МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.984.68, 515.168.5

Толченников Антон Александрович

Спектральные свойства оператора Лапласа на декорированных графах и на поверхностях с дельта-потенциалами

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук, профессор
А.И. Шафаревич

Москва — 2009

Оглавление

Введение

Использование потенциалов нулевого радиуса в квантовой механике имеет более чем 70-летнюю историю. Изучая движение нерелятивистского электрона в жесткой кристаллической решетке, Р. де Л. Крониг и В.Г. Пенни в 1931 году [1] одними из первых стали использовать точечные потенциалы. В 1961 году Ф.А. Березин и Л.Д. Фаддеев [2], используя теорию самосопряженных расширений, дали строгое математическое обоснование этого метода и предложили использовать резольвентную формулу М.Г. Крейна для получения резольвент возмущений. Дальнейшее исследование подобных моделей атомной физики проводилось в работах Ю.Н. Демкова и В.Н. Островского [17], П.Б. Курасова и Б.С. Павлова [18], [19], [20].

Та же техника расширений операторов используется в еще одном вопросе, касающемся операторов Лапласа-Бельтрами на декорированных графах, т.е. топологических пространствах, полученных отождествлением концов ребер графа с точками на замкнутых ориентируемых римановых многообразиях размерности 1, 2 или 3. Актуальность этой темы заключается в том, что подобными операторами возможно моделировать гамильтониан заряженной частицы в массиве фуллеренов. Подобные объекты впервые появились в работе Б.С. Павлова [20], где изучалось движение электронов в однородных кристаллах из точечных атомов.

Среди работ на эту тему можно отметить диссертацию И.С. Лобанова [4], в которой изучались спектральные свойства операторов Шредингера на периодических декорированных графах, работу Й. Брюнинга и В. Гейлера [7], в которой изучались свойства операторов на замкнутых многообразиях с прикрепленными полупрямыми, а также работы [5], [6].

Очевидно, что размерность ядра оператора Лапласа на замкнутом римановом многообразии равна числу компонент связности этого многообразия. Цель главы 3 диссертации - дать описание ядра оператора Лапласа-Бельтрами на декорированном графе. Ограничение на размерность многообразий (не больше чем 3), при помощи которых происходит декорация, связано с тем, что применяемая техника использует краевые условия в точках склейки; тем самым, область определения оператора Лапласа $D(\Delta) = H^2(M)$ (второе пространство Соболева) должна вкладываться в $C(M)$. При работе с операторами на таких пространствах применяются методы теории самосопряженных расширений (см. [4],[7]). Именно, L^2 пространство на декорированном графе - это прямая сумма L^2-пространств на ребрах графа и на многообразиях. Оператор Лапласа-Бельтрами определяется из тех соображений, что на функциях, носитель которых лежит в $M \setminus \{q_1, .., q_s\}$ (где M - замкнутое многообразие, либо отрезок, а $\{q_1, .., q_s\}$ - точки склейки), он должен совпадать с обыкновенным оператором Лапласа-Бельтрами. Также от этого оператора надо потребовать, чтобы он был самосопряжен. Таким образом, оператор Лапласа-Бельтрами - это самосопряженное расширение оператора H_0 – прямой суммы обычных операторов Лапласа-Бельтрами, ограниченных на функции, которые зануляются в точках склейки. Далее, пользуясь тем, что имеется биекция $\Lambda \leftrightarrow H^\Lambda$ между лагранжевыми плоскостями в $\mathbb{C}^{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n}$ (где n - число ребер графа) и самосопряженными расширениями оператора H_0, можно получить (п. 3.1), что $\ker H^\Lambda \simeq L \cap \Lambda$, где L - фиксированная лагранжева плоскость. Таким образом, размерность ядра может меняться в пределах от 0 до $4n$, причем в случае общего положения плоскости Λ ядро тривиально.

Более содержательный результат получается, если фиксировать расширение. Для этого в п. 3.2 вводится специальная лагранжева плоскость Λ_0, заданная условиями типа непрерывности. Центральный результат главы 3 - доказательство неравенства (теорема 5), выполненного для оператора H^{Λ_0} на декорированном графе (полученном декорацией графа G):

$$\beta_0 \le \dim\ker H^{\Lambda_0} \le \beta_0 + \beta_1$$

где β_0 - количество компонент связности графа G, β_1 - количество независимых циклов графа G. Приведен пример, в котором указанная оценка достигается (п. 3.4), и показано, что сколь угодно малым изменением длин ребер можно добиться равенства $\dim\ker H^{\Lambda_0} = \beta_0$. Также показано, что величина $\beta_1(G) - \dim\ker H^{\Lambda_0}$ не убывает при добавлении новых ребер и многообразий.

Техника, применяемая при описании операторов на декорированных графах, возникает и в более простой ситуации (представляющей самостоятельный интерес) операторов Лапласа-Бельтрами на многообразиях с потенциалом нулевого радиуса. Это самосопряженное расширение оператора Лапласа-Бельтрами, ограниченного на функции, зануляющиеся на наборе точек $\{q_i\}_{i=1}^n$. В определении таких операторов замечается сходство с определением операторов Лапласа-Бельтрами на декорированных графах. Описанию ядра такого оператора посвящена глава 2, где доказывается равенство (теорема 4) $\ker H^\Lambda \simeq L \cap \Lambda$, где L - фиксированная лагранжева плоскость в $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$, которая может быть явно задана (утверждение 3).

Связь характеристик многообразия со спектром оператора Лапласа, построенного по римановой метрике многообразия, проявляется наиболее явно в асимптотических формулах следа для квадрата резольвенты $(\Delta + z^2)^{-2}$ $(z \to \infty)$ и экспоненты оператора $e^{-\Delta t}$ $(t \to 0)$. Для компактного риманова многообразия M (см. [15])

$$Tr\ e^{-\Delta t} \sim (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

где $a_k = \int_M a_k(x) dw_x$, $a_k(x)$ - полиномиальные выражения от компонент тензора кривизны и их ковариантных производных. В частности, $a_0(x) = 1$, и $6a_1(x)$ - скалярная кривизна.

Отсюда, применяя преобразование Меллина, мы можем найти след квадрата резольвенты. Например, при $\dim M = 2$:

$$Tr(\Delta + z^2)^{-2} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k k!}{4\pi z^{2k+2}} = \frac{Vol(M)}{4\pi z^2} + \frac{\chi(M)}{6z^4} + \dots .$$

Обобщением этих формул на случай декорированных графов посвящена диссертация С.В. Рогановой [8]. Для этих целей использовалась формула Крейна, выражающая разность резольвент двух дизъюнктных расширений (т.е. области определений которых пересекаются по области определения того оператора, от которого берутся расширения) через граничные операторы $\Gamma^{(i)}$ (см. [7]). В отличие от классического случая риманова многообразия, формула для следа квадрата резольвенты оператора Лапласа на декорированных графах содержит в качестве коэффициентов при степенях z рациональные функции от $\ln z$. Получается т.н. псевдоасимптотическое разложение, разложение по $z^{-n} \ln^{-m} z, n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Такое разложение, если существует, единственно. С.В. Рогановой было вычислено псевдоасимптотическое разложение для расширений специального вида с условиями локальности (граничные условия в точке склейки содержат только значения функций, производных и коэффффициенты при особенностях в этой точке). Это означает, что граничные условия имеют вид $\Gamma^{(2)} = \Lambda\Gamma^{(1)}$, где Λ - блочно-диагональная матрица.

В главе 4 мы вычисляем след экспоненты описанных операторов, для чего применяем пребразование Лапласа

$$Tr(t\ e^{-tH^{\Lambda}}) \risingdotseq Tr(H^{\Lambda} + p)^{-2}$$

к каждому члену псевдоасимптотического разложения $Tr(H^{\Lambda} + p)^{-2}$ (утверждение 7) и даем оценку остаточного члена (утверждение 8). В теореме 7 найдены первые члены разложения $Tr(t\ e^{-tH^{\Lambda}})$.

В главе 5 мы, используя технику С.В. Рогановой, вычисляем $Tr(H^{\Lambda_0} + z^2)^{-2}$ для оператора Лапласа с введенными в п. 3.2 условиями непрерывности H^{Λ_0}. Для этих целей необходимо изменить операторы граничных условий и сравнивать резольвенту с резольвентой для H_0 - прямой суммы операторов Лапласа на многообразиях и операторов Лапласа на отрезках с условием Дирихле. Доказательство теоремы 8 за исключением прямых вычислений дословно повторяет доказательство теоремы 6 из [8]. В теореме 8 найдены первые члены псевдоасимптотического разложения.

Оказывается, что в разложении $Tr(H^{\Lambda_0}+z^2)^{-2}$ слагаемые, не содержащие логарифмических членов, дают разложение для следа квадрата резольвенты прямой суммы операторов Лапласа на многообразиях и на отрезках с условиями Неймана. В то время, как в разложении следов операторов, рассматриваемых С.В. Рогановой, присутствуют ненулевые добавки к степенным членам (см. теорему 6).

В главе 6 изучается следующий вопрос: что происходит со спектром оператора Лапласа при добавлении обычного потенциала, зависящего от малого параметра и сходящегося к дельта-функции? Будет ли он сходиться к спектру оператора с дельта-потенциалом, введенным в главе 2 ?

Вопрос о дельта-потенциалах и их аппроксимациях для евклидовых пространств предельно подробно разбирался в монографии С.Альбеверио, Ф.Гестези, Р.Хэг-Крона и Х. Хольдена [3]. Для случая оператора на прямой имеет место следующий результат. Рассмотрим семейство операторов $H_{\varepsilon,y} = \Delta + \frac{1}{\varepsilon}V(\frac{\cdot - y}{\varepsilon})$, где $V \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $H_{\varepsilon,y}$ сходится в равномерном резольвентном смысле к оператору $\Delta_{\alpha,y}$, где $\alpha = \int_{\mathbb{R}} V(x)dx$ (это параметр, определяющий расширение $\Delta_{\alpha,y}$ оператора Лапласа, ограниченного на функции, которые зануляются в точке y). При $\alpha < 0$ отрицательная часть спектра $H_{\varepsilon,y}$ состоит из одного простого собственного значения, сходящегося к единственному собственному значению оператора $\Delta_{\alpha,y}$. Если $\alpha > 0$, то при достаточно малых ε отрицательная часть спектра $H_{\varepsilon,y}$ отсутствует и у $\Delta_{\alpha,y}$ нет отрицательных собственных значений. При $\alpha = 0$ $H_{\varepsilon,y}$ имеет не более одного отрицательного собственного значения, погружающегося в существенный спектр $[0;\infty)$.

В пункте 6.1 рассматривается семейство операторов на окружности вида $\Delta_\varepsilon = \Delta + \frac{1}{\varepsilon}V(\frac{x}{\varepsilon})$. Имеет место сходимость собственных собственных значений оператора Δ_ε к собственным значениям $\Delta_{\alpha,0}$ (теорема 9). Здесь $\Delta_{\alpha,0}$ - расширение оператора Лапласа, ограниченного на функции, которые зануляются в точке 0. Где $\alpha = \int_{S^1} V(x)dx$ - параметр, равный отношению односторонних производных в точке 0 для функций из области определения расширения.

Для двумерной плоскости имеет место следующее утверждение (см. [3]). Пусть семейство операторов имеет вид:

$$H_{\varepsilon,y} = \Delta + \left(\frac{\lambda_1}{\ln\varepsilon} + \frac{\lambda_2}{(\ln\varepsilon)^2} + o\left(\frac{1}{(\ln\varepsilon)^2}\right)\right)\frac{1}{\varepsilon^2}V\left(\frac{\cdot - y}{\varepsilon}\right).$$

Тогда $H_{\varepsilon,y}$ сходится в равномерном резольвентном смысле к оператору $\Delta_{\alpha,y}$. Где α - параметр расширения, который находится следующим образом:

$$\alpha = \frac{\lambda_2\int V(x)dx}{(2\pi)^2} + \frac{\int V(x)\int \ln(x-x')V(x')dx'dx}{2\pi(\int V(x)dx)^2},$$

$$\text{при} \int V(x)dx \neq 0,\ \lambda_1 = \frac{2\pi}{\int V(x)dx}.$$

В противном случае $H_{\varepsilon,y}$ сходится в равномерном резольвентном смысле к Δ.

Техника, применяемая в монографии [3], не обобщается на случай операторов на компактных многообразиях, имеющих дискретный спектр. Нами разбирается задача о сходимости спектра оператора Лапласа на сфере с кусочно-постоянным потенциалом, сходящимся к дельта-функции (без нормировки логарифмом). Эта задача является модельным примером. В п. 6.2 доказывается теорема, утверждающая, что ограниченные непрерывные собственные значения сходятся к точкам спектра обычного оператора Лапласа на сфере, т.е. к числам вида $n(n+1)$. Уравнение на спектр получается из склейки собственных функций на границе, где потенциал терпит разрыв. А поскольку собственные функции выражаются через функции Лежандра, то, используя стандартные утверждения теории специальных функций, можно получить оценки на часть уравнения, зависящую от ε, а отсюда получить предельные значения собственных чисел.

Еще одна, разбираемая в п.6.3 задача рассматривает оператор Лапласа на единичном диске с кусочно-постоянным потенциалом, терпящим разрыв на границе диска радиуса ε и сходящимся к дельта-функции. Здесь имеет место аналогичное утверждение о сходимости ограниченных непрерывных собственных значений к точкам спектра оператора Лапласа на диске (с граничными условиями Дирихле), т.е. к нулям функций Бесселя. Техника доказательства здесь такая же, как и в предыдущей теореме.

Еще одна затрагиваемая тема - сходимость спектра оператора Лапласа на поверхности, которая стягивается вдоль одного из направлений. Подобным задачам посвящены статьи [9], [21], [22]. В работе П. Экснера и О. Поста [9] рассматривается "графоподобная" двумерная поверхность M_ε в $\mathbb{R}^3$, стягивающаяся к некоторому конечному графу G. Ограниченные по ε собственные значения оператора Лапласа на графоподобных поверхностях сходится к спектру оператора Лапласа на метрическом графе, причем граничные условия в вершинах графа зависят от способа перехода к пределу. В частности, ими построено такое семейство графоподобных поверхностей M_ε, для которых все ограниченные собственные значения $\lambda_k(M_\varepsilon)$ оператора Лапласа сходятся либо к нулю, либо к собственным значениям прямой суммы операторов Лапласа с условиями Дирихле на ребрах графа G. В главе 7 рассматривается задача о сходимости спектра оператора Лапласа на двумерном торе вращения, радиус меридиана которого стремится к нулю. Теорема 12 вычисляет асимптотики собственных значений, аналитически зависящих от ε

$$\lambda = \frac{1}{\varepsilon^2}(-n^2 + \varepsilon^2\lambda_2 + \varepsilon^4\lambda_4 + \ldots),$$

где $\lambda_2 = -\frac{1}{2}\frac{n^2}{4n^2-1} - m^2$ при $n \neq 1$ и $\lambda_2 = \{-\frac{5}{12} - m^2, \frac{1}{12} - m^2\}$ (при $n = 1$), $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в работах [23]—[26].

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю Андрею Игоревичу Шафаревичу за постановку задач, внимание к работе и ценные советы.

Глава 1

Предварительные сведения

Пусть H - гильбертово пространство, S - линейный оператор, область определения D_S которого всюду плотна в H.

