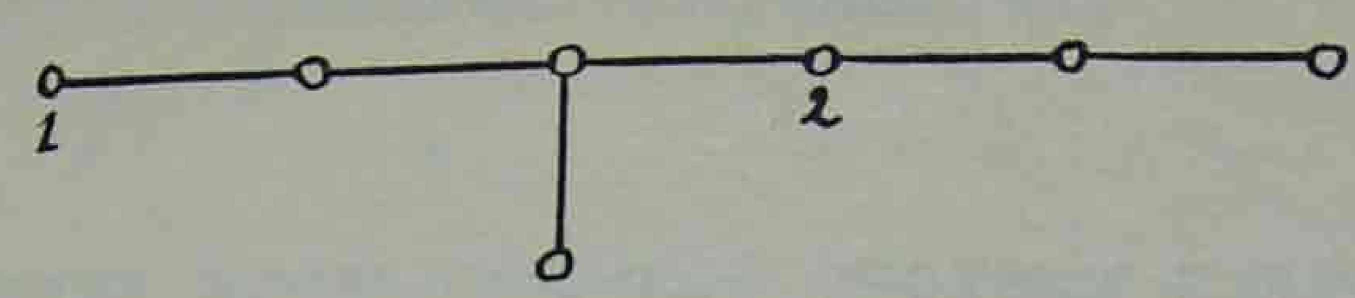
относится к характеру с числовыми отметками



6)
$$f_6 = \begin{vmatrix} w'_3 & u'_8 & u'_9 & 0 \\ z'_2 & z'_7 & 0 & -u'_9 \\ v'_1 & 0 & -z'_7 & -u'_8 \\ 0 & -u'_5 & -z'_6 & -v'_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} w'_4 & u'_8 & u'_9 & 0 \\ v'_3 & z'_7 & 0 & -u'_9 \\ u'_2 & 0 & -z'_7 & -u'_8 \\ 0 & -u'_4 & -z'_5 & -v'_6 \end{vmatrix} +$$

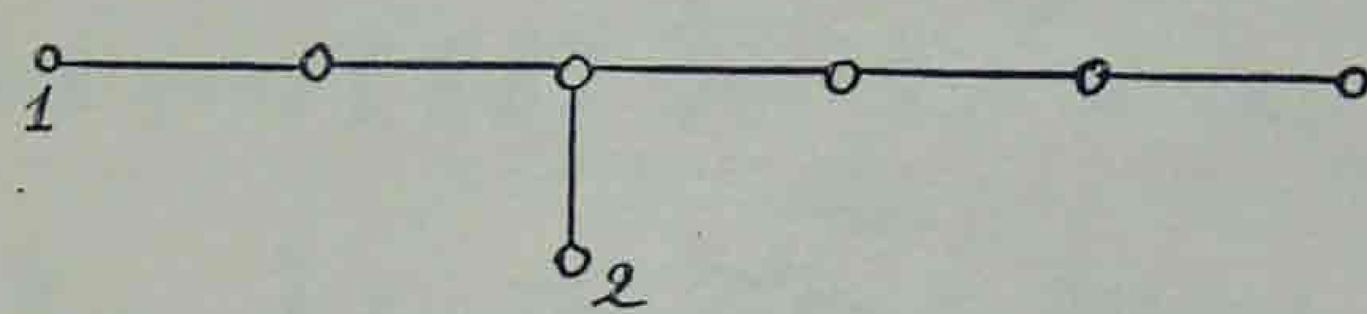
$$+ \begin{vmatrix} w'_5 & u'_8 & u'_9 & 0 \\ z'_4 & z'_7 & 0 & -u'_9 \\ y'_3 & 0 & -z'_7 & -u'_8 \\ 0 & -u'_3 & -v'_4 & -v'_5 \end{vmatrix}$$

относится к характеру с числовыми отметками



$$7)\ f_7 = w'_5 z'_5 u'_5 - w'_5 z'_6 u'_4 + w'_5 z'_7 z'_3 - z'_4 v'_6 u'_5 + z'_4 v'_7 u'_4 - z'_4 z'_3 u'_8 + y'_3 v'_6 z'_6 - y'_3 v'_7 z'_5 + y'_3 z'_3 u'_9 - y'_2 v'_6 z'_7 + y'_2 z'_5 u'_8 - y'_2 u'_4 u'_9 + y'_1 v'_7 z'_7 - y'_1 u'_8 z'_6 + y'_1 u'_9 u'_5$$

относится к характеру с числовыми отметками



<u>Доказательство.</u> Пусть $F(u_1, \dots, u_{30})$ полуинвариант и $u_i = u_i(x_1, \dots, x_{17})$ функции, описанные в предложении IO.I, тогда

$$X_i F = C_{ij}^k x_k \frac{\partial F}{\partial u_s} \cdot \frac{\partial u_s}{\partial x_j} = \left(C_{ij}^k x_k \frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right) \cdot \frac{\partial F}{\partial u_s}.$$

Мы имеем $C_{ij}^k x_k \frac{\partial u_s}{\partial x_j} = \alpha_{is}^p u_p$, где α_{is}^p структурный тензор $B\mathcal{D}_6$, поэтому $X_i F = \alpha_{is}^p u_p \frac{\partial F}{\partial u_s} = 0$ при $i \neq 1$. $X_1 F = 0$ так как $X_1 u_s \equiv 0$ для любого s .

Непосредственно из явного вида полуинвариантов имеем, что если F один из предъявленных в теореме полуинвариантов, то существует $\omega \in H^*$ т.ч.

$$F = \sum_{\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_s} = \omega} a(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_s})\, x_{\alpha_{i_1}} \cdot \ldots \cdot x_{\alpha_{i_s}}.$$

Из этого представления получаем, что F относится к характеру $\omega \in H^*$.

Полнота предъявленной системы полуинвариантов вытекает из теоремы 2.I гл. $\underline{II}$ т.к. характеры, к которым относятся построенные полуинварианты, образуют базис линейных форм на подалгебре Картана.

§II. Полуинварианты в случае BE_8 .

Пусть ε_i базис $\mathbb{R}^8$, рассмотрим систему векторов $(x_i)_{1 \le i \le 9}$, где $x_i = \varepsilon_i,\ 1 \le i \le 8$, $x_9 = -(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_8)$. Тогда система векторов $x_i - x_j$, $\pm(x_i + x_j + x_k)$ есть система корней типа E_8 (i, j, k различны). Система простых корней (см. [38]): $\tau_i = x_i - x_{i+1}$,

$1 \le i \le 7$, $\tau_8 = x_6 + x_7 + x_8$.

Разложение положительных корней по простым приведено в работе Спрингера [38] , переменные соответствующие положительным корням будем обозначать, в соответствии с таблицами этой работы, x_{ij} или просто (i,j) , где i -высота корня, а j номер этого корня, если корни при фиксированной высоте расположить в порядке убывания.

Предложение II.I. а) Алгебру Ли BE_8 отождествляем с подпространством в E_8 , натянутом на корневые вектора, отвечающие положительным корням, а $(BE_8)^*$ -на корневые вектора e_α , для которых $\alpha < 0$, e_0 -корневой вектор, соответствующий минимальному корню, x соответствующая координата. Тогда для любого $y \in (BE_8)^*$ т.ч. $x(y) \neq 0$ существует $g \in \mathcal{B}E_8$ т.ч. $Ad^*_g y = x(y)e_0 + y(g)$, где $y(g) \in (BE_7)^*$. BE_7 вкладывается в BE_8 т.к. корни, не содержащие в своем разложении по простым τ_1 , образуют систему корней типа E_7 .

б) Если разложить $y(g)$ по корневым векторам BE_7 ,то получим 63 функции $u_1 x^{-1}, \ldots, u_{63} x^{-1}$.Рассмотрим подпространство $V=\bigoplus_{i=1}^{63} \mathbb{R} u_i$ в $H(BE_8^*)$,тогда $\mathcal{B}E_8$ представлена в V с помощью Ad^* ,причем если $X_i\, u_j = a_{ij}^k u_k$,то a_{ij}^k , $i \geq 2$ совпадает со структурным тензором BE_7 в базисе Шевалле.

Доказательство этого предложения полностью аналогично доказательству соответствующего предложения для BE_7 ,только более громоздко.

Громоздкие вычисления показывают,что функции u_i даются формулами,приведенными в таблице II.I.В этой таблице многочлен u_s ,отвечающий координате (i,j) ,обозначен $(i,j)'$.

<u>Теорема II.I.</u> Подстановка функций $x_{ij}^{\prime}$ в полуинварианты BE_7 вместе с минимальным корнем алгебры Ли E_8 дает полный набор полуинвариантов представления Ad^* группы $\mathcal{B}E_8$. Числовые отметки характеров,к которым относятся полуинварианты, построенные таким образом,приведены в таблице II.2 (полуинвариант F_i получается из полуинварианта f_i из теоремы IO.I).

<u>Доказательство.</u> То что $X(e_\alpha)F=0$, $\alpha \in \Delta \subset \Sigma$ вытекает из предложения II.I так же как и в случае BE_7 .Проверим действие операторов из подалгебры Картана.Пусть $x'(\alpha)$ функция из предложения II.I,соответствующая корню $\alpha \in \Sigma$, тогда непосредственно из явного вида функций $x'(\alpha)$ вытекает,что

$$x'(\alpha)(Ad^*_{\exp h}\, y) = e^{(\alpha+\delta_0)(h)}\, x'(\alpha)(y),\ h \in H,$$

δ_0 -минимальный корень.Так как при $i \neq 1$, $\langle \alpha+\delta_0, \alpha_i \rangle = \langle \alpha, \alpha_i \rangle$,то отсюда вытекает,что если $C_{ij}^k x_k \frac{\partial u_s}{\partial x_j} = a_{is}^p u_p$, то операторы $C_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_j}$,соответствующие базисным векторам из подалгебры Картана для BE_7 ,и операторы $a_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_j}$

совпадают. Поэтому

$$C_{ij}^{k} x_k \frac{\partial F}{\partial x_j} = C_{ij}^{k} x_k \frac{\partial F}{\partial u_s} \; \frac{\partial u_s}{\partial x_j} =$$

$$= \left(C_{ij}^{k} x_k \frac{\partial u_s}{\partial x_j} \right) \frac{\partial F}{\partial u_s} = \alpha_{is}^{p} u_p \frac{\partial F}{\partial u_s} = \lambda_i F,$$

если F полуинвариант BE_7. Осталось рассмотреть случай $i = 1$. Имеем из предыдущего следующее соотношение

$$X(\tau_1) f(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(Ad^*_{\exp th_1} x) =$$

$$= \lambda(h_1) f(x) = [\langle \alpha, \tau_1 \rangle + \langle \delta_0, \tau_1 \rangle] f(x),$$

$$f(x) = x(\alpha)(x).$$

У нас α не содержит в разложении τ_1, $\langle \tau_i, \tau_1 \rangle = 0$ при $i \geq 3$, $\langle \tau_2, \tau_1 \rangle = -1$, $\langle \tau_1, \tau_1 \rangle = 2$, поэтому

$$X_1 x(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha = \sum\limits_{\alpha \in \Delta} n(\gamma)\gamma, \; n(\tau_2) \neq 0, \\ x(\alpha), & \alpha = \sum\limits_{\alpha \in \Delta} n(\gamma)\gamma, \; n(\tau_2) = 0. \end{cases}$$

В силу этого мы имеем

$$X_1 F = C_{1j}^{k} x_k \frac{\partial F}{\partial x_j} = \sum_{\alpha} u_\alpha \frac{\partial F}{\partial u_\alpha}$$

суммирование идет по α в разложении, которых по простым не входят τ_1 и τ_2 т.е. по подсистеме E_6.

<u>Лемма II.I.</u> Пусть y_α обозначают переменные в алгебре BE_7, когда α пробегает положительные корни не содержащие α_7, т.е. систему корней E_6. Утверждается, что для любого полуинварианта F для BE_7 имеет место равенство

$$F(\lambda y_\alpha) = \lambda^k F(y_\alpha).$$

Доказательство вытекает из непосредственного просмотра полуинвариантов. Кроме того мы получаем, что для f_1, $k=1$, для f_2, $k=0$, для f_3, $k=1$, для f_4, $k=2$, для f_5, $k=0$, для f_6, $k=2$ и для f_7, $k=2$.

Из тождества $F(\lambda y_\alpha) = \lambda^k F(y_\alpha)$ вытекает равенство

$$\sum_\alpha \frac{\partial F}{\partial y_\alpha} y_\alpha = k F(y_\alpha),$$

которое завершает вычисление операторов из подалгебры Картана. Полнота предъявленной системы полуинвариантов вытекает из теоремы 2.I гл. II т.к. характеры, к которым относятся построенные полуинварианты, образуют базис в пространстве линейных форм на подалгебре Картана.

§I2. Максимальная размерность орбит представления Ad^* в случае F_4, E_6, E_7, E_8.

Предложение I2.I. Пусть $\mathcal{O}$ орбита максимальной размерности представления Ad^* группы $\mathcal{L}F_4$, тогда $\operatorname{codim} \mathcal{O} = 0$.

Доказательство. Используем обозначения §8, $\det\|C_{ij}^k x_k\|$ будем вычислять в следующей точке:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_{17} = x_{18} = x_{19} = x_{20} =$$
$$= x_{21} = x_{22} = x_{23} = x_{24} = x_7 = x_6 =$$
$$= x_9 = x_8 = x_{12} = x_{13} = 0,$$
$$x_5 = x_{10} = 1.$$

Если расписать теперь матрицу $A = \| C_{ij}^{k} x_k \|$,то получим,что $\det A \neq 0$.

<u>Предложение I2.2.</u> Пусть $\mathcal{O}$ орбита максимальной размерности представления Ad^* группы $\mathcal{L}E_7$,тогда $\operatorname{codim} \mathcal{O} = 0$.

<u>Доказательство.</u> Используем обозначения §I0,определитель $\det \| C_{ij}^{k} x_k \|$ будем вычислять в точке:

$$x\left(\frac{1}{2}\left(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 + \sum_i (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i\right)\right) = 0,$$

$$\begin{array}{lll}
x(\varepsilon_1+\varepsilon_4)=0 & x(\varepsilon_1+\varepsilon_6)=0 & x(\varepsilon_4+\varepsilon_5)=0 \\
x(\varepsilon_2+\varepsilon_4)=0 & x(\varepsilon_2+\varepsilon_6)=0 & x(\varepsilon_4+\varepsilon_6)=0 \\
x(\varepsilon_4+\varepsilon_5)=0 & x(\varepsilon_3+\varepsilon_6)=0 & x(\varepsilon_3+\varepsilon_5)=0 \\
x(\varepsilon_4+\varepsilon_6)=0 & x(\varepsilon_4+\varepsilon_6)=0 & x(\varepsilon_3+\varepsilon_6)=0
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
x(-\varepsilon_1+\varepsilon_4)=0 & x(-\varepsilon_1+\varepsilon_6)=0 & x(-\varepsilon_1+\varepsilon_3)=0 \\
x(-\varepsilon_2+\varepsilon_4)=0 & x(-\varepsilon_2+\varepsilon_6)=0 & x(-\varepsilon_1+\varepsilon_4)=0 \\
x(-\varepsilon_3+\varepsilon_5)=0 & x(-\varepsilon_3+\varepsilon_6)=0 & x(-\varepsilon_1+\varepsilon_5)=0 \\
x(-\varepsilon_3+\varepsilon_6)=0 & & x(-\varepsilon_1+\varepsilon_6)=0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
x(\varepsilon_2+\varepsilon_3)=0 & x(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=0 \\
x(\varepsilon_2+\varepsilon_4)=0 & x(\varepsilon_1+\varepsilon_4)=0 \\
x(\varepsilon_2+\varepsilon_5)=0 & x(\varepsilon_1+\varepsilon_5)=0 \\
x(\varepsilon_2+\varepsilon_6)=0 & x(\varepsilon_1+\varepsilon_6)=0 .
\end{array}$$

Остальные переменные не ноль.Выписывая достаточно громоздкий $\det \| C_{ij}^{k} x_k \|$ в явном виде убеждаемся,что он отличен от 0.

<u>Предложение I2.3.</u> Пусть $\mathcal{O}$ орбита максимальной размерности представления Ad^* группы $\mathcal{L}E_8$,тогда $\operatorname{codim} \mathcal{O} = 0$.

<u>Доказательство.</u> Будем использовать следующую систему положительных корней (см. [6]): $\pm \varepsilon_i + \varepsilon_j \quad (i<j)$,

$$\frac{1}{2}\left(\varepsilon_8+\sum_{i=1}^{7}(-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i\right),\quad \sum_{i=1}^{7}\nu(i)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,2).$$

Определитель $\det\|C_{ij}^{k}x_k\|$ будем вычислять в следующей точке:

$$x\left(\frac{1}{2}\left(\varepsilon_8+\sum(-1)^{\nu(i)}\varepsilon_i\right)\right)=0,$$

$$x(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=x(\varepsilon_1+\varepsilon_4)=x(\varepsilon_1+\varepsilon_5)=$$

$$=x(\varepsilon_1+\varepsilon_6)=x(\varepsilon_1+\varepsilon_7)=x(\varepsilon_1+\varepsilon_8)=x(\varepsilon_2+\varepsilon_3)=$$

$$=x(\varepsilon_2+\varepsilon_4)=x(\varepsilon_2+\varepsilon_5)=x(\varepsilon_2+\varepsilon_6)=x(\varepsilon_2+\varepsilon_7)=$$

$$=x(\varepsilon_2+\varepsilon_8)=x(\varepsilon_3+\varepsilon_5)=x(\varepsilon_3+\varepsilon_6)=x(\varepsilon_3+\varepsilon_7)=$$

$$=x(\varepsilon_4+\varepsilon_5)=x(\varepsilon_4+\varepsilon_6)=x(\varepsilon_4+\varepsilon_7)=x(\varepsilon_4+\varepsilon_8)=$$

$$=x(\varepsilon_5+\varepsilon_7)=x(\varepsilon_5+\varepsilon_8)=x(\varepsilon_6+\varepsilon_7)=x(\varepsilon_6+\varepsilon_8)=$$

$$=x(-\varepsilon_1+\varepsilon_8)=x(-\varepsilon_2+\varepsilon_8)=x(-\varepsilon_3+\varepsilon_8)=x(-\varepsilon_4+\varepsilon_8)=$$

$$=x(-\varepsilon_5+\varepsilon_8)=x(-\varepsilon_6+\varepsilon_8)=x(-\varepsilon_1+\varepsilon_6)=x(-\varepsilon_2+\varepsilon_6)=$$

$$=x(-\varepsilon_3+\varepsilon_6)=x(-\varepsilon_4+\varepsilon_6)=x(-\varepsilon_5+\varepsilon_7)=x(-\varepsilon_5+\varepsilon_8)=$$

$$=x(-\varepsilon_1+\varepsilon_4)=x(-\varepsilon_2+\varepsilon_4)=x(-\varepsilon_3+\varepsilon_5)=x(-\varepsilon_3+\varepsilon_6)=$$

$$=x(-\varepsilon_3+\varepsilon_7)=x(-\varepsilon_3+\varepsilon_8)=x(-\varepsilon_1+\varepsilon_3)=x(-\varepsilon_1+\varepsilon_4)=$$

$$=x(-\varepsilon_1+\varepsilon_5)=x(-\varepsilon_1+\varepsilon_6)=x(-\varepsilon_1+\varepsilon_7)=$$

$$=x(-\varepsilon_1+\varepsilon_8)=0\ ;\qquad x(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=$$

$$=x(\varepsilon_3+\varepsilon_4)=x(\varepsilon_5+\varepsilon_6)=x(\varepsilon_7+\varepsilon_8)=1.$$

Очень громоздкое выписывание матрицы $\|C_{ij}^{k}x_k\|$ показывает, что ее детерминант отличен от нуля.

<u>Предложение I2.4.</u> Пусть $\mathcal{O}$ орбита максимальной размерности представления Ad^* группы $\mathcal{L}E_6$, тогда $\operatorname{codim}\mathcal{O}=2$.

Доказательство. Мы уже знаем из §9, что $\operatorname{codim} U \geq 2$. Осталось указать точку где достигается равенство. Положим все переменные, содержащие α_2 в разложении по простым корням, равными 0 (обозначения из §9). Вычеркнем строчку, отвечающую $\frac{1}{2}(\varepsilon_8-\varepsilon_7-\varepsilon_6+\varepsilon_5-\varepsilon_4+\varepsilon_3+\varepsilon_2-\varepsilon_1)$ и $\frac{1}{2}(\varepsilon_8-\varepsilon_7-\varepsilon_6-\varepsilon_5+\varepsilon_4+\varepsilon_3+\varepsilon_2-\varepsilon_1)$. Утверждается, что оставшийся определитель отличен от 0 в точке

$$x\left(\tfrac{1}{2}(\varepsilon_8-\varepsilon_7-\varepsilon_6-\varepsilon_5+\varepsilon_4-\varepsilon_3-\varepsilon_2-\varepsilon_1)\right)=$$

$$=x\left(\tfrac{1}{2}(\varepsilon_8-\varepsilon_7-\varepsilon_6-\varepsilon_5-\varepsilon_4+\varepsilon_3-\varepsilon_2-\varepsilon_1)\right)=$$

$$=x(-\varepsilon_1+\varepsilon_5)=x(-\varepsilon_2+\varepsilon_4)=x(-\varepsilon_2+\varepsilon_5)=$$

$$=x(-\varepsilon_1+\varepsilon_3)=0.$$

Это утверждение проверяется непосредственным выписыванием матрицы $\| C_{ij}^k x_k \|$.

§I3. Допустимые характеры для представления Ad^* борелевских подалгебр.

Теорема I3.I. Характер χ группы $\mathcal{B}G$, где G простая алгебра Ли, с числовыми отметками $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ допустимый характер тогда и только тогда когда числовые отметки $d\chi$ инвариантны относительно автоморфизма $(-w_0)$ схемы Дынкина.

Мы использовали обозначения §2.

