

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Светлана Терзич

Вещественные когомологии и
характеристические классы Понтрягина
обобщенных симметрических пространств

01.01.04 - геометрия и топология

*Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук*

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор Ю. П. Соловьев

МОСКВА - 1998

Содержание

Введение

1 Обобщенные симметрические пространства и их классификация

1.1	Предварительные сведения.....	9
1.1.1	Группы и алгебры Ли.....	9
1.1.2	Вещественные когомологии и характеристические классы Понтрягина.....	13
1.2	Основные свойства обобщенных симметрических пространств.....	16
1.3	Классификация обобщенных симметрических пространств с простыми компактными основными группами.....	22
1.3.1	Накрывающие алгебры и схемы Каца-Дынкина.....	23
1.3.2	Список обобщенных симметрических пространств ..	29

2 Вещественные когомологии однородных пространств

2.1	Инварианты группы Вейля.....	40
2.2	Алгебра Картана.....	44
2.3	Теорема Картана и когомологии пространств нормального положения.....	46

3 Когомологии обобщенных симметрических пространств

3.1	Теорема о базисе.....	54
3.2	Случай основной группы типа A_{2n}	58
3.2.1	Общая формула.....	58
3.2.2	Вычисление для подгруппы типа $C_k \oplus B_{n-k}$	59
3.3	Случай основной группы типа A_{2n-1}	60
3.3.1	Общая формула.....	60
3.3.2	Вычисление для подгруппы типа $D_k \oplus C_{n-k}$	61

3.4	Случай основной группы типа D_{n+1}	62
3.4.1	Общая формула.....	62
3.4.2	Вычисление для подгруппы типа $B_k \doteq B_{n-k}$	62
3.5	Случай основной группы типа D_4	63
3.5.1	Общая формула.....	63
3.5.2	Вычисления	64
3.6	Случай основной группы типа E_6	66
3.6.1	Общая формула.....	66
3.6.2	Вычисления	68

4 Характеристические классы Понтрягина обобщенных симметрических пространств

4.1	Полный класс Понтрягина однородного пространства.....	81
4.2	Вычисления классов Понтрягина обобщенных симметрических пространств второй категории	83

Список литературы

92

Введение

Диссертация посвящена обобщенным симметрическим пространствам конечного порядка с простыми компактными основными группами Ли. описанию их алгебр когомологий и характеристических классов Понтрягина. Существуют различные обобщения симметрических пространств. Первые обобщенные симметрические пространства появились в работах П. К. Рашевского. Номидзу назвал эти пространства редуктивными однородными пространствами и получил для них ряд существенных результатов.

Другие обобщения симметрических пространств связаны с отказом от некоторых свойств симметрии s_x или автоморфизма ϕ , участвующих в определении симметрического пространства. Наиболее изучены четыре вида таких обобщений.

- 1) Субсимметрические пространства — не требуется изолированность неподвижной точки;
 - 2) пространства с отражениями — не требуется изолированность неподвижной точки в определении Лооса симметрического пространства;
 - 3) s — многообразия — не требуется условие инволютивности;
- Ковальский [6] получил ряд результатов, касающихся римановых s — многообразий. Показано, что риманово многообразие, допускающее регулярную s — структуру, допускает также регулярную s — структуру конечного порядка. Ставится проблема классификации всех римановых многообразий, допускающих s — структуры и для односвязных многообразий строится алгебраический эквивалент s — структуры. Дана полная классификация односвязных римановых многообразий размерности $n \leq 5$, допускающих s — структуры.
- 4) периодические пространства.

Понятие периодического пространства впервые появилось в работах В.И. Ведерникова. Впоследствии эти пространства с различных точек зрения и под разными названиями изучали П. А. Степанов, Вольф и Грей, А. С. Феденко и др. Определение периодического пространства естественно обобщает понятие симметрического однородного пространства: однородное пространство G/U связной группы Ли называется периодическим пространством, если существует автоморфизм ϕ группы Ли G такой, что $G_0^\phi \subset U \subset G^\phi$, где G^ϕ — группа всех ϕ — неподвижных точек, а G_0^ϕ — ее компонента единицы.

В настоящей диссертации под обобщенными симметрическими пространствами будем подразумевать периодические пространства конечного порядка.

Сначала естественно возникает задача описания (с точностью до сопряженности относительно автоморфизмов группы G) всех таких пространств для случая простой компактной группы Ли G . Этот вопрос равносильен проблеме классификации всех автоморфизмов конечного порядка соответствующей группы.

До появления статьи [16] эта проблема была частично решена с помощью применения различных техник. В работе Вольфа-Грея [21] получена каноническая форма для внутренних автоморфизмов ϕ компактной алгебры Ли g , построена система простых корней подалгебры g^ϕ ϕ — неподвижных векторов и указан метод классификации всех автоморфизмов алгебры g , имеющих фиксированный конечный порядок. Используя эти результаты авторы перечисляют подалгебры неподвижных точек автоморфизмов 3-го порядка и подалгебры неподвижных точек внутренних автоморфизмов, не являющихся централизаторами тором. Однако, полученные результаты не дают ни классификации всех автоморфизмов (скажем, конечного порядка), ни классификации подалгебр неподвижных точек всех автоморфизмов. Отметим также, что в работах А. С. Феденка [22] приведена часть классификации, с точностью до изоморфизма, подалгебр неподвижных точек внутренних автоморфизмов особых алгебр Ли и матричное изложение аналогичной классификации для классических групп. Полный обзор всех результатов касающихся различных обобщений симметрических пространств приведен в работе [19].

В статье [16] Кац разработал способ, который позволяет полностью классифицировать все автоморфизмы конечного порядка полупростых алгебр Ли. В его основе лежит развитие теории весов для естественного представления алгебры g в бесконечномерные алгебры $L(g, \Theta)$. Подробное изложение соответствующих результатов дано им в книге [3].

Напомним, что в книге [8] приведен иной подход к описанию полупростых автоморфизмов, который существенно отличается от доказательства Каца и восходит к работе Ф. Р. Гантмахера [20].

В настоящей работе, следуя классификации Каца и развитой им теории, мы перечислим все обобщенные симметрические пространства.

При нахождении кохомологий естественно возникает идея применить теорему Картана, которая утверждает, что алгебра кохомологий одно-

родного пространства G/U над полем вещественных чисел есть алгебра когомологий алгебры $H^*(B_U, R) \supseteq H^*(G, R)$ относительно дифференциала, надлежащим образом определяемого трансгрессией в E_G и отображением $\rho^*(U, G)$. Далее, согласно теореме Хопфа, алгебра когомологий $H^*(G, R)$ является внешней алгеброй, порожденной элементами нечетных степеней, а согласно теореме Картана-Шевалле алгебра когомологий $H^*(B_U, R)$ изоморфна алгебре многочленов на картановской подалгебре группы U инвариантных относительно действия группы Вейля. Это означает, что в случае простых компактных групп Ли, алгебру Картана можно считать известной.

Однако получение явных формул, т.е. явное вычисление алгебр когомологий конкретного однородного пространства является довольно трудной проблемой. Основная трудность здесь состоит в том, чтобы явно описать базис картановской подалгебры подгруппы через базис картановской подалгебры группы. Более точно, ситуация выглядит следующим образом. В алгебре Картана дифференциал определяется отображением $\rho^*(U, G)$. Для этого отображения (в случае вещественных коэффициентов) известно, что оно действует следующим способом: каждому многочлену из $H^*(B_G, R)$ ставит в соответствие многочлен в $H^*(B_U, R)$ являющийся его сужением на картановскую подалгебру подгруппы U . Значит, дифференциал $\rho^*(U, G)$ может быть описан только после того, как получена соответствующая информация о картановской подалгебре подгруппы U .

В случае однородного пространства первой категории, т.е. когда $\text{rank } G = \text{rank } U$, картановские подалгебры группы и подгруппы совпадают (с точностью до сопряженности внутренним автоморфизмом) и задача явного вычисления дифференциала $\rho^*(U, G)$ сводится к следующему: выразить образующие алгебры $H^*(B_G, R)$ через канонические координаты подгруппы U . В этом случае отображение $\rho^*(U, G)$ является мономорфизмом и поэтому задачу нахождения когомологий этих пространств можно считать решенной.

Трудности возникают в случае однородных пространств второй категории, т.е. когда $\text{rank } U < \text{rank } G$. В этой ситуации появляются следующие проблемы.

Первая: восстановить связь между картановскими подалгебрами группы G и подгруппы U , т.е. выразить базис картановской подалгебры для U через базис картановской подалгебры для G .

Вторая: в предположении, что имеется требуемая связь между базисам, описать ядро дифференциала $\rho^*(U, G)$.

В настоящей работе эти проблемы решены для случая обобщенных симметрических пространств с простыми компактными основными группами Ли. Во первых, пользуясь теорией накрывающих алгебр, развитой Кацом при решении проблемы классификации автоморфизмов конечного порядка, в работе дано явное выражение картановского базиса подгруппы через картановский базис группы. Установленная связь дала возможность описать действие отображения $\rho^*(U, G)$ в случае обобщенных симметрических пространств, причем оказалось, что все они являются однородными пространствами "нормального положения".

Что касается второго вопроса, в предположении, что рассматриваются однородные пространства "нормального положения", доказано, что теорема Картана получает реализуемый вид, т.е. можно дать явное описание ядра дифференциала $\rho^*(U, G)$. Таким образом, полностью решена задача нахождения алгебр когомологий обобщенных симметрических пространств.

Описание картановской подалгебры стационарной подгруппы позволяет сразу вычислить классы Понтрягина с вещественными коэффициентами обобщенных симметрических пространств. Точнее, в статье [12] разработан способ нахождения вещественных классов Понтрягина однородных пространств. При этом получено, что полный класс Понтрягина однородного пространства G/U можно описать через дополняющие корни группы G относительно подгруппы U . Но, так как корни группы G относительно любого тора S получаются сужением корней группы G на подалгебру s , нам необходимо выявить связь между картановской подалгеброй группы G и подалгеброй s . Как уже сказано, в настоящей работе эта проблема решена для случая обобщенных симметрических пространств, что дало возможность вычислить их классы Понтрягина.

В главе 1 приведены некоторые основные факты, которыми мы будем пользоваться. Кроме того, описан способ Каца классификации автоморфизмов конечного порядка, который одновременно дает и классификацию обобщенных симметрических пространств. Таким образом, перечислены все обобщенные симметрические пространства.

В главе 2 приведена формулировка и обсуждение теоремы Картана. Получена явная формула описывающая когомологии однородного пространства нормального положения.

В главе 3 созданы условия для применения теоремы Картана в случае обобщенных симметрических пространств и получено явное описание их когомологий для случая пространств второй категории.

В главе 4 описаны классы Понтрягина рассматриваемых пространств.

Результаты диссертации опубликованы в работах [26], [27] и [28].

Автор благодарит профессора Ю. П. Соловьева за постановку задачи, постоянную внимательность к работе и оказанную большую помощь во время обучения в МГУ им. М. В. Ломоносова.

Москва, 1998

Глава 1

Обобщенные симметрические пространства и их классификация

1.1 Предварительные сведения

1.1.1 Группы и алгебры Ли

В этом параграфе мы формулируем некоторые понятия и факты, связанные с группами и алгебрами Ли.

Напомним, что мы называем тором любую связную компактную абелеву группу Ли. Наиболее важны максимальные торы связной компактной группы Ли G . Подалгебры касательной алгебры $\mathfrak{g}$ группы G , соответствующие максимальным торам группы G — это в точности максимальные коммутативные подалгебры.

Пусть G — связная компактная группа Ли и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Если T — тор в G , то он действует на пространстве $\mathfrak{g}$ при помощи представления $T \in G \xrightarrow{Ad} \text{Aut } \mathfrak{g}$.

Так как G компактна, на $\mathfrak{g}$ можно выбрать положительно определенную форму инвариантную относительно G , а следовательно, и относительно T . Тогда пространство $\mathfrak{g}$ расщепляется на ортогональные неприводимые T — пространства размерности 1 и 2. В T — пространствах размерности 1 группа T действует тривиально. В каждом неприводимом T — пространстве размерности 2 можно выбрать ортонормальный базис и рассмотреть представление $T \rightarrow SO(2)$ (см. [1]).

Определение 1.1.1 Целочисленной решеткой в T называется множество $\exp^{-1}(\epsilon)$, где $\exp: t \rightarrow T$ — экспоненциальное отображение.

Лемма 1.1.1 Пространство $\mathfrak{g}$ как T — пространство, расщепляется в прямую сумму вида $V_0 \oplus \sum_{i=1}^n V_i$, где T тривиально действует на V_0 , $\dim V_i = 2$ для $i \geq 1$ и действие тора T на V_i задается вращением на угол $2\pi a_i(t)$. Здесь $a_i: T \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ определяется линейной формой $a_i: t \rightarrow \mathbb{R}$.

принимаящие целые значения на целочисленной решетке, и все формы a_i — ненулевые.

Формы $\pm a_i$ называются корнями группы G относительно тора T . Если T — максимальный тор, то формы $\pm a_i$ называются корнями группы G .

Замечание: Если T — максимальный тор и $S \subset T$ любой тор группы G , то корни группы G относительно тора S получаются сужением корней группы G на пространство s который являются ненулевыми на s .

Если обозначим через $\Delta_G = \Phi_{Ad} \setminus \{0\}$ множество всех корней то следует разложение

$$g(C) = t(C) \bigoplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta_G} g(C)_\alpha \right),$$

которое называется корневым разложением. На самом деле корни (рассматриваемые как линейные формы на t) полностью определяются алгеброй Ли g .

Пусть T — максимальный тор компактной группы Ли G . Рассмотрим евклидовы пространства $F = it$ и $E = F^*$ и систему корней $\Delta_G \in E$. Любой $\alpha \in \Delta_G$ определяет в F гиперплоскость $P_\alpha = \text{Ker } \alpha$. Связные компоненты множества $F \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta_G} P_\alpha$ называются камерами Вейля. Фиксируем камеру Вейля $C \subset F$. Корень $\alpha \in \Delta_G$ называется положительным (относительно C), если $\alpha(x) > 0$ для всех $x \in C$, и отрицательным, если $\alpha(x) < 0$ для всех $x \in C$. Тогда $\Delta_G = \Delta_{G+} \cup \Delta_{G-}$, где Δ_{G+} и Δ_{G-} — множества положительных и отрицательных корней. Корень $\alpha \in \Delta_{G+}$ называется простым, если $\alpha \neq \beta + \gamma$, где $\beta, \gamma \in \Delta_{G+}$. Пусть Π — система всех простых корней. Оказывается [8], что для любой камеры Вейля C соответствующая система Π обладает следующими свойствами: Π линейно независима и любой $\alpha \in \Delta_G$ представляется в виде

$$\alpha = \sum_{\gamma \in \Pi} a_\gamma \gamma,$$

где $a_\gamma \in \mathbb{Z}$, причем либо все $a_\gamma \geq 0$, либо все $a_\gamma \leq 0$.

Известно, что для каждого корня α , g_α является одномерным пространством. Пусть e_α — ненулевой вектор из $g(C)_\alpha$, $\alpha \in \Delta_G$. Тогда $e_{-\alpha} = \bar{e}_\alpha \in g(C)_{-\alpha}$. Умножая e_α на ненулевое действительное число, мы

можем добиться того, что $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$, где

$$h_\alpha = \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \check{\alpha}.$$

Система векторов $e_\alpha, e_{-\alpha}, h_\alpha$, где $\alpha \in \Pi$, порождает алгебру g . Векторы $e_\alpha, e_{-\alpha}, h_\alpha$ называются *образующими Шевалле* алгебры g .

Для каждого $\alpha \in \Delta_G$ обозначим через r_α ортогональное отражение в гиперплоскости P_α пространства F ; оно выражается формулой

$$r_\alpha(x) = x - \alpha(x)h_\alpha \quad (x \in F).$$

Группа ортогональных преобразований пространства F , порожденная всеми $r_\alpha, \alpha \in \Delta_G$, называется *группой Вейля* группы G и обозначается W_G .

Пусть теперь группа G разложена в локально прямое произведение $G = G_1 G_2$, где G_j — связные нормальные подгруппы Ли группы G . Тогда

$g = g_1 \oplus g_2$ и $g(C) = g_1(C) \oplus g_2(C)$. Пусть T_j — максимальный тор в G_j . Тогда $T = T_1 T_2$ — максимальный тор в G и $F = it = F_1 \oplus F_2$, где $F_j = it_j$ ($j = 1, 2$). Это разложение порождает разложение $F^* = E = E_1 \oplus E_2$, где E_j естественно изоморфно пространству F_j^* ($j = 1, 2$). В этой ситуации $\Delta_G = \Delta_{G_1} \cup \Delta_{G_2}$, причем $(\alpha, \beta) = 0$ для любых $\alpha \in \Delta_{G_1}, \beta \in \Delta_{G_2}$ (см. [8]).

Схемы Дынкина и классификация компактных алгебр Ли

Пусть E — евклидово пространство со скалярным умножением (α, β) . Введем обозначение

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \quad (\alpha, \beta \in E, \beta \neq 0).$$

Систему ненулевых векторов $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$ в E будем называть допустимой, если $a_{ij} = \langle \gamma_i | \gamma_j \rangle$ — неположительное целое число для любых $i \neq j$. Положим $m_{ij} = a_{ij} a_{ji} = 4 \cos^2 \theta_{ij}$, где θ_{ij} угол между γ_i и γ_j . Допустимую систему векторов можно изобразить с помощью графа, который называется *схемой Дынкина* системы Γ . Эта система строится следующим образом:

1. каждому вектору γ_i сопоставляется вершина схемы;
2. i -я вершина соединяется с j -й ($i \neq j$) ребром кратности m_{ij} ;

3. если $|a_{ij}| \leq |a_{ji}|$, то соответствующее ребро ориентируется стрелкой, направленной от j -й вершины к i -й.

Предположим теперь, что $E = it^*$, где T — максимальный тор компактной группы Ли G . Система простых корней $\Pi \in \Delta_G$ допустимая. Схема Дынкина системы Π называется *схемой Дынкина группы G* . Эта схема не зависит от выбора максимального тора и системы простых корней Π . На самом деле числа $\langle \alpha | \beta \rangle$ ($\alpha, \beta \in \Delta_G$) не зависят от выбора инвариантной формы $(\cdot, \cdot)$ и полностью определяются алгеброй Ли g . Это позволяет говорить о *схеме Дынкина компактной алгебры Ли*. Имеет место следующая теорема которая классификацию простых компактных алгебр Ли сводит к классификации соответствующих схем Дынкина, которую можно провести средствами евклидовой геометрии ([8]):

Теорема 1.1.1 *Две полупростые компактные алгебры Ли изоморфны тогда и только тогда, когда их схемы Дынкина изоморфны.*

Окончательная теорема классификации имеет следующий вид ([8]):

Теорема 1.1.2 *Любая простая компактная некоммутативная алгебра Ли изоморфна в точности одной из следующих алгебр: A_n , B_n ($n > 1$), C_n ($n > 2$), D_n ($n > 3$), E_l ($l = 6, 7, 8$), F_4 и G_2 .*

Алгебры Ли A_n , B_n ($n > 1$), C_n ($n > 2$), D_n ($n > 3$) называются *классическими* компактными алгебрами Ли. Алгебры Ли E_l ($l = 6, 7, 8$), F_4 и G_2 называются *особыми* компактными алгебрами Ли.

Матрица с элементами (a_{ij}) называется матрицей Картана простой компактной алгебры Ли g .

Определение 1.1.2 *Автоморфизмом диаграммы Дынкина называется перестановка σ ее вершин сохраняющая кратность и ориентацию ребер.*

В дальнейшем для нас имеет особенную важность следующая ([3]) теорема:

Теорема 1.1.3 *Группа автоморфизмов диаграммы Дынкина простой компактной алгебры Ли имеет следующий вид:*

- (1) Z_1 в случае алгебр типа $A_1, B_l, C_l, E_7, E_8, F_4$ и G_2 :

(2) Z_2 в случае алгебр типа A_l ($l \geq 2$), D_l ($l > 4$) и E_6 ;

(3) σ_3 в случае алгебры D_4 ;

где Z_m обозначает циклическую группу порядка m , а σ_3 представляет группу перестановок от трех элементов.

1.1.2 Вещественные когомологии и характеристические классы Понтрягина

Напомним некоторые стандартные определения гомологической алгебры.

Коцепным (соответственно *цепным*) *комплексом* называется градуированное векторное пространство $C = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C_i$, снабженное линейным оператором d степени 1 (соответственно -1), таким, что $d^2 = 0$. Оператор d называется *кограничным* (соответственно *граничным*) *оператором*. С комплексом (C, d) связывается градуированное подпространство *коциклов* (*циклов*) $Z(C) = \text{Ker } d \subset C$ и градуированное подпространство *кограниц* (*границ*) $dC = \text{Im } d \subset Z(C)$. Градуированное векторное пространство $H(C) = Z(C)/dC$ называется *пространством когомологий* (*гомологий*) *комплекса* C . Пространства коциклов и когомологий (соответственно циклов и гомологий) степени p обозначаются следующим образом:

$$Z^p(C) = Z(C) \cap C_p, \quad H^p(C) = Z^p(C)/dC_{p-1}$$

для коцепного комплекса.

$$Z_p(C) = Z(C) \cap C_p, \quad H_p(C) = Z_p(C)/dC_{p+1}$$

для цепного комплекса.

Дифференциальной градуированной алгеброй называется коцепной комплекс (A, d) , такой, что в A определена структура градуированной алгебры и $d \in (\text{deg } A)$. В этом случае $H(A)$ — ассоциативная и коммутативная градуированная алгебра и $H^p(A) = 0$ для $p < 0$. Алгебра $H(A)$ называется *алгеброй когомологий* дифференциальной градуированной алгебры (A, d) .

Пусть M — гладкое многообразие, $A(M)$ — алгебра внешних дифференциальных форм (класса C^∞) на M , $d: A(M) \rightarrow A(M)$ — внешний

дифференциал. Как известно d отображает $A_p(M)$ в $A_{p+1}(M)$ и задается на $\omega \in A_p(M)$ формулой

$$(d\omega)(v_0, \dots, v_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i v_i(\omega(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p)) + \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} \omega([v_i, v_j], v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_p),$$

где $v_i \in V(M)$. Проверяется, что $(A(M), d)$ — градуированная дифференциальная алгебра над $\mathbb{R}$. Ее алгебра когомологий $H(A(M))$ называется алгеброй вещественных когомологий многообразия M и обозначается $H(M, \mathbb{R})$.

Многообразие M называется многообразием конечного типа, если $\dim H^i(M, \mathbb{R}) < \infty$ для всех i . Числа $b_i(M) = \dim H^i(M, \mathbb{R})$ называются при этом числами Бетти, многочлен

$$p(M, t) = p(H(M, \mathbb{R}), t) = \sum_{i \geq 0} b_i(M) t^i$$

— многочленом Пуанкаре.

Для определения классов Понтрягина нам понадобится понятие расслоенного пространства.

Определение 1.1.3 Пусть G — топологическая группа, эффективно действующая на пространстве F слева. Сюръективное отображение $\pi: E \rightarrow B$ топологических пространств называется расслоенным пространством со слоем F и структурной группой G , если B имеет такое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$, что имеют место сохраняющие слои гомеоморфизмы

$$\phi_\alpha: E/U_\alpha \rightarrow U_\alpha \times F$$

и функции перехода являются непрерывными функциями со значениями в G :

$$g_{\alpha\beta}(x) = \phi_\alpha \phi_\beta^{-1} / \{x\} \times F \in G.$$

Иногда расслоенным пространством называют пространство расслоения E . Расслоенное пространство со структурной группой G называется также G — расслоением. Если $x \in B$, множество $E_x = \pi^{-1}(x)$ называется слоем над x .

Напомним, что векторное расслоение ранга n является расслоенным пространством со слоем $\mathbb{R}^n$ и структурной группой $GL(n, \mathbb{R})$. Если слоем является пространство $\mathbb{C}^n$, а структурной группой — группа $GL(n, \mathbb{C})$ векторное расслоение называется *комплексным векторным расслоением*.

Определим классы Понтрягина вещественного расслоения исходя из определения классов Черна соответствующего комплексного векторного расслоения.

Пусть E — вещественное векторное расслоение над многообразием M со слоем $\mathbb{R}^q$. Комплексификация E^c для E есть комплексное векторное расслоение над M со слоем $\mathbb{C}^q$, полученное комплексифицированием каждого слоя из E . В книге [18] классы Черна в категории комплексных векторных расслоений над дифференцируемыми многообразиями определены аксиоматически, т.е. $c_i(E)$ являются элементами когомологической группы $H^{2i}(M, \mathbb{R})$ удовлетворяющими четырем аксиомам.

Тогда k -й класс Понтрягина $p_k(E)$ для E определяется так:

$$p_k(E) = (-1)^k c_{2k}(E^c) \in H^{4k}(M, \mathbb{R}).$$

Тотальный класс Понтрягина $p(E)$ определяется как

$$p(E) = 1 + p_1(E) + p_2(E) + \dots \in H^*(M, \mathbb{R}).$$

Вычисление классов Черна основано на принципе разложения, который, грубо говоря, утверждает, что если полиномиальное тождество для классов Черна выполнено для прямой суммы линейных расслоений, то оно выполнено и для произвольных векторных расслоений.

Принцип разложения: Пусть $\tau: \xi \rightarrow M$ — комплексное C^∞ — гладкое векторное расслоение ранга n над многообразием M . Пространство $F(\xi)$ называется *расщепляющим* многообразием для ξ если существует отображение $\sigma: F(\xi) \rightarrow M$ такое, что:

- (1) обратный образ расслоения ξ над $F(\xi)$ расщепляется в прямую сумму линейных расслоений $\sigma^{-1}\xi = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$;
- (2) σ^* является инъекцией $H^*(M)$ в $H^*(F(\xi))$.

