

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*Содержание*

На правах рукописи

Топалов Петр Йорданов

УДК 517.938 / 514.756.4

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ  
ИНВАРИАНТОВ ИНТЕГРИРУЕМЫХ  
ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ**

01.01.04 – геометрия и топология

*Диссертация на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук*

Научный руководитель:  
академик РАН  
профессор А.Т.Фоменко

МОСКВА-1996

# Содержание

<b>1 Основные определения и теоремы в теории топологической классификации</b>	<b>8</b>
1.1 Тонкая топологическая классификация . . . . .	8
1.2 Непрерывная траекторная классификация . . . . .	18
<b>2 Вычисление <math>n</math>-меток инварианта Фоменко-Цишанга</b>	<b>24</b>
2.1 Формулировка результатов . . . . .	25
2.2 Доказательство теорем . . . . .	30
2.3 Вспомогательные утверждения и леммы . . . . .	45
2.4 Применение полученных результатов . . . . .	49
2.4.1 Случай Сретенского . . . . .	51
2.4.2 Случай Горячева-Чаплыгина . . . . .	55
2.4.3 Случай Жуковского . . . . .	55
2.4.4 Случай Ковалевской . . . . .	56
<b>3 Вычисление траекторных инвариантов</b>	<b>58</b>
3.1 Гамильтониан Пуанкаре и переменная действия в окрестности невырожденной критической окружности . . . . .	58
3.2 Производная функции вращения на ребре молекулы . . . . .	68
3.3 Свойства потока гамильтониана Пуанкаре . . . . .	76
<b>4 Тензорные инварианты и поля симметрий геодезических потоков</b>	<b>86</b>
4.1 Обозначения и вводные результаты . . . . .	88
4.2 Траекторные автоморфизмы геодезического потока . . . . .	94
4.3 Тензорные инварианты на компактных поверхностях постоянной отрицательной кривизны . . . . .	99

4.4 Тензорные инварианты типа $(0, 2)$ . . . . .	101
4.5 Тензорные инварианты типа $(m, n)$ . . . . .	105

## Библиография

- Важнейшими источниками для изучения динамических систем являются работы А. П. Колмогорова, А. Н. Колмогорова, А. Д. Соколова, А. Г. Маркова и других авторов, в которых исследуются различные аспекты теории динамических систем. Особое внимание уделяется вопросам стабильности движений в системах с заданными параметрами. Важную роль в развитии теории динамических систем сыграли работы А. А. Савченко и Е. С. Поповского, которые исследовали связь между стабильностью движений и структурой соответствующих диффеоморфизмов. Особый интерес вызвали работы А. А. Савченко (см. [31, 32, 33]) о группах гиперболических диффеоморфизмов на торах, а также работы А. А. Апронова, А. А. Савченко и М. А. Матера. Классификация структур динамических систем по качеству движений получена в работах Матера А. Г., Попова В. А., Денисова А. А. и др. ([34, 35, 36, 37, 38]). Топологическая (структурная) классификация динамических систем на основе методов диффеоморфизмов Борисовских получена М. Поповым в [39].
- Современные методы анализа динамических систем являются важным инструментом в решении различных прикладных задач. Их можно разделить на две основные группы: методы, изучающие структуру устойчивых

# Введение

Качественная теория динамических систем, по-видимому, впервые сложилась в работах А.Пуанкаре, который в 1881г. отмечал, что “качественное изучение (дифференциальных уравнений) будет иметь первостепенный самостоятельный интерес”. Дальнейшее продвижение этого подхода связано с работами А.М.Ляпунова, Г.Биргхофа (см., например, [29, 30]), К.Зигеля и др., в которых изучалось строение динамических систем в окрестности особых точек. К этому кругу вопросов наверное стоит отнести и классическую теорему Пуанкаре-Бендиксона, которая является одним из первых результатов, касающихся поведения динамической системы в целом.

Новый всплеск исследований топологического строения динамических систем произошел после работы А.А.Андронова и Л.С.Понтрягина, вышедшей в 1937г. и связан с изучением свойства грубости динамических систем. В этой работе впервые появилось определение топологической (орбитальной) эквивалентности динамических систем. В этом направлении получено большое количество результатов. Отметим лишь теорему Гробмана и Хартмана (см.[31, 32, 33]) о грубости гиперболических особых точек динамических систем, а так же работу [34] Андронова, Леонтьевича, Гордона и Майера. Классификация структурно устойчивых (грубых) динамических систем на компактных двумерных поверхностях была получена в работах Майера А.Г., Плисса В.А., Де Баггиса и М.Пейксото (см. [35, 36, 37, 38]). Топологическая (орбитальная) классификация потоков Морса-Смейла на компактных двумерных поверхностях и 3-многообразиях получил М.Пейксото в [39].

Совершенно другим типом динамических систем являются интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы (ИГС). В сравнении, например, с полями Морса-Смейла, ИГС не являются структурно устой-

чивыми.

Пусть  $M^4$  – симплектическое многообразие с симплектической структурой  $\omega$ . Предположим, что гладкая функция  $H$  является гамильтонианом некоторой ИГС. Фиксируем некоторое регулярное значение  $h$  гамильтониана  $H$  и рассмотрим изоэнергетическую поверхность

$$Q_h^3 \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M^4 | H(x) = h\}.$$

Предположим, что гамильтониан  $H$  “нерезонансный” на изоэнергетической поверхности, а дополнительный интеграл  $F$  – “бottовский”. Определение нерезонансности и бottовости, как и все основные определения, даны в Главе 1 (см. Определение 1 и Определение 2).

Теория тонкой топологической классификации гамильтоновых систем на фиксированных изоэнергетических поверхностях была построена в цикле работ [1, 2, 3] А.Т.Фоменко и Х.Цишангом. Согласно этой теории, любой ИГС  $v$  на фиксированной изоэнергетической поверхности  $Q^3$  ставится в соответствие некоторый граф  $W^*(Q^3, v)$  с метками, называемый “меченой молекулой” или “тонким топологическим инвариантом Фоменко-Цишанга”.

Метки инварианта  $W^*(Q_h^3, v)$  бывают двух типов. Первый тип – это  $\varepsilon$ ,  $r$  и  $k$  метки. Они являются “локальными” инвариантами и стоят на ребрах молекулы. Второй тип метки,  $n$ -метки, имеют “глобальный” характер. Эти числа являются аналогом числа Эйлера для комплексных линейных расслоений над двумерными поверхностями.

Один из основных результатов теории является Теорема 1 о тонкой топологической классификации гамильтоновых систем. Согласно ей, две ИГС на изоэнергетических поверхностях являются тонко топологически эквивалентными (см. Определение 4) тогда и только тогда, когда их меченные молекулы совпадают.

Теория непрерывной траекторной классификации ИГС на изоэнергетических поверхностей была построена А.В.Болсиновым и А.Т.Фоменко в работе [5]. Чтобы получить соответствующий инвариант, надо добавить к меченоей молекуле  $W^*(Q^3, v)$  рассматриваемой системы некоторые “траекторные” инварианты  $R$ ,  $\Lambda$ ,  $\Delta$  и  $Z$ . Все эти инварианты подробно описаны в работе [5].

Основная цель настоящей диссертации – это вычисление  $n$ -меток меченоых молекул для классических интегрируемых случаев движения твер-

дого тела, а также разработка способов вычисления траекторных инвариантов ИГС. Кроме этого, в конце работы обсуждается связь между существованием траекторных автоморфизмов (и тензорных инвариантов) гамильтоновой системы на изоэнергетической поверхности и ее интегрируемости.

Глава 1 является вводной. В ней достаточно подробно изложены все основные определения и теоремы теории топологической классификации ИГС, которые будут необходимы нам в дальнейшем. Кроме этого, в главе содержится результат автора о включении невырожденных критических бутылок Клейна в теорию тонкой топологической классификации ИГС (см.[9]).

Для построения молекул и подсчета  $r$ -меток существует развитая техника, сложившаяся в работах А.А.Ошемкова (см.[7]) и А.В.Болсинова (см.[8]). Отметим также важные работы М.П.Харламова (см.[14]), а также Я.В.Татаринова (см.[17, 18]) и С.Б.Катка (см.[16]), в которых были вычислены бифуркационные диаграммы отображения момента для классических интегрируемых случаев движения твердого тела. Кроме этого, в этих работах была полностью исследована топология изоэнергетических поверхностей.

Глава 2 посвящена вычислению  $n$ -меток меченых молекул.

В §2.1 сформулирована, а в §2.2 доказана Теорема 2, применение которой к меченым молекулам без тонких ребер всегда дает одно нестривиальное соотношение между их  $n$ -метками.

В §2.3 доказана Лемма 2 (о редукции) сводящей любую меченнюю молекулу к связной сумме меченых молекул без тонких ребер.

В §2.4, пользуясь Теоремой 2 и Леммой 2, вычислены  $n$ -метки для большинства молекул, встречающихся в классических интегрируемых случаях движения твердого тела. Результаты опубликованы в работах [10, 11].

В Главе 3 доказана Теорема 7, Теорема 8 и Теорема 9, касающиеся способов вычисления траекторных инвариантов ИГС.

Один из основных моментов в теории непрерывной траекторной классификации является теорема о сведении классификации системы на атом к точной траекторной классификации некоторой гамильтоновой системы на двумерной поверхности (см. Утверждение 2 на стр.23). Гамильтониан этой новой системы называется “гамильтонианом Пуанкаре” (см.§1.2). Траекторные инварианты  $\Lambda$ ,  $\Delta$  и  $Z$  являются некоторы-

ми “характеристиками” гамильтонового потока этого гамильтониана. Гамильтониан Пуанкаре является гладкой функцией, определенной для любой трансверсальной к траекториям двумерной поверхности, гладко вложенной в рассматриваемом атоме.

В §3.1 доказана Теорема 7, согласно которой гамильтониан Пуанкаре для любой трансверсальной к траекториям площадки является ограничением некоторой гладкой функции, определенной на всем атоме, на эту площадку. Эта функция является одной из переменных действия (с точностью до умножения на константу) при подходящем выборе циклов интегрирования.

В §3.2 доказана Теорема 8. В этой теореме предъявлена 2-форма, интеграл от которой по данному тору Лиувилля на ребре молекулы есть ноль тогда и только тогда, когда “функция вращения” на этом торе имеет нулевую производную. Определение функции вращения приведено в §1.2. Последовательность локальных экстремумов и разрывов функции вращения называется “вектором вращения”. Вектор вращения является единственным траекторным инвариантом на ребре молекулы. Из Теоремы 8, в частности, видно, что для нахождения вектора вращения необязательно переходить к переменным действие-угол.

В §3.3, пользуясь результатами §§3.1 и 3.2, доказана Теорема 9, в которой предъявлена 1-форма, вычисляющая “время прохождения вдоль потока гамильтониана Пуанкаре”. Предложенная конструкция полностью отвечает на вопрос о том, как зависит время прохождения между двумя точками на атоме вдоль траекторий потока гамильтониана Пуанкаре от выбора трансверсальной площадки, содержащей эти две точки.

Результаты этой главы опубликованы в работе [12].

В Главе 4 доказано, что если геодезический поток допускает тензорный инвариант, который в некоторой точке равен нулю, то он имеет многозначное поле симметрий. Обсуждаемый вопрос восходит к одной теореме В.В.Козлова и С.В.Болотина. Подробное введение приведено в начале главы.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю А.Т.Фоменко за постановку задач и постоянное внимание к работе, а также благодарит А.В.Болсинова за многочисленные обсуждения и полезные советы.

# Глава 1

## Основные определения и теоремы в теории топологической классификации

### 1.1 Тонкая топологическая классификация

Теория тонкой топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем была построена А.Т.Фоменко и Х.Цишангом в цикле работ [1, 2, 3]. В этой главе мы дадим основные обозначения, определения и результаты этой теории, необходимые нам в дальнейшем.

Если не оговорено противное, мы всегда будем считать, что на симплектическом многообразии  $M^4$  задана интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система с гамильтонианом  $H$  и дополнительным интегралом  $F$ . Напомним, что гамильтонова система с гамильтонианом  $H$  называется интегрируемой по Лиувиллю на четырехмерном многообразии  $M^4$ , если существует дополнительный интеграл  $F$ , почти всюду на  $M^4$  независимый с  $H$ . Пусть  $h$  есть некоторое регулярное значение отображения  $H : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Рассмотрим изоэнергетическую поверхность

$$Q_h^3 \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M^4 | H(x) = h\}.$$

Мы всегда будем считать, что она компактна и на ней фикси-

рована ориентация.

**Определение 1.** Гамильтониан  $H$  называется "нерезонансным" на изоэнергетической поверхности  $Q_h^3$ , если в  $Q_h^3$  всюду плотны торы Лиувилля, на которых траектории системы образуют плотные иррациональные обмотки.

Ограничение второго интеграла  $F$  на  $Q_h^3$  будем обозначать через  $f$ .

**Определение 2.** Дополнительный интеграл  $F$  называется "боттовским" на изоэнергетической поверхности  $Q_h^3$ , если критические точки функции  $f$  организованы в невырожденные критические подмногообразия.

Критическое подмногообразие называется "невырожденным", если ограничение функции  $f$  на любое трансверсальное к нему подмногообразие дополнительной размерности имеет морсовскую особенность в точке пересечения.

Мы всегда будем предполагать, что  $F$  боттовский, а гамильтониан  $H$  нерезонансный на изоэнергетической поверхности. В этом случае будем говорить, что задана "интегрируемая в боттовском смысле нерезонансная гамильтонова система". Для краткости будем писать ИБНГС.

Из сделанных предположений нетрудно показать, что любое критическое подмногообразие является либо окружностью  $S^1$  (мы будем называть ее "невырожденной критической окружностью"), либо двумерным тором  $T^2$ , либо бутылкой Клейна  $K^2$ .

**Определение 3.** Разбиение многообразия  $Q_h^3$  на торы Лиувилля и связные компоненты критических поверхностей уровня интеграла  $f$  (т.е. связные компоненты прообразов критических значений интеграла  $f$ ) называется "лиувиллевым слоением на  $Q_h^3$ ".

**Определение 4.** Две интегрируемые в боттовском смысле нерезонансные гамильтоновы системы (ИБНГС)  $v_1$  и  $v_2$  на ориентированных изоэнергетических поверхностях  $Q_1$  и  $Q_2$  называются "тонко топологически эквивалентными", если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм  $h : Q_1 \rightarrow Q_2$  переводящий слоение Лиувилля системы  $v_1$  в слоение Лиувилля системы  $v_2$ , который сохраняет "ориентацию" невырожденных критических окружностей.

Заметим, что любая невырожденная критическая окружность является периодической траекторией и, следовательно, на ней имеется естественная ориентация, заданная системой.

Теперь мы подробно опишем построение тонкого топологического инварианта Фоменко-Цишанга ИБНГС на изоэнергетической поверхности  $Q_h^3$ .

Из предположения компактности  $Q_h^3$  и боттовости интеграла  $\int$  следует, что критических подмногообразий – конечное число. В частности, критических значений функции  $\int$  тоже конечное число. Обозначим их в порядке возрастания через  $c_1, c_2 \dots c_N$ . Выберем настолько малое положительное число  $\epsilon$ , чтобы отрезки

$$I_k \stackrel{\text{def}}{=} [c_k - \epsilon, c_k + \epsilon] \quad (k = 1 \dots N)$$

не пересекались. Прообразы  $f^{-1}(I_k)$  состоят из конечного числа связных кусков. Фиксируем некоторое критическое значение  $c$  и обозначим через  $Q_c^3$  некоторую связную компоненту прообраза  $f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$ . Край подмногообразия  $Q_c^3$  состоит из конечного числа торов Лиувилля. Обозначим через  $L_c$  множество  $Q_c^3 \cap f^{-1}(c)$ . Будем говорить, что  $L_c$  есть "связный критический уровень, отвечающий критическому значению  $c$ " или просто будем называть  $L_c$  "особым слоем". Подмногообразие  $Q_c^3$  будем называть "регулярной окрестностью особого слоя". В работе [3] было показано, что, если  $L_c$  не является критической окружностью или критической бутылкой Клейна, то на  $Q_c^3$  можно построить однозначно (с точностью до изотопии) ориентированное расслоение Зейферта  $\pi : Q_c^3 \rightarrow P_c$  такое, что все невырожденные критические окружности (вместе с заданной на них естественной ориентацией) являются слоями и второй интеграл  $\int$  постоянен на слоях.

**Замечание 1.** Чтобы доказать это утверждение, условие боттовости второго интеграла недостаточно. Надо еще предположить, что "топологический тип гамильтоновой системы устойчив" (см. [8], §8).

Все особые слои этого расслоения Зейферта имеют тип  $(2, 1)$  и совпадают с множеством невырожденных критических окружностей с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами (см. [3]). Такие критические окружности называются "звездочками". Если  $L_c$  является критической окружностью, то на  $Q_c^3$  существует структура ориентированного

расслоения Зейферта расслоенного полнотория (см.[4]). Эта структура единственна с точностью до скручиваний вдоль меридионального диска и изотопий. Отметим еще раз, что говоря о структуре расслоения Зейферта мы всегда предполагаем, что второй интеграл постоянен на слоях. Если  $L_c$  является бутылкой Клейна, то на ней существуют две структуры расслоения Зейферта. Выберем для определенности ту из них, которая имеет базой диск  $D^2$  и два особых слоя типа  $(2, 1)$ . Таким образом, мы в любом случае определили на  $Q_c^3$  однозначно (с точностью до гомеоморфизма) структуру расслоения Зейферта  $\pi : Q_c^3 \rightarrow P_c$ , база которого  $P_c$  является компактной ориентируемой поверхностью с краем. Если  $L_c$  не является критической бутылкой Клейна, то эти расслоения Зейферта ориентированы и тем самым базы  $P_c$  тоже ориентированные естественным образом.

Обозначим через  $K_c$  проекцию особого слоя  $L_c$  на базе  $P_c$  т.е.,  $K_c \stackrel{\text{def}}{=} \pi(L_c)$ . Множество  $K_c$  является либо точкой (в случае когда  $L_c$  есть невырожденная критическая окружность), либо отрезком (в случае когда  $L_c$  есть критическая бутылка Клейна), либо конечным связным графом все вершины которого имеют степень 2 или 4. Вершины степени 2 и только они являются проекциями "звездочек". Поэтому на рисунках принято отмечать их не точками, а звездочками. Заметим, что разность  $P_c \setminus K_c$  представляет несвязное объединение колец.

**Определение 5 .** Пара топологических пространств  $(P, \Gamma)$  называется "атомом", если она является одной из пар:

- 1)  $P$  есть двумерный замкнутый диск  $D^2$ , а  $\Gamma$  есть точка внутри него (этот атом обозначается латинской буквой  $A$ ),
- 2)  $P$  есть двумерный замкнутый диск  $D^2$ , а  $\Gamma$  – замкнутый отрезок внутри него (этот атом обозначается латинской буквой  $K$ ),
- 3)  $P$  есть компактная ориентированная поверхность с краем, а  $\Gamma$  есть вложенный внутри нее граф, удовлетворяющий следующим условиям:
  - а) степень каждой вершины графа  $\Gamma$  равна 2 или 4,
  - б)  $P \setminus \Gamma$  является несвязным объединением колец,

в) эти кольца можно разбить на положительные и отрицательные так, чтобы к каждому ребру графа  $\Gamma$  примыкало ровно одно положительное и ровно одно отрицательное кольцо.

Два атома  $(P, \Gamma)$  и  $(P', \Gamma')$  считаются эквивалентными, если существует гомеоморфизм  $h: P \rightarrow P'$  отображающий  $\Gamma$  на  $\Gamma'$ . В случае 3) настоящего определения мы требуем, чтобы  $h$  сохранял ориентацию.  $P$  называется "поверхностью атома".

Число связных компонент края поверхности  $P$  называется "валентностью" атома. "Атомным весом" атома  $(P, \Gamma)$  называется число вершин графа  $\Gamma$  в случае 1) и 3) определения. Для определенности будем считать, что в случае 2) атомный вес равен нулю.

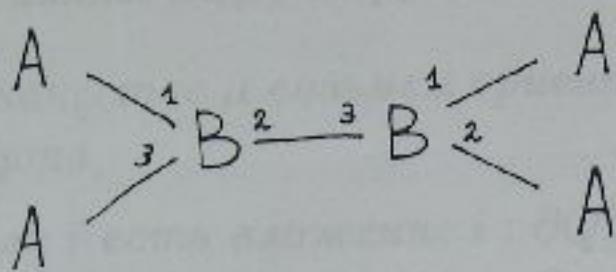
Список всех атомов (с точностью до эквивалентности) с атомными весами 1, 2 и 3 приведен в работе [3] в Таблице 1, которую мы в дальнейшем будем называть "таблицей сложности". В этой таблице любой "стандартный" атом имеет имя – некоторую латинскую букву, кроме этого, связные компоненты края поверхности "стандартного" атома за- нумерованы целыми числами. Таким образом, любой атом приобретает имя и нумерацию края. Эта нумерация определена неоднозначно и зависит от выбора гомеоморфизма  $h$ , отображающего данный атом на "стандартный атом" в таблице.

Таким образом, любой регулярной окрестности  $Q_c^3$  особого слоя  $L_c$  мы однозначно (с точностью до эквивалентности) ставим в соответствие некоторый атом  $(P_c, K_c)$ . В этом случае регулярная окрестность  $Q_c^3$  называется "зейфертовой реализацией атома  $(P_c, K_c)$ ".

Нетрудно заметить, что если две регулярные окрестности особых слоев имеют эквивалентные атомы, то существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм одной на другую, который сохраняет слоение Лиувилля и переводит невырожденные критические окружности в невырожденные критические окружности с сохранением естественной на них ориентации, заданной полем системы. Иногда мы будем допускать вольность речи и будем отождествлять Зейфертовы реализации с их атомами.

Рассмотрим снова некоторую изоэнергетическую поверхность  $Q_h^3$  (с фиксированной на ней ориентацией). Рассмотрим множество всех ре-

Рис. 1.1:



регулярных окрестностей особых слоев. Так как изэнергетическая поверхность замкнутая, то компоненты края всех атомов разбиваются на пары так, что для любой такой пары существует однопараметрическое семейство торов Лиувилля в  $Q_h^3$  связывающее эту пару. Такое однопараметрическое семейство называется "ребром". Построим теперь, по изэнергетической поверхности  $Q_h^3$ , некоторый граф. В качестве вершин этого графа рассмотрим множество атомов всех регулярных окрестностей особых слоев. Любому однопараметрическому семейству торов Лиувилля связывающему края некоторых регулярных окрестностей, сопоставим ребро графа, связывающее соответствующие атомы. Заметим, что разным однопараметрическим семействам сопоставляются разные ребра. Полученный таким образом график принято (см. [3]) изображать на плоскости, обозначая атомы соответствующими буквами из таблицы сложности. Напомним, что компоненты краев букв (т.е. "стандартных" атомов в таблице сложности) занумерованы. Таким образом, компоненты края регулярных окрестностей приобретают (неоднозначно) нумерацию и, следовательно, краю любого ребра можно сопоставить натуральные числа. Договоримся, что на рисунках эти числа мы тоже будем обозначать (см. Рис. 1.1).

**Определение 6.** Любой изэнергетической поверхности  $Q_h^3$  ИБНГС обычно сопоставляется соответствующий график (вершины которого являются буквами латинского алфавита, а на концах ребер стоят цифры). Этот график называется "молекулой".

Теперь, следуя работ [3, 9] описанем построение тонкого топологического инварианта  $W^*(Q_h^3, v)$ . Сначала дадим определение "допустимых координат на краях зейфертовой реализации атома" (см. [3, 9]).

**Определение 7.** Пусть  $\pi : Q_h^3 \rightarrow P_c$  есть Зейфертова реализация атома  $(P_c, K_c)$ . Тогда:

- 1) В случае атома  $A$  на граничном торе Лиувилля  $\partial Q_c^3$  выберем базисные циклы  $(\lambda, \mu)$  в группе гомологий следующим образом:
- В качестве  $\mu$  возьмем ориентированный слой расслоения Зейферта,
  - Если  $i$  есть вложение  $i : \partial Q_c^3 \rightarrow Q_c^3$ , то  $\lambda$  однозначно определяется условием  $i_*(\lambda) = 0$  и индекс пересечения  $\lambda$  с  $\mu$  равен единице. Ориентацию границы мы всегда определяем с помощью "внутренней нормали".
- 2) В случае атома  $K$  в качестве  $\lambda$  берем слой расслоения Зейферта с базой – диском и двумя особыми слоями типа  $(2, 1)$ , а в качестве  $\mu$  – слой расслоения Зейферта с базой – листом Мебиуса. Ориентируем эти циклы так, чтобы индекс пересечения  $\lambda$  с  $\mu$  был равен единице.
- 3) В случае "седлового" атома поступим следующим образом. Для любой звездочки (т.е. особого слоя типа  $(2, 1)$ ) рассмотрим некоторую ее замкнутую трубчатую окрестность, которая является нетривиально расслоенным полноторием с орбитальными инвариантами типа  $(2, 1)$ . Обозначим все такие трубчатые окрестности особых слоев через  $V_i$  ( $i = p+1, \dots, N$ ). Здесь через  $r$  обозначена валентность атома. Через  $T_i$  ( $i = 1 \dots r$ ) будем обозначать граничные торы многообразия  $Q_c^3$ . В полнотории  $V_i$  рассмотрим некоторые меридиональные диски. Ориентируем эти диски так, чтобы их ориентация вместе с ориентацией слоя расслоения Зейферта давала противоположную ориентацию изоэнергетической поверхности. Граница этих дисков, ориентированная соответствующим образом, задает некоторые циклы  $\bar{\lambda}_i$  в группе гомологий граничных торов  $T_i$  полноторий  $V_i$ . Обозначим через  $Q_c^0$  разность  $Q_c^3 \setminus \bigsqcup_{i=p}^N \text{int}V_i$ . Выберем в  $Q_c^0$  некоторое сечение (такое сечение существует т.к., в  $Q_c^0$  нет особых слоев). Это сечение можно отождествить с некоторой трансверсальной к слоям вложенной в  $Q_c^0$  поверхностью  $P_c^0$ . Ориентируем поверхность  $P_c^0$  так, чтобы вместе с ориентацией слоя она задавала ориентацию изоэнергетической поверхности. Эта ориентация со своей стороны задаст ориентацию ее границы  $\partial P_c^0$ . Таким образом, на

границных торах многообразия  $Q_c^0$  мы получаем некоторые циклы  $\mu_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), а именно, ориентированная граница поверхности  $P_c^0$ . На тех же торах выберем в качестве  $\lambda_i$  ориентированный слой расслоения Зейферта. Обычно мы будем отождествлять эти циклы с элементами в группе гомологий  $H_1(T_i)$ , которые они задают. Если в  $Q_c^3$  нет особых слоев (т.е.  $p = N$ ), то базис  $(\lambda_i, \mu_i)$  ( $i = 1, \dots, p$ ) называется "допустимой системой координат на крае зейфертовой реализации атома" (см. [3]). В противном случае, выбирается такое сечение  $P_c^0$ , чтобы выполнялись равенства

$$\lambda_i = \lambda_i + 2\mu_i \quad (i = p, \dots, N).$$

Тогда базисные циклы  $(\lambda_i, \mu_i)$  ( $i = 1, \dots, p$ ) называются "допустимой системой координат на крае зейфертовой реализации атома  $(P_c, K_c)$ ". Поверхность  $P_c^0$  называется "допустимым сечением". Существование допустимого сечения легко следует из того, что все особые слои расслоения Зейферта имеют тип  $(2, 1)$ .

Пусть  $Q_h^3$  есть изоэнергетическая поверхность некоторой ИБНГС. Фиксируем на всех ребрах лиувиллевого слоения по некоторому тору Лиувилля и разрежем поверхность  $Q_h^3$  по всем таким торам. В результате она разобьется на конечное число связных кусков. Замыкания этих кусков исчерпывают все регулярные окрестности особых слоев слоения Лиувилля. Согласно уже сказанному, эти регулярные окрестности являются Зейфертовыми реализациями некоторых атомов. Обозначим все седловые атомы (т.е. атомы отличные от  $A$  и  $K$ ) через  $W_1, \dots, W_L$ , атомы  $A$  обозначим через  $A_{L+1}, \dots, A_{L+M}$  и атомы  $K$  – через  $K_{L+M+1}, \dots, K_{L+M+N}$ . Напомним, что мы отождествляем атомы с их зейфертовыми реализациями. Ориентируем все ребра молекулы. Это равносильно тому, что указать какой край ребра первый, а какой второй (на рисунках ориентация ребра обозначается стрелочкой). Рассмотрим на краях всех атомов молекулы допустимые системы координат. Тогда на любом торе Лиувилля, вдоль которого мы разрезали изоэнергетическую поверхность, возникают два базиса в группе гомологий этого тора. Так как ребро, в котором находится этот тор, ориентировано, мы можем "упорядочить" эти базисы. Конкретнее, базис, пришедший с того атома, который приклеен к началу ребра, мы считаем первым и обозначим через  $(\lambda_1, \mu_1)$ . Другой базис будем считать

вторым. Обозначим его через  $(\lambda_2, \mu_2)$ . Рассмотрим матрицу

$$\begin{cases} \lambda_2 = \alpha\lambda_1 + \beta\mu_1, \\ \mu_2 = \gamma\lambda_1 + \delta\mu_1. \end{cases}$$

Это целочисленная обратимая матрица с определителем, равным  $-1$ .

**Если ребро приклесно к атому  $K$ , то мы без ограничения общности можем считать, что элемент  $\beta$  в этой матрице не меньше нуля.** В противном случае мы фиксируем на крае атома  $K$  другую допустимую систему координат. В дальнейшем мы всегда будем считать, что это условие выполнено.

Таким образом, любому ориентированному ребру мы сопоставим целочисленную матрицу. Эта матрица называется "матрицей склейки" (см. [3]). Конечно, матрица склейки определена неоднозначно. Она зависит от выбора допустимых координат и ориентации ребра. Рассмотрим некоторое ребро молекулы. Пусть матрица  $C$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

есть соответствующая ему матрица склейки.

**Определение 8 .** Предположим, что ребро не приклесно к атому  $K$ . Таким ребрам ставится в соответствие  $r$  и  $\epsilon$ -метка.

1) "r-меткой" ребра называется число

$$r \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \bar{\alpha}/|\beta|, & \text{если } \beta \neq 0; \\ \infty, & \text{если } \beta = 0, \end{cases}$$

где  $0 \leq \bar{\alpha} < |\beta|$  и  $\bar{\alpha} \equiv \alpha \pmod{\beta}$ .

2) " $\epsilon$ -меткой" ребра называется число

$$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{sign}\beta, & \text{если } \beta \neq 0; \\ \text{sign}\alpha, & \text{если } \beta = 0. \end{cases}$$

Эти числа не зависят от выбора допустимых систем координат.

Предположим теперь, что наше ребро приклесно к атому  $K$ . Возможны два случая – когда ребро приклеено только к одному атому  $K$  и, когда оно связывает два таких атома. В первом случае всегда считаем, что ребро направлено к бутылке Клейна.

**Определение 9** (см. [9]) . В случае, когда ребро приклесно только к одной бутылке Клейна, определим "метку  $\kappa$ " равенством  $\kappa \stackrel{\text{def}}{=} (\beta : \delta)$ , где справа стоит упорядоченная пара взаимно простых целых чисел. Две такие пары считаются одинаковыми, если они отличаются друг от друга умножением на минус единицу (т.е.  $(p : q) = (-p : -q)$ ). В противном случае, когда ребро соединяет два атома  $K$ , определяем

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \pm \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Таким образом любому ребру молекулы мы сопоставили  $r$ ,  $\epsilon$  и  $\kappa$  метки. Ребра, на которых  $r$ -метка равна  $\infty$ , называются "тонкими". Рассмотрим в нашей молекуле  $G$  тонкий подграф  $G^0$ , состоящий из всех вершин молекулы  $G$  и всех ее тонких ребер. Связные компоненты графа  $G^0$ , которые не содержат атомов  $A$  называются "семьями". Обозначим их через  $G_1^0, \dots, G_l^0$ . По определению считаем, что молекула, состоящая из двух атомов  $K$ , не имеет семей. Любой семье сопоставляется некоторое целое число называемое " $n$ -меткой". Следуя работам [3, 9], определим  $n$ -метку семьи.

Фиксируем произвольную семью. Обозначим ее через  $F$ . Рассмотрим все ребра в молекуле, хотя бы одна вершина которых принадлежит этой семье. Множество всех таких ребер обозначим через  $I$ . Напомним, что все ребра ориентированные и, если только одна из вершин является атомом  $K$ , то мы договариваемся, что ребро ориентировано к ней. Матрицу склейки ребра  $e$  будем обозначать через  $M(e)$ , где

$$M(e) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \alpha(e) & \beta(e) \\ \gamma(e) & \delta(e) \end{bmatrix}.$$

Кроме этого, через  $v_0(e)$  будем обозначать тот атом молекулы, к которому приклеивается начало ребра  $e$ , а через  $v_1(e)$  – атом, к которому приклеен конец этого ребра.

**Определение 10** (см. [3, 9]) . "n-меткой" семьи  $F$  называется целое число

$$n(F) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{e \in I} f(e),$$

где числа  $f(e)$  определяются формулой

$$f(e) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -\frac{\gamma(e)}{\alpha(e)}, & \text{если } e \in F; \\ \frac{\alpha(e)-\bar{\alpha}(e)}{\beta(e)}, & \text{если } v_0(e) \in F, v_1(e) \notin F; \\ -\frac{\delta(e)-\bar{\delta}(e)}{\beta(e)}, & \text{если } v_0(e) \notin F, v_1(e) \in F; \\ \frac{\alpha(e)-\alpha(e)-\delta(e)+\bar{\delta}(e)}{\beta(e)}, & \text{если } e \notin F, v_0(e) \in F, v_1(e) \in F. \end{cases}$$

**Замечание 2.** Определенная выше  $n$ -метка не зависит от выбора допустимых систем координат.

Таким образом определенная молекула с метками называется "меченой молекулой" и обозначается через  $W^*(Q_h^3, v)$ .

А.Т.Фоменко и Х.Пишанг работе [2] доказали следующую теорему о тонкой топологической классификации гамильтоновых систем.

**Теорема 1.** Пусть даны две ИБНГС  $v_1$  и  $v_2$  на двух ориентированных изоэнергетических поверхностях. Тогда системы  $v_1$  и  $v_2$  тонко топологически эквивалентные, тогда и только тогда, когда их меченные молекулы "совпадают". Другими словами должен существовать гомеоморфизм одной меченой молекулы на другую, который сохраняет буквы всех атомов и нумерацию их краев. Кроме этого, он должен сохранять, ориентацию ребер и все метки.

## 1.2 Непрерывная траекторная классификация

Здесь мы дадим необходимые нам определения и теоремы из теории непрерывной траекторной классификации интегрируемых гамильтоновых систем (см.[5]).

**Определение 11.** Две гладкие динамические системы  $v_1$  и  $v_2$  заданные на гладких многообразиях  $M_1$  и  $M_2$  называются "непрерывно траекторно эквивалентными", тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм  $h : M_1 \rightarrow M_2$ , который переводит траектории системы  $v_1$  в траектории системы  $v_2$  и сохраняет их естественную ориентацию.

Если многообразия ориентированные, то предполагается, что  $h$  сохраняет их ориентацию.

Предположим, что  $v_1$  и  $v_2$  являются ИБНГС на фиксированных изоэнергетических поверхностях  $Q_1$  и  $Q_2$ . Чтобы узнать, эквивалентные ли они в тонком топологическом смысле, надо подсчитать и сравнить их меченные молекулы. Если мы хотим узнать, являются ли эти системы непрерывно траекторно эквивалентными, то кроме меченых молекул надо вычислить и их траекторные инварианты.

Простейший траекторный инвариант – вектор вращения. Ниже приведем определение функции вращения и вектора вращения и объясним их связь с теории траекторной классификации интегрируемых гамильтоновых систем (см.[5]).

Пусть  $Q_h^3 \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M^4 | H(x) = h\}$  – есть некоторая компактная и регулярная изоэнергетическая поверхность интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системы  $v \stackrel{\text{def}}{=} \text{sgrad } H$ . Предположим, как обычно, что система нерезонансная и что дополнительный интеграл  $F$  боттовский.

Рассмотрим произвольное ребро молекулы  $W^*$ . Этому ребру соответствует однопараметрическое семейство торов Лиувилля. В качестве естественного параметра на нем можно взять значение второго интеграла  $F$  на соответствующем торе Лиувилля. Согласно теореме Лиувилля в некоторой четырехмерной окрестности (в  $M^4$ ) рассматриваемого ребра, являющейся прямым произведением  $D^2 \times T^2$ , можно ввести координаты действие–угол  $\{(S_1, S_2, \phi_1, \phi_2)\}$  (см. [25, 6]). С другой стороны, в качестве координат в той же окрестности можно взять  $\{H, F, \phi_1, \phi_2\}$ , где  $H$  – гамильтониан, а  $F$  – второй интеграл. Обозначая через  $\mathcal{H}(S_1, S_2)$  – гамильтониан системы  $v$  в координатах действие–угол, получаем, что

$$v = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_1}(S_1, S_2) \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_2}(S_1, S_2) \frac{\partial}{\partial \phi_2}.$$

Введя теперь на ребре координаты  $\{(F, \phi_1, \phi_2)\}$ , получаем, что

$$v = \omega_1(F) \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \omega_2(F) \frac{\partial}{\partial \phi_2},$$

где через  $\omega_1(F)$  и  $\omega_2(F)$  обозначены гладкие функции

$$\begin{cases} \omega_1(F) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_1}(S_1(h, F), S_2(h, F)) \\ \omega_2(F) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_2}(S_1(h, F), S_2(h, F)) \end{cases}.$$

Теперь дадим важное

**Определение 12** (см.[5],§5) . Функция  $\rho_{(\lambda,\mu)}(F) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_2(F)/\omega_1(F)$  называется "функцией вращения" рассматриваемого ребра.

Конечно, функция вращения зависит от выбора переменных действия, что эквивалентно выбору двух базисных циклов  $(\lambda, \mu)$  в первой группе гомологий рассматриваемой окрестности ребра. Напомним, что без ограничения общности можно считать, что эта окрестность диффеоморфна прямому произведению диска  $D^2$  на тор  $T^2$ . Чтобы подчеркнуть зависимость функции вращения от выбора базиса  $(\lambda, \mu)$  мы обозначаем функцию вращения через  $\rho_{(\lambda,\mu)}(F)$ .