Определение 1 *График G_S линейного оператора S - это множество пар $\{(f, Sf) \subset H \oplus H \,|\, f \in D_S\}$.*

Определение 2 *Если $G_{S_1} \subset G_{S_2}$, то оператор S_2 называется расширением оператора S_1 (обозначается $S_1 \subset S_2$) .*

Определение 3 *Оператор S_1 называется замыканием оператора S, если $G_{S_1} = \overline{G}_S$ (оператор S_1 обозначается $\overline{S}$). Оператор S называется замкнутым, если G_S - замкнутое подмножество в $H \oplus H$.*

Пусть $g \in H$ таков, что ему можно поставить в соответствие элемент $g^* \in H$ таким образом, что для всех $f \in D_S$:

$$(Sf, g) = (f, g^*).$$

В силу плотности D_S, элемент g^* определен однозначно.

Определение 4 *Соответствие $g^* = S^*g$, при котором равенство $(Sf, g) = (f, S^*g)$ справедливо для всех $f \in D_S$, задает некоторый оператор S^*, называемый сопряженным к S оператором.*

Отметим очевидное свойство : если $S \subset T$, то $T^* \subset S^*$.

Определение 5 *Оператор S называется симметрическим, если $(f, Sg) = (Sf, g)$ ($\forall\ f, g \in D_S$).*

Определение 6 *Оператор S называется самосопряженным, если $S = S^*$, то есть $D_S = D_{S^*}$, и $Sf = S^*f$ ($\forall f \in D_S$).*

Как описывать самосопряженные расширения? Поскольку для любого самосопряженного расширения $S \subset S_1$ выполнено $S_1 \subset S^*$, то надо уметь описывать оператор S^*.

Определение 7 *Дефектное подпространство N_z оператора S - это ортогональное дополнение в H к образу оператора $S - \bar{z}I$, где $z \in \mathbb{C}$.*

Теорема 1 *[10] 1) Подпространства N_z являются собственными подпространствами оператора S^*, отвечающими собственным значениям z;*
2) $n_+ = \dim N_z$ постоянно при изменении z в верхней полуплоскости, и $n_- = \dim N_z$ постоянно при изменении z в нижней полупоскости (числа n_+ и n_-- называются индексами дефекта);
3) S обладает самосопряженными расширениями тогда и только тогда, когда $n_+ = n_-$;
4) S - самосопряжен тогда и только тогда, когда $n_+ = n_- = 0$.

Теорема 2 *[10] Если S - замкнутый симметрический оператор, то подпространства $D_S, N_z, N_{\bar{z}}$ трансверсальны, и*

$$D_{S^*} = D_S \oplus N_z \oplus N_{\bar{z}}. \tag{1}$$

Определение 8 *Тройка* $(G, \Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)})$, *где* G *- евклидово пространство,* $\Gamma^{(j)} : D(S^*) \to G$ *- линейные операторы, называется пространством граничных значений, если отображение* $x \to \Gamma x = (\Gamma^{(1)}x, \Gamma^{(2)}x) \in G \oplus G$ *сюръективно и для любых* $x, y \in D(S^*)$ *выполнено условие:*

$$(x, S^*y) - (S^*x, y) = (\Gamma^{(1)}x, \Gamma^{(2)}y) - (\Gamma^{(2)}x, \Gamma^{(1)}y) \tag{2}$$

Определение 9 *Пусть* G *- евклидово пространство. Рассмотрим косоэрмитову форму на* $G \oplus G$: $[x, y] = (x_1, y_2) - (x_2, y_1)$. *Подпространство* $\Lambda \subset G \oplus G$ *называется лагранжевым, если оно совпадает со своим косоортогональным дополнением.*

Теорема 3 *[7] Пусть* S *- симметрический оператор с совпадающими индексами дефекта* $(n_- = n_+)$ *и пусть* $(G, \Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)})$ *- пространство граничных значений для* S. *Для любого лагранжевого подпространства* $\Lambda \subset G \oplus G$ *множество* $\{x \in D(S^*) \,|\, \Gamma x \in \Lambda\}$ *(где* $\Gamma = (\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)})$ *) является областью определения самосопряженного расширения* H^Λ *оператора* S. *Более того, это соответствие* $\Lambda \leftrightarrow H^\Lambda$ *является биекцией.*

Далее следуют важные примеры нахождения самосопряженных расширений симметрических операторов.

1.1 Оператор Лапласа на отрезке.

Определим оператор S как замыкание оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ с областью определения $C_0^\infty([0,1])$ в пространстве $L^2([0,1])$. Этот оператор симметрический, но не самосопряженный. Найдем оператор S^*, найдем индексы дефекта и построим пространство граничных значений для S.

По определению 4, $f \in D(S^*)$ если существует $h \in L^2([0,1])$ такая, что $(f, Sg) = (h, g)$ для всех $g \in D(S)$. В нашем случае для всех $g \in C_0^\infty([0,1])$:

$$(f, Sg) = -\int_0^1 \overline{f(x)} g''(x) dx = \int_0^1 \overline{h(x)} g(x) dx = (h, g).$$

А это означает, что f имеет вторую обобщенную производную из L^2, то есть $D(S^*) = H^2([0,1])$ и $S^* f = -f''$. Теперь найдем $N_i = Ker(S^* - i)$:

$$-f'' - if = 0, f \in H^2 \Rightarrow Ker(S^* - i) =< e^{\sqrt{-i}x}, e^{-\sqrt{-i}x} > .$$

Таким образом, $n_- = n_+ = 2$. Теперь покажем, что пространство граничных значений имеет вид: $(\mathbb{C}^2, \Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)})$, где $\Gamma^{(i)} : D(S^*) \to \mathbb{C}^2$ определены так:

$$\Gamma^{(1)} f = \begin{pmatrix} -f'(0) \\ f'(1) \end{pmatrix}, \Gamma^{(2)} f = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}.$$

Действительно, для любых $f, g \in D(S^*)$:

$$(f, S^* g) - (S^* f, g) = \overline{f'(x)} g(x)|_0^1 - \overline{f(x)} g'(x)|_0^1 =$$

$$\overline{f'(1)} g(1) - \overline{f'(0)} g(0) + \overline{f(0)} g'(0) - \overline{f(1)} g'(1) = (\Gamma^{(1)} f, \Gamma^{(2)} g) - (\Gamma^{(2)} f, \Gamma^{(1)} g).$$

Самосопряженные расширения оператора S задаются лагранжевыми плоскостями в $\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$. Например, плоскости $\Lambda = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$ соответствует расширение Неймана, то есть оператор второй производной с граничными условиями вида $f'(0) = f'(1) = 0$:

$$D(S_N) = \{f \in H^2([0,1]) \,|\, f'(0) = f'(1) = 0\}.$$

1.2 Оператор Лапласа-Бельтрами, ограниченный на функции, которые зануляются на наборе точек.

Везде далее считаем, что M - гладкое замкнутое связное риманово многообразие, $\dim M \le 3$. Пусть Δ - оператор Лапласа-Бельтрами, то есть замыкание оператора

$$-\sum_{i,j=1}^{\dim M} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k}),$$

определенного на $C^\infty(M)$. Оператор Δ самосопряжен, и его область определения $D(\Delta) = H^2(M)$ (второе пространство Соболева). А при сделанном предположении на размерность $\dim M \le 3$ будет выполнено $H^2(M) \subset C(M)$.

Зафиксируем теперь набор точек $\{q_i\}_{i=1}^n$ на M, и рассмотрим следующий симметрический оператор

$$\Delta_0 = \Delta|_{D_q}, \text{ где } D_q = \{\varphi \in D(\Delta) |\, \varphi(q_i) = 0\,, 1 \le i \le n\}.$$

Для описания дефектных подпространств оператора Δ_0 и для определения пространства граничных значений нам понадобятся некоторые свойства *функции Грина* оператора Δ, то есть интегрального ядра оператора $(\Delta - z)^{-1}$ (z из резольвентного множества):

$$(\Delta - z)^{-1} f(x) = \int\limits_M G(x, y; z) f(y) dw.$$

Имеет место следующая

Лемма 1 *[7] Зафиксируем точку q, тогда в окрестности этой точки функция $G(x, q; z)$ имеет разложение:*

$$G(x, q; z) = F_0(x, q) + F_1(x, q; z) + R(x, q; z),$$

где F_0 не зависит от z и имеет следующий вид (где $d(x,q)$ - геодезическое расстояние):

$$F_0(x,q) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\, d(x,q), & \textit{если} \dim M = 1; \\ -\frac{1}{2\pi}\, ln\, d(x,q), & \textit{если} \dim M = 2; \\ \frac{1}{4\pi}\, d(x,q)^{-1}, & \textit{если} \dim M = 3. \end{cases}$$

Функция F_1 непрерывна, а функция R имеет следующий вид при $x \to q$:

$$R(x,q;z) = \begin{cases} o(d(x,q)), & \textit{если} \dim M = 1; \\ o(1), & \textit{если} \dim M = 2 \textit{ или} \dim M = 3. \end{cases}$$

Лемма 2 *[11] Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, тогда функции $\{G(\cdot, q_i; z)\}_{i=1}^{n}$ образуют базис в дефектном подпространстве $N_z = Ker(\Delta_0^* - z)$. Оператор Δ_0 замкнут.*

Из лемм 1,2 и теоремы 2 следует, что любая функция $f \in D(\Delta_0^*)$ имеет следующее асимптотическое разложение в окрестности точки q_j:

$$f(x) = a_j(f) F_0(x, q_j) + b_j(f) + R(x),$$

где $a_j(f), b_j(f) \in \mathbb{C}$. Коэффициент $a_j(f)$ мы будем называть *коэффициентом при особенности* в точке q_j, а $b_j(f)$ мы будем называть *значением регулярной части* в точке q_j.

Определим функцию, которая нам понадобится в следующем пункте:

$$Q(x,y;z) = \begin{cases} G(x,y;z), & \text{если}\, x \neq y; \\ F_1(x,x;z), & \text{если}\, x = y. \end{cases}$$

Лемма 3 *[7] Положим $G = \mathbb{C}^n$ (со стандартным скалярным произведением) и определим операторы $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)} : D(\Delta_0^*) \to G$:*

$$\Gamma^{(1)} := (a_i(f))_{i=1}^{n},\ \Gamma^{(2)} := (b_i(f))_{i=1}^{n},$$

Тогда тройка $(G, \Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)})$ – пространство граничных значений для оператора Δ_0.

Глава 2

Ядро оператора Лапласа на многообразии с потенциалом нулевого радиуса

Пусть M - гладкое замкнутое связное многообразие, $\dim M \leq 3$. Как придать операторный смысл в $L^2(M)$ формальному выражению вида $H = \Delta + \sum_{j=1}^{n} c_j\ \delta_{q_j}(x)$, где $\delta_{q_j}(x)$ - дельта-функция, $q_j \in M$? Это можно сделать следующим образом. Рассмотрим $D_q = \{\varphi \in D(\Delta) \,|\, \varphi(q_j) = 0\ \forall j = 1, .., n\}$. По определению умножения обобщенной функции на непрерывную для функции $\varphi \in D_q$ имеем $\varphi\delta_{q_j}(x) = 0$. Таким образом, должно быть выполнено $H|_{D_q} = \Delta|_{D_q}$, откуда получаем, что H - самосопряженное расширение оператора $\Delta_0 = \Delta|_{D_q}$. Согласно теореме 3 и лемме 3, любое самосопряженное расширение оператора Δ_0 задается лагранжевой плоскостью $\Lambda \subset \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$. Это расширение будем обозначать как Δ^Λ.

Утверждение 1 *Функция $f \in \ker(\Delta_0^*)$ однозначно определяется всеми коэффициентами при особенностях и значением регулярной части в одной точке.*

Доказательство. Пусть существуют две таких функции: f и f'. Тогда $f - f' \in \ker(\Delta)$ и $f - f'$ обращается в ноль в одной точке, т.е. $f - f' = 0$. $\square$

Утверждение 2 *Пусть* $\dim M = 2$. *Для существования функции* $f_0 \in D(\Delta_0)$ *такой, что* $f(x) = f_0(x) + \sum_{j=1}^n \alpha_j^+ G(x, q_j; i) + \sum_{j=1}^n \alpha_j^- G(x, q_j; -i) \in \ker(\Delta_0^*)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\alpha^+ = (\alpha_1^+, \ldots, \alpha_n^+), \alpha^- = (\alpha_1^-, \ldots, \alpha_n^-)$ *удовлетворяли системе* $A^+\alpha^+ + A^-\alpha^- = 0$, *где*

$$A^{\pm} = \begin{pmatrix} (q_1 q_n, q_1)^{\pm} & (q_1 q_n, q_2)^{\pm} & \cdots & (q_1 q_n, q_n)^{\pm} \\ (q_2 q_n, q_1)^{\pm} & (q_2 q_n, q_2)^{\pm} & \cdots & (q_2 q_n, q_n)^{\pm} \\ \vdots & & & \\ (q_{n-1} q_n, q_1)^{\pm} & (q_{n-1} q_n, q_2)^{\pm} & \cdots & (q_{n-1} q_n, q_n)^{\pm} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$(ab, c)^{\pm} = \lim_{z \to 0} (Q(a, c; z) - Q(b, c; z)) - Q(a, c; \pm i) + Q(b, c; \pm i)$$

Доказательство. Пусть $f \in \ker(\Delta_0^*)$, тогда

$$\Delta f_0(x) = -i \sum_{j=1}^n \alpha_j^+ G(x, q_j; i) + i \sum_{j=1}^n \alpha_j^- G(x, q_j; -i).$$

Поскольку из замкнутости графика и компактности резольвенты оператора Δ (см. [12]) следует, что $Im(\Delta)$ - замкнутое множество, то критерий существования такой функции $f_0 \in D(\Delta)$ - это ортогональность правой части константам, а именно:

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_j^+ + \alpha_j^-) = 0$$

(это дает последнюю строчку матриц $A^{\pm}$). Осталось найти условие на коэффициенты, при котором $f_0 \in D(\Delta_0)$, т.е. $f_0(q_j) = 0$ $(j = 1, .., n)$. Достаточно найти условие, при котором $f_0(q_j) = f_0(q_n)$ при $j = 1, \ldots, n-1$ (поскольку функция $f_0(x)$ определена с точностью до константы, то потом вычтем из полученной функции $f_0(q_n)$).