Для каждого расслоения ξ можно построить его ассоциированное флаговое расслоение $Fl(\xi)$. Расслоение $Fl(\xi)$ получается из ξ заменой каждого слоя ξ_p на многообразие $Fl(\xi_p)$ (т.е. на $GL(n, \mathbb{C})/H$, где H стабилизатор флага, т.е. группа верхних треугольных матриц). Локальная

тривиализация $\phi_\alpha : E/U_\alpha \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ индуцирует естественную тривиализацию

$$Fl(\xi)/U_\alpha \rightarrow U_\alpha \times Fl(\mathbb{C}^n).$$

Таким образом, $Fl(\xi)$ является многообразием (не и векторным расслоением).

В книге [14] показано, что расщепляющее многообразие эквивалентно многообразию флагов.

1.2 Основные свойства обобщенных симметрических пространств

В обозначениях и терминологии, касающихся обобщенных симметрических пространств, мы следуем [6].

Определение 1.2.1 *Обобщенное симметрическое пространство — это тройка (G, U, Θ) , где G — связная группа Ли, U — ее замкнутая подгруппа и Θ — автоморфизм группы G , такие что*

$$G_0^\Theta \subseteq U \subseteq G^\Theta,$$

где $G^\Theta = \{g \in G : \Theta(g) = g\}$ и G_0^Θ — компонента единицы группы G^Θ .

Говорят, что обобщенное симметрическое пространство (G, U, Θ) имеет порядок k , если $\Theta^k = i_d$ и k есть наименьшее целое положительное число, обладающее таким свойством. Тогда тройка (G, U, Θ) называется обобщенным симметрическим пространством порядка k (или просто конечного порядка).

Видно, что в случае $k = 2$ получаются симметрические пространства.

Примеры:

(а) Пусть G представляет группу всех матриц вида

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} e^{-z} & 0 & x \\ 0 & e^z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

а Θ автоморфизм группы G вида

$$\Theta : x' = -y, \quad y' = x, \quad z' = -z.$$

Аutomорфизм Θ имеет порядок 4 и подгруппа стационарных точек состоит из единичной матрицы, т. е. (G, E, Θ) является обобщенным симметрическим пространством порядка 4.

(б)

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$ad - bc = 1$, а Θ автоморфизм группы G вида

$$a' = \frac{1}{4}a + \frac{\sqrt{3}}{4}b + \frac{\sqrt{3}}{4}c + \frac{3}{4}d, \quad b' = -\frac{\sqrt{3}}{4}a + \frac{1}{4}b - \frac{3}{4}c + \frac{\sqrt{3}}{4}d,$$

$$c' = -\frac{\sqrt{3}}{4}a + \frac{3}{4}b + \frac{1}{4}c + \frac{\sqrt{3}}{4}d, \quad d' = \frac{3}{4}a - \frac{\sqrt{3}}{4}b - \frac{\sqrt{3}}{4}c + \frac{1}{4}d,$$

$$e' = -\frac{1}{2}e - \frac{\sqrt{3}}{2}f, \quad f' = \frac{\sqrt{3}}{2}e - \frac{1}{2}f.$$

Аutomорфизм Θ имеет порядок 3 и подгруппа стационарных точек состоит из матриц вида

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

т.е. (G, H, Θ) является обобщенным симметрическим пространством порядка 3.

Напомним, что рассматриваемые пространства являются новыми в том смысле, что существует обобщенное симметрическое пространство не гомеоморфно никакому обычному симметрическому пространству. Точнее, в работе [23] Леджер и Петит показали, что $M = SU(3)/T^2$ является 3-симметрическим римановым многообразием не гомеоморфным симметрическому пространству. Впоследствии их теорема была значительно усилена Х. Хименесом [24] причем все получены результаты

относятся к пространствам положительной эйлеровой характеристики. Пример обобщенного симметрического пространства нулевой эйлеровой характеристики получен А. Е. Траллем в [25].

Обобщенное симметрическое пространство (G, U, Θ) будем называть пространством первой категории если $\text{rank } G = \text{rank } U$, а второй категории если $\text{rank } U < \text{rank } G$.

Изоморфизм обобщенного симметрического пространства (G, U, Θ) в обобщенное симметрическое пространство (G', U', Θ') есть изоморфизм α из G в G' такой, что $\alpha(U) = U'$ и что $\Theta' \circ \alpha = \alpha \circ \Theta$.

Можно определить инфинитезимальную версию обобщенного симметрического пространства. *Обобщенная симметрическая алгебра* есть тройка (g, h, Θ) , состоящая из алгебры Ли g , подалгебры h из g и автоморфизма конечного порядка Θ для g такого, что h состоит из всех элементов в g , неподвижных при действии Θ .

Каждое обобщенное симметрическое пространство (G, U, Θ) порождает обобщенную симметрическую алгебру (g, h, Θ) естественным образом: g и h при этом являются алгебрами для G и U соответственно, а автоморфизм Θ для g индуцируется автоморфизмом Θ для G .

Обратную связь позволяют установить следующие теоремы ([8]).

Теорема 1.2.1 Пусть G, U — связные группы Ли, причем группа G односвязная. Тогда для всякого гомоморфизма $\varphi : g \rightarrow h$ существует такой гомоморфизм $f : G \rightarrow U$, что $df = \varphi$.

Теорема 1.2.2 Пусть g — конечномерная алгебра Ли (над полем $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$). Тогда существует односвязная группа Ли (соответственно комплексная или вещественная), касательная алгебра которой изоморфна g .

Значит, если (g, h, Θ) — обобщенная симметрическая алгебра Ли и если G — связная односвязная группа Ли с алгеброй Ли g , то автоморфизм Θ для g индуцирует автоморфизм Θ для G и для любой подгруппы U , лежащей между G^Θ и компонентой единицы для G , тройка (G, U, Θ) есть обобщенное симметрическое пространство.

Таким образом, существует естественное взаимно однозначное соответствие между обобщенными симметрическими алгебрами Ли (g, h, Θ) и обобщенными симметрическими пространствами (G, U, Θ) с односвязной G и связной U .

Условие, что автоморфизм Θ является автоморфизмом конечного порядка, дает некоторые упрощения.

Во первых, всякий автоморфизм Θ конечного порядка группы Ли G является полупростым (т. е. соответствующий автоморфизм $d\Theta$ является полупростым).

Во вторых, имеет место следующая ([8]) теорема:

Теорема 1.2.3 *Если Θ — полупростой автоморфизм односвязной полупростой группы Ли G , то подгруппа G^Θ связна.*

Значит, обобщенные симметрические пространства конечного порядка односвязной полупростой группы Ли G имеют вид (G, G^Θ, Θ) и согласно ранее сказанному, они изоморфны обобщенными симметрическими алгебрами (g, g^Θ, Θ) конечного порядка.

Приведем еще некоторые результаты которые касаются существования "соответствующее" связности на обобщенном симметрическом пространстве, т. е. описания их тензоров кривизны и кручения.

Известно, что связное аффинное многообразие (M, ∇) называется аффинным симметрическим, если каждая точка $p \in M$ является изолированной неподвижной точкой некоторого инволютивного аффинного автоморфизма s_p многообразия (M, ∇) (при этом s_p называется симметрией в точке p). Если R и T обозначить тензоры кривизны и кручения этого многообразия, то имеется $\nabla R = 0$ и $T = 0$ ([9]). Более того, полные односвязные аффинные симметрические пространства характеризуются этими соотношениями.

Кроме того, всякое односвязное многообразие M с полной связностью такой, что $\nabla R = 0$ и $T = 0$, порождает симметрическое пространство (G, U, Θ) такое, что $M = G/U$. Надо просто положить $M = G/G_0$, где G — компонента единицы группы $U(M)$ (аффинных преобразований для M), а G_0 — подгруппа изотропии группы G . При этом, связность, заданная на M , совпадает с канонической связностью [9] однородного пространства.

Имеет место и обратно, если (G, U, Θ) — симметрическое пространство, то соответствующее однородное пространство допускает инвариантную связность с $\nabla R = 0$ и $T = 0$.

Что касается обобщенных симметрических пространств, то вряд ли для них можно найти простое описание в терминах тензоров кривизны

и кручения.

Но, если нам задана конкретная регулярная s -структура $\{s_x\}$ на римановом многообразии (M, g) (т. е. семейство изометрии $\{s_x\}$, $x \in M$ с изолированной неподвижной точкой x удовлетворяющее условию $s_x \circ s_y = s_z \circ s_x$, $z = s_x(y)$ для любых двух точек $x, y \in M$) то можно построить так называемую каноническую связность этой s -структуры. Она и будет обладать искомыми простыми характеристическими свойствами.

Поэтому, соответствующая теория в случае обобщенных симметрических пространств развита следуя Лоозу и его определению симметрического пространства.

Определим симметрическое пространство как многообразие M с дифференцируемым умножением $\mu : M \times M \rightarrow M$ ($\mu(x, y) = x \cdot y$), обладающим следующими свойствами:

1. $x \cdot x = x$

2. $x \cdot (x \cdot y) = y$

3. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z)$

4. каждая точка x имеет окрестность U , такую что из $x \cdot y = y$ следует $y = x$ для всех $y \in U$.

Для каждого $x \in M$ отображение $s_x : M \rightarrow M$, задаваемое формулой $s_x(y) = x \cdot y$, называется симметрией в точке x .

Главный результат теории симметрических пространствах в смысле Лооза состоит в следующем:

Теорема 1.2.4 Каждое симметрическое пространство (M, μ) допускает единственную аффинную связность ∇ , называемую канонической связностью, которая инвариантна относительно всех симметрий s_x . Связность ∇ полна и удовлетворяет условиям $T = 0$ и $\nabla R = 0$. Кроме того, если M связно, то аффинное многообразие (M, ∇) есть обычное аффинное симметрическое пространство и симметрии s_x , $x \in M$, суть обычные геодезические симметрии.

Определение 1.2.2 Регулярное s -многообразие — это многообразие M с дифференцируемым умножением $\mu : M \times M \rightarrow M$, такое, что

отображения $s_x : M \rightarrow M, x \in M$, задаваемые правилом $s_x(y) = x \cdot y (= \mu(x, y))$, удовлетворяют следующим аксиомам

1. $s_x = x$;
2. каждое s_x есть диффеоморфизм;
3. $s_x \circ s_y = s_z \circ s_x$, где $z = s_x(y)$;
4. для каждого $x \in M$ касательное отображение $(s_x)_{*x} : T_x(M) \rightarrow T_x(M)$ не имеет других неподвижных векторов, кроме нулевого.

Тогда имеет место аналог теореме 1.2.4.

Теорема 1.2.5 Пусть (M, μ) — связное регулярное s -многообразие с симметриями $s_x, x \in M$. Обозначим через S тензорное поле типа $(1, 1)$, задаваемое формулой $S_x = (s_x)_{*x}$ для всех $x \in M$.

- (А) Существует единственная связность $\tilde{\nabla}$ на многообразии M (называемая канонической связностью), инвариантная относительно всех s_x и удовлетворяющая соотношению $\tilde{\nabla}(S) = 0$. Связность $\tilde{\nabla}$ полна и имеет параллельную кривизну и параллельное кручение.
- (Б) Группа $\text{Aut}(M)$ всех автоморфизмов многообразия (M, μ) есть транзитивная группа Ли преобразований, являющаяся замкнутой подгруппой группы всех аффинных преобразований $A(M)$ относительно связности $\tilde{\nabla}$.
- (В) Пусть G обозначает компоненту единицы в группе $\text{Aut}(M)$, 0 — фиксированная точка многообразия M и G_0 — соответствующая группа изотропии. Тогда однородное пространство редуктивно (каноническим образом) и после стандартного отождествления $G/G_0 \cong M$ связность $\tilde{\nabla}$ совпадает с канонической связностью пространства G/G_0 .

1.3 Классификация обобщенных симметрических пространств с простыми компактными основными группами Ли

Чтобы вычислить когомологии и классы Понтрягина обобщенных симметрических пространств с простыми компактными основными группами Ли, дадим их классификацию, т.е. отметим все классы (G, G^Θ, Θ) неизоморфных пространств порожденных автоморфизмами конечного порядка группы G .

Напомним, что в дальнейшем все обобщенные симметрические пространства будем считать с простыми компактными основными группами Ли.

Учитывая взаимно однозначное соответствие между обобщенными симметрическими пространствами и обобщенными симметрическими алгебрами, в дальнейшем, мы будем иметь дело с обобщенными симметрическими алгебрами.

Проблема классификации обобщенных симметрических пространств сводится к проблеме классификации автоморфизмов конечного порядка простых алгебр Ли с точностью до сопряженности в группе $\text{Aut}(g)$. Предположим, что заданы два автоморфизма Φ_1 и Φ_2 алгебры g , сопряженные в группе $\text{Aut}(g)$, т.е.

$$\Phi_2 = \Phi \circ \Phi_1 \circ \Phi^{-1},$$

где $\Phi \in \text{Aut}(g)$. Тогда алгебры g^{Φ_1} и g^{Φ_2} связаны соотношением

$$g^{\Phi_2} = \Phi(g^{\Phi_1}).$$

Это означает, что пространства (g, g^{Φ_1}, Φ_1) и (g, g^{Φ_2}, Φ_2) изоморфны.

Главная идея которая используется для классификации, состоит в том, чтобы каждый автоморфизм Θ алгебры g выразить через автоморфизм ν этой алгебры, который индуцирован автоморфизмом диаграммы Дынкина.

Мы будем пользоваться способом описанным в книге [3].

1.3.1 Накрывающие алгебры и схемы Каца — Дынкина

Пусть g — простая компактная алгебра Ли и Θ — ее автоморфизм конечного порядка, т.е. $\Theta^m = \text{id}$. Пусть ϵ — примитивный корень единицы. Тогда все собственные значения автоморфизма Θ имеют вид ϵ^i ($i \in \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$) и, так как Θ является полупростым, имеет место прямая сумма

$$g = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_m} g_i,$$

где g_i — собственное подпространство, соответствующее собственному значению ϵ^i .

Каждому автоморфизму Θ алгебры g можно присоединить алгебру

$$L(g, \Theta) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} x^j g_{j \bmod m},$$

которая называется накрывающей алгеброй для g . Гомоморфизм $\phi : L(g, \Theta) \rightarrow g$, определенный как $\phi(x^k Y) = Y$, называется накрывающим гомоморфизмом ($Y \in g_{k \bmod m}$). Далее применим теорию весов для $L(g, \Theta)$ по аналогии с теорией корней для g , восстановим автоморфизм между $L(g, \Theta)$ и $L(g, \nu)$ и таким способом запишем автоморфизм Θ через автоморфизм ν . Пусть $\alpha \in \eta^*$ (η^* двойственен для η) и $i \in \mathbb{Z}_m$. Мы скажем что пара $\bar{\alpha} = (\alpha, i)$ представляет корень (для g относительно η), если соответствующее собственное пространство

$$g^{\bar{\alpha}} = \{X \in g_i : [H, X] = \alpha(H)X \text{ для } H \in \eta\}$$

непустое. Пусть $\bar{\Delta}$ — множество всех ненулевых корней и $\bar{\Delta}^0$ — множество всех корней вида $(0, i)$, $i \in \mathbb{Z}_m$. Тогда имеет место разложение:

$$g = \eta + \sum_{\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}} g^{\bar{\alpha}}, \quad \eta = g^{(0,0)}$$

$$\xi(\eta) = \sum_{\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}^0} g^{\bar{\alpha}},$$

$$g = \xi(\eta) + \sum_{\bar{\alpha} \in \bar{\Delta} \setminus \bar{\Delta}^0} g^{\bar{\alpha}}.$$

Теперь рассмотрим накрывающую алгебру $L(g, \Theta) = \bigoplus_{j \in Z} L_j$, где $L_j = x^j g_{j \bmod m}$. Можно отождествить L_0 с g_0 и дать определения, аналогичные определениям для g . Для $\alpha \in \eta^*$, $j \in Z$, пара $\bar{\alpha} = (\alpha, j)$ называется корнем (для $L(g, \Theta)$ относительно η), если пространство

$$L^{\bar{\alpha}} = \{X \in L_j : [H, X] = \alpha(H)X \text{ для } H \in \eta\}$$

непустое. Пусть $\tilde{\Delta}$ — множество ненулевых корней, и $\tilde{\Delta}_0$ — множество корней вида $(0, j)$, $j \in Z$. Тогда имеет место разложение:

$$L(g, \Theta) = \eta + \sum_{\bar{\alpha} \in \tilde{\Delta}} L^{\bar{\alpha}}.$$

Выберем базис системы корней Δ_0 для $[L_0, L_0]$ относительно $\eta \cap [L_0, L_0]$, и пусть Δ_0^+ представляет множество положительных корней. Если определить, что каждое $\alpha \in \Delta_0$ равно нулю на центре $Z(L_0)$, тогда α может рассматриваться как форма на η .

Если отождествить α с корнем $(\alpha, 0)$, то получим все корни вида $(\beta, 0)$. Множество

$$\tilde{\Delta}^+ = \Delta_0^+ \cup \{(\alpha, j) \in \tilde{\Delta} : j > 0\},$$

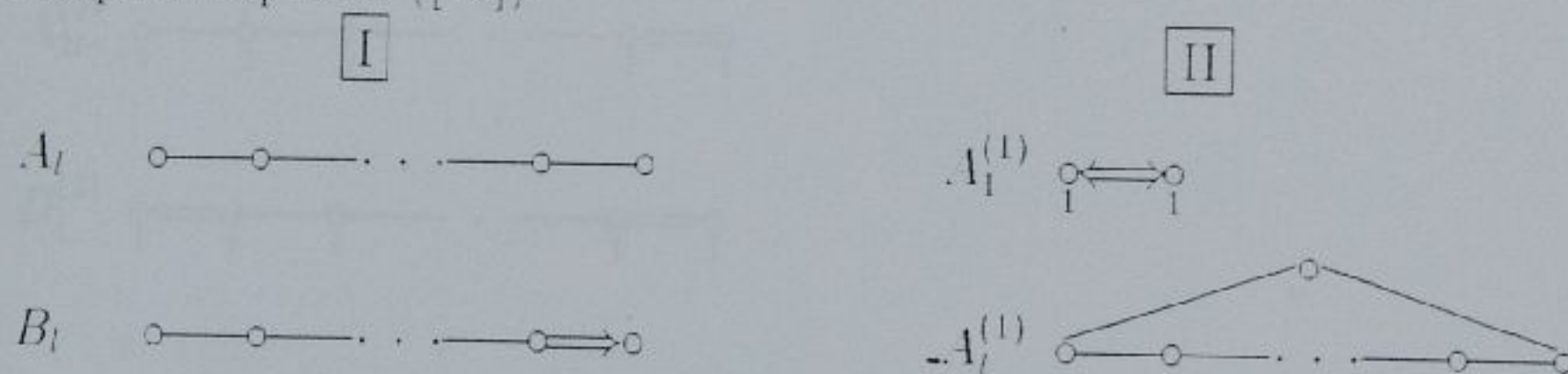
называется множеством положительных корней на $\tilde{\Delta}$. Пусть

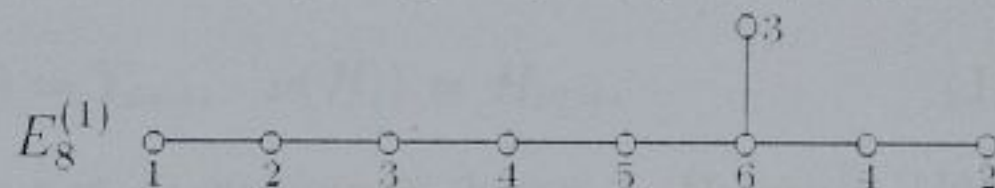
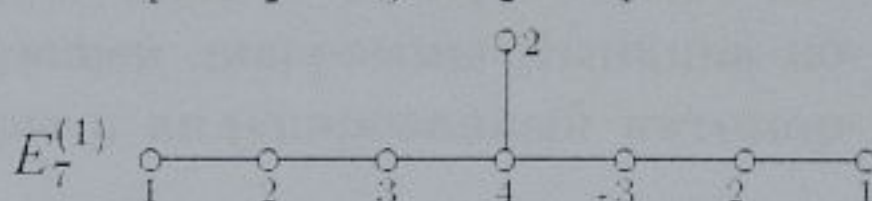
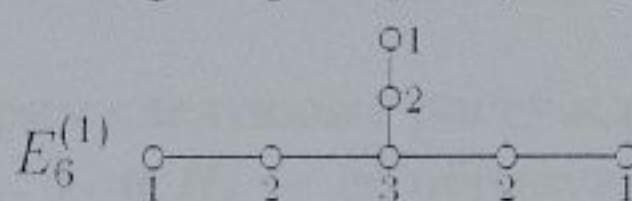
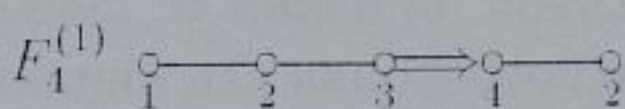
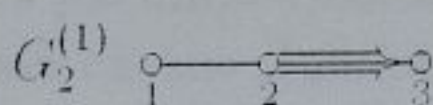
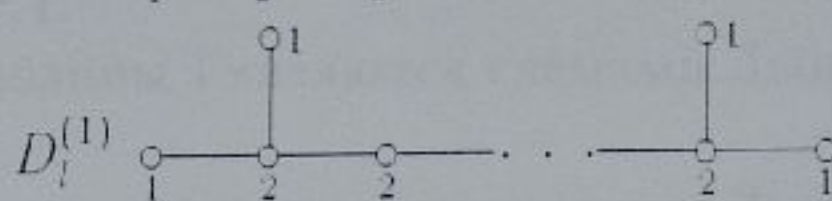
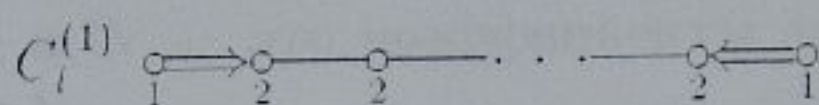
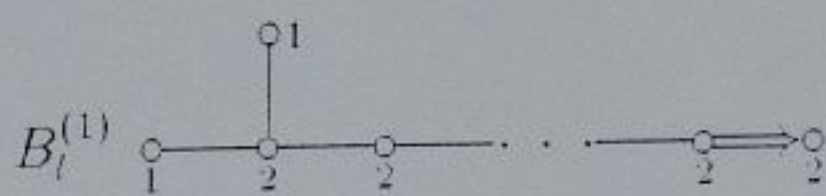
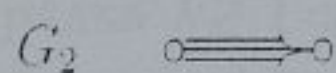
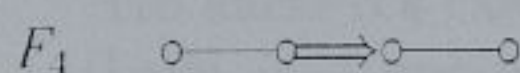
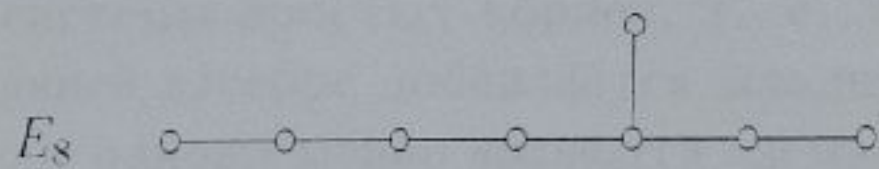
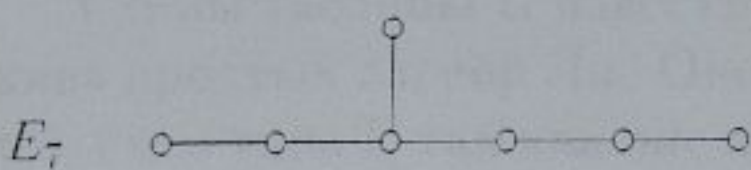
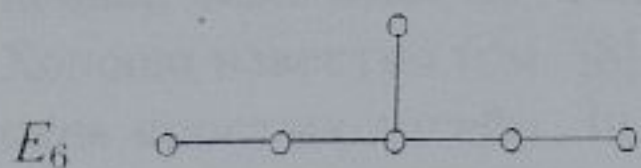
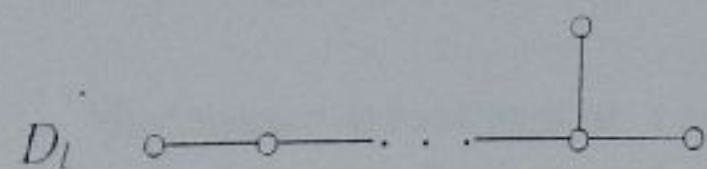
$\tilde{P} = \{(\alpha_0, s_0), (\alpha_1, s_1), \dots\}$ — система простых корней. Присоединенная матрица Картана имеет следующие свойства:

$$a) a_{ii} = 2, \quad б) a_{ij} \in -Z^+, \quad в) a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ji} = 0,$$

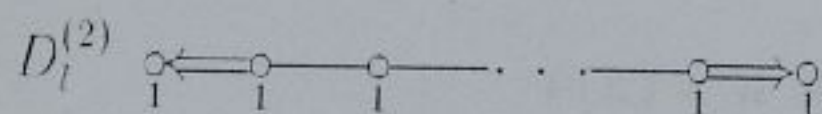
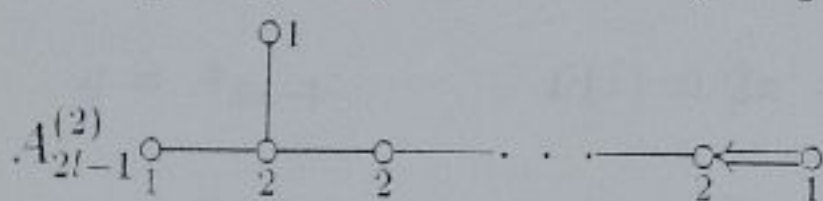
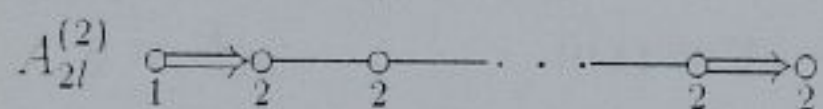
т.е. представляет обобщенную матрицу Картана (см. [15]).