Доказательство. Доказательство этой теоремы проведем отдельно для каждой серии простых алгебр Ли. Доказывать теорему надо только для A_n, $\mathcal{D}_n$ если n нечетно и E_6 т.к. в остальных случаях характеры, к которым относятся полуинварианты, предъявленные в предыдущих параграфах, образуют базис в группе характеров.

Случай A_{n-1}. Характер χ определяется значениями на диагонали матрицы: $\chi(\|g_{ij}\|)=g_{11}^{\lambda_1}\cdots g_{nn}^{\lambda_n}$. Условие инвариантности числовых отметок характера относительно $(-w_0)$ перепишется в виде $\lambda_i+\lambda_{n+1-i}=0$. Матрицы E_{ij} $(i\le j)$ образуют базис в алгебре верхнетреугольных матриц. В этом базисе система дифференциальных уравнений для полуинвариантов имеет вид:

$$\sum_{s=i+1}^{n} x_{ks}\frac{\partial F}{\partial x_{ks}}-\sum_{s=1}^{i-1} x_{sk}\frac{\partial F}{\partial x_{sk}}=\lambda_k F,$$

$$\sum_{s=j}^{n} x_{is}\frac{\partial F}{\partial x_{js}}-\sum_{s=1}^{n} x_{sj}\frac{\partial F}{\partial x_{si}}=0,$$

$$k=1,\dots,n,\quad 1\le i<j\le n,$$

где x_{ij} координаты в BG^*, сопряженные E_{ij}. Пространство BG^* отождествляется с пространством нижнетреугольных матриц. Рассмотрим $\Delta_k(X)$ -нижний левый угловой минор порядка k в матрице X и $v_{ij}(k)$ -окаймление Δ_k, соответствующее элементу a_{ij}. Очевидно, что функции $\Delta_k(X)$ и $S_k(X)=\sum_{i=k+1}^{n+1-k} v_{ii}(k)$ являются полуинвариантами Ad^*, которые относятся к характерам

$$(\underbrace{1,\dots,1}_{k},0,\dots,0,\underbrace{-1,\dots,-1}_{k})$$

(см. [3]) т.к. для них выполнена предыдущая система. Умножая k -ое уравнение на $\partial F/\partial x_{kk}$, (i,j) -ое на $\partial F/\partial x_{ij}$ и складывая получим соотношение

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\partial F}{\partial x_{ii}}=0.$$

Если F относится к характеру $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, то $\Delta_k F$ относится к характеру

$(\lambda_1+1, \ldots, \lambda_k+1, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{n+1-k}-1, \ldots, \lambda_n-1)$.

Подставляя $\Delta_k F$ в систему (α) получим $\partial F/\partial x_{ii} - \partial F/\partial x_{n+1-i,n+1-i} = 0$. Очевидно, что $\lambda_1+\ldots+\lambda_n=0$, тогда используя предыдущее, подстановка $S_2 F$ в систему (α) даст $\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}=0$. Продолжая этот процесс мы получим утверждение.

Случай $\mathcal{D}_n$, n нечетно. Характер χ определяется значениями на диагонали: $\chi(\|g_{ij}\|) = g_{11}^{\lambda_1} \ldots g_{n,n}^{\lambda_n}$, $(i,j=1,\ldots,2n)$. Условие симметрии превращается в равенство $\lambda_n = 0$. Складывая все уравнения $X_i F = \lambda_i F$ получим тождество

$$\lambda_1 \frac{\partial F}{\partial x_{11}} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial x_{22}} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial F}{\partial x_{nn}} = 0. \quad (\beta)$$

Пусть F относится к характеру $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, тогда

$\Delta_2 F$ соответствует характеру $(\lambda_1+2, \lambda_2+2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n)$,

. . . .

$\Delta_{2i} F$ соответствует характеру $(\lambda_1+2, \ldots, \lambda_{2i}+2, \lambda_{2i+1}, \ldots, \lambda_n)$,

. . . .

$\Delta_{n-1} F$ соответствует характеру $(\lambda_1+2, \ldots, \lambda_{n-1}+2, \lambda_n)$

Подстановка $\Delta_{2i} F$ в тождество (β) дает соотношение

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_{11}} + \dfrac{\partial F}{\partial x_{22}} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_{33}} + \dfrac{\partial F}{\partial x_{44}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_{n-2,n-2}} + \dfrac{\partial F}{\partial x_{n-1,n-1}} = 0. \end{cases}$$

Подставляя теперь $J_{2i+1}F$ в (β) получим

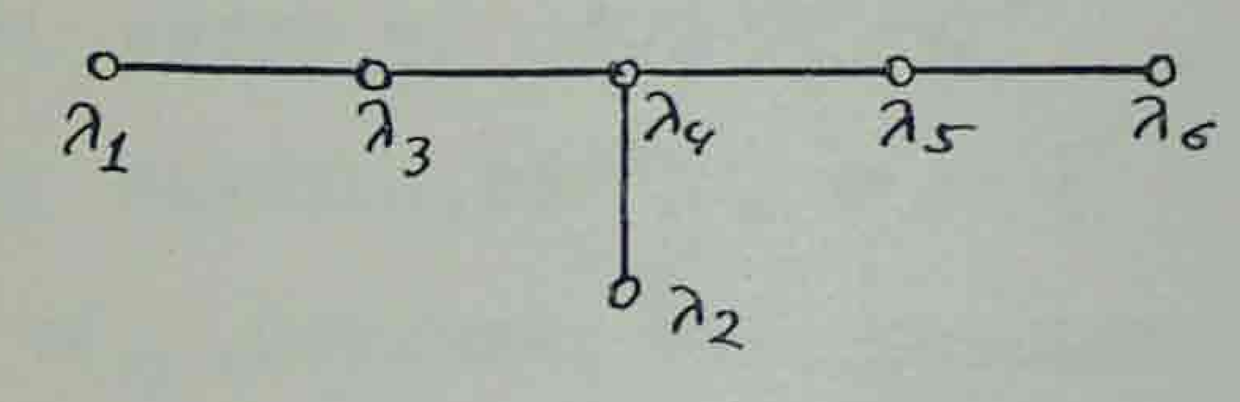
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_{11}} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_{11}} + \dfrac{\partial F}{\partial x_{22}} + \dfrac{\partial F}{\partial x_{33}} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_{11}} + \dfrac{\partial F}{\partial x_{22}} + \ldots + \dfrac{\partial F}{\partial x_{n-1,n-1}} = 0 . \end{cases}$$

Собирая все вместе получим

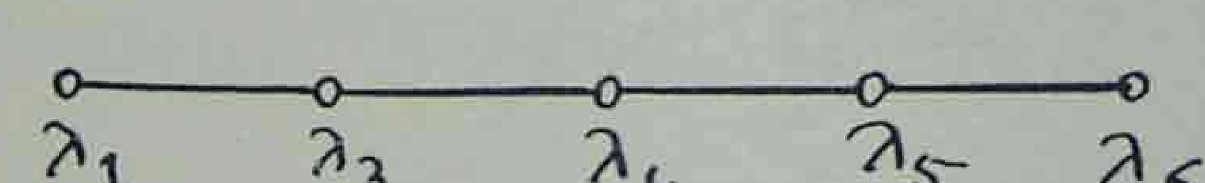
$$\frac{\partial F}{\partial x_{11}} = \frac{\partial F}{\partial x_{22}} = \ldots = \frac{\partial F}{\partial x_{n-1,n-1}} = 0 ,$$

что дает равенство $\lambda_n \dfrac{\partial F}{\partial x_{nn}} = 0$.Рассмотрим теперь $J_{n-1}F$,это полуинвариант,отвечающий характеру $(\lambda_1+2, \ldots$ $\ldots, \lambda_{n-1}+2, \lambda_n)$.Тогда $\lambda_n \dfrac{\partial}{\partial x_{n-1,n-1}}(J_{n-1}F) = 0$ поэтому $\lambda_n \Delta_{n-1} F = 0$ и тогда $\lambda_n = 0$.

Случай E_6 .Пусть F полуинвариант Ad^* ,отвечающий характеру с числовыми отметками



В §9 показано,что $BA_5^* \subset BE_6^*$,рассмотрим F/BA_5^* ,из того же параграфа вытекает,что это ограничение определяет не нулевой полуинвариант BA_5 ,отвечающий характеру с числовыми отметками



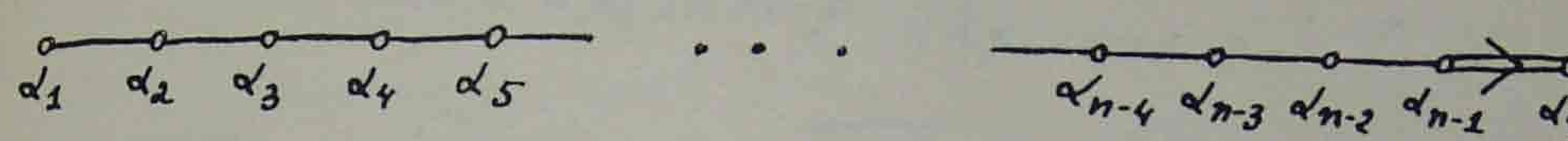
и по уже доказанному $\lambda_1 = \lambda_6$, $\lambda_3 = \lambda_5$,что и требовалось.

Таблица 2.I.

A_n

$(-w_0): \alpha_i \longmapsto \alpha_{n+1-i}$, $\operatorname{codim} \mathcal{O} = \left[\frac{n}{2}\right]$.

B_n

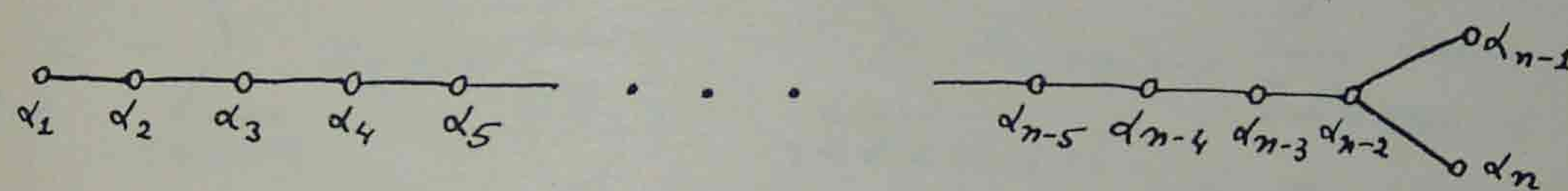


$-w_0 = id$, $\operatorname{codim} \mathcal{O} = 0$.

C_n

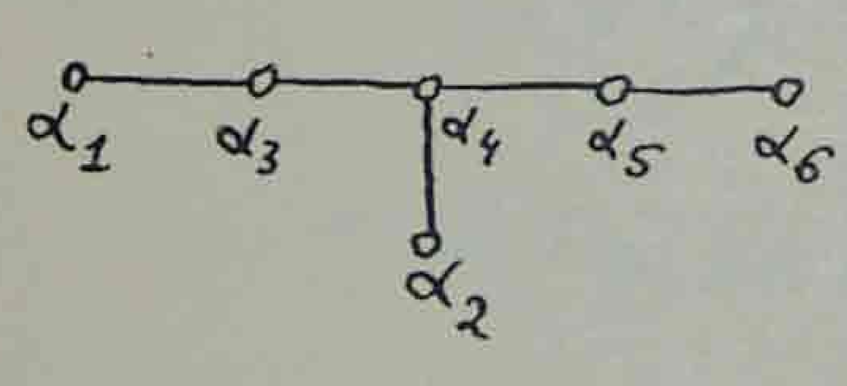
$-w_0 = id$, $\operatorname{codim} \mathcal{O} = 0$.

D_n



если n четно, то $w_0 = -id$, $\operatorname{codim} \mathcal{O} = 0$;
если n нечетно, то $w_0 = -\varepsilon$, где ε переставляет α_{n-1} , α_n , оставляя неподвижными все другие α_i , следовательно, $\operatorname{codim} \mathcal{O} = 1$.

E_6



$(-w_0)$ определяется перестановкой $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, следовательно, $\operatorname{codim} \mathcal{O} = 2$.

G_2, F_4, E_7, E_8

$w_0 = -id$, $\operatorname{codim} \mathcal{O} = 0$.

Таблица 4.I.

$$X_{pp} = \sum_{p \leq s \leq n} x_{ps} \frac{\partial}{\partial x_{ps}} - \sum_{1 \leq s \leq p} x_{sp} \frac{\partial}{\partial x_{sp}} +$$

$$+ \sum_{1 \leq s \leq n-p} x_{p,\, s+n} \frac{\partial}{\partial x_{p,\, s+n}} + \sum_{s<p} x_{s,\, 2n+1-p} \frac{\partial}{\partial x_{s,\, 2n+1-p}} +$$

$$+ 2 x_{p,\, 2n+1-p} \frac{\partial}{\partial x_{p,\, 2n+1-p}} ;$$

$$X_{ij} = \sum_{j \leq s \leq n} x_{is} \frac{\partial}{\partial x_{js}} - \sum_{1 \leq s \leq i} x_{sj} \frac{\partial}{\partial x_{si}} +$$

$$+ \sum_{1 \leq s \leq n-j} x_{i,\, s+n} \frac{\partial}{\partial x_{j,\, s+n}} + \sum_{1 \leq s \leq i} x_{s,\, 2n+1-i} \frac{\partial}{\partial x_{s,\, 2n+1-j}} +$$

$$+ 2 x_{i,\, 2n+1-i} \frac{\partial}{\partial x_{i,\, 2n+1-j}} + \sum_{i<s\leq j} x_{i,\, 2n+1-s} \frac{\partial}{\partial x_{s,\, 2n+1-j}} ;$$

$$X_{r,\, t+n} = - \sum_{1 \leq s \leq r} x_{s,\, t+n} \frac{\partial}{\partial x_{s,r}} - \sum_{r < s \leq n-t+1} x_{r,\, 2n+1-s} \frac{\partial}{\partial x_{s,\, 2n+1-t}} -$$

$$- \sum_{1 \leq s < r} x_{s,\, 2n+1-r} \frac{\partial}{\partial x_{s,\, n+1-t}} - 2 x_{r,\, 2n+1-r} \frac{\partial}{\partial x_{r,\, n+1-t}} ;$$

$$X_{q,\, 2n+1-q} = - \sum_{1 \leq s < q} x_{s,\, 2n+1-q} \frac{\partial}{\partial x_{sq}} -$$

$$- 2 x_{q,\, 2n+1-q} \frac{\partial}{\partial x_{qq}} ;$$

$$1 \leq p \leq n , \quad 1 \leq i < j \leq n , \quad r + t \leq n ,$$

$$1 \leq q \leq n .$$

Таблица 8.I.

x_1	ε_1	x_{13}	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4$
x_2	ε_2	x_{14}	$\varepsilon_2 - \varepsilon_3$
x_3	ε_3	x_{15}	$\varepsilon_2 - \varepsilon_4$
x_4	ε_4	x_{16}	$\varepsilon_3 - \varepsilon_4$
x_5	$\varepsilon_1 + \varepsilon_2$	x_{17}	$\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$
x_6	$\varepsilon_1 + \varepsilon_3$	x_{18}	$\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$
x_7	$\varepsilon_1 + \varepsilon_4$	x_{19}	$\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$
x_8	$\varepsilon_2 + \varepsilon_3$	x_{20}	$\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$
x_9	$\varepsilon_2 + \varepsilon_4$	x_{21}	$\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$
x_{10}	$\varepsilon_3 + \varepsilon_4$	x_{22}	$\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$
x_{11}	$\varepsilon_1 - \varepsilon_2$	x_{23}	$\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$
x_{12}	$\varepsilon_1 - \varepsilon_3$	x_{24}	$\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$

Таблица 8.2.

$$X_1 = -x_2\frac{\partial}{\partial x_3} + x_5\frac{\partial}{\partial x_6} - x_9\frac{\partial}{\partial x_{10}} - x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{11}} + x_{15}\frac{\partial}{\partial x_{16}} - x_{19}\frac{\partial}{\partial x_{21}} + x_{20}\frac{\partial}{\partial x_{22}},$$

$$X_2 = x_3\frac{\partial}{\partial x_4} + x_6\frac{\partial}{\partial x_7} + x_8\frac{\partial}{\partial x_9} + x_{13}\frac{\partial}{\partial x_{12}} - x_{15}\frac{\partial}{\partial x_{14}} + x_{18}\frac{\partial}{\partial x_{19}} + x_{22}\frac{\partial}{\partial x_{23}},$$

$$X_3 = 2x_7\frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_9\frac{\partial}{\partial x_2} + 2x_{10}\frac{\partial}{\partial x_3} + x_1\frac{\partial}{\partial x_{13}} + x_2\frac{\partial}{\partial x_{15}} - x_3\frac{\partial}{\partial x_{16}} + x_{17}\frac{\partial}{\partial x_{18}} + x_{19}\frac{\partial}{\partial x_{20}} - x_{21}\frac{\partial}{\partial x_{22}} + x_{23}\frac{\partial}{\partial x_{24}},$$

$$X_4 = x_{20}\frac{\partial}{\partial x_2} - x_{22}\frac{\partial}{\partial x_3} - x_{23}\frac{\partial}{\partial x_4} + x_{18}\frac{\partial}{\partial x_8} + x_{19}\frac{\partial}{\partial x_9} + x_{21}\frac{\partial}{\partial x_{10}} + x_1\frac{\partial}{\partial x_{17}} + 2x_{13}\frac{\partial}{\partial x_{18}} + 2x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{19}} + 2x_{11}\frac{\partial}{\partial x_{21}},$$

$$Y_1 = x_2\frac{\partial}{\partial x_2} - x_3\frac{\partial}{\partial x_3} + x_5\frac{\partial}{\partial x_5} - x_6\frac{\partial}{\partial x_6} + x_9\frac{\partial}{\partial x_9} - x_{10}\frac{\partial}{\partial x_{10}} - x_{11}\frac{\partial}{\partial x_{11}} + x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{12}} + 2x_{14}\frac{\partial}{\partial x_{14}} + x_{15}\frac{\partial}{\partial x_{15}} - x_{16}\frac{\partial}{\partial x_{16}} + x_{19}\frac{\partial}{\partial x_{19}} + x_{20}\frac{\partial}{\partial x_{20}} - x_{21}\frac{\partial}{\partial x_{21}} - x_{22}\frac{\partial}{\partial x_{22}},$$

$$Y_2 = x_3\frac{\partial}{\partial x_3} - x_4\frac{\partial}{\partial x_4} + x_6\frac{\partial}{\partial x_6} - x_7\frac{\partial}{\partial x_7} + x_8\frac{\partial}{\partial x_8} - x_9\frac{\partial}{\partial x_9} - x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{12}} + x_{13}\frac{\partial}{\partial x_{13}} - x_{14}\frac{\partial}{\partial x_{14}} + x_{15}\frac{\partial}{\partial x_{15}} + 2x_{16}\frac{\partial}{\partial x_{16}} + x_{18}\frac{\partial}{\partial x_{18}} - x_{19}\frac{\partial}{\partial x_{19}} + x_{22}\frac{\partial}{\partial x_{22}} - x_{23}\frac{\partial}{\partial x_{23}},$$

$$Y_3 = 2x_4\frac{\partial}{\partial x_4} + 2x_7\frac{\partial}{\partial x_7} + 2x_9\frac{\partial}{\partial x_9} + 2x_{10}\frac{\partial}{\partial x_{10}} - 2x_{13}\frac{\partial}{\partial x_{13}} - 2x_{15}\frac{\partial}{\partial x_{15}} - 2x_{16}\frac{\partial}{\partial x_{16}} + x_{17}\frac{\partial}{\partial x_{17}} - x_{18}\frac{\partial}{\partial x_{18}} + x_{19}\frac{\partial}{\partial x_{19}} - x_{20}\frac{\partial}{\partial x_{20}} + x_{21}\frac{\partial}{\partial x_{21}} - x_{22}\frac{\partial}{\partial x_{22}} + x_{23}\frac{\partial}{\partial x_{23}} - x_{24}\frac{\partial}{\partial x_{24}},$$

$$Y_4 = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial}{\partial x_2} - x_3\frac{\partial}{\partial x_3} - x_4\frac{\partial}{\partial x_4} - 2x_8\frac{\partial}{\partial x_8} - 2x_9\frac{\partial}{\partial x_9} - 2x_{10}\frac{\partial}{\partial x_{10}} + 2x_{11}\frac{\partial}{\partial x_{11}} + 2x_{12}\frac{\partial}{\partial x_{12}} + 2x_{13}\frac{\partial}{\partial x_{13}} - x_{17}\frac{\partial}{\partial x_{17}} + x_{20}\frac{\partial}{\partial x_{20}} + x_{22}\frac{\partial}{\partial x_{22}} + x_{23}\frac{\partial}{\partial x_{23}} + 2x_{24}\frac{\partial}{\partial x_{24}}.$$

Таблица 8.3.