Разложим $f_0(x)$ и $G(x, y; z)$ по базису из собственных функций $\{f_s\}$ оператора Δ:

$$f_0(x) = \sum_s c_s f_s(x), \quad G(x, y; \pm i) = \sum_s \frac{f_s(x)\overline{f_s(y)}}{\lambda_s \mp i}.$$

Тогда получим:

$$\sum_s \lambda_s\ c_s\ f_s(x) = \sum_s f_s(x) \left[-i \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j^+ \overline{f_s(q_j)}}{\lambda_s - i} + i \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j^- \overline{f_s(q_j)}}{\lambda_s + i} \right].$$

Приравнивая коэффициенты при базисных функциях, получим при $\lambda_s \neq 0$:

$$c_s = -i \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j^+ \overline{f_s(q_j)}}{\lambda_s(\lambda_s - i)} + i \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j^- \overline{f_s(q_j)}}{\lambda_s(\lambda_s + i)}$$

Поскольку $\max\limits_{x \in M} |f_s(x)| < C\ \lambda_s^{\frac{d-1}{4}}$ (см. [13]) и поскольку $\lambda_s \sim C(d)(s/Vol(M))^{2/d}$ (где d = dim M), то при условии $d = 2$ ряд для $f_0(x)$ сходится равномерно, а поэтому:

$$f_0(x) - f_0(y) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j^+ \sum_{s:\ \lambda_s \neq 0} \frac{-i(f_s(x) - f_s(y))\overline{f_s(q_j)}}{\lambda_s(\lambda_s - i)} + \sum_{j=1}^n \alpha_j^- \sum_{s:\ \lambda_s \neq 0} \frac{i(f_s(x) - f_s(y))\overline{f_s(q_j)}}{\lambda_s(\lambda_s + i)}$$

Найдем для коэффициентов при α_j^+ другое выражение через функцию $Q(x,y;z)$. Поскольку $Q(x,y;z)$ и $P(x,y;z) = \sum_s \frac{(z-i)f_s(x)\overline{f_s(y)}}{(\lambda_s - i)(\lambda_s - z)}$ мероморфные функции от z при каждых фиксированных x, y и поскольку

$$\frac{\partial P(x,y;z)}{\partial z} = \frac{\partial Q(x,y;z)}{\partial z} = \sum_s \frac{f_s(x)\overline{f_s(y)}}{(\lambda_s - z)^2}$$

и $P(x,y;i) = 0$, то $P(z) = Q(z) - Q(i)$. Отсюда,

$$Q(x,y;z) - \frac{z-i}{izVol(M)} - Q(x,y;i) = \sum_{s:\ \lambda_s \neq 0} \frac{(z-i)f_s(x)\overline{f_s(y)}}{(\lambda_s - i)(\lambda_s - z)}$$

Таким образом,

$$\sum_{s:\ \lambda_s \neq 0} \frac{-i(f_s(x) - f_s(y))\overline{f_s(q)}}{\lambda_s(\lambda_s - i)} = \lim_{z \to 0}(Q(x,q;z) - Q(y,q;z)) - Q(x,q;i) + Q(y,q;i)$$

Аналогично:

$$\sum_{s:\ \lambda_s \neq 0} \frac{i(f_s(x) - f_s(y))\overline{f_s(q)}}{\lambda_s(\lambda_s + i)} = \lim_{z \to 0}(Q(x,q;z) - Q(y,q;z)) - Q(x,q;-i) + Q(y,q;-i)$$

Таким образом, условие $f_0(q_k) = f_0(q_n)$ для любого $k = 1, .., n-1$ перепишется в таком виде:

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^+ (q_k q_n, q_j)^+ + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^- (q_k q_n, q_j)^- \quad \square$$

Теорема 4 $\ker \Delta^\Lambda \simeq L \cap \Lambda$, *где* $L = \Gamma(\ker \Delta_0^*)$ - *лагранжева плоскость.*

Доказательство. Непосредственно из определения отображения Γ следует, что $L = \Gamma(\ker \Delta_0^*)$ - изотропная плоскость, т.е. $[x, y] = 0\ \forall\ x, y \in L$. А поскольку из утверждения 2 следует, что $\dim \ker \Delta_0^* \geq n$ (это, очевидно, будет верно и для случая $\dim M = 3$), и поскольку из утверждения 1 следует, что $\Gamma|_{\ker \Delta_0^*}$ - инъекция, то $\dim L \geq n$. Значит L - лагранжева плоскость. Поскольку $\Delta^\Lambda \subset \Delta_0^*$, то:

$$f \in Ker(\Delta^\Lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} f \in Ker(\Delta_0^*), \\ (\Gamma^{(1)} f, \Gamma^{(2)} f) \in \Lambda. \end{cases}$$

Таким образом, ограничивая изоморфизм $\Gamma : \ker \Delta_0^* \to L$ на $\Gamma^{-1}(\Lambda)$, мы получаем изоморфизм $\Gamma : \ker \Delta^\Lambda \to L \cap \Lambda$. $\quad \square$

Заметим, что поскольку множество лагранжевых подпространств, трансверсальных к некоторой фиксированной плоскости L, является открытым, всюду плотным подмножеством в множестве всех лагранжевых плоскостей, то в случае общего положения ядро тривиально.

Следующее предложение позволяет по значению коэффициентов при особенностях во всех точках и по значению регулярной части в одной точке функции $f \in \ker(\Delta_0^*)$ определить значения регулярной части во всех остальных точках. При помощи этого предложения можно получить явную параметризацию для плоскости $L = \Gamma(\ker \Delta_0^*)$.

Утверждение 3 *Пусть* $\dim M = 2$. *Если* $f \in \ker(\Delta_0^*)$, *то*

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1^{(2)} f - \Gamma_n^{(2)} f \\ \Gamma_2^{(2)} f - \Gamma_n^{(2)} f \\ \vdots \\ \Gamma_{n-1}^{(2)} f - \Gamma_n^{(2)} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (q_1 q_n \circ q_1) & (q_1 q_n \circ q_2) & \cdots & (q_1 q_n \circ q_n) \\ (q_2 q_n \circ q_1) & (q_2 q_n \circ q_2) & \cdots & (q_2 q_n \circ q_n) \\ \vdots & & & \\ (q_{n-1} q_n \circ q_1) & (q_{n-1} q_n \circ q_2) & \cdots & (q_{n-1} q_n \circ q_n) \end{pmatrix} \Gamma^{(1)} f$$

где

$$(ab \circ c) = \lim_{z \to 0} (Q(a, c; z) - Q(b, c; z))$$

Доказательство. Поскольку

$$f(x) = f_0(x) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^+ G(x, q_j; i) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^- G(x, q_j; -i),$$

то

$$\Gamma^{(1)} f = \alpha^+ + \alpha^-, \quad \Gamma^{(2)} f = T^+ \alpha^+ + T^- \alpha^-$$

где

$$T^{\pm} = \begin{pmatrix} Q(q_1, q_1; \pm i) & Q(q_1, q_2; \pm i) & \cdots & Q(q_1, q_n; \pm i) \\ Q(q_2, q_1; \pm i) & Q(q_2, q_2; \pm i) & \cdots & Q(q_2, q_n; \pm i) \\ \vdots & & & \\ Q(q_n, q_1; \pm i) & Q(q_n, q_2; \pm i) & \cdots & Q(q_n, q_n; \pm i) \end{pmatrix}$$

Поскольку $\alpha^- + \alpha^+ = \Gamma^{(1)} f$, то $(A^- - A^+)\alpha^+ = A^- \Gamma^{(1)} f$. Заметим, что $A_0^- - A_0^+ = S(T^+ - T^-)$ где $A_0^{\pm}$ $-(n-1 \times n)$ матрица, полученная из матрицы $A^{\pm}$ отбрасыванием последней строки, а матрица S размера $n-1 \times n$ имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Поскольку $\Gamma^{(2)} f = (T^+ - T^-)\alpha^+ + T^- \Gamma^{(1)} f$, то $S\Gamma^{(2)} f = (A_0^- + ST^-)\Gamma^{(1)} f$. Это и доказывает требуемое равенство. $\square$

2.1 Вычисление $(xy \circ y)$ для стандартной сферы S^2_a.

Известно (см. [7]), что

$$Q(x,y;z) = \frac{1}{4\cos(\pi t(z))}\mathcal{P}_{-\frac{1}{2}+t(z)}(-\cos\frac{r}{a})$$

$$Q(x,x;z) = -\frac{1}{2\pi}\left[\Psi(\frac{1}{2}+t(z)) - \Psi(1) - \frac{\pi}{2}\operatorname{tg}(\pi t(z)) - \ln(2a)\right]$$

где $t(z) = \frac{1}{2}\sqrt{1+4a^2 z}$, $\Psi(x)$ - логарифмичекая производная гамма-функции, $\mathcal{P}_a(z)$ - функция Лежандра. Тогда

$$\lim_{z\to 0}(Q(x,y;z) - Q(y,y;z)) = \lim_{z\to 0}\frac{\mathcal{P}_{-\frac{1}{2}+t(z)}(-\cos\frac{r}{a}) - \sin\pi t(z)}{4\cos\pi t(z)} =$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{\cos\pi u - \mathcal{P}_u(-\cos\frac{r}{a})}{\sin\pi u}$$

Воспользуемся правилом Лопиталя, для этого найдем производную $(\mathcal{P}_u(z))'|_{u=0}$. Зафиксируем $z \in (-1;1)$ и воспользуемся представлением $\mathcal{P}_u(z)$ в виде ряда (см. [14]):

$$\mathcal{P}_u(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(u+1)\dots(u+k)(-u)\dots(k-1-u)}{(k!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k$$

Поскольку для производной k-го члена $L_k(u)$ этого ряда выполняется неравенство (при $u \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ $(|\varepsilon| < 1)$):

$$|L_k'(u)| \le \frac{2k(k+1)!k!}{(k!)^2}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k,$$

то ряд из производных сходится равномерно на $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Значит

$$\mathcal{P}_0'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k'(0) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k = \ln\left(\frac{1+z}{2}\right)$$

Окончательно получаем:

$$(xy \circ y) = -\frac{1}{2\pi}\ln(2a\sin\frac{r(x,y)}{a})$$

Глава 3.

Ядро оператора Лапласа на декорированных графах

Определение 10 *Рассмотрим набор отрезков* $\{I_i = [0, l_i]\}_{i=1}^n$, *а также набор гладких, замкнутых, связных, римановых многообразий* $\{M_i\}_{i=1}^m$ *с условием* $\dim M_i \leq 3$. *Отождествим концы отрезков с точками на многообразиях, причем так, чтобы разным концам отрезков соответствовали разные точки на многообразиях. Полученное топологическое пространство* X *будем называть декорированным графом.*

Положим
$$L^2(X) = \bigoplus_{i=1}^m L^2(M_i) \bigoplus_{i=1}^n L^2(I_i).$$
Обозначим $m(i), m'(i)$ - номера многообразий, к которым примыкает i-ый отрезок. Обозначим $q_i \in M_{m(i)}, q_i' \in M_{m'(i)}$ - точки примыкания i-го отрезка.

Пусть $\Delta_i\,(i = 1, .., m)$ - самосопряженные операторы Лапласа-Бельтрами на M_i, $\Delta_{i+m}(i = 1, .., n)$ - самосопряженный оператор $-\frac{d^2}{dx^2}$ на I_i с условиями Неймана. Определим операторы $\Delta_{0,i} \subset \Delta_i\,(i = 1, .., m+n)$:

$$D(\Delta_{0,i}) = \{f \in D(\Delta_i)|\, f(q) = 0\,, \text{если}\, q - \text{точка примыкания отрезка к}\, M_i\}$$

$$(i = 1, .., m)$$

$$D(\Delta_{0,i}) = \{f \in D(\Delta_i)|\, f(0) = f(l_{i-m}) = 0\,\}\ (i = m+1, .., m+n)$$

Обозначим $H_0 = \oplus_{i=1}^{m+n} \Delta_{0,i}$ - это симметрический оператор с конечными равными индексами дефекта $(4n, 4n)$.

Определение 11 *Всякое самосопряженное расширение H оператора H_0 будем называть оператором Лапласа-Бельтрами на X.*

Для того, чтобы описать самосопряженные расширения оператора H_0, определим пространство граничных значений: $(\mathbb{C}^{4n}, \Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)})$. Линейные операторы $\Gamma^{(j)} : D(H_0^*) \to \mathbb{C}^{4n} (j = 1, 2)$ определены равенством

$$\Gamma_1^{(1)}(f) = a_{q_1}(f_{m(1)}),\ \Gamma_1^{(2)}(f) = b_{q_1}(f_{m(1)})$$

$$\Gamma_2^{(1)}(f) = a_{q_1'}(f_{m'(1)}),\ \Gamma_2^{(2)}(f) = b_{q_1'}(f_{m'(1)}),$$

$$\ldots$$

$$\Gamma_{2n-1}^{(1)}(f) = a_{q_n}(f_{m(n)}),\ \Gamma_{2n-1}^{(2)}(f) = b_{q_n}(f_{m(n)}),$$

$$\Gamma_{2n}^{(1)}(f) = a_{q_n'}(f_{m'(n)}),\ \Gamma_{2n}^{(2)}(f) = b_{q_n'}(f_{m'(n)}).$$

$$\Gamma_{2n+1}^{(1)}(f) = -f_{m+1}'(0),\ \Gamma_{2n+1}^{(2)}(f) = f_{m+1}(0),$$

$$\Gamma_{2n+2}^{(1)}(f) = f_{m+1}'(l_1),\ \Gamma_{2n+2}^{(2)}(f) = f_{m+1}(l_1),$$

$$\ldots$$

$$\Gamma_{4n-1}^{(1)}(f) = -f_{m+n}'(0),\ \Gamma_{4n-1}^{(2)}(f) = f_{m+n}(0),$$

$$\Gamma_{4n}^{(1)}(f) = f_{m+n}'(l_n),\ \Gamma_{4n}^{(2)}(f) = f_{m+n}(l_n).$$

Где f_i $(1 \le i \le m)$ - ограничение f на M_i, f_{m+j} $(1 \le j \le n)$ - ограничение f на I_j Как и ранее, самосопряженное расширение задается лагранжевой плоскостью в $\mathbb{C}^{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n}$.

3.1 Размерность ядра

Поскольку $H \subset H_0^*$, то найдем для начала ядро оператора H_0^*. Очевидно, что $H_0^* = \oplus_{i=1}^{m+n} \Delta_{0,i}^*$. Ядро $\Delta_{0,i}^*$ $(i = 1, ..m)$ уже описывалось в главе 2.

Найдем ядро $\Delta_{0,i}^*$ $(i = m+1, .., m+n)$. Согласно п. 1.1, $D(\Delta_{0,i}^*) = H^2([0,1])$. Поэтому линейные функции лежат в ядре $\Delta_{0,i}^*$. Но других функций там быть не может, поскольку (см. [10]) размерность ядра не превосходит индекса дефекта этого оператора (а он равен 2).

Таким образом, $\dim \ker H_0^* = 4n$ и имеет место утверждение, абсолютно аналогичное теореме 4:

$$\ker H^\Lambda \simeq L \cap \Lambda,$$

где L - лагранжева плоскость в $\mathbb{C}^{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n}$.

3.2 Расширение с условиями непрерывности

Вот два естественных соображения, которые позволяют фиксировать лагранжеву плоскость Λ, задающую оператор Лапласа-Бельтрами H^Λ на X.