Задавая для каждой матрицы A диаграмму $S(A)$ (так как это делается в случае классических матриц Картана) получаем классификацию всех обобщенных матриц Картана, а таким образом и всех накрывающих алгебр Ли. Ниже приведен список диаграмм всех обобщенных матриц Картана ([15]):

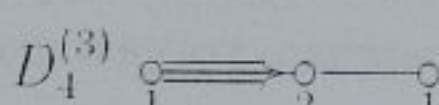




III



IV



$$E_6^{(2)} \quad \circ_1 - \circ_2 - \circ_3 \rightleftarrows \circ_2 - \circ_1$$

Числовые отметки в таблицах I, III и IV — это коэффициенты линейной зависимости столбцов матрицы A . Хорошо известно (см. [8]), что схемы таблицы I являются схемами Дынкина простых алгебр Ли.

Схемы таблицы II известны под названием расширенные схемы Дынкина простых алгебр Ли. Они и являются расширенным основным схем, т.е. схем типа I, так как они представляют схемы Дынкина расширенной системы простых корней, т.е. системе простых корней соответствующей алгебре добавляется младший корень. В книге [3] показано, что они одновременно являются схемами Дынкина для накрывающих алгебр $L(g, \epsilon)$, где g — простая алгебра Ли.

Что касается схем III и IV, рассмотрим следующее рассуждение.

Пусть g — простая алгебра Ли и X_i, Y_i и H_i — ее образующие Шевалле, а $\bar{\nu}$ — автоморфизм соответствующей диаграммы Дынкина порядка $k \geq 1$ и ν — автоморфизм алгебры g индуцированный автоморфизмом $\bar{\nu}$, т.е.

$$\nu(X_i) = X_{\bar{\nu}(i)}, \quad \nu(Y_i) = Y_{\bar{\nu}(i)}, \quad \nu(H_i) = H_{\bar{\nu}(i)}. \quad (1)$$

Из теоремы 1.1.3 следует, что k может быть равен 2 или 3. В книге ([3]) показано, что схемы таблиц III и IV получаются как схемы алгебры $L(g, \nu)$ для различных $\bar{\nu}$. При этом, алгебрами $L(g, \nu)$ индуцированными автоморфизмами порядка $k = 2$ соответствуют схемы таблицы III. В этом случае, простым анализом, сразу видно, что для разных g автоморфизм $\bar{\nu}$ имеет вид:

$$g = A_{2n}: \quad \bar{\nu}(i) = 2n - i + 1,$$

$$g = A_{2n-1}: \quad \bar{\nu}(i) = 2n - i,$$

$$g = D_n: \quad \bar{\nu}(i) = i, \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

$$\bar{\nu}(n) = n+1, \quad \bar{\nu}(n+1) = n,$$

$$g = E_6: \quad \bar{\nu}(1) = 6, \bar{\nu}(3) = 5, \bar{\nu}(4) = 4$$

$$\bar{\nu}(6) = 1, \bar{\nu}(5) = 3, \bar{\nu}(2) = 2.$$

Остается еще случай автоморфизма порядка $k = 3$ который по теореме 1.1.3 существует только для алгебре D_4 . Он имеет вид

$$g = D_4: \quad \bar{\nu}(1) = 4, \quad \bar{\nu}(4) = 3, \quad \bar{\nu}(3) = 1, \quad \bar{\nu}(2) = 2$$

и схема таблицы IV представляет схему Дынкина накрывающей алгебры индуцированной этим автоморфизмом.

Предыдущие рассуждения обобщает следующая лемма:

Лемма 1.3.1 Пусть g — простая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, ν — автоморфизм алгебры g порядка k , индуцированный автоморфизмом диаграммы Дынкина. Тогда $k = 1, 2, 3$ и схемы алгебры $L(g, \nu)$ исчерпывают все схемы таблиц II, III и IV.

Для формулировки главной теоремы, которая решает проблему классификации автоморфизмов конечного порядка, т.е. обобщенных симметрических пространств, нам понадобятся еще две теоремы (см. [3]).

Теорема 1.3.1 Пусть g — простая алгебра Ли над $\mathbb{C}$ и Θ — ее автоморфизм конечного порядка. Тогда существует автоморфизм ν алгебры g , который индуцирован автоморфизмом диаграммы Дынкина, и $\mathbb{Z}$ — градуировка алгебры $L(g, \nu)$ типа $(s_0, \dots, s_n)$, так, что $L(g, \nu)$ является изоморфной $\mathbb{Z}$ — градуированной алгебре $L(g, \Theta)$, причем градуировки сохраняются.

Теорема 1.3.2 Пусть g , ν и k как в лемме 1.3.1 и пусть $a_0, \dots, a_n$ числовые отметки в таблице k , соответствующие простым корням $\alpha_0, \dots, \alpha_n$. Пусть алгебра $L(g, \nu)$ снабжена градуировкой типа $(s_0, \dots, s_n)$. Тогда

$$x^k L_j \subset L_{j+m}, \text{ где } m = k \sum_{i=0}^n a_i s_i.$$

Теорема 1.3.3 Пусть g — простая алгебра Ли над $\mathbb{C}$ и ν — фиксированный автоморфизм алгебры Ли порядка k ($k = 1, 2, 3$) индуцированный автоморфизмом диаграммы Дынкина соответствующей картановской подалгебры η алгебры g . Пусть $g = \bigoplus_i g_i^{\nu}$ — соответствующая $\mathbb{Z}_k$ — градуировка. Множество всех стационарных точек η^{ν} автоморфизма

ν в подалгебре η образует картановскую подалгебру простой алгебры Ли g_0^ν . Пусть X_i, Y_i, H_i ($1 \leq i \leq n$) — образующий Шевалле алгебры g_0^ν соответствующий простыми корнями $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ в $\Delta(g_0^\nu, \eta^\nu)$. Пусть $\tilde{\alpha}_0$ — наименьший корень алгебры $L(g, \nu)$ вида $(\alpha_0, 1)$ и пусть вектор $X_0 \neq 0$ в g_1^ν такой, что $\alpha X_0 \in L(g_0, \nu)^{\tilde{\alpha}_0}$. Пусть $(s_0, \dots, s_n)$ — последовательность неотрицательных взаимно простых целых чисел: положим $m = k \sum_{i=0}^n a_i s_i$, где a_i — представляют отметки диаграмме алгебры $L(g, \nu)$ соответствующей простыми корнями $\alpha_0, \tilde{\alpha} = (\alpha_i, 0)$, ($1 \leq i \leq n$). Тогда:

(ii) Векторы $X_0, X_1, \dots, X_n$ порождают алгебру g и соотношения

$$\Theta(X_j) = e^{\frac{2\pi i s_j}{m}} X_j \quad (0 \leq j \leq n)$$

однозначно определяют автоморфизм m -го порядка алгебры Ли g . Он называется автоморфизмом типа $(s_0, \dots, s_n; k)$.

- (iii) Пусть $i_1, \dots, i_t$ — все индексы, для которых $s_{i_1} = \dots = s_{i_t} = 0$. Тогда алгебра g_0 (т.е. g_0^ν) изоморфна прямой сумме $(n-t)$ -мерного центра и полупростой алгебры Ли, диаграмма Динкина которой является поддиаграммой диаграмме $g^{(k)}$, состоящей из вершин $i_1, \dots, i_t$.
- (iiii) С точностью до сопряжения автоморфизмом алгебры Ли g автоморфизмы Θ исчерпывают все автоморфизмы этой алгебры Ли порядка m .

Теорема 1.3.4 Уз обозначения предыдущей теоремы, пусть Θ автоморфизм типа $(s_0, \dots, s_n; k)$. Тогда:

- (ii) Θ является внутренним автоморфизмом тогда и только тогда когда $k = 1$.
- (iii) Если Θ' автоморфизм типа $(s'_0, \dots, s'_n; k')$, тогда автоморфизмы Θ и Θ' сопряжены автоморфизмом алгебры Ли g , если и только если $k = k'$ и последовательность s может быть преобразована в последовательность s' с помощью автоморфизма диаграммы $g^{(k)}$.

Таким образом, имеется биективное соответствие между классами сопряженных автоморфизмов конечного порядка простой алгебры Ли g и классами изоморфных схем Каца типа $g^{(k)}$ для всех возможных k . При этом классам внутренних автоморфизмов соответствуют схемы Каца типа $g^{(1)}$, а классам внешних автоморфизмов — схемы Каца типов $g^{(2)}$ и $g^{(3)}$.

1.3.2 Список обобщенных симметрических пространств

Пользуясь предыдущими теоремами приведем список всех обобщенных симметрических пространств с простыми компактными основными группами Ли. Для этого сначала сделаем некоторые замечания которые следуют из предыдущего пункта.

Замечание: Все автоморфизмы конечного порядка алгебр типа B_n , C_n , G_2 , F_4 , E_7 и E_8 являются внутренними и поэтому все обобщенные симметрические пространства с основными алгебрами B_n , C_n , G_2 , F_4 , E_7 и E_8 являются пространствами первой категории.

Замечание: Все обобщенные симметрические пространства индуцированные внешними автоморфизмами конечного порядка являются пространствами второй категории. Они могут быть только с основными алгебрами A_n , D_{n+1} , E_6 и D_4 .

Ниже приведен список обобщенных симметрических пространств с простыми компактными основными группами Ли.

1.3.3 $g = A_n$

Существуют две возможности: $k = 1, 2$.

1. $k = 1$

Рассматривается схема $A_n^{(1)}$ и простым анализом получается, что все ее подсхемы являются схемами Дынкина алгебр вида $A_{n_1} \oplus \dots \oplus A_{n_k}$. Таким образом получается, что всякая подалгебра стационарных точек внутреннего автоморфизма конечного порядка имеет вид

$$g^\Theta = t^{n - \sum_{i=1}^k n_i} \oplus A_{n_1} \oplus \dots \oplus A_{n_k}.$$

2. $k = 2$

Очевидно, что отдельно надо рассматривать случай четного и нечетного n .

(а) $A_{2n}^{(2)}$

$$g^\Theta = t^{n - \sum_{i=1}^k n_i} \oplus B_{n_1} \oplus A_{n_2} \oplus \dots \oplus A_{n_{k-1}} \oplus C_{n_k}.$$

(б) $A_{2n-1}^{(2)}$

$$g^\Theta = t^{n - \sum_{i=1}^k n_i} \oplus D_{n_1} \oplus A_{n_2} \oplus \dots \oplus A_{n_{k-1}} \oplus C_{n_k}.$$

1.3.4 $g = B_n$

В случае алгебры $g = B_n$ имеется одна возможность $k = 1$ и рассматривая все подсхемы схемы $B_n^{(1)}$ получается, что

$$g^\Theta = t^{n - \sum_{i=1}^k n_i} \oplus D_{n_1} \oplus A_{n_2} \oplus \dots \oplus A_{n_{k-1}} \oplus B_{n_k}.$$

1.3.5 $g = C_n$

Так же как в предыдущем случае имеется $k = 1$ и

$$g^\Theta = t^{n - \sum_{i=1}^k n_i} \oplus C_{n_1} \oplus A_{n_2} \oplus \dots \oplus A_{n_{k-1}} \oplus C_{n_k}.$$

1.3.6 $g = D_{n+1}$

Существуют две возможности $k = 1, 2$.

1. $k = 1$

$$g^\Theta = t^{n+1 - \sum_{i=1}^k n_i} \oplus D_{n_1} \oplus A_{n_2} \oplus \dots \oplus A_{n_{k-1}} \oplus D_{n_k}.$$

2. $k = 2$

$$g^\Theta = t^{n - \sum_{i=1}^k n_i} \oplus B_{n_1} \oplus A_{n_2} \oplus \dots \oplus A_{n_{k-1}} \oplus B_{n_k}.$$

1.3.7 $g = D_4$

В случае алгебры D_4 имеется еще возможность $k = 3$, причем получаются следующие стационарные подалгебры:

$$g^\Theta = G_2, \quad m = 3$$

$$g^\Theta = A_2, \quad m = 3$$

$$g^\Theta = A_1 \oplus A_1, \quad m = 6$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_1, \quad m = 9$$

$$g^\Theta = t^2, \quad m = 12.$$

1.3.8 $g = G_2$

Имеется только одна возможность $k = 1$, причем получается

$$g^\Theta = A_2, \quad m = 3$$

$$g^\Theta = A_1 \oplus A_1, \quad m = 2$$

$$g^\Theta = G_2, \quad m = 1$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_1, \quad m = 3$$

$$g^\Theta = t^2, \quad m = 3$$

1.3.9 $g = F_4$

Как в предыдущем случае имеем $k = 1$ и

- $\dim \xi(g^\Theta) = 0$

$$g^\Theta = F_4, \quad m = 1$$

$$g^\Theta = A_1 \oplus C_3, \quad m = 2$$

$$g^\Theta = A_2 \oplus A_2, \quad m = 3$$

$$g^\Theta = A_3 \oplus A_1, \quad m = 4$$

$$g^\Theta = B_4, \quad m = 2$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 1$

$$g^\Theta = t^1 \oplus C_3, \quad m = 3$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_1 \oplus A_2, \quad m = 4$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus B_3, \quad m = 3$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 6$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_1 \oplus B_2, \quad m = 4$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 2$

$$g^\Theta = t^2 \oplus A_2, \quad m = 6$$

$$g^\Theta = t^2 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 7$$

$$g^\Theta = t^2 \oplus B_2, \quad m = 5$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 3$

$$g^\Theta = t^3 \oplus A_1, \quad m = 8$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 4$

$$g^\Theta = t^4, \quad m = 12$$

1.3.10 $g = E_6$

Существуют две возможности $k = 1, 2$.

В случае $k = 1$ рассматривая все подсхемы схемы $E_6^{(1)}$ получается

- $\dim \xi(g^\Theta) = 0$

$$g^\Theta = E_6, \quad m = 1$$

$$g^\Theta = A_1 \oplus A_5, \quad m = 2$$

$$g^\Theta = A_2 \oplus A_2 \oplus A_2, \quad m = 3$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 1$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_5, \quad m = 3$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_2 \oplus A_1 \oplus A_2, \quad m = 4$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_4 \oplus A_1, \quad m = 3$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus D_5, \quad m = 2$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 2$

$$g^\Theta = t^2 \oplus A_2 \oplus A_2, \quad m = 6$$

$$g^\Theta = t^2 \oplus A_3 \oplus A_1, \quad m = 5$$

$$g^\Theta = t^2 \oplus A_4, \quad m = 4$$

$$g^\Theta = t^2 \oplus D_4, \quad m = 3$$

$$g^\Theta = t^2 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_1, \quad m = 4$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 3$

$$g^\Theta = t^3 \oplus A_2 \oplus A_1, \quad m = 7$$

$$g^\Theta = t^3 \oplus A_3, \quad m = 6$$

$$g^\Theta = t^3 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 9$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 4$

$$g^\Theta = t^4 \oplus A_2, \quad m = 7$$

$$g^\Theta = t^4 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 5$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 5$

$$g^\Theta = t^5 \oplus A_1, \quad m = 9$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 6$

$$g^\Theta = t^6, \quad m = 12$$

В втором случае, т. е. когда $k = 2$ если рассмотреть $E_6^{(2)}$ получаем

- $\dim \xi(g^\Theta) = 0$

$$g^\Theta = F_4, \quad m = 2$$

$$g^\Theta = A_1 \oplus B_3, \quad m = 4$$

$$g^\Theta = A_2 \oplus A_2, \quad m = 6$$

$$g^\Theta = A_3 \oplus A_1, \quad m = 4$$

$$g^\Theta = C_4, \quad m = 2$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 1$

$$g^\Theta = t^1 \oplus B_3, \quad m = 6$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_1 \oplus A_2, \quad m = 8$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus C_3, \quad m = 4$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 8$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus C_2 \oplus A_1, \quad m = 6$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_3, \quad m = 6$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 2$

$$g^\Theta = t^2 \oplus A_2, \quad m = 8$$

$$g^\Theta = t^2 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 10$$

$$g^\Theta = t^2 \oplus C_2, \quad m = 8$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 3$

$$g^\Theta = t^3 \oplus A_1, \quad m = 12$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 4$

$$g^\Theta = t^4, \quad m = 18$$

1.3.11 $g = E_7$

Имеется одна возможность $k = 1$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 0$

$$g^\Theta = A_7, \quad m = 2$$

$$g^\Theta = E_7, \quad m = 1$$

$$g^\Theta = A_1 \oplus D_6, \quad m = 2$$

$$g^\Theta = A_2 \oplus A_5, \quad m = 3$$

$$g^\Theta = A_3 \oplus A_1 \oplus A_3, \quad m = 4$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 1$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_6, \quad m = 3$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_1 \oplus A_5, \quad m = 4$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_2 \oplus A_4, \quad m = 5$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_3 \oplus A_3, \quad m = 6$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus D_6, \quad m = 3$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_1 \oplus D_5, \quad m = 3$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus E_6.$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_3, \quad m = 6$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_3 \oplus A_2 \oplus A_1, \quad m = 5$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_1 \oplus D_4 \oplus A_1, \quad m = 4$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus A_2, \quad m = 6$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 2$

$$g^\Theta = t^2 \oplus A_5, \quad m = 6$$

$$g^\Theta = t^2 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_3, \quad m = 7$$

$$g^\Theta = t^2 \oplus A_3 \oplus A_2, \quad m = 6$$

$$g^\Theta = t^2 \oplus D_5, \quad m = 4$$

$$g^\Theta = t^2 \oplus A_1 \oplus A_4, \quad m = 6$$

$$g^\Theta = t^2 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_2, \quad m = 7$$

$$g^\Theta = t^2 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 7$$

$$g^\Theta = t^2 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 8$$

$$g^\Theta = t^2 \oplus A_1 \oplus D_4, \quad m = 5$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 3$

$$g^\Theta = t^3 \oplus A_1 \oplus A_3, \quad m = 8$$

$$g^\Theta = t^3 \oplus A_4, \quad m = 10$$

$$g^\Theta = t^3 \oplus A_2 \oplus A_2, \quad m = 9$$

$$g^\Theta = t^3 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_2, \quad m = 10$$

$$g^\Theta = t^3 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 9$$

$$g^\Theta = t^3 \oplus D_4, \quad m = 6$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 4$

$$g^\Theta = t^4 \oplus A_3, \quad m = 8$$

$$g^\Theta = t^4 \oplus A_1 \oplus A_2, \quad m = 9$$

$$g^\Theta = t^4 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 10$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 5$

$$g^\Theta = t^5 \oplus A_2, \quad m = 11$$

$$g^\Theta = t^5 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 12$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 6$

$$g^\Theta = t^6 \oplus A_1, \quad m = 4$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 7$

$$g^\Theta = t^7, \quad m = 18$$

1.3.12 $g = E_8$

$$k = 1$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 0$

$$g^\Theta = D_8, \quad m = 2$$

$$g^\Theta = A_1 \oplus E_7, \quad m = 2$$

$$g^\Theta = A_8, \quad m = 3$$

$$g^\Theta = E_6 \oplus A_2, \quad m = 3$$

$$g^\Theta = A_7 \oplus A_1, \quad m = 4$$

$$g^\Theta = D_5 \oplus A_3, \quad m = 4$$

$$g^\Theta = A_4 \oplus A_4, \quad m = 5$$

$$g^\Theta = A_5 \oplus A_2 \oplus A_1, \quad m = 8$$

• $\dim \xi(g^\Theta) = 1$

$$g^\Theta = t^1 \oplus E_7, \quad m = 3$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus D_7, \quad m = 3$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_7, \quad m = 4$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus E_6 \oplus A_1, \quad m = 4$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus D_6 \oplus A_1, \quad m = 4$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_6 \oplus A_1, \quad m = 5$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus D_5 \oplus A_2, \quad m = 5$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_5 \oplus A_2, \quad m = 6$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus D_5 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 6$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus D_4 \oplus A_3, \quad m = 6$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_5 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 6$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_3 \oplus A_4, \quad m = 7$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_4 \oplus A_2 \oplus A_1, \quad m = 7$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_1 \oplus A_3 \oplus A_3, \quad m = 8$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_3, \quad m = 8$$

$$g^\Theta = t^1 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus A_2, \quad m = 9$$

• $\dim \xi(g^\Theta) = 2$

$$g^\Theta = t^2 \oplus D_6, \quad m = 5$$

$$g^\Theta = t^2 \oplus D_5 \oplus A_1, \quad m = 6$$

$$g^\Theta = t^2 \oplus A_6, \quad m = 6$$

$$g^\Theta = t^2 \oplus E_6, \quad m = 6$$

$$g^\Theta = t^2 \oplus A_5 \oplus A_1, \quad m = 7$$

$$\begin{aligned}
g^\Theta &= t^2 \oplus D_4 \oplus A_2, \quad m = 7 \\
g^\Theta &= t^2 \oplus A_4 \oplus A_2, \quad m = 8 \\
g^\Theta &= t^2 \oplus D_4 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 8 \\
g^\Theta &= t^2 \oplus A_4 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 9 \\
g^\Theta &= t^2 \oplus D_4 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 9 \\
g^\Theta &= t^2 \oplus A_3 \oplus A_3, \quad m = 9 \\
g^\Theta &= t^2 \oplus A_3 \oplus A_2 \oplus A_1, \quad m = 9 \\
g^\Theta &= t^2 \oplus D_4 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 9 \\
g^\Theta &= t^2 \oplus A_3 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 10 \\
g^\Theta &= t^2 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 10 \\
g^\Theta &= t^2 \oplus A_2 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 12 \\
g^\Theta &= t^2 \oplus A_2 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 13
\end{aligned}$$

• $\dim \xi(g^\Theta) = 3$

$$\begin{aligned}
g^\Theta &= t^3 \oplus A_5, \quad m = 8 \\
g^\Theta &= t^3 \oplus A_4 \oplus A_1, \quad m = 9 \\
g^\Theta &= t^3 \oplus D_4 \oplus A_1, \quad m = 10 \\
g^\Theta &= t^3 \oplus A_3 \oplus A_2, \quad m = 10 \\
g^\Theta &= t^3 \oplus A_3 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 11 \\
g^\Theta &= t^3 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus A_1, \quad m = 12 \\
g^\Theta &= t^3 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 14
\end{aligned}$$

• $\dim \xi(g^\Theta) = 4$

$$\begin{aligned}
g^\Theta &= t^4 \oplus A_4, \quad m = 11 \\
g^\Theta &= t^4 \oplus A_3 \oplus A_1, \quad m = 12 \\
g^\Theta &= t^4 \oplus D_4, \quad m = 12 \\
g^\Theta &= t^4 \oplus A_2 \oplus A_2, \quad m = 13 \\
g^\Theta &= t^4 \oplus A_2 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 14 \\
g^\Theta &= t^4 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 16
\end{aligned}$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 5$

$$g^\Theta = t^5 \oplus A_3, \quad m = 15$$

$$g^\Theta = t^5 \oplus A_2 \oplus A_1, \quad m = 16$$

$$g^\Theta = t^5 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 18$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 6$

$$g^\Theta = t^6 \oplus A_2, \quad m = 19$$

$$g^\Theta = t^6 \oplus A_1 \oplus A_1, \quad m = 20$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 7$

$$g^\Theta = t^7 \oplus A_1, \quad m = 24$$

- $\dim \xi(g^\Theta) = 8$

$$g^\Theta = t^8, \quad m = 30$$

Глава 2

Вещественные когомологии однородных пространств

В этой главе мы сформулируем теорему Картана о когомологиях однородного пространства и выясним алгебраический смысл понятий упомянутых в формулировке. Также, пользуясь этой теоремой, докажем теорему которая дает явную формулу для вычисления алгебры вещественных когомологий однородных пространств удовлетворяющих условию нормальности.

2.1 Инварианты группы Вейля

Пусть G — связная компактная группа Ли.

Пусть $f : G \times G \rightarrow G$ — отображение, определяемое групповым умножением. Элемент $x \in H^*(G)$ называется *примитивным*, если

$$f^*(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x.$$

Обозначим через P_G пространство примитивных элементов алгебры $H^*(G)$. Тогда алгебра когомологий группы G может быть получена из примитивных элементов ([10]):

Теорема 2.1.1 Пусть G — связная компактная группа Ли. Тогда $H^*(G) = \wedge P_G$.

Пусть $\mathfrak{g}$ алгебра Ли группы G и $\mathfrak{t}$ — ее картановская подалгебра, снабженная каноническими координатами $v_1, \dots, v_n$. На $\mathfrak{t}$ рассмотрим кольцо полиномов над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ от канонических переменных. Группа Вейля W_G действует естественно на этом кольце и можно рассмотреть подкольцо полиномов, инвариантных относительно действия W_G . Это подкольцо обозначим через $R[v_1, \dots, v_n]^{W_G}$.

Пусть $l = \text{rank } G$. Оказывается, что $R[v_1, \dots, v_n]^{W_G}$ является свободной алгеброй с l образующими. Более точно, имеет место следующее предложение:

Теорема 2.1.2 (К.Шевалле и А.Картан)

- (а) Если G — компактная связная группа Ли, то кольцо инвариантных относительно действия W_G полиномов на t допускает l образующих без соотношений.
- (б) Если $k_1, \dots, k_l$ степени этих образующих, то $2k_1 - 1, \dots, 2k_l - 1$ — степени элементов базиса того пространства, над которым $H^*(G)$ является внешней алгеброй.