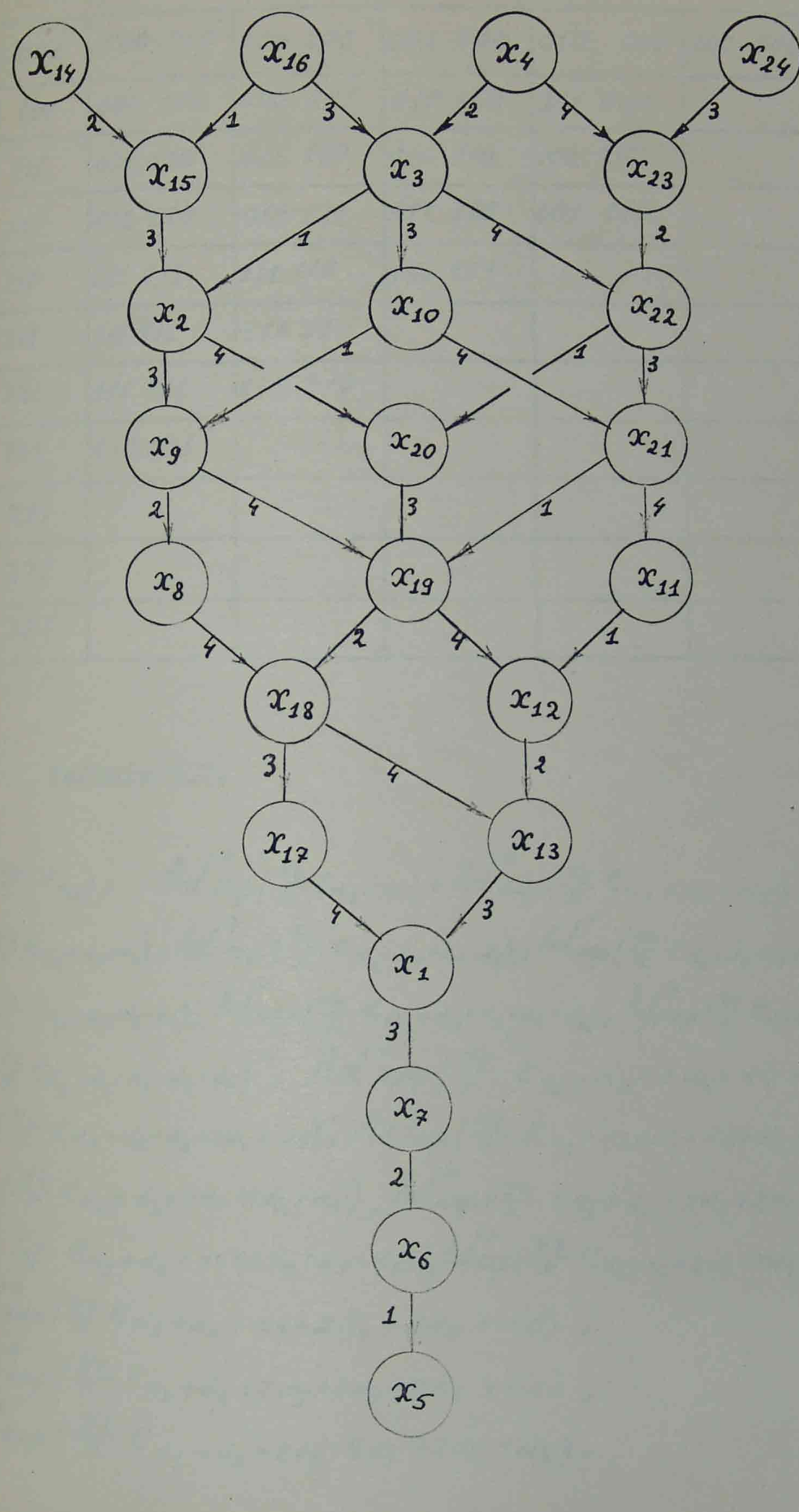

x_{14}
x_{16}
x_4
x_{24}
x_{15}
x_3
x_{23}
x_2
x_{10}
x_{22}
x_9
x_{20}
x_{21}
x_8
x_{19}
x_{11}
x_{18}
x_{12}
x_{17}
x_{13}
x_1
x_7
x_6
x_5

Таблица 9.I.

000 001	000 010	000 100	001 000	010 000	100 000
001 100	000 110	000 011	010 100	101 000	
000 111	001 110	011 100	010 110	101 100	
001 111	011 110	010 111	111 100	101 110	
011 210	011 111	111 110	101 111		
011 211	111 111	111 210			
011 221	111 211	112 210			
111 221	112 211				
112 221					
112 321					
122 321					

Таблица 9.2.

$\mathrm{Ad}^*_{\exp}\left(\frac{x_{10}}{x} e_{\alpha_2}\right)$; $\mathrm{Ad}^*_{\exp}\left(\frac{x_9}{x} e_{\alpha_2+\alpha_4}\right)$; $\mathrm{Ad}^*_{\exp}\left(\frac{x_8}{x} e_{\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5}\right)$;

$\mathrm{Ad}^*_{\exp}\left(\frac{y_8}{x} e_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}\right)$; $\mathrm{Ad}^*_{\exp}\left(\frac{x_7}{x} e_{\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6}\right)$; $\mathrm{Ad}^*_{\exp}\left(\frac{y_7}{x} e_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}\right)$;

$\mathrm{Ad}^*_{\exp}\left(\frac{z_7}{x} e_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}\right)$; $\mathrm{Ad}^*_{\exp}\left(\frac{x_6}{x} e_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6}\right)$; $\mathrm{Ad}^*_{\exp}\left(\frac{y_6}{x} e_{\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5}\right)$;

$\mathrm{Ad}^*_{\exp}\left(\frac{z_6}{x} e_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}\right)$, $\mathrm{Ad}^*_{\exp}\left(\frac{y_5}{x} e_{\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6}\right)$;

$\mathrm{Ad}^*_{\exp}\left(\frac{z_5}{x} e_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5}\right)$; $\mathrm{Ad}^*_{\exp}\left(\frac{u_5}{x} e_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6}\right)$;

$\mathrm{Ad}^*_{\exp}\left(\frac{y_4}{x} e_{\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6}\right)$; $\mathrm{Ad}^*_{\exp}\left(\frac{z_4}{x} e_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5}\right)$;

$\mathrm{Ad}^*_{\exp}\left(\frac{u_4}{x} e_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6}\right)$; $\mathrm{Ad}^*_{\exp}\left(\frac{y_3}{x} e_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6}\right)$;

$\mathrm{Ad}^*_{\exp}\left(\frac{z_3}{x} e_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6}\right)$;

$\mathrm{Ad}^*_{\exp}\left(\frac{y_2}{x} e_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6}\right)$;

$\mathrm{Ad}^*_{\exp}\left(\frac{y_1}{x} e_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6}\right)$.

Таблица 9.3.

$$x v_5' = v_5 x - y_6 x_{10} + y_7 x_9 - x_8 y_8 ;$$

$$x w_4' = w_4 x - z_5 x_{10} + z_6 x_9 - z_7 x_8 ;$$

$$x y_3' = y_3 x - y_4 x_{10} + x_5 x_9 - x_7 z_7 ;$$

$$x w_3' = w_3 x - v_4 x_{10} + z_6 y_8 - y_7 z_7 ;$$

$$x x_2' = x_2 x - z_3 x_{10} + x_5 y_8 - x_6 z_7 ;$$

$$x z_1' = -\xi z_1 x - v_2 x_{10} + x_5 y_7 - x_6 z_6 ;$$

$$x u_1' = \xi u_1 x - v_4 x_8 + z_5 y_7 - y_6 z_6 ;$$

$$x w_2' = w_2 x - v_4 x_9 + z_5 y_8 - y_6 z_7 ;$$

$$x v_1' = \xi v_1 x - z_3 x_9 + y_4 y_8 - y_5 z_7 ;$$

$$x x_4' = x_4 x - y_5 x_{10} + x_6 x_9 - x_7 y_8 ;$$

$$x y_2' = y_2 x - v_3 x_{10} + x_5 x_8 - z_6 x_7 ;$$

$$x x_3' = x_3 x - z_4 x_{10} + x_6 x_8 - x_7 y_7 ;$$

$$x z_2' = z_2 x - z_4 x_9 + y_5 x_8 - y_6 x_7 ;$$

$$x x_1' = \xi x_1 x - z_4 y_8 + y_5 y_7 - x_6 y_6 ;$$

$$x y_1' = \xi y_1 x - v_3 x_9 + y_4 x_8 - z_5 x_7 ;$$

$$[e_{\alpha_3}, e_{\alpha_4}] = \xi e_{\alpha_3+\alpha_4} .$$

Таблица 9.4.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
w'_4	0	0	0	0	0	v'_5
x'_4	v'_5	0	0	0	0	0
y'_3	w'_4	0	0	0	0	x'_4
w'_3	0	0	0	0	w'_4	0
x'_2	w'_3	0	0	0	y'_3	0
v'_5	0	0	0	0	0	0
z'_1	0	0	x'_2	0	y'_2	0
y'_2	0	0	y'_3	0	0	x'_3
x'_3	0	0	x'_4	0	0	0
u'_1	0	0	w'_2	0	0	0
w'_2	0	0	0	w'_3	0	0
z'_2	0	0	0	x'_3	0	0
x'_1	0	0	0	0	z'_2	0
v'_1	w'_2	0	0	x'_2	0	0
y'_1	0	0	0	y'_2	0	z'_2

Таблица IO.I.

100 0 000	010 0 000	001 0 000	000 1 000	000 0 100	000 0 010	000 0 001
101 0 000	010 1 000	000 0 110	000 1 100	001 1 000	000 0 011	
101 1 000	010 1 100	011 1 000	001 1 100	000 1 110	000 0 111	
101 1 100	111 1 000	010 1 110	011 1 100	001 1 110	000 1 111	
101 1 110	111 1 100	011 1 110	011 2 100	001 1 111	010 1 111	
111 2 100	111 1 110	011 2 110	101 1 111	011 1 111		
112 2 100	111 2 110	011 2 210	111 1 111	011 2 111		
112 2 110	111 2 210	111 2 111	011 2 211			
112 2 210	111 2 211	112 2 111	011 2 221			
112 3 210	111 2 221	112 2 211				
122 3 210	112 3 211	112 2 221				
122 3 211	112 3 221					
112 3 321	122 3 221					
122 3 321						
122 4 321						
123 4 321						
223 4 321						

Таблица I0.2.

$$u_9' = u_9 x - y_{10} x_{16} + z_{11} x_{15} - y_{12} x_{14} + y_{13} x_{13};$$

$$v_7' = v_7 x - z_8 x_{16} + z_9 x_{15} - y_{11} y_{13} + y_{12} x_{12};$$

$$z_6' = z_6 x - y_7 x_{16} + x_8 x_{15} - x_{10} y_{13} + x_{11} y_{12};$$

$$v_5' = v_5 x - u_6 x_{16} + z_9 x_{13} - z_{10} y_{12} + z_{11} y_{11};$$

$$v_4' = v_4 x - x_5 x_{16} + x_8 x_{13} - x_9 y_{12} + x_{10} z_{11};$$

$$u_3' = u_3 x - x_4 x_{16} + x_7 x_{13} - x_9 y_{11} + z_{10} x_{10};$$

$$w_5' = w_5 x - u_7 x_{15} + z_8 x_{14} - y_9 y_{13} + y_{10} x_{12};$$

$$z_4' = z_4 x - y_6 x_{15} + y_7 x_{14} - y_8 y_{13} + y_{10} x_{11};$$

$$y_3' = y_3 x - y_5 x_{15} + x_6 x_{14} - y_8 x_{12} + y_9 x_{11};$$

$$w_3' = w_3 x - u_6 x_{14} + u_7 x_{13} - y_9 z_{11} + z_{10} y_{10};$$

$$z_2' = z_2 x - x_5 x_{14} + y_6 x_{13} - y_8 z_{11} + x_9 y_{10};$$

$$w_4' = w_4 x - u_6 x_{15} + z_8 x_{13} - y_9 y_{12} + y_{10} y_{11};$$

$$v_3' = v_3 x - x_5 x_{15} + y_7 x_{13} - y_8 y_{12} + y_{10} x_{10};$$

$$t_1' = \Theta\, t_1 x - u_6 x_{12} + u_7 y_{11} - z_8 z_{10} + z_9 y_9;$$

$$w_2' = w_2 x - u_6 y_{13} + u_7 y_{12} - z_8 z_{11} + z_9 y_{10};$$

$$u_8' = u_8 x - y_9 x_{16} + z_{10} x_{15} - y_{11} x_{14} + x_{12} x_{13};$$

$$u_4' = u_4 x - y_5 x_{16} + x_7 x_{14} - x_9 x_{12} + z_{10} x_{11};$$

$$z_7' = z_7 x - y_8 x_{16} + x_9 x_{15} - x_{10} x_{14} + x_{11} x_{13};$$

$$v_6' = v_6 x - u_7 x_{16} + z_9 x_{14} - z_{10} y_{13} + z_{11} x_{12};$$

$$u_5' = u_5 x - x_6 x_{16} + x_7 x_{15} - x_{10} x_{12} + y_{11} x_{11};$$

$$z_5' = z_5 x - y_6 x_{16} + x_8 x_{14} - x_9 y_{13} + z_{11} x_{11};$$

$$z_3' = z_3 x - y_4 x_{16} + x_7 y_{13} - x_8 x_{12} + z_9 x_{11};$$

$$v_2' = v_2 x - x_3 x_{16} + x_7 y_{12} - x_8 y_{11} + z_9 x_{10};$$

$$z_1' = \theta z_1 x - x_2 x_{16} + x_7 z_{11} - x_8 z_{10} + z_9 x_9;$$

$$u_2' = u_2 x - x_4 x_{15} + x_6 x_{13} - y_8 y_{11} + y_9 x_{10};$$

$$u_1' = -\theta u_1 x - x_3 x_{15} + x_6 y_{12} - y_7 y_{11} + z_8 x_{10};$$

$$v_1' = \theta v_1 x - x_4 x_{14} + y_5 x_{13} - y_8 z_{10} + y_9 x_9;$$

$$y_2' = y_2 x - y_4 x_{15} + x_6 y_{13} - y_7 x_{12} + z_8 x_{11};$$

$$w_1' = -\theta w_1 x - x_5 y_{13} + y_6 y_{12} - y_7 z_{11} + x_8 y_{10};$$

$$y_1' = \theta y_1 x - y_4 x_{14} + y_5 y_{13} - y_6 x_{12} + u_7 x_{11};$$

$$[e_{\alpha_2}, e_{\alpha_4}] = \theta e_{\alpha_2+\alpha_4}, \quad \theta = \pm 1.$$

Таблица I0.3.

	u'_8	z'_7	v'_7	z'_6	v'_6	u'_5	z'_5	v'_5	v'_4	u'_4
X_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_2	0	0	0	0	0	0	0	v'_6	z'_5	0
X_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_4	0	0	0	0	v'_7	0	z'_6	0	0	u'_5
X_5	0	0	u'_8	z'_7	0	0	0	0	0	0
X_6	u'_9	0	0	0	0	z'_6	0	0	0	z'_5
X_7	0	u'_8	0	v'_7	0	0	v'_6	0	v'_5	0

	u'_3	z'_3	v'_2	z'_1	u'_9	w'_4	v'_3	w'_5	z'_4	y'_3
X_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_2	u'_4	0	z'_3	0	0	w'_5	z'_4	0	0	0
X_3	0	0	0	0	0	v'_5	v'_4	v'_6	z'_5	u'_4
X_4	0	0	0	v'_2	0	0	0	0	0	0
X_5	0	u'_4	u'_3	0	0	0	0	0	0	0
X_6	v'_4	0	0	0	0	0	0	0	0	z'_4
X_7	0	0	0	0	0	0	w'_4	0	w'_5	0

	u'_2	u'_1	w'_3	z'_2	v'_1	y'_2	w'_2	w'_1	y'_1	t'_1
X_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_2	y'_3	y'_2	0	0	0	0	0	0	0	0
X_3	u'_3	v'_2	0	0	0	z'_3	0	0	0	0
X_4	0	0	w'_4	v'_3	u'_2	0	0	0	y'_2	0
X_5	0	u'_2	0	0	0	y'_3	w'_3	z'_2	0	0
X_6	v'_3	0	0	0	z'_2	0	0	0	0	w'_2
X_7	0	0	0	w'_3	0	0	0	w'_2	0	0

Таблица II.I.

$$(1,2)' = \Theta(1,2)(29,1) - (2,1)(28,1) + (11,1)(19,3) - (12,1)(18,2) + (13,1)(17,2) - (14,1)(16,2) + (15,2)(15,1);$$

$$(1,3)' = -\Theta(1,3)(29,1) - (3,1)(27,1) + (10,1)(20,2) - (11,2)(19,2) + (12,2)(18,1) - (13,2)(17,1) + (14,3)(16,1);$$

$$(1,4)' = \Theta(1,4)(29,1) - (4,1)(26,1) + (9,1)(21,2) - (10,2)(20,1) + (11,3)(19,1) - (14,2)(16,2) + (15,3)(15,1);$$

$$(1,5)' = -\Theta(1,5)(29,1) - (5,1)(25,1) + (8,1)(22,1) - (9,2)(21,1) + (12,3)(18,1) - (13,2)(17,2) + (14,1)(16,3);$$

$$(1,6)' = \Theta(1,6)(29,1) - (6,1)(24,1) + (7,2)(23,1) - (10,3)(20,1) + (11,3)(19,2) - (12,2)(18,2) + (13,1)(17,3);$$

$$(1,7)' = -\Theta(1,7)(29,1) - (7,1)(23,2) + (8,2)(22,1) - (9,2)(21,2) + (10,2)(20,2) - (11,2)(19,3) + (12,1)(18,3);$$

$$(1,8)' = \Theta(1,8)(29,1) - (6,2)(24,1) + (7,2)(23,2) - (8,2)(22,2) + (13,3)(17,1) - (14,3)(16,2) + (15,3)(15,2);$$

$$(2,2)' = (2,2)(29,1) - (3,1)(28,1) + (11,1)(20,2) - (12,1)(19,2) + (13,1)(18,1) - (14,1)(17,1) + (15,2)(16,1);$$

$$(2,3)' = (2,3)(29,1) - (4,1)(27,1) + (10,1)(21,2) - (11,2)(20,1) + (12,2)(19,1) - (14,2)(17,1) + (15,3)(16,1);$$

$$(2,4)' = (2,4)(29,1) - (5,1)(26,1) + (9,1)(22,1) - (10,2)(21,1) + (12,3)(19,1) - (14,2)(17,2) + (15,1)(16,3);$$

$$(2,5)' = (2,5)(29,1) - (6,1)(25,1) + (8,1)(23,1) - (10,3)(21,1) + (12,3)(19,2) - (13,2)(18,2) + (14,1)(17,3);$$

$$(2,6)' = (2,6)(29,1) - (6,2)(25,1) + (8,1)(23,2) - (9,2)(22,2) + (13,3)(18,1) - (14,3)(17,2) + (15,2)(16,3);$$

$$(2,7)' = (2,7)(29,1) - (7,1)(24,1) + (8,2)(23,1) - (10,3)(21,2) + (11,3)(20,2) - (12,2)(19,3) + (13,1)(18,3);$$

$$(3,2)' = (3,2)(29,1) - (4,1)(28,1) + (11,1)(21,2) - (12,1)(20,1) + (13,1)(19,1) - (15,1)(17,1) + (16,2)(16,1);$$

$$(3,3)' = (3,3)(29,1) - (5,1)(27,1) + (10,1)(22,1) - (11,2)(21,1) + (13,2)(19,1) - (14,2)(18,1) + (16,3)(16,1);$$

$$(3,4)' = (3,4)(29,1) - (6,1)(26,1) + (9,1)(23,1) - (11,3)(21,1) + (12,3)(20,1) - (14,2)(18,2) + (15,1)(17,3);$$

$$(3,5)' = (3,5)(29,1) - (6,2)(26,1) + (9,1)(23,2) - (10,2)(22,2) + (13,3)(19,1) - (15,3)(17,2) + (16,3)(16,2);$$
$$(3,6)' = (3,6)(29,1) - (7,1)(25,1) + (9,2)(23,1) - (10,3)(22,1) + (12,3)(20,2) - (13,2)(19,3) + (14,1)(18,3);$$
$$(3,7)' = (3,7)(29,1) - (7,2)(25,1) + (8,1)(24,1) - (10,3)(22,2) + (13,3)(19,2) - (14,3)(18,2) + (15,2)(17,3);$$
$$(4,2)' = (4,2)(29,1) - (5,1)(28,1) + (11,1)(22,1) - (12,1)(21,1) + (14,1)(19,1) - (15,1)(18,1) + (16,1)(17,2);$$
$$(4,3)' = (4,3)(29,1) - (6,1)(27,1) + (10,1)(23,1) - (12,2)(21,1) + (13,2)(20,1) - (14,2)(19,2) + (16,1)(17,3);$$
$$(4,4)' = (4,4)(29,1) - (6,2)(27,1) + (10,1)(23,2) - (11,2)(22,2) + (14,3)(19,1) - (15,3)(18,1) + (16,3)(17,1);$$
$$(4,5)' = (4,5)(29,1) - (7,1)(26,1) + (10,2)(23,1) - (11,3)(22,1) + (12,3)(21,2) - (14,2)(19,3) + (15,1)(18,3);$$
$$(4,6)' = (4,6)(29,1) - (7,2)(26,1) + (9,1)(24,1) - (11,3)(22,2) + (13,3)(20,1) - (15,3)(18,2) + (16,2)(17,3);$$
$$(4,7)' = (4,7)(29,1) - (8,2)(25,1) + (9,2)(24,1) - (10,3)(23,2) + (13,3)(20,2) - (14,3)(19,3) + (15,2)(18,3);$$
$$(5,2)' = (5,2)(29,1) - (6,1)(28,1) + (11,1)(23,1) - (13,1)(21,1) + (14,1)(20,1) - (15,1)(19,2) + (16,1)(18,2);$$
$$(5,3)' = (5,3)(29,1) - (6,2)(28,1) + (11,1)(23,2) - (12,1)(22,2) + (15,2)(19,1) - (16,2)(18,1) + (17,2)(17,1);$$
$$(5,4)' = (5,4)(29,1) - (7,1)(27,1) + (11,2)(23,1) - (12,2)(22,1) + (13,2)(21,2) - (14,2)(20,2) + (16,1)(18,3);$$
$$(5,5)' = (5,5)(29,1) - (7,2)(27,1) + (10,1)(24,1) - (12,2)(22,2) + (14,3)(20,1) - (15,3)(19,2) + (17,3)(17,1);$$
$$(5,6)' = (5,6)(29,1) - (8,1)(26,1) + (9,1)(25,1) - (12,3)(22,2) + (13,3)(21,1) - (16,3)(18,2) + (17,3)(17,2);$$
$$(5,7)' = (5,7)(29,1) - (8,2)(26,1) + (10,2)(24,1) - (11,3)(23,2) + (13,3)(21,2) - (15,3)(19,3) + (16,2)(18,3);$$
$$(6,3)' = (6,3)(29,1) - (7,1)(28,1) + (12,1)(23,1) - (13,1)(22,1) + (14,1)(21,2) - (15,1)(20,2) + (16,1)(19,3);$$

$$(6,4)' = (6,4)(29,1) - (7,2)(28,1) + (11,1)(24,1) - (13,1)(22,1) + (15,2)(20,1) - (16,2)(19,2) + (17,1)(18,2);$$