1 условие. Потребуем, чтобы все непрерывные функции на X из $D(H_0^*)$ (с условиями Неймана на отрезках) лежали в $D(H^\Lambda)$. Это приводит к следующему условию на плоскость Λ: $K \subset \Lambda$, где K - $2n$-мерная плоскость в $\mathbb{C}^{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n}$ вида:

$$K = \{(x_i^1, x_i^2) \mid x_i^1 = 0 \ \forall\ i = 1, .., 4n,\ x_j^2 = x_{j+2n}^2 \ \forall\ j = 1, .., 2n\}$$

2 условие. Потребуем, чтобы все функции из $D(H^\Lambda)$ имели совпадающие значения регулярных частей в точках склейки (но функциям разрешается иметь сингулярности в этих точках). То есть

$$D(H^\Lambda) \subset \{f = (f_1, .., f_{m+n}) \in D(H_0^*) \mid f_{i+m}(0) = b_{q_i}(f_{m(i)}),$$

$$f_{i+m}(l_i) = b_{q_i'}(f_{m'(i)}) \ \forall\ i = 1, .., n\}.$$

Это условие означает, что $\Lambda \subset S$, где S - $6n$-мерная плоскость в $\mathbb{C}^{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n}$ вида:

$$S = \{(x_i^1, x_i^2) \mid x_j^2 = x_{j+2n}^2 \; \forall \; j = 1,..,2n\}.$$

Лемма 4 *[7] Всякая лагранжева плоскость в $\mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^k$ трансверсальна некоторому координатному подпространству, то есть линейной оболочке векторов $\{a_j | j \in \eta\} \cup \{b_j | j \in \{1,..,k\} \setminus \eta\}$, где $a_j = (e_j, 0), b_j = (0, e_j)$, $\eta \subset \{1,..,k\}$.*

Утверждение 4 *Существует единственная лагранжева плоскость Λ_0, удовлетворяющая условию $K \subset \Lambda_0 \subset S$, где K и S - введенные выше плоскости.*

Доказательство. Из леммы 4 следует, что существуют $\eta \subset \{1,..,4n\}$, и $\{a_i^j\}_{i,j=1}^{4n}$ такие, что плоскость Λ_0 можно записать в координатах следующим образом (α_i-произвольные параметры):

$$\Lambda_0 = \{(x_i^1, x_i^2) \mid \text{если } i \in \eta : x_i^1 = \alpha_i, x_i^2 = \sum_{j=1}^{4n} \alpha_j a_i^j,$$

$$\text{если } i \notin \eta : x_i^1 = \sum_{j=1}^{4n} \alpha_j a_i^j, x_i^2 = \alpha_i\}$$

Покажем, что $|\eta| = 2n$. Допустим, что $|\eta| > 2n$. Это значит, что количество параметров α_i плоскости Λ_0 в левой части $\mathbb{C}^{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n}$ больше чем $2n$. Для того, чтобы найти пересечение Λ_0 с K, нужно все эти параметры положить равными нулю (поскольку для любого вектора принадлежашего K выполнено: $x_i^1 = 0$ для любого $i = 1,..,4n$), поэтому $\dim(\Lambda_0 \cap K) < 2n$. А т.к. $\dim K = 2n$, то K не может содержаться в Λ_0. Теперь допустим, что $|\eta| < 2n$. Это значит, что количество параметров плоскости Λ_0 в правой части $\mathbb{C}^{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n}$ больше чем $2n$. Но для векторов плоскости S (а значит и для Λ_0) выполнено: $x_j^2 = x_{j+2n}^2$ ($\forall \; j = 1,..,2n$), а, значит, параметров плоскости Λ_0 в правой части $\mathbb{C}^{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n}$ не может быть больше, чем $2n$.

Далее, поскольку для координат векторов плоскости Λ_0 выполнено: $x_j^2 = x_{j+2n}^2$ $(\forall\ j = 1, .., 2n)$, то набор $\{1, .., 4n\} \setminus \eta$ для любого $i \in \{1, .., 2n\}$ должен содержать только один из индексов: i или $i + 2n$. Рассмотрим отображение $\mathbb{C}^{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n}$ в себя Σ_η: $(x_i^1, x_i^2) \to (x_{\sigma(i)}^1, x_{\sigma(i)}^2)$, где σ - перестановка, которая меняет местами i и $i + 2n$, если $i \in \eta \cap \{1, .., 2n\}$. При отображении Σ_η плоскости S и K не изменятся, и лагранжевы плоскости перейдут в лагранжевы. Плоскость $\Sigma_\eta \Lambda_0$ имеет вид:

$$\Sigma_\eta \Lambda_0 = \{ \begin{pmatrix} TX + UY \\ Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ QX + WY \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n} \mid X, Y \in \mathbb{C}^{2n} \},$$

где T, U, Q, W - некоторые матрицы $2n \times 2n$. Из условия $\Lambda_0 \subset S$ получаем, что $Q = I, W = 0$. А из условия $K \subset \Lambda_0$ получаем, что $T = 0$. При каком условии на U эта плоскость будет лагранжевой? Возьмем два вектора $V_1, V_2 \in \Lambda_0$, которые заданы параметрами X_1, Y_1 и X_2, Y_2:

$$V_i = \begin{pmatrix} UY_i \\ Y_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i \\ X_i \end{pmatrix}.$$

Если Λ_0 - лагранжева, то для любых $X_1, Y_1, X_2, Y_2 \in \mathbb{C}^{2n}$ должно быть выполнено:

$$0 = [V_1, V_2] = (UY_1, X_2) + (Y_1, X_2) - (X_1, UY_2) - (X_1, Y_2) =$$

$$= ((U + I)Y_1, X_2) - (X_1, (U + I)Y_2).$$

Откуда $U = -I$. Полученная плоскость инвариантна относительно преобразования Σ_η^{-1}. То есть лагранжева плоскость, удовлетворяющая условию $K \subset \Lambda_0 \subset S$ единственна:

$$\Lambda_0 = \{ \begin{pmatrix} -Y \\ Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} \mid X, Y \in \mathbb{C}^{2n} \} \ \Box$$

3.3 Ядро расширения с условиями непрерывности

Утверждение 5 *Для* $f \in \ker H^{\Lambda_0}$ *выполнено:*

$$A)\ \ a_{q_i}(f_{m(i)}) = -a_{q'_i}(f_{m'(i)}),$$

$$B)\ \ b_{q'_i}(f_{m'(i)}) = b_{q_i}(f_{m(i)}) + a_{q_i}(f_{m(i)}) \cdot l_i \quad (i = 1, .., n)$$

Доказательство. Пусть на i-ом ребре $f_{i+m}(x) = Ax + B$ (см. п. 3.1). Поскольку $\Gamma(f) \in \Lambda_0$, то

$$a_{q_i}(f_{m(i)}) = f'_{m+i}(0) = A, \ \ a_{q'_i}(f_{m'(i)}) = -f'_{m+i}(l_i) = -A,$$

$$b_{q_i}(f_{m(i)}) = f_{m+i}(0) = B, \ \ b_{q'_i}(f_{m'(i)}) = f_{m+i}(l_i) = Al_i + B$$

Отсюда получаются требуемые равенства. $\square$

Теорема 5 *1) Для оператора* H^{Λ_0} *на декорированном графе (полученном декорацией конечного графа* G*) выполнено следующее неравенство:*

$$\beta_0 \leq \dim \ker H^{\Lambda_0} \leq \beta_0 + \beta_1$$

где $\beta_i = \dim H_i(G, \mathbb{C})$.

2) Сколь угодно малым изменением длин ребер можно добиться того, чтобы $\dim \ker H^{\Lambda_0} = \beta_0$.

3) Если связный декорированный граф $\tilde{X}$ *получен преклеиванием к связному декорированному графу* X *новых ребер и многообразий,* $\tilde{G}$ *и* G *- их соответствующие графы,* $\tilde{d}$ *и* d *- размерности ядер операторов Лапласа с условиями непрерывности на* $\tilde{X}$ *и* X*, то выполнено следующее неравенство:*

$$\beta_1(G) - d \leq \beta_1(\tilde{G}) - \tilde{d}$$

Доказательство. 1) Достаточно доказать это предложение для случая связного графа G. Нижняя оценка выполняется в силу того, что константы лежат в ядре оператора H^{Λ_0}. Докажем верхнюю оценку. Переобозначим точки $p_1 = q_1, p_2 = q'_1, .., p_{2n-1} = q_n, p_{2n} = q'_n$. Рассмотрим отображение $\varphi : \ker H^{\Lambda_0} \to \mathbb{C}^{2n}$.

$$\varphi(f) = (a_{p_1}(f_{m(1)}), a_{p_2}(f_{m'(1)}), .., a_{p_{2n-1}}(f_{m(n)}), a_{p_{2n}}(f_{m'(n)})).$$

Образ $Im\ \varphi \subset P$, где P - подпространство в $\mathbb{C}^{2n} = (x_1, \dots, x_{2n})$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) если точки p_i и p_j соединены ребром, то $x_i = -x_j$ (по утверждению 5.A); 2) если точки $\{p_i\}_{i\in\eta}$ лежат на одном многообразии, то $\sum_{i\in\eta} x_i = 0$ (по предложению 2). Покажем, что $\dim P = \beta_1$. Действительно, рассмотрим отображение из пространства одномерных цепей (с коэффициентами из $\mathbb{C}$) в $\mathbb{C}^{2n}$, сопоставляющее ребру с началом в точке p_i и с концом в p_j вектор с координатами $x_k = 0$ при k не равном i или j, $x_i = 1$, $x_j = -1$. Поскольку образ пространства замкнутых цепей при этом отображении - это в точности пространство P, то $\dim P = \beta_1$.

Покажем, что функция $f \in \ker H^{\Lambda_0}$ однозначно определяется по вектору $\varphi(f)$ и по одному значению регулярной части $b_{p_1}(f_{m(1)})$. Выделим в графе G максимальное дерево G'. Рассмотрим многообразие M_1, соответствующее корню этого дерева. Тогда, в силу предложения 1, однозначно определяется f_1. Далее, по утверждению 5.B, определяются значения регулярных частей в точках многообразий, соединенных ребрами с M_1, а значит, определены и функции f_i на этих многообразиях. Двигаясь дальше по ребрам G', мы определим функцию f на всем декорированном графе. Таким образом, верхняя оценка установлена.

Однако, вектор $\varphi(f)$ не может быть произвольным, для компонент этого вектора должна выполняться система уравнений, каждое из которых - это условие (из утверждения 5.B) согласования значений регулярных частей в точках, соединенных не входящими в G' ребрами. Уравнений будет $n-(v-1) = \beta_1$ (v

- количество вершин графа G). Таким образом, мы имеем $n-v+1$ уравнений на $n-v+2$ неизвестных. Рассмотрим не входящие в G' ребра (соответствующие им циклы обозначим $\gamma_1, .., \gamma_{n-v+1}$) и зададим на них произвольным образом ориентацию. В качестве неизвестных выберем коэффициенты при особенностях в точках, соединенных этими ребрами; причем, если началу ребра соответствует коэффициент a, то концу ребра будет соответствовать коэффициент $-a$.

Пользуясь описанным выше правилом составления уравнений и способом нахождения значений регулярных частей (утверждение 3), несложно понять, что i, j-ый элемент матрицы системы линейных уравнений на эти неизвестные находится следующим образом: это сумма длин ребер, по которым пересекаются циклы γ_i и γ_j, плюс сумма по всем вершинам P, по которым пересекаются эти циклы, выражений w^P, определенных ниже. Зададим ориентацию на G' таким образом, чтобы ребра были направлены "от корня". Пусть степень вершины P равна k, тогда концы всех ребер, сходящихся в P мы занумеруем так, чтобы номер k получило входящее ребро максимального дерева, а в случае, если P - корень G', то занумеруем так, чтобы номер k получило одно из исходящих ребер G'. Обозначим $q_1^P, \dots q_k^P$ - соответствующие точки на многообразии. Пусть цикл γ_i имеет в вершине P ребра с номерами s и t, а цикл γ_j ребра с номерами r и l. Тогда

$$w^P = \sum_{u=s,t;\ v=r,l} w_{u,v}^P \varepsilon_{u,v},$$

где $w_{u,v}^P = (q_u^P q_k^P \circ q_v^P) - (q_u^P q_k^P \circ q_k^P)$, и $\varepsilon_{u,v} = 0$ если один из индексов равен k; если же $u \neq k, v \neq k$, то $\varepsilon_{u,v} = 1$ в случае, если оба ребра с индексами u и v являются либо входящими либо выходящими, и $\varepsilon_{u,v} = -1$ в противном случае. Заметим, что мы получили самосопряженную матрицу, поскольку $\overline{Q(y, x; \bar{z})} = Q(x, y; z)$, а значит, $w_{u,v}^P = \overline{w_{v,u}^P}$.

Понятно, что длины не входящих в G' ребер будут присутствовать только в диагональных элементах получившейся матрицы системы. А это означает, что сколь угодно малым изменением длин ребер можно добиться невырожденности этой системы, т.е. пункт 2 доказан.

Чтобы доказать пункт 3, выберем максимальное дерево в G и дополним его до максимального дерева в $\tilde{G}$. Тогда матрица пересечений для декорированного графа X будет выделяться блоком в матрице пересечений для декорированного графа $\tilde{X}$. Оценка пункта 3 следует из того, что ранг блока не превосходит ранга всей матрицы. $\square$

3.4 Пример, в котором оценка достигается.

Пусть декорированный граф получен декорацией цикла Γ (с длинами ребер $l_1, \dots, l_n$) многообразиями $\{M_i\}_{i=1}^n$. Тогда, пользуясь утверждением 3, легко показать, что критерий двумерности ядра оператора H^{Λ_0} - это выполнение следующего равенства:

$$\sum_{j=1}^{n}((y_j x_j \circ x_j) - (y_j x_j \circ y_j)) = \sum_{j=1}^{n} l_j$$

где точки $x_i, y_i \in M_i$. Например, если $M_i = S^2_{a_i}$, то получается следующее равенство:

$$\sum_{j=1}^{n} -\frac{1}{\pi} \ln(2a_j \sin \frac{r_j}{a_j}) = \sum_{j=1}^{n} l_j$$

где $r_j = r(x_j, y_j)$. Таким образом, подобрав соответствующие длины ребер, можно построить декорированный цикл, для которого $\dim \ker H^{\Lambda_0} = 2$. Еще один пример, в котором приведенная выше оценка будет достигаться, можно построить следующим образом: возьмем дерево и к некоторым вершинам степени один прикрепим только что построенные циклы (для которых $\dim \ker H^{\Lambda_0} = 2$), получим граф Γ. Продолжая заданную на цикле функцию из $\ker H^{\Lambda_0}$ на весь декорированный граф константой (равной значению этой функции в точке прикрепления цикла) мы получим функцию из ядра оператора Лапласа на всем декорированном графе. Такие функции будут образовывать пространство размерности $\beta_0(\Gamma) + \beta_1(\Gamma)$.

Глава 4

След экспоненты оператора Лапласа на декорированном графе.

Диссертация С.В. Рогановой (см. [8]) была посвящена псевдоасимптотическому разложению по $\frac{1}{p^n \ln^m p}$ следа квадрата резольвенты $Tr(H^\Lambda + p)^{-2}$ оператора H^Λ.