Числа k_i упоминаемые в теореме представляют собой показатели группы G и имеют следующий вид ([17]):

$$g = A_n, \quad k_i = 2, 3, 4, \dots, n+1;$$

$$g = B_n, \quad k_i = 2, 4, 6, \dots, 2n;$$

$$g = C_n, \quad k_i = 2, 4, 6, \dots, 2n;$$

$$g = D_n, \quad k_i = 2, 4, 6, \dots, 2n-2, n;$$

$$g = G_2, \quad k_i = 2, 6;$$

$$g = F_4, \quad k_i = 2, 6, 8, 12;$$

$$g = E_6, \quad k_i = 2, 5, 6, 8, 9, 12;$$

$$g = E_7, \quad k_i = 2, 6, 8, 10, 12, 14, 18;$$

$$g = E_8, \quad k_i = 2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30.$$

В этом пункте мы укажем явный вид свободной системы образующих алгебры $R[t]^{W_G}$ для односвязной простой компактной группы Ли G .

Теорема 2.1.3 Пусть G — односвязная простая компактная группа Ли, тип которой отличен от D_l ($l \geq 4$), $k_1, \dots, k_l$ — ее показатели, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — веса ее нетривиального линейного представления наименьшей размерности. Тогда многочлены

$$I_{k_i} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{k_i} \quad (i = 1, 2, \dots, l)$$

составляют свободную систему образующих алгебры $R[t]^{W_G}$.

Проверка этого утверждения для групп G типов A_l , B_l , C_l и G_2 проделана в [10], для $G = F_4$ см. [2], для $G = E_6$ см. [17], для $G = E_7$, E_8 см. [11].

Случай группы типа D_n имеет некоторую особенность.

Приведем список образующих кольца $R[t]^{W_G}$ для каждой группы G . Ниже $\{x_i\}$ обозначают канонические координаты в картановской подалгебре алгебры g .

1. $g = A_n$ ($n \geq 1$).

Кольцо инвариантных многочленов имеет вид

$$R(t)^{W_{A_n}} = S(x_1, \dots, x_{n+1}),$$

где $S(x_1, \dots, x_{n+1})$ представляет кольцо симметрических многочленов от переменных $x_1, \dots, x_{n+1}$.

Тогда образующие кольца $R[t]^{W_{A_n}}$ имеют вид

$$\{\sigma_i(x) = \sigma_i(x_1, \dots, x_{n+1}): 2 \leq i \leq n+1\},$$

где $\sigma_i(x)$ обозначает i -ю элементарную симметрическую функцию.

2. $g = B_n$ ($n \geq 2$).

$$R(t)^{W_{B_n}} = S(x_1^2, \dots, x_n^2).$$

$$\{\sigma_i(x^2) = \sigma_i(x_1^2, \dots, x_n^2): 1 \leq i \leq n\}.$$

3. $g = C_n$ ($n \geq 3$).

$$R(t)^{W_{C_n}} = S(x_1^2, \dots, x_n^2).$$

$$\{\sigma_i(x^2) = \sigma_i(x_1^2, \dots, x_n^2): 1 \leq i \leq n\}.$$

4. $g = D_n$ ($n \geq 4$).

Кольцо инвариантных многочленов $R[t]^{W_{D_n}}$ получается как подкольцо кольца многочленов на картановской подалгебре t , порожденное подкольцом $S(x_1^2, \dots, x_n^2)$ и многочленом $x_1 \dots x_n$.

Образующие кольца $R[t]^{W_{D_n}}$ имеют вид

$$\{\sigma_i(x^2) = \sigma_i(x_1^2, \dots, x_n^2), 1 \leq i \leq n-1, \sigma_n(x) = x_1 \dots x_n\}.$$

5. $g = G_2$.

Образующие кольца $R[t]^{W_{G_2}}$ имеют вид

$$P_2 = 2 \sum_{j=1}^3 x_j^2, \quad P_2 = 2 \sum_{j=1}^3 x_j^6.$$

6. $g = F_4$

Образующие кольца $R[t]^{W_{F_4}}$ имеют вид

$$I_{k_i} = \sum (\pm x_i)^{k_i} + \sum \left\{ \frac{1}{2} ((\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4)) \right\}^{k_i}.$$

7. $g = E_6$

В случае алгебры E_6 можно, как в случаях алгебр G_2 и F_4 , пользуясь теоремой 2, привести образующие кольца $R[t]^{W_{E_6}}$. Для дальнейшего нам будут более полезны образующие, указанные в [2]:

$$I_{k_i} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^6 a_i^{k_i} + \sum_{i=1}^6 b_i^{k_i} + \sum_{i=1}^6 c_{ij}^{k_i} \right),$$

где формы a_i , b_i и c_{ij} задаются формулами

$$a_i = x_i + \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \quad (1 \leq i \leq 6)$$

$$b_i = x_i - \frac{2}{3}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \quad (1 \leq i \leq 6)$$

$$c_{ij} = -x_i - x_j + \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \quad (1 \leq i, j \leq 6).$$

8. $g = E_7$

Образующие $R[t]^{W_{E_7}}$ имеют вид:

$$P_{2s} = 2 \sum_{i < j} (x_i + x_j)^{2s} = (16 - 2^{2s}) p_{2s} + \sum_{i=1}^{2s-1} C_{2s}^i p_{2s-i} p_i.$$

где s -целое, $s > 0$, $p_i = \sum_{a=1}^8 x_a^i$; $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

9. $g = E_8$

Образующие $R[t]^{W_{E_8}}$ имеют вид:

$$P_{2s} = 18(5 + 3^{2s-3} - 2^{2s-1})p_{2s} + \sum_{i=1}^{2s-1} C_{2s}^i p_{2s-i} \{p_i(9 + (-1)^i - 2^i + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{i-1} C_i^j p_{i-j} p_j)\}.$$

$$p_i = \sum_{a=1}^9 x_a^i, \quad p_1 = 0.$$

2.2 Алгебра Картана

Пусть $\Lambda(u_1, \dots, u_R)$ — внешняя алгебра (над полем вещественных чисел) над элементами $u_1, \dots, u_R$ со степенями $\deg u_\alpha = 2k_\alpha - 1$ ($\alpha = 1, 2, \dots, R$; k_α — целые неотрицательные числа).

Пусть $R[v_1, \dots, v_r]$ — алгебра полиномов (над полем вещественных чисел) от элементов $v_1, \dots, v_r$ со степенями $\deg v_i = 2l_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$; l_i — целые неотрицательные числа).

Рассмотрим алгебру

$$C = \Lambda(u_1, \dots, u_R) \odot R[v_1, \dots, v_r].$$

Тогда C является градуированной алгеброй с обычной градуировкой $\deg(u \odot v) = \deg u + \deg v$ ($u \in \Lambda(u_1, \dots, u_R), v \in R[v_1, \dots, v_r]$)

$$C = \sum_{s \geq 0} C^s, \text{ где } C^s = \{c \in C, \deg c = s\}.$$

Пусть в $R[v_1, \dots, v_r]$ заданы полиномы $F_1, \dots, F_R$. Полиномы будем считать однородными со степенями $\deg F_i = 2k_i$, $i = \overline{1, R}$. (с учетом степеней элементов v_i). Тогда в алгебре C можно определить дифференциал d условиями:

$$d(u_i \odot 1) = 1 \odot F_i$$

$$d(1 \odot v_j) = 0, \text{ где } i = \overline{1, R} \text{ и } j = \overline{1, r}.$$

Очевидно, что $d^2 = 0$.

Дифференциальная $\mathbb{R}$ — алгебра C называется алгеброй Картана.

Рассмотрим C^k и положим $Z^k = \text{Ker } d \cap C^k$, $B^k = \text{Im } d \cap C^k$, $H^k = Z^k / B^k$ и $H^*(C, d) = \bigoplus_{k \geq 0} H^k$ — кольцо когомологий алгебры C по отношению к дифференциалу d .

Оказывается, что система полиномов $F_1, F_2, \dots, F_R$ иногда допускает упрощения, причем эти упрощения не меняют алгебру $H^*(C, d)$ (с точностью до изоморфизма). Точнее, имеет место основная теорема инвариантности:

Теорема 2.2.1 Рассмотрим систему $F_1, F_2, \dots, F_R$ и систему $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_R$, где $F_i \equiv \tilde{F}_i \pmod{(F_1, \dots, F_{i-1}, F_{i+1}, \dots, F_R)}$ ($i = \overline{1, R}$). Тогда алгебры когомологий двух определяемых этими системами алгебр Картана изоморфны т.е.

$$H^*(C, d_{F_1, F_2, \dots, F_R}) \cong H^*(C, d_{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_R}).$$

Доказательство см. [11].

Непосредственным следствием теоремы инвариантности является следующее предложение:

Теорема 2.2.2 Рассмотрим систему полиномов $F_1, F_2, \dots, F_R$ и предположим, что $F_{n+1} = F_{n+2} = \dots = F_R = 0$. Рассмотрим алгебру

$$(C', d') = \Lambda(u_1, u_2, \dots, u_n) \otimes R[v_1, v_2, \dots, v_r],$$

где

$$d'(u_i \otimes 1) = 1 \otimes F_i, \quad i = \overline{1, n},$$

$$d'(1 \otimes v) = 0, \quad v \in R[v_1, \dots, v_r].$$

Тогда

$$H^*(C, d_{F_1, F_2, \dots, F_R}) \cong \Lambda(u_{n+1}, \dots, u_R) \otimes H^*(C', d').$$

Доказательство см. [11].

Замечание: Очевидно, что если полиномы $F_{n+1}, \dots, F_R$ принадлежат идеалу $\langle F_1, \dots, F_n \rangle$, то утверждение предыдущей теоремы сохраняется ввиду основной теоремы инвариантности.

Введем в алгебре Картана C другую градуировку которую мы назовем внешней:

$$C = \bigoplus_{k \geq 0} C_k, \text{ где } C_k = \{c \in C : c = u_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge u_{\alpha_k} \otimes v, v \in R[v_1, \dots, v_r]\}.$$

Относительно этой градуировки d имеет степень -1 . Можно снова рассмотреть $Z_k = \text{Ker}(dC_k)$, $B_k = \text{Im}(dC_{k+1})$ и $H_k = Z_k/B_k$. Алгебра $H_* = H_*(C, d, R) = \bigoplus_{k \geq 0} H_k$ называется алгеброй гомологий Косула. Очевидно, что

$$H_0 = R[v_1, \dots, v_r] / \langle F_1, \dots, F_R \rangle,$$

где через $\langle F_1, \dots, F_R \rangle$ обозначен идеал, порожденный элементами $F_1, \dots, F_R$.

Напомним, что $H_0 = R[v_1, \dots, v_r] / \langle F_1, \dots, F_R \rangle$ называется характеристической подалгеброй главного расслоенного пространства $G \rightarrow G/j(U)$.

Оказывается, что иногда нульмерная группа гомологий Косула полностью исчерпывает собой все когомологии алгебры C . Точнее, имеет место следующая теорема:

Теорема 2.2.3 *Если $H_0(C, d)$ — конечномерное пространство и $R = r$, то градуированные пространства $H^*(C, d)$ и $H_0(C, d)$ изоморфны.*

Доказательство см. [11].

2.3 Теорема Картана и когомологии пространств нормального положения

Наша цель — получить информацию о вещественных когомологиях однородного пространства G/U . Оказывается, что отображение $j^* : R[t]^{W_G} \rightarrow R[s]^{W_U}$, индуцируемое вложением $j : U \rightarrow G$, позволяет полностью описать вещественные когомологии пространства G/U и свести топологическую задачу к чисто алгебраической. Но, следуя статье [4], сначала сформулируем топологический вариант теоремы Картана и затем каждому понятию в такой формулировке придадим алгебраический смысл.

Для формулировки теоремы Картана нам понадобятся некоторые вводные определения и утверждения. Коротко изложим дальнейшие действия. Сначала для каждой группы Ли G построим присоединенное универсальное расслоение. Затем установим связь между когомологиями группы G и когомологиями базы универсального расслоения. Это связь устанавливается с помощью трансгрессии. Так как в алгебре Картана фигурируют упомянутые когомологии, то понятие трансгрессия, грубо

говоря, придает смысл дифференциалу в алгебре Картана. Поэтому трансгрессия имеет фундаментальную роль в теореме Картана.

Мы придерживаемся определений и терминов статьи [4]. Мы ограничимся вещественными коэффициентами.

Пусть (E, B, F, p) — расслоенное пространство.

Вложение i_b слоя F_b в E индуцирует канонический эпиморфизм $i'_b : C(E) \rightarrow C(F_b)$ и проекция p индуцирует канонический мономорфизм $p' : C(B) \rightarrow C(E)$. Алгебра $C(B)$ отождествляется со своим образом при мономорфизме p' и элементы этого образа называются коцепями базы.

Определение 2.3.1 Элемент $h \in H^s(F_b)$ называется трансгрессивным, если существует такой элемент $c \in C(E)$, что $i'_b(c) \in h$ и коцепь dc является коцепью базы. Элемент c называется коцепью трансгрессии для h .

Обозначим через $K^{s+1}(B)$ подмодуль модуля $H^{s+1}(B)$, образованный элементами x , обладающими следующим свойством: x содержит коцикл, являющийся в $C(E)$ границей коцепи, которую отображение i'_b переводит в 0. Тогда, образ трансгрессивного элемента определен с точностью до элемента из $K^{s+1}(B)$. Таким образом, получаем линейное отображение подмодуля трансгрессивных элементов из $H^s(F_b)$ в $H^{s+1}(B)/K^{s+1}(B)$. Оно и называется трансгрессией.

Замечание: Теорема трансгрессии Картана-Шевалле-Вейля утверждает, что примитивные элементы $H^*(G)$ — это элементы, трансгрессивные в дифференцируемых главных расслоенных пространствах.

Далее нам понадобится понятие универсального пространства.

Определение 2.3.2 Главное расслоенное пространство $E(n, G)$ со слоем G называется универсальным для компактной группы Ли G и размерности n , если оно компактно, связно и локально связно, и если его когомологии тривиальны в размерности до n .

База $B(n, G)$ такого пространства называется классифицирующим пространством для G и n .

Можно предположить n достаточно большим и эти пространства обозначить просто E_G и B_G .

Замечание: Многообразия Штифеля представляют собой универсальные пространства для группы $SO(k)$. Так как всякая группа допускает точное линейное представление в группу $SO(k)$, то универсальные пространства существуют для всякой G и всякого n .

В случае вещественных коэффициентов, значение $H^*(G)$ позволяет полностью вычислить $H^*(B_G)$. Для этого вводится понятие универсально трансгрессивного элемента.

Определение 2.3.3 Пусть G — связная компактная группа Ли. Элемент $x \in H^*(G)$ называется универсально трансгрессивным, если существуют пространства, универсальные для G и для произвольно больших размерностей, в которых он трансгрессивен.

Тогда имеет место теорема [4]:

Теорема 2.3.1 Пусть G — связная компактная группа Ли. Предположим, что $H^*(G)$ есть внешняя алгебра над векторным пространством, базис которого образован элементами нечетных степеней $r_1, \dots, r_l$. Тогда:

- (а) $H^*(G)$ имеет систему $x_1, \dots, x_l$ ($Dx_i = r_i$) универсально трансгрессивных образующих.
- (б) Алгебра $H^*(B_G)$ изоморфна алгебре многочленов $K_p[y_1, \dots, y_l]$. В пространстве $E(n, G)$ элемент y_i является классом когомологий, содержащим кограницу коцепи трансгрессии для x_i .

Пусть у нас есть однородное пространство G/U . Пусть $E(n, G)$ — универсальное пространство для G . Тогда оно является универсальным пространством для U . Это позволяет дать следующее определение:

Определение 2.3.4 Пусть G — компактная группа Ли, а U — ее замкнутая подгруппа. Обозначим через $\rho^*(U, G)$ канонический гомоморфизм $H^*(B_G) \rightarrow H^*(B_U)$, для всякого n совпадающий в размерности до n с гомоморфизмом $H^*(B(n, G)) \rightarrow H^*(B(n, U))$, индуцируемым проекцией $E(n, G)/U$ на $E(n, G)/G$.

Тогда теорема Картана может быть сформулирована следующим образом (см. [4]):

Теорема 2.3.2 Пусть U — связная замкнутая подгруппа компактной связной группы Ли G и $x_1, \dots, x_l$ — система универсально трансгрессибельных образующих $H^*(G)$, а $y_1, \dots, y_l$ — образующие $H^*(B_G)$, соответствующие $x_1, \dots, x_l$ при трансгрессии в универсальном пространстве E_G . Тогда $H^*(G/U)$ канонически изоморфна алгебре $H^*(H^*(B_U) \otimes H^*(G))$, где алгебра $H^*(B_U) \otimes H^*(G)$ снабжена дифференциалом, равным нулю на $H^*(B_U)$ и удовлетворяющим условиям $d(1 \otimes x_i) = \rho^*(y_i) \otimes 1$ ($i = 1, \dots, l$).

Теперь выясним алгебраический смысл понятий, упоминаемых в теореме Картана. Что касается алгебры когомологий $H^*(B_U)$ он устанавливается следующей леммой [4]:

Лемма 2.3.1 Если T — максимальный тор компактной группы Ли G , то образ мономорфизма $\rho^*(T, G) : H^*(B_G) \rightarrow H^*(B_T)$ состоит из всех инвариантов группы Вейля.

Это означает, что алгебру $H^*(B_G)$ можно отождествить с алгеброй многочленов на максимальной коммутативной подалгебре в $\mathfrak{g}$, инвариантной относительно действия группы Вейля. Что касается гомоморфизма $\rho^*(U, G)$, его алгебраический смысл устанавливается следующей леммой [4]:

Лемма 2.3.2 Пусть U — замкнутая подгруппа компактной группы Ли G , $S \subset T$ — максимальные торы для U и G , t — алгебра Ли тора T и s — ее подалгебра, соответствующая тору S . Если отождествить $H^*(B_G)$ и $H^*(B_U)$ с алгебрами многочленов на t , соответственно на s , с вещественными коэффициентами, инвариантных относительно W_G , соответственно W_U , то гомоморфизм $\rho^*(U, G) : H^*(B_G) \rightarrow H^*(B_U)$ сопоставит каждому многочлену из $H^*(B_G)$ индуцированный им многочлен на $H^*(B_U)$.

Для нас будет интересным случай когда U находится в так называемом нормальном положении в G .

Определение 2.3.5 Пусть l — ранг группы G и k — ранг подгруппы U . Если мы можем подобрать l производящих алгебраически независимых полиномов $P_1, \dots, P_l$ алгебры $H^*(B_G)$, так, что $\rho^*(U, G)P_{k+1}, \dots, \rho^*(U, G)P_l$ принадлежат идеалу в $H^*(B_U)$, порожденному $\rho^*(U, G)P_1, \dots, \rho^*(U, G)P_k$, то мы скажем, что U находится в нормальном положении в G .

При нормальном положении подгруппы U в группе G , приведенные выше теоремы дают возможность сформулировать теорему Картана в технически более удобном виде:

Теорема 2.3.3 Пусть U — связная замкнутая подгруппа связной компактной группы G ($\text{rank } U = k$), а $P_1, \dots, P_l$ — образующие кольца $R[t]^{W_G}$. Если $r(P_{k+1}), \dots, r(P_l)$ принадлежат идеалу $\langle r(P_1), \dots, r(P_k) \rangle$, где r сужение упомянутое в предыдущей лемме, то

$$H^*(G/U) = \{R[s]^{W_U} / \langle r(P_1), \dots, r(P_k) \rangle\} \otimes \Lambda(x_{k+1}, \dots, x_l),$$

где x_i представляют универсально трансгрессивные образующие алгебры $H^*(G)$ соответствующие P_i при трансгрессии.

Доказательство: Из теоремы 2.3.2 следует, что алгебра Картана однородного пространства G/U имеет вид $(L = H^*(B_U) \otimes H^*(G), d)$, где $d(u \otimes 1) = 0$ и $d(1 \otimes x_i) = \rho^*(U, G)(y_i) \otimes 1$, для $x_i \in H^*(G)$ и $u \in H^*(B_U)$.

Пользуясь леммами 2.3.1 и 2.3.2 получаем, что

$$H^*(B_G) = R[t]^{W_G} = R[P_1, \dots, P_l],$$

$$H^*(B_U) = R[s]^{W_U} = R[Q_1, \dots, Q_k],$$

$$\rho^*(U, G)P_i = r(P_i) = P_i|s.$$

Отсюда получаем, что

$$L = R[s]^{W_U} \otimes \Lambda(x_1, \dots, x_l) = R[Q_1, \dots, Q_k] \otimes \Lambda(x_1, \dots, x_l)$$

$$d(Q_i \otimes 1) = 0, \quad d(1 \otimes x_i) = r(P_i) \otimes 1.$$

Так как $r(P_{k+1}), \dots, r(P_l)$ принадлежат идеалу $\langle r(P_1), \dots, r(P_k) \rangle$ то из теоремы 2.2.2 следует, что

$$(*) \quad H^*(L, d) \cong H^*(L', d') \otimes \Lambda(x_{k+1}, \dots, x_l), \text{ где}$$

$$L' = R[Q_1, \dots, Q_k] \otimes \Lambda(x_1, \dots, x_k) \text{ и } d'(Q_i \otimes 1) = 0, \quad d'(1 \otimes x_i) = r(P_i) \otimes 1.$$

Так как пространство когомологий однородного пространства конечномерно, изоморфно ему пространство $H^*(L, d)$ тоже конечномерно. Поэтому из (*) следует конечномерность пространства $H^*(L', d')$ и следовательно $H_0(L', d')$. Но для алгебры L' имеет место равенство $R = r$, поэтому по теореме 2.2.3

$$H^*(L', d') \cong H_0(L', d') \cong R[Q_1, \dots, Q_k] / \langle r(P_1), \dots, r(P_k) \rangle.$$

Итак,

$$H^*(G/U) \cong H^*(L, d) \cong \{R[s]^{W_U} / \langle r(P_1), \dots, r(P_k) \rangle\} \otimes \Lambda(x_{k+1}, \dots, x_l).$$

+

Замечание 1: В случае однородного пространства G/U , у которого $\text{rank } G = \text{rank } U$, из теоремы 2.2.3 следует, что теорема Картана имеет простой вид

$$H^*(G/U) = R[t]^{W_U} / (R[t]^{W_G})^+.$$

где $(R[t]^{W_G})^+$ обозначает подкольцо кольца $R[t]^{W_G}$ состоящее из многочленов положительных степеней.

В случае симметрических пространств второй категории Такеучи нашел их когомологии с помощью следующей теоремы (см. [2]):

Теорема 2.3.4 Пусть G — компактная связная группа Ли, U — ее связная замкнутая подгруппа, $H^*(G) = \Lambda(x_1, \dots, x_l)$ — внешняя алгебра с универсально трансгрессивными образующими $x_1, \dots, x_l$, и $y_1, \dots, y_l$ — образующие для $H^*(B_G)$, соответствующие $x_1, \dots, x_l$ при трансгрессии. Если между $\rho^*(U, G)y_1, \dots, \rho^*(U, G)y_k$ нет соотношений в $H^*(B_U)$, и $\rho^*(U, G)y_{k+1} = 0, \dots, \rho^*(U, G)y_l = 0$, то

$$H^*(G/U) = \{H^*(B_U) / \langle \rho^*(U, G)y_1, \dots, \rho^*(U, G)y_k \rangle\} \otimes \Lambda(x_{k+1}, \dots, x_l).$$

Оказывается, что предыдущую теорему можно улучшить. Точнее, имеет место следующая лемма:

Лемма 2.3.3 Утверждение предыдущей теоремы имеет место если условие

$$\rho^*(U, G)y_{k+1} = 0, \dots, \rho^*(U, G)y_l = 0$$

заменить условием $\rho^*(U, G)y_{k+1}, \dots, \rho^*(U, G)y_l$ принадлежат идеалу $\langle \rho^*(U, G)y_1, \dots, \rho^*(U, G)y_k \rangle$.

Доказательство: Действительно, пользуясь теоремой 2.2.2 получаем, что

$$H^*(G/U) \cong H^*(L', d') \otimes \Lambda(x_{k+1}, \dots, x_l), \text{ где}$$

$$L' = H^*(B_U) \otimes \Lambda(x_1, \dots, x_k).$$

$$d'(1 \otimes x_i) = \rho^*(U, G)y_i \otimes 1, \quad i = \overline{1, k}.$$

$$d'(u \otimes 1) = 0, \quad u \in H^*(B_U).$$

Так как $\rho^*(U, G)y_i$, $i = \overline{1, k}$ являются многочленами без соотношений в $H^*(B_U)$ то по предыдущей теореме получаем формулу

$$H^*(L', d') \cong H^*(B_U) / \langle \rho^*(U, G)y_1, \dots, \rho^*(U, G)y_k \rangle$$

которая вместе с формулой (*) даст требуемое.

+

Замечание 2: Из конечномерности пространства когомологий однородного пространства G/U ($\text{rank } G = l$, $\text{rank } U = k$) вытекает конечномерность для $H^*(B_U) / \langle \rho^*(U, G)y_1, \dots, \rho^*(U, G)y_l \rangle$. Отсюда следует, что среди $\rho^*(U, G)y_1, \dots, \rho^*(U, G)y_l$ обязательно имеется k функционально независимых.

Отметим, что теорема 2.3.3 так же может быть доказана комбинируя лемму 2.3.3 и предыдущее замечание.