В предположении, что функция вращения "хорошая" (см.[5],§6) сопоставится в соответствие "вектор вращения"  $R$ . Под словом "хорошая" понимается то, что все локальные экстремумы функции  $\rho_{(\lambda,\mu)}(F)$  изолированные и их конечное число. Кроме этого предполагается, что точек, в которых  $\omega_1$  обращается в ноль тоже конечное число (см.[5],§6). Заметим, что функция вращения  $\rho_{(\lambda,\mu)}(F)$  гладкая везде, за исключением точек, в которых  $\omega_1(F_0) = 0$ . Такие точки называются "полюсами" функции вращения. Предположим, что на рассматриваемом нами ребре второй интеграл меняется в интервале  $(c_1, c_2)$ , где  $c_1$  и  $c_2$  некоторые его критические значения. Построим теперь "вектор"  $R$  состоящий из вещественных чисел и символов  $+\infty$  и  $-\infty$ . В качестве первой компоненты вектора  $R$  берем предел  $\lim_{F \rightarrow c_1+0} \rho_{(\lambda,\mu)}(F)$ , потом в порядке возрастания параметра  $F$  выписываем последовательно значения встречающихся локальных экстремумов и полюсов. Любому полюсу сопоставляем последовательность из двух символов  $+\infty$  или  $-\infty$ , в зависимости от значений пределов функции вращения  $\rho_{(\lambda,\mu)}(F)$  слева и справа от полюса (см.[5],§5). В качестве последней компоненты записываем предел  $\lim_{F \rightarrow c_2-0} \rho_{(\lambda,\mu)}(F)$ .

**Определение 13** (см.[5],§6) . Вектор  $R$ , определенный выше, называется "вектором вращения" ребра относительно фиксированного базиса  $(\lambda, \mu)$ .

Конечно, мы определили вектор вращения для произвольного ребра молекулы  $W^*$ , но данное определение без изменений переносится на случай произвольного однопараметрического семейства торов Лиувилля.

Важность понятия функции вращения и вектора вращения в теории траекторной классификации интегрируемых гамильтоновых систем надо рассматривать с точки зрения следующего утверждения, доказанного А.В. Болсиновым и А.Т. Фоменко в работе [5].

**Утверждение 1** (см.[5], §6) *Пусть  $v$  и  $v'$  две интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы, заданные на симплектических многообразиях  $M^4$  и  $M^{4'}$  соответственно. Рассмотрим две однопараметрические регулярные семейства  $E$  и  $E'$  торов Лиувилля в  $M^4$  и  $M^{4'}$ . Тогда эти системы являются непрерывно траекторно эквивалентными тогда и только тогда, когда существуют базисные циклы  $(\lambda, \mu)$  на  $E$  и  $(\lambda', \mu')$  на  $E'$ , для которых соответствующие векторы вращения  $R$  и  $R'$  совпадают.*

Чтобы определить остальные траекторные инварианты, на любом атоме молекулы вводится понятие “гамильтониан Пуанкаре”. Приведем соответствующие определения.

Рассмотрим некоторый атом  $Q_c^3$  без звездочек.

В работе [5] было доказано, что при этих условиях в  $Q_c^3$  существует вложенная поверхность  $P_c \subset Q_c^3$ , которая трансверсальна ко всем траекториям гамильтоновой системы  $v$ . На самом деле, здесь имеется ввиду то, что атом  $Q_c^3$  “достаточно узкий”, т.е. он выбран так, чтобы поверхность  $P_c$  с описанными выше свойствами существовала. Конечно, это всегда можно предполагать (см.[5]). Зафиксируем эту поверхность. Отображение последования, задаваемое системой на  $P_c$ , задает гладкий симплектоморфизм

$$\sigma : P_c \rightarrow P_c,$$

относительно формы  $\tilde{\omega} \stackrel{def}{=} \omega|_{P_c}$ . Так как  $P_c$  по построению трансверсальна к полю  $v$ , то, очевидно, что форма  $\tilde{\omega}$  невырождена. Отображение  $\sigma$  определяется так. Любой точке  $x \in P_c$  ставим точку  $\sigma(x) \stackrel{def}{=} g^t x$ , такую, что:

- 1)  $\sigma(x) \in P_c$ ,
- 2) для всех  $u \in (0, t)$  имеем, что  $g^u x$  не принадлежит поверхности  $P_c$ .

Здесь через  $\{g^t\}$  обозначена однопараметрическая группа диффеоморфизмов гамильтоновой системы.

**Определение 14 ([5])**. Определенный таким образом симплектоморфизм  $\sigma : P_c \rightarrow P_c$  называется "отображением Пуанкаре" атома  $V$ .

Корректность данного определения доказана в [5].

Далее мы кратко напомним определение и основные свойства "гамильтониана Пуанкаре" (см. [5]).

Из определения отображения Пуанкаре  $\sigma$  сразу вытекает, что выполняются свойства:

- а)  $f(P) = f(\sigma(P))$  для любой точке  $P \in P_c$ ,
- б)  $\sigma^* \tilde{\omega} = \tilde{\omega}$ .

На самом деле следовало бы писать  $\sigma_{P_c}$ , указывая на то, что отображение Пуанкаре строится по изначально фиксированной поверхности  $P_c$ .

Ограничение функции  $f$  на поверхности  $P_c$  будем обозначать снова через  $f$ . Симплектической структурой на  $P_c$  считаем форму  $\tilde{\omega}$ . В частности, обозначение  $sgrad f$  означает косой градиент относительно формы  $\tilde{\omega}$ .

Мы хотим найти такую гладкую функцию  $F_{P_c} : P_c \rightarrow R^1$ , для которой выполняется:

- 1)  $f$  является интегралом поля  $sgrad F_{P_c}$  ( $sgrad$  берется относительно формы  $\tilde{\omega}$ ),
- 2)  $\sigma(x) = (\sigma^t x)|_{t=1}$ , где  $\{\sigma^t\}$  – поток гамильтонова поля  $sgrad F_{P_c}$ .

**Определение 15 ([5])**. Гладкая функция  $F_{P_c} : P_c \rightarrow R$  называется "гамильтонианом Пуанкаре" отображения Пуанкаре  $\sigma$ , если выполнены условия 1) и 2).

**Замечание 3**. Условие 1) не означает, вообще говоря, что  $F_{P_c}(x) = \mathcal{F}(f|_{P_c}(x))$ , где  $\mathcal{F}$  есть некоторая гладкая функция в окрестности критического значения  $c$ . Дело в том, что линии уровня функции  $f$  на  $P_c$  могут быть несвязные.

Существование гамильтонианов Пуанкаре было доказано в работе [5].

Гамильтоновый поток  $\{\sigma^t\}$ , соответствующий гамильтониану Пуанкаре  $F_{P_c}$  называется "потоком Пуанкаре".

Важность понятия гамильтониана Пуанкаре подтверждается следующим утверждением, доказанным А.В.Болсиновым и А.Т.Фоменко в работе [5].

**Утверждение 2.** *Две ИБНГС  $v_1$  и  $v_2$ , ограниченные на два атома  $V_1$  и  $V_2$  являются непрерывно траекторно эквивалентными, тогда и только тогда, когда существуют гладко вложенные трансверсальные к траекториям поверхности  $P_1$  и  $P_2$ , лежащие соответственно в атомах  $V_1$  и  $V_2$ , такие, что соответствующие им потоки Пуанкаре точно топологически эквивалентны, т.е. существует гомеоморфизм  $h : P_1 \rightarrow P_2$ , сопрягающий эти потоки.*

## Глава 2

# Вычисление $n$ -меток инварианта Фоменко-Цишанга

Обычно в физике и механике возникает следующая задача. Пусть даны две интегрируемые гамильтоновы системы. Надо узнать эквивалентны ли они в тонком топологическом смысле, т. е. существует ли гомеоморфизм, отображающий слоение Лиувилля одной системы в слоение Лиувилля другой. В большинстве случаев практически единственный способ решить эту задачу состоит в вычислении соответствующих инвариантов Фоменко-Цишанга.

В настоящей главе найдены явные соотношения между группой гомологий  $H_1(Q^3)$  и метками инварианта  $W^*(Q^3, v)$ . Так как в механике и физике обычно топология 3 многообразия  $Q^3$  известна изначально (или ее легко можно найти), то таким образом получается весьма эффективный способ нахождения  $n$ -меток. В конце главы в качестве применения развитой нами техники мы полностью вычисляем инвариант Фоменко-Цишанга для некоторых важных интегрируемых случаев движения твердого тела и, следовательно, получаем тонкую топологическую классификацию всех этих динамических систем.

## 2.1 Формулировка результатов

Пусть  $G$  – молекула, не имеющая атомов  $K$ . Рассмотрим в  $G$  тонкий подграф  $G^0$  состоящий из всех вершин молекулой  $G$  и всех ее тонких ребер. Уберем из  $G^0$  все семьи молекулы.

Из оставшихся связных компонент рассмотрим те, которые отличны от атомов  $A$ . В них существуют ребра, одна из вершин которых есть атом  $A$ . Для любой такой связной компоненты фиксируем раз и навсегда одно и только одно такое ребро. Множество всех таких ребер будем называть "множеством фиксированных ребер".

**Определение 16** Ребро молекулы  $G$  называется "существенным", если оно не принадлежит множеству фиксированных ребер и если обе его вершины не принадлежат семьям.

**Определение 17** "Энергии семьи"  $F \subset G$  будем называть число

$$E_G(F) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{I_0} \left( -\frac{\gamma(e)}{\alpha(e)} \right) + \sum_{I_1} \frac{\alpha(e)}{\beta(e)} + \sum_{I_2} \left( -\frac{\delta(e)}{\beta(e)} \right) + \sum_{I_3} \left( \frac{\alpha(e)}{\beta(e)} - \frac{\delta(e)}{\beta(e)} \right) \\ = n(F) + \sum_{I_1 \sqcup I_3} \varepsilon(e)r(e) + \sum_{(I_2 \sqcup I_3) \setminus \{e | r(e)=0\}} \varepsilon(e)(r(-e) - 1),$$

где

$e \in G$  – ориентированное ребро молекулы,

$\begin{bmatrix} \alpha(e) & \beta(e) \\ \gamma(e) & \delta(e) \end{bmatrix}$  – матрица склейки,

$n(F)$  –  $n$ -метка,

$r(e)$  –  $r$ -метка,

$I_0 = \{e \in F\}$

$I_1 = \{e \in G \mid v_0(e) \in F, v_1(e) \notin F\}$  – "выходящие" ребра,

$I_2 = \{e \in G \mid v_0(e) \notin F, v_1(e) \in F\}$  – "входящие" ребра,

$I_3 = \{e \notin F \mid v_0(e) \in F, v_1(e) \in F\}$  – "петли",

$v_0(e)$  – начало ребра  $e$ ,

$v_1(e)$  – конец ребра  $e$ ,

(-e) —ребро  $e$  с обратной ориентацией.

Иногда энергию семьи  $F$  мы будем обозначать просто через  $E(F)$ , опуская индекс  $G$ , указывающий в какой меченой молекуле вычисляется энергия семьи.

Подробные определения молекул, атомов,  $r$ -мсток,  $n$ -меток и  $\varepsilon$ -меток даны в §1.1, стр. 16.

**Замечание 4** Энергия семьи  $E(F)$  есть некоторое рациональное число, определение которого не зависит от выбора допустимых систем координат (это следует, например, из того, что  $E(F)$  выражается через меток). В частности, энергия семьи является тонким топологическим инвариантом гамильтоновой системы. С другой стороны, легко проверяется, что  $E(F)$  не зависит от ориентации ребер молекулы. При изменении ориентации  $Q^3$  энергия семьи  $E(F)$  меняет знак.

Для любой молекулы  $G$  без звездочек определим "полную энергию кручения", которая является целым числом, определенным с точностью до знака.

**Определение 18**. Пусть  $F_1, F_2, \dots$  — семейство меченой молекулы  $G$ . Внизу приведен список простейших молекул и для каждой из них определена "энергия кручения", которую мы обозначаем через  $N(G)$ . Через  $A_i$  обозначены различные атомы  $A$  молекулой  $G$ , а ребра выходящие из вершины с индексом  $i$  и входящие в вершину с индексом  $j$  обозначены через  $e_{ij}$ .

I) Для графа

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \left( A_2 \leftarrow F_1 \rightarrow A_3 \right),$$

по определению считаем, что

$$N(G) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_{12}\beta_{13}E(F_1),$$

где  $E(F_1)$  — энергия единственной семьи молекулы.

II) Для графа

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \left( \begin{array}{ccccc} A_4 & \leftarrow & F_1 & \rightarrow & F_2 \\ & & n_1 & & n_2 & \rightarrow & A_3 \end{array} \right),$$

имеет место

$$N(G) \stackrel{def}{=} \beta_{14}\beta_{23}\beta_{12} \left[ E(F_1)E(F_2) - \frac{1}{\beta_{12}^2} \right],$$

где  $E(F_i)$  – энергия семьи  $F_i$ .

III) Для графа

$$G \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} A_4 & \longleftarrow & F_3 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & A_3 \\ & & n_3 & & n_1 & & n_2 & & \end{pmatrix},$$

определяем

$$N(G) \stackrel{def}{=} \beta_{34}\beta_{31}\beta_{12}\beta_{23} \left[ E(F_1)E(F_2)E(F_3) - \frac{E(F_2)}{\beta_{31}^2} - \frac{E(F_3)}{\beta_{12}^2} \right].$$

IV) Для графа

$$G \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} & & A_2 \\ & \uparrow & \\ & F_1 & \\ & \downarrow & \\ & & A_3 \end{pmatrix},$$

имеет место

$$N(G) \stackrel{def}{=} \beta_{11}\beta_{12}\beta_{13} \left[ E(F_1) - \frac{2}{\beta_{11}} \right].$$

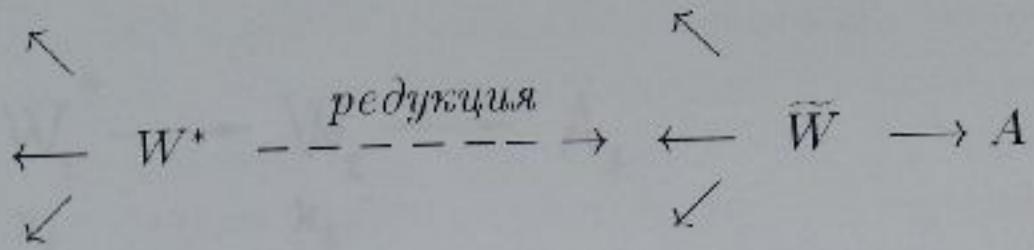
Здесь через  $\beta_{ij}$  обозначены знаменатели  $t$ -меток ребер  $e_{ij}$ . Заметим, что в случаях I)  $\div$  IV) числа  $\beta_{ij}$  отличны от нуля т.к., иначе  $F_i$  не были бы семьями.

Для произвольной молекулы  $G$ , не имеющей звездочек, определение  $N(G)$  будет дано в процессе доказательства Теоремы.

Теперь, покажем, как, имея выражение для  $N(G)$  через метки меченой молекулы  $G$  без звездочек, получить определение полной энергией кручения для меченой молекулы с таким же графом как и  $G$ , но с той разницей, что некоторые ее атомы имеют звездочки.

**Определение 19.** В случае, когда молекула  $G$  содержит звездочки, поступим следующим образом. Любой букве  $W^*$  со звездочкой сопоставим новую букву  $\tilde{W}$  (см. Рис.2.1), так, чтобы выполнялись следующие условия.

Рис. 2.1:



1)  $q(\widetilde{W}) = q(W^*) + \{ \text{число звездочек в } W^* \}$ , где  $q(W)$  – валентность буквы  $W$ .

2)  $g(\widetilde{W}) = g(W^*)$ , где  $g(W)$  – род буквы  $W$ .

3) Все вторые вершины новых ребер будут буквами  $A$  (эти ребра ориентируем по направлению к ним).

4) На всех новых ребрах поставим  $r$ -метку  $r = 1/2$  и  $\varepsilon$ -метку  $\varepsilon = 1$ .

5) Годится любая буква  $\widetilde{W}$ , для которой выполняются условия 1÷3. Проделывая эти операции для любой буквы со звездочками графа  $G$  и сохраняя значения  $r$ ,  $\varepsilon$  и  $n$ -метки на старых ребрах и семьях получим новую меченую молекулу  $\tilde{G}$ . Определим полную энергию кручения молекулы  $G$  со звездочками формулой

$$N(G) \stackrel{\text{def}}{=} N(\tilde{G}).$$

В этом равенстве справа стоит выражение  $N(\tilde{G})$  через  $n$ ,  $\varepsilon$  и  $n$ -метки меченой молекулы  $\tilde{G}$ .

Продемонстрируем это определение на примере.

**Пример 1** Пользуясь описанной выше процедурой, найдем чему равна полная энергия кручения в случае II) Определения 18, когда, например, семья  $F_1$  состоит из одного атома  $W_1^*$  имеющего одну звездочку. Другими словами, рассмотрим меченую молекулу показанную на Рис. 2.2. Тогда новая молекула  $\tilde{G}$  показана на Рис. 2.3. Пользуясь выражением для полной энергии кручения в случае II) находим

$$N(G) \stackrel{\text{def}}{=} 2\beta_{14}\beta_{23}\beta_{12} \left[ (n_1 + \varepsilon_{14}r_{14} + \varepsilon_{12}r_{12} + 1/2)(\varepsilon_{23}r_{23} + \varepsilon_{21}(r_{21} - 1)) - \frac{1}{\beta_{12}^2} \right].$$

Аналогично поступаем в остальных случаях.

Рис. 2.2:

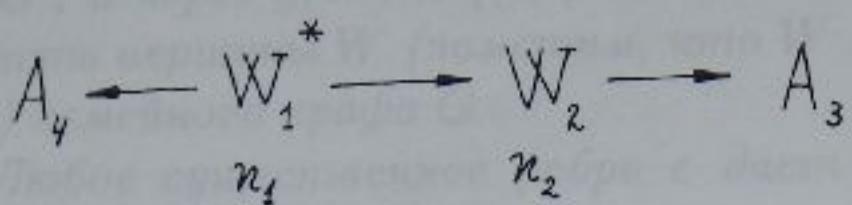
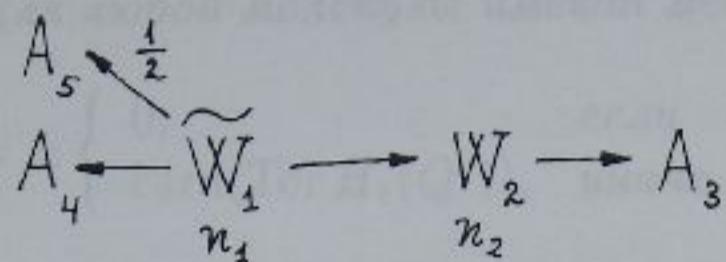


Рис. 2.3:



Чтобы легче сформулировать теорему, дадим следующее определение.

**Определение 20.** Пусть  $G$  — молекула ИБНГС. Если  $F$  — некоторая семья молекул  $G$ , то на  $F$  однозначно (с точностью до изоморфии) определено расслоение Зейферта, база которого, являющаяся двумерной ориентированной поверхностью с краем. Род этой поверхности будем называть “родом поверхности семьи  $F$ ” и будем обозначать через  $g(F)$ . Аналогично, “валентность семьи  $F$ ” будем называть число связных компонент базы расслоения Зейферта семьи  $F$  и будем обозначать через  $q(F)$ . Стягивая все семьи молекулой  $G$  в точку, получим некоторую новую молекулу. Ее будем обозначать через  $G'$  и будем называть “семейным графом”. Таким образом, в Определении 18 приведен список энтрегий кручения для простейших семейных графов.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть  $G$  — молекула некоторой ИБНГС. Рассмотрим ее семейный граф  $G'$ .

1) Имеют место следующие неравенства

$$rk(H_1(Q^3)) \geq b_1(G') + 2 \sum_{W \neq A} g(W),$$

$$rk(H_1(Q^3)) \leq \left( b_1(G') + 2 \sum_{W \neq A} g(W) \right) + \sum_{W \neq A} q(W).$$

где сумма берется по всем вершинам  $W$  семейного графа  $G'$ , которые не являются атомами  $A$ . Через  $b_1(G')$  обозначено первое число Бетти графа  $G'$ , а через  $g(W)$  и  $q(W)$  обозначены соответственно род и валентность вершины  $W$  (заметим, что  $W$  является либо атомом, либо семьей) семейного графа  $G'$ .

2) Любое существенное ребро  $e$  дает в  $H_1(Q^3)$  прямое слагаемое  $Z_{\beta(e)}$ . Если атом не принадлежит никакой семье, то все его звездочки дают независимые прямые слагаемые  $Z_2$ .

3) Для любой молекулы имеют место соотношения:

$$N(G) = \pm \begin{cases} 0, & \text{если } rkH_1(Q^3) > b_1(G') + 2 \sum_{W \neq A} g(W) \\ \text{card}(\text{Tor } H_1(Q^3)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Эти соотношения будем называть " $n$ -соотношениями".

**Замечание 5.** Соотношения пункта 3) Теоремы 2 дают нетривиальные соотношения на  $n$ -метки в случае, когда молекула не имеет внешних тонких нефиксированных ребер. В случае наличия внешних тонких ребер мы сначала будем применять Лемму 2(о редукции) на стр. 47.

Приведем теперь некоторые следствия

**Следствие 1.** Если  $rkH_1(Q^3) < 2$ , то все атомы плоские (т.е.  $g(W) = 0$ ). В частности, все атомы на гомологических 3-сферах и гомологических проективных 3-пространствах являются плоскими.

**Следствие 2** Если  $Q^3 \cong \{S^3, S^1 \times S^2, T^3 \text{ и их связные суммы}\}$ , то на существенных ребрах стоят метки 0 и  $\infty$ . Для  $Q^3 \cong RP^3$  на существенных ребрах стоят метки 0 или  $1/2$ . При этом метка  $1/2$  стоит только в одном месте.

**Следствие 3** Если график не имеет семьи, то знаменатели конечных  $n$ -меток не превосходят  $\text{card}(\text{Tor}(H_1(Q^3)))$ .

## 2.2 Доказательство теорем

Пусть  $G$  есть молекула некоторой ИБНГС на изоэнергетической поверхности  $Q^3$ . Допустим, что она не содержит атомов  $K$  и не имеет

**вида  $A - A$ .** Вершины молекулы, которые отличны от атома  $A$ , будем обозначать через  $W_1, \dots, W_L$ , а атомов  $A$  через  $A_{L+1}, \dots, A_{L+M}$ . Валентность атома  $W_i$  обозначим через  $q_i$ , а род поверхности атома обозначим через  $g_i$ . Иногда в формулах через  $W$  (без индекса) будем обозначать просто некоторую букву молекулы  $G$ . Пока будем предполагать, что зейфертова реализация атомов  $W_i$  не имеет особых слоев Зейфера (случай наличия особых слоев легко редуцируется к этому).

Ребра графа разбиваем на "внутренние" и "внешние".

**Определение 21.** Ребро называется "внутренним", если его концы отличны от атома  $A$  (например, петля всегда является внутренним ребром). Если один из концов ребра есть атом  $A$ , то ребро является "внешним".

Предположим сначала, что молекула  $G$  не имеет тонких внутренних ребер. Напомним, что мы договорились отождествлять атомы с их зейфертовыми реализациями. Таким образом, выражения типа "группа гомологий атома" вполне осмысленные.

Так как атом  $W_i$  не имеет звездочек, то он гомеоморфен прямому произведению  $P_i \times S^1$ , где  $P_i$  – некоторое допустимое сечение (см. Определение 7 на стр. 13). Следовательно,

$$H_1(W_i) \cong H_1(P_i) \oplus Z.$$

Выберем базисные циклы в группе гомологий  $H_1(W_i)$  следующим образом:

- а) В качестве цикла  $\xi^{(i)}$  выбираем ориентированный слой расслоения Зейфера.
- б) Ориентируем допустимое сечение  $P_i$  и выберем в группе гомологий  $H_1(F_g)$  базисные циклы так, как показано на Рис. 2.4. Упорядочим их следующим образом

$$(c_1^{(i)}, \dots, c_{q_i-1}^{(i)}; \xi^{(i)}; h_1^{(i)'}, h_1^{(i)''}, \dots, h_{g_i}^{(i)'}, h_{g_i}^{(i)''}).$$

Связем с допустимым сечением  $P_i$  допустимую систему координат на крае зейфертовой реализации атома  $W_i$ . Фиксируем произвольный тор Лиувилля  $T_k^{(i)}$ , принадлежащий краю атома  $W_i$ . Тогда поверхность

Рис. 2.4:

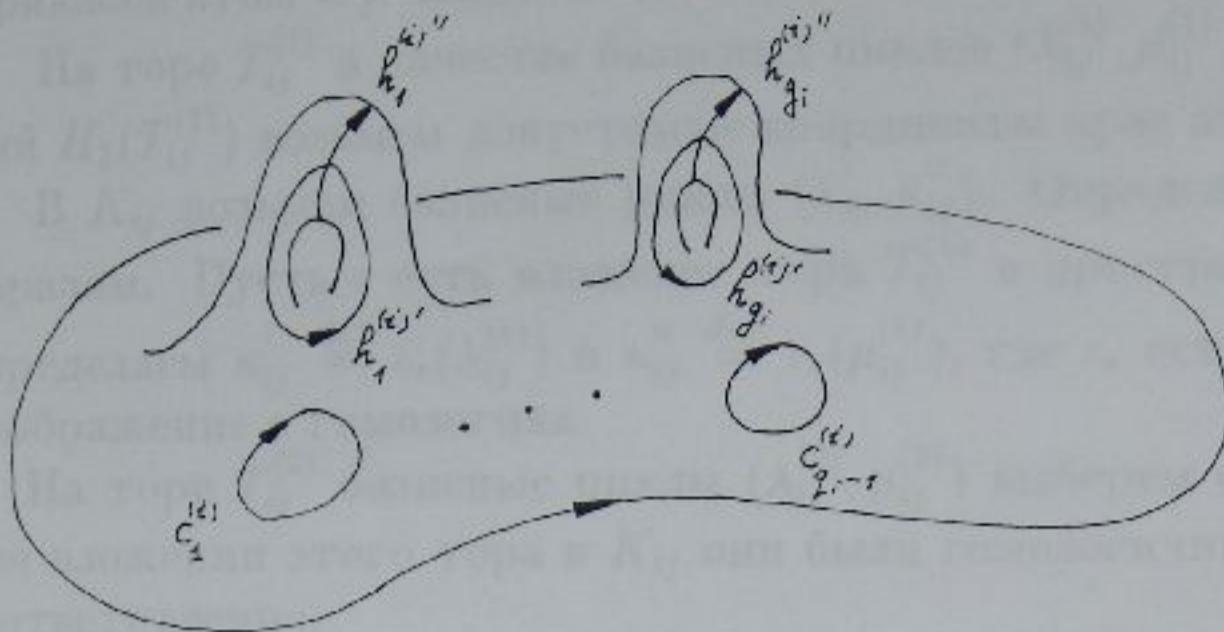


Рис. 2.5:



$P_i$  индуцирует допустимую систему координат  $(\lambda_k, \mu_k)$  на этом торе. Если через  $i$  обозначим естественное вложение  $i : T_k^{(i)} \hookrightarrow W_i$ , то ясно, что  $i_*(\lambda_k) = \xi^{(i)}$  и  $i_*(\mu_k) = e_k^{(i)}$ .

На полноториях  $A_i$  в качестве базисного цикла возьмем  $c_i$  — ориентированную потоком  $\text{grad } H$  критическую окружность. Выберем на крае  $\partial A_i$  допустимую систему координат. Обозначим ее через  $(\lambda_k, \mu_k)$ , где  $k$  есть индекс вершины  $W_k$ , с которым атом  $A_i$  имеет общее ребро. Тор Лиувилля  $\partial A_i$  обозначим через  $T_{ki}^2$ .

Любое внутреннее ребро графа  $G$  мы заменим на два внутренних ребра и новую вершину  $K_{ij}$  являющуюся однопараметрическим симметризмом торов Лиувилля (см. Рис. 2.5). Эти новые вершины будем называть "кольцами". В результате получим некоторый новый граф  $G'$ , где  $M_{ij}$  матрица склейки. Теперь выберем базисные циклы в "атоме"  $K_{ij}$  и на его крае  $\partial K_{ij} = T_{ij}^{(1)} \sqcup T_{ij}^{(2)}$ . Здесь через  $T_{ij}^{(1)}$  обозначен тор Лиувилля,

к которому приклеен атом  $W_i$ , а через  $T_{ij}^{(2)}$  – тор Лиувилля, к которому приклеен атом  $W_j$ . Индексы (1) и (2) соответствуют ориентации ребра.

На торе  $T_{ij}^{(1)}$  в качестве базисных циклов  $(\lambda_{ij}^{(1)}, \mu_{ij}^{(1)})$  в группе гомологий  $H_1(T_{ij}^{(1)})$  возьмем допустимые координаты края атома  $W_i$ .

В  $K_{ij}$  возьмем базисные циклы  $(\kappa'_{ij}, \kappa''_{ij})$ . Определим их следующим образом. Пусть  $\iota$  есть вложение тора  $T_{ij}^{(1)}$  в пространстве  $K_{ij}$ . Тогда определяем  $\kappa'_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \iota_*(\lambda_{ij}^{(1)})$  и  $\kappa''_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \iota_*(\mu_{ij}^{(1)})$ , где  $\iota_*$  есть индуцированное отображение в гомологиях.

На торе  $T_{ij}^{(2)}$  базисные циклы  $(\lambda_{ij}^{(2)}, \mu_{ij}^{(2)})$  выберем с условием, чтобы при вложении этого тора в  $K_{ij}$  они были гомологичны циклам  $\kappa'_{ij}$  и  $\kappa''_{ij}$  соответственно.

Если ребро является петлей с вершиной  $W_i$ , то новый атом будем обозначать через  $K_{ii}$ , а его границу через  $T_{ii}^{(1)}$  и  $T_{ii}^{(2)}$ . Если петель несколько, то будем ставить штрихи.

Разобьем изоэнергетическую поверхность  $Q^3$  на два подмножества  $X_1$  и  $X_2$ , где

$$X_1 \stackrel{\text{def}}{=} \coprod_{i=1}^L W_i,$$

$$X_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left( \coprod_{i=L+1}^{L+M} A_i \right) \sqcup \left( \coprod_{\{e - \text{внутреннее ребро}\}} K_e \right).$$

В последней формуле через  $K_e$  обозначено добавляемое кольцо на внутреннем ребре  $e$ .

Триада  $(Q^3; X_1, X_2)$ , очевидно, вырезаемая. Кроме того, имеем:

$$X_1 \cap X_2 = \left( \coprod_{\{e - \text{внешнее ребро } G\}} T_e^2 \right) \sqcup$$

$$\left( \coprod_{\{e - \text{внутреннее ребро } G\}} (T_e^{(1)} \sqcup T_e^{(2)}) \right),$$

где  $T_e^2$ ,  $T_e^{(1)}$  и  $T_e^{(2)}$  соответствующие торы Лиувилля.

Последовательность Майера-Виеториса для триады  $(Q^3; X_1, X_2)$  дает (см. [40, 41]):

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{\partial_*} & H_1(X_1 \cap X_2) & \xrightarrow{i_*} & H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) & \xrightarrow{j_*} & H_1(Q^3) & \longrightarrow \\ & \longrightarrow & & H_0(X_1 \cap X_2) & \xrightarrow{i_*} & H_0(X_1) \oplus H_0(X_2) & \xrightarrow{j_*} H_0(Q^3) \longrightarrow 0, \end{array}$$

где через  $i_*$  и  $j_*$  обозначены гомоморфизмы

$$i_*(c) = i_{1*}(c) - i_{2*}(c)$$

и

$$j_*(c_1, c_2) = j_{1*}(c_1) + j_{2*}(c_2).$$

В этих формулах через  $i_{k*}$  и  $j_{k*}$  обозначены гомоморфизмы, индуцированные вложениями  $i_k : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_k$  и  $j_k : X_k \hookrightarrow Q^3 (k = 1, 2)$ .

Очевидно, имеем:

$$\begin{aligned} H_0(X_1) &\cong Z^n, \\ H_0(X_2) &\cong Z^m, \\ H_0(X_1 \cap X_2) &\cong Z^p, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} n &\stackrel{def}{=} \{\text{число вершин молекулы степени} > 1\}, \\ m &\stackrel{def}{=} \{\text{число атомов } A\} + \{\text{число внутренних ребер}\}, \\ p &\stackrel{def}{=} \{\text{число ребер } G\} + \{\text{число внутренних ребер}\}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$m + n = \{\text{число вершин}\} + \{\text{число внутренних ребер}\}.$$

В силу точности имеем цепочку изоморфизмов абелевых групп:

$$Z \cong H_0(Q^3) \cong (H_0(X_1) \oplus H_0(X_2)) / \text{Im}(i_*),$$

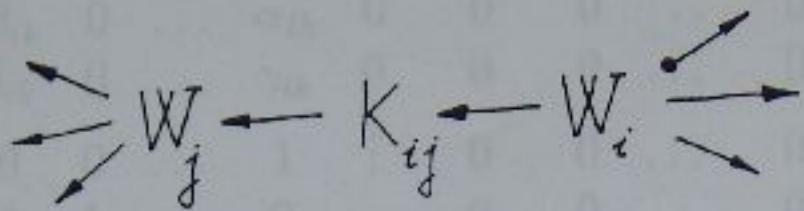
$$\text{Im}i_* \cong H_0(X_1 \cap X_2) / \text{Im}\partial_*,$$

Сравнивая ранги групп, получаем равенство

$$1 = (n + m) - (p - \text{rk}(\text{Im}(\partial_*))),$$

$$\text{rk}(\text{Im}\partial_*) = 1 - \{(m + n) - p\} = 1 - \chi(G),$$

Рис. 2.6:



где  $\chi(G)$  — эйлерова характеристика графа  $G$ . Отсюда получаем, что

$$Im\partial_* \cong Z^{b_1(G)}, \text{ где } b_1(G) \text{ — первое число Бетти.}$$

Из того, что  $Im\partial_*$  является свободной группой, следует неканонический изоморфизм:

$$H_1(Q^3) \cong (Im(j_*)) + Z^{b_1(G)},$$

$$H_1(Q^3) \cong [(H_1(X_1) \oplus H_1(X_2))/Im(i_*)] + Z^{b_1(G)},$$

$$i_* : H_1(X_1 \cap X_2) \longrightarrow H_1(X_1) \oplus H_2(X_2).$$

Чтобы понять, как устроен гомоморфизм  $i_*$  в выбранных нами координатах, рассмотрим часть графа  $G$ , показанную на Рис. 2.6.

Базисы в группах гомологий  $H_1(W_i)$  и  $H_1(W_j)$ , как договорились раньше, обозначим соответственно

$$(c_1^{(i)}, \dots, c_{q_i-1}^{(i)}; \xi^{(i)}; h_1^{(i)}, \dots, h_{g_i}^{(i)})$$

и

$$(c_1^{(j)}, \dots, c_{q_j-1}^{(j)}; \xi^{(j)}; h_1^{(j)}, \dots, h_{g_j}^{(j)}).$$

Точки на рисунке обозначены те граничные торы Лувиля, на которых меридианы допустимой системы координат не входит в выбранном нами базисе в группу гомологий соответствующего атома. Цифры  $k$  в кружочках вокруг атома  $W_i$  означают, что меридианы соответствующих торов взяты в качестве базисных циклов  $c_k^{(i)}$ .

Гомоморфизм  $i_*$  в координатах имеет вид

$$\left( \begin{array}{cccccccccc} \beta_{ik} & 0 & \dots & \alpha_{ik} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \delta_{ik} & 0 & \dots & \gamma_{ik} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & -\textcircled{1} & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & -\textcircled{1} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \beta_{ij} & 0 & \dots & -\delta_{ij} & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_{ij} & 0 & \dots & \gamma_{ij} & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & \end{array} \right)$$

Нашей дальнейшей целью будет диагонализация этой матрицы при помощи целочисленных преобразований над строками и столбцами. Мы ограничимся умножением строки (столбца) на целое  $k$  и добавлением к другой строке (столбцу).

Сделаем несколько очевидных замечаний.

1) Циклы ( $h^i$ ) дают свободные элементы в  $H_1(Q^3)$ . Их число есть

$$\sum_{W \neq A} 2g(W).$$

Таким образом, первая часть теоремы доказана, т. е. доказано неравенство

$$rkH_1(Q^3) \geq b_1(G) + 2 \sum_{W \neq A} g(W).$$

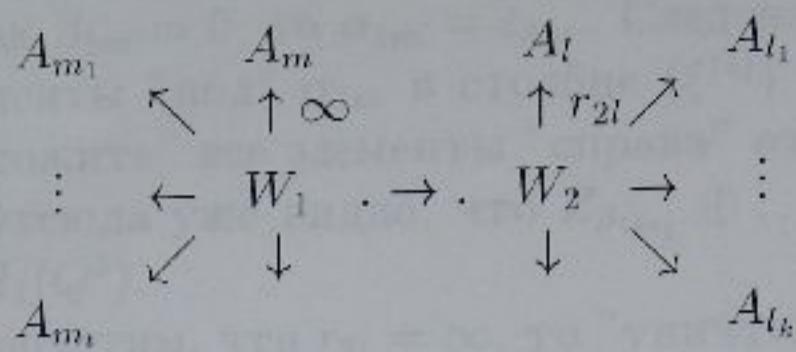
2) Без ограничения общности, число (-1) в столбце ( $e_k$ ) можно считать матричной единицей. Следовательно, после факторизации цикл  $e_k$  обращается в 0 (в  $H_1(Q^3)$ ).

3) Кроме того, числа (-1) "в кружочках" после вычитания из (-1) расположенных под ними, тоже являются матричными, и, следовательно, матрица упрощается. Отсюда следует грубое неравенство

$$rkH_1(Q^3) \leq (b_1(G) + 2 \sum_{W \neq A} g(W)) + \sum_{W \neq A} q(W),$$

где  $q(W)$  – валентность атома  $W$ , (поскольку  $\sum_{W \neq A} q(W)$  есть число столбцов новой матрицы).

Рис. 2.7:



После описанных выше упрощений матрица принимает вид

$$\begin{pmatrix}
 \beta_{ik} & 0 & \dots & \alpha_{ik} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\
 0 & 0 & \dots & -1 & \beta_{ij} & 0 & \dots & -\delta_{ij} & \dots \\
 0 & -1 & \dots & 0 & -\alpha_{ij} & 0 & \dots & \gamma_{ij} & \dots \\
 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & \\
 \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & &
 \end{pmatrix}$$

**Определение 22** Эту матрицу мы будем обозначать через  $M(G)$  и называть "характеристической" матрицей молекулы  $G$ .

**Замечание 6** Нетрудно проверить, что характеристическая матрица является квадратной порядка  $\sum_{W \neq A} q(W)$ .

Теперь докажем вторую часть теоремы. Для этого рассмотрим ситуацию, показанную на Рис. 2.7.