Теорема 6 *[8] Рассмотрим декорированный граф, состоящий из двумерных многообразий M_i и ребер $\{L_i\}_{i=1}^n$ с длинами l_i. Рассмотрим оператор Лапласа-Бельтрами H^Λ, задаваемый граничными условиями вида $\Gamma^{(1)} f = \Lambda \Gamma^{(2)} f$, где Λ - состоящая из четырех диагональных блоков матрица:*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} (\lambda_{i,i}) & (\lambda_{i,i+N}) \\ (\overline{\lambda_{i,i+N}}) & (\lambda_{i+N,i+N}) \end{pmatrix}, \ N = 2n, \ \lambda_{i+N,i+N} \neq 0 \ (i = 1, .., N)$$

Пусть $a_{k,i}$ - коэффициенты разложения следа эспоненты обычного оператора Лапласа-Бельтрами на многообразии M_i. Тогда след квадрата резольвенты $R(p) = (H^\Lambda + p)^{-1}$ имеет следующее p-псевдоасимптотическое разложение при $p \to \infty$:

$$TrR^2 = \frac{1}{4\pi p} \sum_{M_i} Vol(M_i) + \frac{1}{6p^2} \sum_{M_i} \chi(M_i) + \frac{1}{4p^{\frac{3}{2}}} \sum_{L_j} l_j + \frac{N}{2p^2} +$$

$$+ \sum_{M_i} \sum_{k=2} \frac{a_{ki} \Gamma(k+1)}{4\pi p^{k+1}}$$

$$+\frac{c_2(\ln p)}{p^2}+\frac{c_{\frac{5}{2}}(\ln p)}{p^{\frac{5}{2}}}+\frac{c_3(\ln p)}{p^3}+\frac{c_{\frac{7}{2}}(\ln p)}{p^{\frac{7}{2}}}+O\left(\frac{1}{p^4}\right)$$

где c_n - рациональные функции, которые имеют следующие $\ln p$-разложение:

$$c_2=\frac{N}{\ln p}+\sum_{i=1}^{N}\left(1-2\gamma-4\pi\lambda_{i,i}+4\pi\frac{|\lambda_{i,i+N}|^2}{\lambda_{i+N,i+N}}\right)\frac{1}{\ln^2 p}+O\left(\frac{1}{\ln^3 p}\right),$$

$$c_{\frac{5}{2}}=\sum_{i=1}^{N}\frac{3}{4\lambda_{i+N,i+N}}+\sum_{i=1}^{N}\frac{3\pi|\lambda_{i,i+N}|^2}{\lambda_{i+N,i+N}^2}\ \frac{1}{\ln p}+O\left(\frac{1}{\ln^2 p}\right),$$

$$c_3=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda_{i+N,i+N}^2}+\sum_{i=1}^{N}\frac{2a_{1i}\lambda_{i+N,i+N}^3+8\pi|\lambda_{i,i+N}|^2}{\lambda_{i+N,i+N}^3}\ \frac{1}{\ln p}+O\left(\frac{1}{\ln^2 p}\right),$$

$$c_{\frac{7}{2}}=\sum_{i=1}^{N}\frac{5}{4\lambda_{i+N,i+N}^3}+\sum_{i=1}^{N}\frac{15\pi|\lambda_{i,i+N}|^2}{\lambda_{i+N,i+N}^4}\frac{1}{\ln p}+O\left(\frac{1}{\ln^2 p}\right).$$

Наша цель - дать разложение для следа экспоненты оператора $-tH^{\Lambda}$ при $t\to 0$. Для этого мы будем использовать преобразование Лапласа

$$F(p)=\mathcal{L}(f(t))=\int\limits_0^{\infty}e^{-pt}f(t)dt$$

(в дальнейшем будем писать $F(p)\risingdotseq f(t)$ или $f(t)\risingdotseq F(p)$). Также мы будем использовать тот факт, что

$$Tr(t\ e^{-tH^{\Lambda}})\risingdotseq Tr(H^{\Lambda}+p)^{-2}$$

Утверждение 6 *Пусть $a\geq 1, |p|>1$. Тогда*

$$\frac{1}{p^a\ln p}\risingdotseq\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{\xi+a-1}d\xi}{\Gamma(\xi+a)}=-\frac{t^{a-1}}{\ln t\ \Gamma(a)}-\frac{t^{a-1}\Gamma'(a)}{\ln^2 t\ \Gamma^2(a)}+O\left(\frac{t^{a-1}}{\ln^3 t}\right)$$

при $t\to 0$.

Доказательство. Покажем, что

$$\frac{1}{p^a\ln p}\risingdotseq\int\limits_{a-1}^{\infty}\frac{t^{\xi}d\xi}{\Gamma(\xi+1)}\tag{1}$$

Действительно,

$$\int\limits_{a-1}^{\infty}\frac{t^{\xi}d\xi}{\Gamma(\xi+1)}\risingdotseq\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{a-1}^{\infty}\frac{t^{\xi}e^{-pt}}{\Gamma(\xi+1)}d\xi dt=\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{a-1}^{\infty}\frac{s^{\xi}e^{-s}}{p^{\xi+1}\Gamma(\xi+1)}d\xi ds=$$

Очевидно, что двойной интеграл абсолютно сходится и можно поменять пределы интегрирования:

$$\int\limits_{a-1}^{\infty}\frac{t^{\xi}d\xi}{\Gamma(\xi+1)}\risingdotseq\int\limits_{a-1}^{\infty}p^{-\xi-1}d\xi=\frac{1}{p^{a}\ln p}.$$

Далее

$$\int\limits_{a-1}^{\infty}\frac{t^{\xi}d\xi}{\Gamma(\xi+1)}=\frac{1}{\ln t}\int\limits_{a-1}^{\infty}\frac{dt^{\xi}}{\Gamma(\xi+1)}=-\frac{t^{a-1}}{\ln t\;\Gamma(a)}+\frac{1}{\ln t}\int\limits_{a-1}^{\infty}\frac{\Gamma'(\xi+1)t^{\xi}d\xi}{\Gamma^{2}(\xi+1)}=$$

интегрируем по частям (значения на бесконечности не будет, т.к. $\Psi(y)=\frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)}=O(y)$ (см. [14]))

$$=-\frac{t^{a-1}}{\ln t\;\Gamma(a)}-\frac{t^{a-1}\Gamma'(a)}{\ln^{2}t\;\Gamma^{2}(a)}-\frac{1}{\ln^{2}t}\int\limits_{a-1}^{\infty}\frac{\Psi'(\xi)-\Psi^{2}(\xi)}{\Gamma(\xi+1)}\;t^{\xi}\;d\xi$$

Интегрируя по частям в последнем интеграле (и используя то, что $\Psi'(y)=O(\frac{1}{y})$ (см. [14])), получаем нужное утверждение. $\square$

Утверждение 7 *Пусть* $p>1, a>1, b\in\mathbb{N}, b>1$. *Тогда*

$$\frac{1}{p^{a}\ln^{b}p}\risingdotseq\int\limits_{0}^{\infty}\dots\int\limits_{0}^{\infty}\frac{t^{a+\xi_1+\dots+\xi_b-1}}{\Gamma(a+\xi_1+\dots+\xi_b)}d\xi_1\dots\,d\xi_b=(-1)^{b}\frac{t^{a-1}}{\ln^{b}t\;\Gamma(a)}+O\left(\frac{t^{a-1}}{\ln^{b+1}t}\right)$$

Доказательство. Эта формула получается $b-1$ – кратным интегрированием по a формулы из утверждения 6. Например, для $b=2$:

$$\int\limits_{c}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-pt}t^{\xi+a-1}}{\Gamma(\xi+a)}d\xi dt da=\int\limits_{c}^{\infty}\frac{da}{p^{a}\ln p}$$

или

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-pt}t^{\xi+\eta+c-1}}{\Gamma(\xi+\eta+c)}d\xi dt d\eta = \frac{1}{p^c\ln^2 p}$$

Очевидно, что тройной интеграл абсолютно сходится, и можно поменять местами интеграл по t и η, тогда

$$\frac{1}{p^a\ln^2 p} \risingdotseq \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{t^{a+\xi+\eta-1}}{\Gamma(a+\xi+\eta)}d\xi d\eta$$

Так же, как и в утверждении 6, интегрируя по частям сначала во внутреннем интеграле, а потом во внешнем, получим требуемое утверждение. $\square$

Утверждение 8 *Пусть $a>1, b\in\mathbb{N}, b>2$, тогда*

$$O\left(\frac{1}{p^a\ln^b p}\right) \risingdotseq O\left(\frac{t^{a-1}}{\ln^{b-2} t}\right)$$

при $p\to\infty, t\to 0$.

Доказательство. Непосредственно из формулы Меллина

$$F(p) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt}F(p)dp$$

(где $F(p)$ - аналитическая и стремящаяся к нулю при $|p|\to\infty$ в полуплоскости функция, для которой $\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}|F(p)|dp<\infty$) следует, что

$$O\left(\frac{1}{p\ln^2 p}\right) \risingdotseq O\left(1\right)$$

Таким образом, если

$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{p^{a-1}\ln^{b-2} p}O\left(\frac{1}{p\ln^2 p}\right)$$

то, пользуясь тем, что произведение изображений есть изображение свертки оригиналов, при $t\to 0$ получим:

$$|f(t)| < C\int_0^t g(\tau)d\tau$$

где $g(t) \risingdotseq \frac{1}{p^{a-1}\ln^{b-2} p}$. Таким образом, используя утверждение 7, получаем:

$$f(t) = O\left(\frac{t^{a-1}}{\ln^{b-2} t}\right). \ \square$$

Из всех 3-х предложений получаем:

$$\frac{A}{p^2\ln p} + \frac{B}{p^2\ln^2 p} + \frac{C}{p^2\ln^3 p} + \frac{D}{p^2\ln^4 p} + O\left(\frac{1}{p^2\ln^5 p}\right) \risingdotseq -\frac{At}{\ln t} +$$

$$+\frac{(B - A\Gamma'(2))t}{\ln^2 t} + O\left(\frac{t}{\ln^3 t}\right)$$

$$\frac{A}{p^a\ln p} + \frac{B}{p^a\ln^2 p} + \frac{C}{p^a\ln^3 p} + O\left(\frac{1}{p^a\ln^4 p}\right) \risingdotseq -\frac{At^{a-1}}{\Gamma(a)\ln t} + O\left(\frac{t^{a-1}}{\ln^2 t}\right)$$

Окончательно, получаем:

Теорема 7 *В условиях теоремы 6:*

$$t \cdot Tr(e^{-tH^{\Lambda}}) = \frac{1}{4\pi}\sum_{M_i} Vol(M_i) + \frac{1}{6}\sum_{M_i}\chi(M_i)\ t + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{L_j} l_j\ t^{\frac{1}{2}} + \frac{N}{2}\ t +$$

$$+\sum_{M_i}\sum_{k=2}\frac{a_{ki}}{4\pi}\ t^k +$$

$$+s_1(\ln t)t + s_{\frac{3}{2}}(\ln t)t^{\frac{3}{2}} + s_2(\ln t)t^2 + s_{\frac{5}{2}}(\ln t)t^{\frac{5}{2}} + O\left(t^3\right),$$

где s_n - функции, которые имеют следующее $\ln t$-разложение:

$$s_1 = -N\frac{1}{\ln t} + \left(\sum_{i=1}^{N}\left[1 - 2\gamma - 4\pi\lambda_{i,i} + 4\pi\frac{|\lambda_{i,i+N}|^2}{\lambda_{i+N,i+N}}\right] - \Gamma'(2)N\right)\ \frac{1}{\ln^2 t} +$$

$$+O\left(\frac{1}{\ln^3 t}\right),$$

$$s_{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda_{i+N,i+N}} - \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{N}\frac{\pi|\lambda_{i,i+N}|^2}{\lambda^2_{i+N,i+N}}\ \frac{1}{\ln t} + O\left(\frac{1}{\ln^2 t}\right),$$

$$s_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda^2_{i+N,i+N}}\ - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{2a_{1i}\lambda^3_{i+N,i+N} + 8\pi|\lambda_{i,i+N}|^2}{\lambda^3_{i+N,i+N}}\ \frac{1}{\ln t} + O\left(\frac{1}{\ln^2 t}\right),$$

$$s_{\frac{5}{2}} = \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda^3_{i+N,i+N}}\ - \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\sum_{i=1}^{N}\frac{\pi|\lambda_{i,i+N}|^2}{\lambda^4_{i+N,i+N}}\frac{1}{\ln t} + O\left(\frac{1}{\ln^2 t}\right).$$

Глава 5

След квадрата резольвенты для оператора с условиями непрерывности

Теорема 8

$$Tr(H^{\Lambda_0}+z^2)^{-2} = \sum_{M_i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{ki}k!}{4\pi z^{2k+2}} + \sum_{L_j}\left(\frac{l_j}{4z^3}+\frac{1}{2z^4}\right) +$$

$$+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{c_k(\ln z^2)}{z^k}$$

где c_k - рациональные функции

$$c_4(\ln z^2) = \frac{N}{\ln z^2} + \frac{N(1-2\gamma)}{\ln^2 z^2} + O\left(\frac{1}{\ln^3 z^2}\right),$$

$$c_5(\ln z^2) = 3\pi N\frac{1}{\ln z^2} + (-6\pi\gamma + 8\pi)N\frac{1}{\ln^2 z^2} + (12\pi\gamma^2 - 32\pi\gamma + 8\pi)N\frac{1}{\ln^3 z^2} +$$

$$+O\left(\frac{1}{\ln^4 z^2}\right),$$

$$c_6(\ln z^2) = \sum_{i=1}^{N}5\pi a_{1i}\frac{1}{\ln z^2} + \sum_{i=1}^{N}(16\pi^2 - 10\pi\gamma a_{1i} + 8\pi a_{1i})\frac{1}{\ln^2 z^2} +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(-32\pi^2\gamma + 20\pi\gamma^2 a_{1i} + 48\pi^2 - 32\pi\gamma a_{1i})\frac{1}{\ln^3 z^2} + O\left(\frac{1}{\ln^4 z^2}\right),$$

$$c_7(\ln z^2) = \sum_{i=1}^{N}28\pi^2 a_{1i}\frac{1}{\ln^2 z^2} + \sum_{i=1}^{N}(80\pi^3 - 112\pi^2\gamma a_{1i} + 64\pi^2 a_{1i})\frac{1}{\ln^3 z^2} +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}(-160\pi^3\gamma + 256\pi^3 - 384\pi^2\gamma a_{1i} + 336\pi^2\gamma^2)\frac{1}{\ln^4 z^2} + O\left(\frac{1}{\ln^5 z^2}\right).$$

Доказательство. Найденную С.В. Рогановой формулу нельзя применить к этому оператору, поскольку она дает ответ только для операторов H *дизъюнктных* с $\oplus_{i=1}^{m+n}\Delta_i$ (где $\{\Delta_i\}_{i=1}^{m}$ - операторы Лапласа на многообразиях, $\{\Delta_i\}_{i=m+1}^{m+n}$ - операторы Лапласа на отрезках с условием Неймана), то есть для которых выполняется $D(H)\cap D(\oplus_{i=1}^{m+n}\Delta_i) = D(H_0)$.

Однако, если поменять пространство граничных значений, то есть вместо $(\mathbb{C}^{4n},\Gamma^{(1)},\Gamma^{(2)})$ рассматривать $(\mathbb{C}^{4n},\Gamma_0^{(1)},\Gamma_0^{(2)})$, где

$$\Gamma_0^{(1)}f = \begin{pmatrix} \Gamma_1^{(1)}f \\ \vdots \\ \Gamma_{2n}^{(1)}f \\ \Gamma_{2n+1}^{(2)}f \\ \vdots \\ \Gamma_{4n}^{(2)}f \end{pmatrix}, \quad \Gamma_0^{(2)}f = \begin{pmatrix} \Gamma_1^{(2)}f \\ \vdots \\ \Gamma_{2n}^{(2)}f \\ -\Gamma_{2n+1}^{(1)}f \\ \vdots \\ -\Gamma_{4n}^{(1)}f \end{pmatrix},$$

то расширение с условиями "непрерывности" запишется в следующем виде: $\Gamma_0^{(2)}f = \Lambda_0\Gamma_0^{(1)}f$, где

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

Причем это расширение будет дизъюнктным с $\oplus_{i=1}^{m+n}\Delta_i$ (где $\{\Delta_i\}_{i=1}^{m}$ - операторы Лапласа на многообразиях, $\{\Delta_i\}_{i=m+1}^{m+n}$ - операторы Лапласа на отрезках с условием Дирихле).