$$(6,5)' = (6,5)(29,1) - (8,1)(27,1) + (10,1)(25,1) - (13,2)(22,2) + (14,3)(21,1) - (16,3)(19,2) + (17,3)(18,1);$$

$$(6,6)' = (6,6)(29,1) - (8,2)(27,1) + (11,2)(24,1) - (12,2)(23,2) + (14,3)(21,2) - (15,3)(20,2) + (17,1)(18,3);$$

$$(6,7)' = (6,7)(29,1) - (9,2)(26,1) + (10,2)(25,1) - (12,3)(23,2) + (13,3)(22,1) - (16,3)(19,3) + (17,2)(18,3);$$

$$(7,3)' = (7,3)(29,1) - (8,1)(28,1) + (11,1)(25,1) - (14,1)(22,2) + (15,2)(21,1) - (17,2)(19,2) + (18,2)(18,1);$$

$$(7,4)' = (7,4)(29,1) - (8,2)(28,1) + (12,1)(24,1) - (13,1)(23,2) + (15,2)(21,2) - (16,2)(20,2) + (17,1)(19,3);$$

$$(7,5)' = (7,5)(29,1) - (9,1)(27,1) + (10,1)(26,1) - (14,2)(22,2) + (15,3)(21,1) - (16,3)(20,1) + (17,3)(19,1);$$

$$(7,6)' = (7,6)(29,1) - (9,2)(27,1) + (11,2)(25,1) - (13,2)(23,2) + (14,3)(22,1) - (16,3)(20,2) + (18,3)(18,1);$$

$$(7,7)' = (7,7)(29,1) - (10,3)(26,1) + (11,3)(25,1) - (12,3)(24,1) + (13,3)(23,1) - (17,3)(19,3) + (18,3)(18,2);$$

$$(8,3)' = (8,3)(29,1) - (9,1)(28,1) + (11,1)(26,1) - (15,1)(22,2) + (16,2)(21,1) - (17,2)(20,1) + (18,2)(19,1);$$

$$(8,4)' = (8,4)(29,1) - (9,2)(28,1) + (12,1)(25,1) - (14,1)(23,2) + (15,2)(22,1) - (17,2)(20,2) + (18,1)(19,3);$$

$$(8,5)' = (8,5)(29,1) - (10,2)(27,1) + (11,2)(26,1) - (14,2)(23,2) + (15,3)(22,1) - (16,3)(21,2) + (18,3)(19,1);$$

$$(8,6)' = (8,6)(29,1) - (10,3)(27,1) + (12,2)(25,1) - (13,2)(24,1) + (14,3)(23,1) - (17,3)(20,2) + (18,3)(19,2);$$

$$(9,3)' = (9,3)(29,1) - (10,1)(28,1) + (11,1)(27,1) - (16,1)(22,2) + (17,1)(21,1) - (18,1)(20,1) + (19,2)(19,1);$$

$$(9,4)' = (9,4)(29,1) - (10,2)(28,1) + (12,1)(26,1) - (15,1)(23,2) + (16,2)(22,1) - (17,2)(21,2) + (19,3)(19,1);$$

$$(9,5)' = (9,5)(29,1) - (10,3)(28,1) + (13,1)(25,1) - (14,1)(24,1) + (15,2)(23,1) - (18,2)(20,2) + (19,3)(19,2);$$

$$(9,6)' = (9,6)(29,1) - (11,3)(27,1) + (12,2)(26,1) - (14,2)(24,1) + (15,3)(23,1) - (17,3)(21,2) + (18,3)(20,1);$$

$$(10,4)' = (10,4)(29,1) - (11,2)(28,1) + (12,1)(27,1) - (16,1)(23,2) + (17,1)(22,1) - (18,1)(21,2) + (19,1)(20,2);$$

$$(10,5)' = (10,5)(29,1) - (11,3)(28,1) + (13,1)(26,1) - (15,1)(24,1) + (16,2)(23,1) - (18,2)(21,2) + (19,3)(20,1);$$

$$(10,6)' = (10,6)(29,1) - (12,3)(27,1) + (13,2)(26,1) - (14,2)(25,1) + (16,3)(23,1) - (17,3)(22,1) + (18,3)(21,1);$$

$$(11,4)' = (11,4)(29,1) - (12,2)(28,1) + (13,1)(27,1) - (16,1)(24,1) + (17,1)(23,1) - (19,2)(21,2) + (20,2)(20,1);$$

$$(11,5)' = (11,5)(29,1) - (12,3)(28,1) + (14,1)(26,1) - (15,1)(25,1) + (17,2)(23,1) - (18,2)(22,1) + (19,3)(21,1);$$

$$(11,6)' = (11,6)(29,1) - (13,3)(27,1) + (14,3)(26,1) - (15,3)(25,1) + (16,3)(24,1) - (17,3)(23,2) + (18,3)(22,2);$$

$$(12,4)' = (12,4)(29,1) - (13,2)(28,1) + (14,1)(27,1) - (16,1)(25,1) + (18,1)(23,1) - (19,2)(22,1) + (20,2)(21,1);$$

$$(12,5)' = (12,5)(29,1) - (13,3)(28,1) + (15,2)(26,1) - (16,2)(25,1) + (17,2)(24,1) - (18,2)(23,2) + (19,3)(22,2);$$

$$(13,4)' = (13,4)(29,1) - (14,3)(28,1) + (15,2)(27,1) - (17,1)(25,1) + (18,1)(24,1) - (19,2)(23,2) + (20,2)(22,2);$$

$$(13,5)' = (13,5)(29,1) - (14,2)(28,1) + (15,1)(27,1) - (16,1)(26,1) + (19,1)(23,1) - (20,1)(22,1) + (21,2)(21,2);$$

$$(14,4)' = (14,4)(29,1) - (15,3)(28,1) + (16,2)(27,1) - (17,1)(26,1) + (19,1)(24,1) - (20,1)(23,2) + (21,2)(22,2);$$

$$(15,4)' = (15,4)(29,1) - (16,3)(28,1) + (17,2)(27,1) - (18,1)(26,1) + (19,1)(25,1) - (21,1)(23,2) + (22,2)(22,1);$$

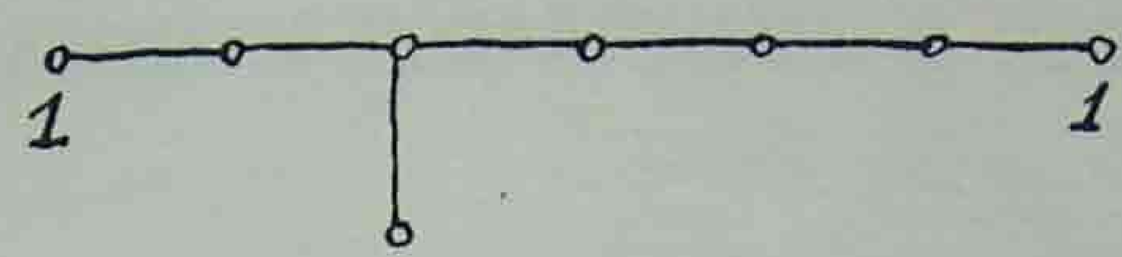
$$(16,4)' = (16,4)(29,1) - (17,3)(28,1) + (18,2)(27,1) - (19,2)(26,1) + (20,1)(25,1) - (21,1)(24,1) + (22,2)(23,1);$$

$$(17,4)' = (17,4)(29,1) - (18,3)(28,1) + (19,3)(27,1) - (20,2)(26,1) + (21,2)(25,1) - (22,1)(24,1) + (23,2)(23,1);$$

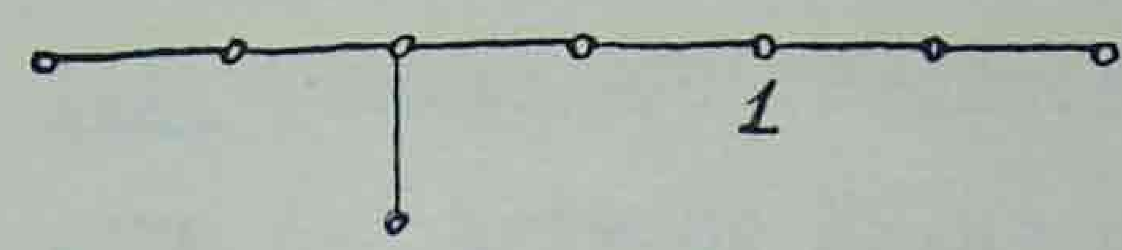
$$[e_{r_2}, e_{r_3}] = \ominus e_{r_2+r_3}.$$

Таблица II.2.

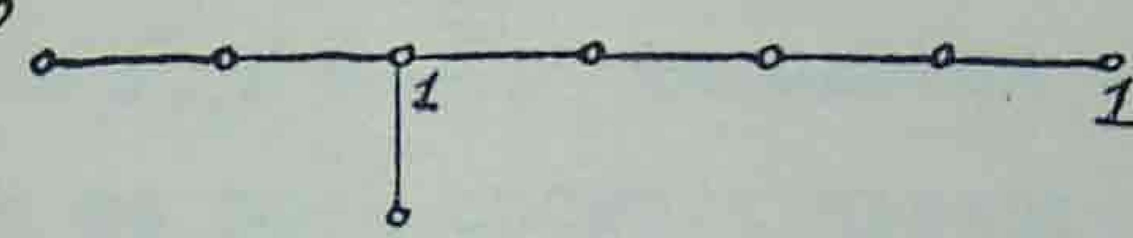
1) $\deg F_1 = 2$,



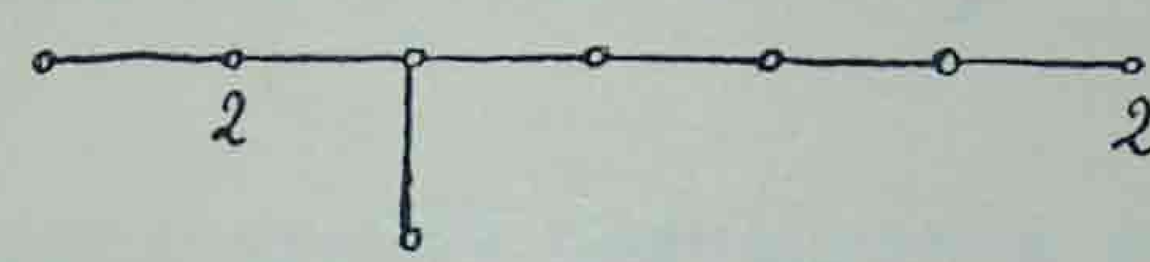
2) $\deg F_2 = 4$,



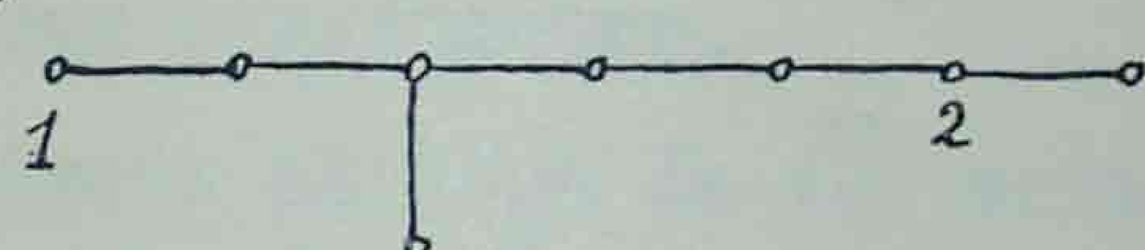
3) $\deg F_3 = 8$,



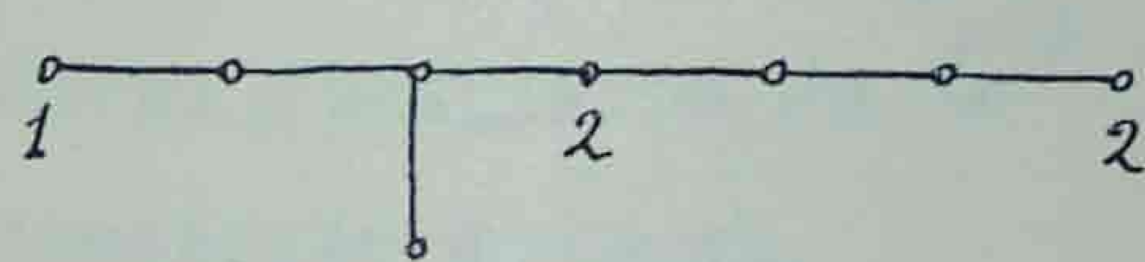
4) $\deg F_4 = 12$,



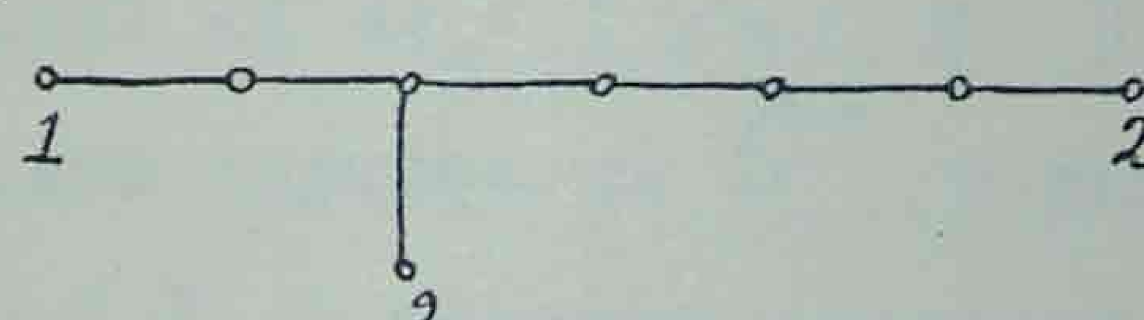
5) $\deg F_5 = 8$,



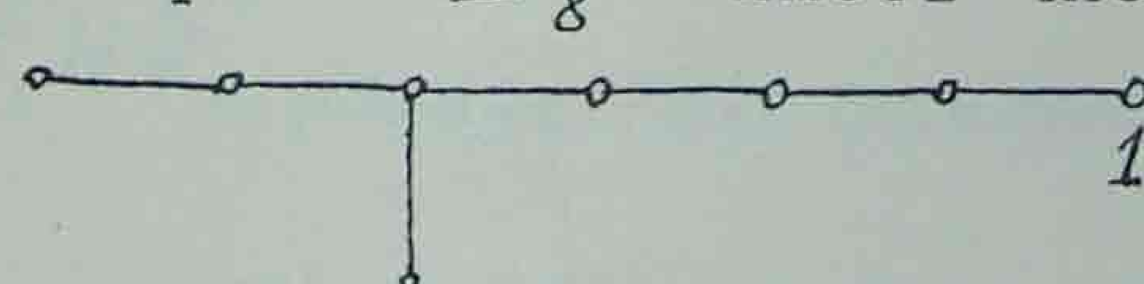
6) $\deg F_6 = 16$,



7) $\deg F_7 = 12$,



8) Минимальный корень E_8 имеет числовые отметки



ГЛАВА III

ПОСТРОЕНИЕ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА БОРЕЛЕВСКИХ ПОДАЛГЕБРАХ В ПРОСТЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

§I. Полная интегрируемость в случаях BA_n и BC_n.

Определение I.I. Скажем, что семейство функций $\mathcal{F}$ на пространстве L^*, где L алгебра Ли, является полным инволютивным семейством функций, если

I. Любые две функции $f, g \in \mathcal{F}$ находятся в инволюции относительно формы Кириллова на всех орбитах представления $Ad^*(L)$.

2. Пусть количество функций семейства $\mathcal{F}$ равно N, тогда

$$N = \operatorname{codim} O + \frac{1}{2} \dim O,$$

где O орбита максимальной размерности представления $Ad^*(L)$.

3. Подмножество $\{x \in L^* \mid rk\{df_1|_x, \dots, df_N|_x\} < N\}$ не содержит открытых подмножеств.

Лемма I.I. Пусть алгебра Ли G есть прямая сумма подалгебр G_1 и G_2 : $G = G_1 \oplus G_2$ (прямая сумма в смысле алгебр Ли т.е. $[G_1, G_2] = 0$). Если на G_i^* ($i = 1, 2$) существует полное инволютивное семейство функций, то на G^* также существует полное инволютивное семейство функций.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}_i$ ($i = 1, 2$) полное инволютивное семейство функций на G_i^* ($i=1, 2$), тогда функции из $\mathcal{F}_i$ ($i=1, 2$) можно поднять на G^* с помощью отображений $G^* \to G_i^*$ ($i=1, 2$), которое задается ограничением функционалов. В итоге получим два семейства функций $\mathcal{F}_1'$ и $\mathcal{F}_2'$ на G^*. Очевидно, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1' \cup \mathcal{F}_2'$ полное инволютивное семейство функций на G^*.

В настоящем параграфе мы построим полное инволютивное семейство функций для BC_n^*. Случаи BC_n и BA_n единственные когда функции, построенные методом А.А.Архангельского образуют полное инволютивное семейство функций. Случай BA_n разобран в работе А.А.Архангельского [3] .

Основной результат настоящего параграфа следующий.

Теорема I.I. Существует открытое всюду плотное подмножество $U \subset BSp(n)^*$ такое, что если функция f на $BSp(n)^*$ функционально зависит от функций $d_i(x+\lambda a)$, $i=1,\dots,n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in U$, то система уравнений $\dot{x} = \{x, df_x\}$ вполне интегрируема по Лиувиллю на орбитах общего положения представления Ad^* группы $\mathcal{B}Sp(n)$, отвечающей алгебре Ли $BSp(n)$.

Доказательство теоремы. Так как $\operatorname{codim} U = 0$, то для полной интегрируемости надо построить $\frac{1}{2} \dim U = \frac{n(n+1)}{2}$ функционально независимых функций на $BSp(n)^*$. Рассмотрим полуинварианты d_i и их сдвиги

$$(d_i)^{(k)}(x) = \frac{d^{(k)}}{d\lambda^k}\bigg|_{\lambda=0} d_i(x+\lambda a) .$$

Основной результат работы [3] следующий:

I) если f полуинвариант, отвечающий характеру χ и g такая, что $dg_x(d\chi)=0$, тогда на всех орбитах Ad^*, $\{f,g\}=0$.

2) если f и g полуинварианты т.ч. $\{f,g\} \equiv 0$, то для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\{f(x+\lambda a), g(x+\mu a)\} \equiv 0$.

В нашем случае d_i полуинварианты Ad^*, постоянные вдоль характеров, т.к. они не зависят от диагональных элементов, поэтому $\{d_i, d_j\} \equiv 0$, а тогда $\{d_i(x+\lambda a), d_j(x+\mu a)\} \equiv 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ на всех орбитах Ad^*. Из многочлена степени τ сдвигами можно получить τ функций, включая его самого, в нашем случае это дает $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\dim U$ функций на $BSp(n)^*$. Осталось показать функциональную независимость сдвигов. Матрицу Якоби будем вычислять по переменным: $x_{1,2n}$; $x_{1,2n-1}, x_{2,2n-1}$; ...

$\dots; x_{1,n+1}, \dots, x_{n,n+1}$.Ясно,что тогда матрица Якоби имеет квазитреугольный вид и

$$\det J = \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial(d_i, (d_i)^{(1)}, \dots, (d_i)^{(i-1)})}{\partial(x_{1,2n+1-i}, \dots, x_{i,2n+1-i})} .$$

Лемма I.2. Пусть $f(x)$ полиномиальная функция на векторном пространстве V и $(f)^{(i)}(x) = \left.\frac{d^{(i)}}{d\lambda^i}\right|_{\lambda=0} f(x+\lambda a)$, $a \in V$, $x \in V$.Рассмотрим полином по x и a :

$$J(x,a) = \frac{\partial(f, (f)^{(1)}, \dots, (f)^{(t)})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{t+1})} .$$

Пусть существует a_0 такое,что $J(x,a_0) \not\equiv 0$,тогда существует открытое всюду плотное подмножество U в V ,т.ч. для любого $a \in U$,$J(x,a) \not\equiv 0$ по x .

Доказательство. Пусть $J(x,a) = \sum f_I(a)\, x^I$,здесь I мультииндекс. $J(x,a_0) \equiv 0$ по x тогда и только тогда,когда для любого I имеем $f_I(a_0) = 0$,поэтому существует I_0 т.ч.$f_{I_0}(a_0) \neq 0$. Рассмотрим алгебраическое множество $\mathfrak{A}_I = \{f_I = 0\}$,тогда $\mathfrak{A}_{I_0} \neq V$ т.к. $a_0 \notin \mathfrak{A}_{I_0}$,$\mathfrak{A} = \bigcap_I \mathfrak{A}_I \subset \mathfrak{A}_{I_0}$ и,следовательно,не совпадает с V ,поэтому $V \setminus \mathfrak{A}$ непустое открытое всюду плотное подмножество в V и $J(x,a) \not\equiv 0$ по x ,если $a \in V \setminus \mathfrak{A}$.