Тогда характеристическая матрица  $M(G)$  имеет вид

$$\begin{pmatrix}
 \beta_{1m} & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1m} & & & \dots \\
 0 & \beta_{1m_1} & & \vdots & \alpha_{1m_1} & 0 & & \dots \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\
 0 & \dots & \beta_{1m_t} & \alpha_{1m_t} & & & & \dots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -\beta_{12} & -\beta_{12} & \dots & -\beta_{12} & -\delta_{12} & \dots \\
 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \alpha_{12} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{12} & \gamma_{12} & \dots \\
 & & & & & \beta_{2l} & 0 & & & \alpha_{2l} & \dots \\
 0 & & & & & 0 & \beta_{2l} & & & \alpha_{2l_1} & \dots \\
 & & & & & & & & & \vdots & \\
 & & & & & & & & & & \beta_{l_k}
 \end{pmatrix}$$

На Рис. 2.7 точками “.” обозначен тот кусок края атома, меридиан которого не является базисным элементом выбранного нами базиса группы  $H_1(W)$ . Так как  $\beta_{1m} = 0$ , то  $\alpha_{1m} = \varepsilon_{1m}$ . Следовательно, можно “уничтожить” все элементы “под”  $\alpha_{1m}$  в столбце  $(\xi^{(1)})$ . Аналогичным образом, можно “уничтожить” все элементы “справа” от первой единицы в строке  $(\mu_{12}^{(2)})$ . Отсюда уже видно, что  $Z_{\beta_{1m_1}} \oplus \dots \oplus Z_{\beta_{1m_t}}$  будет прямым слагаемым в  $H_1(Q^3)$ .

Если, кроме того, допустим, что  $r_{2l} = \infty$ , то “уничтожая” при помощи  $\alpha_{2l} = \varepsilon_{2l}$  столбец  $(\xi^{(2)})$  и все справа от первого  $-\beta_{12}$ , мы видим, что появляется дополнительное слагаемое  $Z_{\beta_{12}}$  в группе  $H_1(Q^3)$ . Аналогично рассматриваются остальные случаи существенных ребер.

Теперь перейдем к доказательству последней части теоремы.

Рассмотрим произвольную молекулу  $G$ . Согласно ранее доказанному

$$H_1(Q^3) \cong A \oplus Z^{b_1(G)} \oplus Z^{\sum_{W \neq A} 2g(W)},$$

где

$$A \cong \langle e_1, \dots, e_k \rangle / \langle M(G)e \rangle,$$

$e_i$  – базисные элементы свободной конечнопорожденной абелевой группы,  $e$  – столбец  $[e_1, \dots, e_k]^T$ , а  $M(G)$  – характеристическая матрица молекулы  $G$ . Напомним, что пока мы рассматриваем только случай, когда молекула  $G$  не имеет тонких внутренних ребер. В этом предположении определим “полную энергию кручения” молекулы  $G$  по следующей формуле:

$$N(G) \stackrel{def}{=} \det M(G).$$

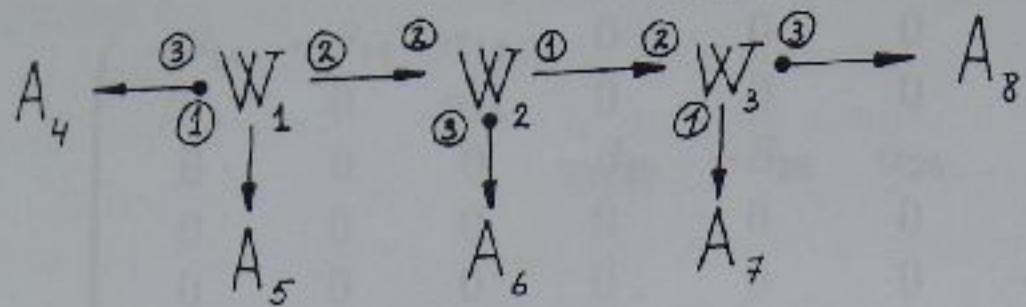
Применяя целочисленные и обратимые преобразования над строками и столбцами  $M(G)$ , мы можем привести ее к диагональному виду. Следовательно, если  $rkA \geq 1$ , то на диагонали стоит как минимум один нуль, и, значит,  $N(G) = 0$ . Если  $rkA = 0$ , то очевидно, что

$$N(G) = \text{card}(\text{Tor } H_1(Q^3)).$$

Заметим, что  $N(G)$  для любого фиксированного графа должна быть функцией меток, так как  $Q^3$  восстанавливается по графу с метками с точностью до гомеоморфизма (см. [3]).

Теперь найдем явный вид полной энергии кручения  $N(G)$  для молекул, которые встречаются в гамильтоновой механике. Замечательно то,

Рис. 2.8:



что  $N(G)$  является рациональной функцией, зависящей лишь от энергии смеси молекул и знаменателей  $\tau$ -меток. Так как наша цель состоит в вычислении  $\mu$ -меток для конкретных молекул, возникающих в классической механике, то мы ограничимся вычислением полной энергии кручения лишь для этих молекул.

Рассмотрим сначала молекулу, показанную на Рис. 2.8.

Напомним следующие важные соглашения.

- 1) Все атомы занумерованы различными целыми числами.
- 2) Каждый атом валентности больше единицы имеет "ребро с точкой". Это означает, что меридиан допустимой системы координат соответствующего граничного тора не входит в выбранный нами базис в группы гомологий атома  $W_i$ .
- 3) Число  $k$  в кружочках близи каждого атома валентности больше единицы означает, что соответствующие меридианы граничных торов задают базисные циклы  $c_k^{(i)}$  в группе гомологий  $H_1(W_i)$ .

Согласно уже доказанному мы имеем, что первая группа гомологий изоэнергетической поверхности  $Q^3$  изоморфна следующей

$$H_1(Q^3) \cong Z^{2(g_1+g_2+g_3)} + \langle c_1, \dots, c_k \rangle / \langle M(G)c \rangle,$$

где  $g_i$  есть род поверхности атома  $W_i$ , а  $M(G)$  — характеристическая матрица рассматриваемого графа. В рассматриваемом случае характе-

ристическая матрица равна

$$\left( \begin{array}{ccccccccc} -\beta_{14} & -\beta_{14} & \alpha_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{15} & 0 & \alpha_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_{26} & -\beta_{26} & \alpha_{26} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{37} & 0 & \alpha_{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{38} & -\beta_{38} & \alpha_{38} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \beta_{12} & -\delta_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\alpha_{12} & \gamma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \beta_{23} & -\delta_{23} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} & \gamma_{23} \end{array} \right).$$

Предположим, что все  $r$ -метки отличны от  $\infty$ . Обозначим такую мечетную молекулу через  $G$ . Тогда, вычисля определитель характеристической матрицы,  $M(G)$  находим

$$N(G) = -\beta_{14}\beta_{15}\beta_{12}\beta_{26}\beta_{23}\beta_{37}\beta_{38} \left\{ E(W_1)E(W_2)E(W_3) - \frac{E(W_1)}{\beta_{23}^2} - \frac{E(W_3)}{\beta_{12}^2} \right\}.$$

**Предположим теперь, что молекула  $G$  имеет тонкие внутренние ребра.** Рассмотрим тогда семейный граф  $G'$  мечепой молекулой  $G$ . Фиксируем в  $G'$  некоторую вершину  $W_i$ , которой соответствует в молекуле  $G$  семья  $F_i$ , имеющая тонкое ребро. На всех атомах, которые входят в семью  $F_i$ , можно выбрать допустимые сечения так, чтобы матрицы склейки на тонких ребрах семьи были

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{bmatrix},$$

где  $\varepsilon$  есть  $\varepsilon$ -метка соответствующего ребра. Меняя теперь, если необходимо, ориентацию слоя расслоения Зейферта атомов семьи (сохраняя при этом допустимые сечения) и индуцируя допустимые координаты на краях, мы добьемся того, что все матрицы склейки на внутренних тонких ребрах будут

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что после этого некоторые матрицы склейки на граничных (т.е. не тонких) ребер семьи  $F_i$  поменяют знак. Без ограничения общности можно считать, что все допустимые сечения атомов семьи склеены

в некотором общем сечении  $P_i$ . Это сечение индуцирует допустимые системы координат на краях семьи  $F_i$ . Ясно, что при надлежащем выборе ориентации слоя эти допустимые координаты на граничных торах семьи совпадают с уже описанными выше.

Применим теперь доказанные утверждения к семейному графу  $G'$ , рассматривая при этом любую семью  $F_i$  как некоторый атомом  $W_i$ . Допустимые координаты на атомах семьи  $F_i$  и на атоме  $W_i$  уже выбраны. Определим полную энергию кручения молекулы  $G$ , имеющей тонкие внутренние ребра, формулой

$$N(G) \stackrel{\text{def}}{=} N(G').$$

После этого утверждения 1)  $\div$  3) Теоремы 2 следуют из уже доказанного ранее.

Теперь докажем формулу III) из Определения 18 в случае, когда имеются тонкие внутренние ребра. По определению имеем

$$N(G) \stackrel{\text{def}}{=} \prod \beta'_{ij} \left[ E(W_1)E(W_2)E(W_3) - \frac{E(W_2)}{\beta'^2_{31}} - \frac{E(W_3)}{\beta'^2_{12}} \right].$$

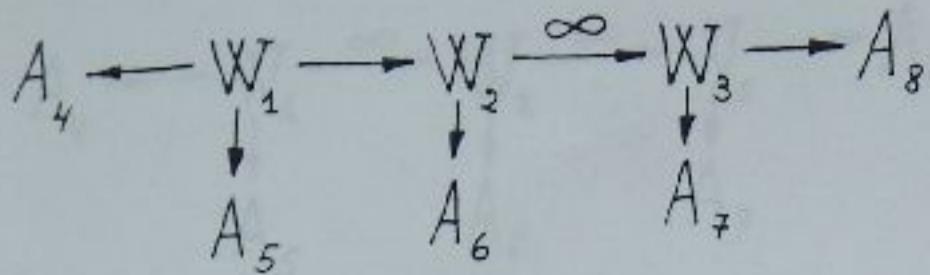
Напомним, что мы так выбрали допустимые координаты на краях атомов семьи  $F_i$  молекулы  $G$  и допустимые координаты на краях атомов  $W_i$  семейного графа  $G'$ , что матрицы склейки на ребрах атомов  $W_i$  и соответствующих им "граничных" ребрах семейств  $F_i$  отличаются, быть может, только знаком. Вспоминая теперь, что энергия семьи не зависит от выбора допустимых сечений и ориентации ребер, вычислим  $E(F_i)$  для допустимых координат, которые мы уже фиксировали, в случае, когда все граничные ребра семьи направлены вовне. Имеем, что

$$E_G(F_i) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}} = \sum_j \frac{\alpha'_{ij}}{\beta'_{ij}},$$

где первая сумма берется по всем граничным ребрам семьи  $F_i$ , а вторая по всем ребрам атома  $W_i$  в семейном графе  $G'$ . Следовательно, доказано, что  $E_G(F_i) = E_{G'}(W_i)$ . В частности находим, что

$$N(G) \stackrel{\text{def}}{=} \pm \prod \beta_{ij} \left[ E(F_1)E(F_2)E(F_3) - \frac{E(F_2)}{\beta^2_{31}} - \frac{E(F_3)}{\beta^2_{12}} \right].$$

Рис. 2.9:



Тем самым формула III) Определения 18 доказана. Чтобы доказать остальные формулы, рассмотрим снова молекулу, показанную на Рис. 2.8. Предположим, что  $r$ -метка, стоящая на ребре  $e_{23}$  равна  $\infty$ , а все остальные  $r$ -метки отличны от  $\infty$ . Обозначим семью  $W_2 \sim W_3$  через  $W_2$  и новую молекулу обозначим через  $G'$  (см. Рис. 2.9). Новую молекулу обозначим через  $N(G')$ , имеем

$$\begin{aligned} N(G') = & -\beta_{14}\beta_{15}\beta_{12}\beta_{26}\beta_{23}\beta_{37}\beta_{38} \left\{ E(W_1)\delta_{23} \left[ \left( -\frac{\delta_{12}}{\beta_{12}} + \frac{\alpha_{26}}{\beta_{26}} \right) \left( \frac{\alpha_{38}}{\beta_{38}} + \frac{\alpha_{37}}{\beta_{37}} \right) \right. \right. \\ & + \frac{\alpha_{23}}{\beta_{23}} \left( \frac{\alpha_{38}}{\beta_{38}} + \frac{\alpha_{37}}{\beta_{37}} \right) - \frac{\delta_{23}}{\beta_{23}} \left( -\frac{\delta_{12}}{\beta_{12}} + \frac{\alpha_{26}}{\beta_{26}} \right) \left. \right] - E(W_1)\beta_{23} \left[ \frac{\alpha_{23}\delta_{23}}{\beta_{23}\beta_{24}} + \frac{1}{\beta_{23}^2} \right] \\ & \left. \left. + \frac{\delta_{23}}{\beta_{12}^2} - \beta_{23} \frac{\frac{\alpha_{38}}{\beta_{38}} + \frac{\alpha_{37}}{\beta_{37}}}{\beta_{12}^2} \right\}. \right. \end{aligned}$$

Теперь, пользуясь тем, что  $\alpha_{23}\delta_{23} - \beta_{23}\gamma_{23} = -1$  получаем, что второе слагаемое в прямоугольной скобке равно  $-\gamma_{23}E(W_1)$ . Полагая в этой формуле  $\beta_{23} = 0$  и, замечая, что в этом случае  $\alpha_{23} = \epsilon_{23} = -\delta_{23}$ , получаем формулу

$$N(G') = -\epsilon_{23}\beta_{14}\beta_{15}\beta_{12}\beta_{26}\beta_{37}\beta_{38} \left\{ E_{G'}(W_1)E_{G'}(\tilde{W}_2) - \frac{1}{\beta_{12}^2} \right\}.$$

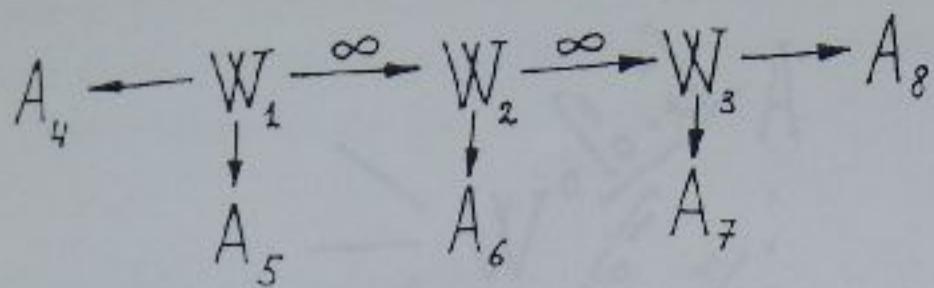
Совершенно аналогично доказывается, что для молекулы  $G''$  имеет место формула

$$N(G'') = -\epsilon_{12}\epsilon_{23}\beta_{14}\beta_{15}\beta_{26}\beta_{37}\beta_{38}E_{G'}(\tilde{W}_1),$$

где через  $\tilde{W}_1$  обозначена семья  $W_1 \sim W_1 \sim W_3$  (см. Рис. 2.10). Здесь мы предполагаем, что на внешних ребрах  $r$ -метки отличны от  $\infty$ .

**Замечание 7.** Тем самым, формула для вычисления полной инвариантности  $N(G)$  получена не только в случае III), но и в случаях I) и II).

Рис. 2.10:



Таким образом, в случае, когда молекула не содержит звездочек утверждение теоремы доказано. Осталось рассмотреть случаи, когда молекула содержит звездочки.

Пусть  $W^*$  есть атом, имеющий звездочку, т.е. особый слой типа (2,1) расслоения Зейферта атома  $W^*$ . Ориентация на 3-многообразии  $Q^3$  фиксирована, и тем самым на атоме  $W^*$  задана ориентация. Рассмотрим замкнутую регулярную окрестность особого слоя (топологически это есть просто полноторие  $D^2 \times S^1$ ). Обозначим ее через  $A$ , а замыкание ее дополнения в  $W$  через  $\tilde{W}$ . На граничном торе  $T^2 = \partial A = \partial \tilde{W}$  рассмотрим два базиса в группе гомологий  $H_1(T^2)$ :  $(\lambda', \mu')$  и  $(\lambda, \mu)$ . Пусть  $D^2$  есть некоторый меридиональный диск полнотория  $A$ . Ориентируем его так, чтобы его ориентация вместе с ориентацией критической окружности (заданной потоком  $v$ ) давала противоположную ориентацию 3-многообразия  $W^*$ . Цикл  $\bar{\lambda}$  определим как ориентированную границу диска  $D^2$ . Если через  $\mu_0$  обозначим базисный цикл в  $H_1(A)$ , ориентации которого совпадает с ориентацией критической окружности, индуцируемой полем  $sgrad H$ , то тогда цикл  $\bar{\mu}$  однозначно определяется условиями:

$$1) \quad i_*(\bar{\mu}) = \mu_0,$$

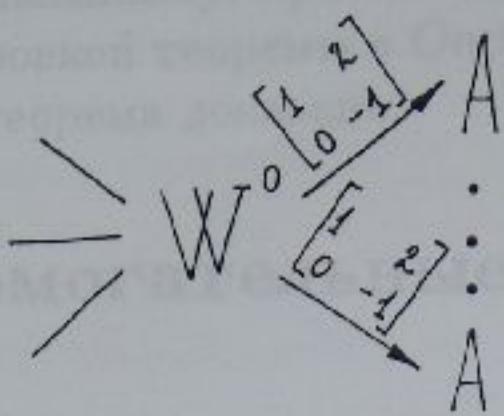
$$2) \quad \chi = \lambda + 2\bar{\mu},$$

где  $\chi$  есть ориентированный слой расслоения Зейферта, а  $i$  есть вложение граничного тора  $T^2$  в полнотории  $A$ . В качестве  $\lambda'$  выбираем слой расслоения Зейферта. Тогда цикл  $\bar{\mu}'$  однозначно определяется условием, что матрица склейки есть

$$\begin{cases} \lambda &= \lambda' + 2\bar{\mu}' \\ \mu &= -\bar{\mu}' \end{cases}$$

Обозначим через  $W^0$  дополнение в атоме  $W$  ко всем регулярным окрестностям особых слоев расслоения Зейферта атома  $W$ . Выберем на  $W^0$

Рис. 2.11:



допустимое сечение (см. Определение 7, стр. 13). Тогда на граничном торе  $\partial A$  оно высекает допустимую систему координат  $(\lambda', \mu')$ .

Рассмотрим теперь, меченую молекулу  $G$  некоторой ИБНГС. Представим изоэнергетическую поверхность  $Q^3$  как объединение атомов. Допустим, что один из них есть наш атом со звездочкой  $W^*$ . Выберем на всех атомах допустимые сечения. Тогда 3-многообразие  $W^*$  является склейкой многообразия  $W^0$  с конечным числом полноториев. Из выше сказанного следует, что на краях этих полноториев можно так выбрать допустимые координаты, чтобы матрицы склейки с 3-многообразием  $W^0$  имели вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Координаты на краях 3-многообразия  $W^0$  индуцируем, исходя из ранее фиксированного допустимого сечения. Следовательно, изоэнергетическую поверхность  $Q^3$  можно представить в виде склейки, изображенной графом  $\tilde{G}$  на Рис. 2.11. Применяя к этой молекуле (уже без звездочек) доказанную часть теоремы получаем пункты 1) и 2) Теоремы 2 в общем случае.

Определим полную энергию кручения молекулы  $G$  формулой

$$N(G) \stackrel{\text{def}}{=} N(\tilde{G}).$$

Без ограничения общности можно считать, что атом  $W^*$  является семьей в молекуле  $G$ . Тогда "атом"  $W^*$  будет семьей в молекуле  $W$ . Ясно, что для энергии семейств имеет место соотношение

$$E_{\tilde{G}}(W^0) = E_G(W^*) + (N - p)/2.$$

Таким образом, случай наличия звездочек очевидным образом сводится к уже доказанному, при помощи редукции, которую мы описали перед формулировкой теоремы в Определении 19.

Тем самым теорема доказана.

## 2.3 Вспомогательные утверждения и леммы

В этом параграфе мы сформулируем несколько простых утверждений касающихся меток инварианта Фоменко-Цишанга, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

В случае когда нет звездочек имеет место

**Лемма 1.** Энергия семьи  $F$  выражается через метки меченой молекулы по следующей формуле

$$E(F) = n(F) + \sum_{I_1 \sqcup I_3} \varepsilon(e)r(e) + \sum_{(I_2 \sqcup I_3) \setminus \{e | r(e)=0\}} \varepsilon(e)(r(-e) - 1).$$

Определение множеств  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  дано в Определение 17 на стр. 25.

Доказательство этой леммы сразу следует из определений.

Заметим, что энергия семьи и  $\varepsilon$ -метки не зависят от ориентации ребер. С другой стороны  $n$  и  $r$ -метки при замене ориентации ребер вообще говоря меняются. Сформулируем соответствующие утверждения.

**Утверждение 3.** При замене ориентации ребра  $e_0$  его  $r$ -метка меняется следующим образом.

- 1) Если  $r(e_0) = 0$ , то  $r(-e_0) = 0$ .
- 2) Если  $r(e_0) = \infty$ , то  $r(-e_0) = \infty$ .
- 3) Если  $r(e_0) = \frac{p}{q}$ ,  $p \neq 0$ ,  $q \neq 0$  и  $(p, q) = 1$ , то  $r(-e_0) = \frac{p^*}{q}$ , где  $p^*p = 1$  в кольце  $Z_q$ .

Пусть  $G$  – меченая молекула ИБНГС. Рассмотрим в ней произвольную семью  $F$  и фиксируем некоторое ориентированное ребро  $e_0$ . Предположим, что хотя бы одна вершина этого ребра принадлежит семье  $F$ . Напомним, что через  $(-e_0)$  мы обозначаем ребро  $e_0$  с противоположной ориентацией. Имеет место

**Утверждение 4.** Обозначим через  $G'$  меченую молекулу  $G$ , в которой мы поменяли ориентацию ребра  $e_0$ . Обозначим через  $n'(F)$   $n$ -метку семьи  $F$  в молекуле  $G'$ , а через  $n(F)$   $n$ -метку семьи  $F$  в молекуле  $G$ . Тогда эти числа связаны соотношениям:

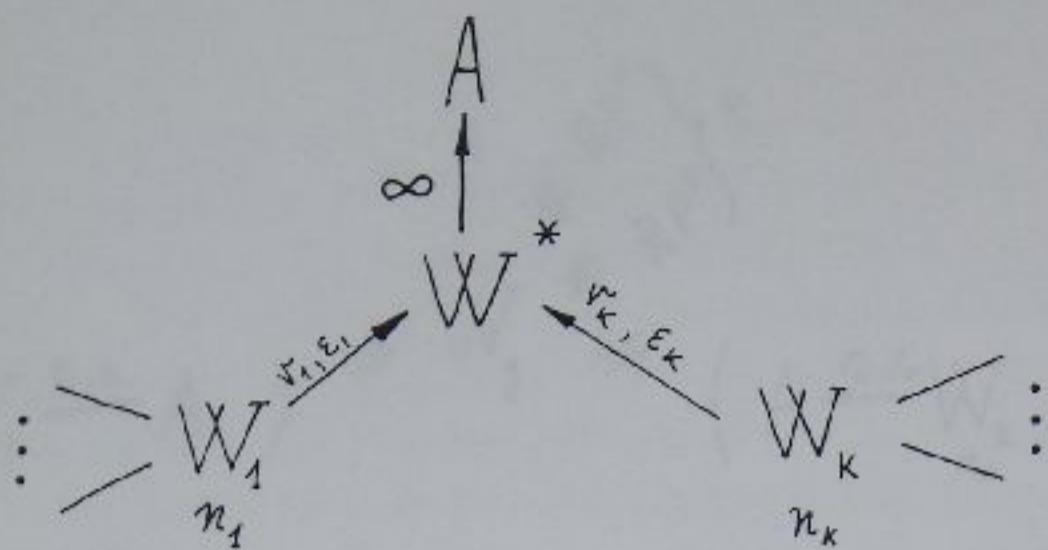
- 1) Если  $r(e_0) = 0$ , то  $n'(F) = n(F)$ ;
- 2) Если  $r(e_0) = \infty$ , то  $n'(F) = n(F)$ ;
- 3) Если  $e_0$  – петля семьи  $F$  (т.е., если обе ее вершины принадлежат семье  $F$ ), то  $n'(F) = n(F)$ ;
- 4) Если ребро  $e_0$  выходит из семью  $F$  (т.е.  $e_0 \in I_1$ ), то  $n'(F) = n(F) + \varepsilon(e_0)$ ;
- 5) Если ребро  $e_0$  оходит в семью  $F$  (т.е.  $e_0 \in I_2$ ), то  $n'(F) = n(F) - \varepsilon(e_0)$ .

Когда определяются метки меченой молекулы, то считается, что ориентация изоэнергетической поверхности  $Q^3$  изначально фиксирована. Поменям ориентацию  $Q^3$  на противоположную и снова вычислим метки. Имеет место следующее утверждение.

**Утверждение 5.** Предположим, что молекула отлична от  $A - A$ . Тогда при изменении ориентации изоэнергетической поверхности  $\varepsilon$ -метка, стоящая на ребре  $e_0$ , меняется следующим образом:

- 1) Если  $r(e_0) \neq \infty$ , то
  - а) в случае, когда ребро  $e_0$  внутреннее,  $\varepsilon$ -метка меняет знак;
  - б) в случае, когда ребро  $e_0$  внешнее,  $\varepsilon$ -метка знак не меняет;
- 2) Если  $r(e_0) = \infty$ , то

Рис. 2.12:



- a) в случае, когда ребро  $e_0$  внутреннее,  $\varepsilon$ -метка этого ребра не меняется;
- b) в случае, когда ребро  $e_0$  внешнее,  $\varepsilon$ -метка меняет знак.

Теперь сформулируем и докажем лемму, которая приводит любую молекулу к связной сумме молекул без внешних тонких ребер.

**Лемма 2 (о редукции молекулы).** Рассмотрим некоторую молекулу  $G$ , отличную от молекулы  $A = A$ . Предположим, что множество фиксированных ребер не пусто. Другими словами, предположим, что существует внешнее ребро  $e_0$ ,  $\varepsilon$ -метка которого равна  $\infty$ . Ясно, что это ребро связывает атом  $A$  с некоторым седловым атомом, имеющим, например,  $r$  звездочек ( $r \geq 0$ ). Обозначим его через  $W^*$ . Рассмотрим часть молекулы  $G$ , показанную на Рис. 2.12. Тогда изотермическая поверхность  $Q^3$  исчезающей молекулы  $G$  гомеоморфна многообразию, являющемуся связной суммой молекул (см. Рис. 2.13). Отметим, что в новые молекулы все  $\varepsilon$ ,  $r$  и  $n$ -метки сохраняются. Здесь через  $W_d$  обозначено расслоение Зейферта без особых слов, где база — сфера с  $d$  ручками и с одной сыркой. Число  $d$  есть род поверхности атома  $W^*$ . Многообразие  $\tilde{W}_d = A$  является склейкой многообразия  $\tilde{W}_d$  с полигоном  $A$ . Допустимая система координат на "атоме"  $\tilde{W}_d$  выбирается так, как и на любом другом седловом атоме (см. Определение 7). Например, в случае, когда атом  $W^*$  плоский (т.е.  $d = 0$ ), то многообразие  $\tilde{W}_d = A$  гомеоморфно сфере  $S^2$ .

**Пример 2** Применив эту лемму, например, к молекуле, пока занятой на

Рис. 2.13:

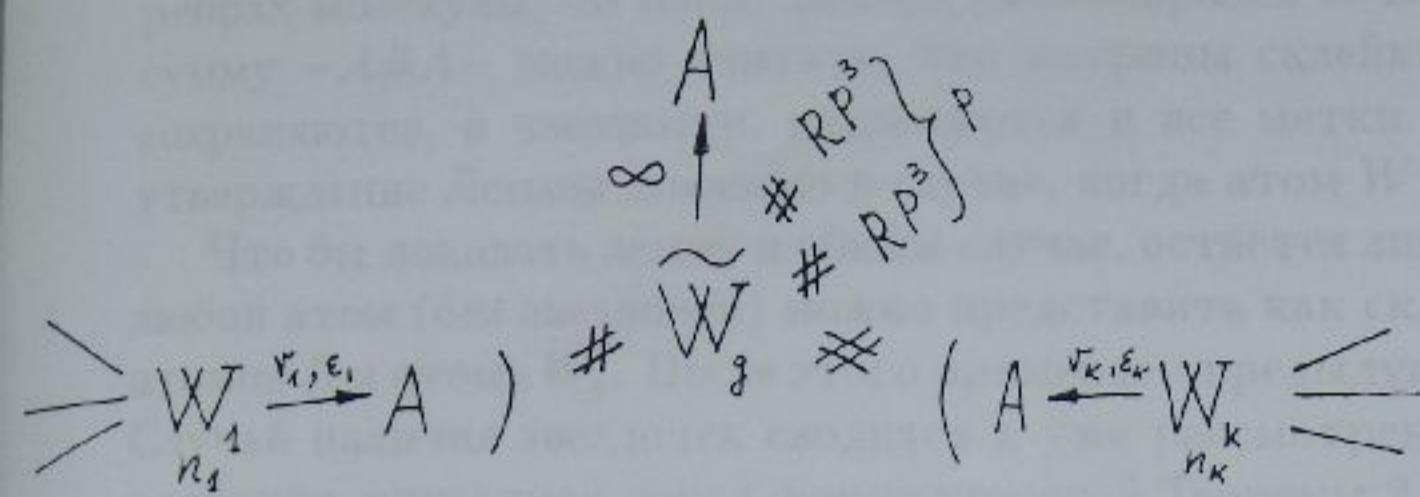


Рис. 2.14:

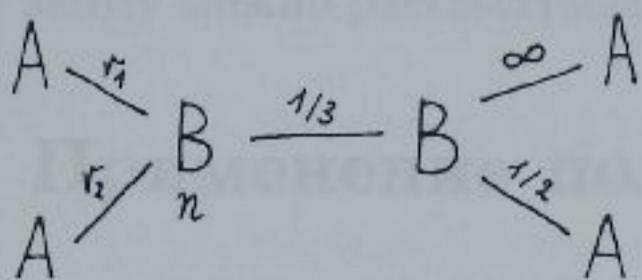
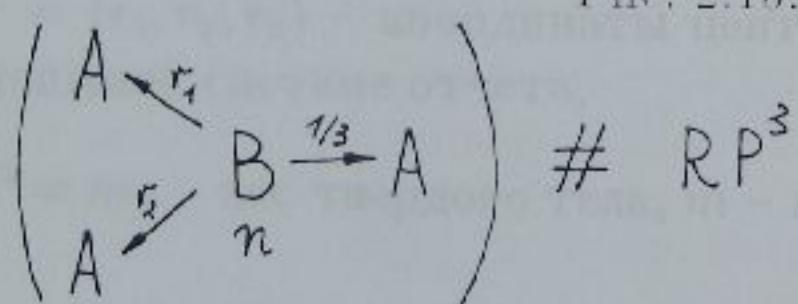


Рис. 2.14, получаем, что ее изоэнергетическая поверхность гомоморфна связной сумме, показанной на Рис. 2.15.

Доказательство. В книге [4] на стр. 254 доказано, что если к расслоению Зейферта без особых слоев с базой  $N^2$  (т.е. двумерный диск  $D^2$  с двумя дырками) приклейм полный тор так, что бы его меридиан (т.е. граница некоторого меридианного диска полного тора) после склейки был изотопен слою расслоения Зейферта, то в результате получим связную сумму двух полноториев. Кроме этого, из приведенного там доказательства видно, что слои расслоения Зейферта после склейки стягиваются в точку. В наших обозначениях это означает, что многообразие  $= B \overset{\cong}{=} A$  гомоморфно связной сумме двух полноторий (атомов  $A$ ) и, что меридианы этих полноториев являются слоями расслоения Зейферта. Следовательно, если на краях атомов молекулы  $C$  фиксируем некоторые допустимые

Рис. 2.15:



системы координат и фиксируем соответствующие матрицы склейки на ребрах молекулы, то после замены многообразия  $= \overset{\infty}{B} - A$  на связную сумму  $-A\#A-$  можно считать, что матрицы склейки на всех ребрах сохраняются, в частности, сохраняются и все метки. Таким образом утверждение Леммы доказано в случае, когда атом  $W^*$  есть атом  $B$ .

Чтобы доказать лемму в общем случае, остается лишь заметить, что любой атом (без звездочек) можно представить как склейка нескольких атомов  $B$  и атома  $\tilde{W}_g$ . После этого применим предыдущие рассуждения. Случай наличия звездочек сводится к уже рассмотренному с помощью редукции, описанной перед формулировкой Теоремы 2. Тем самым лемма доказана.

Эту лемму можно рассматривать как дополнение к Теореме 2

## 2.4 Применение полученных результатов

Движение тяжелого твердого тела с закрепленной точкой описывается уравнением Эйлера-Пуассона

$$\begin{cases} I\dot{\omega} = (I\omega) \times \omega + \gamma \times (Pr), \\ \dot{\gamma} = \gamma \times \omega. \end{cases}$$

Различные переменные и константы имеют следующий механический смысл:

- $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – угловая скорость в подвижной ортонормированной системе координат  $(e_1, e_2, e_3)$ , жестко связанной с твердым телом и направленной по его главным осям инерции,
- $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  – тензор инерции,  $I_i$  – момент инерции относительно оси инерции  $e_i$ ,
- $(\alpha, \beta, \gamma)$  – неподвижная ортонормированная система координат,  $\gamma$  – координаты вектора  $\gamma$  в подвижной системе отчета,
- $r = (r_1, r_2, r_3)$  – координаты центра тяжести твердого тела в подвижной системе отчета,
- $P = mg$  – вес твердого тела,  $m$  – масса твердого тела,

- крестиком  $\times$  обозначено векторное произведение в евклидовом пространстве.

Если на твердом теле действует сила с потенциалом, зависящим только от  $\gamma$ , то уравнения Эйлера-Пуассона имеют вид:

$$\begin{cases} I\dot{\omega} = (I\omega) \times \omega + \gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma}, \\ \dot{\gamma} = \gamma \times \omega. \end{cases}$$

Эти уравнения являются динамической системой в пространстве  $R^6$  с координатами  $(\omega, \gamma)$ . Вообще говоря, уравнения Эйлера-Пуассона имеют только три интеграла:

- $f_1 \stackrel{def}{=} \langle \gamma, \gamma \rangle$  (геометрический интеграл),
- $f_2 \stackrel{def}{=} \langle \gamma, I\omega \rangle$  (проксия кинетического момента на оси  $\gamma$ ),
- $H \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \langle I\omega, \omega \rangle + U(\gamma)$  (полная энергия).

Четвертый независимый интеграл существует лишь, при подходящем выборе параметров  $I_1, I_2, I_3$  и потенциала  $U(\gamma)$  (см. [21], стр. 89).

В случае произвольного потенциала уравнения движения твердого тела с закрепленной точкой были получены Лагранжем в 1788г. (см. [28]).

Первое из уравнений Эйлера-Пуассона является частным случаем уравнения Эйлера-Пуанкаре для группы  $SO(3)$  с лагранжианом  $L = \frac{1}{2} \langle I\omega, \omega \rangle - U(\gamma)$  (см. [21]). Применяя к ним преобразование Лежандра получаются уравнения Кирхгофа:

$$\begin{cases} \dot{m} = m \times \frac{\partial H}{\partial m} + \gamma \times \frac{\partial H}{\partial \gamma}, \\ \dot{\gamma} = \gamma \times \frac{\partial H}{\partial m}, \end{cases}$$

где  $H = \frac{1}{2} \langle I^{-1}m, m \rangle + U(\gamma)$ ,  $m = I\omega$  – кинетический момент твердого тела относительно неподвижной точки. Уравнения Кирхгофа можно было бы получить как уравнения Четаева для группы  $E(3)$  движений евклидова пространства (см. [21], стр. 39).

При подходящем выборе линейного репера в алгебре  $e(3)$  группы движений  $E(3)$  можно добиться того, что в координатах  $\{(S, R)\}$  соответствующим двойственному реперу в пространстве  $e(3)^*$  скобка Пуассона-Ли будет задаваться соотношениям:

$$\{S_i, S_j\} = \epsilon_{ijk} S_k, \{R_i, R_j\} = 0,$$

$$\{S_i, R_j\} = \epsilon_{ijk} R_k.$$

Пусть  $H$  – произвольная функция, заданная в пространстве  $e(3)^*$ . Тогда система уравнений

$$\begin{cases} \dot{S}_i = \{H, S_i\}, \\ \dot{R}_i = \{H, R_i\}, \end{cases}$$

после переобозначений  $S = m$  и  $R = \gamma$  совпадает с системой уравнений Кирхгофа. Ануляторами скобки Пуассона-Ли являются функции  $f_1 \stackrel{\text{def}}{=} R_1^2 + R_2^2 + R_3^2$  и  $f_2 \stackrel{\text{def}}{=} R_1 S_1 + R_2 S_2 + R_3 S_3$ . На орбитах общего положения коприсоединенного действия скобка невырождена, и следовательно, ограничение системы на них является гамильтоновой системой. Это впервые было отмечено С.П.Новиковым и И.Шмельцером в работе [19] и для случая нулевой постоянной площадей (т.е. для орбитой  $f_1 = 1, f_2 = 0$ ), В.В.Козловым в работе [22].

В дальнейшем все интегрируемые случаи движения твердого тела будут рассматриваться нами как уравнения Гамильтона в пространстве  $e(3)^*$  с координатами  $\{(S, R)\}$ . Следуя установленной традиции главные моменты инерции твердого тела будем обозначать через  $A_1, A_2$  и  $A_3$ , а координаты центра тяжести твердого тела в подвижной системе отчета через  $a_1, a_2$  и  $a_3$ .

Графы меченых молекул интегрируемых случаев движения твердого тела были построены А.А.Ошемковым в работе [7]. Там же, опираясь на работу С. Смейла (см. [15]), М.П.Харламова (см. [14]), Я.В.Татаринова (см. [17, 18]) и С.Б.Катка (см. [16]) была полностью исследована топология изоэнергетических 3-поверхностей уровня гамильтониана  $H$  для всевозможных орбит общего положения.

А.В.Болсинов в работе [8] предложил эффективный метод для вычисления  $r$ -меток. Основная идея этого метода заключается в исследовании так называемых круговых молекул.

Основная наша задача в дальнейшем – вычисление  $n$ -меток меченых молекул для основных случаев движения твердого тела.

## 2.4.1 Случай Сретенского

Рассмотрим сначала случай Сретенского движения гиростата в гравитационном поле. После линейной замены координат, сохраняющей ану-

ляторы и скобку Пуассона, гамильтониан случая Сретенского приводится к виду

$$H = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + 4(S_3 + \lambda)^2) + R_1.$$

Дополнительный интеграл  $K$  существует лишь на орбите  $\{f_1 = 1, f_2 = 0\}$  и после указанной замены он приводится к виду

$$K = (S_3 + 2\lambda)(S_1^2 + S_2^2) - S_1 R_3.$$

Бифуркационная диаграмма отображения момента

$$H \times K : TS^2 \longrightarrow R^2$$

была исследована в [14], а в работе [7] была построена грубая классификация (т. е. был построен граф меченой молекулы). Все  $r$ -метки легко вычислить, пользуясь методикой разработанной в работе [8].