При вычислении следа квадрата резольвенты С.В. Роганова использовала формулу Крейна

$$R^{\Lambda}(z) = R_0(z) - \gamma(z)(Q(z)-\Lambda)^{-1}\gamma^*(\bar{z}) = R_0(z) - A$$

где $\gamma(z) = (\Gamma^{(1)})^{-1}$, $Q(z) = \Gamma^{(2)}\gamma(z)$. Поскольку мы изменили отображения $\Gamma^{(i)}$, то необходимо найти соответствующие отображения $Q(z),\gamma(z)$. В качестве базиса в дефектном подпространстве для оператора S (на отрезке $[a,b]$)

из п. 1.1 выберем функции

$$f_1(x) = (G^D)'_y(x,a) = \frac{\operatorname{sh} z(x-b)}{\operatorname{sh} z(a-b)}, f_2(x) = -(G^D)'_y(x,b) = \frac{\operatorname{sh} z(x-a)}{\operatorname{sh} z(b-a)},$$

где G^D - функция Грина оператора Лапласа с условием Дирихле:

$$G^D(x,y;z) = \frac{\operatorname{sh} z(x-b)\operatorname{sh} z(y-a)}{z\operatorname{sh} z(a-b)}, \quad x \geq y$$

Тогда, если мы будем рассматривать один отрезок в отдельности, то для него

$$\gamma^*(\bar{z})f = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(x)f(x)dx \\ \int_a^b f_2(x)f(x)dx \end{pmatrix}$$

$$(\Gamma^{(1)})^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha f_1 + \beta f_2$$

$$Q(z) = \begin{pmatrix} f_1'(a) & f_2'(a) \\ -f_1'(b) & -f_2'(b) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -z & 0 \\ 0 & -z \end{pmatrix}$$

где $\sim$ означает, что компоненты матриц отличаются экспоненциально малыми членами. $Tr(R_0 A)$ имеет вид

$$\sum_{i,j}(Q(z)-\Lambda)^{-1}_{i,j}(z)\int\left(\int G(x,y;z)G^*(y,q_i;z)dy\right)G^*(q_j,x;z)dx$$

где $G(x,y;z)$ - функция Грина оператора Лапласа на многообразии или функция Грина оператора Лапласа на отрезке с условием Дирихле. И $G^*(y,q;z)$ - функцция Грина оператора Лапласа на многобразии, если $q \in M_k$, либо $G^*(y,q;z) = f_1(y)$, если q - начало отрезка, либо $f_2(y)$, если q - конец отрезка. Непосредственно вычисляя интегралы, находим, что если $q_i = q_j$ - точка отрезка, то

$$\int\left(\int G(x,y;z)G^*(y,q_i;z)dy\right)G^*(q_j,x;z)dx = \frac{1}{8z^3} + O(e^{-Cz})$$

Если же $q_i \neq q_j$, то этот интеграл экспоненциально мал. При $q_i, q_j \in M_k$ интеграл равен (см. [8])

$$-\frac{G'_z(q_i,q_j;z)}{8z^3} + \frac{G''_{zz}(q_i,q_j;z)}{8z^2}$$

Таким образом,

$$-2Tr(R_0A) = 2\sum_{i=1}^{N}(Q(z)-\Lambda)^{-1}_{i,i}(z)\left(\frac{G'_i}{8z^3}-\frac{G''_i}{8z^2}\right)-2\sum_{i=N+1}^{2N}(Q(z)-\Lambda)^{-1}_{i,i}(z)\frac{1}{8z^3} =$$

$$= \frac{1}{4z^3}\sum_{i=1}^{N}\frac{F_i+zF'_i}{1+zF_i} - \frac{1}{4z^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{zF''_i}{1+zF_i}.$$

Теперь рассмотрим слагаемое

$$TrA^2 \sim \sum_{i,j}(Q(z)-\Lambda)^{-1}_{i,j}(Q(z)-\Lambda)^{-1}_{j,i}\int (G^*(x,q_i;z))^2\,dx\int (G^*(x,q_j;z))^2\,dx.$$

Если q_i лежит на отрезке, то $\int (G^*(x,q_i;z))^2\,dx = \frac{1}{2z}+O(e^{-Cz})$.

Таким образом, это слагаемое эквивалентно $\frac{1}{4z^2}Tr(G'_z[Q(z)-\Lambda]^{-1})^2$, где

$$G'_z = \begin{pmatrix} (F_i)'_z & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$$

где $(F_i)'_z$ - диагональная матрица $N\times N$ $(N=2n)$, $F_i = F(q_i,q_i;z)$ - регулярная часть функции Грина. И поскольку

$$Q(z) \sim \begin{pmatrix} F_i & 0 \\ 0 & -zE \end{pmatrix},\quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

то все слагаемое эквивалентно

$$\frac{1}{4z^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{(F_i)^2-2(F_i)'+z^2((F_i)')^2}{(1+zF_i)^2}.$$

Найдем первые члены псевдоасимптотического разложения $Tr(-2R_0A+A^2)$.

$$F(q_i,q_i;z) = \frac{1}{4\pi}(-\ln z^2-2\gamma)+\frac{b_1}{z^2}+\frac{b_2}{z^4}+\dots$$

где $b_k = \Gamma(k)a_k$, a_k - коэффициенты теплопроводности многообразия, которому принадлежит точка q_i. Обозначим $A = -\frac{\gamma}{2\pi}, B = -\frac{1}{4\pi}$, тогда

$$\frac{1}{1+zF} = \frac{1}{B}\frac{1}{z\ln z^2} - \frac{A}{B^2}\frac{1}{z\ln^2 z^2} + \frac{A^2}{B^3}\frac{1}{z\ln^3 z^2} - \frac{A^3}{B^4}\frac{1}{z\ln^4 z^2} + O\left(\frac{1}{z\ln^5 z^2}\right)$$

$$-\left[\frac{1}{B^2}\frac{1}{z^2\ln^2 z^2} - \frac{2A}{B^3}\frac{1}{z^2\ln^3 z^2} + \frac{3A^2}{B^4}\frac{1}{z^2\ln^4 z^2} + O\left(\frac{1}{z^2\ln^5 z^2}\right)\right]$$

$$+\left[\frac{1}{B^3}\frac{1}{z^3\ln^3 z^2} - \frac{3A}{B^4}\frac{1}{z^3\ln^4 z^2} + \frac{6A^2}{B^5}\frac{1}{z^3\ln^5 z^2} + O\left(\frac{1}{z^3\ln^6 z^2}\right)\right]$$

$$-\left[\frac{1}{B^4}\frac{1}{z^4\ln^4 z^2} - \frac{4A}{B^5}\frac{1}{z^4\ln^5 z^2} + \frac{10A^2}{B^6}\frac{1}{z^4\ln^6 z^2} + O\left(\frac{1}{z^4\ln^7 z^2}\right)\right].$$

$$\frac{1}{(1+zF)^2} = \frac{1}{B^2}\frac{1}{z^2\ln^2 z^2} - \frac{2A}{B^3}\frac{1}{z^2\ln^3 z^2} + \frac{3A^2}{B^4}\frac{1}{z^2\ln^4 z^2} - \frac{4A^3}{B^5}\frac{1}{z^2\ln^5 z^2} +$$

$$+O\left(\frac{1}{z^2\ln^6 z^2}\right)$$

$$-\frac{2}{B^3}\frac{1}{z^3\ln^3 z^2} + \frac{6A}{B^4}\frac{1}{z^3\ln^4 z^2} - \frac{12A^2}{B^5}\frac{1}{z^3\ln^5 z^2} + O\left(\frac{1}{z^3\ln^6 z^2}\right)$$

$$+\frac{3}{B^4}\frac{1}{z^4\ln^4 z^2} - \frac{8A}{B^5}\frac{1}{z^4\ln^5 z^2} + \frac{24A^2}{B^6}\frac{1}{z^4\ln^6 z^2} + O\left(\frac{1}{z^4\ln^7 z^2}\right)$$

$$-\frac{4}{B^5}\frac{1}{z^5\ln^5 z^2} + \frac{10A}{B^6}\frac{1}{z^5\ln^6 z^2} - \frac{60A^2}{B^7}\frac{1}{z^5\ln^7 z^2} + O\left(\frac{1}{z^5\ln^8 z^2}\right).$$

$$F^2 - 2F' + z^2(F')^2 = B^2\ln^2 z^2 + 2AB\ln z^2 + 2B\ln z^2\left(\frac{b_1}{z^2} + \frac{b_2}{z^4} + O\left(\frac{1}{z^6}\right)\right) + A^2 +$$

$$+4B^2 - 4B\frac{1}{z} + (2Ab_1 - 8Bb_1)\frac{1}{z^2} + 4b_1\frac{1}{z^3} + (2Ab_2 + 5b_1^2 - 16Bb_2)\frac{1}{z^4} + O\left(\frac{1}{z^5}\right).$$

$$F + zF' - z^2F'' = B\ln z + (A + 4B) - \frac{7b_1}{z^2} - \frac{23b_2}{z^4} + O\left(\frac{1}{z^6}\right).$$

В результате получаем

$$\frac{1}{4z^2}\frac{F^2 - 2F' + z^2(F')^2}{(1+zF)^2} + \frac{1}{4z^3}\frac{F + zF' - z^2F''}{1+zF} =$$

$$
\frac{1}{2z^4}+\frac{1}{z^4\ln z^2}+\frac{1-2\gamma}{z^4\ln^2 z^2}+O\left(\frac{1}{z^4\ln^3 z^2}\right)+
$$

$$
+3\pi\frac{1}{z^5\ln z^2}+(-6\pi\gamma+8\pi)\frac{1}{z^5\ln^2 z^2}+(12\pi\gamma^2-32\pi\gamma+8\pi)\frac{1}{z^5\ln^3 z^2}+O\left(\frac{1}{z^5\ln^4 z^2}\right)
$$

$$
+5\pi a_1\frac{1}{z^6\ln z^2}+(16\pi^2-10\pi\gamma a_1+8\pi a_1)\frac{1}{z^6\ln^2 z^2}+
$$

$$
+(-32\pi^2\gamma+20\pi\gamma^2 a_1+48\pi^2-32\pi\gamma a_1)\frac{1}{z^6\ln^3 z^2}+O\left(\frac{1}{z^6\ln^4 z^2}\right)
$$

$$
+28\pi^2 a_1\frac{1}{z^7\ln^2 z^2}+(80\pi^3-112\pi^2\gamma a_1+64\pi^2 a_1)\frac{1}{z^7\ln^3 z^2}+
$$

$$
+(-160\pi^3\gamma+256\pi^3-384\pi^2\gamma a_1+336\pi^2\gamma^2)\frac{1}{z^7\ln^4 z^2}+O\left(\frac{1}{z^7\ln^5 z^2}\right).
$$

Таким образом, часть разложения, не содержащая логарифмы (содержащая степени z), совпадает с разложением квадрата резольвенты для прямой суммы операторов Лапласа на многообразиях и операторов Лапласа с условиями Неймана на отрезках, т.е. с

$$
\sum_{M_i}\sum_k \frac{b_{ki}}{4\pi z^{2k+2}}+\sum_{L_j}\left(\frac{l_j}{4z^3}+\frac{1}{2z^4}\right)
$$

Глава 6

Спектр оператора Лапласа с потенциалом, сходящимся к дельта-функции

6.1 Окружность

Теорема 9 *Рассмотрим задачу на окружности, параметризованной* $x \in [0, 1)$*:* $-y'' + \frac{1}{\varepsilon}V(\frac{x}{\varepsilon})y = \lambda y$*, где* $V(x)$ *- интегрируемая функция с носителем* $[0, 1]$*. Для каждой точки* λ_0 *вида* $(2\pi k)^2 (k \in \mathbb{N})$ *или решения уравнения* $\frac{1}{M} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_0}} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{\lambda_0}}{2}$ *(где* $M = \int_0^1 V(x)dx$*) существует единственное собственное значение* $\lambda(\varepsilon)$*, т.ч.* $\lambda(\varepsilon) \to \lambda_0$*. Других собственных значений нет.*

Доказательство. Сначала рассмотрим это уравнение на $[0, \varepsilon]$ и напишем фундаментальную систему решений. Делаем замену переменных $x \to x\varepsilon$. Тогда получаем задачу $-y'' + \varepsilon V(x)y = \varepsilon^2 \lambda y$ на $[0, 1]$. Раскладываем $y(x)$ в ряд по ε: $y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \ldots$. Тогда получаем уравнения:

$$-y_0'' = 0$$

$$-y_1'' + V y_0 = 0$$

$$-y_2'' + V y_1 = \lambda y_0.$$

Построим такие разложения для фундаментальной системы решений $y^1(x), y^2(x)$. Причем потребуем, чтобы $y^1(0) = 1, (y^1)'(0) = 0$ и $y^2(0) = 0, (y^2)'(0) = 1$. Для $y^1(x)$ получаем:

$$y_0^1(x) = 1$$

$$y_1^1(x) = x\int_0^x V(\xi)d\xi - \int_0^x V(\xi)\xi d\xi$$

$$y_2^1(x) = x\int_0^x (V(\xi)y_1^1(\xi) - \lambda)d\xi - \int_0^x (V(\xi)y_1^1(\xi) - \lambda)\xi d\xi.$$

А поскольку $\max|y_{n+1}| \le 2\|V\|_1 \max|y_n| + 2\lambda$, то построенный ряд для y^1 сходится равномерно при ограниченном λ.

Формулы для $y^2(x)$:

$$y_0^2(x) = x$$

$$y_1^2(x) = x\int_0^x V(\xi)\xi d\xi - \int_0^x V(\xi)\xi^2 d\xi.$$

Тогда

$$y^1(1) = 1 + \varepsilon\int_0^1 V(\xi)(1-\xi)d\xi + o(\varepsilon), \quad (y^1)'(1) = \varepsilon\int_0^1 V(\xi)d\xi + o(\varepsilon)$$

$$y^2(1) = 1 + \varepsilon\int_0^1 V(\xi)\xi(1-\xi)d\xi + o(\varepsilon), \quad (y^2)'(1) = 1 + \varepsilon\int_0^1 V(\xi)\xi d\xi + o(\varepsilon)$$

Рассматривая уравнения на остальной части окружности $x \in [\varepsilon, 1)$, получаем фундаментальную систему:

$$\cos\sqrt{\lambda}(1-x), \ -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}(1-x).$$

Требуя гладкости от глобального решения, получаем два условия в точке $x = \varepsilon$:

$$Ay^1(1) + \varepsilon By^2(1) = A\cos\sqrt{\lambda}(1-\varepsilon) - \frac{B}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}(1-\varepsilon)$$

$$A(y^1)'(1) + \varepsilon B(y^2)'(1) = \varepsilon(\sqrt{\lambda}A\sin(\sqrt{\lambda}(1-\varepsilon)) + B\cos(\sqrt{\lambda}(1-\varepsilon)))$$

Пользуясь найденными выше разложениями, легко показать, что равенство определителя этой системы нулю имеет вид:

$$\frac{1}{\varepsilon}\det(\varepsilon,\sqrt{\lambda}) = (1-\cos\sqrt{\lambda})^2 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}\,(M-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}) + f(\varepsilon,\sqrt{\lambda}) = 0$$

где $f(\varepsilon, t)$ - гладкая на $(0,\varepsilon_0)\times(0,\infty)$ функция, и $f(\varepsilon,t)=o(\varepsilon)$ при условии ограниченности t.