Замечание 3: В работе [11] показано, что в случае когда подгруппа находится в нормальном положении в группе полином Пуанкаре соответствующего однородного пространства вычисляется в общем виде

$$P(G/U; t) = \prod_{i=1}^k \frac{(1 - t^{2k_i})}{(1 - t^{2l_i})} \cdot \prod_{j=k+1}^l (1 + t^{2k_j - 1}),$$

где k_i (l_i) представляют показатели группы G (подгруппы U).

Глава 3

Когомологии обобщенных симметрических пространств

Пусть G/U — обобщенное симметрическое пространство, индуцированное автоморфизмом Θ . Если Θ — внутренний автоморфизм, то $\text{rank } G = \text{rank } U$ и применяя замечание 1, можно считать проблему вычисления группы когомологий этого пространства решенной. В этом случае имеется техническая задача состоящая в выражении канонических координат картановской подалгебры группы через канонические координаты картановской подалгебры подгруппы.

Проблема, как и ожидалось, возникает только в случае обобщенных симметрических пространств, индуцированных внешними автоморфизмами. Чтобы применять теорему Картана нам должно быть известным как действует "дифференциал" $\rho^*(U, G)$. Так как согласно теореме 2.3.2 этот дифференциал сводится к сужению образующих кольца $R[t]^{W_G}$ на картановскую подалгебру подгруппы U и так как эти образующие выражены через канонические координаты группы G , нам нужно установить связь которая существует на картановской подалгебре подгруппы U между каноническими координатами группы и подгруппы.

А именно, если t, t^Θ — картановские подалгебры, соответствующие алгебрами $\mathfrak{g}, \mathfrak{u}$, то возникает задача определения базиса подалгебры t^Θ через базис подалгебры t , необходимого для вычисления сужения многочленов, которое упоминается в теореме Картана. Понятно, что эта проблема появляется только в случае алгебр A_n, D_n и E_6 .

В настоящей главе мы укажем явную формулу которая устанавливает связь между упомянутыми базисами. Пользуясь полученной связью покажем, что все обобщенные симметрические пространства с простыми компактными основными группами удовлетворяют условию нормальности и таким образом опишем их когомологии.

3.1 Теорема о базисе

Как уже сказано, главная идея на которую опирается классификация автоморфизмов конечного порядка состоит в том чтобы каждый такой автоморфизм Θ выразить через автоморфизм ν соответствующее схемы Дынкина. Таким образом, было бы оправданным ожидать, что каким то способом, можно выразить базис картановской подалгебры алгебры g^Θ через базис картановской подалгебры алгебры g^ν .

В главе I указан явный вид автоморфизма ν для случая простой компактной алгебры Ли. Поэтому, нетрудно найти (см. [3]) базис подалгебры t^ν . Более того, как по теореме 1.3.3 схема Дынкина полупростой части алгебры g^Θ получается как подсхема схемы Каца-Дынкина $g^{(k)}$ ($k = 2$ или $k = 3$), то пользуясь базисом для t^ν , для каждой из выше упомянутых алгебр определим линейные формы на максимальной коммутативной подалгебре t и дуальные системы, соответствующие схемам $g^{(k)}$.

Пусть X_i, Y_i, H_i ($1 \leq i \leq l$) — образующий Шевалле простой алгебры Ли g , и $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ — система простых корней этой алгебры.

$$1. \ g = A_{2n}$$

$$\beta_0 = -(\alpha_1 + \dots + \alpha_{2n}).$$

$$\beta_i = \frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_{2n-i+1}) \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

$$\beta_n = \frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_{n+1}).$$

$$\overline{H}_0 = -(H_1 + \dots + H_{2n}), \quad (2)$$

$$\overline{H}_i = H_i + H_{2n-i+1} \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

$$\overline{H}_n = 2(H_n + H_{n+1}).$$

$$2. \ g = A_{2n-1}$$

$$\beta_0 = -\left(\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_{2n-1}) + \alpha_2 + \alpha_{2n-2} + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_{n+1} + \alpha_n\right)$$

$$\beta_i = \frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_{2n-i}) \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

$$\beta_n = \alpha_n,$$

$$\begin{aligned}\overline{H}_0 &= -(H_1 + H_{2n-1} + 2H_2 + \dots + 2H_{2n-2}), \\ \overline{H}_i &= H_i + H_{2n-i} \quad (1 \leq i \leq n-1), \\ \overline{H}_n &= H_n.\end{aligned}\tag{3}$$

$$3. \quad g = D_{n+1}$$

$$\begin{aligned}\beta_0 &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + \frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_{n+1})), \\ \beta_i &= \alpha_i \quad (1 \leq i \leq n-1), \\ \beta_n &= \frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_{n+1}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{H}_0 &= -2(H_1 + \dots + H_{n-1}) - (H_n + H_{n+1}), \\ \overline{H}_i &= H_i \quad (1 \leq i \leq n-1), \\ \overline{H}_n &= H_n + H_{n+1}.\end{aligned}\tag{4}$$

$$4. \quad g = D_4$$

$$\begin{aligned}\beta_0 &= -\alpha_2 - \frac{2}{3}(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4), \\ \beta_1 &= \frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4), \\ \beta_2 &= \alpha_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{H}_0 &= -3H_2 - 2(H_1 + H_3 + H_4), \\ \overline{H}_1 &= H_1 + H_3 + H_4, \\ \overline{H}_2 &= H_2.\end{aligned}\tag{5}$$

$$5. \quad g = E_6$$

$$\begin{aligned}\beta_0 &= -(\alpha_6 + 2\alpha_3 + \frac{3}{2}(\alpha_2 + \alpha_4) + \alpha_1 + \alpha_5), \\ \beta_1 &= \alpha_6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \alpha_3, \\ \beta_3 &= \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_4), \\ \beta_4 &= \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_5),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{H}_0 &= -(2H_1 + 3H_2 + 4H_3 + 3H_4 + 2H_5 + 2H_6), \\ \overline{H}_1 &= H_6, \\ \overline{H}_2 &= H_3, \\ \overline{H}_3 &= H_2 + H_4, \\ \overline{H}_4 &= H_1 + H_5.\end{aligned}\tag{6}$$

Прямым вычислением легко проверяется следующее утверждение:

Лемма 3.1.1 *Диаграмма Дынкина выше приведенных линейных форм есть схема Каца-Дынкина типа $A_{2n}^{(2)}$, $A_{2n-1}^{(2)}$, $D_{n+1}^{(2)}$, $E_6^{(2)}$ и $D_4^{(3)}$.*

Замечание 5: Заметим, что элементы $\overline{H}_i$ ($i \neq 0$) порождают подалгебру Картана t^ν алгебры g^ν — стационарных точек автоморфизма ν алгебры g , индуцируемого автоморфизмом соответствующей схемы Дынкина (см. [15]).

Пусть Θ — периодический автоморфизм алгебры g , и t^Θ — максимальная абелева подалгебра алгебры g^Θ . Пользуясь выше приведенными элементами $\overline{H}_i$ опишем образующие подалгебры t^Θ с помощью образующих подалгебры t .

Рассмотрим разложение

$$t^\Theta = \xi(g^\Theta) + t',$$

где $\xi(g^\Theta)$ — центр алгебры g^Θ , а t' — максимальная коммутативная подалгебра в полупростой части алгебры g^Θ . Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема 3.1.1 *Пусть Θ — автоморфизм простой алгебры g типа $(m, (s_0, \dots, s_n), k)$, и пусть набор $\{i_1, \dots, i_l\}$ состоит из всех номеров $i_1, \dots, i_l$ таких, что $s_{i_1} = \dots = s_{i_l} = 0$. Пусть далее, $H_1, \dots, H_l$, $X_1, \dots, X_l$, $Y_1, \dots, Y_l$ — система Шевалле этой алгебры, а $\overline{H}_1, \dots, \overline{H}_n$ — базис подалгебры t^ν -алгебры g^ν , полученный из базиса $H_1, \dots, H_l$ согласно формулами (1)-(5).*

Тогда, $\{\bar{H}_{i_1}, \dots, \bar{H}_{i_t}\}$ представляет базис в t' , и $\xi(g^\Theta)$ порождается векторами

$$\bar{H}_j = \sum_{k=1}^t c_{jk} \bar{H}_{i_k}, \quad j \neq i_1, \dots, i_t.$$

где c_{jk} задаются формулами

$$\sum_{k=1}^t c_{jk} a_{i_l i_k} = a_{i_l j}$$

для коэффициентов $a_{i_l i_k}$ с номерами $1 \leq l, k \leq t$ в матрице Картана для накрывающей алгебры $L(g, \nu)$.

Доказательство: Пусть $L(g, \nu)$ накрывающая алгебра для g и ν . Каждый корень $\tilde{\alpha}$ алгебры $L(g, \nu)$ может быть единственным способом представлен в виде $\tilde{\alpha} = \sum_0^n k_i \tilde{\alpha}_i$, где $\{\tilde{\alpha}_0, \dots, \tilde{\alpha}_n\}$ представляет систему простых корней алгебры $L(g, \nu)$. Определим, что $\deg \tilde{\alpha} = \sum_0^n k_i s_i$. Тогда имеет место (см. [3]) изоморфизм

$$g_0 \cong \bigoplus_{\deg \tilde{\alpha} = 0} L(g, \nu)^{\tilde{\alpha}}.$$

Если $\tilde{\alpha} > 0$ ($-\tilde{\alpha} > 0$), то $\deg \tilde{\alpha} = 0$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\alpha} = \sum_{r=1}^t k_{i_r} \tilde{\alpha}_{i_r}$.

Известно, (см. [8]) что, для $\tilde{\alpha} > 0$, $L(g, \nu)^{\tilde{\alpha}}$ порождается коммутаторами вида $[e_{j_1}, \dots, e_{j_s}]$, где $\tilde{\alpha}_{j_1} + \dots + \tilde{\alpha}_{j_s} = \tilde{\alpha}$. Таким образом получается, что $\bar{H}_{i_r}, e_{i_r}, f_{i_r}$ представляют собой образующие алгебры $\bigoplus_{\deg \tilde{\alpha} = 0} L(g, \nu)^{\tilde{\alpha}}$. Поэтому, $\bar{H}_{i_r} = [e_{i_r}, f_{i_r}]$, e_{i_r}, f_{i_r} являются образующими полупростой части алгебры g_0 . Подматрица $(a_{i_k i_l})_{1 \leq k, l \leq t}$ матрицы Картана (a_{ij}) алгебры $L(g, \nu)$ представляет ее матрицу Картана. Векторы вида

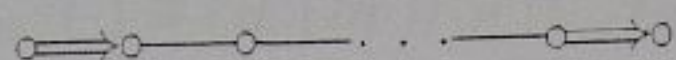
$$\bar{H}_j = \sum_{k=1}^t c_{jk} \bar{H}_{i_k} \quad (j \neq i_1, \dots, i_t)$$

порождают центр алгебры g_0 . Из условия принадлежности центру, легко получается, что коэффициенты c_{jk} определены соотношениями

$$\sum_{k=1}^t c_{jk} a_{i_l i_k} = a_{i_l j}.$$

3.2 Случай основной группы типа A_{2n}

3.2.1 Общая формула



Замечание: Отметим, что из теоремы 1.3.3 и схемы $A_{2n}^{(2)}$ следует, что любая стационарная подгруппа внешнего автоморфизма группы типа A_{2n} имеет ранг n .

Пусть $x_1, \dots, x_{2n+1}$ — канонические координаты на картановской подалгебре алгебры g . Образующие кольца $R[t]^{W_G}$ имеют вид

$$\{\sigma_i(x) = \sigma_i(x_1, \dots, x_{2n+1}); \quad 2 \leq i \leq 2n\}.$$

Пусть $\overline{H}_i$ ($0 \leq i \leq n$) — векторы введенные в (1). Тогда имеем

$$x_{n+1}(\overline{H}_i) = 0, \quad 0 \leq i \leq n.$$

$$x_j(\overline{H}_i) = -x_{2n-j+2}(\overline{H}_i), \quad 0 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Так как для каждой стационарной подгруппы U группы G , ее максимальная абелева подалгебра получается как линейная оболочка некоторых из векторов $\overline{H}_i$ ($0 \leq i \leq n$), то на каждой такой подалгебре канонические координаты группы G удовлетворяют условиям

$$x_{n+1} = 0.$$

$$x_j = -x_{2n-j+2}.$$

Поэтому, получаем, что

$$\rho^*(U, G)\sigma_{2j+1} = 0, \quad 1 \leq j \leq n$$

$$\rho^*(U, G)\sigma_{2j} = (-1)^j \rho^*(U, G)\sigma_j(x_1^2, \dots, x_n^2), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Таким образом получается, что любая стационарная подгруппа U внешнего автоморфизма группы типа A_{2n} находится в нормальном положении в A_{2n} . Поэтому, из предыдущие обозначения, из теоремы 2.3.3 следует:

Теорема 3.2.1 Алгебра вещественных когомологий обобщенных симметрических пространств второй категории с основной группой типа A_{2n} задается формулой

$$H^*(A_{2n}/U) \cong (H^*(B_U)/\langle \rho^*(U, A_{2n})\sigma_{2j} \rangle) \odot \Lambda(z_3, \dots, z_{2n+1}) \cong \\ \cong (H^*(B_U)/\langle \rho^*(U, A_{2n})\sigma_j(x_1^2, \dots, x_n^2) \rangle) \odot \Lambda(z_3, \dots, z_{2n+1}).$$

где z_i представляют универсально трансгрессивные образующие алгебры $H^*(A_{2n})$ соответствующие σ_i при трансгрессии.

3.2.2 Вычисление для подгруппы типа $C_k \oplus B_{n-k}$

Покажем как вычислить алгебру когомологий на примере подгруппы типа $C_k \oplus B_{n-k}$. Стационарная картановская подалгебра имеет вид

$$t^\Theta = L(\overline{H}_0, \dots, \overline{H}_{k-1}) \oplus L(\overline{H}_{k+1}, \dots, \overline{H}_n).$$

Пусть $y_1, \dots, y_k$ — канонические координаты на C_k , а $y_{k+1}, \dots, y_n$ — канонические координаты на B_{n-k} . Преобразование $\rho^*(U, G)$ действует следующим образом

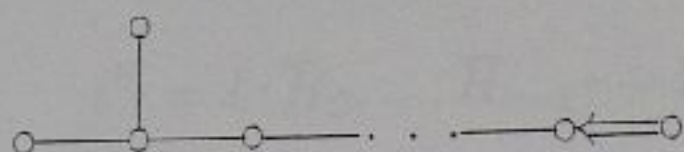
$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow -y_k, & x_{k+1} &\rightarrow y_{k+1}, \\ x_2 &\rightarrow -y_{k-1}, & x_{k+2} &\rightarrow y_{k+2}, \\ &\dots\dots\dots \\ x_k &\rightarrow -y_1, & x_n &\rightarrow y_n, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\rho^*(U, G)\sigma_{2j}(x_1, \dots, x_{2n+1}) = (-1)^j \sigma_j(y_1^2, \dots, y_n^2), \quad 1 \leq j \leq n \text{ и} \\ H^*(A_{2n}/C_k \cdot B_{n-k}) \cong ((S(y_1^2, \dots, y_k^2) \odot S(y_{k+1}^2, \dots, y_n^2))/S^+(y_1^2, \dots, y_n^2)) \\ \odot \Lambda(z_3, \dots, z_{2n+1}).$$

3.3 Случай основной группы типа A_{2n-1}

3.3.1 Общая формула



Замечание: Отметим, что из теоремы 1.3.3 и схемы $A_{2n-1}^{(2)}$ следует, что любая стационарная подгруппа внешнего автоморфизма группы типа A_{2n-1} имеет ранг n .

Пусть $x_1, \dots, x_{2n}$ — канонические координаты на картановской подалгебре алгебры g . Образующие группы $R[t]^{W_G}$ имеют вид

$$\{\sigma_i(x) = \sigma_i(x_1, \dots, x_{2n}); \quad 2 \leq i \leq 2n\}.$$

Пусть $\bar{H}_i$ ($0 \leq i \leq n$) — векторы введенные в (2). Тогда имеем

$$x_j(\bar{H}_i) = -x_{2n-j+1}(\bar{H}_i), \quad 0 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Так как для каждой стационарной подгруппы U , группы G , ее максимальная абелева подалгебра получается как линейная оболочка некоторых из векторов $\bar{H}_i$ ($0 \leq i \leq n$), то на каждой такой подалгебре имеется

$$x_j = -x_{2n-j+1}.$$

Поэтому, получается, что

$$\rho^*(U, G)\sigma_{2j+1} = 0, \quad 1 \leq j \leq n-1$$

$$\rho^*(U, G)\sigma_{2j} = (-1)^j \rho^*(U, G)\sigma_j(x_1^2, \dots, x_n^2), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Как и в случае алгебры A_{2n} получается, что любая стационарная подгруппы U внешнего автоморфизма группы A_{2n-1} , находится в нормальном положении в A_{2n-1} и поэтому имеет место теорема:

Теорема 3.3.1 Алгебра вещественных когомологий обобщенных симметрических пространств второй категории с основной группой типа A_{2n-1} задается формулой

$$\begin{aligned} H^*(A_{2n-1}/U) &\cong (H^*(B_U)/\langle \rho^*(U, A_{2n-1})\sigma_{2j} \rangle) \otimes \wedge(z_3, \dots, z_{2n-1}) \cong \\ &\cong (H^*(B_U)/\langle \rho^*(U, A_{2n-1})\sigma_j(x_1^2, \dots, x_n^2) \rangle) \otimes \wedge(z_3, \dots, z_{2n-1}), \end{aligned}$$

где z_i представляют универсально трансгрессивные образующие алгебры $H^*(A_{2n-1})$ соответствующие σ_i при трансгрессии.

3.3.2 Вычисление для подгруппы типа $D_k \oplus C_{n-k}$

Приведем вычисление алгебры когомологий для случая подгруппы типа $D_k \oplus C_{n-k}$. Стационарная картановская подалгебра имеет вид

$$t^\Theta = L(\overline{H}_0, \dots, \overline{H}_{k-1}) \oplus L(\overline{H}_{k+1}, \dots, \overline{H}_n).$$

Пусть $y_1, \dots, y_k$ — канонические координаты на D_k , а $y_{k+1}, \dots, y_n$ — канонические координаты на C_{n-k} . Канонические координаты алгебры $\mathfrak{g}$ преобразуются следующим образом

$$x_1 \rightarrow -y_k, \quad x_{k+1} \rightarrow y_{k+1},$$

$$x_2 \rightarrow -y_{k-1}, \quad x_{k+2} \rightarrow y_{k+2},$$

.....

$$x_k \rightarrow -y_1, \quad x_n \rightarrow y_n.$$

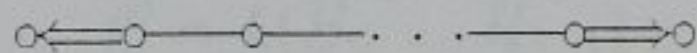
и поэтому

$$\rho^*(U, G)\sigma_{2j}(x_1, \dots, x_{2n}) = (-1)^j \sigma_j(y_1^2, \dots, y_n^2), \quad 1 \leq i \leq n.$$

$$H^*(A_{2n-1}/D_k \cdot B_{n-k}) \cong ((\langle S(y_1^2, \dots, y_k^2), y_1 \dots y_k \rangle \odot S(y_{k+1}^2, \dots, y_n^2)) / S^+(y_1^2, \dots, y_n^2)) \odot \wedge(z_3, \dots, z_{2n-1}).$$

3.4 Случай основной группы типа D_{n+1}

3.4.1 Общая формула



Замечание: Теорема 1.3.3 и схема $D_{n+1}^{(2)}$ дают, что любая стационарная подгруппа внешнего автоморфизма группы типа D_{n+1} имеет ранг n .

Пусть $x_1, \dots, x_{n+1}$ — канонические координаты на картановской подалгебре алгебры g . Образующие группы $R[t]^{W_G}$ имеют вид

$$\{\sigma_i(x) = \sigma_i(x_1^2, \dots, x_{n+1}^2); \quad 1 \leq i \leq n; \quad \sigma_{n+1} = x_1 \dots x_{n+1}\}.$$

Пусть $\overline{H}_i$ ($0 \leq i \leq n$) — векторы введенные в (3). Тогда имеем

$$x_{n+1}(\overline{H}_i) = 0, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Таким образом получается, что для каждой стационарной подгруппы U внешнего автоморфизма группы G отображение $\rho^*(U, G)$ обладает следующим свойством:

$$\rho^*(U, G)\sigma_{n+1} = 0.$$

Так получается, что всякая стационарная подгруппа внешнего автоморфизма группы D_{n+1} находится в нормальном положении в D_{n+1} и по тем же самым причинам, как и в случае группы A_{2n} , получается, что имеет место теорема:

Теорема 3.4.1 Алгебра вещественных когомологий обобщенных симметрических пространств второй категории с основной группой типа D_{n+1} задается формулой

$$H^*(D_{n+1}/U) \cong (H^*(B_U)/\langle \rho^*(U, D_{n+1})\sigma_1, \dots, \rho^*(U, D_{n+1})\sigma_n \rangle) \oplus \wedge(z_{n+1}),$$

где z_i представляют универсально трансгрессивные образующие алгебры $H^*(D_{n+1})$ соответствующие σ_i при трансгрессии.

3.4.2 Вычисление для подгруппы типа $B_k \oplus B_{n-k}$

Приведем вычисление для случая подгруппы типа $B_k \oplus B_{n-k}$ ($0 \leq k \leq n$, $B_0 = \emptyset$, $B_1 = A_1$). Картановская подалгебра подгруппы $B_k \oplus B_{n-k}$ имеет вид

$$t^\Theta = L(\overline{H}_0, \dots, \overline{H}_{k-1}) \oplus L(\overline{H}_{k+1}, \dots, \overline{H}_n).$$

Пусть $y_1, \dots, y_k$ — канонические координаты на B_k , а $y_{k+1}, \dots, y_n$ — канонические координаты на B_{n-k} . Канонические координаты алгебры g преобразуются следующим образом

$$x_1 \rightarrow -y_k, \quad x_{k+1} \rightarrow y_{k+1}.$$

$$x_2 \rightarrow -y_{k-1}, \quad x_{k+2} \rightarrow y_{k+2},$$

.....

$$x_k \rightarrow -y_1, \quad x_n \rightarrow y_n.$$

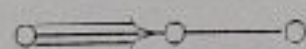
и поэтому

$$\rho^*(U, G)\sigma_i(x_1^2, \dots, x_{n+1}^2) = \sigma_i(y_1^2, \dots, y_n^2), \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$H^*(B_{n+1}/B_k \cdot B_{n-k}) \cong ((S(y_1^2, \dots, y_k^2) \otimes S(y_{k+1}^2, \dots, y_n^2))/S^+(y_1^2, \dots, y_n^2)) \otimes \Lambda(z_{n+1}).$$

3.5 Случай основной группы типа D_4

3.5.1 Общий случай



Замечание: Всякая стационарная подгруппа группы D_4 , индуцированная внешним автоморфизмом, имеет ранг 2.

Матрица Картана схемы $D_4^{(3)}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — канонические координаты в D_4 , и $\bar{H}_i$ ($0 \leq i \leq 3$) — векторы введенные в (4). Тогда, имеем

$$x_1(\bar{H}_1) = 1, \quad x_1(\bar{H}_2) = 0, \quad x_1(\bar{H}_0) = -2,$$

$$x_2(\bar{H}_1) = -1, \quad x_2(\bar{H}_2) = 1, \quad x_2(\bar{H}_0) = -1,$$

$$x_3(\bar{H}_1) = 2, \quad x_3(\bar{H}_2) = -1, \quad x_3(\bar{H}_0) = -1,$$

$$x_4(\bar{H}_1) = 0, \quad x_4(\bar{H}_2) = 0, \quad x_4(\bar{H}_0) = 0.$$

Пусть $\sigma_i(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2)$, $i \leq i \leq 3$ и $\sigma_4 = x_1 x_2 x_3 x_4$ — образующие алгебры $R[t]^{W_G}$. Очевидно, что на каждой картановской подалгебре

стационарной подгруппы U внешнего автоморфизма группы G имеет место

$$x_4 = 0,$$

$$x_1 = x_2 + x_3.$$

Таким образом, получается, что

$$\rho^*(U, G)\sigma_4 = 0.$$

$$\rho^*(U, G)\sigma_1 = \rho^*(U, G)(2[(x_2 + x_3)^2 - x_2x_3]).$$

$$\rho^*(U, G)\sigma_2 = \frac{1}{4}(\rho^*(U, G)\sigma_1)^2,$$

$$\rho^*(U, G)\sigma_3 = \rho^*(U, G)((x_2 + x_3)^2 x_2^2 x_3^2)$$

и поэтому всякая стационарная подгруппа внешнего автоморфизма группы D_4 находится в нормальном положении в D_4 . Применяя теорему 2.3.3 получаем:

Теорема 3.5.1 Алгебра вещественных когомологий обобщенных симметрических пространств второй категории с основной группой типа D_4 задается формулой

$$H^*(D_4/U) \cong (H^*(B_U)/\langle \rho^*(U, G)\sigma_1, \rho^*(U, G)\sigma_3 \rangle) \otimes \Lambda(z_2, z_4),$$

где z_i представляют универсально трансгрессивные образующие алгебры $H^*(D_4)$ соответствующие σ_i при трансгрессии.