В зависимости от параметра  $\lambda$ , имеем четыре случая:

- (a)  $\lambda = 0,$
- (b)  $-1/\sqrt{3} < \lambda < 0,$
- (c)  $-1 < \lambda < -1/\sqrt{3},$
- (d)  $\lambda < -1.$

Качественный вид бифуркационных диаграмм показан на Рис.1. Подробные комментарии к ним даны в работе (см. [7], стр.91).

В случае (a) мы имеем молекулы (3), (4) (см. Таблицу 1). Найдем  $n$ -метку для первой из них. Из  $n$ -соотношения имеем:

$$N(G) = 2 \left( n + 1 \cdot \frac{1}{2} \right) = \pm 1 \Rightarrow n = 0 \text{ или } n = -1$$

Выбирая подходящую ориентацию 3-многообразия  $Q^3$ , можно считать, без ограничения общности, что  $n = 0$ . Здесь мы пользуемся тем, что при замене ориентации  $Q^3$  энергия семьи меняет знак.

Для второй молекулы этого случая имеем

$$N(G) = 8 \left\{ \left( n_1 + \frac{1}{2} + \varepsilon_1 \cdot \frac{1}{2} \right) \left( n_2 + \left( \frac{1}{2} - 1 \right) + \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \right\} = \pm 2,$$

$$((2n_1 + 1) + \varepsilon_1)((2n_2 - 1) + \varepsilon_2) = 1 \pm 1.$$

Слева стоит число вида  $4k$ , следовательно,

$$((2n_1 + 1) + \varepsilon_1)((2n_2 - 1) + \varepsilon_2) = 0.$$

Здесь мы пользуемся тем фактом, что согласно Утверждению 5 при замене ориентации 3-многообразия  $Q^3$  все  $\varepsilon$ -метки, которые стоят на внутренних ребрах с  $r \neq \infty$ , меняют знак. Таким образом, мы без ограничения общности считаем, что  $\varepsilon = 1$  на ребрах типа  $B \xrightarrow{r \neq \infty} B$ . В дальнейшем мы будем делать это без оговорки.

Рассмотрим отображение  $\Phi : e(3)^* \rightarrow e(3)^*$ , задаваемое формулой

$$\begin{cases} R_i \mapsto R_i, & S_i \mapsto S_i \\ R_3 \mapsto -R_3, & S_3 \mapsto -S_3 \end{cases} \quad \text{при } i=1,2.$$

Очевидно, что  $\Phi^* H = H, \Phi^* K = -K$ . Кроме этого, легко проверяется, что для любых двух гладких функций  $f$  и  $g$  на  $e(3)^*$  имеет место равенство  $\{\Phi^* f, \Phi^* g\} = -\Phi^* \{f, g\}$ . Следовательно,

$$\Phi_*(\operatorname{sgrad} H) = -\operatorname{sgrad} H.$$

Ясно, что для формой Кириллова  $\omega$  на фиксированной нами орбите имеет место  $\Phi^* \omega = -\omega$ . В частности,  $\Phi^*(\omega \wedge \omega) = \omega \wedge \omega$ . Следовательно,  $\Phi$  сохраняет ориентацию на орбите коприсоединенного действия. С другой стороны, из равенства  $\Phi^* H = H$  следует, что  $\Phi$  сохраняет ориентацию изоэнергетической поверхности. Таким образом, на изоэнергетической поверхности  $H = \text{const}$  отображение  $\Phi$  индуцирует послойное отображение, которое сохраняет ориентацию поверхности и меняет ориентацию всех траекторий. Рассмотрим два экземпляра молекулы (4), снабженные всеми метками. На одном из них поменяем ориентацию внутреннего ребра. Согласно Утверждению 4 на стр. 46  $n$ -метки меняются так:

$$n_1 \mapsto n_1 + 1,$$

$$n_2 \mapsto n_2 - 1.$$

Молекулы, полученные после этого, должны совпадать. Следовательно,  $n_1 = n_2 - 1$  и  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ . Таким образом, получаем:

$$(2n_1 + 1 + \varepsilon)^2 = 0.$$

Имеем две возможности:

a)  $n_1 = 0, n_2 = 1, \varepsilon = -1,$

б)  $n_1 = -1, n_2 = 0, \varepsilon = 1.$

В случае (c) имеем молекулы (1), (3), (4), (6), (5), (7), (8) (см. Таблицу 1).

Рассмотрим сначала молекулу (7). Полные энергии семей таковы:

$$E(F_1) = n_1 + \frac{1}{2} + 1 \cdot \left( \frac{1}{2} - 1 \right) = n_1,$$

$$E(F_2) = n_2 + \frac{1}{2},$$

$$E(F_3) = n_3.$$

Имеем следующее  $n$ -соотношение:

$$N(G) = 4 \left\{ n_1 n_3 \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} n_3 - 1 \cdot n_1 \right\} = 0,$$

$$n_3 \{ 2n_1(2n_2 + 1) - 1 \} = 4n_1.$$

Рассмотрим два случая.

I)  $n_1 = 0 \Rightarrow n_3 = 0,$

откуда получаем решение  $n_1 = 0, n_2 = k, n_3 = 0.$

II)  $n_1 \neq 0 \Rightarrow n_3 \neq 0$

Здесь, очевидно, имеем следующие две возможности:

a)  $\begin{cases} n_3 &= 4n_1 \\ 2n_1(2n_2 + 1) - 1 &= 1 \end{cases}$

Таким образом, получаем две пары решений:

$n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 4$  и  $n_1 = -1, n_2 = -1, n_3 = -4$

б)  $\begin{cases} n_3 &= -4n_1 \\ 2n_1(2n_2 + 1) - 1 &= -1, \end{cases}$

но эта система несовместна в рассматриваемом нами случае, когда  $n_1 \neq 1.$

Рассмотрим теперь молекулу (8). Из  $n$ -соотношения получаем:

$$N(G) = 4 \left\{ n_1 n_3 \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} n_3 - n_1 \right\} = \pm 2.$$

Находим пять возможных случаев:

- а)  $n_1 = 0, n_2 = k, n_3 = \pm 2,$
- б)  $n_1 = k, n_2 = 0, n_3 = 2,$
- в)  $n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 6,$
- г)  $n_1 = k, n_2 = -1, n_3 = -2,$
- д)  $n_1 = -1, n_2 = -1, n_3 = -6.$

Из вида бифуркационной диаграммы следует, что  $n_1$  и  $n_2$  метки молекул (7) и (8) должны совпадать. В результате получаем то, что показано в Таблице 1.

Таким образом доказана теорема.

**Теорема 3 .** *Меченные молекулы, встречающиеся в случае Сретенского движения гиростата в гравитационном поле при всевозможных значениях параметров, указаны в Таблице 1. Для молекул (3), (7) и (8) из всех указанных возможностей для  $n$ -меток реализуется только одна.*

## 2.4.2 Случай Горячева-Чаплыгина

Этот классический интегрируемый случай движения тяжелого твердого тела с закрепленной точкой является частным случаем случая Сретенского, когда параметр  $\lambda$  равен нулю. Таким образом доказана теорема.

**Теорема 4 .** *В случае Горячева-Чаплыгина движения твердого тела с закрепленной точкой при всевозможных значениях энергии встречаются только молекулы (3) и (4) из Таблицы 1.*

## 2.4.3 Случай Жуковского

Случай Жуковского движения гиростата имеет гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(S_1 + \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(S_2 + \lambda_2)^2}{2A_2} + \frac{(S_3 + \lambda_3)^2}{2A_3} \right\}.$$

Функция  $K = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$  является интегралом почти всюду независимым с  $H$  для любых значений постоянной площадей т.е., на всех орбитах общего положения коприсоединенного действия. Бифуркационная диаграмма отображения момента

$$H \times K : TS^2 \longrightarrow R^2$$

для всевозможных значений параметров была построена в работе [14]. Качественная картина показана на Рис.2. Топология изоэнергетических поверхностей была полностью исследована А.А.Ошемковым в [7]. Там же были построены графы меченых молекул. Все  $r$ -метки легко вычисляются при помощи методики, разработанной в работе [8]. Результаты содержатся в Таблице 2.

Вычислим теперь  $n$ -метки. Рассмотрим сначала молекулу  $(d)$ , которая реализуется на изоэнергетической поверхности, диффеоморфной прямому произведению  $S^1 \times S^2$ . Тогда по Теореме 2 имеем  $n$ -соотношение  $n = 0$ . Совершенно аналогично вычисляется  $n$ -метка в случае молекул  $(e)$ ,  $(g)$  и  $h$ . Таким образом доказана

**Теорема 5 .** *Меченные молекулы встречающиеся в случае Жуковского движения гиростата при всевозможных значениях параметров  $g$ ,  $A_i$  и  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) указаны в Таблице 2.*

#### 2.4.4 Случай Ковалевской

Случай Ковалевской движения тяжелого твердого тела с закрепленной точкой имеет гамильтониан

$$H = \frac{S_1^2}{2A} + \frac{S_2^2}{2A} + \frac{S_3^2}{A} + a_1 R_1 + a_2 R_2,$$

Функция

$$K = \left( \frac{S_1^2 - S_2^2}{2A} + a_2 R_2 - a_1 R_1 \right)^2 + \left( \frac{S_1 S_2}{A} - a_1 R_2 - a_2 R_1 \right)^2$$

является почти всюду независимой с  $H$  интегралом на всех орбитах общего положения коприсоединенного действия.

Бифуркационные диаграммы отображения момента

$$H \times K : TS^2 \longrightarrow R^2$$

были построены М.П.Харламовым в [14] (качественная картина бифуркационных диаграмм приведена, например, на стр.182 в [8]). Топология изоэнергетических поверхностей была исследована С.В.Катоком в [16]. А.А.Ошемков построил графы меченых молекул в работе [7], а в работе [8] А.В.Болсинов полностью вычислил  $r$ -метки (см. Таблица 3 на стр. 177 в [8]).

Пользуясь этими результатами и применяя Теорему 2, получаем

**Теорема 6.** *Меченные молекулы, встречающиеся в случае Ковалевской движения тяжелого твердого тела с закрепленной точкой, при всевозможных значениях параметров, указаны в Таблице 3.*

**Доказательство.** Иволюция  $\Phi$ , описанная в §2.4.1, задает тонкий топологический автоморфизм, который сохраняет ориентацию  $Q^3$  и меняет ориентацию траекторий. Этот автоморфизм порождает автоморфизмы для всех меченых молекул. Следовательно,  $n$ -метки, отвечающие атомам, переходящим друг в друга, совпадают.

Результаты показанные в Таблице 3, являются решениями соответствующих  $n$ -соотношений. В случае молекул  $c3$  и  $d3$ , сначала применяем Лемму 2. Результаты показаны в Таблице 3.

## Глава 3

# Вычисление траекторных инвариантов

### 3.1 Гамильтониан Пуанкаре и переменная действия в окрестности невырожденной критической окружности

Согласно Утверждению 2, доказанному А.Т.Фоменко и А.В.Болсиновым в работе [5], непрерывная траекторная классификация ИБНГС на атомах сводится к точной траекторной классификации потоков Пуанкаре на трансверсальных к траекториям двумерных поверхностях (см. §1.2). Гамильтониан Пуанкаре является гладкой функцией на этой поверхности. В этом параграфе доказано, что гамильтониан Пуанкаре на любой трансверсальной к траекториям площадке, является ограничением одной из переменных действия (которая определена в некоторой 4-окрестности атома) на эту площадку. Точнее, здесь докажем следующую теорему (см.[12]).

**Теорема 7 .** Для любого сечения  $P_c$  гамильтониан Пуанкаре  $F_{P_c}$  является ограничением на  $P_c$  гладкой функции

$$(1) \quad \mathcal{F}_{Q_c}(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\oint_{\lambda(x)} \kappa,$$

где  $d\kappa = \omega$ , а  $\lambda(x)$  – гладкое вложение окружности  $S^1$  в  $Q_c^3$ , которое определяется условиями:

- i)  $\lambda(x)$  как элемент группы гомологий  $H_1(Q_c^3)$  гомологичен циклу, задаваемому одной из ориентированных полем критических окружностей в  $Q_c^3$ . Напомним, что мы предполагаем, что все критические окружности в  $Q_c^3$  задают один и тот же цикл в группе  $H_1(Q_c^3)$ .
- ii)  $\lambda(x)$  содержится в той же орбите действия Пуассона, что и сама точка  $x$ .

**Замечание 8.** Корректность определения функции  $\mathcal{F}_{Q_c}$  будет показана в процессе доказательства этой теоремы. Здесь отметим лишь то, что форма  $\kappa$ , такая, что  $d\kappa = \omega$ , глобально, на всем  $Q^3$ , может и не существовать, но на  $Q_c^3$  такая форма всегда существует.

**Замечание 9.** В правой части равенства (1) на самом деле стоит "умноженная на  $2\pi$  переменная действия", которую в рассматриваемом нами случае, можно "продолжить" на всем  $Q_c^3$ .

Доказательство. Пусть  $P_c$  – некоторая трансверсальная к полю  $v = \text{sgrad } H$  поверхность. Как и в §1.2 ограничение второго интеграла  $f$  на нее обозначим снова через  $f$ . Определенную там 2-форму  $\tilde{\omega}$  будем считать симплектической структурой на  $P_c$ . Рассмотрим векторное поле  $u \stackrel{\text{def}}{=} \text{sgrad } f$ . Пусть  $x_0$  есть некоторая точка на поверхности  $P_c$ , такая что  $u(x_0) \neq 0$ . Допустим, что точка  $x_0$  не принадлежит критическому уровню  $K_c$  (В нашем случае граф  $K_c$  есть попросту  $f^{-1}(c)$ ). Пусть  $N$  есть трансверсальный к полю  $u$  "отрезок", проходящий через точку  $x_0$ . Обозначим через  $\{g^t\}$  однопараметрическую группу диффеоморфизмов поля  $u$ . Тогда в некоторой трубчатой окрестности  $U(x_0)$  траектории  $t \mapsto g^t(x_0)$  можно ввести координаты  $\{(f, T)\}$ , где  $f$  есть просто функция  $f$ , а функция  $T(y)$ , где  $y \in U(x_0)$ , определяется как "время прохождения" вдоль траектории поля  $u$ , начиная с некоторой точки на  $N$  до точки  $y$ , со скорости  $u$ . Строго говоря, так как траектория  $t \mapsto g^t x_0$  периодическая, то все близкие к ней траектории тоже периодические, и следовательно, время прохождения вдоль траекторий поля  $u$  определено неоднозначно. Поэтому в качестве значения функции  $T$  мы берем наименьшее неотрицательное значение. Так как, очевидно, в координатах  $\{(f, T)\}$  поле  $u$  есть  $\frac{\partial}{\partial T}$ , то тогда  $\omega = df \wedge dT$ . Для ясности изложения мы

здесь повторим ту конструкцию, при помощи которой в работе [5] было доказано существование гамильтониана Пуанкаре. Мы будем считать, что если точка  $x$  принадлежит окрестности  $U(x_0)$ , то точка  $\sigma(x)$  снова принадлежит этой окрестности. Из нашей конструкции следует, что это всегда можно сделать. Тогда в координатах  $\{(f, T)\}$  отображение Пуанкаре будет задаваться формулой

$$\sigma : (f, T) \mapsto (f, g(f, T)),$$

где  $g$  есть некоторая гладкая функция. Из условия, что  $\sigma$  есть симплектоморфизм, получаем, что  $df \wedge dT = df \wedge d[g(f, T)]$ , и следовательно,  $\frac{\partial}{\partial T}g \equiv 1$ . Таким образом доказано, что функция  $g$  имеет вид  $g(f, T) = T + g_1(f)$ , где  $g_1$  есть некоторая гладкая функция от  $f$ , принимающая положительные значения. Теперь найдем явный вид для гамильтониана Пуанкаре  $F_{P_c}$  в координатах  $\{(f, T)\}$ . Пусть  $\mathcal{F}_{P_c} = \mathcal{F}(f, T)$ , где  $\mathcal{F}$  – гладкая функция. Тогда  $sgrad \mathcal{F}_{P_c} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f} \frac{\partial}{\partial T} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \frac{\partial}{\partial f}$  и из условия 1) определения гамильтониана Пуанкаре получаем, что  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(f)$  и, следовательно,  $sgrad \mathcal{F}_{P_c} = \frac{d\mathcal{F}}{df}(f) \frac{\partial}{\partial T}$ . С другой стороны, из условия 2) (см. Определение 15) получаем, что должно выполняться равенство

$$\frac{d\mathcal{F}}{df}(f) = g_1(f).$$

Следовательно, получаем

$$(2) \quad \mathcal{F}(f) = \int g_1(f) df,$$

где в правой части равенства стоит неопределенный интеграл.

**Замечание 10 .** Так как мы предполагаем, что траектория  $t \mapsto g^t x_0$  периодическая (в частности, близкие к ней траектории тоже периодические), то легко заметить, что функция  $\tilde{\mathcal{F}}(f) \stackrel{def}{=} \mathcal{F}(f) + 2\pi k S(f)$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ , а  $S(f)$  – переменная действия системы и в рассматриваемой трубчатой окрестности периодической траектории, снова будет гамильтонианом Пуанкаре. Множество всех таких функций и исчерпывает множество всех гамильтонианов Пуанкаре в рассматриваемом кольце. Если точка  $x_0$  принадлежит графу  $K_c$ , то тогда траектория

$t \mapsto g^t x_0$  непериодическая и следовательно, множество всех гамильтонианов Пуанкаре исчерпывается множеством  $\mathcal{F}(f)$  т.е., любые два гамильтониана Пуанкаре в  $U(x_0)$  отличаются на константу. Следовательно, на всей поверхности  $P_c$  гамильтонианы Пуанкаре определены однозначно с точностью до добавления константы.

Рассмотрим теперь одно из ребер атома  $V$ . Согласно теореме Лиувилля в некоторой регулярной окрестности (в многообразии  $M^4$ ) этого ребра можно ввести координаты "действие–угол"  $\{(S_1, S_2, \phi_1, \phi_2)\}$ , где  $\phi_1$  и  $\phi_2$  – углы, а  $S_1 = S_1(H, F)$  и  $S_2 = S_2(H, F)$  – переменные действия. Согласно теореме Лиувилля отображение

$$(H, F) \mapsto (S_1(H, F), S_2(H, F)),$$

является диффеоморфизмом на свой образ.

Так как переменные действие–угол являются каноническими координатами, то в них

$$\omega = dS_1 \wedge d\phi_1 + dS_2 \wedge d\phi_2.$$

Кроме координат действие–угол можно рассмотреть еще и координаты  $\{(H, F, \phi_1, \phi_2)\}$ . Тогда, в них, ограничение симплектической структуры на ребре будет

$$\begin{aligned} \omega|_{\{\text{ребро}\}} &= d[S_1(h, f)] \wedge d\phi_1 + d[S_2(h, f)] \wedge d\phi_2 \\ &= \frac{\partial S_1}{\partial f}(h, f) df \wedge d\phi_1 + \frac{\partial S_2}{\partial f}(h, f) df \wedge d\phi_2, \end{aligned}$$

где, как и ранее  $f \stackrel{\text{def}}{=} F|_{Q_h^3}$ . Напомним, что мы предполагаем, что наш атом лежит в изоэнергетической поверхности  $Q_h^3 \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M^4 | H(x) = h\}$ , где  $h$  – некоторая константа. Рассмотрим теперь на ребре координаты  $\{(f, \phi_1, \phi_2)\}$ . В них поле  $v$  имеет вид

$$v = \omega_1(f) \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \omega_2(f) \frac{\partial}{\partial \phi_2}.$$

Через  $\omega_1(f)$  и  $\omega_2(f)$  мы обозначили функции

$$\begin{cases} \omega_1(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_1}(S_1(h, f), S_2(h, f)), \\ \omega_2(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_2}(S_1(h, f), S_2(h, f)), \end{cases}$$

где  $H = \mathcal{H}(S_1, S_2)$  есть гамильтониан в координатах действие–угол.

Допустим, что, если  $f \in (f_1, f_2)$ , то функция  $\omega_2(f)$  отлична от нуля. Тогда рассмотрим трансверсальную к полю  $v$  поверхность

$$P_c \stackrel{\text{def}}{=} \{(f, \phi_1, 0) | f \in U(f_0)\},$$

где окрестность  $U(f_0)$  точки  $f_0$  выбрана "достаточно маленькой", т.е. так, что, если  $f \in U(f_0)$ , то  $\omega_2(f) \neq 0$ . Очевидно, имеем, что

$$\tilde{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \omega|_{P_c} = \frac{\partial S_1}{\partial f}(h, f) df \wedge d\phi_1 = df \wedge d\left[\frac{\partial S_1}{\partial f}(h, f)\phi_1\right].$$

Рассмотрим на  $P_c$  регулярную замену координат  $\{(f, \phi_1)\} \rightarrow \{(f, T)\}$ , где  $T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial S_1}{\partial f}(h, f)\phi_1$ . Регулярность этой замены является следствием того, что  $\frac{\partial S_1}{\partial f}(h, f) \neq 0$ , что со своей стороны следует из соотношения  $\tilde{\omega} \neq 0$ . Конечно, координаты  $\{(f, T)\}$  канонические, т.е.  $\tilde{\omega} = df \wedge dT$ . Число  $T_0 = \frac{\partial S_1}{\partial f}(h, f)\phi_0$  имеет простой геометрический смысл, а именно – это есть время прохождения от точки  $(f, \phi_1 = 0)$  до точки  $(f, \phi_1 = \phi_0)$  со скоростью  $s\text{grad } f$ .

С другой стороны, легко заметить, что в координатах  $\{(f, \phi_1)\}$  на поверхности  $P_c$  отображение Пуанкаре задается формулой

$$\sigma : (f, \phi_1) \mapsto (f, \phi_1 + 2\pi \frac{\omega_1(f)}{\omega_2(f)}).$$

Следовательно, в координатах  $\{(f, T)\}$  отображение Пуанкаре задается формулой

$$\sigma : (f, T) \mapsto (f, T + 2\pi \frac{\omega_1(f)}{\omega_2(f)} \frac{\partial S_1}{\partial f}(h, f)).$$

С другой стороны, очевидно, имеет место тождество

$$\mathcal{H}(S_1(h, f), S_2(h, f)) \equiv h,$$

для любого  $f$  из  $U(f_0)$ . Дифференцируя этого равенства по  $f$ , получаем, что

$$\omega_1(f) \frac{\partial S_1}{\partial f}(h, f) + \omega_2(f) \frac{\partial S_2}{\partial f}(h, f) \equiv 0.$$

Следовательно, в симплектических координатах  $\{(f, T)\}$  отображение Пуанкаре имеет вид

$$\omega : (f, T) \mapsto (f, T - 2\pi \frac{\partial S_2}{\partial f}(h, f)).$$

Тогда, согласно формуле (2), находим, что

$$F_{P_c}(f, \phi_1) = -2\pi S_2(h, f).$$

Таким образом, для рассматриваемого частного случая трансверсальной поверхности  $P_c$ , теорема доказана.

Теперь выберем новую трансверсальную к полю  $v$  площадку  $\tilde{P}_c$  и докажем, что гамильтониан Пуанкаре снова задается формулой (1).

Для простоты мы будем считать, что трансверсальная к полю  $v$  площадка  $\tilde{P}_c$  гомотопна площадке  $\{(f, \phi_1, 0) | f \in (f_1, f_2), \phi_1 \in R/2\pi Z\}$ . В этом случае площадку  $\tilde{P}_c$  можно задать вложением

$$\Phi : (f, \phi_1) \mapsto (f, \phi_1 + \omega_1(f)T(f, \phi_1), \omega_2(f)T(f, \phi_1)),$$

где  $T = T(f, \phi_1)$  – гладкая функция, такая, что  $T(f, \phi_1 + 2\pi) = T(f, \phi_1)$ . Функция  $T = T(f, \phi_1)$  имеет простой геометрический смысл. Это есть время прохождения вдоль траектории поля  $v$  от точки  $(f, \phi_1, 0)$  до первого пересечения с поверхностью  $P_c$ . Рассмотрим  $\{(f, \phi_1)\}$  как координаты на поверхности  $\tilde{P}_c$ . В них симплектическая структура на  $\tilde{P}_c$  имеет вид

$$\begin{aligned} \omega|_{\tilde{P}_c} &= \frac{\partial S_1}{\partial f}(h, f)df \wedge d[\phi_1 + \omega_1(f)T(f, \phi_1)] + \\ &+ \frac{\partial S_2}{\partial f}(h, f)df \wedge d[\omega_2(f)T(f, \phi_1)] = \\ &= \left\{ \frac{\partial S_1}{\partial f}(h, f) + \left[ \frac{\partial S_1}{\partial f}\omega_1 + \frac{\partial S_2}{\partial f}\omega_2 \right] \frac{\partial T}{\partial \phi_1} \right\} df \wedge \phi_1 = \\ &= \frac{\partial S_1}{\partial f}(h, f)df \wedge d\phi_1. \end{aligned}$$

С другой стороны, в координатах  $\{(f, \phi_1)\}$  отображение Пуанкаре  $\sigma_{\tilde{P}_c}$  задается формулой

$$\sigma_{\tilde{P}_c} : (f, \phi_1) \mapsto (f, \phi_1 + 2\pi \frac{\omega_1(f)}{\omega_2(f)}).$$

Следовательно, повторяя предыдущие рассуждения слово в слово получаем, что в координатах  $\{(f, \phi_1)\}$  гамильтониан Пуанкаре на поверхности

$\tilde{P}_c$  есть  $-2\pi S_2(h, f)$ . Но с другой стороны, очевидно, что, если мы рассмотрим на ребре функцию  $\mathcal{F}(f, \phi_1, \phi_2) \stackrel{\text{def}}{=} -2\pi S_2(h, f)$  и ограничим ее на поверхности  $\tilde{P}_c$ , то получим гамильтониан Пуанкаре.

Теперь, чтобы более четко пояснить суть происходящего, проведем "бескоординатное" доказательство доказанного факта. Рассмотрим снова две гомотопные трансверсальные к полю  $v$  поверхности  $P_c$  и  $\tilde{P}_c$ . Допустим, что для поверхности  $P_c$  наша теорема уже доказана (что, конечно, и было сделано для поверхности  $P_c \stackrel{\text{def}}{=} \{(f, \phi_1, 0) | f \in (f_1, f_2), \phi_1 \in R/2\pi Z\}$ ). Рассмотрим теперь, отображение

$$\Phi : P_c \mapsto \tilde{P}_c,$$

которое зададим формулой

$$x \mapsto g^{T(x)}x,$$

где  $x \in P_c$ , а  $T(x)$  есть время прохождения вдоль траектории поля  $v$  от точки  $x \in P_c$  до точки  $g^{T(x)}x \in \tilde{P}_c$  (здесь как и ранее  $\{g^t\}$  – поток поля  $v$ ).

**Замечание 11.** Если бы поверхности  $P_c$  и  $\tilde{P}_c$  не были гомотопные, то отображение  $\Phi$ , вообще говоря, неопределено.

При сделанном предположении, что поверхности  $P_c$  и  $\tilde{P}_c$  гомотопные, функция  $T$  может быть выбрана гладкой на  $P_c$ . Рассмотрим на  $P_c$  и  $\tilde{P}_c$  соответствующие симплектические структуры (т.е.  $\omega|_{P_c}$  и  $\omega|_{\tilde{P}_c}$ ). Тогда ясно, что  $\Phi$  есть симплектоморфизм. Действительно,

$$d_x \Phi(\xi_x) = (d_x g^{T(x)})(\xi_x) + d_x T(\xi_x) \vec{v}(x),$$

где  $\xi_x \in \mathcal{T}P_c$ . Пусть теперь,  $\xi_x, \eta_x \in \mathcal{T}_x P_c$ . Тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned} \omega_{\Phi(x)}(d_x \Phi(\xi_x), d_x \Phi(\eta_x)) &= \omega_{\Phi(x)}((d_x g^{T(x)})(\xi_x), (d_x g^{T(x)})(\eta_x)) = \\ &= \omega_x(\xi_x, \eta_x). \end{aligned}$$

И тем самым доказано, что  $\Phi$  – симплектоморфизм. С другой стороны имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P_c & \xrightarrow{\Phi} & \tilde{P}_c \\ \downarrow \sigma_{P_c} & & \downarrow \sigma_{\tilde{P}_c} \\ P_c & \xrightarrow{\Phi} & \tilde{P}_c \end{array}$$

которая является прямым следствием из определения отображения  $\Phi$ . Следовательно,  $F_{\tilde{P}_c}(y) \stackrel{\text{def}}{=} -2\pi S_2(\Phi^{-1}(y)) = -2\pi S_2(y)$ , так как  $\Phi$  сохраняет переменные действия.

Повторим вкратце порядок наших рассуждений.

Фиксируем на ребре  $E \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}((f_1, f_2))$ , где  $(f_1, f_2)$  – интервал в  $R^1$ , трансверсальную к полю  $v$  площадку  $P_c$ . Тогда в качестве переменной действия  $S_1(h, f)$  берем интеграл  $S_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_\lambda \kappa$ , где цикл  $\lambda$  гомологичен циклу  $P_c \cap T_f^2$ , а  $T_f^2$  – тор Лиувилля, на котором второй интеграл  $F$  принимает значение  $f$ . Конечно, необходимые нам переменные действия – угол мы будем определять не только на ребре, но и в некоторой его регулярной окрестности в  $M^4$ . Выберем переменную действия  $S_2(h, f)$  произвольным образом (на самом деле этот произвол состоится в выборе одного цикла на торе  $T_f^2$ , который вместе с циклом  $\lambda$  образует базис в группе гомологий  $H_1(T_f^2)$ ). Рассмотрим теперь соответствующие переменные угол  $\phi_1$  и  $\phi_2$ . Из выбора переменной действия  $S_1$  следует, что площадки  $P_c$  и  $P_c^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{(f, \phi_1, 0) | f \in (f_1, f_2), \phi_1 \in R^1/2\pi Z\}$  гомотопные. В частности, отсюда следует, что для любого  $f$  из интервала  $(f_1, f_2)$  функция  $\omega_2(f)$  отлична от нуля. Действительно, допустим, что  $\omega_2(f_0) = 0$ . Рассмотрим тогда соответствующий тор Лиувилля  $T_{f_0}^2$ . Пусть  $t \mapsto \gamma(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$  – регулярная параметризация кривой  $P_c \cap T_{f_0}^2$ , где  $t \in [0, 2\pi]$ . Тогда из трансверсальности поверхности  $P_c$  к полю  $v$ , которое в нашем случае коллинеарно полю  $\frac{\partial}{\partial \phi_1}$  (т.к.  $\omega_2(f_0) = 0$ ) получаем, что  $\dot{\phi}_2(t)$  имеет постоянный знак, например,  $\dot{\phi}_2(t) > 0$ . Тогда  $\phi_2(2\pi) - \phi_2(0) = \int_0^{2\pi} \dot{\phi}_2(u) du > 0$  и следовательно,  $P_c$  не гомотопна площадке  $P_c^0$ . Это противоречие.

Так как для площадки  $P_c^0$  теорема верна, то согласно уже доказанному, она будет верна и для площадки  $P_c$ . Тем самым, на ребре теорема доказана.

Чтобы распространить нашу формулу на всем атоме, нам нужен тот факт, что на  $Q_c^3$  существует гладкая 1-форма  $\kappa$ , такая, что  $d\kappa = \omega$ .

**Лемма 3.** *В окрестности любого атома  $Q_c^3$  существует гладкая 1-форма  $\kappa$ , такая, что  $d\kappa = \omega$ .*

**Доказательство.** Для любой ориентируемой некомпактной двумерной поверхности или ориентируемой двумерной поверхности  $M_g^2$  с краем имеет место  $H_{DR}^2(M_g^2) = 0$ .

Представим атом в виде декартова произведения  $Q_c^3 \cong P_c^2 \times S_\phi^1$ . По формуле Кюнета имеем, что форма  $\omega$  (т.е. симплектическая структура) равна

$$\omega = \alpha \wedge d\phi + dl,$$

где  $\alpha$  – замкнутая 1-форма,  $d\phi$  – приращение угла на  $S_\phi^1$ , а  $l$  – некоторая гладкая 1-форма на атоме. Если класс когомологий де Рама  $[\alpha] = 0$ , то тогда в качестве  $\kappa$  берем  $\kappa \stackrel{\text{def}}{=} gd\phi + l$ , где  $g$  – гладкая функция на  $P_c^2$  такая, что  $dg = \alpha$ . Если  $[\alpha] \neq 0$ , то тогда существует цикл  $\lambda \in H_1(P_c^2)$ , такой, что  $\int_\lambda \alpha \neq 0$ . Мы без ограничения общности можем считать, что  $\lambda$  есть линия уровня  $\{f(x) = f_0\}$  ограничения второго интеграла  $f$  на поверхности  $P_c$ . Рассмотрим теперь тор Лиувилля  $T_{f_0}^2$ . Тогда имеем (при соответствующем выборе ориентаций)

$$\int_{T_{f_0}^2} \omega = \int_{T_{f_0}^2} \alpha \wedge d\phi = 2\pi \int_\lambda \alpha \neq 0,$$

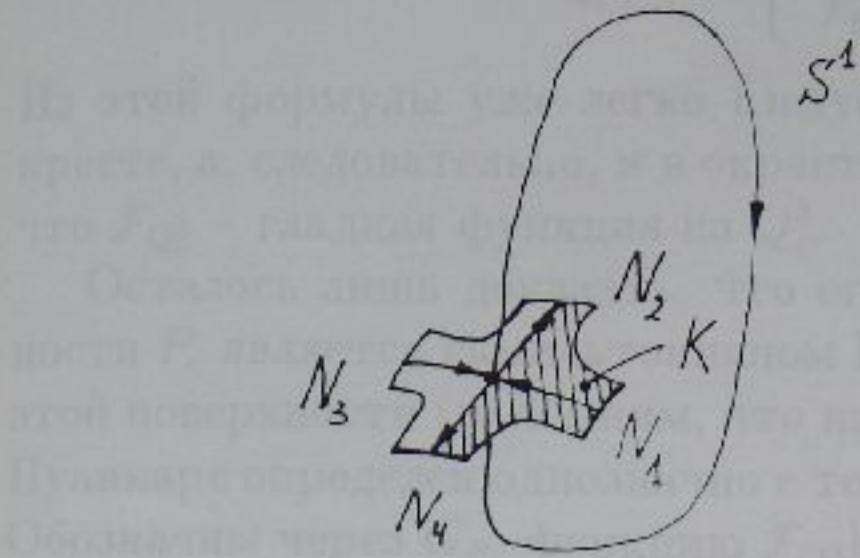
которое противоречит тому, что  $\omega|_{T_{f_0}^2} = 0$ . Тем самым лемма доказана.

Вернемся теперь к доказательству теоремы. Пусть, как и в начале доказательства,  $P_c$  есть некоторая трансверсальная к полю  $v$  поверхность вложенная в  $Q_c^3$ . На  $Q_c^3$  можно ввести гладкую структуру ориентированного расслоения Зейферта так, чтобы наша площадка  $P_c$  являлась его гладким сечением и чтобы второй интеграл  $f$  был постоянен на слоях.

Теперь определим на  $Q_c^3$  функцию  $\mathcal{F}_{Q_c^3}$ . Пусть  $x$  – произвольная точка в  $Q_c^3$ . Возможны два случая:

- a) Точка  $x$  принадлежит некоторому регулярному тору Лиувилля. Тогда на этом торе рассмотрим цикл  $\lambda$ , который гомологичен в  $Q_c^3$  циклу, задаваемому критической окружностью (который ориентирован полем  $v$ ). Определяем  $\mathcal{F}_{Q_c^3}(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\int_\lambda \kappa$ .
- б) Точка  $x$  принадлежит особому слою  $L_c$  слоения Лиувилля. Тогда определяем нашу функцию  $\mathcal{F}_{Q_c^3}$  формулой  $\mathcal{F}_{Q_c^3}(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\int_\lambda \kappa$ , где  $\lambda$  есть цикл, задаваемый одной из критических окружностей. Конечно, это определение не зависит от выбора этой окружности (т.к.  $\omega|_{L_c} = 0$ ).

Рис. 3.1:



Докажем, что  $\mathcal{F}_{Q^3}$  гладкая функция. Для этого рассмотрим регулярную окрестность одной из критических окружностей, которая является прямым произведением "креста"  $K$  на окружность (см. Рис. 3.1).

Мы предполагаем, что крест  $K$  вложен в поверхности  $P$ . Рассмотрим граничные отрезки этого креста и обозначим их соответственно через  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  и  $N_4$ . Рассмотрим кольцо  $\pi^{-1}(N_1) \cong N_1 \times S^1$ . На этом кольце можно ввести координаты  $\{(f, \psi)\}$ , где  $f$  есть ограничение второго интеграла  $f$  на отрезке  $N_1$ , а  $\psi$  — угол вдоль слоя расщепления Зефферта. Определим функцию  $\mathcal{F}_1(f)$  следующим образом

$$\mathcal{F}_1(f) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_0^{2\pi} b(f, \psi) d\psi,$$

где  $b(f_\theta, \psi) d\psi \stackrel{\text{def}}{=} [a(f, \psi) df + b(f, \psi) d\psi]|_{\{f=f_\theta\}}$ , а  $a|_{N_1 \times S^1} \stackrel{\text{def}}{=} adf + b d\psi$ . Ясно, что функция  $\mathcal{F}_1$  гладкая. С другой стороны, на замкнутом "полукресте"  $K_1$  (даже на  $\pi^{-1}(K_1)$ ) имеет место равенство  $\mathcal{F}_{Q^3}(x) = \mathcal{F}_1(f(x))$ . Следовательно, мы доказали, что  $\mathcal{F}_{Q^3}$  — гладкая функция на полукресте  $K_1$ . Рассуждая аналогичным образом для всех отрезков  $N_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), мы докажем, что функция  $\mathcal{F}_{Q^3}$  гладка везде, кроме, быть может, критической окружности. Но гладкость на критической окружности можно, например, доказать следующим образом. Рассмотрим полукрест  $K_1$  и "противоположный" ему полукрест  $K_3$ . На всем кресте  $K$  рассмотрим гладкие функции  $\mathcal{F}_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_1(f(x))$  и  $\mathcal{F}_3(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_3(f(x))$ . Тогда функции

$\mathcal{F}_{Q_c^3}$  равна

$$\mathcal{F}_{Q_c^3}(x) = \begin{cases} \mathcal{F}_1(x), & x \in K_1 \\ \mathcal{F}_3(x), & x \in K_3 \end{cases}.$$

Из этой формулы уже легко следует гладкость функции  $\mathcal{F}_{Q_c^3}$  на всем кресте, а, следовательно, и в окрестности  $\pi^{-1}(K)$ . Тем самым доказано, что  $\mathcal{F}_{Q_c^3}$  – гладкая функция на  $Q_c^3$ .