Лемма I.3. Пусть $f(x) = \det x$ функция на пространстве всех симметрических матриц порядка n .Рассмотрим открытое всюду плотное подмножество U ,задаваемое неравенствами $d_i(a) \neq 0$, $i=1,\dots,n-1$.Тогда в пространстве симметрических матриц существует плоскость L коразмерности n т.ч. $U \cap L \neq \emptyset$ и для любого $a \in U \cap L$ имеем

$$J = \frac{\partial(f, (f)^{(1)}, \dots, (f)^{(n-1)})}{\partial(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1})} \not\equiv 0 .$$

Доказательство. В качестве плоскости L возьмем симметрические матрицы т.ч. $a_{11} = a_{21} = \dots = a_{n1} = 0$.Совершая одновременно элементарные преобразования над i строкой и $n+1-i$ столбцом, сохраняя симметричность, a приведем к виду:

$$a' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. $a = ca'd$, $c, d \in GL(n)$, $c^{\tau} = d$, τ транспонирование относительно второй диагонали. Эти же элементарные преобразования сделаем над x, $x = cx'd$, тогда $f(x+\lambda a) = \det c \det d\, f(x' + \lambda a')$, поэтому имеем

$$\frac{\partial(f, (f)^{(1)}, \ldots, (f)^{(n-1)})}{\partial(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1})} = \frac{\partial(f, (f)^{(1)}, \ldots, (f)^{(n-1)})}{\partial(x'_{11}, x'_{21}, \ldots, x'_{n1})} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial(x'_{11}, \ldots, x'_{n1})}{\partial(x_{11}, \ldots, x_{n1})} \cdot \det c \cdot \det d$$

и достаточно показать, что $\dfrac{\partial(f, (f)^{(1)}, \ldots, (f)^{(n-1)})}{\partial(x'_{11}, x'_{21}, \ldots, x'_{n1})} \neq 0$. Зафиксируем переменные по которым нет дифференцирований так:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{n-2} & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ x_{n-1} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ x_n & x_{n-1} & x_{n-2} & & \cdots & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае имеем

$$f(x' + \lambda a') = \det \begin{pmatrix} x'_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \\ x'_2 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda & 1 \\ x'_3 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ x'_{n-2} & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ x'_{n-1} & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ x'_n & x'_{n-1} & x'_{n-2} & \cdots & x'_3 & x'_2 & x'_1 \end{pmatrix}.$$

Производные вычисляем в точке, у которой $x_{n-1}=1$ и остальные $x_i=0$. Чтобы продифференцировать определитель $f(x'+\lambda a')$ по x-ам надо найти алгебраические дополнения к первому столбцу. Производные тогда есть удвоенные эти дополнения. Ясно, что дополнения с точностью до знака имеют вид:

$$A_i = \det\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & & & \\ 1 & \lambda & 1 & \ddots & & 0 & \\ & & & & 1 & \lambda & 1 \\ & 0 & & & 0 & 1 & \lambda \\ & & & & 0 & 0 & x \end{pmatrix},$$

причем i-ая строка выбрасывается. Раскладывая определитель A_k по строкам, начиная с последней, получим

$$A_k = x\,P_k(\lambda) = x\det\left.\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & \lambda & 1 & 0 & & 0 & \\ 0 & 1 & \lambda & 1 & \ddots & & \\ & & 0 & & 1 & \lambda & 1 \\ & & & & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}\right\} k .$$

Раскладывая определитель $P_k(\lambda)$ по первой строке, а затем оставшийся определитель по первому столбцу, получим рекурентное соотношение:

$$P_k(\lambda) = \lambda P_{k-1}(\lambda) - P_{k-2}(\lambda),$$

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - 1, \quad P_3(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda .$$

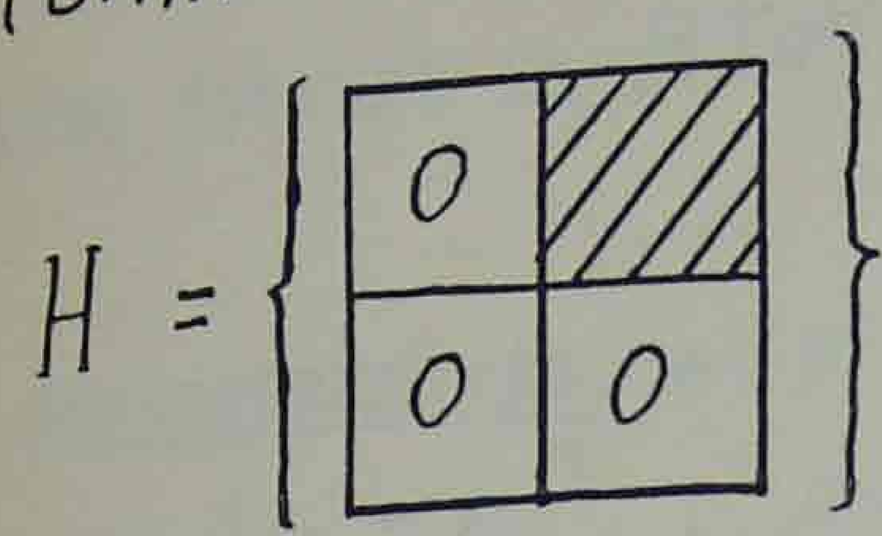
Из него по индукции вытекает, что

$$P_k(\lambda) = \lambda^k + \sum_{i=1}^{[k/2]} \lambda^{k-2i}(-1)^i a_i, \quad (a_i > 0).$$

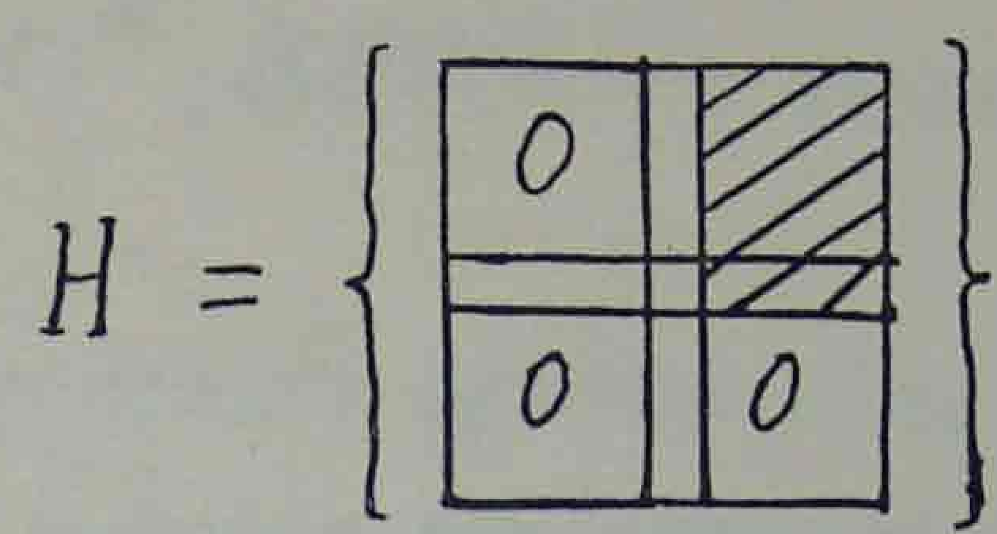
Дифференцирования по λ и x_i перестановочны, поэтому получаем, что матрица Якоби треугольная с ± 1 по диагонали. Окончательно получаем $J \neq 0$, что доказывает лемму I.3.

Теперь можно закончить <u>доказательство</u> теоремы I.I. В кольце полиномов нет делителей нуля и пересечение конечного числа открытых всюду плотных подмножеств открыто, всюду плотно, поэтому из лемм I.2 и I.3 вытекает функциональная независимость сдвигов $(d_i)^{(s)}$, что доказывает теорему I.I.

Для построения полного инволютивного семейства функций на $(BA_n)^*$ можно использовать следующую цепочку подалгебр: $BA_n \supset \supset (BA_n)' \supset H$, где



$n = 2k+1$



$n = 2k$

H максимальная абелева подалгебра в A_n (см. [22]). В итоге получаем следующую теорему.

<u>Теорема I.2.</u> Если функция f на $(BA_n)^*$ функционально зависит от полуинвариантов представления $Ad^*(\mathcal{B}A_n)$ и координат максимальной абелевой подалгебры в A_n, то система уравнений $\dot{x} = \{df_x, x\}$ вполне интегрируема по Лиувиллю на орбитах общего положения K-представления группы Ли $\mathcal{B}A_n$, отвечающей BA_n.

<u>Доказательство.</u> Инволютивность предъявленных функций вытекает из леммы 4.3 гл. I, их количество равно $\frac{1}{2}(\dim BA_n + \operatorname{ind} BA_n)$, что проверяется непосредственно. Функциональная независимость очевидна.

<u>Замечание.</u> Полное инволютивное семейство функций на $(BA_n)^*$ с помощью сдвигов полуинвариантов K-представления построено в работе А.А.Архангельского [3] .

§2. Полная интегрируемость в случае $BSO(n)$.

1. Системы интегрируемые с помощью сдвигов полуинвариантов. Имеет место следующий результат.

Теорема 2.1. С помощью сдвигов полуинвариантов представления Ad^* группы $SO(n)$ можно построить полное инволютивное семейство функций на $BSO(4)^*$, $BSO(5)^*$, $BSO(6)^*$ и только на них.

Доказательство. а) $n=4s$. Рассмотрим функции Δ_{2i}, известно, что $\Delta_{2i}=p_i^2$, p_i -пфаффиан, поэтому при сдвигах мы получим максимум i функционально независимых функций. Так как $\deg J_k=k+1$, то J_k даст $k+1$ функцию, если $k=2s$, то в итоге получим $\frac{3}{2}s(s+1)$ функций; если $s>3$, то $\frac{3}{2}s(s+1)<2s^2$. Ниже покажем, что в случаях $s=2,3$ функций также не хватает, а при $s=1$ имеем полное инволютивное семейство функций.

б) $n=4s+1$. В этом случае сдвиги дадут $\frac{3}{2}s(s+1)$ функций. При $s>1$ имеем $3s^2+3s<4s^2+2s$. При $s=1$ ($n=5$) ниже покажем, что получается полное инволютивное семейство.

в) $n=4s+2$. В этом случае сдвиги полуинвариантов дают $\frac{3}{2}s(s+1)+2s+1$ функций. При $s>3$ имеем $\frac{3}{2}s(s+1)+2s+1<2s^2+2s+1$. Случаи $s=1,2,3$ рассмотрены ниже.

г) $n=4s+3$. В этом случае сдвиги полуинвариантов дают $g=s^2+s+\frac{1}{2}(s+1)(s+2)$ функций. Так как $g<2s^2+3s+1$, то в этом случае получаем полное инволютивное семейство функций.

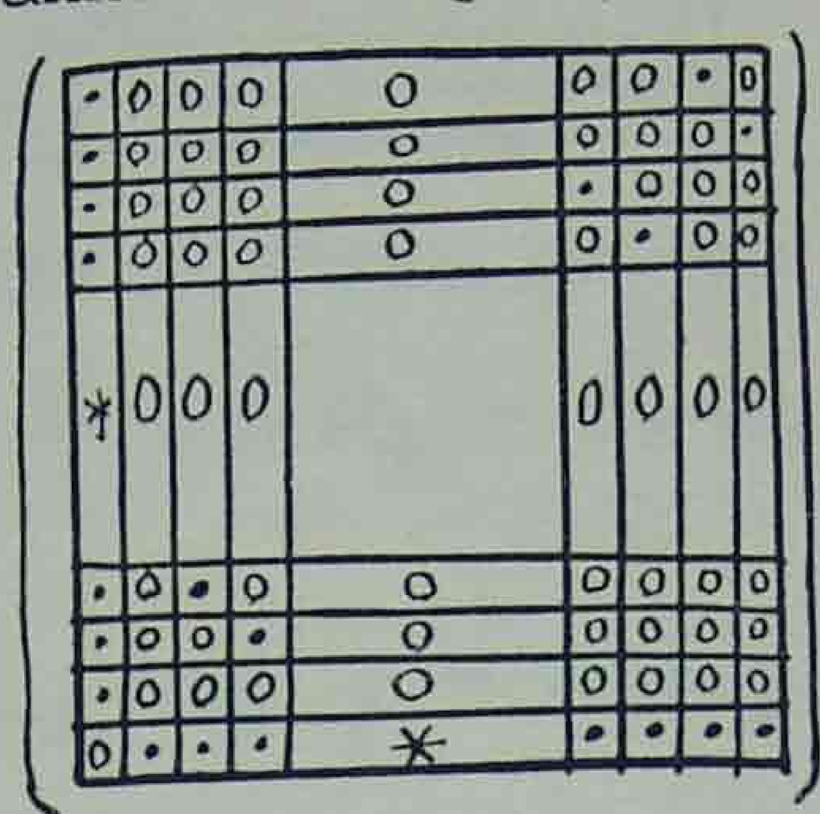
Для разбора оставшихся случаев потребуются две леммы.

Лемма 2.1. Пусть A кососимметрическая матрица нечетного порядка, p_1 пфаффиан X_1, p_2 пфаффиан X_2, где

$$X_1=\begin{vmatrix} a_1 & \\ \vdots & A \\ a_n & \\ 0 & -a_n \ \dots \ -a_1 \end{vmatrix},\quad X_2=\begin{vmatrix} -b_1 & \\ \vdots & A \\ -b_n & \\ 0 & b_n \ \dots \ b_1 \end{vmatrix},\quad X=\begin{vmatrix} a_1 & \\ \vdots & A \\ a_n & \\ 0 & b_n \ \dots \ b_1 \end{vmatrix},$$

тогда $\det X = \pm p_1 p_2$.

<u>Доказательство.</u> Докажем это равенство на всюду плотном подмножестве, где $\Delta_2 \neq 0$, $\Delta_4 \neq 0$, ... В этом случае элементарными преобразованиями матрицу X можно привести к виду:

$X' =$  .

При таких преобразованиях $\det X$, $\det X_1$, $\det X_2$ не меняются (мы элементарные преобразования совершаем одновременно над строкой и соответствующим столбцом). Достаточно проверить доказываемое равенство в этом случае: $\det X = a_n b_n \Delta_{n-1}$,

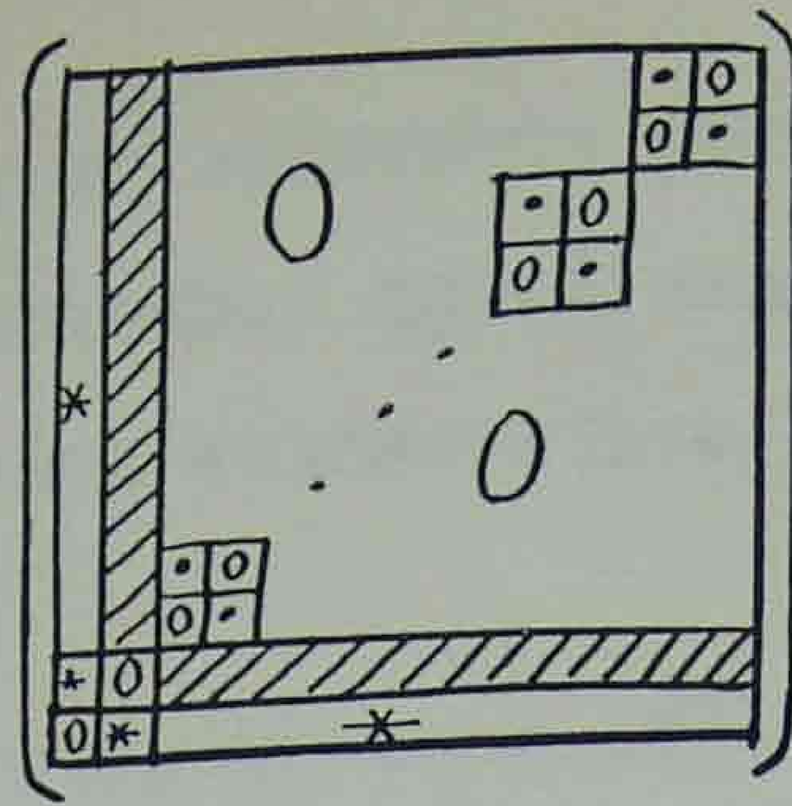
$$p_1^2 = a_n^2 \Delta_{n-1} , \quad p_2^2 = b_n^2 \Delta_{n-1} .$$

<u>Лемма 2.2.</u> Пусть A кососимметрическая матрица четного порядка n . По матрице X построим новую матрицу $\overline{X}$:

$$X = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ a_n & & & \\ a_{n+1} & b_n & \cdots & b_1 \end{pmatrix}, \quad \overline{X} = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & & & \\ \vdots & \vdots & & A & \\ a_n & -b_n & & & \\ a_{n+1} & 0 & b_n & \cdots & b_1 \\ 0 & -a_{n+1} & -a_n & \cdots & -a_1 \end{pmatrix},$$

тогда $\det X = \pm p_1 p_2$, где p_1 пфаффиан A , p_2 пфаффиан $\overline{X}$.

<u>Доказательство.</u> Проверим равенство на всюду плотном подмножестве, определенном неравенствами $\Delta_{2i} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots$. С помощью элементарных преобразований над строками и соответствующими столбцами, которые не затрагивают $1, 2$ столбцы и $n-1$, n строчки, матрица $\overline{X}$ приводится к виду:

$\overline{X}' =$  $, \quad A' = \| a_{ij} \| .$

Элементарные вычисления показывают, что $\det A = \pm a^2$,

$$\det \overline{X} = \pm [b_n + (b_1 a_2 - b_2 a_1) + (b_3 a_4 - b_4 a_3) + \ldots + (b_{n-2} a_{n-1} - b_{n-1} a_{n-2})]^2 , \quad a = \prod_{i=0}^{n/2} a_{2i+1, n-2i-1},$$

поэтому $[\det X]^2 = \det A \det \overline{X}$, что дает теорему.

Из леммы 2.I вытекает, что при $n=4s$ сдвиги J_{2s-1} дадут не $2s$ функций, а только s , поэтому число функций равно $\frac{1}{2}(3s^2 + s)$ и при $s>1$ имеем $\frac{1}{2}(3s^2+s) < 2s^2$.

Из леммы 2.2 вытекает, что при $n=4s+2$ число функций равно $s^2+s+\frac{1}{2}s(s+1)+s+1$ и при $s>1$ имеем $\frac{1}{2}(3s^2+5s+2) < 2s^2+2s+1$.

Докажем теперь полную интегрируемость в случае $BSO(6)$, пусть $X = \| x_{ij} \| \in BSO(6)$, сдвиги полуинвариантов K -представления группы $BSO(6)$ дают 5 функционально независимых функций в инволюции. Действительно, полуинварианты имеют вид:

$$J_1 = x_{12} x_{15} + x_{13} x_{14} , \quad p_1 = x_{15} ,$$

$$J_2 = -x_{15} (x_{15} x_{33} + x_{24} x_{13} - x_{14} x_{23})$$

и матрица Якоби сдвигов полуинвариантов по переменным x_{33} , x_{12} , x_{13} , x_{14} , x_{15} равна

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & x_{15} & x_{14} & x_{13} & x_{12} \\ 0 & a_{15} & a_{14} & a_{13} & a_{12} \\ x_{15} & 0 & x_{24} & -x_{23} & x_{33} \\ a_{15} & 0 & a_{24} & -a_{23} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det \Delta \neq 0 .$$

Инволютивность сдвигов полуинвариантов следует из того, что полуинварианты не зависят от элементов подалгебры Картана.

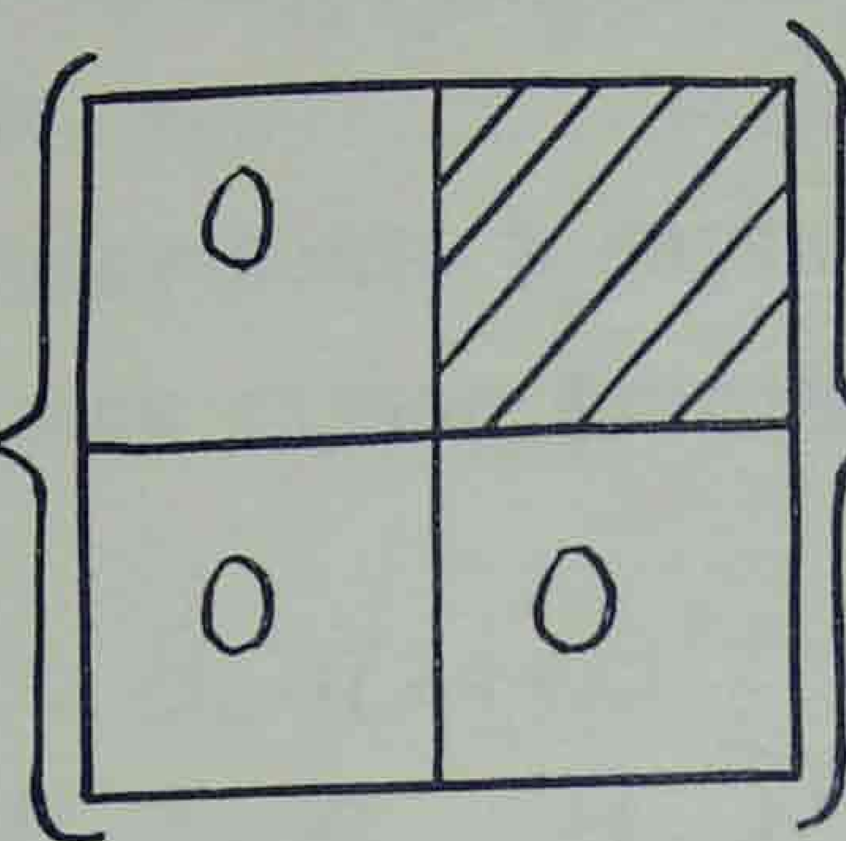
Сдвиги полуинвариантов представления Ad^* в случаях $BSO(4)$ и $BSO(5)$ дают полное инволютивное семейство функций, что проверяется элементарно.

2. Полная интегрируемость в случае $n = 2k$.

а) Пусть $k = 2s$, тогда рассмотрим следующую цепочку подалгебр:

$$BSO(n) \supset BSO(n)' \supset H$$

$H =$



$, \ \dim H = \frac{k(k-1)}{2}$

т.е. используем максимальную абелеву подалгебру (см. [ ]).

Функции, дающие полное инволютивное семейство, следующие: элементы H (инварианты H) и полуинварианты $BSO(n)$ J_1 , J_3 , ... , J_{k-1} . В итоге получаем $2s^2 = \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}$ функций. Полуинварианты не зависят от диагональных элементов, поэтому они в инволюции на всех орбитах Ad^*. Инволютивность остальных функций вытекает из §4 гл. I . Построенные функции независимы: их матрица Якоби по координатам $x_{i,k+j}$ $(i+j<k)$ и $x_{12}, x_{14}, \ldots, x_{1k}$ в точке $\sum_{i=1}^{k}(E_{i,n-i} - E_{i+1,n+1-i})$ имеет отличный от нуля детерминант.