3.5.2 Вычисления

Приведем вычисления группы когомологий для каждой стационарной подгруппы U группы D_4 .

$$1. g^\Theta = t^2$$

$$t^2 = R(\overline{H}_1, \overline{H}_2),$$

y_1, y_2 — канонические координаты на t^2 .

$$x_2 \rightarrow -y_1 + y_2, \quad x_2 + x_3 \rightarrow y_1$$

$$x_3 \rightarrow 2y_1 - y_2, \quad x_2x_3 \rightarrow -y_1^2 - (y_1 + y_2)^2,$$

$$\rho^*(T^2, D_4)\sigma_1 = 2(3y_1^2 + (y_1 + y_2)^2) = J_1,$$

$$\rho^*(T^2, D_4)\sigma_3 = y_1^2(y_1^2 + (y_1 + y_2)^2)^2 = J_2,$$

$$H^*(D_4/T^2) \cong (R[y_1, y_2]/\langle J_1, J_2 \rangle) \otimes \Lambda(z_2, z_4)$$

$$2. g^\Theta = A_1 \oplus t^1$$

$$t^\Theta = R(\overline{H}_1) \oplus R(\overline{H}_2 - c_{21}\overline{H}_1).$$

$$c_{21}a_{11} = a_{12} \Rightarrow c_{21} = -\frac{1}{2}.$$

$$t^\Theta = R(\overline{H}_1) \oplus R(\overline{H}_2 + \frac{1}{2}\overline{H}_1).$$

$y_1, -y_1$ — канонические координаты на A_1 .

y_2 — канонические координаты на t^1 .

$$x_2 \rightarrow -y_1 + \frac{1}{2}y_2, \quad x_2 + x_3 \rightarrow y_1 + \frac{1}{2}y_2$$

$$x_3 \rightarrow 2y_1, \quad x_2x_3 \rightarrow 2y_1(-y_1 + \frac{1}{2}y_2).$$

$$\rho^*(A_1T^1, D_4)\sigma_1 = 3y_1^2 + \frac{1}{4}y_2^2 = J_1.$$

$$\rho^*(A_1T^1, D_4)\sigma_3 = 4y_1^2(\frac{1}{4}y_2^2 - y_1^2)^2 = J_2.$$

$$H^*(D_4/A_1T^1) \cong ((R[y_2] \odot S[y_1^2])/\langle J_1, J_2 \rangle) \odot \wedge(z_2, z_4).$$

$$3. g^\Theta = A_2$$

$$t^\Theta = R(\overline{H}_1, \overline{H}_0).$$

y_1, y_2, y_3 — канонические координаты на t^Θ .

$$x_2 \rightarrow y_3 - y_1, \quad x_2 + x_3 \rightarrow y_3 - y_2$$

$$x_3 \rightarrow y_1 - y_2, \quad x_2x_3 \rightarrow (y_3 - y_1)(y_1 - y_2).$$

$$\rho^*(A_2, D_4)\sigma_1 = 2((y_3 - y_2)^2 - (y_3 - y_1)(y_1 - y_2)) = J_1.$$

$$\rho^*(A_2, D_4)\sigma_3 = (y_3 - y_2)^2(y_3 - y_1)^2(y_1 - y_2)^2 = J_2.$$

$$H^*(D_4/A_2) \cong (S[y_1, y_2, y_3]/\langle J_1, J_2 \rangle) \odot \wedge(z_2, z_4).$$

$$4. g^\Theta = g_2$$

$$t^\Theta = R(\overline{H}_2, \overline{H}_1).$$

y_1, y_2, y_3 — канонические координаты на t^Θ .

$$x_2 \rightarrow -y_3, \quad x_2 + x_3 \rightarrow -y_3 - y_2$$

$$x_3 \rightarrow -y_2, \quad x_2x_3 \rightarrow y_2y_3.$$

$$\rho^*(G_2, D_4)\sigma_1 = 2((y_3 + y_2)^2 - y_2y_3) = J_1.$$

$$\rho^*(G_2, D_4)\sigma_3 = (y_3 + y_2)^2 y_2^2 y_3^2 = J_2.$$

Пусть P_2, P_6 — образующие группы $R[t]^{W_{G_2}}$, определенные в пункте 2.1. Тогда, имеем

$$H^*(D_4/G_2) \cong (\langle P_2, P_6 \rangle / \langle J_1, J_2 \rangle) \oplus \Lambda(z_2, z_4).$$

Замечание: Всякая стационарная подалгебра внешнего автоморфизма алгебры D_4 является одновременно и подалгеброй алгебры g_2 (надо рассмотреть все подсхемы схемы $G_2^{(1)}$).

$$5. \quad g^\Theta = A_1 \oplus A_1 \\ t^\Theta = R(\overline{H}_0, \overline{H}_2).$$

$y_1, -y_1, y_2, -y_2$ — канонические координаты на t^Θ .

$$x_2 \rightarrow -y_1 + y_2, \quad x_2 + x_3 \rightarrow -2y_1 \\ x_3 \rightarrow -y_1 - y_2, \quad x_2 x_3 \rightarrow y_1^2 - y_2^2.$$

$$\rho^*(A_1 \cdot A_1, D_4)\sigma_1 = 2(3y_1^2 + y_2^2) = J_1.$$

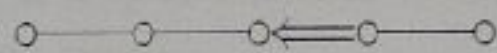
$$\rho^*(A_1 \cdot A_1, D_4)\sigma_3 = 4y_1^2(y_1^2 - y_2^2)^2 = J_2.$$

$$H^*(D_4/A_1 \cdot A_1) \cong ((S[y_1^2] \oplus S[y_2^2]) / \langle J_1, J_2 \rangle) \oplus \Lambda(z_2, z_4).$$

3.6 Случай основной группы типа E_6

3.6.1 Общая формула

Схема Каца — Дынкина $E_6^{(2)}$ имеет вид



и поэтому накрывающая алгебра $L(g, \nu)$ имеет следующую матрицу Картана:

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Замечание: Всякая стационарная подгруппа группы E_6 , индуцированная внешним автоморфизмом, имеет ранг 4.

Пусть $x_1, \dots, x_6$ — канонические координаты на картановской подалгебре алгебры E_6 и $\bar{H}_i$ ($0 \leq i \leq 4$) — векторы введенные в (5). Учитывая, что

$$(x_1 + x_6)(\bar{H}_i) = (x_2 + x_5)(\bar{H}_i) = (x_3 + x_4)(\bar{H}_i) \quad i = \overline{0, 4},$$

получаем, что на каждой максимальной подалгебре t^Θ алгебре стационарных точек автоморфизма Θ иммет место следующее равенство:

$$x_1 + x_6 = x_2 + x_5 = x_3 + x_4.$$

Таким образом, формы a_i , b_i и c_{ij} определенные в пункте 2.1 на t^Θ принимают следующий вид

$$a_i = x_i + x_1 + x_6.$$

$$b_i = x_i - 2(x_1 + x_6).$$

$$b_i = -a_{7-i}.$$

$$c_{ij} = -a_i - b_j = -a_i + a_{7-j}.$$

Поэтому преобразование $\rho^*(U, E_6)$ действует следующим образом:

$$\rho^*(U, E_6)(I_{k_i}) = \sum_{i=1}^6 \rho^*(U, E_6)(a_i)^{k_i} + \sum_{j=2}^5 \rho^*(U, E_6)(c_{1j})^{k_i} + \sum_{j=3,4} \rho^*(U, E_6)(c_{2j})^{k_i}.$$

При этом, очевидно, что

$$\rho^*(U, E_6)(I_5) = \rho^*(U, E_6)(I_9) = 0$$

и поэтому все стационарные подгруппы внешних автоморфизмов группы E_6 находятся в нормальном положении в E_6 . Таким образом по теореме 2.3.3. получим, что:

Теорема 3.6.1 Алгебра вещественных когомологий обобщенных симметрических пространств второй категории с основной группой типа E_6 задается формулой

$$H^*(E_6/U) \cong (H^*(B_U) / \langle \rho^*(U, E_6)I_2, \rho^*(U, E_6)I_6, \rho^*(U, E_6)I_8, \rho^*(U, E_6)I_{12} \rangle) \oplus \wedge (z_5, z_9).$$

где z_i представляют универсально трансгрессирующие образующие алгебры $H^*(E_6)$ соответствующие I_{k_i} при трансгрессии.

3.6.2 Вычисления

Приведем вычисления группы когомологий для каждой стационарной подгруппы U группы E_6 .

1. $\dim(\xi(g^\Theta)) = 4$

• $g^\Theta = t^4$

$$t^\Theta = R(\overline{H}_1, \overline{H}_2, \overline{H}_3, \overline{H}_4).$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ — канонические координаты на t^Θ .

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow \beta_1 - \frac{1}{3}\beta_4, & x_2 &\rightarrow -\beta_1 + \beta_2 - \frac{1}{3}\beta_4, \\ x_3 &\rightarrow -\beta_2 + \beta_3 - \frac{1}{3}\beta_4, & x_4 &\rightarrow \beta_2 - \beta_3 + \frac{2}{3}\beta_4, \\ x_5 &\rightarrow \beta_1 - \beta_2 + \frac{2}{3}\beta_4, & x_6 &\rightarrow -\beta_1 + \frac{2}{3}\beta_4. \end{aligned}$$

$$x_1 + x_6 \rightarrow \frac{1}{3}\beta_4.$$

$$\begin{aligned} a_1 &\rightarrow \beta_1, & c_{12} &\rightarrow -\beta_2 + \beta_4, \\ a_2 &\rightarrow -\beta_1 + \beta_2, & c_{13} &\rightarrow -\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 + \beta_4, \\ a_3 &\rightarrow -\beta_2 + \beta_3, & c_{14} &\rightarrow -\beta_1 - \beta_2 + \beta_3, \\ a_4 &\rightarrow \beta_2 - \beta_3 + \beta_4, & c_{15} &\rightarrow -2\beta_1 + \beta_2, \\ a_5 &\rightarrow \beta_1 - \beta_2 + \beta_4, & c_{23} &\rightarrow \beta_1 - \beta_3 + \beta_4, \\ a_6 &\rightarrow -\beta_1 + \beta_4, & c_{24} &\rightarrow \beta_1 - 2\beta_2 + \beta_3. \end{aligned}$$

$$H^*(E_6/T^4) \cong (R[\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]/\langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \otimes \wedge(z_5, z_9).$$

2. $\dim(\xi(g^\Theta)) = 3$

• $g^\Theta = t^3 \oplus A_1$

$i_1 = 1, j = 2, 3, 4$

$t^\Theta = t^3 \oplus R(\overline{H}_1)$

$t^3 = R(\overline{H}_j - c_{j1}a_{11}\overline{H}_1), \quad c_{j1}a_{11} = a_{1j}.$

Таким образом получаются следующие образующие картановской подалгебры g^Θ :

$$t^\Theta = R(\overline{H}_2 + \frac{1}{2}\overline{H}_1, \overline{H}_3, \overline{H}_4) \oplus R(\overline{H}_1)$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — канонические координаты на t^Θ .
 y_1, y_{-1} — канонические координаты на A_1

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{1}{3}\beta_3 + y_1, & x_2 &\rightarrow \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{1}{3}\beta_3 - y_1, \\ x_3 &\rightarrow -\beta_1 + \beta_2 - \frac{1}{3}\beta_3, & x_4 &\rightarrow \beta_1 - \beta_2 + \frac{2}{3}\beta_3, \\ x_5 &\rightarrow -\frac{1}{2}\beta_1 + \frac{2}{3}\beta_3 + y_1, & x_6 &\rightarrow -\frac{1}{2}\beta_1 + \frac{2}{3}\beta_3 - y_1. \end{aligned}$$

$$x_1 + x_6 \rightarrow \frac{1}{3}\beta_3.$$

$$\begin{aligned} a_1 &\rightarrow \frac{1}{2}\beta_1, & c_{12} &\rightarrow -\beta_1 + \beta_3, \\ a_2 &\rightarrow \frac{1}{2}\beta_1 - y_1, & c_{13} &\rightarrow \frac{1}{2}\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - y_1, \\ a_3 &\rightarrow -\beta_1 + \beta_2, & c_{14} &\rightarrow -\frac{3}{2}\beta_1 + \beta_2 - y_1, \\ a_4 &\rightarrow \beta_1 - \beta_2 + \beta_3, & c_{15} &\rightarrow -2y_1, \\ a_5 &\rightarrow -\frac{1}{2}\beta_1 + \beta_3 + y_1, & c_{23} &\rightarrow \frac{1}{2}\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 + y_1, \\ a_6 &\rightarrow -\frac{1}{2}\beta_1 + \beta_3 - y_1, & c_{24} &\rightarrow -\frac{3}{2}\beta_1 + \beta_2 + y_1. \end{aligned}$$

$$H^*(E_6/T^3 \cdot SU(2)) \cong$$

$$\cong ((R[\beta_1, \beta_2, \beta_3] \otimes R[y_1^2]) / \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \otimes \wedge(z_5, z_9).$$

$$3. \dim(\xi(g^\Theta)) = 2$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad g^\Theta &= t^2 \oplus C_2 \\ i_1 &= 2, i_2 = 3, j = 1, 4 \\ t^\Theta &= t^2 \oplus R(\overline{H}_2, \overline{H}_3) \\ t^2 &= R(\overline{H}_j - \sum_{k=1}^2 c_{jk} \overline{H}_{i_k}), \quad \sum_{k=1}^2 c_{jk} a_{ii_k} = a_{ij} \quad 1 \leq j \leq 2 \end{aligned}$$

$$t^\Theta = R(\overline{H}_1 + \overline{H}_2 + \overline{H}_3, \overline{H}_4 + \frac{1}{2}\overline{H}_2 + \overline{H}_3) \oplus R(\overline{H}_2, \overline{H}_3)$$

β_1, β_2 — канонические координаты на t^2 .
 y_1, y_2 — канонические координаты на C_2

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow \beta_1 - \frac{1}{3}\beta_2, & x_2 &\rightarrow \frac{1}{6}\beta_2 + y_1, \\ x_3 &\rightarrow \frac{1}{6}\beta_2 + y_2, & x_4 &\rightarrow \frac{1}{6}\beta_2 - y_2, \\ x_5 &\rightarrow \frac{1}{6}\beta_2 - y_1, & x_6 &\rightarrow -\beta_1 + \frac{2}{3}\beta_2. \end{aligned}$$

$$x_1 + x_6 \rightarrow \frac{1}{3}\beta_2.$$

$$\begin{aligned}
a_1 &\rightarrow \beta_1, & c_{12} &\rightarrow -\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2 - y_1, \\
a_2 &\rightarrow \frac{1}{2}\beta_2 + y_1, & c_{13} &\rightarrow -\beta_1 - \beta_2 + \frac{1}{2}\beta_2 - y_2, \\
a_3 &\rightarrow \frac{1}{2}\beta_2 + y_2, & c_{14} &\rightarrow -\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2 + y_2, \\
a_4 &\rightarrow \frac{1}{2}\beta_2 - y_2, & c_{15} &\rightarrow -\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2 + y_1, \\
a_5 &\rightarrow \frac{1}{2}\beta_2 + \beta_3 - y_1, & c_{23} &\rightarrow -y_1 - y_2, \\
a_6 &\rightarrow -\beta_1 + \beta_2, & c_{24} &\rightarrow -y_1 + y_2.
\end{aligned}$$

$$H^*(E_6/T^2 \cdot SO(4)) \cong$$

$$\cong ((R[\beta_1, \beta_2] \odot S(y_1^2, y_2^2))/\langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \odot \wedge(z_5, z_9).$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad g^\Theta &= t^2 \oplus A_1 \oplus A_1 \\
i_1 &= 2, i_2 = 4, j = 1, 3 \\
t^\Theta &= t^2 \oplus R(\overline{H}_2, \overline{H}_4) \\
t^2 &= R(\overline{H}_j - \sum_{k=1}^2 c_{jk} \overline{H}_{i_k}), \quad \sum_{k=1}^2 c_{jk} a_{ii_k} = a_{ij} \quad 1 \leq l \leq 2 \\
t^\Theta &= R(\overline{H}_1 + \frac{1}{2}\overline{H}_2, \overline{H}_3 + \frac{1}{2}\overline{H}_2 + \frac{1}{2}\overline{H}_4) \oplus R(\overline{H}_2, \overline{H}_4)
\end{aligned}$$

β_1, β_2 — канонические координаты на t^2 .

$y_1, -y_1$ — канонические координаты на A_1

$y_2, -y_2$ — канонические координаты на A_1

$$\begin{aligned}
x_1 &\rightarrow \beta_1 - \frac{1}{6}\beta_2 - \frac{1}{3}y_2, & x_2 &\rightarrow -\frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2 + y_1 - \frac{1}{3}y_2, \\
x_3 &\rightarrow -\frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2 - y_1 - \frac{1}{3}y_2, & x_4 &\rightarrow \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{1}{6}\beta_2 + y_1 + \frac{2}{3}y_2, \\
x_5 &\rightarrow \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{1}{6}\beta_2 - y_1 + \frac{2}{3}y_2, & x_6 &\rightarrow -\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2 + \frac{2}{3}y_2.
\end{aligned}$$

$$x_1 + x_6 \rightarrow \frac{1}{6}\beta_2 + \frac{1}{3}y_2,$$

$$\begin{aligned}
a_1 &\rightarrow \beta_1, & c_{12} &\rightarrow -\frac{1}{2}\beta_1 - y_1 + y_2, \\
a_2 &\rightarrow -\frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2 + y_1, & c_{13} &\rightarrow -\frac{1}{2}\beta_1 + y_1 + y_2, \\
a_3 &\rightarrow -\frac{1}{2}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2 - y_1, & c_{14} &\rightarrow -\frac{3}{2}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2 - y_1, \\
a_4 &\rightarrow \frac{1}{2}\beta_1 + y_1 + y_2, & c_{15} &\rightarrow -\frac{3}{2}\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2 + y_1, \\
a_5 &\rightarrow \frac{1}{2}\beta_1 - y_1 + y_2, & c_{23} &\rightarrow -\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_2 + y_2, \\
a_6 &\rightarrow -\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2 + y_2, & c_{24} &\rightarrow -2y_1.
\end{aligned}$$

$$H^*(E_6/T^2 \cdot SU(2) \cdot SU(2)) \cong$$

$$\cong ((R[\beta_1, \beta_2] \odot R(y_1^2) \odot R(y_2^2))/\langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \odot \wedge(z_5, z_9).$$

- $g^\Theta = t^2 \oplus A_2$
 $i_1 = 3, i_2 = 4, j = 1, 2$
 $t^\Theta = t^2 \oplus R(\overline{H}_3, \overline{H}_4)$
 $t^2 = R(\overline{H}_j - \sum_{k=1}^2 c_{jk} \overline{H}_{i_k}), \quad \sum_{k=1}^2 c_{jk} a_{i_k i_k} = a_{i_j} \quad 1 \leq j \leq 2$
 $t^\Theta = R(\overline{H}_1, \overline{H}_2 + \frac{4}{3} \overline{H}_3 + \frac{2}{3} \overline{H}_4) \oplus R(\overline{H}_3, \overline{H}_4)$

β_1, β_2 — канонические координаты на t^2 ,

y_1, y_2, y_3 — канонические координаты на A_2

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow \beta_1 - \frac{2}{9} \beta_2 + \frac{1}{3} y_3, & x_2 &\rightarrow \beta_1 + \frac{7}{9} \beta_2 + y_1 + \frac{1}{3} y_3, \\ x_3 &\rightarrow \frac{1}{9} \beta_2 - y_1 + \frac{2}{3} y_1 - \frac{1}{3} y_2, & x_4 &\rightarrow \frac{1}{9} \beta_2 + y_1 - \frac{1}{3} y_1 + \frac{2}{3} y_2, \\ x_5 &\rightarrow \beta_1 - \frac{5}{9} \beta_2 - y_1 - \frac{2}{3} y_3, & x_6 &\rightarrow -\beta_1 + \frac{4}{9} \beta_2 - \frac{2}{3} y_3, \end{aligned}$$

$$x_1 + x_6 \rightarrow \frac{2}{9} \beta_2 - \frac{1}{3} y_3,$$

$$\begin{aligned} a_1 &\rightarrow \beta_1, & c_{12} &\rightarrow -\frac{1}{3} \beta_2 - y_3, \\ a_2 &\rightarrow -\beta_1 + \beta_2, & c_{13} &\rightarrow -\beta_1 + \frac{1}{3} \beta_2 + y_2, \\ a_3 &\rightarrow \frac{1}{3} \beta_2 + y_1, & c_{14} &\rightarrow \beta_1 + \frac{1}{3} \beta_2 + y_1, \\ a_4 &\rightarrow \frac{1}{3} \beta_2 + y_2, & c_{15} &\rightarrow -2\beta_1 + \beta_2, \\ a_5 &\rightarrow \beta_1 - \frac{1}{3} \beta_2 - y_3, & c_{23} &\rightarrow \beta_1 - \frac{2}{3} \beta_2 + y_2, \\ a_6 &\rightarrow -\beta_1 + \frac{2}{3} \beta_2 - y_3, & c_{24} &\rightarrow \beta_1 - \frac{2}{3} \beta_2 + y_1. \end{aligned}$$

$$H^*(E_6/T^2 \cdot SU(3)) \cong$$

$$\cong ((R[\beta_1, \beta_2] \odot S(y_1, y_2, y_3)) / \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \odot \wedge(z_5, z_9).$$

4. $\dim(\xi(g^\Theta)) = 1$

- $g^\Theta = t^1 \oplus A_3$
 $i_1 = 0, i_2 = 1, i_3 = 2, j = 3$
 $t^\Theta = t^1 \oplus R(\overline{H}_0, \overline{H}_1, \overline{H}_2)$
 $t^1 = R(\overline{H}_3 - \sum_{k=1}^3 c_{3k} \overline{H}_{i_k}), \quad \sum_{k=1}^3 c_{3k} a_{i_k i_k} = a_{i_3} \quad 1 \leq l \leq 2$
 $t^\Theta = R(\overline{H}_4) \oplus R(\overline{H}_0, \overline{H}_1, \overline{H}_2)$

β_1 — канонические координаты на t^1 ,

y_1, y_2, y_3, y_4 — канонические координаты на A_3 соответствующие векторам $\overline{H}_0, \overline{H}_1, \overline{H}_2$.

$$\begin{aligned}
x_1 &\rightarrow -\frac{1}{3}\beta_1 - \frac{1}{3}y_1 + y_2, & x_2 &\rightarrow -\frac{1}{3}\beta_1 - \frac{1}{3}y_1 + y_3, \\
x_3 &\rightarrow -\frac{1}{3}\beta_1 - \frac{1}{3}y_1 - y_2 - y_3, & x_4 &\rightarrow \frac{2}{3}\beta_1 + \frac{2}{3}y_1 + y_2 + y_3, \\
x_5 &\rightarrow \frac{2}{3}\beta_1 - \frac{1}{3}y_1 - y_3, & x_6 &\rightarrow \frac{2}{3}\beta_1 - \frac{1}{3}y_1 - y_2.
\end{aligned}$$

$$x_1 + x_6 \rightarrow \frac{1}{3}\beta_1 - \frac{2}{3}y_1.$$

$$\begin{aligned}
a_1 &\rightarrow -y_1 + y_2, & c_{12} &\rightarrow \beta_1 - y_2 - y_3, \\
a_2 &\rightarrow -y_1 + y_3, & c_{13} &\rightarrow \beta_1 + y_1 + y_3, \\
a_3 &\rightarrow -y_1 + y_4, & c_{14} &\rightarrow -y_2 + y_4, \\
a_4 &\rightarrow \beta_1 + y_2 + y_3, & c_{15} &\rightarrow -y_2 + y_3, \\
a_5 &\rightarrow \beta_1 - y_1 - y_3, & c_{23} &\rightarrow \beta_1 + y_1 + y_2, \\
a_6 &\rightarrow \beta_1 - y_1 - y_2, & c_{24} &\rightarrow -y_3 + y_4.
\end{aligned}$$

$$H^*(E_6/T^1 \cdot SU(4)) \cong$$

$$\cong ((R[\beta_1] \odot S(y_1, y_2, y_3, y_4)) / \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \otimes \wedge(z_5, z_9).$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad g^\Theta &= t^1 \oplus B_3 \\
i_1 &= 2, i_2 = 3, i_3 = 4, j = 1 \\
t^\Theta &= t^1 \oplus R(\overline{H}_2, \overline{H}_3, \overline{H}_4) \\
t^1 &= R(\overline{H}_1 - \sum_{k=1}^3 c_{1k} \overline{H}_{i_k}), \quad \sum_{k=1}^3 c_{1k} a_{i_l i_k} = a_{i_l 1} \quad 1 \leq l \leq 2
\end{aligned}$$

$$t^\Theta = R(\overline{H}_1 + \frac{3}{2}\overline{H}_2 + 2\overline{H}_3 + \overline{H}_4) \oplus R(\overline{H}_2, \overline{H}_3, \overline{H}_4)$$

β_1 — канонические координаты на t^1 ,

y_1, y_2, y_3 — канонические координаты на B_3 соответствующие векторам $\overline{H}_4, \overline{H}_3, \overline{H}_2$.