Осталось лишь доказать, что ограничение функции  $\mathcal{F}_{Q_c^3}$  на поверхности  $P_c$  является гамильтонианом Пуанкаре отображения Пуанкаре на этой поверхности (напомним, что на всей поверхности  $P_c$  гамильтониан Пуанкаре определен однозначно с точностью до добавления константы). Обозначим через  $G_{P_c}$  функцию  $\mathcal{F}_{Q_c^3}|_{P_c}$ . Рассмотрим на  $P_c$  гамильтоново поле  $w \stackrel{\text{def}}{=} \text{sgrad } G_{P_c}$  и обозначим его поток через  $\{g^t\}$ . Тогда согласно уже доказанному везде на  $P_c$ , кроме, быть может графа  $K_c$ , имеет место равенство  $\sigma_{P_c}(x) = (g^t x)|_{t=1}$ . Теперь из соображений непрерывности получаем, что  $\sigma_{P_c} = g^t|_{t=1}$  на всей поверхности  $P_c$ . С другой стороны, условие 1) из определения гамильтониана Пуанкаре тоже выполнено. Следовательно, функция  $G_{P_c}$  является гамильтонианом Пуанкаре на поверхности  $P_c$ . Тем самым теорема доказана.

Ввиду доказанной теоремы мы дадим следующее

**Определение 23.** "Гамильтонианом Пуанкаре системы  $v$  на атоме  $Q_c^3$ " называется функция  $\mathcal{F}_{Q_c^3}$ .

## 3.2 Производная функции вращения на ребре молекулы

В настоящем параграфе будет доказана теорема, которая дает явное выражение для производной от функции вращения на ребре молекулы. Кроме этого, результаты этого параграфа будут существенно использоваться в дальнейшем.

Все необходимые определения приведены в параграфе §1.2, Главы 1. Там показано, что для того, чтобы классифицировать гамильтоновы системы с точностью до непрерывной траекторной эквивалентности на ребре молекулы, надо вычислить соответствующие векторы вращения. Следовательно, возникает вопрос о вычислении векторов вращения

интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем на фиксированных изоэнергетических поверхностях  $Q_h^3$ . Если мы находимся в канонических координатах действие – угол, то вектор вращения вычисляется легко, непосредственно из определения. В этом параграфе будет показано, что для вычисления вектора вращения необязательно переходить к переменным действия. Более того, будет показано, что для нахождения "стационарных точек" функции вращения, необязательно знать ее явный вид.

Сначала дадим определение "стационарной точки функции вращения  $\rho$ ". Здесь мы сознательно обозначили функцию вращения просто через  $\rho$ , указывая на то, что это новое понятие уже не будет зависеть от выбора базиса  $(\lambda, \mu)$  на ребре.

**Определение 24.** Точка  $F_0 \in (c_1, c_2)$  называется "стационарной точкой функции вращения  $\rho$ ", если для некоторого базиса  $(\lambda, \mu)$  функция  $\rho_{(\lambda, \mu)}(F)$  имеет в точке  $F_0$  нулевую производную т.е.  $\frac{d\rho_{(\lambda, \mu)}}{dF}(F_0) = 0$ .

Имеет место следующее утверждение

**Утверждение 6.** Если  $F_0$  является стационарной точкой функции вращения  $\rho$ , то для любого базиса  $(\lambda, \mu)$  имеет место одно из утверждений

- точка  $F_0$  является полюсом функции вращения  $\rho_{(\lambda, \mu)}(F)$ ,
- если  $F_0$  не является полюсом функции вращения  $\rho_{(\lambda, \mu)}(F)$ , то имеет место  $\frac{d\rho_{(\lambda, \mu)}}{dF}(F_0) = 0$ , т.е. тогда  $F_0$  будет стационарной точкой функции вращения  $\rho_{(\lambda, \mu)}(F)$ .

Доказательство утверждения не составляет труда.

Заметим, что свойство точки  $F_0$  быть стационарной точкой функции вращения  $\rho$  не зависит от выбора базиса  $(\lambda, \mu)$  (это непосредственно следует из определения). В этом смысле мы будем говорить, что сам тор Лиувилля является "стационарным тором для функции вращения  $\rho$ ".

Теперь дадим определение "градиентного поля дополнительного интеграла  $G$ ". Пусть  $v = \text{sgrad } H$  – гамильтонова система, и пусть  $G$  ее интеграл (вообще говоря, необязательно боттовский). Рассмотрим семейство регулярных изоэнергетических поверхностей  $Q_h^3$ , где  $h$  – параметр.

**Определение 25.** Поле  $D_G$  называется "градиентным полем интеграла  $G$ ", если выполняются условия:

- 1) Поле  $D_G$  касается к поверхности  $Q_h^3$ , т.е.  $D_G(H) = 0$ ,
- 2) Выполняется условие  $dF(D_G) = 1$ .

Возьмем теперь в качестве  $G$  наш боттовский интеграл  $F$ . Тогда поле  $D_F$  существует лишь в регулярных точках ограничения второго интеграла  $F$  на изоэнергетическую поверхность  $Q_h^3$ . Напомним, что это ограничение мы обозначаем через  $f$ . Следовательно, если из  $Q_h^3$  уберем все невырожденные критические окружности, то на оставшемся многообразии поле  $D_f$  со свойствами 1) и 2) существует.

**Замечание 12.** Чтобы построить такое поле, можно например, ввести некоторую риманову метрику  $g$  на многообразии  $M^4$ , и к условиям 1) и 2) добавить условие, что поле  $D_f(x)$  должно быть ортогонально подпространству  $\text{Ker}(d_x f)$ , которое со своей стороны является касательным пространством к орбите действия Пуассона, проходящей через точку  $x$ . Тогда эти три условия уже определяют поле  $D_f$  однозначно. Из приведенной конструкции ясно, что это гладкое векторное поле.

Пусть  $\kappa$  есть 1-форма, такая, что  $d\kappa = \omega$ , где  $\omega$  – симплектическая структура на  $M^4$ . Такая форма существует в любой регулярной 4-окрестности фиксированного тора Лиувилля, которая является объединением торов Лиувилля (здесь под словами "регулярная окрестность" понимается окрестность, которая топологически является прямым произведением диска  $D^2$  на тор  $T^2$ ), но определена неоднозначно.

Рассмотрим теперь 2-форму

$$\zeta \stackrel{\text{def}}{=} L_{D_f} \kappa \wedge L_{D_f}^2 \kappa,$$

где  $L_{D_f}$  – производная Ли вдоль потока векторного поля  $D_f$ , а  $L_{D_f}^2 \stackrel{\text{def}}{=} L_{D_f} \circ L_{D_f}$ , т.е. это вторая производная Ли.

Пусть теперь  $T^2$  есть произвольный тор Лиувилля. Фиксируем на нем какуюнибудь ориентацию. Рассмотрим число  $Z_{T^2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi^2} \int_{T^2} \zeta$ . Имеет место следующая

**Теорема 8.** Пусть  $Z_{T^2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi^2} \int_{T^2} \zeta$ , где  $T^2$  – тор Лиувилля, а  $\zeta$  – 2-форма, определенная выше. Тогда имеют место утверждения:

- 1) число  $Z_{T^2}$  не зависит от неоднозначности в выборе поля  $D_f$  и формы  $\kappa$ .
- 2) тор Лиувилля  $T^2$  является стационарным тором для функции вращения  $\rho$  тогда и только тогда, когда  $Z_{T^2} = 0$

Доказательство.

Рассмотрим регулярную окрестность некоторого ребра в  $M^4$ . Введем в ней координаты действие угол  $\{(S_1, S_2, \phi_1, \phi_2)\}$ . Кроме них рассмотрим координаты  $\{(H, F, \phi_1, \phi_2)\}$ . Тогда форма

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} S_1(H, F) d\phi_1 + S_2(H, F) d\phi_2$$

удовлетворяет соотношение  $d\kappa = \omega$ .

В координатах  $\{(H, F, \phi_1, \phi_2)\}$  поле  $D_f$  имеет вид

$$D_f = \partial_F + a(H, F, \phi_1, \phi_2) \frac{\partial}{\partial \phi_1} + b(H, F, \phi_1, \phi_2) \frac{\partial}{\partial \phi_2},$$

где  $a$  и  $b$  – некоторые гладкие функции, а через  $\partial_F$  обозначен дифференциальный оператор  $\frac{\partial}{\partial F}$ .

Вычислим производную Ли формы  $\kappa$  вдоль потока поля  $D_f$ . Вычисление будем проводить в координатах  $\{(H, F, \phi_1, \phi_2)\}$ .

Поток, задаваемый полем  $D_f$ , имеет вид

$$\Phi^t(H, F, \phi_1, \phi_2) = \begin{pmatrix} H \\ F + t \\ \Phi_1^t(H, F, \phi_1, \phi_2) \\ \Phi_2^t(H, F, \phi_1, \phi_2) \end{pmatrix}^T,$$

где значок  $T$  обозначает транспонирование. При этом ясно, что при фиксированном  $H$  и  $F$  отображение

$$(\phi_1, \phi_2) \mapsto (\Phi_1^t(H, F, \phi_1, \phi_2), \Phi_2^t(H, F, \phi_1, \phi_2))$$

должно задавать некоторый диффеоморфизм торов Лиувилля  $T_{(H, F)}^2$  и  $T_{(H, F+t)}^2$ .

Имеют место равенство

$$\begin{aligned} (\Phi^{t^*}\kappa)(H, F, \phi_1, \phi_2) &= S_1(H, F + t)d[\Phi_1^t(H, F, \phi_1, \phi_2)] \\ &+ S_2(H, F + t)d[\Phi_2^t(H, F, \phi_1, \phi_2)]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|_{t=0}(\Phi^{t^*}\kappa) &= \partial_F S_1(H, F)d\phi_1 + \partial_F S_2(H, F)d\phi_2 + \\ &+ S_1(H, F)da + S_2(H, F)db. \end{aligned}$$

Таким образом доказано, что

$$L_{D_f}\kappa = (\partial_F S_1(H, F)d\phi_1 + \partial_F S_2(H, F)d\phi_2) + S_1da + S_2db.$$

Вычислим теперь вторую производную Ли вдоль потока поля  $D_f$  от формы  $\kappa$ . Имеем

$$\begin{aligned} [\Phi^{t^*}(L_{D_f}\kappa)](H, F, \phi_1, \phi_2) &= \{(\partial_F S_1)(H, F + t)d[\Phi_1^t(H, F, \phi_1, \phi_2)] + \\ &+ (\partial_F S_2)(H, F + t)d[\Phi_2^t(H, F, \phi_1, \phi_2)]\} + \\ &+ (S_1(H, F + t)d[a(H, F + t, \Phi_1^t, \Phi_2^t)]) + \\ &+ (S_2(H, F + t)d[b(H, F + t, \Phi_1^t, \Phi_2^t)]). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L_{D_f}^2\kappa &= \frac{d}{dt}|_{t=0}[\Phi^{t^*}(L_{D_f}\kappa)] = \\ &= \{(\partial_F^2 S_1)d\phi_1 + (\partial_F^2 S_2)d\phi_2\} + \\ &+ 2((\partial_F S_1)da + (\partial_F S_2)db) + \\ &+ S_1d[D_f a] + S_2d[D_f b]. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь тор Лиувилля

$$T^2 \stackrel{\text{def}}{=} T_{(H_0, F_0)}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(H_0, F_0, \phi_1 \bmod 2\pi, \phi_2 \bmod 2\pi)\}.$$

Тогда ограничения форм  $L_{D_f}\kappa$  и  $L_{D_f}^2\kappa$  на этот тор будут соответственно

$$(L_{D_f}\kappa)|_{T^2} = ((\partial_F S_1)(H_0, F_0)d\phi_1 + (\partial_F S_2)((H_0, F_0)d\phi_2)) + dg_1$$

и

$$(L_{D_f}^2\kappa)|_{T^2} = ((\partial_F^2 S_1)(H_0, F_0)d\phi_1 + (\partial_F^2 S_2)((H_0, F_0)d\phi_2)) + dg_2,$$

где  $g_1$  и  $g_2$  – гладкие функции на  $T^2$ .

Рассмотрим теперь форму

$$\zeta \stackrel{\text{def}}{=} L_{D_f} \kappa \wedge L_{D_f}^2 \kappa.$$

Ограничавая эту форму на тор  $T^2$ , получаем

$$\begin{aligned}\zeta|_{T^2} &= (L_{D_f} \kappa)|_{T^2} \wedge (L_{D_f}^2 \kappa)|_{T^2} = \\ &= \{(\partial_F S_1)(\partial_F^2 S_2) - (\partial_F^2 S_1)(\partial_F S_2)\} d\phi_1 \wedge d\phi_2 + dg,\end{aligned}$$

где  $g$  – гладкая 1-форма на торе  $T^2$ . Рассмотрим гладкую функцию

$$Z(H, F) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi^2} \int_{T_{(H,F)}^2} \zeta.$$

Для определенности считаем, что тор Лиувилля ориентирован с помощью репера  $(\frac{\partial}{\partial \phi_1}, \frac{\partial}{\partial \phi_2})$ .

**Лемма 4.** Так определенная функция  $Z(H, F)$  не зависит от неоднозначности в выборе 1-формы  $\kappa$ , такой, что  $d\kappa = \omega$ .

Доказательство. В координатах действие угол  $\{(S_1, S_2, \phi_1, \phi_2)\}$ , которые заданы на прямом произведении диска на тор  $D^2 \times T^2$  любая 1-форма  $\tilde{\kappa}$ , такая, что  $d\tilde{\kappa} = \omega$ , согласно формуле Кюнета имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa} &= \kappa + c_1 d\phi_1 + c_2 d\phi_2 + dg = \\ &= ((S_1 + c_1)d\phi_1 + (S_2 + c_2)) + dg = \\ &= \kappa' + dg,\end{aligned}$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – некоторые константы, а  $g$  – гладкая функция на прямом произведении  $D^2 \times T^2$ . Через  $\kappa'$  мы обозначили форму  $(S_1 + c_1)d\phi_1 + (S_2 + c_2)d\phi_2$ . Имеем

$$\begin{aligned}\tilde{\zeta} &\stackrel{\text{def}}{=} L_{D_f} \tilde{\kappa} \wedge L_{D_f}^2 \tilde{\kappa} = L_{D_f} (\kappa' + dg) \wedge L_{D_f}^2 (\kappa' + dg) = \\ &= L_{D_f} \kappa' \wedge L_{D_f}^2 \kappa' + \{d(L_{D_f} g) \wedge L_{D_f}^2 \kappa' + \\ &+ d(L_{D_f} g) \wedge d(L_{D_f}^2 g) + L_{D_f} \kappa' \wedge d(L_{D_f}^2 g)\}.\end{aligned}$$

Теперь ограничивая форму  $\tilde{\zeta}$  на торе Лиувилля  $T_{(H,F)}^2$  и пользуясь тем, что формы  $(L_{D_f} \kappa')|_{T^2}$  и  $(L_{D_f}^2 \kappa')|_{T^2}$  замкнутые на рассматриваемом

торе (что следует например, из приведенных выше вычислений в координатах для производных  $L_{D_f}\kappa$  и  $L_{D_f}^2\kappa$ , в которых надо просто сделать подстановку  $S_1 \rightarrow S_1 + c_1$  и  $S_2 \rightarrow S_2 + c_2$ ), получаем, что

$$\check{\zeta}|_{T^2} = \zeta|_{T^2} + d\tilde{g},$$

где  $\tilde{g}$  есть некоторая гладкая 1-форма на торе Лиуввиля  $T^2$ . Следовательно, по формуле Стокса получаем, что

$$\tilde{Z}(H, F) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi^2} \int_{T^2} \tilde{\zeta} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{T^2} \zeta \stackrel{\text{def}}{=} Z(H, F)$$

Тем самым утверждение доказано.

**Лемма 5 .** *Функция  $Z(H, F)$  не зависит от неоднозначности в выборе поля  $D_f$ .*

Доказательство. Из приведенных формул ясно, что

$$Z(H, F) = (\partial_F S_1)(\partial_F^2 S_2) - (\partial_F^2 S_1)(\partial_F S_2),$$

а выражение справа не зависит от неоднозначности в выборе поля  $D_f$ .

Следовательно, гладкая функция  $Z(H, F)$  является инвариантом гамильтоновой системы в том смысле, что она зависит только от гамильтониана  $H$  и дополнительного интеграла  $F$ .

Рассмотрим теперь функцию вращения на ребре. В рассматриваемых координатах действие—угол имеем

$$\operatorname{sgrad} H = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_1}(S_1, S_2) \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_2}(S_1, S_2) \frac{\partial}{\partial \phi_2}.$$

Предположим, что  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_1}(S_1, S_2) \neq 0$  тогда функция вращения выражается формулой

$$\rho_{(\lambda, \mu)}(H, F) = \frac{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_2}}{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_1}} = -\frac{\frac{\partial S_1}{\partial F}(H, F)}{\frac{\partial S_2}{\partial F}(H, F)}.$$

Напомним, что согласно работе [5] единственным траекторным инвариантом гамильтоновой системы на ребре молекулы является не сама функция вращения  $\rho_{(\lambda, \mu)}(h, F)$ , рассматриваемая как функция от значения второго интеграла  $F$  при фиксированном значении энергии  $\{H =$

$h\}$ , а "вектор вращения"  $R$ , который является последовательностью значений локальных экстремумов (включая "значения"  $+\infty$  и  $-\infty$ , см.[5]) этой функции. Следовательно, чтобы вычислить вектор вращения  $R$  мы должны сначала найти стационарные точки функции вращения  $\rho_{(\lambda,\mu)}$ . Дифференцируя верхнюю формулу по переменной  $F$  находим

$$\frac{\partial \rho_{(\lambda,\mu)}}{\partial F}(H, F) = -\frac{\partial_F^2 S_1 \partial_F S_2 - \partial_F^2 S_2 \partial_F S_1}{(\partial_F S_2)^2}.$$

Вспоминая теперь, что переменные действия определены с точностью до замены

$$\begin{cases} S_1 \mapsto aS_1 + bS_2 + c_1 \\ S_2 \mapsto cS_1 + dS_2 + c_2 \end{cases},$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – некоторые константы, а целочисленная матрица

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

принадлежит унимодулярной группе  $SL_2(Z)$ , получаем, что точка  $F$  является стационарной точкой функции вращения  $\rho_{(\lambda,\mu)}(h, F)$  ( $h$  – некоторая константа) тогда и только тогда, когда число  $(\partial_F^2 S_1 \partial_F S_2 - \partial_F^2 S_2 \partial_F S_1)$  равно нулю. Дело в том, что, если  $S'_1$  и  $S'_2$  другие переменные действия, то, как легко проверить, имеет место равенство

$$\partial_F^2 S_1 \partial_F S_2 - \partial_F^2 S_2 \partial_F S_1 = \pm (\partial_F^2 S'_1 \partial_F S'_2 - \partial_F^2 S'_2 \partial_F S'_1).$$

Заметим, что полюсы функции вращения  $\rho$  возникают лишь из-за "небудущего" выбора базисных циклов на торах Лиувилля. Таким образом доказано

**Утверждение 7.** *Фиксируем изначально некоторые переменные действия  $S_1$  и  $S_2$ . Тогда точка  $F_0$  является стационарной точкой функции вращения  $\rho$  на ребре  $\{H = h\}$  тогда и только тогда, когда число  $(\partial_F^2 S_1 \partial_F S_2 - \partial_F^2 S_2 \partial_F S_1)$  в точке  $(h, F_0)$  равно нулю.*

Теперь утверждение нашей теоремы следует из равенства

$$Z(H, F) = \partial_F^2 S_1 \partial_F S_2 - \partial_F^2 S_2 \partial_F S_1.$$

Тем самым теорема доказана.

### 3.3 Свойства потока гамильтониана Пуанкаре

Согласно работе [5], чтобы классифицировать с точностью до непрерывной траекторной эквивалентности гамильтоновы системы в окрестности невырожденного особого слоя (т.с. на атоме) надо вычислить так называемого  $\Delta Z$  инварианта. Следовательно, первостепенное значение приобретает вопрос о вычислении "времени прохождения вдоль потока гамильтониана Пуанкаре" для фиксированной трансверсальной поверхности  $P_c$ .

Чтобы легче сформулировать наши результаты, мы здесь дадим следующее

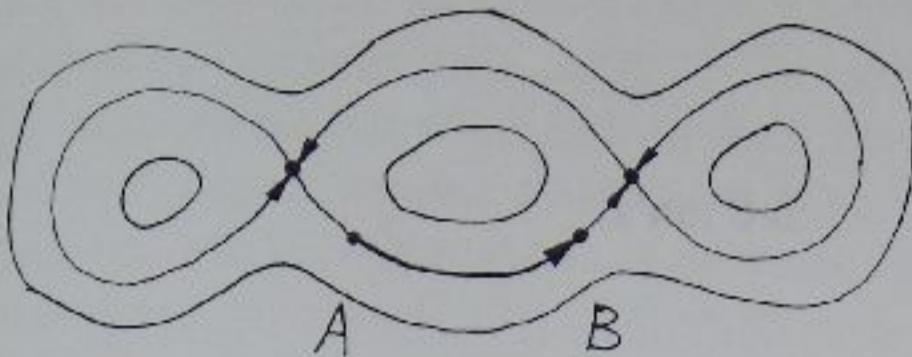
**Определение 26.** Пусть  $\tilde{u}$  есть произвольная гладкая динамическая система на многообразии  $M$ . Пусть  $\gamma$  – некоторая гладкая и регулярная кривая, определенная на отрезке  $[a, b]$  ( $\gamma(a) = A, \gamma(b) = B$ , где  $a < b$ ) образ которой находится в образе некоторой фазовой траектории системы  $\tilde{u}$ . Через  $\widehat{AB}$  обозначим класс кривых, которые получаются из  $\gamma$  при всевозможных гладких невырожденных и положительных заменах параметра. Для краткости в дальнейшем будем просто говорить, что "задана дуга  $\widehat{AB}$  вдоль векторного поля  $u$ ".

**Замечание 13.** На периодических траекториях дуга  $\widehat{AB}$  может "наматываться" несколько раз.

**Определение 27.** Пусть  $\widehat{AB}$  есть дуга вдоль векторного поля  $u$ . Обозначим через  $\tau_{\widehat{AB}}(u)$  такое вещественное число (положительное или неотрицательное), что траектория  $t \mapsto g^t A$ , когда  $t$  пробегает числа от нуля до  $\tau_{\widehat{AB}}(u)$ , принадлежит классу  $\widehat{AB}$ . В этом случае будем говорить, что  $\tau_{\widehat{AB}}(u)$  есть "время прохождения вдоль дуги  $\widehat{AB}$  со скоростью  $u$ ".

Рассмотрим теперь, реализацию  $Q_c^3$  некоторого атома  $V$ . Напомним, что как и ранее считаем, что  $Q_c^3$  содержится в некоторой изоэнергетической поверхности  $Q_h^3$ , где  $h$  – уровень энергии. Фиксируем некоторую трансверсальную к полю  $v = \text{sgrad } H$  поверхность  $P_c$ . Пусть  $\tilde{P}_c$  – другая такая поверхность. Тогда согласно работе [5] на любой из этих

Рис. 3.2:



поверхности возникают свои гамильтонианы Пуанкаре —  $\mathcal{F}_{P_c}$  и  $\mathcal{G}_{P_c}$  соответственно. Таким образом на поверхности  $P_c$  (соответственно на  $\tilde{P}_c$ ) имеется гамильтонова система  $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \text{sgrad } \mathcal{F}_{P_c}$ , где  $\text{sgrad}$  берется относительно ограничения симплектической структуры  $\omega$  на  $P_c$  (см. Рис. 3.2). Рассмотрим теперь две точки  $A$  и  $B$  на поверхности  $P_c$ , которые лежат на одной двумерной орбите  $\mathcal{O}$  действия Пуассона. Напомним, что в рассматриваемом нами случае любая двумерная орбита действия Пуассона является либо тором Лиувилля, либо кольцом  $I \times S^1$  лежащем в особом слое  $L_c$ . Рассмотрим теперь, на поверхности  $P_c$  некоторую дугу  $\widehat{AB}$  вдоль векторного поля  $\omega$ . Чтобы подчеркнуть зависимости поля  $\omega$  от выбора трансверсальной площадки  $P_c$  мы в этом случае будем обозначать время прохождения вдоль дуги  $\widehat{AB}$  со скорости  $\omega$  через  $\tau_{\widehat{AB}}(P_c)$ .

В контексте вычисления траекторного инварианта  $\Delta Z$  нахождение аналитического способа вычисления  $\tau_{\widehat{AB}}(P_c)$  приобретает первостепенное значение. Кроме этого возникают интересные вопросы, связанные с зависимостью функции  $\tau_{\widehat{AB}}(P_c)$  от выбора трансверсальной поверхности  $P_c$  содержащей точки  $A$  и  $B$ . Например, рассмотрим ситуацию, изображенную на Рис. 3.3 и Рис. 3.4. Как связаны тогда между собой числа  $\tau_{\widehat{AB}}(P_c)$  и  $\tau_{\widehat{AB}}(\tilde{P}_c)$ ? Полный ответ на эти и многие другие аналогичные вопросы даст теорема, которую мы теперь сформулируем и докажем.

Ранее нами было доказано, что на  $Q_c^3$  существует гладкая функция  $\mathcal{F}_{P_c}$  такая, что для любой трансверсальной к полю  $c$  поверхности  $P_c$  имеет место равенство

$$\mathcal{F}_{P_c} = \mathcal{F}_{Q_c^3}|_{P_c},$$

т.е. ограничение функции  $\mathcal{F}_{Q_c^3}$  на поверхность  $P_c$  является гамильтонианом Пуанкаре для этой поверхности.

Пользуясь например, работой Л.Н.Елиссон'я [20] (см. Теорему на стр.

В итоге получим, что в случае линии  $\lambda_1$ , можно доказать, что в некоторой окрестности линии  $\lambda_1^*$  (образованной ее путем  $U(Q_1)$ ) линия  $\lambda_1$  будет гомотопически эквивалентна "закраине" края  $\partial$  контура. Докажем это с помощью предложения 1 из  $C^2$ . Контактурное значение Ляпунова на  $1 \times Q_1^*$  определяется тем, что для него в некотором окрестности линии  $\lambda_1^*$  из  $\lambda = \{1, 1\}$  (см. выше)  $\lambda_1$ .

Рис. 3.3:

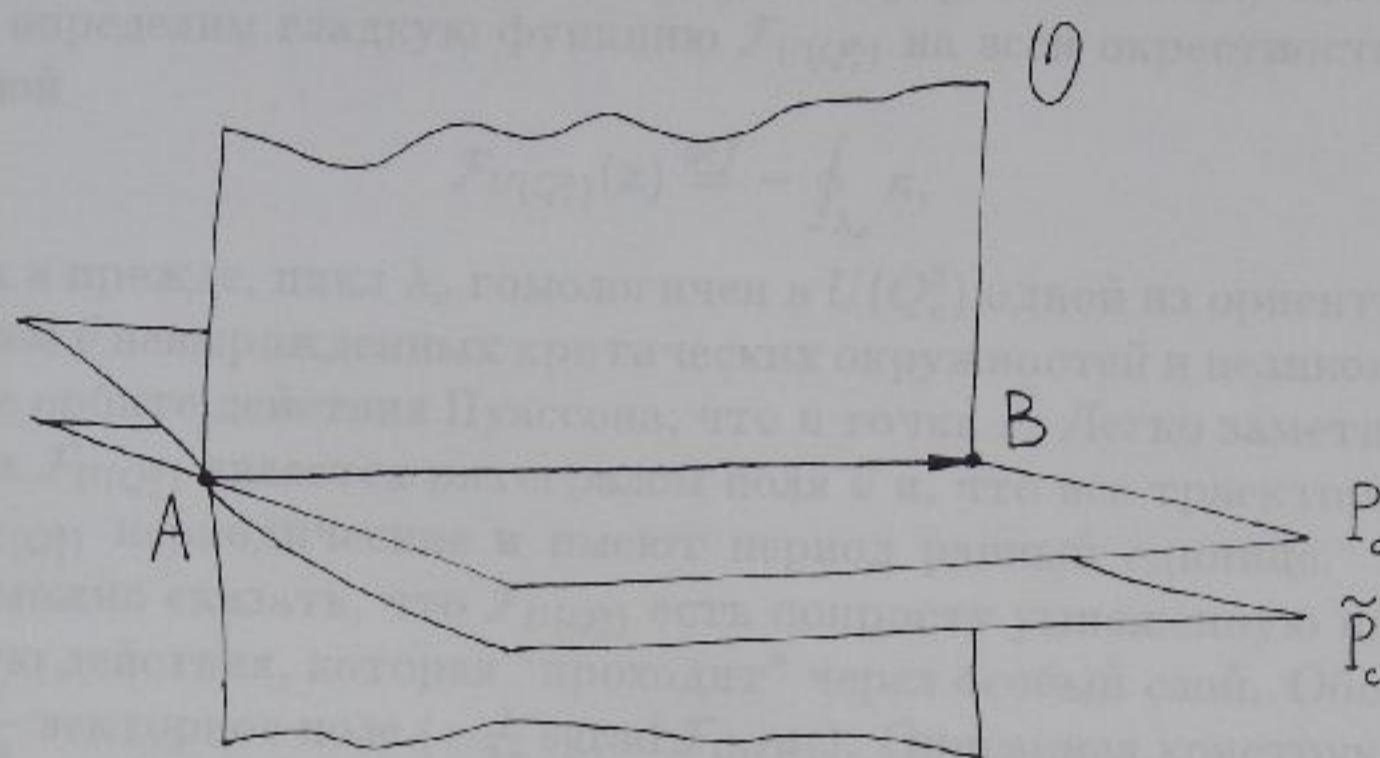
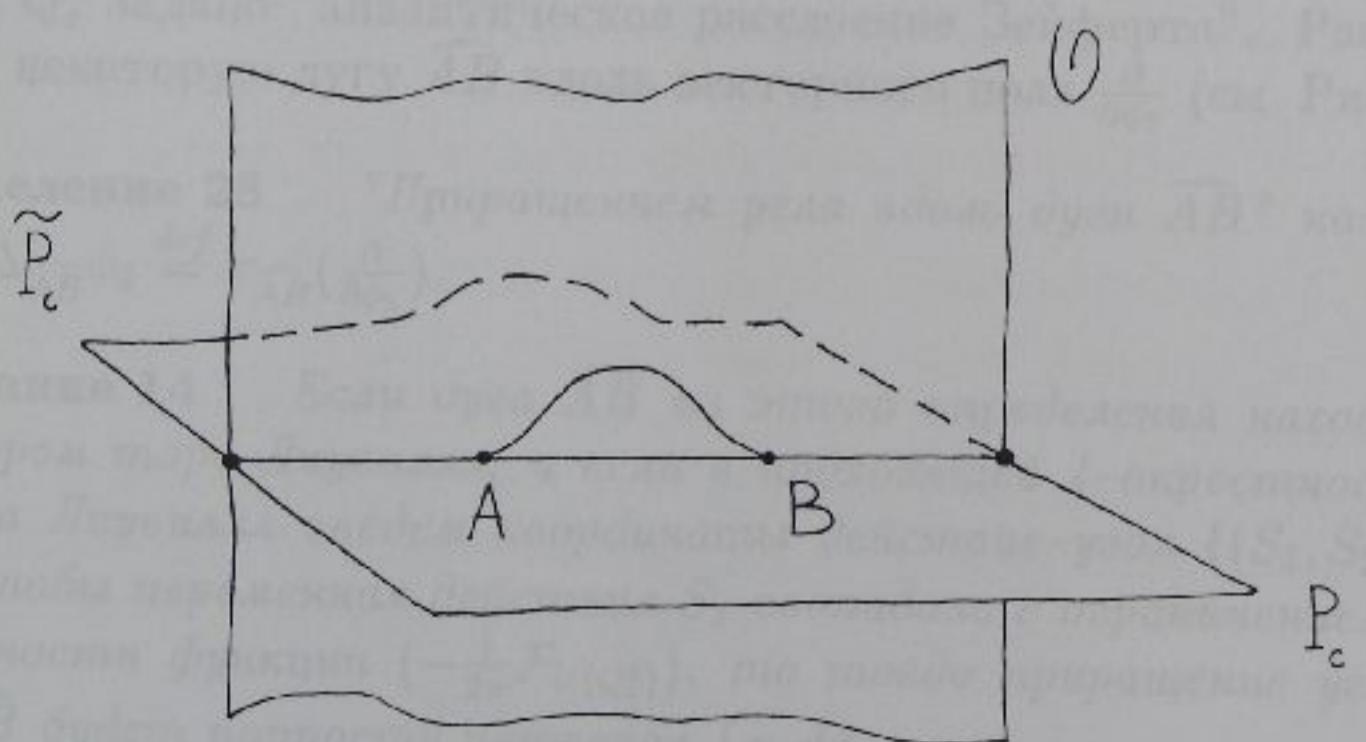


Рис. 3.4:



9 и замечание в конце той же статьи), можно доказать, что в некоторой 4-окрестности атома  $Q_c^3$  (обозначим ее через  $U(Q_c^3)$ ) слоение Лиувилля топологически эквивалентно "каноническому слоению Лиувилля на прямом произведении  $I \times Q_c^3$ ". "Каноническое слоение Лиувилля на  $I \times Q_c^3$ " определяется так. Для любого вещественного числа  $l$  из отрезка  $I = [0, 1]$  естественная проекция  $(l, x) \mapsto x$  из  $\{l\} \times Q_c^3$  в  $Q_c^3$  должна отображать слоение Лиувилля в слоение Лиувилля. Также, как и ранее доказывается, что на  $U(Q_c^3)$  существует 1-форма  $\kappa$ , такая, что  $d\kappa = \omega$ . Теперь определим гладкую функцию  $\mathcal{F}_{U(Q_c^3)}$  на всей окрестности  $U(Q_c^3)$  формулой

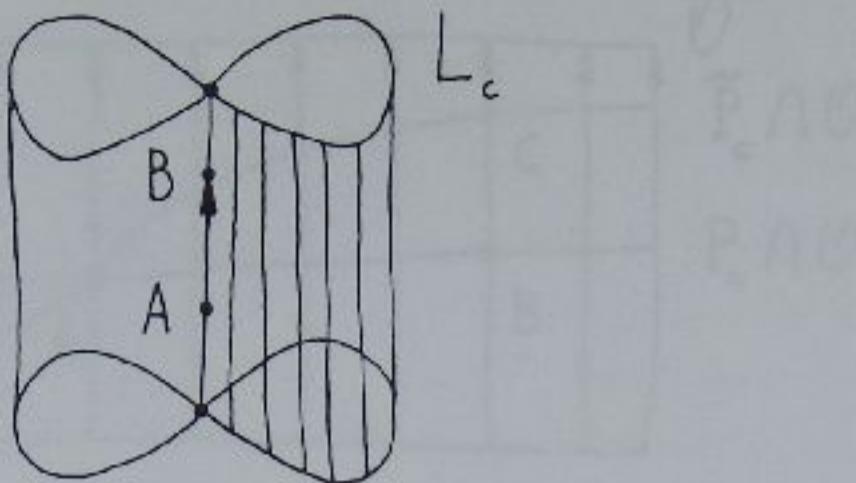
$$\mathcal{F}_{U(Q_c^3)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} - \oint_{\lambda_x} \kappa,$$

где, как и прежде, цикл  $\lambda_x$  гомологичен в  $U(Q_c^3)$  одной из ориентированных полем  $\vec{v}$  невырожденных критических окружностей и целиком лежит в той же орбите действия Пуассона, что и точка  $x$ . Легко заметить, что функция  $\mathcal{F}_{U(Q_c^3)}$  является интегралом поля  $\vec{v}$  и, что все траектории поля  $\text{sgrad } \mathcal{F}_{U(Q_c^3)}$  периодические и имеют период равный единице. Неформально можно сказать, что  $\mathcal{F}_{U(Q_c^3)}$  есть попросту умноженную на  $2\pi$  переменную действия, которая "проходит" через особый слой. Обозначим через  $\frac{\partial}{\partial \phi_2}$  векторное поле  $(-\frac{1}{2\pi} \text{sgrad } \mathcal{F}_{U(Q_c^3)})$ . Описанная конструкция позволяет аналитическим образом задать расслоение Зейферта на атоме  $Q_c^3$ . Тогда траектории поля  $\frac{\partial}{\partial \phi_2}$  и будут слоями этого расслоения. Так как это расслоение Зейферта строится по интегралам  $H$  и  $F$  однозначно, то в дальнейшем мы всегда можем считать, что на атомах задано именно это расслоение Зейферта. В этом случае мы будем говорить, что на  $Q_c^3$  задано "аналитическое расслоение Зейферта". Рассмотрим теперь некоторую дугу  $\widehat{AB}$  вдоль векторного поля  $\frac{\partial}{\partial \phi_2}$  (см. Рис. 3.5).

**Определение 28 .** "Приращением угла вдоль дуги  $\widehat{AB}$ " называется число  $\Delta_{\widehat{AB}} \phi_2 \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{\widehat{AB}}(\frac{\partial}{\partial \phi_2})$

**Замечание 14 .** Если дуга  $\widehat{AB}$  из этого определения находится на некотором торе Лиувилля, и если в подходящей 4-окрестности этого тора Лиувилля введем координаты действие-угол  $\{(S_1, S_2, \phi_1, \phi_2)\}$  так, чтобы переменная действия  $S_2$  совпадала с ограничением в этой окрестности функции  $(-\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}_{U(Q_c^3)})$ , то тогда приращение угла вдоль дуги  $\widehat{AB}$  будет попросту интеграл  $\int_{\widehat{AB}} d\phi_2$ .