Для всех непрерывных решений $\lambda(\varepsilon)$ этого уравнения выполнено $\lambda(\varepsilon)\to\lambda_0$, где λ_0 - решение уравнения

$$\sin\frac{\sqrt{\lambda_0}}{2}(2\sin\frac{\sqrt{\lambda_0}}{2} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\cos\frac{\sqrt{\lambda_0}}{2}M) = 0.$$

А поскольку $\left(\frac{1}{\varepsilon}\det(\varepsilon,\sqrt{\lambda})\right)'_\lambda(0,\lambda_0)\neq 0$, то по теореме о неявных функциях для каждого λ_0 существует единственное решение $\lambda(\varepsilon)$, т.ч. $\lambda(\varepsilon)\to\lambda_0$. $\square$

6.2 Сфера.

Теорема 10 *Рассмотрим задачу на нахождение собственных значений оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на стандартной двумерной сфере радиуса 1 :* $(\Delta - V_\varepsilon(\cos\psi))u = -\lambda u$, *где* ψ *- широта,* $V_\varepsilon(\cos\psi) = \frac{C}{\varepsilon^2}$ *при* $0<\psi<\varepsilon$, *и* $V_\varepsilon(\cos\psi)=0$ *при* $\psi>\varepsilon$.

Тогда каждая непрерывная и ограниченная функция $\lambda(\varepsilon)$ *сходится при* $\varepsilon\to 0$ *к числу вида* $n(n+1),\ n\in\mathbb{Z}$.

Доказательство. После разделения переменных и замены $z=\cos\psi$ получим собственную функцию $u=\sum e^{im\varphi}u_m(z)$, где

$$(1-z^2)u_m'' - 2zu_m' + (\lambda - V(z) - \frac{m^2}{1-z^2})u_m = 0.$$

1) Пусть $m>0$. Решения этого уравнения $P_n^m(z)$ и $Q_n^m(z)$ ($n(n+1)=\lambda$ в окрестности $z=-1$, $n(n+1)=\lambda-\frac{C}{\varepsilon^2}$ в окрестности $z=1$) имеют следующие

асимптотики:

$$P_n^m(z) \sim \frac{(-1)^m 2^{-\frac{m}{2}} \Gamma(n+m+1)(1-z)^{\frac{m}{2}}}{m!\Gamma(n-m+1)}, Q_n^m(z) \sim (-1)^m 2^{\frac{m}{2}-1} \Gamma(m)(1-z)^{-\frac{m}{2}}$$

при $z \to 1$,

$$P_n^m(z) \sim -\frac{1}{\pi} 2^{\frac{m}{2}} \sin(\pi n) \Gamma(m)(1+z)^{-\frac{m}{2}}, Q_n^m(z) \sim -2^{\frac{m}{2}-1} \Gamma(m) \cos(\pi n)(1+z)^{-\frac{m}{2}}$$

при $z \to -1$. Можно выбрать базис в пространстве решений $\{w_1, w_2\}$ таким образом, чтобы в окрестности особой точки $z_0 = -1$ решения имели вид: $w_1 = (1+z)^{\frac{m}{2}} a_1(z),\ w_2 = Cw_1 \ln(1+z) + (1+z)^{-\frac{m}{2}} a_2(z)$, где a_1, a_2 - аналитические функции. Поэтому чтобы решение в окрестности т. -1 не имело особенностей, оно должно быть пропорционально

$$\cos(\pi n_-) P_{n_-}^m(z) - \frac{2}{\pi} \sin(\pi n_-) Q_{n_-}^m(z).$$

Потребовав гладкости решения, получаем уравнение на спектр:

$$\frac{\cos(\pi n_-)(P_{n_-}^m)'(\cos\varepsilon) - \frac{2}{\pi}\sin(\pi n_-)(Q_{n_-}^m)'(\cos\varepsilon)}{\cos(\pi n_-)P_{n_-}^m(\cos\varepsilon) - \frac{2}{\pi}\sin(\pi n_-)Q_{n_-}^m(\cos\varepsilon)}$$

$$= \frac{(P_{n_+}^m)'(\cos\varepsilon)}{P_{n_+}^m(\cos\varepsilon)}$$

где $n_+(n_+ + 1) = \lambda - \frac{C}{\varepsilon^2}$, $n_-(n_- + 1) = \lambda$.
Или

$$\frac{2}{\pi}\operatorname{tg}(\pi n_-) = \frac{(P_{n_-}^m)'(\cos\varepsilon)P_{n_+}^m(\cos\varepsilon) - P_{n_-}^m(\cos\varepsilon)(P_{n_+}^m)'(\cos\varepsilon)}{(Q_{n_-}^m)'(\cos\varepsilon)P_{n_+}^m(\cos\varepsilon) - Q_{n_-}^m(\cos\varepsilon)(P_{n_+}^m)'(\cos\varepsilon)} \qquad (*)$$

Для нахождения ограниченных решений найдем асимптотику правой части уравнения по ε в предположении, что λ принадлежит конечному промежутку.

Поскольку (см. [16], стр. 144)

$$P_n^m(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{m}{2}} \mathbf{F}(-n, n+1; 1-m; \frac{1-x}{2}),$$

то

$$P_{n_-}^m(\cos\varepsilon) \sim \frac{\varepsilon^m}{2^m} \frac{(-n_-)_m (n_- + 1)_m}{m!}$$

$$(P_{n_-}^m)'(\cos\varepsilon) \sim -\frac{\varepsilon^{m-2}}{2^m}\frac{(-n_-)_m(n_-+1)_m}{(m-1)!}$$

Легко показать, что ряд для $\mathbf{F}(-n_+, n_++1, 1-m; \sin^2\frac{\varepsilon}{2})$ сходится равномерно по ε, и

$$\mathbf{F}(-n_+, n_++1, 1-m; \sin^2\frac{\varepsilon}{2}) \to \sum_{s=m}\frac{(\frac{C}{4})^s}{(s-m)!s!} = J_{-m}(\sqrt{-C})\left(\frac{\sqrt{-C}}{2}\right)^m,$$

где J_{-m} - функция Бесселя. Поэтому

$$P_{n_+}^m(\cos\varepsilon) \sim \varepsilon^{-m}\ 2^m J_{-m}(\sqrt{-C})(\frac{\sqrt{-C}}{2})^m$$

$$(P_{n_+}^m)'(\cos\varepsilon) \sim \varepsilon^{-m-2}\ m\ 2^m\ J_{-m}(\sqrt{-C})\left(\frac{\sqrt{-C}}{2}\right)^m -$$

$$-\varepsilon^{-m-2}\ 2^{m-1}\ C\ J_{-m+1}(\sqrt{-C})\left(\frac{\sqrt{-C}}{2}\right)^{m-1}$$

Числитель правой части уравнения (*) эквивалентен

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{(-n_-)_m(n_-+1)_m}{(m-1)!}\left(-2J_{-m}(\sqrt{-C})\left(\frac{\sqrt{-C}}{2}\right)^m + \right.$$

$$\left. +\frac{1}{2m}CJ_{-m+1}(\sqrt{-C})\left(\frac{\sqrt{-C}}{2}\right)^{m-1}\right)$$

Знаменатель же необходимо вычислить с дополнительной поправкой по ε. Явный вид функции $Q_n^m(x)$ (см. [16], с.150):

$$2Q_n^m(x) = P_n^m(x)\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + 2\Gamma'(1) - \gamma(n+m+1) - \gamma(n-m+1)\right) -$$

$$+(-1)^m\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{m}{2}}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{(-n)_r(n+1)_r(m-r-1)!}{r!}(-1)^r\left(\frac{1-x}{2}\right)^r -$$

$$+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{m}{2}}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-n)_{r+m}(n+1)_{r+m}}{r!(r+m)!}\ \sigma(r)\left(\frac{1-x}{2}\right)^{m+r} -$$

$$+(-1)^m(n-m+1)_{2m}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{m}{2}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-n)_r(n+1)_r}{r!(r+m)!}\ \sigma(m+r)\left(\frac{1-x}{2}\right)^r$$

(где $\sigma(r) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{r}$ и $(a)_r = a(a+1)\cdots(a+r-1)$)

А) Рассмотрим случай $m > 1$. Тогда первые два главных члена в разложении для $Q^m_{n_-}(\cos\varepsilon)$ и $(Q^m_{n_-})'(\cos\varepsilon)$ появляются из второго слагаемого:

$$2Q^m_{n_-}(\cos\varepsilon) = (-1)^m \frac{2^m}{\varepsilon^m}\left(1 - \frac{m}{12}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\right)((m-1)!+$$

$$+\frac{n_-(n_-+1)}{2}(m-2)!\frac{\varepsilon^2}{4}(1 - \frac{\varepsilon^2}{12} + o(\varepsilon^2))\Bigg) =$$

$$= (-1)^m\ (m-1)!\ \frac{2^m}{\varepsilon^m}\left(1 + \varepsilon^2\left(\frac{\lambda}{8(m-1)} - \frac{m}{12}\right) + o(\varepsilon^2)\right)$$

$$2(Q^m_{n_-})'(\cos\varepsilon) = (-1)^m\ m!\ \frac{2^m}{\varepsilon^{m+2}}\left(1 + \varepsilon^2\left(\frac{\lambda}{8(m-1)} - \frac{m}{12} + \frac{1}{3}\right) + o(\varepsilon^2)\right)$$

Теперь найдем уточненные разложения для $P^m_{n_+}(\cos\varepsilon)$ и $(P^m_{n_+})'(\cos\varepsilon)$. Обозначим $A = \sqrt{-C}$, тогда

$$-n_+ = -\frac{A}{\varepsilon}\left(1 - \varepsilon\frac{1}{2A} + \varepsilon^2\frac{\lambda + \frac{1}{4}}{2A^2} + o(\varepsilon^2)\right)$$

$$(-n_+)_s = (-1)^s\frac{A^s}{\varepsilon^s}\left(1 - \varepsilon\frac{s^2}{2A} + \varepsilon^2\frac{1}{A^2}\left(\frac{s}{2}(\lambda + \frac{1}{4}) + q_s\right) + o(\varepsilon^2)\right)$$

$$(n_+ + 1)_s = \frac{A^s}{\varepsilon^s}\left(1 + \varepsilon\frac{s^2}{2A} + \varepsilon^2\frac{1}{A^2}\left(\frac{s}{2}(\lambda + \frac{1}{4}) + q_s\right) + o(\varepsilon^2)\right)$$

где

$$q_s = q_{s-1} + \frac{2s-1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \ldots + \frac{2s-3}{2}\right) = \frac{1}{8}s^4 - \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{24}s$$

$$\left(\frac{1-\cos\varepsilon}{2}\right)^s = \frac{\varepsilon^{2s}}{2^{2s}}\left(1 - \varepsilon\frac{s}{12} + o(\varepsilon)\right)$$

Получаем

$$\mathbf{F}(-n, n+1; 1-m; \frac{1-\cos\varepsilon}{2}) = \sum_{s=m}\frac{(-1)^s(\frac{A}{2})^{2s}}{s!(s-m)!}+$$

$$+\varepsilon^2\sum_{s=m}\frac{(-1)^s(\frac{A}{2})^{2s}}{s!(s-m)!}\left(\frac{1}{A^2}[s\lambda + \frac{1}{4}s^4 - \frac{1}{3}s^3 - \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{3}s] - \frac{s}{12}\right) + o(\varepsilon^2) =$$

$$= K^m_0 + \varepsilon^2 K^m_1 + o(\varepsilon^2)$$

В этих обозначениях:

$$P_{n_+}^m(\cos\varepsilon) = \frac{2^m}{\varepsilon^m}\left(K_0^m + \varepsilon^2(K_1^m - \frac{m}{12}K_0^m) + o(\varepsilon^2)\right)$$

$$(P_{n_+}^m)'(\cos\varepsilon) = \frac{2^{m-1}}{\varepsilon^{m+2}}(2mK_0^m + A^2K_0^{m-1}+$$
$$+\varepsilon^2\left(2mK_1^m + 2mK_0^m(\frac{1}{3} - \frac{m}{12}) + K_0^{m-1}(\lambda - A^2\frac{m}{12}) + A^2K_1^{m-1}\right) + o(\varepsilon^2))$$

Таким образом, знаменатель дроби (*) имет асимптотическое разложение

$$\frac{1}{\varepsilon^{2m+2}}(-1)^m(m-1)!\ 2^{2m-2}CK_0^{m-1}+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^{2m}}(-1)^m(m-1)!\ 2^{2m-2}\left(-A^2K_1^{m-1} - K_0^{m-1}\left(\lambda - A^2\frac{m}{6} + A^2\frac{\lambda}{8(m-1)}\right)\right)+$$
$$+o(\varepsilon^{-2m})$$

Заметим, что $K_0^m(A) = J_{-m}(A)\left(\frac{A}{2}\right)^m$. Таким образом, если $J_{-m+1}(A) \neq 0$, то правая часть уравнения (*) равномерно по ограниченному λ эквивалентна

$$\varepsilon^{2m}\frac{(-n)_m(n+1)_m(-1)^m}{((m-1)!)^2\ 2^{2m-1}}\left(2\frac{J_{-m}(A)}{A\ J_{-m+1}(A)} + \frac{1}{m}\right)$$

Если же $J_{-m+1}(A) = 0$, то знаменатель дроби (*) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{\varepsilon^{2m}}(-1)^m(m-1)!\ 2^{2m-2}CK_1^{m-1}(A)$$

и вся дробь есть $O(\varepsilon^{2m-2})$.

Б) Рассмотрим случай $m = 1$, тогда

$$P_{n_-}^1(\cos\varepsilon) = -\frac{\lambda}{2}\varepsilon + O(\varepsilon^2),\ (P_{n_-}^1)'(\cos\varepsilon) = \frac{\lambda}{2}\frac{1}{\varepsilon} + O(1)$$

$$Q_{n_-}^1(\cos\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\lambda}{2}\varepsilon\ln\varepsilon + O(\varepsilon),\ (Q_{n_-}^1)'(\cos\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon^3} - \frac{\lambda}{2}\frac{\ln\varepsilon}{\varepsilon} + O(\frac{1}{\varepsilon})$$

Таким образом, если $P_{n_+}^1(\cos\varepsilon) = \frac{\alpha}{\varepsilon} + O(\varepsilon)$, $(P_{n_+}^1)'(\cos\varepsilon) = \frac{\beta}{\varepsilon^3} + O(\frac{1}{\varepsilon})$, то знаменатель (*) имеет вид:

$$\frac{1}{\varepsilon^4}(\alpha - \beta) + \frac{\ln\varepsilon}{\varepsilon^2}\frac{\lambda}{2}(\alpha + \beta) + O(\frac{1}{\varepsilon^2})$$

Если A таково, что $\alpha-\beta=-A^2J_0(A)\neq$, то правая часть (*) есть $O(\varepsilon^2)$. Если же $J_0(A)=0$, то $\alpha+\beta=2J_{-1}(A)A\neq 0$, т.к. у J_0 и J_{-1} нет общих нулей. И правая часть (*) есть $O(\frac{1}{\ln\varepsilon})$.