Тогда имеем $y_3(\overline{H}_4) = 0$ $y_3(\overline{H}_3) = -1$ $y_3(\overline{H}_2) = 2$

$y_2(\overline{H}_4) = -1$ $y_2(\overline{H}_3) = 1$ $y_2(\overline{H}_2) = 0$

$y_1(\overline{H}_4) = 1$ $y_1(\overline{H}_3) = 0$ $y_1(\overline{H}_2) = 0$

$$\begin{aligned}
x_1 &\rightarrow \frac{2}{3}\beta_1 - \frac{1}{3}y_1, & x_2 &\rightarrow \frac{1}{6}\beta_1 + (\frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3), \\
x_3 &\rightarrow \frac{1}{6}\beta_1 + (\frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3), & x_4 &\rightarrow \frac{1}{6}\beta_1 + (\frac{1}{6}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3), \\
x_5 &\rightarrow \frac{1}{6}\beta_1 + (\frac{1}{6}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3), & x_6 &\rightarrow -\frac{1}{3}\beta_1 + \frac{2}{3}y_1.
\end{aligned}$$

$$x_1 + x_6 \rightarrow \frac{1}{3}\beta_1 + \frac{1}{3}y_1.$$

$$\begin{array}{ll}
a_1 \rightarrow \beta_1, & c_{12} \rightarrow \frac{1}{2}(-\beta_1 + y_1 - y_2 - y_3), \\
a_2 \rightarrow \frac{1}{2}(\beta_1 + y_1 + y_2 + y_3), & c_{13} \rightarrow \frac{1}{2}(-\beta_1 + y_1 - y_2 + y_3), \\
a_3 \rightarrow \frac{1}{2}(\beta_1 + y_1 + y_2 - y_3), & c_{14} \rightarrow \frac{1}{2}(-\beta_1 + y_1 + y_2 - y_3), \\
a_4 \rightarrow \frac{1}{2}(\beta_1 + y_1 - y_2 + y_3), & c_{15} \rightarrow \frac{1}{2}(-\beta_1 + y_1 + y_2 + y_3), \\
a_5 \rightarrow \frac{1}{2}(\beta_1 + y_1 - y_2 - y_3), & c_{23} \rightarrow -y_2, \\
a_6 \rightarrow y_1, & c_{24} \rightarrow -y_3.
\end{array}$$

$$H^*(E_6/T^1 \cdot SO(7)) \cong$$

$$\cong ((R[\beta_1] \odot S(y_1^2, y_2^2, y_3^2))/\langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \odot \wedge(z_5, z_9).$$

$$\bullet g^\Theta = t^1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$$

$$i_1 = 0, i_2 = 2, i_3 = 4,$$

$$t^\Theta = t^1 \oplus R(\overline{H}_2, \overline{H}_3, \overline{H}_4)$$

$$j = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{2, 4\} \Rightarrow j = 1, 2$$

Векторы $\overline{H}_1 - \sum_{k=1}^3 c_{1k} \overline{H}_{i_k}$ и $\overline{H}_3 - \sum_{k=1}^3 c_{3k} \overline{H}_{i_k}$ должны быть коллинеарными потому, что они принадлежат t^1 . Поэтому, достаточно брать $j = 1$.

$$t^1 = R(\overline{H}_1 - \sum_{k=1}^3 c_{1k} \overline{H}_{i_k}), \quad \sum_{k=1}^3 c_{1k} a_{i_k l} = a_{i_l 1} \quad 1 \leq l \leq 2$$

$$t^\Theta = R(-\overline{H}_2 - 2\overline{H}_3 - \overline{H}_4) \oplus R(\overline{H}_0, \overline{H}_2, \overline{H}_4)$$

β_1 — канонические координаты на t^1 .

y_1, y_2, y_3 — канонические координаты на A_1, A_1, A_1 соответствующие векторами $\overline{H}_0, \overline{H}_2, \overline{H}_4$

Тогда имеем

$$\begin{array}{ll}
x_1 \rightarrow \frac{1}{3}\beta_1 - \frac{4}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_3, & x_2 \rightarrow -\frac{2}{3}\beta_1 - \frac{1}{3}y_1 + y_2 - \frac{1}{3}y_3, \\
x_3 \rightarrow -\frac{2}{3}\beta_1 - \frac{1}{3}y_1 - y_2 - \frac{1}{3}y_3, & x_4 \rightarrow \frac{1}{3}\beta_1 - \frac{1}{3}y_1 + y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\
x_5 \rightarrow \frac{1}{3}\beta_1 - \frac{1}{3}y_1 - y_2 + \frac{2}{3}y_3, & x_6 \rightarrow -\frac{2}{3}\beta_1 + \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_3.
\end{array}$$

$$x_1 + x_6 \rightarrow \frac{1}{3}(-\beta_1 - 2y_1 + y_3),$$

$$\begin{array}{ll}
a_1 \rightarrow -2y_1, & c_{12} \rightarrow y_1 - y_2 + y_3, \\
a_2 \rightarrow -\beta_1 - y_1 + y_2, & c_{13} \rightarrow y_1 + y_2 + y_3, \\
a_3 \rightarrow -\beta_1 - y_1 - y_2, & c_{14} \rightarrow -\beta_1 + y_1 - y_2, \\
a_4 \rightarrow -y_1 + y_2 + y_3, & c_{15} \rightarrow -\beta_1 + y_1 + y_2, \\
a_5 \rightarrow -y_1 - y_2 + y_3, & c_{23} \rightarrow \beta_1 + y_3, \\
a_6 \rightarrow -\beta_1 + y_3, & c_{24} \rightarrow -2y_2.
\end{array}$$

$$H^*(E_6/T^1 \cdot SU(2) \cdot SU(2) \cdot SU(2)) \cong$$

$$\cong ((R[\beta_1] \odot R[y_1^2] \odot R[y_2^2] \odot R[y_3^2]) / \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \odot \wedge(z_5, z_9).$$

$$\bullet g^\Theta = t^1 \oplus A_1 \oplus A_2$$

$$i_1 = 1, i_2 = 3, i_3 = 4, j = 2.$$

$$t^\Theta = t^1 \oplus R(\overline{H}_2, \overline{H}_3, \overline{H}_4)$$

$$t^1 = R(\overline{H}_2 - \sum_{k=1}^3 c_{2k} \overline{H}_{i_k}), \quad \sum_{k=1}^3 c_{2k} a_{i_l i_k} = a_{i_l 2} \quad 1 \leq l \leq 3$$

$$t^\Theta = R(\overline{H}_2 + \frac{1}{2}\overline{H}_1 + \frac{4}{3}\overline{H}_3 + \frac{2}{3}\overline{H}_4) \oplus R(\overline{H}_1, \overline{H}_3, \overline{H}_4)$$

β_1 — канонические координаты на t^1 ,

y_1, y_2 — канонические координаты на A_1 соответствующие вектору $\overline{H}_1$

u_1, u_2, u_3 — канонические координаты на A_2 соответствующие векторам $\overline{H}_3, \overline{H}_4$

$$x_1 \rightarrow \frac{5}{18}\beta_1 + y_1 + \frac{1}{3}u_3,$$

$$x_2 \rightarrow \frac{5}{18}\beta_1 - y_1 + \frac{1}{3}u_3,$$

$$x_3 \rightarrow \frac{1}{9}\beta_1 + y_1 + \frac{1}{3}u_3,$$

$$x_4 \rightarrow \frac{1}{9}\beta_1 - y_1 - \frac{2}{3}u_3,$$

$$x_5 \rightarrow -\frac{1}{18}\beta_1 + y_1 - \frac{2}{3}u_3,$$

$$x_6 \rightarrow -\frac{1}{18}\beta_1 - y_1 - \frac{1}{3}u_3,$$

$$x_1 + x_6 \rightarrow \frac{2}{9}\beta_1 - \frac{1}{3}u_3,$$

$$a_1 \rightarrow \frac{1}{2}\beta_1 + y_1,$$

$$c_{12} \rightarrow -\frac{1}{3}\beta_1 - u_3,$$

$$a_2 \rightarrow \frac{1}{2}\beta_1 - y_1,$$

$$c_{13} \rightarrow -\frac{1}{6}\beta_1 - y_1 - u_1 - u_3,$$

$$a_3 \rightarrow \frac{1}{3}\beta_1 + y_1,$$

$$c_{14} \rightarrow -\frac{1}{6}\beta_1 - y_1 + u_1,$$

$$a_4 \rightarrow \frac{1}{3}\beta_1 - y_1 - u_3,$$

$$c_{15} \rightarrow -2y_1,$$

$$a_5 \rightarrow \frac{1}{6}\beta_1 + y_1 - u_3,$$

$$c_{23} \rightarrow -\frac{1}{6}\beta_1 + y_1 - u_1 - u_3,$$

$$a_6 \rightarrow \frac{1}{6}\beta_1 - y_1 - u_3,$$

$$c_{24} \rightarrow -\frac{1}{6}\beta_1 + y_1 + u_1,$$

$$H^*(E_6/T^1 \cdot SU(2) \cdot SU(3)) \cong$$

$$\cong ((R[\beta_1] \odot S(y_1, y_2) \odot S(u_1, u_2, u_3)) / \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \odot \wedge(z_5, z_9).$$

$$\bullet g^\Theta = t^1 \oplus C_2 \oplus A_1$$

$$i_1 = 0, i_2 = 2, i_3 = 3, j = 1,$$

$$t^\Theta = t^1 \oplus R(\overline{H}_0, \overline{H}_2, \overline{H}_3) \\ t^1 = R(\overline{H}_1 - \sum_{k=1}^3 c_{1k} \overline{H}_{i_k}), \quad \sum_{k=1}^3 c_{1k} a_{ii_k} = a_{i1} \quad 1 \leq l \leq 3$$

$$t^\Theta = R(-\frac{1}{2}\overline{H}_2 - \overline{H}_3 - \overline{H}_4) \oplus R(\overline{H}_0, \overline{H}_2, \overline{H}_3)$$

β_1 — канонические координаты на t^1 .

y_1, y_2 — канонические координаты на C_2 соответствующие векторам $\overline{H}_2, \overline{H}_3$

y_3 — канонические координаты на A_1

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow \frac{1}{3}\beta_1 - \frac{1}{3}y_3, & x_2 &\rightarrow -\frac{1}{6}\beta_1 - \frac{1}{3}y_3 + y_1, \\ x_3 &\rightarrow -\frac{1}{6}\beta_1 - \frac{1}{3}y_3 + y_2, & x_4 &\rightarrow -\frac{1}{6}\beta_1 - \frac{1}{3}y_3 - y_2, \\ x_5 &\rightarrow -\frac{1}{6}\beta_1 - \frac{1}{3}y_3 - y_1, & x_6 &\rightarrow -\frac{1}{3}\beta_1 + \frac{2}{3}y_3, \end{aligned}$$

$$x_1 + x_6 \rightarrow -\frac{1}{3}\beta_1 - \frac{2}{3}y_3,$$

$$\begin{aligned} a_1 &\rightarrow -2y_3, & c_{12} &\rightarrow -\frac{1}{2}\beta_1 + y_3 - y_1, \\ a_2 &\rightarrow -\frac{1}{2}\beta_1 - y_3 + y_1, & c_{13} &\rightarrow -\frac{1}{2}\beta_1 + y_3 - y_2, \\ a_3 &\rightarrow -\frac{1}{2}\beta_1 - y_3 + y_2, & c_{14} &\rightarrow -\frac{1}{2}\beta_1 + y_3 + y_2, \\ a_4 &\rightarrow -\frac{1}{2}\beta_1 - y_3 - y_2, & c_{15} &\rightarrow -\frac{1}{2}\beta_1 + y_3 + y_1, \\ a_5 &\rightarrow -\frac{1}{2}\beta_1 - y_3 - y_1, & c_{23} &\rightarrow -y_1 - y_1, \\ a_6 &\rightarrow -\beta_1, & c_{24} &\rightarrow -y_1 + y_2. \end{aligned}$$

$$H^*(E_6/T^1 \cdot SO(4) \cdot SU(2)) \cong$$

$$\cong ((R[\beta_1] \otimes S(y_1^2, y_2^2) \otimes R[y_3^2]) / \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \otimes \wedge(z_5, z_9).$$

- $g^\Theta = t^1 \oplus C_3$
 $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3, j = 4,$
 $t^\Theta = t^1 \oplus R(\overline{H}_1, \overline{H}_2, \overline{H}_3)$
 $t^1 = R(\overline{H}_4 - \sum_{k=1}^3 c_{4k} \overline{H}_{i_k}), \quad \sum_{k=1}^3 c_{4k} a_{ii_k} = a_{i4} \quad 1 \leq l \leq 3$

$$t^\Theta = R(\overline{H}_4 + \frac{1}{2}\overline{H}_1 + \overline{H}_2 + \frac{3}{2}\overline{H}_3) \oplus R(\overline{H}_1, \overline{H}_2, \overline{H}_3)$$

β_1 — канонические координаты на t^1 .

y_1, y_2, y_3 — канонические координаты на C_3 .

Тогда имеется

$$\begin{array}{lll} y_3(\overline{H}_1) = 0 & y_2(\overline{H}_1) = -1 & y_1(\overline{H}_1) = 1 \\ y_3(\overline{H}_2) = -1 & y_2(\overline{H}_2) = 1 & y_1(\overline{H}_2) = 0 \\ y_3(\overline{H}_3) = 1 & y_2(\overline{H}_3) = 0 & y_1(\overline{H}_3) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x_1 \rightarrow \frac{1}{6}\beta_1 + y_1, & x_2 \rightarrow \frac{1}{6}\beta_1 + y_2, \\ x_3 \rightarrow \frac{1}{6}\beta_1 + y_3, & x_4 \rightarrow \frac{1}{6}\beta_1 - y_3, \\ x_5 \rightarrow \frac{1}{6}\beta_1 - y_2, & x_6 \rightarrow \frac{1}{6}\beta_1 - y_1, \end{array}$$

$$x_1 + x_6 \rightarrow \frac{1}{3}\beta_1.$$

$$\begin{array}{ll} a_1 \rightarrow \frac{1}{2}\beta_1 + y_1, & c_{12} \rightarrow -y_1 - y_2, \\ a_2 \rightarrow \frac{1}{2}\beta_1 + y_2, & c_{13} \rightarrow -y_1 - y_3, \\ a_3 \rightarrow \frac{1}{2}\beta_1 + y_3, & c_{14} \rightarrow -y_1 + y_3, \\ a_4 \rightarrow \frac{1}{2}\beta_1 - y_3, & c_{15} \rightarrow -y_1 + y_2, \\ a_5 \rightarrow \frac{1}{2}\beta_1 - y_2, & c_{23} \rightarrow -y_2 - y_3, \\ a_6 \rightarrow \frac{1}{2}\beta_1 - y_1, & c_{24} \rightarrow -y_2 + y_3. \end{array}$$

$$H^*(E_6/T^1, SO(6)) \cong$$

$$\cong ((R[\beta_1] \otimes S(y_1^2, y_2^2, y_3^2))/\langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \otimes \wedge(z_5, z_9).$$

$$5. \dim(\xi(g^\Theta)) = 0$$

- $g^\Theta = F_4$
 $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3, i_4 = 4$

$$t^\Theta = R(\overline{H}_1, \overline{H}_2, \overline{H}_3, \overline{H}_4)$$

y_1, y_2, y_3, y_4 — канонические координаты на F_4 соответствующие векторами $\overline{H}_1, \overline{H}_2, \overline{H}_3, \overline{H}_4$.

Тогда имеется

$$\begin{array}{llll} y_4(\overline{H}_1) = -1 & y_3(\overline{H}_1) = -1 & y_2(\overline{H}_1) = -1 & y_1(\overline{H}_1) = 1 \\ y_4(\overline{H}_2) = 2 & y_3(\overline{H}_2) = 0 & y_2(\overline{H}_2) = 0 & y_1(\overline{H}_2) = 0 \\ y_4(\overline{H}_3) = 0 & y_3(\overline{H}_3) = 1 & y_2(\overline{H}_3) = 0 & y_1(\overline{H}_3) = 0 \\ y_4(\overline{H}_4) = 0 & y_3(\overline{H}_4) = -1 & y_2(\overline{H}_4) = 1 & y_1(\overline{H}_4) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x_1 \rightarrow \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2, & x_2 \rightarrow \frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{6}y_2 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4, \\ x_3 \rightarrow \frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{6}y_2 + \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4, & x_4 \rightarrow \frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{6}y_2 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4. \end{array}$$

$$x_5 \rightarrow \frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{6}y_2 - \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4, \quad x_6 \rightarrow -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2,$$

$$x_1 + x_6 \rightarrow \frac{1}{3}(y_1 + y_2).$$

$$\begin{array}{ll} a_1 \rightarrow y_1, & c_{12} \rightarrow \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 - y_3 - y_4), \\ a_2 \rightarrow \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 - y_4), & c_{13} \rightarrow \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 - y_3 + y_4), \\ a_3 \rightarrow \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 - y_4), & c_{14} \rightarrow \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3 - y_4), \\ a_4 \rightarrow \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3 + y_4), & c_{15} \rightarrow \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3 + y_4), \\ a_5 \rightarrow \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3 - y_4), & c_{23} \rightarrow -y_3, \\ a_6 \rightarrow y_2, & c_{24} \rightarrow y_4. \end{array}$$

В работе [2] показано, что $q_k = r(I_k)$ являются образующими для $H^*(B_{F_4})$ и поэтому

$$H^*(E_6/F_4) \cong \Lambda(z_5, z_9).$$

Замечание: Всякая подгруппа группы E_6 , которая получается как стационарная группа внешнего автоморфизма конечного порядка, является одновременно и подгруппой группы F_4 . Для группы C_4 это свойство доказано в статье [2], а в случае остальных подгрупп это становится очевидным, если рассмотреть подсхемы расширенной схемы Дынкина группы F_4 и схемы Каца-Дынкина группы E_6 .

- $g^\Theta = A_3 \oplus A_1$
 $i_1 = 0, i_2 = 1, i_3 = 2, i_4 = 4$

$$t^\Theta = R(\overline{H}_0, \overline{H}_1, \overline{H}_2, \overline{H}_4)$$

y_1, y_2, y_3, y_4 — канонические координаты на A_3 соответствующие векторами $\overline{H}_0, \overline{H}_1, \overline{H}_2$.

y_5 — канонические координаты на A_1

$$\begin{array}{ll} x_1 \rightarrow -\frac{1}{3}y_1 + y_2 - \frac{1}{3}y_5, & x_2 \rightarrow -\frac{1}{3}y_1 + y_3 - \frac{1}{3}y_5, \\ x_3 \rightarrow -\frac{1}{3}y_1 - y_2 - y_3 - \frac{1}{3}y_5, & x_4 \rightarrow \frac{2}{3}y_1 + y_2 + y_3 + \frac{2}{3}y_5, \\ x_5 \rightarrow -\frac{1}{3}y_1 - y_3 + \frac{2}{3}y_5, & x_6 \rightarrow -\frac{1}{3}y_1 - y_2 + \frac{2}{3}y_5, \end{array}$$

$$x_1 + x_6 \rightarrow -\frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_5,$$

$$a_1 \rightarrow -y_1 + y_2, \quad c_{12} \rightarrow -y_2 - y_3 + y_5.$$

$$\begin{array}{ll}
a_2 \rightarrow -y_1 + y_3, & c_{13} \rightarrow y_1 + y_3 + y_5, \\
a_3 \rightarrow -y_1 + y_4, & c_{14} \rightarrow -y_1 - 2y_2 - y_3, \\
a_4 \rightarrow y_2 + y_3 + y_5, & c_{15} \rightarrow -y_2 + y_3, \\
a_5 \rightarrow -y_1 - y_3 + y_5, & c_{23} \rightarrow y_1 + y_2 + y_5, \\
a_6 \rightarrow -y_1 - y_2 + y_5, & c_{24} \rightarrow y_4 - y_3.
\end{array}$$

$$H^*(E_6/SU(4) \cdot SU(2)) \cong$$

$$((S(y_1, y_2, y_3, y_4) \odot R[y_5^2]) / \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \odot \wedge(z_5, z_9).$$

- $g^\Theta = A_2 \oplus A_2$
 $i_1 = 0, i_2 = 1, i_3 = 3, i_4 = 4$

$$t^\Theta = R(\overline{H}_0, \overline{H}_1, \overline{H}_3, \overline{H}_4)$$

y_1, y_2, y_3 — канонические координаты на A_2 соответствующие векторами $\overline{H}_0, \overline{H}_1, \overline{H}_2$.

y_4, y_5, y_6 — канонические координаты на A_2 соответствующие векторами $\overline{H}_3, \overline{H}_4$

$$\begin{array}{ll}
x_1 \rightarrow -\frac{1}{3}y_1 + y_2 - \frac{1}{3}y_4 - \frac{1}{3}y_5, & x_2 \rightarrow -\frac{4}{3}y_1 - y_2 - \frac{1}{3}y_4 - \frac{1}{3}y_5, \\
x_3 \rightarrow -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_4 - \frac{1}{3}y_5, & x_4 \rightarrow -\frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_4 + \frac{2}{3}y_5, \\
x_5 \rightarrow \frac{2}{3}y_1 + y_2 + \frac{2}{3}y_4 + \frac{2}{3}y_5, & x_6 \rightarrow -\frac{1}{3}y_1 - y_2 + \frac{2}{3}y_4 + \frac{2}{3}y_5.
\end{array}$$

$$x_1 + x_6 \rightarrow -\frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_4 + \frac{1}{3}y_5,$$

$$\begin{array}{ll}
a_1 \rightarrow -y_1 + y_2, & c_{12} \rightarrow y_1 + y_4 + y_5, \\
a_2 \rightarrow -y_1 + y_3, & c_{13} \rightarrow -y_2 + y_5, \\
a_3 \rightarrow -y_1 + y_4, & c_{14} \rightarrow -y_2 + y_4, \\
a_4 \rightarrow -y_1 + y_5, & c_{15} \rightarrow -y_2 + y_3, \\
a_5 \rightarrow y_2 + y_4 + y_5, & c_{23} \rightarrow y_1 + y_2 + y_5, \\
a_6 \rightarrow -y_1 - y_2 + y_4 + y_5, & c_{24} \rightarrow y_1 + y_2 + y_4.
\end{array}$$

$$H^*(E_6/SU(3) \cdot SU(3)) \cong$$

$$((S(y_1, y_2, y_3) \odot S(y_4, y_5, y_6)) / \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \odot \wedge(z_5, z_9).$$

- $g^\Theta = A_1 \oplus B_3$
 $i_1 = 0, i_2 = 2, i_3 = 3, i_4 = 4$

$$l^\Theta = R(\overline{H}_0, \overline{H}_2, \overline{H}_3, \overline{H}_4)$$

y_4 — канонические координаты на A_1

y_1, y_2, y_3 — канонические координаты на B_3 соответствующие векторам $\overline{H}_2, \overline{H}_3, \overline{H}_4$.

Тогда имеется

$$\begin{aligned} y_3(\overline{H}_4) &= 0 & y_2(\overline{H}_4) &= -1 & y_1(\overline{H}_4) &= 1 \\ y_3(\overline{H}_3) &= -1 & y_2(\overline{H}_3) &= 1 & y_1(\overline{H}_3) &= 0 \\ y_3(\overline{H}_2) &= 2 & y_2(\overline{H}_2) &= 0 & y_1(\overline{H}_2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow -\frac{1}{3}y_1 - \frac{4}{3}y_4, & x_2 &\rightarrow \frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{3}y_4, \\ x_3 &\rightarrow \frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{3}y_4, & x_4 &\rightarrow \frac{1}{6}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{3}y_4, \\ x_5 &\rightarrow \frac{1}{6}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{3}y_4, & x_6 &\rightarrow \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_4. \end{aligned}$$

$$x_1 + x_6 \rightarrow \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_4.$$

$$\begin{aligned} a_1 &\rightarrow -2y_4, & c_{12} &\rightarrow \frac{1}{5}(y_1 - y_2 - y_3) + y_4, \\ a_2 &\rightarrow \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3) - y_4, & c_{13} &\rightarrow \frac{1}{5}(y_1 - y_2 + y_3) + y_4, \\ a_3 &\rightarrow \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3) - y_4, & c_{14} &\rightarrow \frac{1}{5}(y_1 + y_2 - y_3) + y_4, \\ a_4 &\rightarrow \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3) - y_4, & c_{15} &\rightarrow \frac{1}{5}(y_1 + y_2 + y_3) + y_4, \\ a_5 &\rightarrow \frac{1}{2}(y_1 - y_2 - y_3) - y_4, & c_{23} &\rightarrow -y_2, \\ a_6 &\rightarrow y_1, & c_{24} &\rightarrow -y_3. \end{aligned}$$

$$H^*(E_6/SU(2) \cdot SO(7)) \cong$$

$$((R[y_1^2] \otimes S(y_1^2, y_3^2, y_4^2))/\langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \otimes \wedge(z_5, z_9).$$

$$\bullet \quad g^\Theta = C_4$$

$$i_1 = 0, i_2 = 1, i_3 = 2, i_4 = 3$$

$$t^\Theta = R(\overline{H}_0, \overline{H}_1, \overline{H}_2, \overline{H}_3)$$

y_1, y_2, y_3, y_4 — канонические координаты на C_4

$$\begin{aligned} y_4(\overline{H}_0) &= 0 & y_3(\overline{H}_0) &= 0 & y_2(\overline{H}_0) &= -1 & y_1(\overline{H}_0) &= 1 \\ y_4(\overline{H}_1) &= 0 & y_3(\overline{H}_1) &= -1 & y_2(\overline{H}_1) &= 1 & y_1(\overline{H}_1) &= 0 \\ y_4(\overline{H}_2) &= -1 & y_3(\overline{H}_2) &= 1 & y_2(\overline{H}_2) &= 0 & y_1(\overline{H}_2) &= 0 \\ y_4(\overline{H}_3) &= 1 & y_3(\overline{H}_3) &= 0 & y_2(\overline{H}_3) &= 0 & y_1(\overline{H}_3) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow -\frac{1}{3}y_1 + y_2, & x_2 &\rightarrow -\frac{1}{3}y_1 + y_3, \\ x_3 &\rightarrow -\frac{1}{3}y_1 + y_4, & x_4 &\rightarrow -\frac{1}{3}y_1 - y_4, \end{aligned}$$

$$x_5 \rightarrow -\frac{1}{3}y_1 - y_3,$$

$$x_6 \rightarrow -\frac{1}{3}y_1 - y_2,$$

$$x_1 + x_6 \rightarrow -\frac{2}{3}y_1,$$

$$a_1 \rightarrow -y_1 + y_2,$$

$$c_{12} \rightarrow -y_2 - y_3,$$

$$a_2 \rightarrow -y_1 + y_3,$$

$$c_{13} \rightarrow -y_2 - y_4,$$

$$a_3 \rightarrow -y_1 + y_4,$$

$$c_{14} \rightarrow y_2 + y_4,$$

$$a_4 \rightarrow -y_1 - y_4,$$

$$c_{15} \rightarrow -y_2 + y_3,$$

$$a_5 \rightarrow -y_1 - y_3,$$

$$c_{23} \rightarrow -y_3 - y_4,$$

$$a_6 \rightarrow -y_1 - y_2,$$

$$c_{24} \rightarrow y_4 - y_3.$$

$$H^*(E_6/C_4) \cong$$

$$(S(y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_4^2)/\langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \otimes \Lambda(z_5, z_9).$$

Замечание: Напомним, что из предыдущих рассуждений следует, что для каждого обобщенного симметрического пространства соответствующая стационарная подгруппа находится в нормальном положении и поэтому полином Пуанкаре этих пространств имеет общий вид указан в Замечании 3.