Рис. 3.5:



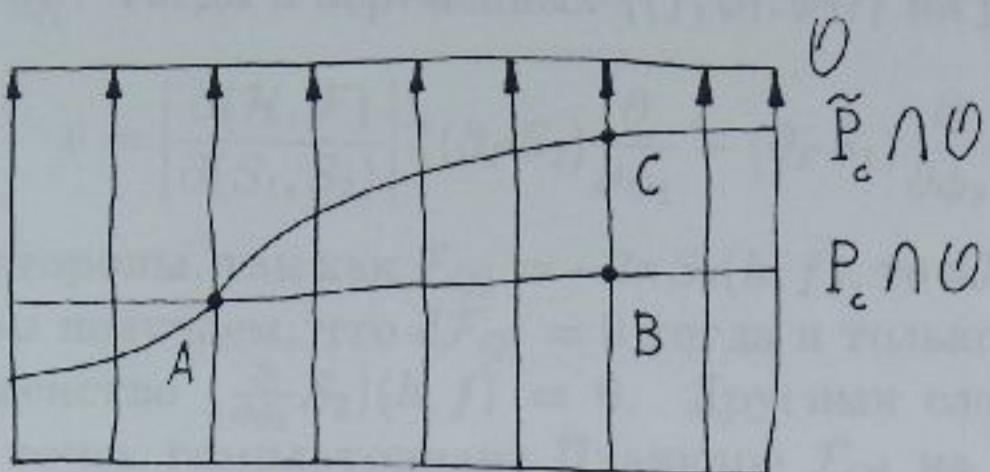
Теперь сформулируем теорему

**Теорема 9.** Рассмотрим атом  $Q_c^3$  и пусть  $\mathcal{F}_{Q_c^3}$  есть соотвествующий ему гамильтониан Пуанкаре. На этом атоме определим 1-форму  $\alpha_c$ , равную  $\alpha_c \stackrel{\text{def}}{=} i_{D_{\mathcal{F}_{Q_c^3}}} \omega$ , где  $D_{\mathcal{F}_{Q_c^3}}$  есть градиентное поле, соответствующее интегралу  $\mathcal{F}_{Q_c^3}$ , а  $\omega$  – симплектическая структура. Тогда имеет место утверждение:

- 1) 1-форма  $\alpha_c$  является гладкой на  $Q_c^3$  везде, кроме как на критических окружностях и на конечном числе торов Лиувилля, которые характеризуются тем, что на них все траектории поля  $\vec{t}$  замкнуты и являются слоями аналитического расслоения Зейфера. Такие торы Лиувилля мы будем называть "критическими торами Лиувилля для гамильтониана Пуанкаре  $\mathcal{F}_{Q_c^3}$ " или "критическими орбитами действия Пуассона". Ограничение 1-формы  $\alpha_c$  на любой двумерной некритической орбите  $\mathcal{O}$  действия Пуассона является гладкой и замкнутой 1-формой, которая не зависит от неоднозначности в выборе градиентного поля  $D_{\mathcal{F}_{Q_c^3}}$ .
- 2) Рассмотрим некоторую трансверсальную плоскость  $P_c$  и пусть  $w \stackrel{\text{def}}{=} \text{sgad } \mathcal{F}_{P_c}$ , где  $\mathcal{F}_{P_c}$  есть гамильтониан Пуанкаре на поверхности  $P_c$ . Пусть  $\widehat{AB}$  есть произвольная дуга согласованная с полем  $w$ . Отметим, что дуга  $\widehat{AB}$  обязательно лежит в пересечении плоскости  $P_c$  с некоторой двумерной орбитой  $\mathcal{O}$  действия Пуассона. Тогда имеет место формула

$$\tau_{\widehat{AB}}(P_c) = \int_{\widehat{AB}} \alpha_c.$$

Рис. 3.6:



В частности, время прохождения  $\tau_{\widehat{AB}}(P_c)$  вдоль дуги  $\widehat{AB}$  со скоростью  $v$  зависит только от дуги  $\widehat{AB}$ , но никак не от выбора трансверсальной площадки  $P_c$ , содержащей эту дугу. Например, в ситуации, изображенной на Рис. 3.3 и Рис. 3.4 имеем, что  $\tau_{\widehat{AB}}(P_c) = \tau_{\widehat{AB}}(\tilde{P}_c)$ .

- 3) Рассмотрим произвольную двумерную некритическую орбиту  $\mathcal{O}$  действия Нуассона. Рассмотрим кроме этого две трансверсальные площадки  $P_c$  и  $\tilde{P}_c$ , которые "высекают" на орбите  $\mathcal{O}$  две дуги  $\widehat{AB}$  и  $\widehat{AC}$  соответственно. Предположим кроме того, что точки  $B$  и  $C$  лежат на одном и том же слое расслоения Зепперта. Рассмотрим теперь дугу  $\widehat{BC}$ , согласованную с полем  $\frac{\partial}{\partial \phi_2}$  и такую, что криволинейный треугольник  $\widehat{ABC}$  ограничивает на орбите  $\mathcal{O}$  двумерный диск (см. Рис. 3.6).

Тогда имеет место формула

$$\tau_{\widehat{AC}}(\tilde{P}_c) - \tau_{\widehat{AB}}(P_c) = -\frac{1}{2\pi} \Delta_{\widehat{BC}} \phi_2.$$

В частности, из этой формулы следует, что для ситуации, изображенной на Рис. 3.4, имеет место равенство  $\tau_{\widehat{AB}}(P_c) = \tau_{\widehat{AB}}(\tilde{P}_c)$ .

Доказательство. Пусть  $Q_c^3$  — некоторый атом, интегрируемый по Лиувиллю гамильтоновой системой  $v = \text{sgrad } H$ , и пусть  $\mathcal{F}_{Q_c^3}$  есть гамильтонии Пуанкаре системы  $v$  на атоме  $Q_c^3$ . Фиксируем некоторое ребро этого атома и рассмотрим переменные действие угол  $\{(S_1, S_2, \phi_1, \phi_2)\}$  в подлежащей 4 окрестности этого ребра. Предположим кроме того, что

в качестве переменной действия  $S_2$  мы выбрали функцию  $(-\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_{U(Q_c^3)})$ .

Пусть  $f \stackrel{\text{def}}{=} F|_{Q_c^3}$ . Тогда в переменных  $\{(f, \phi_1, \phi_2)\}$  на ребре имеем.

$$v = \left| \frac{\partial(\mathcal{H}, \mathcal{F})}{\partial(S_1, S_2)} \right| \left\{ (\partial_F S_2) \frac{\partial}{\partial \phi_1} - (\partial_F S_1) \frac{\partial}{\partial \phi_2} \right\}.$$

С другой стороны, так как  $\mathcal{F}_{Q_c^3} = -2\pi S_2(h, f)$ , то  $d\mathcal{F}_{Q_c^3} = -2\pi(\partial_F S_2)df$ . Таким образом получаем, что  $d\mathcal{F}_{Q_c^3} = 0$  тогда и только тогда, когда выполняется равенство  $(\frac{\partial}{\partial \phi_1} S_2)(h, f) = 0$ . Другими словами, множество критических точек гамильтониана Пуанкаре  $\mathcal{F}_{Q_c^3}$  на ребре состоит из тех и только тех торов Лиувилля на которых функция вращения имеет полюса. Геометрически это означает, что на этих торах траектории поля  $\vec{v}$  совпадают (как множества) со слоями аналитического расслоения Зейферта. Рассмотрим теперь особый слой  $L_c$ . Из нашего определения функции  $\mathcal{F}_{Q_c^3}$  на атоме  $Q_c^3$  следует, что существует такая константа  $c_0$ , что для всех точек  $x$ , лежащих на особом слое  $L_c$  имеет место равенство

$$d_x \mathcal{F}_{Q_c^3} = c_0 d_x f.$$

Предположим, что  $c_0 = 0$ . Тогда для любой трансверсальной площадки  $P_c$  отображение Пуанкаре  $\sigma_{P_c} : P_c \rightarrow P_c$  будет тождественно на графике  $K_c$ , а следовательно в вершинах графа будем иметь, что  $d\sigma_{P_c} = id$ . Но мы изначально предполагаем, что в этих точках линеаризация отображения Пуанкаре не является тождественным отображением. Следовательно, константа  $c_0$  отлична от нуля. Отсюда, например, следует, что гамильтониан Пуанкаре  $\mathcal{F}_{Q_c^3}$  является боттовским интегралом. Таким образом мы доказали, что множество критических точек гамильтониана Пуанкаре на атоме  $Q_c^3$  состоит из множества точек всех критических окружностей и множества точек тех и только тех торов Лиувилля, на которых траектории поля  $v$  являются слоями аналитического расслоения Зейферта. Конечность числа критических торов Лиувилля гамильтониана Пуанкаре  $\mathcal{F}_{Q_c^3}$  следует из предположения, что полюсов функции вращения на ребре – конечное число.

Рассмотрим теперь некоторую двумерную орбиту  $\mathcal{O}$  действия Пуассона, порожденного коммутирующей парой интегралов  $H$  и  $F$ . Предположим, что орбита  $\mathcal{O}$  не состоит из критических точек гамильтониана Пуанкаре  $\mathcal{F}_{Q_c^3}$ . Следовательно, существует константа  $c_0 \neq 0$  такая, что

для любой точки  $x$ , лежащей на этой орбите, имеем  $d_x \mathcal{F}_{Q_c^3} = c_0 d_x f$ . Вспоминая теперь определение градиентного поля  $D_{\mathcal{F}_{Q_c^3}}$ , получаем, что оно определено с точностью до добавления вектора  $\xi_x$  из  $\text{Ker } d_x f$ . Следовательно, в силу изотропности пространства  $\text{Ker } d_x f$  получаем

$$[i_{(D_{\mathcal{F}_{Q_c^3}} + \xi_x) \omega_x}]|_{\mathcal{T}_x \mathcal{O}} = [i_{D_{\mathcal{F}_{Q_c^3}}} \omega]|_{\mathcal{T}_x \mathcal{O}}.$$

Тем самым доказано, что ограничение  $\alpha_c|_{\mathcal{O}}$  не зависит от неоднозначности в выборе поля  $D_{\mathcal{F}_{Q_c^3}}$ .

Докажем, что форма  $\alpha_c|_{\mathcal{O}}$  — замкнутая. Конечно, если орбита  $\mathcal{O}$  является тором Лиувилля, то это утверждение легко получить, пользуясь координатами действия — угол. Если орбита  $\mathcal{O}$  содержится в особом слое  $L_c$ , то замкнутость формы  $\alpha_c|_{\mathcal{O}}$  получается, грубо говоря, из соображений гладкости, так как эта форма замкнута на любой сколь угодно близкой орбите. Здесь мы приведем подробное доказательство, которое проходит вне зависимости от того, лежит ли орбита  $\mathcal{O}$  на особом слое  $L_c$  или нет.

Рассмотрим произвольную точку  $x_0$  на орбите  $\mathcal{O}$  (Как и прежде считаем, что эта орбита не состоит из критических точек гамильтониана Пуанкаре). И пусть  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{O}$  есть некоторая кусочно-гладкая петля в точке  $x_0$ , которая стягивается по орбите в точку  $x_0$ . Без ограничения общности будем считать, что петля  $\gamma$  находится в некотором двумерном диске на орбите  $\mathcal{O}$ . Обозначим через  $\{\Phi^s x\}_{-\epsilon < s < \epsilon}$  поток градиентного поля  $D_{\mathcal{F}_{Q_c^3}}$ . Ясно, что, если  $\epsilon$  достаточно маленькое положительное число, то петля  $\Phi^s \gamma$  снова лежит в некоторой двумерной орбите действия Пуассона и, следовательно,  $\oint_{\Phi^s \gamma} \kappa = 0$ , что со своей стороны является следствием формулы Стокса, т.к.  $d\kappa = \omega$  и любая двумерная орбита действия Пуассона является Лагранжевым подмногообразием. Следовательно, для любого  $s$  из интервала  $(-\epsilon, \epsilon)$  имеем

$$\oint_{\gamma} \Phi^{s*} \kappa = \oint_{\Phi^s \gamma} \kappa = 0.$$

Дифференцируя теперь это равенство по  $s$  в точке  $s = 0$  получаем, что для любой петли  $\gamma$ , лежащей на орбите  $\mathcal{O}$  имеет место равенство

$$\oint_{\gamma} L_{D_{\mathcal{F}_{Q_c^3}}} \kappa = 0.$$

С другой стороны  $L_{D_{\mathcal{F}_{Q_c^3}}} \kappa = i_{D_{\mathcal{F}_{Q_c^3}}} \omega + d[\kappa(D_{\mathcal{F}_{Q_c^3}})]$  и, следовательно, доказано, что для любой петли  $\gamma$ , лежащей на орбите  $\mathcal{O}$ , имеет место  $\oint_{\gamma} \alpha_c = 0$ , что означает, что форма  $\alpha_c|_{\mathcal{O}}$  локально точна, следовательно и замкнута. Тем самым утверждение 1) теоремы доказано.

Теперь, чтобы доказать пункты 2) и 3) теоремы, сформулируем следующую простую Лемму.

**Лемма 6 .** Пусть  $V$  произвольное симплектическое многообразие с симплектической структурой  $\omega$  и пусть  $G$  – гамильтониан. Рассмотрим гладкое векторное поле  $D_G$ , такое, что  $dG(D_G) = 1$  (Конечно, поле  $D_G$  определено неоднозначно, притом лишь в некритических точках гамильтониана  $G$ ). Тогда для произвольной дуги  $\widehat{AB}$  вдоль векторного поля  $X_G = \text{sgrad } G$  имеет место равенство  $\int_{\widehat{AB}} i_{D_G} \omega = \int_{\widehat{AB}} i_{X_G} \omega$ .

**Доказательство.** Из определения времени прохождения вдоль дуги  $\widehat{AB}$  со скорости  $X_G$  получаем

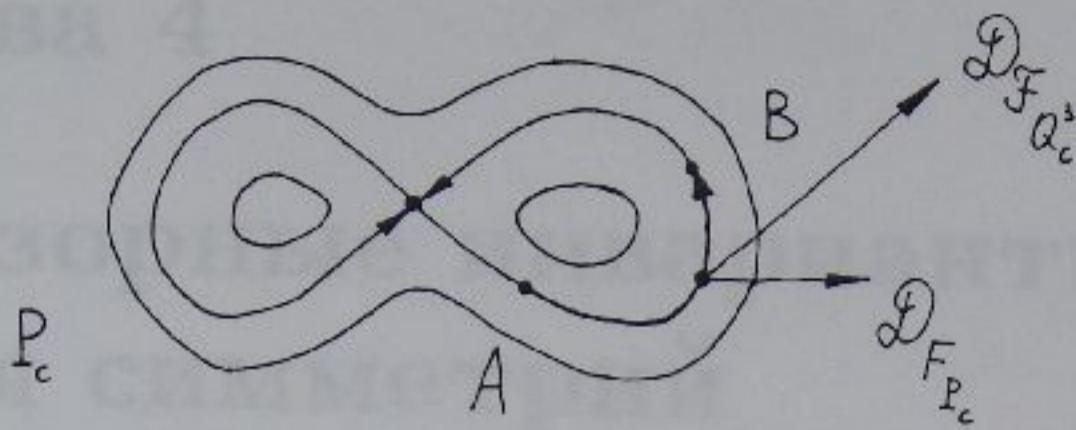
$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} i_{D_G} \omega &= \int_0^{\tau_{\widehat{AB}} X_G} [i_{D_G} \omega]_{g^t A} \left( \frac{dg^t A}{dt} \right) dt = \\ &= \int_0^{\tau_{\widehat{AB}} X_G} d_{g^t A} G(D_G) dt = \\ &= \int_0^{\tau_{\widehat{AB}} X_G} dt = \tau_{\widehat{AB}} X_G. \end{aligned}$$

Тем самым Лемма доказана.

Чтобы доказать пункт 2) теоремы, рассмотрим произвольную трансверсальную поверхность  $P_c$ . Ограничим на нее форму  $\omega$  и гамильтониан Пуанкаре  $\mathcal{F}_{Q_c^3}$ . Пусть  $\widehat{AB}$  есть некоторая дуга, согласованная с полем  $w = \text{sgrad } \mathcal{F}_{P_c}$ . Так как по определению мы считаем, что дуга  $\widehat{AB}$  представляет класс регулярных кривых, то двумерная орбита  $\mathcal{O}$  действия Пуассона, в которой лежит эта дуга, не является критической для гамильтониана Пуанкаре  $\mathcal{F}_{Q_c^3}$ . Другими словами,  $d_x \mathcal{F}_{Q_c^3} \neq 0$  для всех точек  $x$  из  $\mathcal{O}$ . Применим Лемму для системы  $w$  на многообразии  $P_c$  (см. Рис. 3.7). Получаем

$$\begin{aligned} \tau_{\widehat{AB}}(P_c) &= \int_{\widehat{AB}} i_{D_{\mathcal{F}_{P_c}}} \omega = \\ &= \int_0^{\tau_{\widehat{AB}}(P_c)} [i_{D_{\mathcal{F}_{P_c}}} \omega]_{g^t A}(w) dt = \\ &= \int_0^{\tau_{\widehat{AB}}(P_c)} [i_{D_{\mathcal{F}_{Q_c^3}}} \omega]_{g^t A}(w) dt = \\ &= \int_{\widehat{AB}} \alpha_c \end{aligned}$$

Рис. 3.7:



Здесь мы воспользовались тем, что вектора  $(D_{F_{Q_c^3}}(x) - D_{F_{P_c}}(x))$  и  $n(x)$  косоортогональные, т.к. оба принадлежат изотропному подпространству  $\text{Ker} d_x f$ .

Теперь пункт 3) теоремы является непосредственным следствием доказанной Леммы и формулы Стокса. Действительно, согласно формуле Стокса (см. Рис. 3.6) имеем

$$\int_{\widehat{AC}} \alpha_c - \int_{\widehat{AB}} \alpha_c = \int_{\widehat{BC}} \alpha_c.$$

Теперь, применяя Лемму для потока  $\text{sgrad } \mathcal{F}_{U(Q_c^3)} = -2\pi \frac{\partial}{\partial r_m}$  на многообразии  $U(Q_c^3)$ , получаем, что  $\int_{\widehat{BC}} \alpha_c = -\frac{1}{2\pi} \Delta_{\widehat{BC}} \phi_2$ . Следовательно, пользуясь утверждением пункта 2), получаем

$$\tau_{\widehat{AC}}(\tilde{P}_c) - \tau_{\widehat{AB}}(P_c) = -\frac{1}{2\pi} \Delta_{\widehat{BC}} \phi_2.$$

Тем самым теорема полностью доказана.

## Глава 4

# Тензорные инварианты и поля симметрий геодезических потоков

Тензорным инвариантом динамической системы  $X$  на многообразии  $M$  называется ненулевое гладкое тензорное поле  $T$ , такое, что  $L_X T = 0$ , где  $L_X$  – производная Ли. В частности, любой интеграл (т.е. скалярная гладкая функция  $f$ , инвариантная относительно потока  $X$ ) является тензорным инвариантом. Для любой динамической системы  $X$  на любом многообразии  $M$  всегда имеются тензорные инварианты, например – это само поле  $X$ , единичный оператор  $1 \in \text{Hom}(\mathcal{T}M, \mathcal{T}M)$  и их тензорные произведения. С другой стороны, заметим, что если  $f$  нетривиальный интеграл (т.е.  $f \neq \text{const}$ ), то все тензорные произведения  $df \otimes \dots \otimes df$  являются тензорными инвариантами. Следовательно, если система  $X$  имеет интеграл, то существуют тензорные инварианты любого типа  $(m, n)$ .

Возникает обратный вопрос. Когда из существования тензорного инварианта (отличного от интеграла) следует существование нетривиальных интегралов или, хотя бы, многозначных интегралов динамической системы? В такой формулировке вопрос впервые был поставлен и изучался В.В. Козловым и С.В. Болотиным в [21, 23], где было доказано, что в случае геодезического потока на компактной поверхности существование нетривиального поля симметрий влечет существование ненулевого многозначного интеграла. Поле симметрии называется "нетривиальным", если оно не равно  $\text{const} D_1$ , где  $D_1$  – геодезическое векторное

поле. Многозначным интегралом динамической системы  $X$  называется ненулевая замкнутая 1-форма  $\alpha$ , такая что  $\alpha(X) = 0$ . Конечно, дифференциал нетривиального интеграла будет многозначным интегралом. Обратное неверно, т.е. многозначный интеграл необязательно является дифференциалом некоторой функции. Классическим примером является иррациональная обмотка тора  $T^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \bmod 2\pi\}$ , т.е. векторное поле  $X \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x + \sqrt{2}\partial_y$  с многозначным интегралом  $\alpha_X \stackrel{\text{def}}{=} i_X \omega$ , где  $\omega \stackrel{\text{def}}{=} dx \wedge dy$  – инвариантная форма объема.

Существует общий подход, который всегда позволяет найти по тензорному инварианту  $T$  некоторые интегралы, но они могут оказаться тривиальными. Действительно, пусть  $V$  векторное пространство. Рассмотрим естественное действие  $\rho : GL(V) \rightarrow GL(V \otimes \cdots \otimes V^*)$ , которое в некотором изначально фиксированном базисе  $\{e_i\}$  на  $V$  задается формулой

$$[\rho(a)(T)]_{l_1 \dots l_n}^{k_1 \dots k_m} \stackrel{\text{def}}{=} a_{i_1}^{k_1} \cdots a_{i_m}^{k_m} T_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m} \tilde{a}_{l_1}^{j_1} \cdots \tilde{a}_{l_n}^{j_n},$$

где  $a_j^i \tilde{a}_k^j = \delta_k^i$ . Рассмотрим инварианты этого действия  $\{I_\alpha\}_\alpha$  как функции от координат  $(T_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_m})$ . Тогда, если  $T$  – тензорный инвариант динамической системы  $X$ , то любому инварианту  $I_\alpha$  действия  $\rho$  соответствует интеграл  $I_\alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=} I_\alpha(T(x))$ . Эта формула корректно задает гладкий интеграл на всем многообразии. Например, если  $T$  тензорный инвариант типа  $(1, 1)$ , то элементарные симметрические функции от его собственных значений будут интегралами. Кроме этого, если динамическая система  $X$  гамильтонова, то нетривиальные интегралы можно искать среди всевозможных сверток  $T$  с симплектической структурой  $\omega$ .

Настоящая глава организована следующим образом.

В §4.1 вводится необходимый математический аппарат и доказываются некоторые основные утверждения и теоремы, необходимые в дальнейшем.

В §4.2 доказывается, что любому несимплектическому траекторионому автоморфизму геодезического потока на компактной изоэнергетической поверхности соответствует нетривиальный интеграл (Теорема 12 и Теорема 14).

В §4.3 предъявлены все тензорные инварианты на компактных поверхностях постоянной отрицательной кривизны.

В §4.4 доказано (Теорема 16), что если геодезический поток на компактной поверхности допускает тензорный инвариант типа  $(0, 2)$ , который в некоторой точке на изоэнергетической поверхности равен нулю, то существует многозначный интеграл геодезического потока (быть может, на некотором двулистном накрытии изоэнергетической поверхности).

В §4.5 обобщаются результаты из §4.4 на случай произвольного тензорного инварианта типа  $(m, n)$ . Там доказана теорема, что если геодезический поток допускает тензорный инвариант типа  $(m, n)$ , который в некоторой точке на изоэнергетической поверхности обращается в ноль, то имеется двузначное поле симметрий (см. Теорему 18 и следствия).

Везде предполагается, что все тензорные поля принадлежат классу гладкости  $C^\infty(Q^3)$ , где  $Q^3$  изоэнергетическая поверхность. Под "нетривиальным" интегралом понимается интеграл геодезического потока на  $Q^3$ , который отличен от константы. Конечно, в аналитическом случае любой нетривиальный интеграл будет лиувиллевым (см.[25]).

## 4.1 Обозначения и вводные результаты

Рассмотрим двумерное замкнутое компактное и ориентированное многообразие  $M$ . Пусть на нем задана риманова метрика  $g$ . Геодезический поток этой метрики является автономной динамической системой на касательном расслоении  $\mathcal{T}M \xrightarrow{\pi} M$ . Метрика  $g$ , рассматриваемая как функция на  $\mathcal{T}M$ , является интегралом геодезического потока. Рассмотрим изоэнергетическую поверхность этого интеграла  $Q^3 \stackrel{def}{=} \{g(v, v) = 1\}$ . На  $Q^3$  определим векторные поля  $D_0, D_1$  и  $D_2$ , линейно независимые в любой точке.

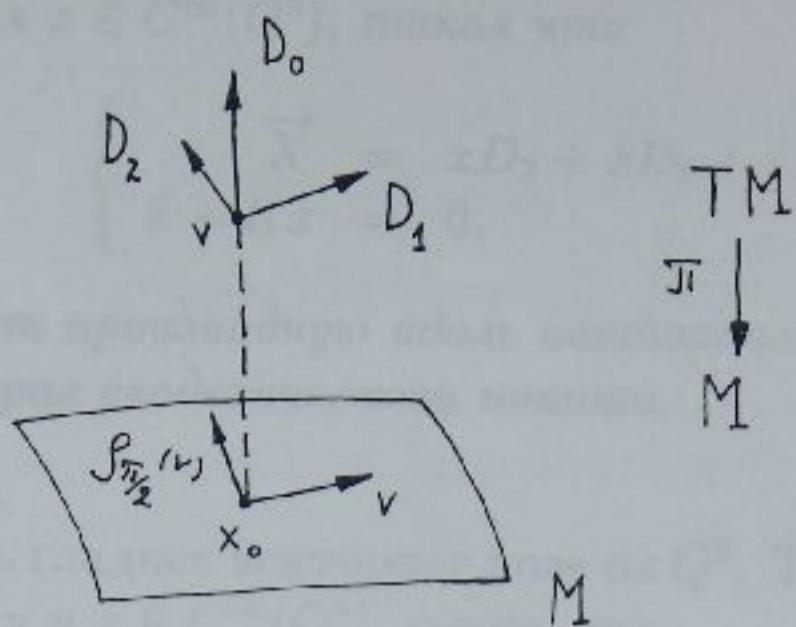
На  $Q^3$  существует естественное действие окружности  $S^1 = \{\varphi \bmod 2\pi\}$ , которое задается формулой

$$\rho_\varphi : v \mapsto \{\text{поворот } v \text{ на угол } +\varphi\}.$$

Фундаментальное векторное поле этого действия обозначим через  $D_0$ , т.е.  $D_0(v) \stackrel{def}{=} \frac{d}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} [\rho_\varphi(v)]$ .

Обозначим через  $D_1$  геодезическое векторное поле. Тогда векторное поле  $D_2$  определим формулой  $D_2 \stackrel{def}{=} [D_0, D_1]$ . По-другому можно сказать

Рис. 4.1:



так. Рассмотрим связность Леви-Чивита метрики  $g$ . Горизонтальные подпространства этой связности касаются  $Q^3$ . Пусть  $v \in TM$  и  $r(v) = x_0$ . Рассмотрим в  $T_{x_0}M$  вектора  $v$  и  $\rho_{\pi/2}(v)$  и поднимем их горизонтально в точке  $v$ . Полученные вектора и будут, соответственно, векторами  $D_1$  и  $D_2$  (см. Рис. 4.1). Имеют место коммутационные соотношения

$$(*) \begin{cases} [D_0, D_1] = D_2, \\ [D_0, D_2] = -D_1, \\ [D_1, D_2] = KD_0. \end{cases}$$

где  $K$  обозначает гауссову кривизну, которую мы подняли на  $Q^3$ .

Обозначим через  $(T, \Theta^1, \Theta^2)$  коренер, двоичственный к  $(D_0, D_1, D_2)$ , т.е.  $T(D_0) = 1, T(D_1) = 0$  и т.д. В классических терминах на  $TM$  после применения преобразования Лежандра форма  $\Theta^1$  переходит в форму  $(rdq)|_{Q^3}$ . Через  $\omega_g$  будем обозначать форму  $d\Theta^1$ .

Имеют место соотношения

$$(**) \begin{cases} dT = -K\Theta^1 \wedge \Theta^2, \\ d\Theta^1 = T \wedge \Theta^2, \\ d\Theta^2 = \Theta^1 \wedge T. \end{cases}$$

Соотношения  $(*)$  и  $(**)$  являются следствием структурных уравнений метрической связности. В частности, из  $(**)$  получаем, что  $L_{D_1}T = -K\Theta^2, L_{D_1}\Theta^1 = 0, L_{D_1}\Theta^2 = T$ .

Докажем сначала несколько утверждений.

**Утверждение 8.** Гладкое векторное поле  $\vec{X}$  является полем симметрии геодезического потока тогда и только тогда, когда существует гладкая функция  $x \in C^\infty(Q^3)$ , такая что

$$\begin{cases} \vec{X} = xD_2 + \dot{x}D_0 + ID_1, \\ \ddot{x} + Kx = 0, \end{cases}$$

где  $\dot{x}$  обозначает производную вдоль векторного поля  $D_1$ , а  $I$  есть некоторый интеграл геодезического потока.

Доказательство.

Пусть  $X$  есть гладкое векторное поле на  $Q^3$ . Тогда существуют гладкие функции  $x, y$  и  $z \in C^\infty(Q^3)$ , такие, что

$$X = xD_2 + yD_0 + zD_1.$$

С другой стороны, из (\*) получаем, что

$$\begin{aligned} [D_1, X] &= \dot{x}D_2 + \dot{y}D_0 + \dot{z}D_1 + xKD_0 - yD_2 = \\ &= (\dot{x} - y)D_2 + (\dot{y} + Kx)D_0 + \dot{z}D_1. \end{aligned}$$

Следовательно,  $[D_1, X] = 0$  тогда и только тогда, когда функции  $x, y$  и  $z$  удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dot{z} = 0, \\ \dot{y} = \dot{x}, \\ \ddot{x} + Kx = 0. \end{cases}$$

Тем самым, утверждение доказано. Отметим здесь, что аналогичное утверждение сформулировано в работе [23].

Интеграл  $I$ , который стоит в условии утверждения, в некотором смысле является "нетеровым" (см.[25]). Действительно, согласно теореме Нетера любая однопараметрическая группа изометрий на  $M$  задает гладкое нетривиальное поле симметрии  $X$  на  $Q^3$ , которое сохраняет форму  $\Theta^1$ . Следовательно, имеем  $0 = L_X\Theta^1 = i_X\omega + dI$ . Таким образом, получаем, что  $dI \neq 0$  везде, где  $X$  не пропорционально геодезическому векторному полю. Следовательно, в этом случае  $I$  – нетривиальный интеграл, совпадающий с классическим интегралом Нетера.

Совершенно аналогично доказывается

**Утверждение 9.** Гладкая 1-форма  $\alpha$  является тензорным инвариантом геодезического потока тогда и только тогда, когда существует гладкая функция  $x \in C^\infty(Q^3)$ , такая, что

$$\begin{cases} \alpha = xT - \dot{x}\Theta^2 + I\Theta^1, \\ \ddot{x} + Kx = 0, \end{cases}$$

где  $I$  – некоторый интеграл геодезического потока.

На самом деле первое утверждение является переформулировкой классической теоремы о соответствии между полями Якоби вдоль геодезической и инвариантными векторными полями вдоль той же самой геодезической, рассматриваемой как кривая в  $\mathcal{T}M$  (см. [24]).

Рассмотрим форму  $\sigma_g \stackrel{\text{def}}{=} T \wedge \Theta^1 \wedge \Theta^2$  и возьмем на  $Q^3$  ту ориентацию, в которой  $\sigma_g$  является формой объема. Для произвольной гладкой функции  $f$  на  $Q^3$  имеет место формула  $d[-fT \wedge \Theta^2] = \dot{f}\sigma_g$ . Следовательно, для любой функции

$$\int_{Q^3} \dot{f}\sigma_g = 0.$$

Совершенно аналогично доказывается, что  $\int_{Q^3} D_2 f \sigma_g = 0$  и  $\int_{Q^3} D_0 f \sigma_g = 0$ . В частности, если на  $Q^3$  задано поле симметрий и  $x$  есть соответствующая им гладкая функция, то  $(x\dot{x})' = (\dot{x})^2 + x\ddot{x} = (\dot{x})^2 - Kx^2$ . Интегрируя это равенство, получаем

$$\int_{Q^3} (\dot{x})^2 \sigma_g = \int_{Q^3} Kx^2 \sigma_g.$$

Следовательно, если кривизна  $K \leq 0$ , то в любой области где  $K < 0$  имеем, что  $x = 0$ .

**Следствие 4.** Если род поверхности  $\geq 1$  и  $K \leq 0$ , то поле симметрий геодезического потока в области, где  $K < 0$ , обязательно будет пропорционально геодезическому векторному полю  $D_1$ .

Теперь посмотрим, когда заданная 1-форма на  $Q^3$  является многозначным интегралом геодезического потока  $D_1$ .

**Утверждение 10.** Форма  $\alpha$  является многозначным интегралом геодезического потока тогда и только тогда, когда существует гладкая функция  $x$  на  $Q^3$ , такая что

$$\begin{cases} \alpha = xT - \dot{x}\Theta^2, \\ \ddot{x} + Kx = 0, \\ (\dot{x})_0 + x_2 = 0, \end{cases}$$

$$e\partial e (\dot{x})_0 \stackrel{\text{def}}{=} D_0 D_1 x \text{ и } x_2 \stackrel{\text{def}}{=} D_2 x.$$

Доказательство.

Пусть  $\alpha$  является многозначным интегралом геодезического потока. Тогда существуют гладкие функции  $x$  и  $y$ , такие, что  $\alpha = xT + y\Theta^2$ . С другой стороны, должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} 0 &= d\alpha = d[xT + y\Theta^2] = \\ &= -(y + \dot{x})T \wedge \Theta^1 + (y_0 - x_2)T \wedge \Theta^2 + (\dot{y} - Kx)\Theta^1 \wedge \Theta^2. \end{aligned}$$

Следовательно, функции  $x$  и  $y$  удовлетворяют соотношения

$$\begin{cases} y = -\dot{x}, \\ \ddot{x} + Kx = 0, \\ (\dot{x})_0 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Обратное утверждение очевидно. Тем самым, утверждение доказано.

**Следствие 5** (В.В. Коэлов, С.В. Болотин) Пусть задано нетривиальное поле симметрии геодезического потока. Тогда, если многообразие  $M$  компактно, то на  $Q^3$  существует многозначный интеграл.

Доказательство. Пусть  $X = xD_2 + \dot{x}D_0 + ID_1$  — нетривиальное поле симметрий. Тогда 1-форма  $\alpha_X \stackrel{\text{def}}{=} i_X \omega_g = xT - \dot{x}\Theta^2$  будет тензорным инвариантом. Следовательно,  $d\alpha_X = [D_0 D_1 x + D_2 x]T \wedge \Theta^2$  снова будет тензорным инвариантом, и, следовательно,  $[D_0 D_1 x + D_2 x]$  будет интегралом. Допустим, что  $D_0 D_1 x + D_2 x = \text{const}$ . Тогда, интегрируя это равенство по форме  $\sigma_g$ , получаем, что  $\text{const} = 0$ . Следовательно,  $\alpha_X$  есть многозначный интеграл. Тем самым, следствие доказано.

Рассмотрим теперь билинейное тензорное поле

$$\omega^2 \stackrel{\text{def}}{=} b_{00}T \otimes T + b_{01}T \otimes \Theta^2 + b_{10}\Theta^2 \otimes T + b_{11}\Theta^2 \otimes \Theta^2.$$

Эта форма является тензорным инвариантом тогда и только тогда, когда функции  $b_{ij}$  удовлетворяют системе

$$(\ast\ast\ast) \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{b}_{00} + b_{01} + b_{10} & = & 0, \\ \dot{b}_{01} - Kb_{00} + b_{11} & = & 0, \\ \dot{b}_{10} + b_{11} - Kb_{00} & = & 0, \\ \dot{b}_{11} - Kb_{10} - Kb_{01} & = & 0. \end{array} \right.$$

Обозначим через  $\{\omega\}$  матрицу,

$$\{\omega\} \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} b_{01} & b_{11} \\ -b_{00} & -b_{10} \end{bmatrix},$$

а через  $[\kappa]$  матрицу,

$$[\kappa] \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} 0 & -K \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнения  $(\ast\ast\ast)$  можно записать в форме Лакса

$$\{\omega\} = [[\kappa], \{\omega\}].$$

Отсюда сразу находим интегралы  $I_1 = b_{01} - b_{10}$  и  $I_2 = b_{00}b_{11} - b_{01}b_{10}$ .

Теперь докажем следующую теорему.

**Теорема 10.** Пусть  $\omega^2$  - есть тензорный инвариант типа  $(0, 2)$ , который не является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами форм  $\Theta^1 \otimes \Theta^1$  и  $T \wedge \Theta^2$ . Тогда, если  $\omega^2(D_0, D_0) = 0$ , то существует нетривиальное поле симметрии геодезического потока.

Доказательство. Любой тензор типа  $(0, 2)$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \omega^2 &= f\Theta^1 \otimes \Theta^1 + (\Theta^1 \otimes \alpha^1 + \beta^1 \otimes \Theta^1) + \\ &+ b_{00}T \otimes T + b_{01}T \otimes \Theta^2 + b_{10}\Theta^2 \otimes T + b_{11}\Theta^2 \otimes \Theta^2. \end{aligned}$$

Так как  $\Theta^1$  инвариантна относительно геодезического потока, то  $\alpha^1$  и  $\beta^1$  являются тензорными инвариантами, а  $f$  является интегралом. С другой стороны, из первого уравнения системы  $(\ast\ast\ast)$  находим, что  $b_{10} + b_{01} = 0$ . Тогда, складывая второе и третье уравнение той же системы, получаем, что  $b_{11} = 0$ . Из второго уравнения видно, что  $\dot{b}_{01} = 0$  т.е.  $b_{01}$  интеграл.

Допустим, что все полученные поля симметрий нулевые, а интегралы – константы. Тогда  $\omega^2 = c_1\Theta^1 \otimes \Theta^1 + c_2T \wedge \Theta^2$ , где  $c_1$  и  $c_2$  константы. Но это противоречит условию теоремы. Следовательно, имеется нетривиальное поле симметрии. Теорема доказана.

Из этой теоремы в частности следует, что если тензорный инвариант есть 2-форма, не являющаяся линейной комбинацией с постоянными коэффициентами форм  $\Theta^1 \otimes \Theta^1$  и  $\omega_g$ , то существует нетривиальное поле симметрии геодезического потока.

Таким же образом доказывается

**Теорема 11.** Пусть  $\omega^3$  есть тензорный инвариант типа  $(0, 3)$ , который порождается формами  $T$  и  $\Theta^2$ , и такой, что  $\omega^3(D_0, D_0, D_0) = 0$ . Тогда существует нетривиальное поле симметрий геодезического потока.

Доказательство. Равенство  $L_{D_1}\omega^3 = 0$  эквивалентно некоторой системе дифференциальных уравнений на функции  $b_{ijk}$ . Из этой системы видно, что поля

$$(b_{001} - b_{010})D_2 + (b_{110} - b_{101})\dot{D}_0$$

и

$$(b_{010} - b_{100})D_2 + (b_{101} - b_{011})\dot{D}_0$$

являются полями симметрий геодезического потока. Допуская, что все они нулевые, получаем систему

$$\begin{cases} \dot{b}_{000} + 3b_{100} &= 0, \\ \dot{b}_{100} - Kb_{000} + 2b_{110} &= 0, \\ \dot{b}_{110} - 2Kb_{100} + b_{111} &= 0, \\ \dot{b}_{111} - 3Kb_{110} &= 0. \end{cases}$$

Теперь, пользуясь тем, что  $b_{000} = 0$ , получаем, что форма  $\omega^3$  равняется нулю. Тем самым, теорема доказана.

## 4.2 Траекторные автоморфизмы геодезического потока

Пусть  $M^2$  компактное связное замкнутое ориентируемое двумерное риманово многообразие. Рассмотрим группу гладких ориентированных

диффеоморфизмов изоэнергетической поверхности  $Q^3$ , которые переводят траектории геодезического потока в траектории с сохранением их естественной ориентации.