б) Пусть $k = 2s+1$, тогда рассмотрим цепочку подалгебр $BSO(n) \supset$ $\supset BSO(n)' \supset H$, где H таже, что и в пункте а. Функции, дающие полное инволютивное семейство, следующие: полуинварианты $J_1, J_3, \ldots$ $\ldots, J_{k-2}$, их число s , инвариант J_{k-1}/Δ_{k-1} и координаты максимальной абелевой подалгебры H , их число $2s^2+s$, всего получаем $2s^2+2s+1 = \operatorname{codim} \mathcal{O} + \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}$. Аналогично предыдущему случаю эти функции в инволюции и независимы. Итог подводит теорема.

<u>Теорема 2.2.</u> Если функция f на $[BSO(2k)]^*$ функционально

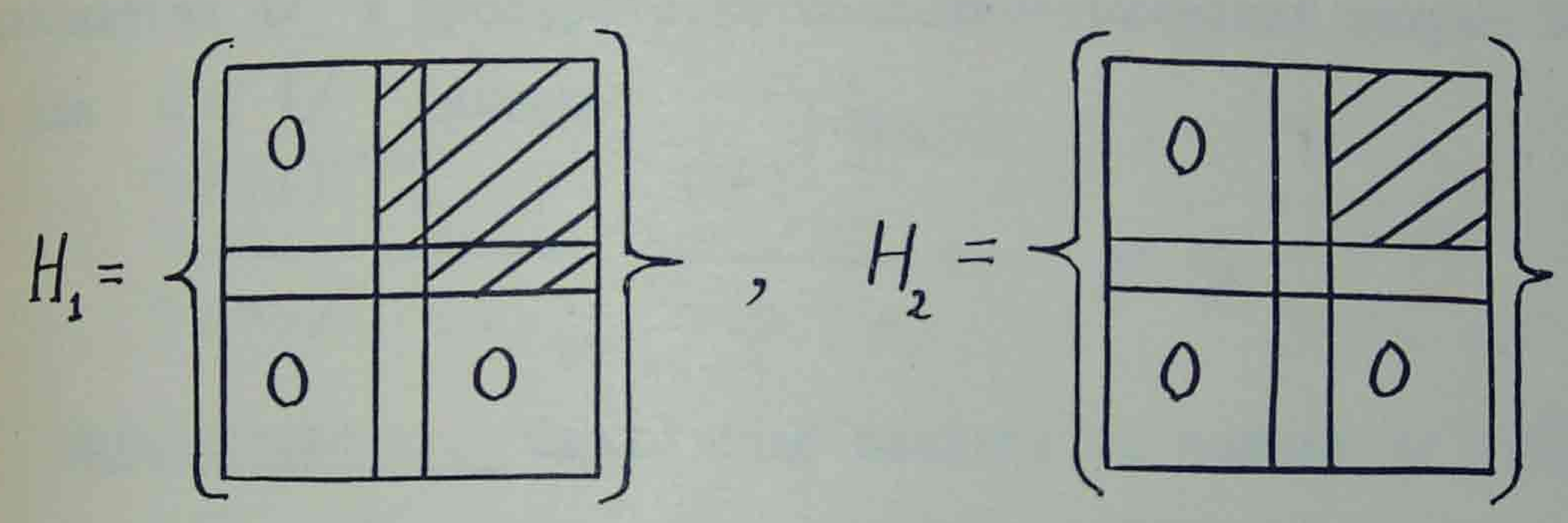
зависит от полуинвариантов Ad^* и координат максимальной абелевой подалгебры в $SO(2k)$ т.е. от функций: $y_{i,j+k}\ (i+j<k)$ и $J_1, J_3, J_5, \dots, J_{2\left[\frac{k}{2}\right]-1}$,а в случае $k=2s+1$ еще от J_{k-1} ,то система уравнений $\dot{x}=\{df_x, x\}$ вполне интегрируема по Лиувиллю на орбитах общего положения представления Ad^* группы $\mathcal{B}SO(2k)$, отвечающей алгебре Ли $BSO(2k)$.

<u>Доказательство.</u> Достаточно заметить,что в случае $BSO(4s+2)$ два семейства функций $J_{2s}/\Delta_{2s}, y_{i,j+2s+1}$ и $J_{2s}, y_{i,j+2s+1}$ функционально эквивалентны.

3. Полная интегрируемость в случае $n=2k+1$.

а) Пусть $k=2s+1$,в этом случае функции будем строить используя цепочку подалгебр:

$$BSO(2k+1) \supset BSO(2k+1)' \supset H_1 \supset H_1' \supset H_2 ;$$
$$[H_2, H_2]=0, [H_1, H_2]=0$$



В этом случае подалгебра H_2 не максимальная абелева т.к. последняя имеет размерность на I больше.Мы попадаем в условия леммы 4.5 гл.I,по этой лемме полуинварианты $BSO(2k+1)$,инварианты алгебры H_1 и их сдвиги,инварианты H_2 находятся в инволюции. Функция Δ_{k+1} является инвариантом H_1 , $J_1, J_3, \dots, J_{k-2}$ полуинварианты $BSO(2k+1)$.Проверим независимость построенных функций. Якобиан будем считать по переменным $x_{i,k+j}\ (i+j<k)$ и $x_{12}, x_{14}, \dots, x_{1,k-1}; x_{1,k+1}, \dots, x_{\frac{k+1}{2},k+1}$ тогда

$$\det J = \prod_{i=0}^{\frac{k-3}{2}} \frac{\partial J_{2i+1}}{\partial x_{1,2i+2}} \cdot \frac{\partial\left((\Delta_{k+1})^{(k-1)}, \ldots, (\Delta_{k+1})^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}\right)}{\partial(x_{1,k+1}, \ldots, x_{\frac{k+1}{2}, k+1})} .$$

То что произведение $\prod_i \frac{\partial J_{2i+1}}{\partial x_{1,2i+2}}$ не тождественный 0 проверяется также как в п.2.Укажем ковектор a ,на который надо сдвигать Δ_{k+1} чтобы получить не нулевой якобиан,тогда,аналогично случаю BSp , найдем открытое всюду плотное подмножество U для элементов которого $\det J \not\equiv 0$,в этом случае предъявленные функции образуют полное инволютивное семейство т.к. $2s^2+3s+1 = \frac{1}{2} \dim U$. Существование нужного a вытекает из леммы 2.3.

<u>Лемма 2.3.</u> На пространстве кососимметрических,относительно второй диагонали,матриц четного порядка $n = 2k$ рассмотрим функцию $f(x) = \det x$,тогда существует открытое всюду плотное подмножество U в пространстве кососимметрических матриц такое, что для $a \in U$ имеем

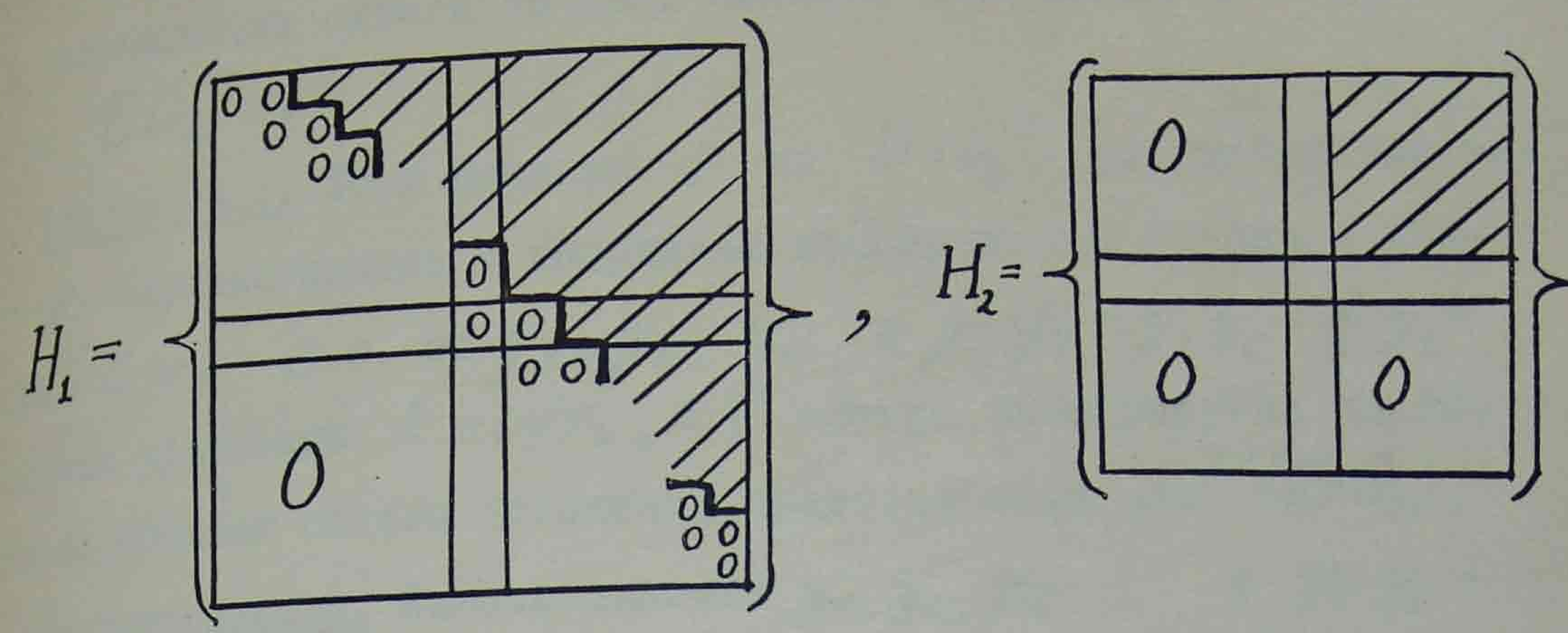
$$\frac{\partial\left((f)^{(n-2)}, \ldots, (f)^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}\right)}{\partial(x_{11}, \ldots, x_{\frac{n}{2},1})} \not\equiv 0 .$$

<u>Доказательство.</u> Сдвиг надо сделать на вектор $a = E_{1,1} + \ldots + E_{k,k} - E_{k+1,k+1} - \ldots - E_{n,n}$,а производные вычислять в точке

$$x = -E_{1,1} + E_{1,2} + E_{2,3} + \ldots + E_{k-1,k} - E_{k+1,k+2} - \ldots - E_{n-2,n-1} - E_{n-1,n} + E_{n,n} + E_{1,k+1} - E_{k,n} .$$

Легко проверяется,что матрица Якоби имеет вид: $J = \pm E_{1,n} \pm E_{2,n-1} \pm \ldots \pm E_{n,1}$ и,следовательно, $\det J \not\equiv 0$.

б) Пусть $k = 2s$,в этом случае для построения полного семейства функций в инволюции на $BSO(4s+1)^*$ надо использовать следующую цепочку подалгебр: $BSO(4s+1) \supset BSO(4s+1)' \supset H_1 \supset H_1' \supset H_2$



Представление Ad^* подалгебры H_1 имеет инвариант $g = \mho_{k+1,k+2}^{(k-1)}$. Это проверяется с помощью соответствующей системы дифференциальных уравнений. Для построения вполне интегрируемых динамических систем будем использовать полуинварианты $J_1, J_3, \ldots, J_{k-3}, J_{k-1}$, сдвиги инварианта g и координаты H_2. Фактически g зависит от координат подалгебры H_1 из предыдущего пункта, поэтому сдвиги g и элементы H_2 находятся в инволюции. Функциональная независимость доказывается также как в предыдущем пункте. Получили нужное количество функций $2s^2 + s = \frac{1}{2} \dim \mho$ $(\operatorname{codim} \mho = 0)$. Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.3. Пусть функция f функционально зависит в случае $BSO(4s+1)$ от сдвигов Δ_{2s+1} и координат $y_{i,j+2s}$ $(i+j<2s)$ абелевой подалгебры H_2, а в случае $BSO(4s+3)$ от сдвигов $\mho_{2s+2,2s+3}^{(2s)}$ и координат $y_{i,j+2s+1}$ $(i+j<2s+1)$ абелевой подалгебры H_2, то система уравнений $\dot{x} = \{df_x, x\}$ вполне интегрируема по Лиувиллю на орбитах общего положения представления Ad^* группы Ли $BSO(2k+1)$.

§3. Полная интегрируемость в случае BG_2.

Будем использовать обозначения из гл. II. Полуинварианты Ad^*

группы $\mathcal{L}G_2$ постоянны вдоль направлений характеров, поэтому они в инволюции, их сдвиги не дают полного инволютивного семейства на BG_2^*.

Теорема 3.1. Если функция f на BG_2^* функционально зависит от полуинвариантов и координат максимальной абелевой подалгебры BG_2, т.е. от y_4, y_5, y_6 и $y_5 y_3 + y_1 y_6 - \frac{1}{3} y_4^2$, то система уравнений $\dot{x} = \{df_x, x\}$ вполне интегрируема по Лиувиллю на орбитах общего положения представления $Ad^*(\mathcal{L}G_2)$.

Доказательство. Инволютивность y_4, y_5, y_6 и $y_5 y_3 + y_1 y_6 - \frac{1}{3} y_4^2$ следует из теоремы 4.1 гл.I. Независимость очевидна, поэтому построенные функции образуют полное инволютивное семейство на BG_2^*.

Теорема 3.2. Если функция f на BG_2^* функционально зависит от сдвигов функций F_i, $i=1,2,3$, где $F_1 = y_6$, $F_2 = y_5$, $F_3 = y_5 y_3 + y_1 y_6 - \frac{1}{3} y_4^2$, то система уравнений $\dot{x} = \{df_x, x\}$ вполне интегрируема по Лиувиллю на орбитах общего положения представления Ad^* группы $\mathcal{L}G_2$.

Доказательство. Подпространство $V = \bigoplus_{i=1}^{3} \mathbb{R} \cdot F_i$ в $H(BG_2^*)$ инвариантно относительно $Ad^*(\mathcal{L}G_2)$, что доказывается с помощью предложения 2.2 гл.I и явного вида операторов X_i (см. гл. II). Функциям F_i отвечают ковектора C_{i*}^{j} относительно базиса F_1, F_2, F_3 пространства V. Ковектора, отвечающие F_1, F_3 лежат в подалгебре Картана, а F_2 соответствует ковектор $e_{-\alpha_2}$ и некоторый ковектор из подалгебры Картана. От координат в подалгебре Картана и y_2 функции F_i, $i=1,2,3$ не зависят, поэтому их сдвиги в инволюции. Они образуют полное инволютивное семейство функций на BG_2^* т.к.

$$\frac{\partial(F_1, F_2, F_3, (F_3)^{(1)})}{\partial(y_6, y_5, y_3, y_1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y_3 & a_3 \\ 0 & 0 & y_5 & a_5 \\ 0 & 0 & y_6 & a_6 \end{vmatrix} =$$

$$= a_6 y_5 - \alpha_5 y_6 \not\equiv 0.$$

§4. Полная интегрируемость в случае BF_4.

Рассмотрим подпространство в пространстве аналитических функций на BF_4^*, натянутое на $x_6, f_1, f_2, f_3, f_4, x_5$ (см. гл. II). Ясно, что $Ad^*(BF_4)$ переводит это пространство в себя т.к. это верно для операторов X_i. Найдем ковектора отвечающие этому представлению. Полуинвариантам отвечают характеры, которые лежат в подалгебре Картана. Из того, что $X(e_{\alpha_1})$ переводит x_6 в x_5 следует, что один из ковекторов, соответствующий x_6 это $e_{-\alpha_1}$. Кроме того, т.к. $X(h_i)x_6 = \alpha_i x_6$, то функции x_6 отвечает ковектор из подалгебры Картана. Указанные функции не зависят от x_1 и от координат в подалгебре Картана, поэтому их сдвиги в инволюции, их количество I4 равно половине размерности орбиты общего положения представления $Ad^*(BF_4)$.

<u>Теорема 4.I.</u> Если функция f на BF_4^* функционально зависит от сдвигов полуинвариантов Ad^* и координаты $x(\alpha)$, где α такой корень, что $ht\alpha = ht\delta_0 + 1$, δ_0 минимальный корень F_4, то система уравнений $\dot{x} = \{df_x, x\}$ вполне интегрируема по Лиувиллю на орбитах общего положения представления $Ad^*(BF_4)$.

<u>Доказательство.</u> Достаточно доказать независимость сдвигов

$$(f)^{(n)}(x) = \left.\frac{d^{(n)}}{d\lambda^n}\right|_{\lambda=0} f(x+\lambda a)$$

предъявленных функций. Якобиан сдвигов считаем по переменным

$x_5, x_6, x_{11}, x_7, x_{21}, x_{10}, x_{19}, x_9, x_{22},$

$x_3, x_{16}, x_{17}, x_8, x_{15},$

тогда имеем $\mathcal{F} =$

$$=\frac{\partial(x_5, x_6, A, (A)^{(1)}, f_3, (f_3)^{(1)}, (f_3)^{(2)}, (f_3)^{(3)}, f_2, (f_2)^{(1)}, (f_2)^{(2)}, (f_2)^{(3)}, (f_2)^{(4)}, (f_2)^{(5)})}{\partial(x_5, x_6, x_{11}, x_7, x_{21}, x_{10}, x_{19}, x_9, x_{22}, x_3, x_{16}, x_{17}, x_8, x_{15})} =$$

$$=\frac{\partial(x_5, x_6, A, (A)^{(1)}, f_3, (f_3)^{(1)}, (f_3)^{(2)}, (f_3)^{(3)}, f_2, (f_2)^{(1)}, (f_2)^{(2)}, (f_2)^{(3)}, (f_2)^{(4)}, (f_2)^{(5)})}{\partial(x_5, x_6, A, (A)^{(1)}, B, (B)^{(1)}, C, (C)^{(1)}, \mathcal{D}, (\mathcal{D})^{(1)}, E, (E)^{(1)}, F, (F)^{(1)})} \cdot$$

$$\cdot\frac{\partial(x_5, x_6, A, (A)^{(1)}, B, (B)^{(1)}, C, (C)^{(1)}, \mathcal{D}, (\mathcal{D})^{(1)}, E, (E)^{(1)}, F, (F)^{(1)})}{\partial(x_5, x_6, x_{11}, x_7, x_{21}, x_{10}, x_{19}, x_9, x_{22}, x_3, x_{16}, x_{17}, x_8, x_{15})} =$$

$$= \mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2 \ .$$

Надо проверить, что $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \not\equiv 0$, для этого потребуются некоторые формальные тождества в кольце

$$\mathcal{K} = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N, (x_1)^{(1)}, \ldots, (x_N)^{(1)}, \ldots, (x_1)^{(i)}, \ldots, (x_N)^{(i)}] .$$

Определим отображение $(\,) : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ такое, что

I) $(\,)$ линейно,

2) $(f\cdot g) = (f)g + f(g)$,

3) $([x_s]) = (x_s)^{(1)}$, $([(x_s)^{(p)}]) = (x_s)^{(p+1)}$, $(p < i)$,

4) $((x_s)^{(i)}) = (x_s)^{(i+1)} = p_s(a)$, $p_s \in \mathbb{R}[u_1, \ldots, u_m]$,

5) $(const) = 0$, $(p_s(a) = const)$.

<u>Лемма 4.I.</u> Для любого $f \in \mathbb{R}[x_s, (x_s)^{(1)}, \ldots, (x_s)^{(i)}]$ имеем

$$(f) = \sum_{s=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial x_s} (x_s)^{(1)} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial (x_s)^{(i)}} (x_s)^{(i+1)} \right] .$$

<u>Доказательство.</u> Достаточно проверить это равенство на мультипликативных образующих т.к. правая и левая части являются

производными в кольце $\mathfrak{K}$. Равенство для $x_s, (x_s)^{(1)}, \ldots, (x_s)^{(i)}$ очевидно.

<u>Предложение 4.I.</u> Пусть $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]$ тогда

$$\frac{\partial (f)^s}{\partial (x_i)^{(m)}} = \frac{s}{m} \frac{\partial (f)^{s-1}}{\partial (x_i)^{(m-1)}}, \quad m \geqslant 1.$$

<u>Доказательство.</u> Пусть $f = \sum_{j=0}^{M} f_j x_i^j$, f_j от $N-1$ переменной и не зависит от x_i . Тогда имеем

$$(f)^s = \sum_j \sum_p \mathbb{C}_s^p (f_j)^p (x_i^j)^{s-p},$$

$$\frac{\partial (f)^s}{\partial (x_i)^{(m)}} = \sum_j \sum_p \mathbb{C}_s^p (f_j)^p \frac{\partial (x_i^j)^{s-p}}{\partial (x_i)^{(m)}} =$$

$$= \sum_j \sum_p \mathbb{C}_s^p (f_j)^p \frac{s-p}{m} \frac{\partial (x_i^j)^{s-p-1}}{\partial (x_i)^{(m-1)}} = A,$$

$$\frac{\partial (f)^{s-1}}{\partial (x_i)^{(m-1)}} = \sum_j \sum_p \mathbb{C}_{s-1}^p (f_j)^p \frac{\partial (x_i^j)^{s-p-1}}{\partial (x_i)^{(m-1)}} = B,$$

$$A - \frac{s}{m} B = \frac{1}{m} \sum_j \sum_p \left[\mathbb{C}_s^p (s-p) - s \mathbb{C}_{s-1}^p \right] \frac{\partial (x_i^j)^{s-p-1}}{\partial (x_i)^{(m-1)}} = 0,$$

т.к. $(s-p)\mathbb{C}_s^p - s\mathbb{C}_{s-1}^p = 0$. Итак, индукцией все сводится к случаю одной переменной т.е. достаточно проверить, что

$$\frac{\partial (x^k)^s}{\partial (x)^{(m)}} = \frac{s}{m} \frac{\partial (x^k)^{s-1}}{\partial (x)^{(m-1)}} .$$

Докажем это равенство индукцией по s . $\frac{\partial (x^k)^s}{\partial (x)^{(m)}} = \frac{\partial ((x^k)^{s-1})}{\partial (x)^{(m)}} =$

$$= \sum_{j=0}^{i} \frac{\partial^2 (x^k)^{s-1}}{\partial (x)^{(m)} \partial (x)^{(j)}} (x)^{(j+1)} + \sum_{j=0}^{i} \frac{\partial (x^k)^{s-1}}{\partial (x)^{(j)}} \frac{\partial (x)^{(j+1)}}{\partial (x)^{(m)}} =$$

$$= \frac{s-1}{m} \frac{\partial}{\partial (x)^{(m-1)}} \left[\sum_{j=0}^{i} \frac{\partial (x^k)^{s-2}}{\partial (x)^{(j)}} (x)^{(j+1)} \right] -$$

$$- \frac{s-1}{m} \sum_{j=0}^{i} \frac{\partial (x^k)^{s-2}}{\partial (x)^{(j)}} \frac{\partial (x)^{(j+1)}}{\partial (x)^{(m-1)}} + \frac{\partial (x^k)^{s-1}}{\partial (x)^{(m-1)}} =$$

$$= \frac{s-1}{m} \frac{\partial (x^k)^{s-1}}{\partial (x)^{(m-1)}} - \frac{s-1}{m} \frac{\partial (x^k)^{s-2}}{\partial (x)^{(m-2)}} + \frac{\partial (x^k)^{s-1}}{\partial (x)^{(m-1)}} =$$

$$= \frac{s-1}{m} \frac{\partial (x^k)^{s-1}}{\partial (x)^{(m-1)}} - \frac{s-1}{m} \cdot \frac{m-1}{s-1} \frac{\partial (x^k)^{s-1}}{\partial (x)^{(m-1)}} + \frac{\partial (x^k)^{s-1}}{\partial (x)^{(m-1)}} =$$

$$= \left(\frac{s-1}{m} - \frac{m-1}{m} + 1 \right) \frac{\partial (x^k)^{s-1}}{\partial (x)^{(m-1)}} = \frac{s}{m} \frac{\partial (x^k)^{s-1}}{\partial (x)^{(m-1)}} .$$

При $s=0$ имеем $\frac{\partial x^k}{\partial (x)^{(m)}} = 0$, $m \geqslant 1$.