2) Пусть $m=0$. Тогда $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ имеют асимптотики:

$$P_n(x)\sim 1,\quad Q_n(x)\sim -\frac{1}{2}\ln(1-x)\quad x\to 1$$

$$P_n(x)\sim \frac{\sin\pi n}{\pi}\ln(1+x),\quad Q_n(x)\sim \frac{\cos\pi n}{2}\ln(1+x)\quad x\to -1$$

Уравнение на спектр остается тем же самым, однако

$$P^m_{n_-}(\cos\varepsilon)\sim 1,\quad (P^m_{n_-})'(\cos\varepsilon)\sim\frac{\lambda}{2}$$

$$Q^m_{n_-}(\cos\varepsilon)\sim -\ln\varepsilon,\quad (Q^m_{n_-})'(\cos\varepsilon)\sim \varepsilon^{-2}$$

$$P^m_{n_+}(\cos\varepsilon)\sim J_0(A),\quad (P^m_{n_+})'(\cos\varepsilon)\sim -\frac{A}{\varepsilon^2}J_1(A)$$

Значит, если $J_1(A)\neq 0$, то правая часть (*) есть $-\frac{1}{\ln\varepsilon}$. В противном случае $J_0(A)\neq 0$, и правая часть есть $O(\varepsilon^2)$. $\square$

6.3 Диск.

Теорема 11 *Рассмотрим задачу $\Delta f+V_\varepsilon(r)f=\lambda f$ на круге радиуса 1. Здесь Δ - оператор Лапласа (положительный) с условием Дирихле на границе круга, $V_\varepsilon(r)=0$ при $r>\varepsilon$, $V_\varepsilon(r)=\frac{C}{\varepsilon^2}$ при $r<\varepsilon$.*

Тогда каждая непрерывная и ограниченная функция $\lambda(\varepsilon)$ сходится при $\varepsilon\to 0$ к собственному значению Δ, т.е. к нулю функции Бесселя $J_m(z)$.

Доказательство. Разделяем переменные $f=R(r)e^{im\phi}$ и получаем уравнение на $R(r)$:

$$R''+\frac{1}{r}R'-\frac{m^2}{r^2}R+(\lambda-\frac{C}{\varepsilon^2})R=0$$

При $r<\varepsilon$ решение, не имеющее особенности в нуле - $J_m\left(\sqrt{\lambda-\frac{C}{\varepsilon^2}}\;r\right)$. При $r>\varepsilon$ решение есть линейная комбинация $J_m(\sqrt{\lambda}\;r)\;Y_m(\sqrt{\lambda})\;-J_m(\sqrt{\lambda})\;Y_m(\sqrt{\lambda}\;r)$

(где $Y_m(z)$ - функция Ханкеля). Требуя гладкости решения при $r = \varepsilon$, получаем:

$$\sqrt{\lambda}\, \frac{Y_m(\sqrt{\lambda}\,)\, J'_m(\sqrt{\lambda}\,\varepsilon) - J_m(\sqrt{\lambda}\,)\; Y'_m(\sqrt{\lambda}\,\varepsilon)}{Y_m(\sqrt{\lambda}\,)\, J_m(\sqrt{\lambda}\,\varepsilon) - J_m(\sqrt{\lambda})\, Y_m(\sqrt{\lambda}\,\varepsilon)} = \sqrt{\lambda - \frac{C}{\varepsilon^2}}\; \frac{J'_m\left(\sqrt{\lambda - \frac{C}{\varepsilon^2}}\;\varepsilon\right)}{J_m\left(\sqrt{\lambda - \frac{C}{\varepsilon^2}}\;\varepsilon\right)}$$

или

$$\frac{J_m(\Lambda)}{Y_m(\Lambda)} = \frac{\varepsilon\Lambda J'_m(\Lambda\varepsilon) J_m(\sqrt{\Lambda^2\varepsilon^2 - C}) - J'_m(\sqrt{\Lambda^2\varepsilon^2 - C})\sqrt{\Lambda^2\varepsilon^2 - C}\; J_m(\Lambda\varepsilon)}{\varepsilon\Lambda Y'_m(\Lambda\varepsilon) J_m(\sqrt{\Lambda^2\varepsilon^2 - C}) - J'_m(\sqrt{\Lambda^2\varepsilon^2 - C})\sqrt{\Lambda^2\varepsilon^2 - C}\; Y_m(\Lambda\varepsilon)} \quad (*)$$

Покажем, что правая часть (*) равномерно по ограниченному λ сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Поскольку при $m > 0$:

$$J_m(z) = (-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^m \frac{1}{m!} + o(z^m),$$

$$J'_m(z) = (-1)^m \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{m-1} \frac{1}{(m-1)!} + o(z^{m-1}),$$

то числитель (*) есть $O(\varepsilon^m)$.

1) Разберем случай $m = 1$:

$$Y_1(z) = -\frac{2}{z} + \frac{z}{2}\,\left(2\ln\frac{z}{2} + 2\gamma - 1\right) + O(z^3 \ln z),$$

$$Y'_1(z) = -\frac{2}{z^2} + \ln\frac{z}{2} + \gamma + \frac{1}{2} + O(z^2 \ln z)$$

(см. [14] 17.61, стр. 211) Обозначим $A = \sqrt{-C}$. Знаменатель дроби (*) имеет вид

$$\frac{2}{\Lambda\varepsilon}(J_1(A) + J'_1(A)A) + \Lambda\varepsilon\ln\varepsilon(J_1(A) - J'_1(A)A) + O(\varepsilon)$$

Если $J_1(A) + J'_1(A)A \neq 0$, то правая часть (*) есть $O(\varepsilon^2)$. Если же $J_1(A) + J'_1(A)A = 0$, то $J_1(A) - J'_1(A)A \neq 0$, т.к. нули функции Бесселя простые. Тогда правая часть (*) есть $O(\frac{1}{\ln\varepsilon})$.

2) В случае $m > 1$ дробь есть $O(\varepsilon^{2m})$ если $J_1(A) - J'_1(A)A \neq 0$, и $O(\varepsilon^{2m-2})$ в противном случае.

3) Если $m = 0$, то $J_0(z) = 1 + O(z^2)$, $J_0'(z) = -\frac{z}{2} + O(z^3)$ и числитель (*) равен $-J_0'(A)A + O(\varepsilon)$. Поскольку

$$Y_0(z) = 2\ln\frac{z}{2} + 2\gamma + O(z^2\ln z), \quad Y_0'(z) = \frac{2}{z} + O(z\ln z),$$

то знаменатель (*) принимает вид

$$-2J_0'(A)A\ln\varepsilon + 2J_0(A) - 2J_0'(A)A\gamma + O(\varepsilon^2\ln\varepsilon)$$

Отсюда следует, что дробь (*) есть либо $O(\frac{1}{\ln\varepsilon})$, либо $O(\varepsilon)$. $\square$

Глава 7

Стягивающийся тор

Теорема 12 *Рассмотрим оператор Лапласа (отрицательный) на поверхности, полученной вращением окружности* $(x-1)^2+y^2=\varepsilon^2$ *вокруг оси оу. Если* $\lambda(\varepsilon)$ *- аналитически зависящее от* ε *собственное значение, то*

$$\lambda = \frac{1}{\varepsilon^2}(\lambda_0 + \varepsilon^2\lambda_2 + \varepsilon^4\lambda_4 + \ldots),$$

$\lambda_0 = -n^2, \lambda_2 = -\frac{1}{2}\frac{n^2}{4n^2-1} - m^2$ *при* $n \neq 1$ *и* $\lambda_2 = \{-\frac{5}{12} - m^2, \frac{1}{12} - m^2\}$ *(при* $n = 1$*), где* $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доказательство. Разделяя переменные в уравнении на собственные значения оператора Лапласа, получаем для $u(\psi)$ уравнение с коэффициентами, аналитически зависящими от ε:

$$u'' - (\varepsilon \sin\psi - \varepsilon^2 \cos\psi \sin\psi + \varepsilon^3 \cos^2\psi \sin\psi + o(\varepsilon^3))u'$$

$$-(m^2\varepsilon^2 - 2m^2\varepsilon^3 \cos\psi + o(\varepsilon^3))u = (\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + o(\varepsilon^2))u$$

Раскладываем $u(\psi)$ в ряд $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots$. Получаем уравнение на u_0: $u_0'' = \lambda_0 u_0$. То есть

$$\lambda_0 = -n^2,\ u_0 = C_1 e^{in\psi} + C_2 e^{-in\psi}.$$

Уравнение на u_1:

$$u_1'' - \sin\psi u_0' = \lambda_1 u_0 + \lambda_0 u_1$$

$$u_1'' + n^2 u_1 = \lambda_1 (C_1 e^{in\psi} + C_2 e^{-in\psi}) + \frac{n}{2}(C_1 e^{i(n+1)\psi} - C_1 e^{i(n-1)\psi} - C_2 e^{-i(n-1)\psi} + $$
$$+ C_2 e^{-i(n+1)\psi})$$

Из условия разрешимости этого уравнения получаем, что $\lambda_1 = 0$.

$u_1 = C_3 e^{in\psi} + C_4 e^{-in\psi}$+(частное решение).

Уравнение на u_2:

$$u_2'' + u_0' \sin\psi \cos\psi - u_1' \sin\psi - m^2 u_0 = \lambda_0 u_2 + \lambda_2 u_0$$

$$2(u_2'' + n^2 u_2) = nC_3 e^{i(n+1)\psi} - nC_4 e^{-i(n-1)\psi} + C_1 \frac{n(n+1)}{-2(2n+1)} e^{i(n+2)\psi} -$$
$$-C_1 \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} e^{in\psi} + C_2 \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} e^{-i(n-2)\psi} + C_2 \frac{n(n+1)}{2(2n+1)} e^{-in\psi} -$$
$$nC_3 e^{i(n-1)\psi} + nC_4 e^{-i(n+1)\psi} - C_1 \frac{n(n+1)}{-2(2n+1)} e^{in\psi} + C_1 \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} e^{i(n-2)\psi} -$$
$$-C_2 \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} e^{-in\psi} - C_2 \frac{n(n+1)}{2(2n+1)} e^{-i(n+2)\psi} -$$
$$-\frac{n}{2}\left(C_1 e^{i(n+2)\psi} - C_1 e^{i(n-2)\psi} - C_2 e^{-i(n-2)\psi} + C_2 e^{i(n+2)\psi}\right) +$$
$$+\lambda_2 (C_1 e^{in\psi} + C_2 e^{-in\psi})$$

При $n \neq 1$ условие разрешимости будет иметь вид:

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}\frac{n^2}{4n^2-1} - m^2.$$

При $n = 1$ получаем систему:

$$(\frac{1}{6} + \lambda_2 + m^2) C_1 + \frac{1}{4} C_2 = 0$$
$$\frac{1}{4} C_1 + (\frac{1}{6} + \lambda_2 + m^2) C_2 = 0$$

Откуда $\lambda_2 = \{-\frac{5}{12} - m^2, \frac{1}{12} - m^2\}$. Уравнение для u_3:

$$u_3'' + n^2 u_3 = \sin\psi u_2' - \cos\psi \sin\psi u_1' - \cos^2\psi \sin\psi u_0' - 2m^2 \cos\psi u_0$$

$$+m^2 + \lambda_1 u_2 + \lambda_2 u_1 + \lambda_3 u_0$$

В правой части этого уравнения коэффициенты при $e^{in\psi}$ и $e^{-in\psi}$ равны $C_1\lambda_3$ и $C_2\lambda_3$. Откуда $\lambda_3 = 0$. $\square$

Литература

[1] Kronig R. de L., Penney W.G. Quantum mechanics of electrons in crystal latices. // Proc. Roy. Soc. A. – 1931. – V.130. – P.499 - 513.

[2] Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом. // Докл. Акад. Наук СССР. – 1961.– Т. 137. – С. 1011 - 1014.

[3] Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. - М.: Мир. – 1991.

[4] И.С. Лобанов. Спектральные свойства гамильтонианов явнорешаемых моделей мезоскопических структур: декорированные квантовые графы и квантовые точки. Кандидатская диссертация, 2005.

[5] Брюнинг Й., Гейлер В.А. Геометрическое рассеяние на компактных римановых многообразиях. // Доклады Академии Наук. – 2003.– Т. 389, N. 3. – С. 310-313.

[6] Брюнинг Й., Гейлер В.А., Лобанов И.С. Спектральные свойства операторов Шредингера на декорированных графах. // Математические заметки. –2005. –Т. 77, N.6. – С. 932-934.

[7] J.Bruning, V.Geyler. Scattering on compact manifolds with infinitely thin horns.// J.Math.Phys. –2003. – Vol.44. – pp.371-405.

[8] S. Roganova. Direct and inverse spectral problems for hybrid manifolds. Dissertation, Humboldt Universitat zu Berlin. – 2007.

[9] Exner P., Post O. Convergence of spectra of graph-like thin manifolds.// Journal of Geometry and Physics. – 2005. – V.54. – P. 77-115.

[10] М.А. Наймарк. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

[11] В.А. Гейлер, В.А. Маргулис, И.И. Чучаев. Потенциалы нулевого радиуса и операторы Карлемана.// Сибирский математический журнал. – 1995.– Т. 36. – N. 4.

[12] Х. Цикон, Р. Фрезе, В. Кирш, Б. Саймон. Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990.

[13] H. Donnelly. Eigenfunctions of the Laplacian on compact Riemannian manifolds.// Asian J. Math. – 2006. – V. 10(1)– pp. 115-125.

[14] Э. Уиттекер, Дж. Ватсон. Курс современного анализа, ч.2. Издательство физико-математической литературы, 1963.

[15] S. Rosenberg. The Laplacian on a Riemannian manifold. // London Mathematical Society Student Texts. –1997. – Vol. 31. – Cambridge.

[16] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. т.1. М.: Наука, 1965.

[17] Демков Ю.Н., Островский В.Н. Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. - Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1975.

[18] Курасов П.Б., Павлов Б.С. Электрон в однородном кристалле из точечных атомов с внутренней структурой. II. // Теоретическая и математическая физика. – 1987. – Т.74, N. 1. – С. 82-93.

[19] Павлов Б.С. Теория расширений и явнорешаемые модели. // Успехи матем. наук. – 1987. – Т.42, N 6. – С. 99-131.

[20] Павлов Б.С. Электрон в однородном кристалле из точечных атомов с внутренней структурой. // Теоретическая и математическая физика. – 1987. – Т. 72, N 3.– С. 403-415.

[21] Kuchment P., Zheng H. Convergence of spectra of mesoscopic systems collapsing onto a graph. // J. Math. Anal. Appl. – 2001. – V. 258, N.2. – P.671-700.

[22] Saito Y. The limiting equation for Neumann Laplacians on shrinking domains. // Electron. J. Differ. Equ. – 2000. – V.31 – P. 1-25.

[23] А.А. Толченников. О ядре операторов Лапласа-Бельтрами с потенциалом нулевого радиуса и на декорированных графах.// Математический сборник. – 2008. – Т. 199, N7. – с. 123-138.

[24] A.A. Tolchennikov. Kernel and Trace Formula for the Exponential of the Laplace-Beltrami Operator on a Decorated Graph. // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2008. – Vol. 15, No. 1. – pp.128-139.

[25] А.А. Толченников. Тезисы конференции "Дни дифракции 2009". Изд-во СПбГУ. – 2009. – с. 88.

[26] А.А. Толченников. Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2008. Тезисы докладов. Изд-во ВорГУ. – 2008. – с. 136.