**Определение 29 .** *Определенную таким образом группу будем называть группой траекторных автоморфизмов геодезического потока.*

**Определение 30 .** *Группу гладких ориентированных диффеоморфизмов изоэнергетической поверхности  $Q^3$ , которые переводят геодезическое векторное поле в себя, будем называть группой автоморфизмов геодезического потока.*

Как и ранее, под интегрируемостью геодезического потока будем понимать существование нетривиального (отличного от константы) интеграла. Кроме этого, ограничение симплектической структуры  $\omega_g$  на  $Q^3$  мы снова называем симплектической структурой.

Здесь докажем следующую теорему.

**Теорема 12 .** *Любому несимплектическому траекторному автоморфизму геодезического потока соответствует нетривиальный интеграл.*

**Следствие 6 .** *Группа траекторных автоморфизмов неинтегрируемого геодезического потока состоит из симплектоморфизмов.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что заданы два геодезических потока на двух разных поверхностях  $M^2$  и  $M^{2'}$ . Допустим, что диффеоморфизм  $\phi$  является траекторным диффеоморфизмом. Тогда,

$$d_{x_0} \phi(D_1(x_0)) = a(x_0) D_1'(\phi(x_0)),$$

где  $a$  – гладкая функция,  $a > 0$ . Следовательно, имеют место соотношения,

$$i_{D_1}(\phi^* \omega_{g'})_x = \omega_{g'}(\phi(x))(d_x \phi(D_1(x)), d_x \phi(.)) = 0,$$

т.к.  $D_1'$  лежит в ядре формы  $\omega_{g'}$ . Отсюда следует, что  $(\phi^* \omega_{g'})_x = I(x) \omega_g$ , где  $I(x)$  – гладкая функция. Отсюда получаем, что

$$L_{D_1}(\phi^* \omega_{g'}) = i_{D_1} d[\phi^* \omega_{g'}] + d[i_{D_1} \phi^* \omega_{g'}] = 0.$$

В силу инвариантности формы  $\omega_g$  получаем, что  $I(x)$  является интегралом поля  $D_1$ . Заметим, что до сих пор мы не пользовались тем, что  $D_1$  – геодезический поток.

С другой стороны, имеем, что

$$i_{D_1}(\phi^*\Theta^{1'})_x = \Theta^{1'}(\phi(x))(d_x\phi(D_1)) = a(x),$$

и, следовательно,

$$(\phi^*\Theta^{1'})_x = a(x)\Theta^1 + p(x)T + q(x)\Theta^2.$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} d[\phi^*\Theta^{1'}] &= d[a\Theta^1 + pT + q\Theta^2] = \\ &= da \wedge \Theta^1 + dp \wedge T + dq \wedge \Theta^2 + \\ &+ aT \wedge \Theta^2 - Kp\Theta^1 \wedge \Theta^2 + q\Theta^1 \wedge T = \\ &= \{a - p_2 + q_0\}\omega_g + \{a_0 - p_1 - q\}T \wedge \Theta^1 + \\ &+ \{-a_2 + q_1 - Kp\}\Theta^1 \wedge \Theta^2. \end{aligned}$$

Из равенства  $d[\phi^*\Theta^{1'}] = I(x)\omega_g$ , получаем, что выполняется система дифференциальных соотношений

$$\begin{cases} a(x) - p_2 + q_0 = I(x), \\ a_0 - p_1 - q = 0, \\ -a_2 + q_1 - Kp = 0. \end{cases}$$

Интегрируя первое равенство по элементу объема  $\sigma_g$ , находим

$$1) \int_{Q^3} I\sigma_g = \int_{Q^3} \{a - p_2 + q_0\}\sigma_g = \int_{Q^3} a\sigma_g$$

С другой стороны, имеем

$$2) \phi^*\sigma_{g'} = -\phi^*(\Theta^{1'}) \wedge \phi^*(\omega_{g'}) = a(x)I(x)\sigma_g.$$

Теперь докажем нашу теорему. Сначала предположим, что изначально задана одна поверхность, т.е.  $M^2 = M^{2'}$  и  $g = g'$ . Согласно уже доказанному, имеет место равенство  $\phi^*\omega_g = I\omega_g$ , где  $I(x)$  – интеграл геодезического потока. Допустим, что этот интеграл тривиален, т.е.

$I(x) = c$ , где  $c$  есть некоторая константа. Тогда из равенства 1) и 2) соответственно получаем,

$$\begin{cases} cVol(Q^3) &= \int_{Q^3} a\sigma_g, \\ Vol(Q^3) &= c \int_{Q^3} a\sigma_g. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что

$$\int_{Q^3} a\sigma_g = c^2 \int_{Q^3} a\sigma_g.$$

С другой стороны, из второго равенства системы видно, что  $\int_{Q^3} a\sigma_g \neq 0$ . Следовательно,  $c = \pm 1$ . Но, по определению,  $a(x) > 0$  и из первого равенства системы получаем что  $c = 1$ . Это противоречит условию теоремы, что диффеоморфизм  $\phi$  несимплектический. Тем самым, теорема доказана.

Из доказательства этой теоремы можно усмотреть следующее утверждение

**Следствие 7.** Пусть  $(M, g)$  и  $(M', g')$  – двумерные компактные и замкнутые римановы многообразия. Рассмотрим геодезические потоки на  $Q^3$  и  $Q^{3'}$ . Тогда, если существует изоморфизм этих потоков, то обязательно  $Vol(M, g) = Vol(M', g')$ .

**Теорема 13** Пусть задан несимплектический траекторный автоморфизм натуральной механической системы с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}(\bar{x})p_ip_j + U(\bar{x})$$

на изоэнергетической поверхности  $Q_h^3 \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in T^*M | H(p) = h\}$  в предположении, что  $U < h$ . Тогда существует нетривиальный интеграл системы на  $Q_h^3$ .

Доказательство. Теорема является следствием Теоремы 12 и принципа Монпертои.

**Теорема 14.** Геодезический поток на компактной поверхности имеет многозначный интеграл тогда и только тогда, когда существует автоморфизм, не сохраняющий форму  $\Theta^1$  (в классических терминах это форма  $(pdq)|_{Q^3}$ ).

**Доказательство.** Пусть  $\phi$  – автоморфизм геодезического потока, не сохраняющий форму  $\Theta^1$ . Тогда, очевидно, что форма  $\phi^*\Theta^1$  является ненулевым тензорным инвариантом. Допустим, что геодезический поток не имеет многозначного интеграла. Тогда  $\phi^*\Theta^1 = c\Theta^1$ , где  $c$  – ненулевая константа. Но, с другой стороны,  $c = i_{D_1}(\phi^*\Theta^1)_x = \Theta_{\phi(x)}^1(D_1) = 1$ . Следовательно,  $\phi$  сохраняет форму  $\Theta^1$ .

Пусть, наоборот, геодезический поток имеет ненулевой многозначный интеграл  $\alpha$ . Этому интегралу соответствует нетривиальное поле симметрии  $X$ , такое что  $i_X\omega_g = \alpha$  и  $\Theta^1(X) = 0$ . Тогда имеем  $L_X\Theta^1 = \alpha \neq 0$ . Следовательно, поток  $g_X^t(x)$  поля  $X$  при некотором  $t = t_0$  не сохраняет форму  $\Theta^1$ . Тем самым, теорема доказана.

Пусть теперь задано нетривиальное поле симметрии  $X$  геодезического потока. Без ограничения общности считаем, что  $\Theta^1(X) = 0$ . Рассмотрим поток этого поля  $\{g^t(x)\}$ . Очевидно, что тогда диффеоморфизмы  $g^t : Q^3 \rightarrow Q^3$ , являются автоморфизмами геодезического потока  $D_1$ . Следовательно, в этом случае получаем однопараметрическое семейство интегралов  $\{I(t; x)\}$ , где  $[g_t^*\omega_g](x) = I(t; x)\omega_g(x)$  и однопараметрическое семейство инвариантных 1-форм  $\{g_t^*\Theta^1\}$ . Обозначим через  $I(x)$  интеграл  $d[\alpha_X] = I\omega_g$ , где, как и ранее,  $\alpha_X \stackrel{\text{def}}{=} i_X\omega_g$ . Тогда имеет место

**Теорема 15 .** *Имеют место соотношения:*

- а)  $I(x) = \partial_t I(0; x)$ ,
- б)  $I(t; x) = \exp\{I(x)t\}$ ,
- в)  $g_t^*\Theta^1 = \Theta^1 + [\int_0^t I(u; x)du]\alpha_X$ .

**Доказательство.** Действительно,

$$L_X\omega_g \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}|_{t=0}[g_t^*\omega_g] = \frac{d}{dt}|_{t=0}[I(t; x)\omega_g(x)] = \partial_t I(0; x)\omega_g.$$

С другой стороны,  $L_X\omega_g = d[i_X\omega_g] = I(x)\omega_g$ . Следовательно,  $I(x) = \partial_t I(0; x)$ .

Теперь докажем пункт б) теоремы. Пусть  $0 \leq t_1 \leq t_2$ . Тогда

$$[g_{t_2}^*\omega_g](x) = g_{t_1}^*g_{(t_2-t_1)}^*\omega_g = I(t_2 - t_1; g^{t_1}x)I(t_1; x)\omega_g.$$

Следовательно,  $I(t_2; x) = I(t_2 - t_1; g^{t_1}x)I(t_1; x) = I(t_2 - t_1; x)I(t_1; x)$  (т.к.  $I(t; x)$  интеграл геодезического потока). Из этого равенства и очевидного соотношения  $I(0; x) = 1$  получаем утверждение пункта б).

С другой стороны, имеет место равенство,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|_{t=t_0}[g_t^*\Theta^1](x) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}[g_{(t_0+t)}^*\Theta^1](x) = \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}[g_{t_0}^*g_t^*\Theta^1](x) = g_{t_0}^*(L_X\Theta^1) = \\ &= g_{t_0}^*(\omega_g(X, .)) = \omega_g(g^{t_0}x)(X, d_xg^{t_0}(.)) = \\ &= \omega_g(g^{t_0}x)(d_xg^{t_0}(X(x)), d_xg^{t_0}(.)) = \\ &= i_X[g_{t_0}^*\omega_g](x) = I(t_0; x)\alpha_X(x).\end{aligned}$$

Отсюда получаем утверждение пункта в). Творема доказана.

### 4.3 Тензорные инварианты на компактных поверхностях постоянной отрицательной кривизны

Пусть  $M^2$ -компактное ориентированное и замкнутое риманово многообразие без края. Допустим, что оно является пространством постоянной отрицательной кривизны. Тогда, согласно Следствию 1, на изоэнергетической поверхности  $Q^3$  все тензорные инварианты типа  $(0, 1)$  и  $(1, 0)$  тривиальные, т.е. они имеют соответственно вид  $\text{const } \Theta^1$  и  $\text{const } D_1$ .

Рассмотрим теперь случай тензорных инвариантов типа  $(0, 2)$ ,  $(1, 1)$  и  $(2, 0)$ . Нетрудно заметить, что за исключением тензорных инвариантов  $\text{const } \Theta^1 \otimes \Theta^1$ ,  $\text{const } D_1 \otimes \Theta^1$ ,  $\text{const } \Theta^1 \otimes D_1$  и  $\text{const } D_1 \otimes D_1$  нет других, которые бы имели "целый множитель"  $D_1$  или  $\Theta^1$ . Допустим, что дан тензорный инвариант  $\omega^2$ , который порождается формами  $T$  и  $\Theta^2$ . Тогда его "коэффициенты" удовлетворяют системе  $(***)$  из предыдущего параграфа. Рассмотрим матрицу этой системы

$$[\kappa_2] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ K & 0 & 0 & -1 \\ K & 0 & 0 & -1 \\ 0 & K & K & 0 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица имеет собственные значения  $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{-2K}$ . Тогда, так как  $M$  компактно, то в силу ограниченности функций  $b_{ij}$ , стол-

бец  $(b_{00}, b_{01}, b_{10}, b_{11})^T$  принадлежит  $\text{Ker}[\kappa_2]$ . Следовательно, существуют гладкие функции  $f$  и  $g$ , такие что

$$\omega^2 = fT \wedge \Theta^2 + g(T \otimes T + K\Theta^2 \otimes \Theta^2)$$

Так как все формы в этом равенстве инвариантны, то  $f$  и  $g$  являются интегралами, следовательно, они константы.

Случай тензорных инвариантов типа  $(1,1)$  и  $(2,0)$  сводится к уже рассмотренному "снятию индекса" с помощью формы  $\omega_g = T \wedge \Theta^1$ . Тем самым доказано

**Утверждение 11.** *Если  $M$ -компактное пространство постоянной отрицательной кривизны, то*

- a) *Все тензорные инварианты типа  $(0,2)$  являются линейной комбинацией с постоянными коэффициентами форм:  $\Theta^1 \otimes \Theta^1$ ,  $T \wedge \Theta^2$  и  $(T \otimes T + K\Theta^2 \otimes \Theta^2)$ ,*
- б) *Все тензорные инварианты типа  $(1,1)$ , с точностью до изменения порядка сомножителей, являются линейной комбинацией с постоянными коэффициентами операторов:  $D_1 \otimes \Theta^1$ ,  $\text{id}$ ,  $(D_2 \otimes T - KD_0 \otimes \Theta^2)$ ,*
- в) *Все тензорные инварианты типа  $(2,0)$  являются линейной комбинацией с постоянными коэффициентами тензоров:  $D_1 \otimes D_1$ ,  $D_0 \wedge D_2$ ,  $(D_2 \otimes D_2 + KD_0 \otimes D_0)$ .*

**Замечание 15.** Конечно, указанные в этом утверждении тензорные инварианты будут тензорными инвариантами и в случае, когда  $K$  есть (необязательно отрицательная) константа и  $M$  необязательно компактная поверхность.

Теперь дадим геометрическую интерпретацию оператора

$$B \stackrel{\text{def}}{=} D_2 \otimes T - KD_0 \otimes \Theta^2.$$

В репере  $(D_0, D_2, D_1)$  он имеет матрицу

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & -K & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Она имеет собственные значения  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{-K}$ . Обозначим собственные подпространства соответственно через  $V_0$ ,  $V_+$  и  $V_-$ . Легко проверить, что  $V_-$  и  $V_+$  являются соответственно устойчивым и неустойчивым расслоениям (в смысле Д. В. Аносова) геодезического потока (см.[26, Гл.3, §14]). Следовательно, оператор

$$P_+ \stackrel{def}{=} \frac{B + \sqrt{-K} \operatorname{id}}{2\sqrt{-K}}$$

является проектором на пространстве  $V_+$  вдоль пространства  $V_{-0} \stackrel{def}{=} V_- \oplus V_0$ .

Конечно, действуя таким же образом, как и в настоящем параграфе, можно описать все тензорные инварианты на компактных поверхностях постоянной отрицательной кривизны. Кроме этого, из доказанного утверждения видно, что, вообще говоря, нельзя утверждать, что если имеется тензорный инвариант типа  $(0, 2)$ , который не порождается формами  $\Theta^1 \otimes \Theta^1$  и  $\omega_g$ , то тогда существует нетривиальный интеграл или даже многозначный интеграл.

## 4.4 Тензорные инварианты типа $(0, 2)$

Пусть на компактной изоэнергетической поверхности  $Q^3$  дан тензорный инвариант геодезического потока типа  $(0, 2)$ . Следует ли отсюда, что этот геодезический поток интегрируем? Конечно, мы заранее должны исключить тривиальные тензорные инварианты  $\Theta^1 \otimes \Theta^1$  и  $\omega_g$ , которые всегда имеются. Нами ранее было замечено, что если кривизна  $K$  постоянна, то форма  $T \otimes T + K\Theta^2 \otimes \Theta^2$  является тензорным инвариантам. Следовательно, если в этом случае  $K < 0$ , то нет не только нетривиальных интегралов, но и ненулевых многозначных интегралов.

Пусть геодезический поток интегрируем с помощью интеграла  $f$ . Тогда форма  $df \otimes df$  является тензорным инвариантам. Так как поверхность  $Q^3$  компактна, то в некоторой точке эта форма равна нулю. Наоборот, допустим, что дан тензорный инвариант типа  $(0, 2)$ , который в некоторой точке обращается в ноль. Тогда имеет место

**Теорема 16 .** Пусть на компактной изоэнергетической поверхности  $Q^3$  геодезического потока задан тензорный инвариант  $B$  типа  $(0, 2)$ ,

который равен нулю на конечном числе замкнутых траекторий. Тогда существует двулистное накрытие над дополнением к этим траекториям, такое, что поднятый на нем поток имеет ненулевой многозначный интеграл.

**Доказательство.** Без ограничения общности можно считать, что  $B$  порождается формами  $T$  и  $\Theta^2$ . В противном случае, мы имели бы многозначный интеграл на  $Q^3$ , так как наличие члена  $\text{const} \Theta^1 \otimes \Theta^1$  невозможно из-за того, что  $B$  в некоторой точке зануляется. Следовательно,

$$B = b_{00}T \otimes T + b_{01}T \otimes \Theta^2 + b_{10}\Theta^2 \otimes T + b_{11}\Theta^2 \otimes \Theta^2.$$

Это тензорное поле однозначно разбивается в сумму симметрического и кососимметрического, которые, со своей стороны, тоже являются тензорными инвариантами. Следовательно, мы без ограничения общности можем считать, что  $B$ —симметрическое тензорное поле. "Поднимая первый индекс с помощью симплектической структуры", по  $B$  построим оператор  $\tilde{B}$ , который снова будет тензорным инвариантом. Имеем

$$\tilde{B} = -b_{00}D_2 \otimes T - b_{01}D_2 \otimes \Theta^2 + b_{10}D_0 \otimes T + b_{11}D_0 \otimes \Theta^2.$$

Рассмотрим матрицу этого оператора в репере  $(D_0, D_2, D_1)$ :

$$[\tilde{B}] = \begin{bmatrix} b_{10} & b_{11} & 0 \\ -b_{00} & -b_{01} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как в процессе эволюции оператор  $\tilde{B}$  испытывает изоспектральную деформацию, то его собственные значения сохраняются. Следовательно, число  $b_{00}b_{11} - b_{10}b_{01}$  является интегралом. Если этот интеграл нетривиален, то теорема доказана. Допустим, он равняется константе. Тогда, очевидно,  $b_{00}b_{11} - b_{10}b_{01} = 0$  тождественно. Рассмотрим ограничение  $\tilde{B}$  на подпространство  $\text{Ker} \Theta^1$ . Обозначим его матрицу снова через  $[\tilde{B}]$ ,

$$[\tilde{B}] = \begin{bmatrix} b_{10} & b_{11} \\ -b_{00} & -b_{01} \end{bmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что  $[\tilde{B}]^2 = -\det[\tilde{B}]I$ , где  $I$  — единичная матрица. Но, так как  $\det[\tilde{B}] = 0$ , то оператор  $\tilde{B}$  нильпотентен. Рассмотрим одномерное инвариантное относительно геодезического потока

подпространство  $Im\tilde{B} = Ker\tilde{B}$ . Дополнение к окружностям, на которых  $\tilde{B}$  обращается в ноль, обозначим через  $Q_0^3$ . На нем  $Ker\tilde{B}$  задает одномерное подрасслоение касательного расслоения  $TQ_0^3$ . Рассмотрим пространство единичных векторов расслоения  $Ker\tilde{B}$  и обозначим его через  $\tilde{Q}_0^3$ . Конечно,  $\tilde{Q}_0^3$  двулистно накрывает  $Q_0^3$  (для удобства мы не предполагаем, что накрытие связно). Обозначим естественную проекцию этого накрытия через  $\pi : \tilde{Q}_0^3 \rightarrow Q_0^3$ . Теперь поднимем все эти объекты на  $\tilde{Q}_0^3$ . Для удобства, полученные новые геометрические объекты будем обозначать теми же буквами. Тогда расслоение  $Ker\tilde{B}$  ориентируемо. Выберем на нем ориентацию и рассмотрим векторное поле единичной длины, которое задает эту ориентацию. Обозначим его через  $Z$ . В качестве метрики на  $Q^3$  берем ту метрику, в которой репер  $(D_0, D_1, D_2)$ -ортонормированный. Обозначим ее через  $g_1$ .

Рассмотрим теперь оператор  $Z \otimes i_Z \omega_g$ . Так как он, очевидно, нильпотентен и имеет такое же ядро, как и  $\tilde{B}$ , то эти операторы пропорциональны на  $\tilde{Q}_0^3$  т.е. существует нигде не зануляющаяся гладкая функция  $\psi$ , такая что  $\tilde{B} = \psi Z \otimes i_Z \omega_g$ . Теперь докажем, что векторное поле  $X \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|\psi|} Z$  является полем симметрии поднятого на  $\tilde{Q}_0^3$  геодезического потока.

Действительно, пусть  $\{g^t(x)\}$  – геодезический поток на  $\tilde{Q}_0^3$ . Тогда в силу инвариантности  $\tilde{B}$  и  $\omega_g$  имеем,

$$\begin{aligned}\tilde{B}(x)(.) &= [d_x g^t]^{-1} B(g^t(x))(d_x g^t(.)) \\ &= \epsilon [d_x g^t]^{-1}(X) \otimes \omega_g(g^t(x))(X, d_x g^t(.)) \\ &= \epsilon [d_x g^t]^{-1}(X) \otimes \omega_g(x)([d_x g^t]^{-1}(X), .),\end{aligned}$$

где  $\epsilon$  обозначает знак функции  $g$ . С другой стороны, очевидно  $\tilde{B}(x) = \epsilon X(x) \otimes \omega_g(x)(X(x), .)$ . Следовательно,  $[d_x g^t]^{-1}(X(g^t(x))) = \pm X(x)$ . В силу непрерывности получаем, что  $X$  – поле симметрии.

Теперь докажем, что на  $\tilde{Q}_0^3$  имеется многозначный интеграл.

Пусть  $X = xD_2 + yD_0$ , где  $x$  и  $y$  гладкие функции на  $\tilde{Q}_0^3$ . С другой стороны, нетрудно заметить, что определенная ранее гладкая функция  $\psi$  на  $\tilde{Q}_0^3$ , на самом деле является гладкой функцией на  $Q_0^3$ . Это следует из того, что уравнение  $\tilde{B} = \psi Z \otimes i_Z \omega_g$  инвариантно при замене  $Z \mapsto -Z$ . Из этого уравнения также видно, что функцию  $\psi$  можно доопределить до непрерывной на всем  $Q^3$ , полагая  $\psi = 0$  там, где  $\tilde{B} = 0$ . Следовательно,  $\psi$  – ограниченная функция на  $Q^3$ , а, следовательно, и на  $\tilde{Q}_0^3$ . Таким

образом, получаем, что  $|X|_1 = |\sqrt{|\psi|}Z|_1 = |\psi| < M_0$ . В частности,  $|x| < M_0$  и  $|y| < M_0$  на  $\tilde{Q}_0^3$ . Как и ранее, рассмотрим форму  $\alpha_X \stackrel{\text{def}}{=} i_X \omega_g = -xT + y\Theta^2$ . Тогда  $d\alpha_X = [y_0 + x_2]T \wedge \Theta^2$ . Следовательно,  $d[\Theta^1 \wedge \alpha_X] = [y_0 + x_2]T \wedge \Theta^1 \wedge \Theta^2$ . Допустим, что интеграл  $I \stackrel{\text{def}}{=} y_0 + x_2$  тривиален, т.е.  $I = c = \text{const}$ . Имеем равенство

$$(1) \quad d[xT \wedge \Theta^1 + y\Theta^1 \wedge \Theta^2] = cT \wedge \Theta^1 \wedge \Theta^2.$$

Ориентацию на  $\tilde{Q}_0^3$  зададим формой  $\sigma_g \stackrel{\text{def}}{=} T \wedge \Theta^1 \wedge \Theta^2$ . Обозначим теперь те траектории, на которых  $\tilde{B} = 0$  через  $\{S_i^1\}_{i=1}^N$ . Рассмотрим их трубчатые окрестности в  $Q^3$ .

**Лемма 7 .** В окрестности любой траектории  $S_i^1$  существует последовательность трубчатых окрестностей (полноториев)  $\{T_i(n)\}_{n=1}^\infty$ , которые удовлетворяют условиям:

- 1)  $T_i(n) \supseteq T_i(n+1)$ ,
- 2)  $\text{Vol}(T_i(n)) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow 0)$ ,
- 3)  $\text{Vol}(\partial T_i(n)) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow 0)$ ,

Здесь в качестве объема берем римановый объем, индуцированный метрикой  $g_1$ .

Доказательство не составляет труда.

Рассмотрим последовательность многообразий  $Q^3(n) \stackrel{\text{def}}{=} Q^3 \setminus \sqcup_i T_i(n)$  и их двулистные накрытия  $\tilde{Q}^3(n) \stackrel{\text{def}}{=} \pi^* Q^3(n) \supseteq \tilde{Q}_0^3$ . Проинтегрируем теперь равенство (1) по  $\tilde{Q}^3(n)$ . Получаем,

$$c\text{Vol}\tilde{Q}^3(n) = \sum_{i=1}^n \int_{\widetilde{\partial T_i(n)}} [xT \wedge \Theta^2 + y\Theta^1 \wedge \Theta^2],$$

где  $\widetilde{\partial T_i(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \pi^*(\partial T_i(n))$  ориентированные "внешней" нормалью. Следовательно,

$$(2) \quad c2\text{Vol}Q^3 = 2c \sum_{i=1}^N \text{Vol}T_i(n) + \sum_{i=1}^N \int_{\widetilde{\partial T_i(n)}} [xT \wedge \Theta^2 + y\Theta^1 \wedge \Theta^2].$$

Оценим вторую компоненту суммы в правой части этого равенства,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^N \int_{\partial T_i(n)} [xT \wedge \Theta^2 + y\Theta^1 \wedge \Theta^2] \right| \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^N \left\{ \int_{\partial T_i(n)} |x| |T \wedge \Theta^2| + \int_{\partial T_i(n)} |y| |\Theta^1 \wedge \Theta^2| \right\} \leq \\ & \leq M_0 \sum_{i=1}^N \left\{ \int_{\partial T_i(n)} |T \wedge \Theta^2| + \int_{\partial T_i(n)} |\Theta^1 \wedge \Theta^2| \right\} = \\ & = 2M_0 \sum_{i=1}^N \left\{ \int_{\partial T_i(n)} |T \wedge \Theta^2| + \int_{\partial T_i(n)} |\Theta^1 \wedge \Theta^2| \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим проективизацию касательного расслоения  $P \stackrel{\text{def}}{=} P(\mathcal{T}Q^3) \cong Q^3 \times RP^2$ . Это, конечно, компактное многообразие. Тогда любая из форм  $|T \wedge \Theta^2|$  и  $|\Theta^1 \wedge \Theta^2|$  задает гладкую функцию на  $P$  формулой,

$$\{l\text{-прямая в } \mathcal{T}_x Q^3\} \mapsto |T \wedge \Theta^2(\xi, \eta)|,$$

где  $\xi, \eta \in \mathcal{T}_x Q^3$  ортонормированные в плоскости  $L$  ортогональной к  $l$ . Рассмотрим константу,

$$M_1 \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\max_P |T \wedge \Theta^2|, \max_P |\Theta^1 \wedge \Theta^2|\}.$$

Тогда, очевидно, имеем оценки

$$\int_{\partial T_i(n)} |T \wedge \Theta^2| \leq M_1 \text{Vol}(\partial T_i(n))$$

и

$$\int_{\partial T_i(n)} |\Theta^1 \wedge \Theta^2| \leq M_1 \text{Vol}(\partial T_i(n)).$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{i=1}^N \int_{\partial T_i(n)} [xT \wedge \Theta^2 + y\Theta^1 \wedge \Theta^2] \right| \leq 4M_0 M_1 \sum_{i=1}^N \text{Vol}(\partial T_i(n)).$$

Теперь, устремляя  $n \rightarrow \infty$  в равенстве (2) получаем, что  $c = 0$ . Следовательно,  $\alpha_X$ -многозначный интеграл на  $\tilde{Q}_0^3$ . Тем самым, теорема доказана.

## 4.5 Тензорные инварианты типа $(m, n)$

Допустим, что геодезический поток на ориентируемой двумерной поверхности допускает тензорный инвариант  $B$  типа  $(m, n)$  на изоэнергетической поверхности  $Q^3$ . Допустим кроме этого, что в некоторой точке

поле  $B$  обращается в ноль. Докажем, что в этом случае геодезический поток допускает в некотором естественном смысле "двузначное" нетривиальное поле симметрий. Точный смысл этого понятия будет точно сформулирован в дальнейшем.

Мы без ограничения общности можем считать, что тензорное поле  $B$  порождается полями  $D_0, D_2, T$  и  $\Theta^2$  (т.е.  $B$  является конечной суммой мономов, которые являются тензорными произведениями таких полей). В противном случае, свертывая  $D_1$  с  $\Theta^1$  мы получим тензорный инвариант, который в некоторой точке равен нулю и который порождается требуемыми полями. С другой стороны, пользуясь формой  $\omega_g = T \wedge \Theta^2$  мы можем без ограничения общности считать, что  $B$  является полилинейной формой. Рассмотрим теперь инвариантное относительно геодезического потока тензорное поле  $P \stackrel{\text{def}}{=} D_0 \wedge D_2$ . Если допустим, что тензор  $B$  несимметричен, то свертывая его с  $P$  по соответствующим аргументам получим тензорный инвариант на два порядка ниже, который в некоторой точке на  $Q^3$  равен нулю. Допуская, что он тоже несимметричен и применяя эту процедуру еще несколько раз, мы в конечном итоге получим тензорный инвариант, который является симметрическим тензором. Далее мы будем считать, что  $B$  является симметрическим тензорным инвариантом типа  $(0, d)$ , т.е.

$$B = b_{i_1 \dots i_d} T^{i_1} \otimes \dots \otimes T^{i_d} \quad (i_k = 0, 1),$$

где  $T^0 \stackrel{\text{def}}{=} T$  и  $T^1 \stackrel{\text{def}}{=} \Theta^2$ , а  $(b_{i_1 \dots i_d})$  – гладкие функции на  $Q^3$  и  $b_{i_1 \dots i_d} = b_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(d)}}$  ( $\sigma$  пробегает группу перестановок  $S_d$ ).

Рассмотрим отображение  $\mathcal{B} : Q^3 \rightarrow R^{d+1}$ , которое зададим формулой

$$\mathcal{B}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (b_{i_1 \dots i_d}(x)).$$

Пусть  $x_0 \in Q^3$ , рассмотрим геодезическую траекторию  $\phi^t x_0$  и некоторую точку  $y_0$  лежащую на ней, т.е.  $y_0 = \phi^{t_0} x_0$ .

Рассмотрим отображение "тривиализации"

$$\tau : \mathcal{T}Q^3 \rightarrow R^3,$$

которое зададим формулой

$$\xi_{x_0} \mapsto (T(\xi_{x_0}), \Theta^2(\xi_{x_0}), \Theta^1(\xi_{x_0})).$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_{x_0}Q^3 & \xrightarrow{d_{x_0}\phi^{t_0}} & \mathcal{T}_{y_0}Q^3 \\ \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\ R^3 & \xrightarrow{[d_{x_0}\phi^{t_0}]} & R^3 \end{array}$$

Тогда матрица  $[d_{x_0}\phi^{t_0}]$  имеет вид

$$[d_{x_0}\phi^{t_0}] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где  $a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1 = 1$  (т.к.  $\{\phi^t x\}_t$  сохраняет форму  $\omega_g \stackrel{\text{def}}{=} T \wedge \Theta^2$ ). Следовательно, формы  $\mathcal{B}(x_0)$  и  $\mathcal{B}(y_0)$  связаны между собой соотношением

$$\mathcal{B}(y_0) = \rho(A)(\mathcal{B}(x_0)),$$

где  $A \stackrel{\text{def}}{=} (a_j^i) \in SL_2(R)$ , а  $\rho$  есть линейное представление

$$\rho : SL_2(R) \rightarrow GL(R^{d+1}), R^{d+1} \cong S^d(R^{2^*}), R^{2^*} \stackrel{\text{def}}{=} \langle dx^1, dx^2 \rangle_R,$$

которое задается формулой

$$[\rho(A)(B)]_{j_1 \dots j_d} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{a}_{j_1}^{i_1} \dots \tilde{a}_{j_d}^{i_d} b_{i_1 \dots i_d}, (\tilde{a}_j^i) \stackrel{\text{def}}{=} A^{-1}.$$

Следовательно, кривая

$$t \mapsto \mathcal{B}(\phi^t(x_0)) \in R^{d+1}$$

лежит на одной орбите действия  $\rho$ .

Допустим теперь, что  $I_\alpha$  – некоторый инвариант действия  $\rho$  (т.е.  $I_\alpha$  – гладкая функция от координат  $(b_{i_1 \dots i_d})$ , которая постоянна на орбитах действия  $\rho$ ). Тогда, очевидно, сквозное отображение  $\mathcal{I}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} I_\alpha \circ \mathcal{B}$

$$\begin{array}{ccc} R^{d+1} & & \\ \uparrow \mathcal{B} & \searrow I_\alpha & \\ Q^3 & \xrightarrow{\mathcal{I}_\alpha} & R^1 \end{array}$$

будет интегралом геодезического потока. Предположим, что инвариант  $I_\alpha$  является однородным многочленом от координат  $(b_{i_1 \dots i_d})$ . Тогда, если интеграл  $\mathcal{I}_\alpha = \text{const}$ , то  $\mathcal{I}_\alpha \equiv 0$  (т.к. в некоторой точке  $z_0 \in Q^3$  по условию, то имеем  $B(z_0) = 0$ ). Следовательно, без ограничения общности можно считать, что  $\mathcal{I}_\alpha \equiv 0$  на  $Q^3$ , когда  $I_\alpha$  пробегает множеством всех однородных инвариантов положительной степени. В противном случае мы нашли бы нетривиальный интеграл.

Приведем здесь необходимые нам факты из классической теории инвариантов (см. [27, §5]).

- Все однородные инварианты положительной степени действия  $\rho$  получаются как конечная сумма всевозможных полных сверток тензоров вида

$$B \otimes \cdots \otimes B \otimes \tilde{\omega} \otimes \cdots \otimes \tilde{\omega},$$

где  $B \in S^d(R^{2^*})$  и  $\tilde{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_1 \wedge \partial_2$ . Здесь через  $(\partial_1, \partial_2)$  обозначен репер, двойственный к кореперу  $(dx^1, dx^2)$ .

- "Нуль-формой" или "нильпотентным элементом" называется форма  $B \in S^d(R^{2^*})$ , на которой все однородные инварианты положительной степени действия  $\rho$  обращаются в нуль. На самом деле, вместо действия  $\rho$  на пространстве симметрических тензоров типа  $(0, d)$  удобно рассмотреть аналогичное действие  $\rho'$  на пространстве однородных многочленов степени  $d$  от двух переменных. Обозначим это линейное пространство через  $P^d[x^1, x^2]$ . Оно иногда называется пространством бинарных форм степени  $d$ . Определение нильпотентного элемента на него переносится автоматически. Существует естественный изоморфизм векторных пространств  $\Phi : S^d(R^{2^*}) \rightarrow P^d[x^1, x^2]$ , который задается формулой

$$B \stackrel{\text{def}}{=} b_{i_1 \dots i_d} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_d} \xrightarrow{\Phi} b_{i_1 \dots i_d} x^{i_1} \dots x^{i_d}.$$

Тогда действие  $SL_2(R)$  на  $P^d[x^1, x^2]$  задается формулой

$$[\rho'(A)](P) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi \circ \rho(A) \circ \Phi^{-1}(P).$$

Имеет место критерий Д. Гильберта

**Теорема 17 (Д. Гильберт)** . Бинарная форма  $P \in P^d[x^1, x^2]$  является нильпотентным элементом тогда и только тогда, когда она имеет линейный множитель кратности не меньше чем  $\left[\frac{d}{2}\right] + 1$ . Другими словами, существует матрица  $A \in SL_2(R)$ , такая, что  $[\rho'(A)](P) = (x^1)^m G(x^1, x^2)$ , где  $m \geq \left[\frac{d}{2}\right] + 1$  и  $G$  многочлен степени  $d - m$  не делящийся на  $x^1$ . Число  $m$  называется "максимальной степенью вырождения" формы  $B$ .

Кроме этого, нам будет нужна следующая лемма, которая является простым следствием из критерия Д. Гильберта.

**Лемма 8** . Пусть форма  $B \in S^d(R^{2^*})$  является нильпотентным элементом действия  $\rho$ . Рассмотрим последовательность полилинейных форм

$$\begin{aligned} P_0 &\stackrel{\text{def}}{=} B \otimes B, \\ P_k &\stackrel{\text{def}}{=} C(\tilde{\omega} \otimes P_{k-1}) \quad (k = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

где  $C$  обозначает свертку  $\tilde{\omega}$  по первому и последнему аргументу формы  $P_{k-1}$ . Очевидно, существует целое число  $l$ , такое, что  $P_l \neq 0$  и  $P_{l+1} = 0$ . Тогда существует форма  $f$  такая, что

$$(1) \quad P_l = f^{\otimes 2p}, p \geq 1.$$

**Замечание 16** . Из уравнения (1) видно, что если  $B \neq 0$ , то  $f$  определена однозначно с точностью до знака.

**Доказательство.** Согласно критерию Гильберта, существует коренер  $(u, v)$  в котором форма  $B$  имеет вид

$$B = \sum_{i=m}^d c_i S(u^{\otimes i} \otimes v^{\otimes (d-i)}),$$

где  $S$  обозначает симметризацию тензора,  $c_i$  — некоторые константы ( $c_m = 1$ ) и  $m \geq \left[\frac{d}{2}\right] + 1$ .

Тогда нетрудно заметить, что

$$P_{2(d-m)} = -[\tilde{\omega}(u, v)]^{2(d-m)} \binom{2(d-m)}{d-m} u^{\otimes 2(2m-d)} \neq 0$$

Очевидно, что  $P_{2(d-m)+1} = 0$ . Следовательно, полагая  $l \stackrel{\text{def}}{=} 2(d-m)$ ,  $p \stackrel{\text{def}}{=} 2m-d \geq 1$  и  $f \stackrel{\text{def}}{=} \text{const}$  и доказываем лемму.

Пусть теперь  $B$  – симметрический тензорный инвариант типа  $(0, d)$ . Как было замечено ранее, без ограничения общности можно считать, что все интегралы  $\mathcal{I}_\alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=} I_\alpha \circ B(x)$ , когда  $I_\alpha$  пробегает множество всех однородных инвариантов положительной степени, тождественно равны нулю. Следовательно, формы  $B(x)$  во всех точках  $x \in Q^3$ , являются нуль-формами. Обозначим через  $m$  максимальную степень вырождения форм  $B(x)$ , когда  $x$  пробегает все  $Q^3$ . Рассмотрим теперь тензорный инвариант  $P_{2(d-m)}(x)$ . Согласно доказанной лемме это симметрическое тензорное поле типа  $(0, 2(2m-d))$ , такое, что

$$(2) \quad P_{2(d-m)}(x) = f(x)^{\otimes 2(2m-d)},$$

где  $f(x)$  "натянуто" на  $T_x$  и  $\Theta_x^2$  (мы пока никакой гладкости сечения  $f(x)$  по  $x$  не предполагаем).