<u>Предложение 4.2.</u> Для любого $f \in \mathbb{R}[x_s, (x_s)^{(1)}, \dots, (x_s)^{(i)}]$ имеем

$$\frac{\partial (f)^s}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial (f)^{s-1}}{\partial x_i} \right) .$$

<u>Доказательство.</u> $\frac{\partial (f)^s}{\partial x_i} = \frac{\partial ((f)^{s-1})}{\partial x_i} =$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{p=1}^{N} \left[\frac{\partial (f)^{s-1}}{\partial x_p} (x_p)^{(1)} + \ldots + \frac{\partial (f)^{s-1}}{\partial (x_p)^{(i)}} (x_p)^{(i+1)} \right] =$$

$$= \sum \left[\frac{\partial}{\partial x_p} \left(\frac{\partial (f)^{s-1}}{\partial x_i} \right) (x_p)^{(1)} + \ldots + \frac{\partial}{\partial (x_p)^{(i)}} \left(\frac{\partial (f)^{s-1}}{\partial x_i} \right) (x_p)^{(i+1)} \right] =$$

$$= \left(\frac{\partial (f)^{s-1}}{\partial x_i} \right) .$$

<u>Следствие.</u> Для любого $f \in \mathbb{R}[x, (x)^{(1)}, \ldots, (x)^{(i)}]$ имеем

$$\frac{\partial (f, (f))}{\partial (x, (x)^{(1)}, (x)^{(2)}, \ldots, (x)^{(s)})} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_1 \\ a_3 & 2a_2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \\ a_s & (s-1)a_{s-1} \\ 0 & s a_s \end{pmatrix}$$

причем $a_{i+1} = (a_i)$.

Теперь можно закончить вычисление якобиана $\mathcal{F}$.Производные вычисляем в точке,у которой

$$x_2 = x_3 = x_7 = x_9 = x_{10} = x_{17} =$$

$$= x_{18} = x_{19} = x_{20} = x_{22} = x_6 = 0 ,$$

а остальные переменные отличны от 0.Сдвиг делаем на ковектор

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_7 = a_{10} = a_{17} = a_{18} =$$

$$= a_{19} = a_{20} = a_{21} = a_{22} = a_5 = a_8 = 0 ,$$

а остальные координаты отличны от 0.Тогда легко проверяется,что

$$\mathcal{F} = 3 x_5^2 x_{21}^2 a_6^2 a_{12}^2 \cdot 15 x_5^2 x_{21}^2 x_8^2 x_1^2 .$$

$$\cdot 16 \cdot a_6^2 a_{12}^2 x_1^2 x_8^2 \cdot 144\, a_6^2 a_{12}^2 \cdot a_6^2 a_9^2 \not\equiv 0 .$$

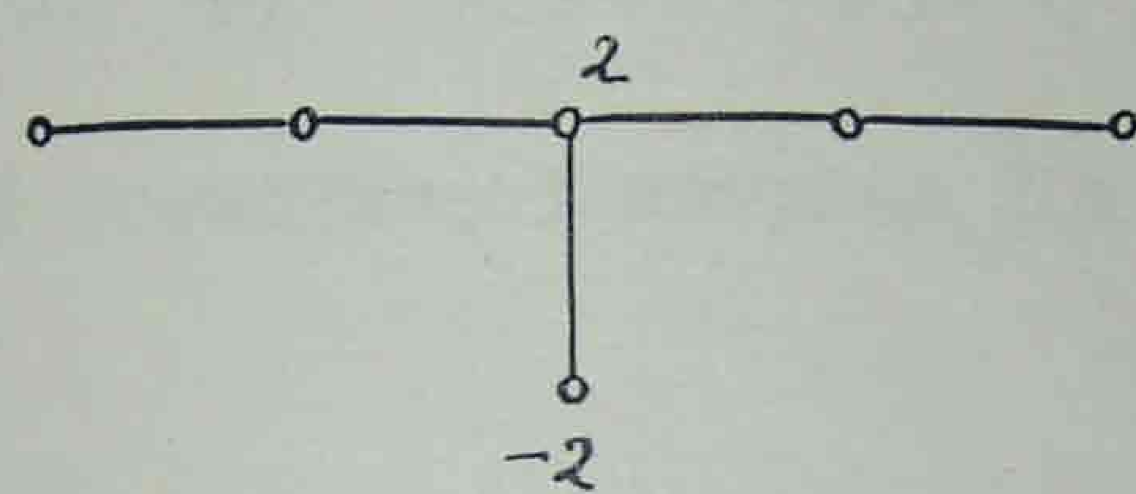
Теперь проверим, что $\mathcal{F}_2 \not\equiv 0$. Легко видеть, что $\mathcal{F}_2 = \det A \not\equiv 0$, где

$$A = \begin{pmatrix}
-2x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{13} & 0 & \frac{1}{2}a_{18} & \frac{1}{2}a_{17} & 0 & \frac{1}{2}a_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{13} & 0 & -a_8 & 0 & -a_{18} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_1 & -a_7 & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_6 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

В кольце многочленов нет делителей нуля, поэтому $\mathcal{F} \not\equiv 0$.

§5. Полная интегрируемость в случае BE_6 .

Рассмотрим представление $Ad^*(BE_6)$ в пространстве натянутом на следующие функции: полуинварианты и x_{10} (обозначения из гл. $\overline{\underline{II}}$). Найдем ковектора, отвечающие этому представлению. Полуинвариантам отвечают характеры, которые лежат в подалгебре Картана и инвариантны относительно $(-w_0)$. Из того, что $X(e_{\alpha_2})$ переводит x_{10} в полуинвариант следует, что один из ковекторов соответствующий x_{10} равен $e_{-\alpha_2}$. Кроме того, т.к. $X(h_i)x_{10} = \alpha_i x_{10}$, функции x_{10} отвечает ковектор из подалгебры Картана. Операторы X_i выписаны в базисе Шевалле, поэтому α_i это числовые отметки соответствующего ковектора h^0. Легко видеть, что h^0 это корень $\delta_0 + \alpha_2$ (δ_0 -минимальный корень E_6). Его числовые отметки, очевидно, инвариантны относительно автоморфизма $(-w_0)$:



Предъявленные функции не зависят от w_1 и постоянны вдоль направлений элементов из подалгебры Картана, инвариантных относительно линейного преобразования $(-w_0)$, поэтому их сдвиги в инволюции на всех орбитах $Ad^*(\mathcal{B}E_6)$.

Теорема 5.I. Если функция f на BE_6^* функционально зависит от сдвигов полуинвариантов $Ad^*(\mathcal{B}E_6)$ и координаты $x(\alpha)$, где α такой корень, что $ht\,\alpha = ht\,\delta_0 + 1$, δ_0 -минимальный корень E_6, тогда система уравнений $\dot{x} = \{df_x, x\}$ вполне интегрируема по Лиувиллю на орбитах общего положения представления Ad^* группы Ли $\mathcal{B}E_6$, отвечающей алгебре Ли BE_6.

Доказательство. Сдвиги полуинвариантов и x_{10} дают 24 функции в инволюции, из них 22 функции $x_{10}, f_1 = x_{11}, f_2, (f_2)^{(1)}, f_3, (f_3)^{(1)}, (f_3)^{(2)}, (f_3)^{(3)}, f_4, (f_4)^{(1)}, (f_4)^{(2)}, (f_4)^{(3)}, (f_4)^{(4)}, (f_4)^{(5)}, f_5, (f_5)^{(1)}, (f_5)^{(2)}, (f_5)^{(3)}, f_6, (f_6)^{(2)}, (f_6)^{(3)}, (f_6)^{(4)}$

функционально независимы. Для доказательства этого покажем, что якобиан, указанных функций, по переменным $x_{10}, x_{11}=x, v_5, w_4,$

$$y_3, w_3, x_2, z_1, u_1, w_2, v_1, h_1, h_3, y_6,$$

$$z_5, y_4, v_4, z_3, v_2, z_6, y_8, x_9$$

не тождественный 0. Пусть $g_1, \dots, g_{20}$ указанные выше функции без x_{10}, x_{11}, тогда имеем $J = \dfrac{\partial(g_1, \dots, g_{20})}{\partial(v_5, \dots, x_9)} =$

$$= \frac{\partial(g_1, \dots, g_{20})}{\partial(v_5', w_4', \dots, x_9')} \times \frac{\partial(v_5', w_4', \dots, x_9', (v_5')^{(1)}, \dots, (x_9')^{(1)})}{\partial(v_5, w_4, \dots, y_8, x_9)},$$

здесь первый сомножитель-матрица 20x34, а второй-34x20:

$$\begin{array}{c} 20 \\ 20\ \boxed{\;Y\;} \end{array} = 20 \begin{array}{c} 34 \\ \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{array}{c} 20 \\ \begin{bmatrix} C \\ \mathcal{D} \end{bmatrix} 34 \end{array}.$$

Структура матриц A, B вытекает из предложений 4.I и 4.2. Мы подберем точку x и сдвиг α т.ч. $\mathcal{D}=0$ тогда $\det Y = \det A \cdot \det C$. Переменные ($u_1, \dots, u_{20}$), которые включим в матрицу A следующие: $v_5', w_4', y_3', w_3', x_2', z_1',$ $u_1', w_2', v_1', L', L'', (v_5')^{(1)}, (w_4')^{(1)}, (y_3')^{(1)}, (w_3')^{(1)}, (x_2')^{(1)},$ $(z_1')^{(1)}, (L')^{(1)}, (v_1')^{(1)},$

при таком их выборе матрица $\dfrac{\partial(g_1, \dots, g_{20})}{\partial(u_1, \dots, u_{20})}$ квазитреугольна. Производные вычисляем в следующей точке: $x_7 = x_6 =$

$$= x_8 = v_3 = z_4 = v_5 = y_6 = x_{10} = x_9 = y_3 =$$

$$= y_4 = w_4 = z_5 = 0, \quad x, x_4, y_2 \neq 0,$$

а сдвигаем на ковектор: $x^0 = x_7^0 = x_6^0 = z_7^0 = y_8^0 =$

$= x_8^0 = x_9^0 = v_3^0 = z_5^0 = v_4^0 = z_4^0 = v_5^0 =$

$= y_3^0 = w_4^0 = 0,\ y_6^0,\ x_{10}^0,\ z_6^0, y_7^0, y_4^0, y_5^0 \neq 0,$

тогда $\mathcal{D} = 0$ и $\det C = const\, x^{11} \det C'$,

$$\det C' = \det \begin{pmatrix} -x_{10}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_7^0 \\ 0 & -x_{10}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_6^0 \\ 0 & 0 & -x_{10}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5^0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_{10}^0 & 0 & 0 & 0 & z_6^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{10}^0 & 0 & 0 & x_5^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_{10}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_7^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_6^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_5^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_4^0 & -z_3^0 \end{pmatrix}$$

$$= \pm (x_{10}^0)^5 z_6^0 y_7^0 y_4^0 y_5^0 \neq 0 .$$

Теперь проверим, что в указанной точке $\det A \neq 0$. Матрица A имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} E & & & & 0 \\ & A_1 & & & \\ & & A_2 & & \\ & * & & A_3 & \\ & & & & A_4 \end{pmatrix},$$

$\det A = \prod_{i=1}^{4} \det A_i$. Простые вычисления показывают, что

$$\det A_1 = \det A_4 =$$

$$= \det \begin{pmatrix} x_4' & 0 & -v_5' & 0 \\ (x_4')^{(1)} & x_4' & -(v_5')^{(1)} & -v_5' \\ (x_4')^{(2)} & 2(x_4')^{(1)} & -(v_5')^{(2)} & -2(v_5')^{(1)} \\ 0 & 3(x_4')^{(2)} & 0 & -3(v_5')^{(2)} \end{pmatrix} =$$

$$= (x_4 x - y_5 x_{10})^2 y_6^{\circ} x_{10}^{\circ} \cdot const \not\equiv 0 .$$

Матрица A_2 имеет вид

$$A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & & & & \\ 0 & \alpha & & & 0 & \\ & & \text{в} & 0 & & \\ & & * & 3\text{в} & & \\ & * & & & c & 0 \\ & & & & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \det A_2 \not\equiv 0 ,$$

для матрицы A_3 имеем:

$$A_3 = \begin{pmatrix} \alpha & & & 0 \\ & \text{в} & 0 & \\ & * & 3\text{в} & \\ * & & & c \end{pmatrix}, \quad \det A_3 \not\equiv 0 ,$$

где

$$\alpha = x_4 x^2 y_2 , \quad \text{в} = y_2 x y_6^{\circ} x_{10}^{\circ} , \quad c = y_6^{\circ} (x_{10}^{\circ})^2 y_4^{\circ} .$$

Итак, теорема доказана.

§6. Полная интегрируемость классических уравнений Эйлера на борелевских подалгебрах.

Под классическими уравнениями Эйлера на пространстве G^* дуальном к алгебре Ли G будем понимать уравнения

$$\dot{x} = \{\varphi x, x\}, \qquad (6.1)$$

где $\varphi: G^* \to G$ линейный оператор и $x \in G^*$. В случае когда G полупростая алгебра Ли, мы можем G^* отождествить с G с помощью формы Картана-Киллинга, которую мы будем обозначать $(,)$, и уравнение (6.1) перепишется в классическом коммутаторном виде $\dot{x} = [\varphi x, x]$, где $\varphi: G \to G$ линейный оператор.

Пусть BG борелевская подалгебра в полупростой алгебре Ли G, определенная в §1 гл. $\overline{II}$.

<u>Определение 6.1.</u> Пусть G полупростая алгебра Ли, H ее подалгебра Картана, определим операторы "твердого тела" на BG: $\varphi_{a,b}: (BG)^* \cong CG \to BG$ равенством

$$\varphi_{a,b}(x) = ad_a^{-1} ad_b \sigma(x), \quad x \in CG$$

где $a \in H$ такой, что для любого корня α алгебры G относительно H имеем $\alpha(a) \neq 0$, а $b \in BG$ произвольный. Оператор σ определяется так

$$\sigma\left(h + \sum_{\alpha<0} x_\alpha e_\alpha\right) = -h + \sum_{\alpha<0} x_\alpha e_{-\alpha}.$$

<u>Замечание.</u> Операторы $\varphi_{a,b}$ являются обобщением операторов "твердого тела" $\varphi_{a,b,D}$ в полупростом случае (см. [31]) на случай борелевских подалгебр.

<u>Определение 6.2.</u> Пусть a из подалгебры Картана H полупростой алгебры Ли G такой, что $\alpha(a) \neq 0$ для любого корня α алгебры G относительно H и m целое положительное число,

тогда определим операторы $\varphi_{a,m} : (BG)^* \cong CG \longrightarrow BG$ равенством

$$\varphi_{a,m}(x) = ad_a^{-1} \sigma \pi_m(x),$$

где σ то же, что и раньше, а $\pi_m : CG \longrightarrow CG$ проекция CG на $V = \bigoplus_{ht\alpha < -m} \mathbb{R} e_\alpha$ параллельно $H \oplus \bigoplus_{ht\alpha > -m} \mathbb{R} e_\alpha$.

<u>Определение 6.3.</u> Если $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ система простых корней полупростой алгебры Ли G, $\alpha = \sum_{i=1}^{r} m_i \alpha_i$ произвольный корень, то, по определению, высотой α называется $ht\alpha = \sum_{i=1}^{r} m_i$. Если $x \in BG$, $x = h + \sum_{\alpha > 0} x_\alpha e_\alpha$, $h \in H$, e_α корневой вектор, отвечающий корню α, то определим высоту x так: если $x_\alpha = 0$ для любого α, то $ht\, x = 0$; если $x_\alpha \neq 0$ для некоторого α, то $ht\, x = ht\,\alpha$, где α минимальный корень для которого $x_\alpha \neq 0$.

Пусть $\mathfrak{M}$ многообразие, $T^*\mathfrak{M}$ пространство кокасательного расслоения, $C^\infty(\mathfrak{M})$ пространство гладких функций на $\mathfrak{M}$. Известно (см. [8], [29], [40]), что $T^*\mathfrak{M}$ симплектическое многообразие, поэтому если задана функция $f \in C^\infty(T^*\mathfrak{M})$, то ей отвечает векторное поле $\operatorname{sgrad} f$. Если $\mathfrak{M}$ группа Ли, то $\mathfrak{M}$ действует на $\mathfrak{M}$ и $T^*\mathfrak{M}$ с помощью левых сдвигов. Если функция Гамильтона $f(t) \in C^\infty(T^*\mathfrak{M})$ левоинвариантна, то векторное поле $\operatorname{sgrad} f$ тоже левоинвариантно, поэтому при проекции $\pi : T^*\mathfrak{M} \to T_e^*\mathfrak{M}$ ($e \in \mathfrak{M}$ единица группы $\mathfrak{M}$), задаваемой с помощью левых сдвигов, поле $\operatorname{sgrad} f$ проектируется в векторное поле $E(f)$ на кокасательном пространстве $T_e^*\mathfrak{M}$. Уравнения, отвечающие полю $E(f)$, называются уравнениями Эйлера движения гамильтоновой системы $\operatorname{sgrad} f$. Если f левоинвариантная функция на $T^*\mathfrak{M}$, то $E(f)_t = \{df_t, t\}$, $t \in T_e^*\mathfrak{M}$. Векторное поле $E(f)$ касается орбит коприсоединенного представления группы $\mathfrak{M}$. Относительно формы Кириллова векторное поле $E(f)$ на каждой орбите $\mathcal{O}(p)$ представления Ad^* группы $\mathfrak{M}$

образует гамильтоново векторное поле с функцией Гамильтона равной ограничению функции $f(t)$ на орбиту $O(p)$, $p \in T_e^* \mathfrak{M}$.

Цель настоящего параграфа доказательство следующих теорем.

<u>Теорема 6.I.</u> Пусть G простая алгебра Ли типа A_n, C_n, D_n или G_2, H ее подалгебра Картана, если $b \in BG$ и $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ такие, что выполнены неравенства

I) $m, ht\, b \geqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$ в случае A_n,

2) $m, ht\, b \geqslant n$ в случае C_n,

3) $m, ht\, b \geqslant n$ в случае D_n,

4) $m, ht\, b \geqslant 3$ в случае G_2,

то уравнения Эйлера $\dot{x} = \{\varphi_{a,b} x, x\}$ ($a \in H$ такой, что $\alpha(a) \neq 0$ для любого корня G относительно H) на BG^* с операторами "твердого тела" $\varphi_{a,b}$ и уравнения Эйлера с операторами $\varphi_{a,m}$ вполне интегрируемы по Лиувиллю в классическом смысле на всех орбитах общего положения представления Ad^* группы $\mathcal{B}G$, отвечающей алгебре Ли BG.

<u>Замечание.</u> Теорема 6.I дает полную интегрируемость уравнений Эйлера движения "твердого тела" с закрепленной точкой. Полную интегрируемость свободного "твердого тела" дает теорема 6.2.

<u>Теорема 6.2.</u> Пусть G простая алгебра Ли типа A_n, C_n, D_n или G_2, H подалгебра Картана, если $b \in BG$ и $m \in \mathbb{Z}$, $m>0$ такие, что

I) $m, ht\, b \geqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]$ в случае A_n,

2) $m, ht\, b \geqslant n$ в случае C_n,

3) $m, ht\, b \geqslant n$ в случае D_n,

4) $m, ht\, b \geqslant 3$ в случае G_2,

то гамильтонов поток на $T^* \mathcal{B}G$, отвечающий квадратичным формам с операторами "твердого тела" $\varphi_{a,b}$ или с операторами $\varphi_{a,m}$ ($a \in H$ общего положения), вполне интегрируем по Лиувиллю в классическом смысле.

Лемма 6.I. Пусть функция $f \in C^\infty(CG)$,тогда

$$\{df(x), x\} = -(X_k f)\, e^k,$$

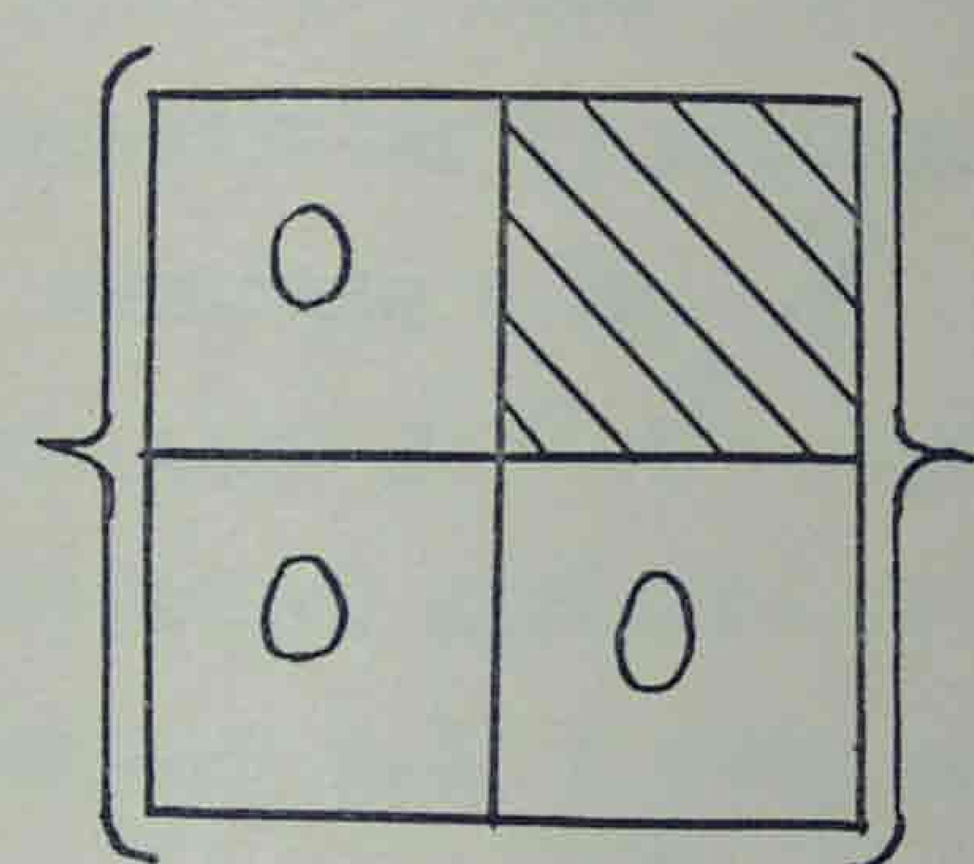
где e_i базис BG ,а e^k сопряженный базис CG ,операторы X_k вычисляются в базисе e_i .

Доказательство. Имеем равенство

$$\{df(x), x\} = \{e_j, e^i\}\, x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} = C^i_{jk}\, x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} e^k,$$

которое доказывает лемму (см. гл.I).

Пусть G простая алгебра Ли типа A_n , C_n , D_n или G_2 и S максимальная абелева подалгебра в G т.ч. $BG \supset BG' \supset S$.Такая подалгебра описана для A_n в §I,для D_n в §2, для G_2 в §3.В случае типа C_n ,если Sp реализована в матрицах,как указано в гл. II , S имеет вид (см. [22]):

$S =$ 

Элементы подалгебры S можно рассматривать как функции на BG^*,обозначим это семейство функций через $\mathcal{F}_1$,а через $\mathcal{F}_2$ семейство полуинвариантов,относящихся к базисным характерам (см. гл. II).

Предложение 6.I. Пусть G простая алгебра Ли типа A_n , C_n , D_n или G_2 ,тогда семейство функций $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, если $G = A_n, D_n$ или $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$,если $G = C_n$,является полным инволютивным семейством функций на BG^* .

Доказательство. Это предложение для BA_n , BD_n , BG_2 доказано в параграфах I,2,3.Случай BC_n доказывается аналогично.

Через $\tilde{\mathcal{F}}$ будем обозначать семейство функций, построенное в предложении 6.I, обозначим $\mathfrak{A} = \{\{df(x), x\} \mid f \in \tilde{\mathcal{F}}\}$ и для простой алгебры Ли G и $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ обозначим $(G)_m = \bigoplus\limits_{i=1}^{\tilde{\ }} \mathbb{R} h_i \oplus \bigoplus\limits_{0 < ht\alpha \leq m} \mathbb{R} e_\alpha$, где $\{h_i, e_\alpha\}$ базис Шевалле алгебры G (см. [39]).

<u>Предложение 6.2.</u> Пусть G простая алгебра Ли типа A_n, C_n, D_n или G_2, тогда семейство функций $\tilde{\mathcal{F}}$ инвариантно относительно $Ad^*_{\mathcal{B}G}$, где $\mathcal{B}G$ группа Ли, отвечающая алгебре Ли BG, кроме того

1) $\sigma(\mathfrak{A}) \subset (G)_{[\frac{n+1}{2}]}$ если $G = A_n$,

2) $\sigma(\mathfrak{A}) \subset (G)_n$ если $G = C_n$,

3) $\sigma(\mathfrak{A}) \subset (G)_n$ если $G = D_n$,

4) $\sigma(\mathfrak{A}) \subset (G)_3$ если $G = G_2$.

<u>Доказательство</u> вытекает из предложения 2.2 гл. I, операторы X_i для алгебр BG выписаны в гл. $\overline{\underline{II}}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что если $f \in \tilde{\mathcal{F}}$, то $X_i f \in \tilde{\mathcal{F}}$ для любого i. Второе утверждение вытекает из леммы 6.I.

<u>Доказательство</u> теоремы 6.I. В силу предложения 6.I достаточно доказать, что функции семейства $\tilde{\mathcal{F}}$ являются первыми интегралами. Рассмотрим случай операторов $\varphi_{a,b}$. По лемме I.I гл. $\overline{\underline{II}}$ имеем для $f \in \tilde{\mathcal{F}}$

$$\{\varphi_{a,b}(x), x\}(df(x)) = (df(x), \pi([\varphi_{a,b}(x), x])) =$$

$$= (df(x), [\varphi_{a,b}(x), x])$$

в силу того, что $\left(\bigoplus\limits_{\alpha>0} \mathbb{R} e_\alpha, \bigoplus\limits_{\alpha>0} \mathbb{R} e_\alpha\right) = 0$. Далее

$$(df(x), [\varphi_{a,b} x, x]) = ([x, df(x)], \varphi_{a,b}(x)) =$$

$$= (\pi([x, df(x)]), \varphi_{a,b}(x)) = -(\{df(x), x\}, \varphi_{a,b}(x)).$$

По предложению 6.2 $\{df(x), x\}$ лежит в подпространстве

$$\bigoplus_i \mathbb{R} h_i \oplus \bigoplus_{0 > ht\alpha \geq m} \mathbb{R} e_\alpha ,$$

где $0 > m > ht\delta$, δ минимальный корень алгебры Ли G . Имеем $b \in \bigoplus_{-m < ht\alpha} \mathbb{R} e_\alpha$,поэтому $(\{df(x), x\}, \varphi_{a,b}(x)) = 0$, т.е. функции $f \in \mathcal{F}$ дают интегралы уравнений Эйлера с операторами "твердого тела".Свойство

$$\sigma(Im\, \varphi_{a,b}) \subset \bigoplus_{ht\alpha < -m_0} \mathbb{R} e_\alpha , \quad m_0 > 0$$

справедливо и для операторов $\varphi_{a,m}$,поэтому $\mathcal{F}$ интегралы для уравнений Эйлера с операторами $\varphi_{a,m}$.

Для доказательства теоремы 6.2 нам потребуются некоторые факты из работы [28] .Напомним некоммутативную теорему Лиувилля.

Теорема 6.3. (См. [28]).Если на симплектическом многообразии M задан гамильтонов поток с алгеброй Ли интегралов V такой,что $\dim V + ind\, V = \dim M$,тогда связная и компактная совместная поверхность уровня интегралов V является тором, размерность которого равна $ind\, V$.

В работе [28] (см. также [24]) была предложена следующая методика интегрирования гамильтоновых систем.Пусть (M^{2n}, ω) симплектическое многообразие и V конечномерная подалгебра Ли в алгебре Ли $C^\infty(M^{2n})$, $\mathcal{V}$ односвязная группа Ли,отвечающая алгебре Ли V , $\mathcal{V}$ симплектически действует на M .Пусть $f_1, \dots, f_k$ базис V ,состоящий из функций функционально независимых в точках общего положения на M .Положим $P_\xi = \{m \in M \mid f_i(m) = \xi(f_i), \xi \in V^*\}$.Определим подалгебру $H_\xi \subset V$, $\xi \in V^*$ как аннулятор $H_\xi = \{h \in V \mid ad_h^* \xi = 0\}$.Если $\mathcal{H}_\xi$

подгруппа в $\mathfrak{U}$ отвечающая H_ξ, то $\mathcal{R}_\xi$ инвариантно при действии $\mathcal{H}_\xi$ на $\mathcal{M}$. Фактор многообразие $\mathcal{M}_\xi = \mathcal{R}_\xi / \mathcal{H}_\xi$ обладает невырожденной симплектической формой Ω и если $p: \mathcal{R}_\xi \to \mathcal{M}_\xi$ естественная проекция, то $p^*(\Omega) = \omega / \mathcal{R}_\xi$.

Пусть $v = \operatorname{sgrad} F$ гамильтонова система, для которой все функции V интегралы; v касается $\mathcal{R}_\xi$ и $\mathcal{H}_\xi$ оставляет v инвариантным, поэтому можно определить векторное поле $E(F)_\xi$ на $\mathcal{M}_\xi$. Поле $E(F)_\xi$ гамильтоново относительно Ω на $\mathcal{M}_\xi$ для функции Гамильтона $\tilde{F}$ равной проекции $F/\mathcal{R}_\xi$. Так как поле v инвариантно относительно $\mathfrak{U}$, то оно спроектируется при проекции $p: \mathcal{M} \to \mathcal{M} = \mathcal{M}/\mathfrak{U}$ в некоторое поле $E(F)$ на $\mathcal{M}$. Многообразие $\mathcal{M}$ называется многообразием Эйлера, а $\dot{x} = E(F)_x$ уравнением Эйлера для гамильтоновой системы v на $\mathcal{M}$.

Применим эту методику к гамильтоновым потокам на $\mathcal{M} = T^*\mathcal{G}$, где $\mathcal{G}$ группа Ли. Так как $\mathcal{G}$ симплектически действует на $T^*\mathcal{G}$, то существует конечномерная алгебра Ли V_1 интегралов на $T^*\mathcal{G}$, изоморфная $S = T_e\mathcal{G}$. Тогда $\mathcal{M} = S^*$, $\mathcal{R}_\xi = \mathcal{G}$, $\mathcal{M}_\xi = Ad^*_{\mathcal{G}}(\xi)$; проекция $\mathcal{R}_\xi \to \mathcal{M}_\xi$ есть факторизация $\mathcal{G}$ по подгруппе $\mathcal{H}_\xi$. Уравнения Эйлера $\dot{x} = E(F)_x$ превращаются в описанную раньше систему $\dot{x} = \{\varphi(x), x\}$. Пусть теперь $\mathcal{G} = \mathcal{B}G$ борелевская подгруппа в простой группе $\mathcal{G}$ типа A_n, C_n, D_n или G_2 и φ операторы "твердого тела" $\varphi_{a,b}$ или $\varphi_{a,m}$ для них в теореме 6.I была указана коммутативная алгебра V_0 интегралов для $E(F)$ на орбитах $O(\xi) = Ad^*_{\mathcal{B}G}(\xi)$; $\dim V_0 = \frac{1}{2}(n-r) = N$, $r = \operatorname{ind} BG$, $n = \dim BG$. Продолжим функции из V_0 до левоинвариантных функций на $T^*\mathcal{B}G$. Группа $\mathcal{B}G$ симплектически действует на $T^*\mathcal{B}G$, поэтому существует алгебра интегралов V_1 изоморфная BG, алгебра V_0 коммутирует с V_1 (см. [28]) и поэтому возникает алгебра Ли интегралов $V = V_0 \oplus V_1$ на $T^*\mathcal{L}G$ для исходного гамильтонова потока. Прямой подсчет дает $\dim V + \operatorname{ind} V = \dim T^*\mathcal{L}G$. Таким образом доказано предложение.

<u>Предложение 6.3.</u> Гамильтонов поток на $T^*\mathcal{L}G$, где G простая алгебра Ли типа A_n, C_n, D_n или G_2, отвечающий квадратичным формам с операторами "твердого тела" $\varphi_{a,b}$ или $\varphi_{a,m}$, вполне интегрируем по Лиувиллю в некоммутативном смысле.

<u>Предложение 6.4.</u> (См.[28]). Пусть (M^{2n}, ω) симплектическое многообразие, V алгебра Ли функционально независимых интегралов гамильтоновой динамической системы v, где $\dim V + \operatorname{ind} V = \dim M$. Пусть на V^* существует полное инволютивное семейство функций $\mathcal{F}_0$. Тогда гамильтонова система v вполне интегрируема по Лиувиллю в коммутативном смысле т.е. найдется другая уже коммутативная алгебра Ли V_0 функционально независимых интегралов, причем $2\dim V_0 = \dim M$.

<u>Доказательство</u> теоремы 6.2. По предложению 6.3 гамильтонов поток на $T^*\mathcal{L}G$, отвечающий операторам $\varphi_{a,b}$ и $\varphi_{a,m}$ вполне интегрируем в некоммутативном смысле. В силу предложения 6.4, поэтому достаточно доказать, что на алгебре Ли $BG \oplus V_0 = V$, где V_0 коммутативная алгебра Ли, существует полное инволютивное семейство функций. На алгебре Ли BG, где G простая комплексная алгебра Ли типа A_n, C_n, D_n или G_2, полное инволютивное семейство функций построено в предложении 6.1. По лемме 1.1 гл. III, поэтому достаточно построить полное инволютивное семейство на V_0^*. Пусть e_i, $i = 1, \dots, N$ базис V_0, тогда в качестве полного инволютивного семейства функций на V_0^* можно взять e_i, которые рассматриваются как функции на V_0^*. Теорема 6.2 доказана.

<u>Предложение 6.5.</u> Пусть G полупростая алгебра Ли, H ее подалгебра Картана, если $a \in H$ лежит в камере Вейля, определяемой неравенствами $\alpha(x) > 0$ для любого простого корня α, то

квадратичная форма $(x)[\varphi_{a,m}(x)]$ на CG неотрицательно определена.

Доказательство. Имеем равенство

$$\varphi_{a,m}(x) = ad_a^{-1}\,\sigma\,\Pi_m(x) =$$

$$= ad_a^{-1}\,\sigma\,\Pi_m\Big(h + \sum_{\alpha<0} x_\alpha e_\alpha\Big) =$$

$$= ad_a^{-1}\Big(\sum_{ht\,\alpha<-m} x_\alpha e_{-\alpha}\Big) = \sum_{ht\,\alpha<-m} -\frac{x_\alpha}{\alpha(a)}\,e_{-\alpha}.$$

Для любого корня α , $\alpha>0$ имеем $\alpha(a)>0$; вектора e_α и $e_{-\alpha}$ можно выбрать так, что $(e_\alpha, e_{-\alpha})=1$, поэтому

$$x(\varphi_{a,m}x) = \Big(\sum_{ht\,\alpha<-m} -\frac{x_\alpha}{\alpha(a)}\,e_{-\alpha},\ h +$$

$$+ \sum_{\alpha<0} x_\alpha e_\alpha\Big) = \sum_{ht\,\alpha<-m} -\frac{(x_\alpha)^2}{\alpha(a)}\,(e_{-\alpha}, e_\alpha) =$$

$$= \sum_{ht\,\alpha<-m} -\frac{(x_\alpha)^2}{\alpha(a)} \geqslant 0,$$

что доказывает предложение 6.5.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Adler, On a trace Functional for formal Pseudo-Differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-de Vries Equation. Preprient, Wisconsion Univ., 1978.

2. В.И.Арнольд, Математические методы классической механики, И-во "Наука", Москва, 1974.

3. А.А.Архангельский, Вполне интегрируемые гамильтоновы системы на группе треугольных матриц, Мат. сборник, т. 108, № 1 (1979), 134-142.

4. O.I. Bogoyavlensky, On Perturbations of the Periodic Toda Lattice, Commun. math. Phys., 51 (1976), 201-209.

5. Э.Б.Винберг, Конструкция особых простых алгебр Ли, Труды семинара по век. и тенз. анализу, в. XIII (1966), 7-9.

6. Н.Бурбаки, Группы и алгебры Ли, ч. IV-VI, И-во "Мир", Москва, 1972.

7. А.М.Виноградов, Б.А.Купершмидт, Структура гамильтоновой механики, УМН т. XXXII, в.4 (196) (1977), 175-236.

8. К.Годбийон, Дифференциальная геометрия и аналитическая механика, И-во "Мир", Москва, 1973.

9. Н.М.Гюнтер, Интегрирование уравнений первого порядка в част-

ных производных, М.-Л., ГТТИ, I934.

IO. Дао Чонг Тхи, Интегрируемость уравнений Эйлера на однородных симплектических многообразиях, Мат. сборник, т. I06, №2 (I978), I54-I6I.

II. Н.Джекобсон, Алгебры Ли, И-во "Мир", Москва, I964.

I2. Л.А.Дикий, Замечание о гамильтоновых системах, связанных с группой вращений, Функ. анализ и его приложения, т. 6, в. 4 (I972), 83-84.

I3. Ж.Диксмье, Универсальные обертывающие алгебры, И-во "Мир", Москва, I978.

I4. L. E. Dickson, Differential equations from the Group Standpoint, Annals of Mathematics, V 25, N4 (1924), 287-378.

I5. Б.А.Дубровин, В.Б.Матвеев, С.П.Новиков, Нелинейные уравнения типа Кортевега де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия, УМН т. XXXI, в.I (I87) (I976), 55-I36.

I6. Б.А.Дубровин, Вполне интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с матричными операторами, и абелевы многообразия, Функ. анализ и его приложения, т. II, в.4 (I977), 28-4I.

I7. М.Дюфло, М.Вернь, Свойство представления, двойственного к присоединенному представлению алгебры Ли, Сборник переводов "Математика" I5:2 (I97I), 8-9.

I8. Н.В.Илюшечкин, О многообразии вполне интегрируемых левоинвариантных метрик на полупростой группе Ли, Вестник МГУ, сер. I, математика, механика, №3 (I979), 35-37.

I9. А.А.Кириллов, Элементы теории представлений, И-во "Наука", Москва, 1972.

20. Б.П.Комраков, Структуры на многообразиях и однородные пространства, И-во "Наука и техника", Минск, 1978.

21. M. Langlois, Contribution a l'etude du mouvement du corps rigide a N dimensions autor d'un point fixe. — In: Thèse présentée a la faculté des sciences de l'université de Besançon. Besançon, 1971.

22. А.И.Мальцев, Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли, Изв. АН СССР (сер. мат.), т.9, №4 (1945), 291-300.

23. С.В.Манаков, Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела, Функ. анализ и его приложения, т. 10, в. 4 (1976), 93-94.

24. J. Marsden, A. Weinstein, Reduction of symplectic manifolds with symmetry, Reports on Mathematical Physics, V5, N1 (1974), 121-130.

25. М.В.Мещеряков, Интегрируемость уравнений Эйлера для геодезических левоинвариантных метрик на полупростых алгебрах Ли серии A_n , Седьмая Всесоюзная конференция по современным проблемам геометрии. Тезисы докладов. Минск, 1979, 125.

26. А.С.Мищенко, Интегралы геодезических потоков на группах Ли, Функ. анализ и его приложения, т. 4, в. 3 (1970), 73-77.

27. А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко, Об интегрировании уравнений Эйлера на

полупростых алгебрах Ли, ДАН СССР, т. 231, № 3 (1976), 536-538.

28. А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко, Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем, Функ. анализ и его приложения, т. 12, в. 2 (1978), 46-56.

29. А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко, Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли, Изв. АН СССР (сер. мат.), т. 42, № 2 (1978), 396-415.

30. А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко, Некоммутативное интегрирование гамильтоновых систем и его приложения, Изв. АН СССР. Механика твердого тела, № 4 (1978), 187-188.

31. А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко, Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли, Труды семинара по век. и тенз. анализу, в. XIX (1979), 3-94.

32. J. Patera, R.T. Sharp, P. Winternitz, H. Zassenhaus, Invariants of real low dimension Lie algebras, J. Math. Phys., V. 17, N 6 (1976), 986-994.

33. Т.А.Певцова, Один способ построения коммутативной алгебры интегралов на алгебрах Ли, Седьмая Всесоюзная конференция по современным проблемам геометрии. Тезисы докладов. Минск, 1979, 149.

34. L. Pukanszky, On the Unitary Representations of Exponentional Groups, Journal of Functional Analysis, V 2, N 1 (1968), 73-113.

35. П.К.Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными, ОГИЗ, 1947.

36. А.Г.Рейман, М.А.Семенов-Тян-Шанский, И.Е.Френкель, Градуированные алгебры Ли и вполне интегрируемые динамические системы, ДАН СССР, т.247, №4 (1979), 802-805.

37. У.Рудин, Функциональный анализ, И-во "Мир", Москва, 1975.

38. T.A. Springer, Some arithmetical results on semi-simple Lie algebras, Publ. Math. Paris, N30 (1966), 115-141.

39. Р.Стейнберг, Лекции о группах Шевалле, И-во "Мир", Москва, 1975.

40. С.Стернберг, Лекции по дифференциальной геометрии, И-во "Мир", Москва, 1970.

41. J. Tits, Sur les constantes de structure et le theoreme d'existence des algebres de Lie semi-simples. Publ. Math. Paris, N31 (1966), 21-58.

42. M. Toda, Wave in nonlinear lattice, Supplement of the Progress of Theoretical Physics,

43. В.В.Трофимов, Уравнения Эйлера на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли, Изв. АН СССР (сер. мат.) т.43, №3 (1979), 714-732.

44. В.В.Трофимов, О полной интегрируемости уравнений Эйлера на борелевских подалгебрах простых алгебр Ли. Седьмая Всесоюзная конференция по современным проблемам геометрии. Тезисы докладов. Минск, 1979, 201.

45. M. Vergene, La structure de Poisson sur l'algèbre symmetrique d'une algèbre de Lie nilpotente, Bull. Soc. Math. France, 100 (1972), 301–335.