Обозначим через  $N$  множество точек из  $Q^3$ , в которых  $P_{2(d-m)} = 0$ . Очевидно, что  $N \neq \emptyset$ . Так же как и в доказательстве Теоремы 16, доказывается, что

- a) Если  $x_0 \in Q^3 \setminus N$ , то существует окрестность  $U(x_0)$  точки  $x_0$  и гладкая 1-форма  $f$  на ней, для которой выполнено равенство (2). Очевидно, 1-форма  $(-f)$  тоже удовлетворяет (2).
- б) Множество решений  $f$  уравнения (2) инвариантно относительно геодезического потока.
- в) Пусть  $g_1$  – определенная в §4.4 риманова метрика на  $Q^3$ . Распространим ее на тензорные поля. Тогда из равенства (2) получаем, что

$$|f|_1 = \left( |P_{2(d-m)}|_1 \right)^{\frac{1}{2(2m-d)}},$$

и, следовательно, норма  $f$  является гладкой функцией на  $Q^3$ .

Пункты б) и в) очевидные, а для доказательства а) надо лишь заметить то, что  $\text{Im}\{C(P \otimes P_{2(d-m)})\}$  является гладкое линейное подрасслоение над  $Q^3 \setminus N$ , где  $P \stackrel{\text{def}}{=} D_0 \wedge D_2$ , а  $C$  обозначает очевидную свертку  $P$  с первым аргументом формы  $P_{2(d-m)}$ . Далее, можно действовать так, как и в доказательстве Теоремы 16. Теперь дадим следующее

**Определение 31.** Пусть  $\mathcal{F}$  подпространство  $T^*Q^3$ , а  $\pi : \mathcal{F} \rightarrow Q^3$  – естественная проекция. Обозначим через  $N_{\mathcal{F}}$  множество тех точек  $x \in Q^3$ , для которых  $\pi^{-1}(x) = \{0\}$ . Предположим, что

- i) Ограничение отображения  $\pi$  на множество  $\pi^{-1}(Q^3 \setminus N_{\mathcal{F}})$  является  $k$ -листным гладким накрытием. Гладкость понимается в том смысле, что локально любой лист является гладким сечением в  $T^*Q^3$ .
- ii) Множество  $\mathcal{F}$  инвариантно относительно геодезического потока, т.е., если  $f \in \mathcal{F}$ , то  $\phi_t^* f \in \mathcal{F}$ .
- iii) Если  $g_1$  – произвольная гладкая метрика на  $Q^3$ , то функция

$$|\mathcal{F}(x)|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|f_x|_1 : f_x \in \pi^{-1}(x)\}$$

должна быть гладкой.

Если выполнено i)  $\div$  iii), то  $\mathcal{F}$  будем называть " $k$ -значным полем симметрий геодезического потока".

Тем самым доказана

**Теорема 18.** Пусть геодезический поток двумерной поверхности допускает на изоэнергетической поверхности  $Q^3$  тензорный инвариант типа  $(m, n)$ , которой в некоторой точке равен нулю. Тогда геодезический поток допускает нетривиальное двузначное поле симметрий.

**Следствие 8.** Если множество  $N$  "достаточно хорошее", например, такое как в условии Теоремы 16, и  $Q^3$ -компактная, то тогда геодезический поток интегрируем по Лиувиллю на универсальной накрывающей над  $Q^3 \setminus N$ .

Доказательство. Как и в доказательстве Теоремы 16 устанавливается, что на двулистной накрывающей над  $Q^3 \setminus N$  существует многозначный интеграл. Следствие доказано.

# Библиография

- [1] A.T.Fomenko, Topology of constant energy surface of integrable Hamiltonian systems and obstructions to integrability, Izv.Akad.Nauk SSSR Ser.Mat. 50(1986), 1276-1307; English transl. in Math. USSR Izv. 29(1987)
- [2] Фоменко А.Т., Цишанг Х. Критерий топологической эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы// Изв. АН СССР 1989, Сер. Матем. Том 54(1990),N3
- [3] А.В.Болсинов, С.В.Матвеев, А.Т.Фоменко Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы// УМН, 1990, т.45, вып.2, с.49
- [4] С.В.Матвеев,А.Т.Фоменко Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии // Издательство Московского Университета 1991
- [5] А.В.Болсинов,А.Т.Фоменко Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. I и II // Математический сборник, 1994, т.185, вып.4, с.27-80. // Математический сборник, 1994, т.185, вып.5, с.27-78
- [6] A.T.Fomenko Integrability and Nonintegrability in Geometry and Mechanics, Kluwer Acad. Publ. 1988
- [7] Osipov A. A. Fomenko Invariants for the Main Integrable cases of the Rigid Body Motion Equations// AMS, vol.6, 1991
- [8] Bolsinov A.V. Methods of Calculation of the Fomenko-Zieschang Invariants// AMS, vol.6, 1991

- [9] Топалов П. Включение бутылок Клейна в теорию топологической классификации гамильтоновых систем // УМН, т.49, вып.1, с.227 – 228, 1994
- [10] Топалов П. Гомологические свойства меток инварианта Фоменко-Цишанга // Труды МИ им. Стеклова 205 (1994), с.164 – 171
- [11] Топалов П. Вычисление тонкого инварианта Фоменко-Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела // Матем. сб., т.187, №3, с.143 – 160, 1996
- [12] Топалов П. Переменная действия и гамильтониан Пуанкаре в окрестности критической окружности // УМН, т.50, вып.1 (301), с.213 – 214, 1995
- [13] Топалов П. Тензорные инварианты натуральных механических систем на компактных поверхностях и соответствующие им интегралы // Матем. сб., в печати
- [14] Харламов М. П. Топологический анализ интегрируемых задач в динамике твердого тела // Изд. Ленинградского университета, Ленинград, 1988
- [15] Smale S., Topology and mechanics, Invent. Math. 10(1970), 305-331
- [16] С.Б.Каток Бифуркационные множества и интегральные многообразия задачи движения твердого тела // УМН 27(1972), №2, 126-132
- [17] Я.В.Татаринов Исследование фазовой топологии компактных конфигураций с симметриями // Вестник Моск. университета 1973, №5, 70-77
- [18] Я.В.Татаринов Портреты классических интегралов в задаче вращения твердого тела с фиксированной точкой // Вестник Моск. университета 1974, №6, 99-105
- [19] Н.С.Новиков И. Шмельцер Периодические решения уравнений Кирхгофа для свободного движения твердого тела в жидкости и расширенная теория ЛШМ // Функ. анализ и его приложений, 1981, т. 15, №3, 54-66

- [20] L.H.Eliasson, Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals. Elliptic case, Comment. Math. Helvetici 65(1990), p.4-35
- [21] В.В.Козлов Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике, УдГУ, Ижевск 1995
- [22] В.В.Козлов Две интегрируемые задачи классической динамики // Вестник Моск. университета 1981, N4, 80-84
- [23] Bolotin S.V., Kozlov V.V Symmetry fields of geodesic flows // Russian J. of Math. Phys., Vol.3, No.3, p.279 – 295
- [24] Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими, Мир, Москва 1981
- [25] В.И.Арнольд Математические методы классической механики, Наука, Москва 1974
- [26] В.И.Арнольд Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Наука, Москва 1978
- [27] Э.Б.Винберг, В.Л.Попов Итоги науки и техники т.55, Теория инвариантов §5, М.1989
- [28] Лагранж Ж. Аналитическая механика, т.1, 2, Гостехиздат, 1950
- [29] A.M.Liapounoff, Probleme general de la stabilite du mouvement, Annals of Mathematical Studies 17, Princeton University Press (1947)
- [30] G.D.Birkhoff, Dinamical systems, AMS Colloquium Publ. IX (1927)
- [31] Гробман Д.М. О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР, 1959, т.128, N5, 880-881
- [32] Гробман Д.М. Топологическая классификация окрестностей особой точки в  $n$ -мерном пространстве // Матем. сб., 56(98), N1(1962), 77-94
- [33] Hartman P. On the local linearization of diff. equations, Proc. of AMS, 14(1963), 568-573

- [34] A.A.Andronov et al., Qualitative theory of second-order dynamical systems, Wiley, NY, 1973
- [35] Майер А.Г. Грубое преобразование окружности в окружность // Ученые записки Горьковского университета, 1939, вып.12, 215-229
- [36] Плисс В.А. О грубоści дифференциальных уравнений, заданных на торе // Вестник ЛГУ, 1960, N13, вып.3
- [37] Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds, Topology, 1962, v.1, N2, p.101-120
- [38] Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds, Topology, 1963, v.2, N2, p.179-180
- [39] Peixoto M. On the classification of flows on 2-manifolds, Dynamical systems, Academic Press, NY, 1973, p.389-419
- [40] Ботт Р., Ту Л.В. Дифференциальные формы в алгебраической топологии, Наука, Москва 1989
- [41] Дольд А.Алгебраическая топология, Мир, Москва 1976

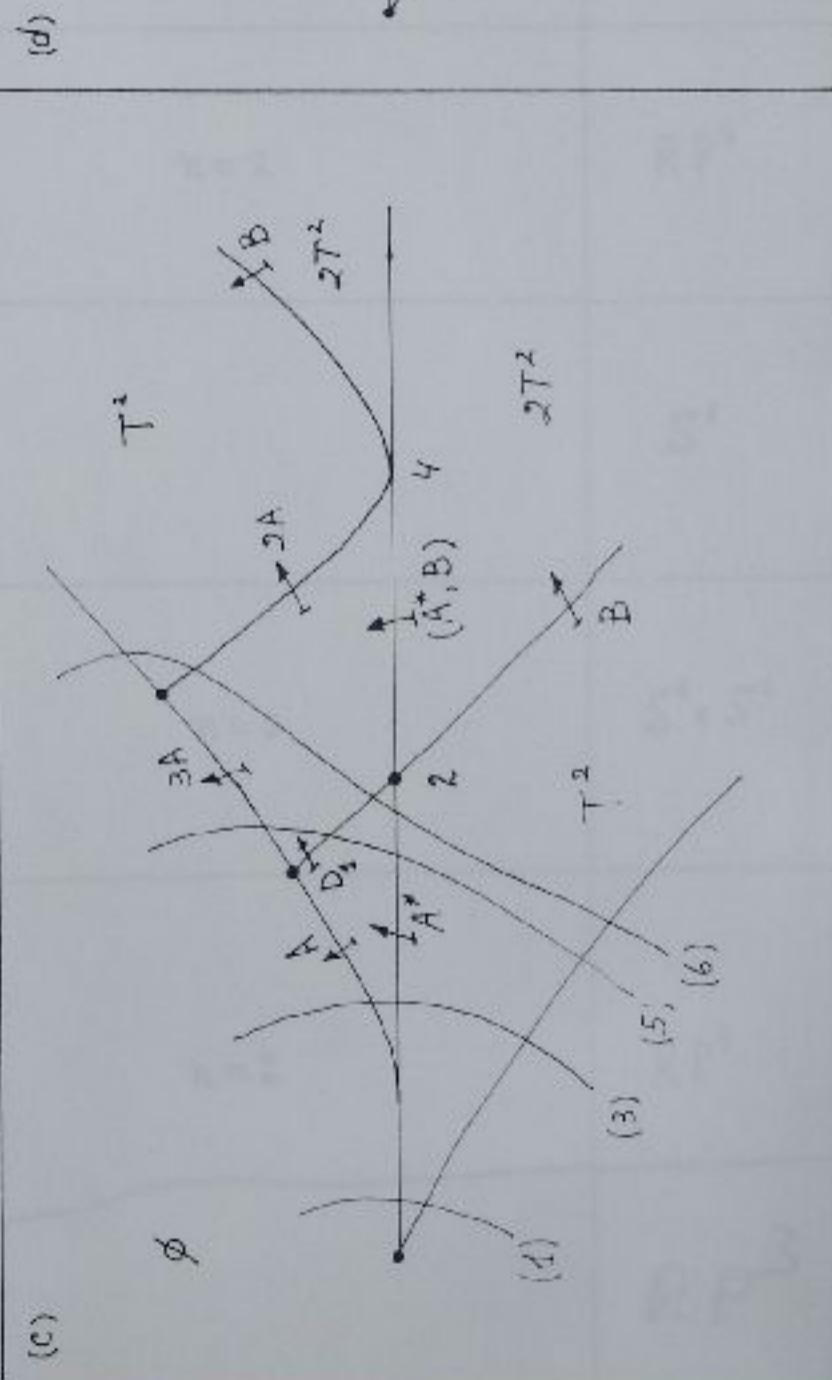
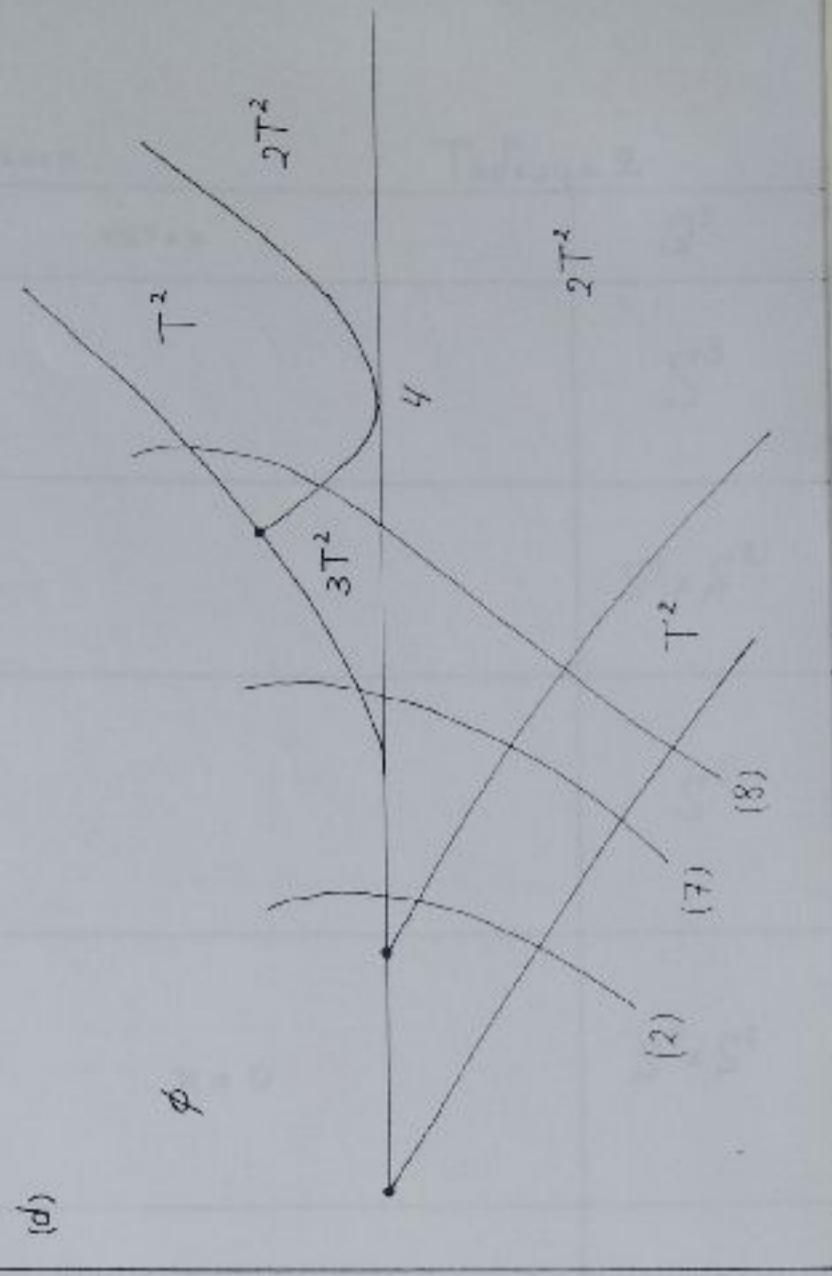
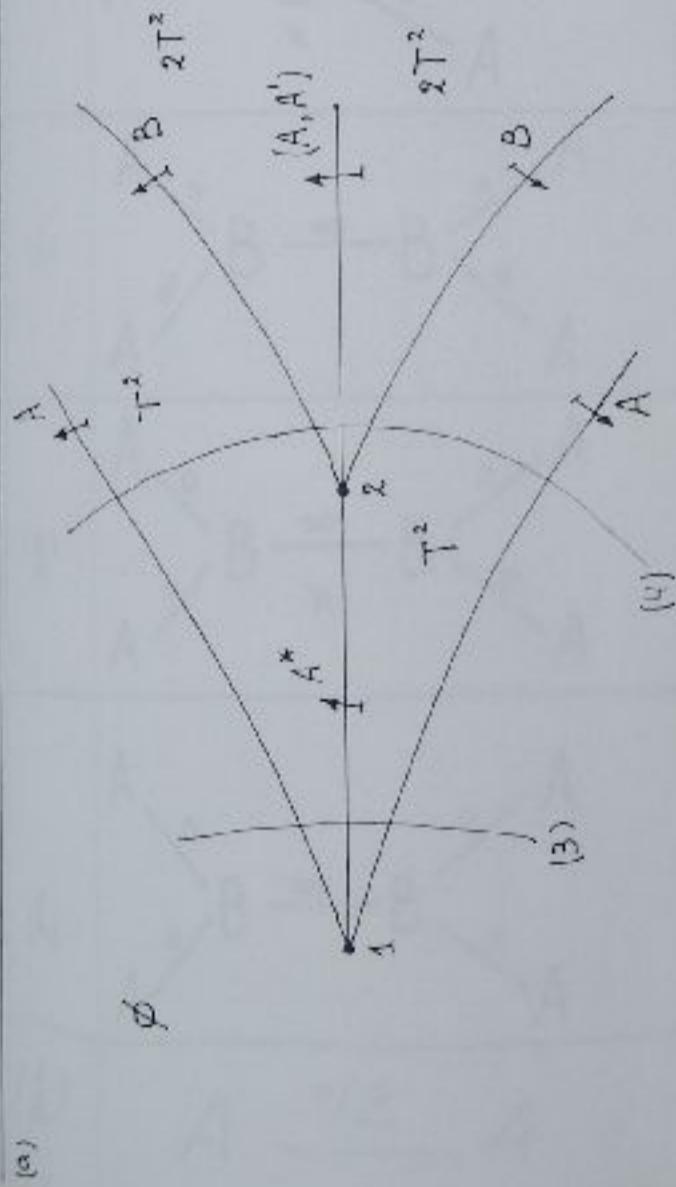
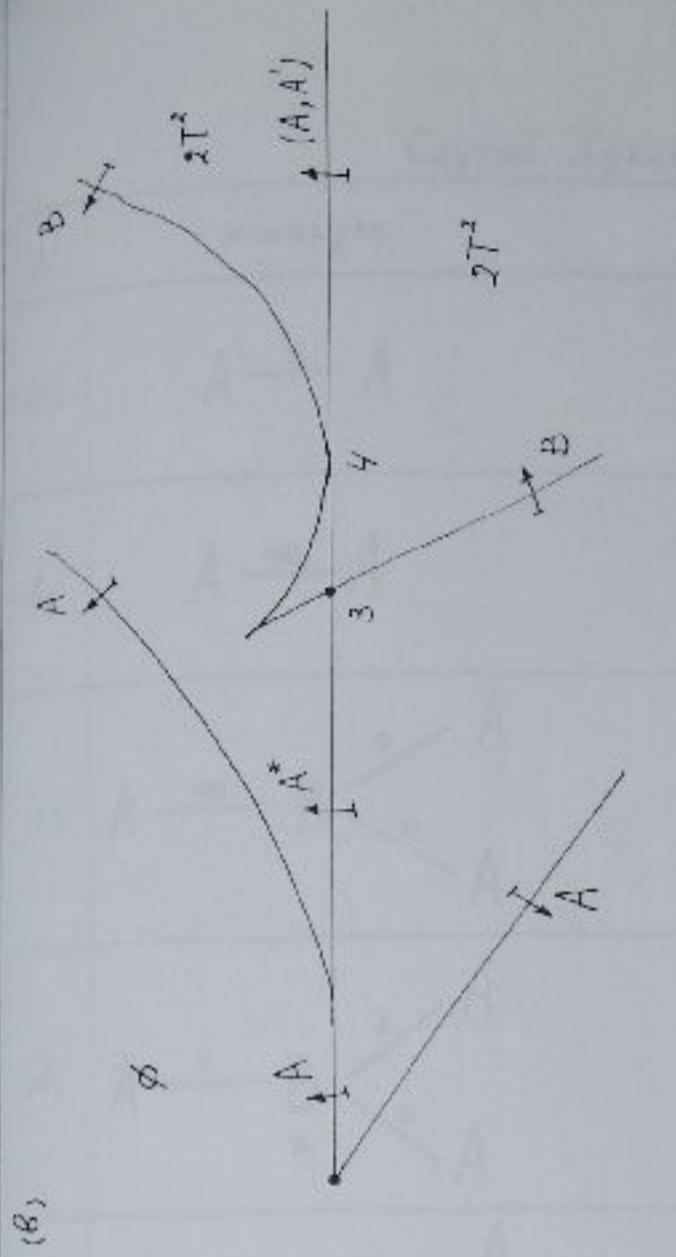
$N$	молекула	метки	$Q^3$
(1)	$A \xrightarrow{o} A$		$S^3$
(2)	$A \xrightarrow{o} B \xrightarrow{\infty} A$		$S^1 \times S^2$
(3)	$A \xrightarrow{o} \underset{n}{A^*} \xrightarrow{o} A$	$n=0$	$S^3$
(4)	$A \xrightarrow{\epsilon=1} \underset{n_1}{B} \xrightarrow{\epsilon=1} \underset{n_2}{B} \xrightarrow{\epsilon} A$	a) $\epsilon=1, n_1=-1, n_2=0$ d) $\epsilon=-1, n_1=0, n_2=1$	$RP^3$
(5)	$A \xrightarrow{o} \underset{n}{A^*} \xrightarrow{o} D_1 \xrightarrow{\infty} A$	$n=0$	$(S^1 \times S^2)$ # $(S^1 \times S^2)$
(6)	$A \xrightarrow{o} \underset{n}{A^*} \xrightarrow{o} D_1 \xrightarrow{o} A$	$n=0$	$S^3$
(7)	$A \xrightarrow{o} B \xrightarrow{\epsilon=1} \underset{n_1}{A^*} \xrightarrow{o} A$ $B \xrightarrow{o} \underset{n_3}{B} \xrightarrow{o} A$	a) $n_1=0, n_2=k, n_3=0$ d) $n_1=1, n_2=0, n_3=4$ b) $n_1=-1, n_2=-1, n_3=-4$	$S^1 \times S^2$
(8)	$A \xrightarrow{o} B \xrightarrow{\epsilon=1} \underset{n_1}{A^*} \xrightarrow{o} A$ $B \xrightarrow{o} \underset{n_3}{B} \xrightarrow{o} A$	a) $n_1=0, n_2=k, n_3=\pm 2$ d) $n_1=-1, n_2=-1, n_3=-2$ b) $n_1=1, n_2=0, n_3=2$ c) $n_1=1, n_2=0, n_3=6$ g) $n_1=-1, n_2=-1, n_3=-6$	$RP^3$

Случай Сретенского

$N$	молекула	нетки
(1)	$A \xrightarrow{o} A$	
(2)	$A \xrightarrow{o} B \xrightarrow{\delta} A$	
(3)	$A \xrightarrow{o} A^* \xrightarrow{n} A$	$n=0$
(4)	$A \xrightarrow{\epsilon=1/2} B \xrightarrow{\epsilon=1/2} A$	a) $\epsilon=1, n_1=-1,$ d) $\epsilon=-1, n_1=0, n_2=1$
(5)	$A \xrightarrow{o} A^* \xrightarrow{n} D_1 \xrightarrow{\delta} A$	$n=0$
(6)	$A \xrightarrow{o} A^* \xrightarrow{n} D_1 \xrightarrow{\delta} A$	$n=0$
(7)	$A \xrightarrow{o} B \xrightarrow{n_1} A^* \xrightarrow{n_2} A$ $B \xrightarrow{n_3} A$	a) $n_1=0, n_2=k$ d) $n_1=1, n_2=0$ b) $n_1=-1, n_2=-1$
(8)	$A \xrightarrow{o} B \xrightarrow{n_1} A^* \xrightarrow{n_2} A$	a) $n_1=0, n_2=k, n_3=0$ d) $n_1=-1, n_2=-1, n_3=0$ b) $n_1=1, n_2=0, n_3=0$

Логика  $\Rightarrow$

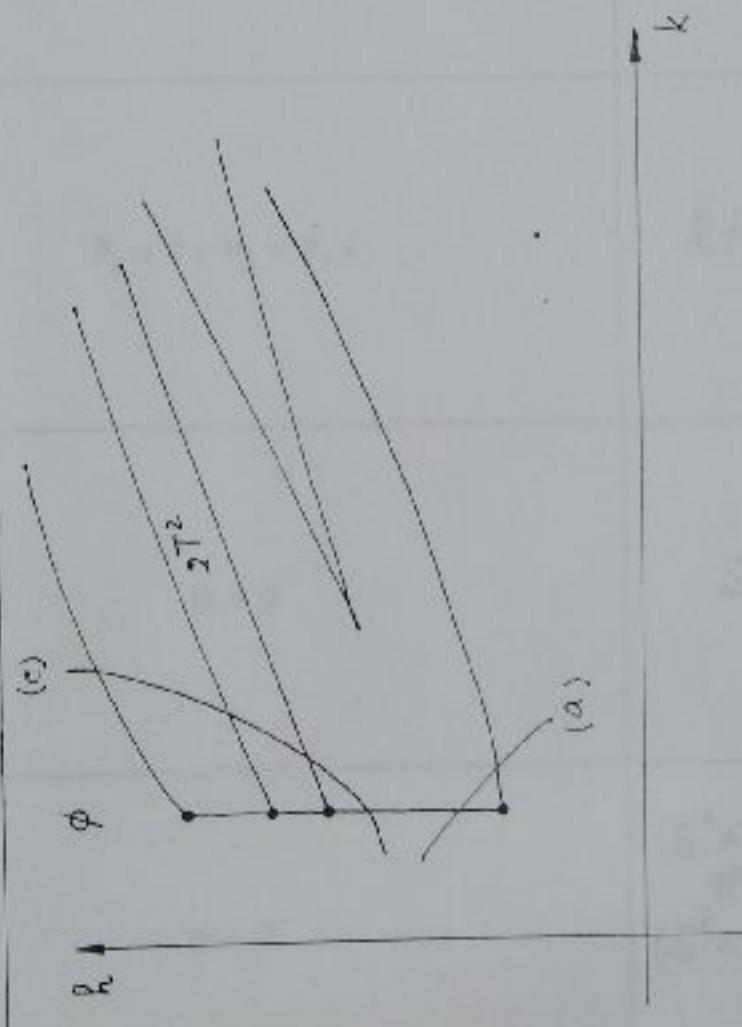
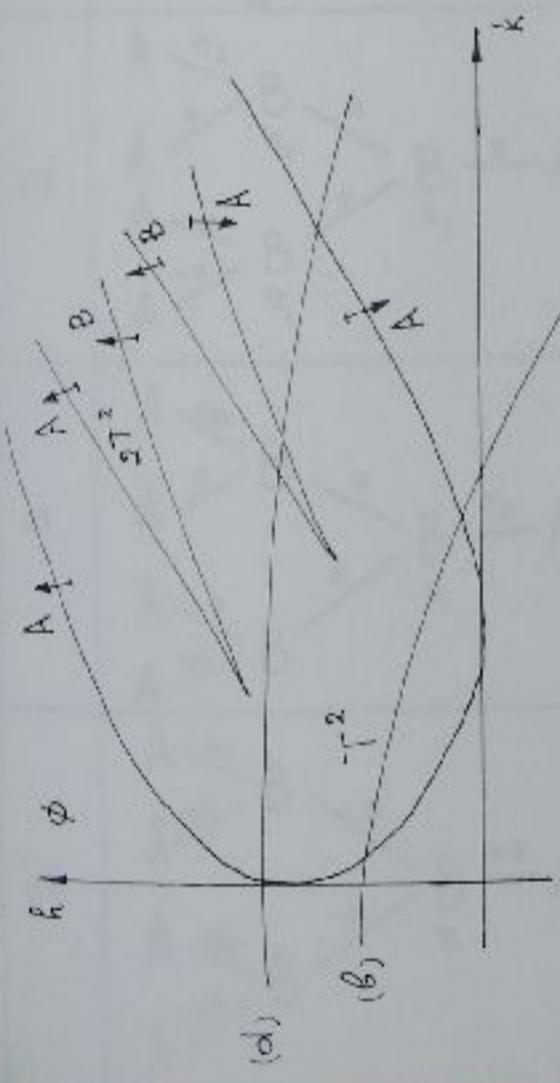
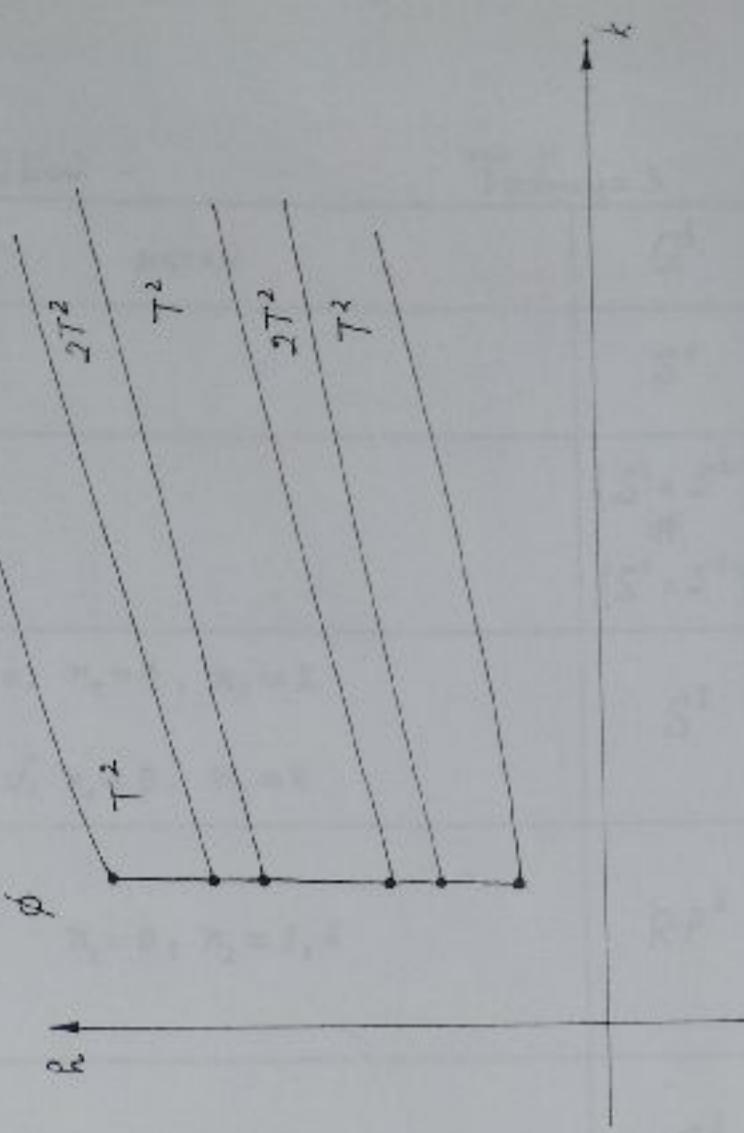
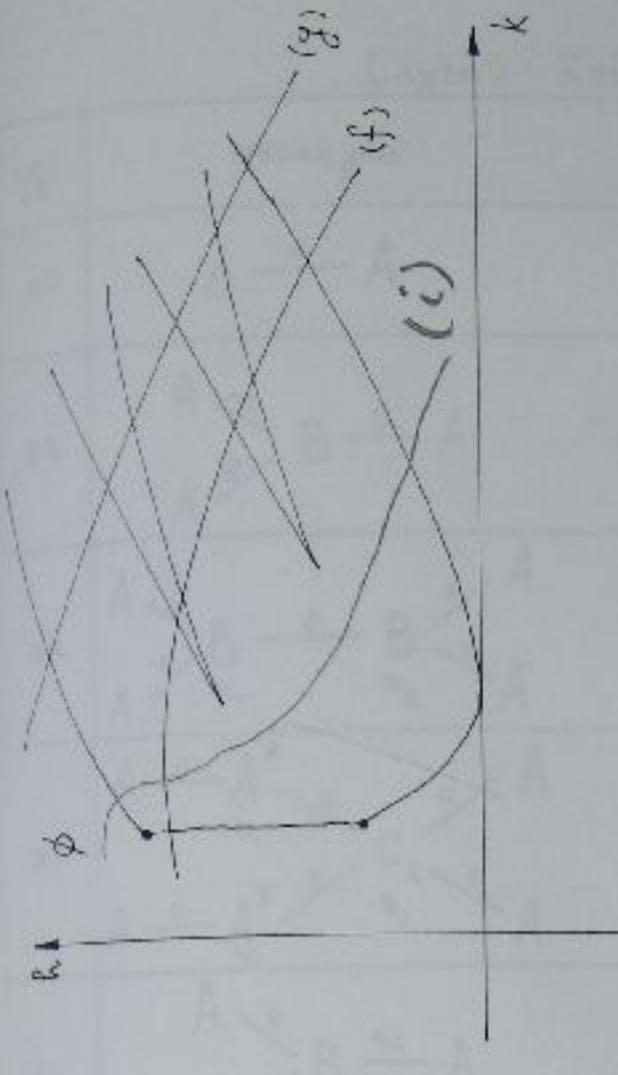
$E_{\text{kin}} = \pm$



## Слуга Жуковского

Tadinya 2

<i>N</i>	молекула	метки	<i>Q</i>
(a)	$A \xrightarrow{o} A$		$S^3$
(b)	$A \xrightarrow{\infty} A$		$S^1 \times S^2$
(c)	$A \xrightarrow{\infty} B \begin{cases} \xrightarrow{o} & A \\ \xrightarrow{o} & A \end{cases}$		$S^3$
(d)	$A \xrightarrow{o} B \begin{cases} \xrightarrow{o} & A \\ n & \xrightarrow{o} \\ \xrightarrow{o} & A \end{cases}$	$n=0$	$S^1 \times S^2$
(e)	$A \xrightarrow{o} B \begin{cases} \xrightarrow{o} & A \\ n & \xrightarrow{o} \\ \xrightarrow{o} & A \end{cases}$	$n=2$	$RP^3$
(f)	$A \xrightarrow{o} B \xrightarrow{\infty} B \begin{cases} \xrightarrow{o} & A \\ \delta & \xrightarrow{o} \\ \xrightarrow{o} & A \end{cases}$		$S^3$
(g)	$A \xrightarrow{o} B \xrightarrow{\infty} B \begin{cases} \xrightarrow{o} & A \\ n & \xrightarrow{o} \\ \xrightarrow{o} & A \end{cases}$	$n=0$	$S^1 \times S^2$
(h)	$A \xrightarrow{o} B \xrightarrow{\infty} B \begin{cases} \xrightarrow{o} & A \\ \delta & \xrightarrow{o} \\ \xrightarrow{o} & A \end{cases}$	$n=2$	$RP^3$
(i)	$A \xrightarrow{1/2} A$		$RP^3$



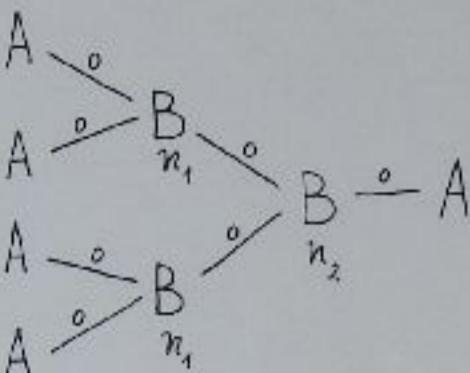
Слугаи Ковалевской

Tadruya 3

N	молекула	метки	Q <sup>3</sup>
a1	$A \xrightarrow{o} A$		$S^3$
e2	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{o} \\ \diagup \quad \diagdown \\ A \quad B \xrightarrow{o} A \end{array}$	$(S^1 \times S^2)$ # $(S^4 \times S^2)$	
a2	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{o} \\ \diagup \quad \diagdown \\ A \quad B \xrightarrow{o} B \xrightarrow{o} A \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ n_1 \quad n_1 \quad n_1 \quad n_1 \end{array}$	$n_1 = 1, n_2 = 2$ $n_1 = 0, n_2 = k$	$S^3$
a3	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{o} A^* \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ n_1 \quad C_2 \quad n_2 \quad n_1 \\ A \xrightarrow{o} A^* \xrightarrow{o} C_2 \xrightarrow{o} A \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ n_1 \quad n_2 \quad n_2 \quad n_1 \end{array}$	$n_1 = 0, n_2 = 2, 6$	$RP^3$
b2	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{o} \\ \diagup \quad \diagdown \\ A \quad B \xrightarrow{1/2} A \\ \diagup \quad \diagdown \\ n \end{array}$	$n = 0$	$S^3$
b5	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{o} A^* \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ n_1 \quad B \quad n_2 \quad A \\ A \xrightarrow{o} A^* \xrightarrow{o} B \xrightarrow{o} A \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ n_1 \quad n_1 \quad n_2 \quad n_1 \end{array}$	$n_1 = 0, n_2 = 2, 6$	$RP^3$
c4	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{1/2} \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ A \quad B \quad n_1 \quad B \xrightarrow{o} A \\ A \xrightarrow{o} B \xrightarrow{o} B \xrightarrow{o} A \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ A \quad B \quad n_1 \quad n_2 \end{array}$	$n_1 = 0, n_2 = 2, 6$	$RP^3$
c3	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{o} \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ A \quad B \quad n \quad B \xrightarrow{1/2} A \\ A \xrightarrow{o} B \xrightarrow{o} B \xrightarrow{o} A \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ A \quad B \quad n \quad n \end{array}$	$n = 0$	$S^3$
d3	$\begin{array}{c} A \xrightarrow{o} \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ A \quad B \quad n \quad B \xrightarrow{1/2} A \\ A \xrightarrow{o} B \xrightarrow{o} B \xrightarrow{o} A \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ A \quad B \quad n \quad n \end{array}$	$n = 0$	$(S^4 \times S^2)$ # $(S^4 \times S^2)$

Служай Ковалевской

Таблица 3

$N$	Молекула	Метки	$\Omega^3$
d4		a) $n_1 = 1, n_2 = 2$ d) $n_1 = 0, n_2 = 2, 6$	$S^4 \times S^2$