Глава 4

Характеристические классы Понтрягина обобщенных симметрических пространств

В работе Бореля-Хирцербруха [12] дана явная формула которая описывает классы Понтрягина с вещественными коэффициентами однородного пространства G/U . Для ее применения нам нужно знать как действует дифференциал $\rho^*(U, G)$ соответствующей алгебры Картана и дополняющие корни группы G относительно подгруппы U . Поэтому, результаты предыдущей главы дают возможность применить упомянутую формулу в случае обобщенных симметрических пространств, т.е. вычислить их классы Понтрягина.

4.1 Полный класс Понтрягина однородного пространства

Классы Понтрягина вещественного векторного расслоения в основном определяются через классы Черна соответствующего комплексифицированного расслоения. Существует семь определений классов Черна, они перечислены в работе [13], причем доказана их равносильность. Приведем определение, на которое опирается теорема, которой мы будем пользоваться. Оно может быть сформулировано следующим способом.

- 1) Для расслоения Хопфа положим, что $c_1 = -\tau(x)$, где τ — трансгрессия, а x является каноническим образующим для $H^*(C^*, \mathbb{Z})$.
- 2) Для любого C^* — расслоения, c_1 определяется с помощью характеристического отображения.
- 3) В случае $GL(n, \mathbb{C})$ — расслоения, каждому такому расслоению ξ сопоставим его ассоциированное флаговое расслоение $Fl(\xi)$ (см. [14]). Обратный образ расслоения ξ над $Fl(\xi)$ расщепляется в прямую

сумму линейных расслоений ξ_i . Определим классы Черна расслоения ξ как элементарные симметрические функции классов Черна линейных расслоений ξ_i .

Из определения непосредственно следует, что полный класс Понтрягина расслоения ξ имеет вид

$$p(\xi) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i^2),$$

где x_i представляют классы Черна расслоений ξ_i .

Для дальнейшего нам понадобится еще понятие дополняющих корней.

Пусть G — связная компактная группа Ли, U — ее подгруппа, S — максимальный тор подгруппы U и T — максимальный тор группы G . Пусть формы $\{\pm a_1, \dots, \pm a_m\}$ представляют корни группы G относительно S . Из леммы 1.1.1 видно, что корни $\{\pm a_1, \dots, \pm a_m\}$ можно выбрать таким образом, что $\{\pm a_1, \dots, \pm a_q\}$ представляют корни подгруппы U . В этом случае формы $\pm a_i$ ($q < i \leq m$) называются дополняющими корнями для U .

Оказывается, что дополняющие корни позволяют полностью описать полный класс Понтрягина соответствующего однородного пространства.

Пусть σ^* — характеристический гомоморфизм однородного пространства G/U и $\tau' : H^1(S) \rightarrow H^2(B_S)$ трансгрессия. Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема 4.1.1 а) Существует класс $\bar{p} \in H^*(B_U)$, такой, что

$$\rho^*(S, U)\bar{p} = \prod (1 + (\tau' b_j)^2),$$

где $\pm b_j$ представляют дополняющие корни для U и

$$p(G/U) = \sigma^*(\bar{p}).$$

б) Если U — связная подгруппа, то, отождествляя $H^*(G/U)$ с $H^*(L)$, где $L = H^*(B_U) \otimes H^*(G)$ представляет алгебру Картана, получаем, что

$$p(G/U) = q(\bar{p}) = (\bar{p} \bmod \rho^*(U, G)(H^*(B_G))) \otimes 1.$$

Предыдущая теорема, точнее ее первая часть которая и составляет содержание теоремы, сформулирована в статье [12] без явного доказательства. Оно полностью проведено в работе [2].

Замечание 6: Из доказательства теоремы получается, что $p(G/U) = 1$ если $\bar{p}$ находится в образе отображения $\rho^*(U, G)$. Поэтому, очевидно, что $p(G/S) = 1$ для любого тора S группы G .

Мы будем опускать символы τ' и $\rho^*(S, U)$, отождествляя $H^*(B_U)$ и $R[s]^{W_U}$ с помощью этих отображений.

В случае обобщенных симметрических пространств первой категории (т.е. $\text{rank } U = \text{rank } G$) всякий максимальный тор T подгруппы U является одновременно максимальным тором группы G . Таким образом, чтобы получить дополняющие корни для U надо просто корни группы G (относительно тора T) выразить через канонические координаты подгруппы U и отметить формы которые не являются корнями подгруппы U . Поэтому, классы Понтрягина этих пространств находятся прямым применением теоремы 4.1.1.

Значит, интересным является только случай обобщенных симметрических пространств второй категории (т.е. $\text{rank } U < \text{rank } G$).

Но, в главе 4 получено описание базиса картановской подалгебры t^Θ через базис картановской подалгебры t , что делает теорему 4.1.1 применяемой и в случае обобщенных симметрических пространств второй категории.

4.2 Вычисления классов Понтрягина обобщенных симметрических пространств второй категории

Приведем вычисления классов Понтрягина для случая обобщенных симметрических пространств второй категории.

4.2.1 $g = A_{2n}$

Покажем, как вычислить классы Понтрягина на примере подгруппы $C_k \oplus B_{n-k}$. Корни группы A_{2n} имеют вид $x_i - x_j$, ($i \neq j, i, j = \overline{1, 2n+1}$).

Следующие формы получаются их сужением на t^Θ :

$$\pm y_i, \pm 2y_i, \pm y_i \pm y_j \quad (1 \leq i < j \leq n).$$

Корнями группы $C_k \cdot B_{n-k}$ являются следующие формы:

$$\pm y_i \pm y_j, \pm y_i \quad (1 \leq i < j \leq k),$$

$$\pm y_i \pm y_j, \pm 2y_i \quad (k+1 \leq i < j \leq n).$$

Поэтому, формы $\pm y_i \quad (k+1 \leq i \leq n)$, $\pm 2y_i \quad (1 \leq i \leq k)$, $\pm(y_i + y_j)$, $\pm(y_i - y_j)$ $(1 \leq i \leq k, k+1 \leq j \leq n)$

представляют дополняющие корни группы A_{2n} относительно подгруппы $C_k \cdot B_{n-k}$.

Таким образом получается, что

$$\bar{p} = \prod_{i=1}^k \prod_{j=k+1}^n (1 + (y_i + y_j)^2)(1 + (y_i - y_j)^2) \prod_{i=k+1}^n (1 + y_i^2) \prod_{i=1}^k (1 + (2y_i)^2).$$

Поэтому, применяя теорему 4.1.1 (б) получается, что полный класс Понтрягина пространства $A_{2n}/C_k \cdot B_{n-k}$ имеет вид

$$p(A_{2n}/C_k \cdot B_{n-k}) = (\bar{p} \bmod S^+(y_1^2, \dots, y_n^2)) \odot 1.$$

Заметим, что в случае $k = 0$ получаем, что $\bar{p} = \prod_{i=1}^n (1 + y_i^2)$ и для $k = n$ имеется $\bar{p} = \prod_{i=1}^n (1 + (2y_i)^2)$ и значит $\bar{p} \in \rho^*(U, G)$. Поэтому из замечания 6 следует, что полный класс Понтрягина соответствующего пространства является тривиальным т.е.

$$p(A_{2n}/C_n) = p(A_{2n}/B_n) = 1.$$

4.2.2 $g = A_{2n-1}$

Вычислим полный класс Понтрягина пространства $A_{2n-1}/D_k \cdot C_{n-k}$.

Корни группы A_{2n-1} имеют вид $x_i - x_j \quad (i \neq j, i, j = \overline{1, 2n})$. Следующие формы получаются их сужением на t^Θ :

$$\pm 2y_i, \pm y_i \pm y_j \quad (1 \leq i < j \leq n).$$

Корнями группы $D_k \cdot C_{n-k}$ являются формы:

$$\pm y_i \pm y_j \quad (1 \leq i < j \leq k),$$

$$\pm y_i \pm y_j, \pm 2y_i \quad (k+1 \leq i < j \leq n).$$

Поэтому, формы

$$\pm 2y_i \quad (1 \leq i \leq k), \pm(y_i + y_j), \pm(y_i - y_j) \quad (1 \leq i \leq k, k+1 \leq j \leq n)$$

являются дополняющими корнями группы A_{2n} относительно подгруппы $C_k \cdot B_{n-k}$.

Таким образом получается, что

$$\bar{p}(A_{2n-1}/D_k \cdot C_{n-k}) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=k+1}^n (1 + (y_i + y_j)^2)(1 + (y_i - y_j)^2) \prod_{i=1}^k (1 + (2y_i)^2).$$

Поэтому, полный класс Понтрягина нашего пространства имеет вид

$$p(A_{2n-1}/D_k \cdot C_{n-k}) = (\bar{p} \bmod S^+(y_1^2, \dots, y_n^2)) \odot 1.$$

Как и в случае алгебры A_{2n} для $k=0$ или $k=n$ получается тривиальный класс, т.е.

$$p(A_{2n-1}/D_n) = p(A_{2n-1}/C_n) = 1.$$

4.2.3 $g = D_{n+1}$

Теперь, вычислим полный класс Понтрягина пространства $D_{n+1}/B_k \cdot B_{n-k}$.

Корни группы D_{n+1} имеют вид $\pm x_i \pm x_j \quad (1 \leq i < j \leq n+1)$. Сужением на алгебру t^θ получаются формы

$$\pm y_i, \pm y_i \pm y_j \quad (1 \leq i < j \leq n).$$

Корни группы $B_k \cdot B_{n-k}$ имеют вид

$$\pm y_i \pm y_j, \pm y_i \quad (1 \leq i < j \leq k),$$

$$\pm y_i \pm y_j, \pm y_i \quad (k+1 \leq i < j \leq n).$$

Поэтому, следующие формы являются дополняющими корнями:

$$\pm y_i \pm y_j \quad (1 \leq i \leq k, k+1 \leq j \leq n).$$

Таким образом имеем

$$\bar{p}(D_{n+1}/B_k \cdot B_{n-k}) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=k+1}^n (1 + (y_i + y_j)^2)(1 + (y_i - y_j)^2).$$

$$p(D_{n+1}/B_k \cdot B_{n-k}) = (p \bmod S^+(y_1^2, \dots, y_n^2)) \cap 1.$$

Для $k = n$ дополняющих корней нет и поэтому

$$p(D_{n+1}/B_n) = 1.$$

4.2.4 $g = D_4$

Приведем вычисления классов Понтрягина отдельно для каждой стационарной подгруппы U группы D_4 . Через J_1, J_2 , следуя предыдущей главе, будем обозначать сужения образующих алгебры $H^*(B_{D_4})$ на соответствующую стационарную подалгебру.

- $g^\Theta = t^2$

Из замечания 6 сразу следует, что

$$p(D_4/T^2) = 1.$$

- $g^\Theta = A_1 \oplus t^1$

Корни группы D_4 : $\pm x_i \pm x_j$ ($1 \leq i < j \leq 4$).

Их сужение на t^Θ : $\pm(y_1 + \frac{1}{2}y_2), \pm(-y_1 + \frac{1}{2}y_2), \pm 2y_1, \pm y_2, \pm(3y_1 + \frac{1}{2}y_2), \pm(-3y_1 + \frac{1}{2}y_2)$.

Корни группы $T^1 \cdot A_1$: $\pm 2y_1$.

Дополняющие корни: $\pm(y_1 + \frac{1}{2}y_2), \pm(-y_1 + \frac{1}{2}y_2), \pm y_2, \pm(3y_1 + \frac{1}{2}y_2), \pm(-3y_1 + \frac{1}{2}y_2)$.

$$\bar{p} = (1 + y_1^2)(1 + (y_1 + \frac{1}{2}y_2)^2)(1 + (-y_1 + \frac{1}{2}y_2)^2)(1 + (3y_1 + \frac{1}{2}y_2)^2)(1 + (-3y_1 + \frac{1}{2}y_2)^2).$$

$$p(D_4/A_1 \cdot T^1) = (\bar{p} \bmod \langle J_1, J_2 \rangle) \cap 1.$$

- $g^\Theta = A_2$

Сужение корней группы D_4 на t^Θ : $\pm(y_3 - y_1), \pm(y_3 - y_2), \pm(y_1 - y_2), \pm 3y_3, \pm 3y_2, \pm 3y_1$.

Корни группы A_2 : $\pm(y_1 - y_2), \pm(y_1 - y_3), \pm(y_2 - y_3)$.

Дополняющие корни: $\pm 3y_3, \pm 3y_2, \pm 3y_1$.

$$\bar{p} = (1 + 9y_1^2)(1 + 9y_2^2)(1 + 9y_3^2).$$

$$p(D_4/A_2) = (\bar{p} \bmod \langle J_1, J_2 \rangle) \odot 1.$$

- $g^\Theta = g_2$

Сужение корней группы D_4 на t^Θ : $\pm(y_3 - y_1), \pm(y_3 - y_2), \pm(y_1 - y_2), \pm y_3, \pm y_2, \pm y_1$.

Корни группы G_2 : $\pm y_1, \pm y_2, \pm y_3, \pm(y_1 - y_3), \pm(y_2 - y_3), \pm(y_1 - y_2)$.

Дополняющих корней нет и поэтому

$$p(D_4/G_2) = 1.$$

- $g^\Theta = A_1 \oplus A_1$

Сужение корней группы D_4 на t^Θ : $\pm(y_1 - y_2), \pm(y_1 + y_2), \pm(-3y_1 + y_2), \pm(-3y_1 - y_2), \pm 2y_1, \pm 2y_2$.

Корни группы $A_1 \oplus A_1$: $\pm 2y_1, \pm 2y_2$.

Дополняющие корни: $\pm(y_1 + y_2), \pm(y_1 - y_2), \pm(3y_1 + y_2), \pm(-3y_1 - y_2)$.

$$\bar{p} = (1 + (y_1 + y_2)^2)(1 + (y_1 - y_2)^2)(1 + (y_2 - 3y_1)^2)(1 + (y_2 + 3y_1)^2).$$

$$p(D_4/A_1 \cdot a_1) = (\bar{p} \bmod \langle J_1, J_2 \rangle) \odot 1.$$

4.2.5 $g = E_6$

Корнями группы E_6 являются формы

$x_i - x_j$ ($i \neq j$), $\pm(x_i + x_j + x_k)$ ($i \neq j \neq k, i \neq k$) ($1 \leq i, j, k \leq 6$) $\pm(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$.

Учитывая, что $x_1 + x_6 = x_2 + x_5 = x_3 + x_4$ на каждой максимальной абелевой подалгебре стационарной подгруппы U , получаем, что нужно вычислить сужение следующих форм:

$$x_1 - x_2 = c_{15} \quad x_1 + x_2 + x_3 = d_{123} \quad x_2 + x_3 + x_6 = d_{236}$$

$$\begin{array}{lll}
x_1 - x_3 = c_{14} & x_1 + x_2 + x_4 = d_{124} & x_2 + x_4 + x_6 = d_{246} \\
x_1 - x_4 = c_{13} & x_1 + x_2 + x_5 = a_1 & x_2 + x_5 + x_6 = a_6 \\
x_1 - x_5 = c_{12} & x_1 + x_2 + x_6 = a_2 & x_3 + x_5 + x_6 = d_{356} \\
x_1 - x_6 = d_{16} & x_1 + x_3 + x_5 = d_{135} & x_4 + x_5 + x_6 = d_{456} \\
x_2 - x_3 = c_{24} & x_1 + x_3 + x_6 = a_3 & 3(x_1 + x_6). \\
x_2 - x_4 = c_{23} & x_1 + x_4 + x_5 = d_{145} & \\
x_2 - x_5 = d_{25} & x_1 + x_4 + x_6 = a_4 & \\
x_3 - x_4 = c_{23} & x_1 + x_5 + x_6 = a_5 &
\end{array}$$

Значит, для нахождения дополняющих корней надо рассматривать формы

$$\pm a_i \ (1 \leq i \leq 6), \ \pm c_{ij} \ (1 \leq i < j \leq 6, i+j \neq 7),$$

$$d_{ij} \ (i < j, i+j=7) \text{ и } d_{ijk} \ (1 \leq i < j \leq k, i+j \neq 7, i+k \neq 7, k+j \neq 7).$$

Мы будем такими же символами обозначать их сужение. Полиномы q_2, q_6, q_8, q_{12} представляют сужение образующих алгебры $H^*(B_{E_6})$ на соответствующую поалгебру и для каждой стационарной подалгебре они указаны в предыдущей главе.

- $g^\Theta = t^4$

Из замечания 5 очевидно, что

$$p(E_6/T^4) = 1.$$

- $g^\Theta = t^3 \oplus A_1$

Корнями группы $T^1 \cdot SU(2)$ являются формы $\pm 2y_1$. Поэтому, a_i, c_{ij} ($(i, j) \neq (1, 5)$), d_{ij} и d_{ijk} представляют дополняющие корни и

$$\bar{p} = \prod_{i=1}^6 (1 + a_i^2) \prod_{(i,j) \neq (1,5)} (1 + c_{ij}^2) \prod (1 + d_{ij}^2) \prod (1 + d_{ijk}^2).$$

$$p(E_6/T^3 \cdot SU(2)) = (\bar{p} \bmod \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \odot 1.$$

- $g^\Theta = t^2 \oplus C_2$

Корнями группы $T^2 \cdot SO(4)$ являются формы $\pm y_i \pm y_j$, $\pm 2y_i$ и поэтому, a_i , c_{1j} ($2 \leq j < 5$), d_{16} и d_{ijk} представляют дополняющие корни и

$$\bar{p} = \prod_{i=1}^6 (1 + a_i^2) \prod_{j=2}^5 (1 + c_{1j}^2) (1 + d_{16}^2) \prod (1 + d_{ijk}^2).$$

$$p(E_6/T^3 \cdot SO(4)) = (\bar{p} \bmod \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \odot 1.$$

- $g^\Theta = t^2 \oplus A_1 \oplus A_1$

Корнями группы $T^2 \cdot SU(2) \cdot SU(2)$ являются формы $\pm 2y_1$, $\pm 2y_2$ и поэтому, a_i , c_{1j} ($2 \leq j \leq 5$), c_{23} , d_{ijk} ($(i, j, k) \neq (4, 5, 6)$) представляют дополняющие корни и

$$\bar{p} = \prod_{i=1}^6 (1 + a_i^2) \prod (1 + c_{1j}^2) (1 + c_{23}^2) \prod_{(i,j,k) \neq (4,5,6)} (1 + d_{ijk}^2),$$

$$p(E_6/T^3 \cdot SU(2) \cdot SU(2)) = (\bar{p} \bmod \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \odot 1.$$

- $g^\Theta = t^2 \oplus A_2$

Корнями группы $T^2 \cdot SU(3)$ являются формы $y_i - y_j$, $\pm 2y_i$ и поэтому, a_i , c_{ij} , d_{16} , d_{25} и d_{ijk} ($i < 3$) представляют дополняющие корни и

$$\bar{p} = \prod_{i=1}^6 (1 + a_i^2) \prod (1 + c_{ij}^2) (1 + d_{16}^2) (1 + d_{25}^2) \prod_{i < 3} (1 + d_{ijk}^2).$$

$$p(E_6/T^3 \cdot SU(3)) = (\bar{p} \bmod \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \odot 1.$$

- $g^\Theta = t^1 \oplus A_3$

Корни группы $T^1 \cdot SU(4)$: $y_i - y_j$.

Дополняющие корни : $a_4, a_5, a_6, c_{12}, c_{13}, c_{23}, d_{ij}, d_{ijk}$.

$$\bar{p} = \prod_{i \geq 4} (1 + a_i^2) (1 + c_{12}^2) (1 + c_{13}^2) (1 + c_{23}^2) \prod (1 + d_{ij}^2) \prod (1 + d_{ijk}^2).$$

$$p(E_6/T^1 \cdot SU(4)) = (\bar{p} \bmod \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \odot 1.$$

- $g^\Theta = t^1 \oplus B_3$

Корни группы $T^1 \cdot SO(7)$: $\pm y_i \pm y_j, \pm y_i$.

Дополняющие корни: $a_i, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, d_{16}, d_{123}, d_{124}, d_{135}, d_{145}$.

$$\bar{p} = \prod (1 + a_i^2) \prod (1 + c_{1j}^2) \prod (1 + d_{16}^2) \prod (1 + d_{1jk}^2).$$

$$p(E_6/T^1 \cdot SO(7)) = (\bar{p} \bmod \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \odot 1.$$

- $g^\Theta = t^1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$

Корни группы $T^1 \cdot SU(2) \cdot SU(2) \cdot SU(2)$: $\pm 2y_1, \pm 2y_2, \pm 2y_3$.

Дополняющие корни: a_i ($i \geq 2$), c_{ij} ($(i, j) \neq (2, 4)$), d_{ij}, d_{ijk} ($(i, j, k) \neq (4, 5, 6)$).

$$\bar{p} = \prod_{i \geq 2} (1 + a_i^2) \prod_{(i,j) \neq (2,4)} (1 + c_{ij}^2) \prod (1 + d_{ij}^2) \prod (1 + d_{ijk}^2).$$

$$p(E_6/T^1 \cdot SO(7)) = (\bar{p} \bmod \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \odot 1.$$

- $g^\Theta = t^1 \oplus A_1 \oplus A_2$

Корни группы $T^1 \cdot SU(2) \cdot SU(3)$: $\pm 2y_1, u_i - u_j, \pm 2y_3$.

Дополняющие корни: a_i ($i \geq 2$), c_{ij} ($(i, j) \neq (1, 5)$), d_{16}, d_{25}, d_{ijk} ($i < 3$).

$$p = \prod_{i=1}^6 (1 + a_i^2) \prod_{(i,j) \neq (1,5)} (1 + c_{ij}^2) (1 + d_{16}^2) (1 + d_{25}^2) \prod_{i < 3} (1 + d_{ijk}^2).$$

- $g^\Theta = t^1 \oplus C_2 \oplus A_1$

Корни группы $T^1 \cdot SO(4) \cdot SU(2)$: $\pm y_1 \pm y_2, \pm 2y_1, \pm 2y_2, \pm 2y_3$.

Дополняющие корни: a_i ($i > 1$), c_{1j}, d_{16}, d_{ijk} .

$$\bar{p} = \prod_{i=2}^6 (1 + a_i^2) \prod_{j=2}^5 (1 + c_{1j}^2) (1 + d_{16}^2) \prod (1 + d_{ijk}^2).$$

- $g^\Theta = t^1 \oplus C_3$

Корни группы $T^1 \cdot SO(6)$: $\pm y_i \pm y_j, \pm 2y_i$.

Дополняющие корни: a_i ($1 \leq i < 1$), d_{ijk} .

$$\bar{p} = \prod_{i=1}^6 (1 + a_i^2) \prod (1 + d_{ijk}^2).$$

- $g^\Theta = F_4$

Корни группы F_4 : $\pm y_i \pm y_j, \pm y_i, \frac{1}{2}(\pm y_1 \pm y_2 \pm y_3 \pm y_4)$.
Дополняющих корней нет и поэтому

$$p(E_6/F_4) = 1.$$

- $g^\Theta = A_3 \oplus A_1$

Корни группы $SU(4) \cdot SU(2)$: $y_i - y_j$ ($i, j = \overline{1, 4}$), $\pm 2y_5$.
Дополняющие корни: $a_4, a_5, a_6, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{23}, d_{ijk}$ ($i, j, k \neq (4, 5, 6)$).

$$\bar{p} = \prod_{i=4}^6 (1 + a_i^2) \prod_{j=2}^4 (1 + c_{1j}^2)(1 + c_{23}^2) \prod_{(i,j,k) \neq (4,5,6)} (1 + d_{ijk}^2).$$

- $g^\Theta = A_2 \oplus A_2$

Корни группы $SU(3) \cdot SU(3)$: $y_i - y_j$ ($i, j = \overline{1, 3}$), $y_k - y_l$ ($k, l = \overline{4, 6}$).
Дополняющие корни: $a_3, a_4, a_5, a_6, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{23}, c_{24}, d_{16}, d_{25}, d_{ijk}$ $i < 3$.

$$\bar{p} = \prod_{i=3}^6 (1 + a_i^2) \prod_{j=1}^4 (1 + c_{1j}^2) \prod_{j=3}^4 (1 + c_{2j}^2)(1 + d_{16}^2)(1 + d_{25}^2) \prod_{i < 3} (1 + d_{ijk}^2).$$

- $g^\Theta = A_1 \oplus B_3$

Корни группы $SU(2) \cdot SO(7)$: $\pm y_i \pm y_j, \pm y_i$ ($i, j = \overline{1, 3}$), $\pm 2y_4$.
Дополняющие корни: $a_2, a_3, a_4, a_5, c_{1j}, d_{16}, d_{ijk}$ $i < 3$.

$$\bar{p} = \prod_{i=2}^5 (1 + a_i^2) \prod_{j=1}^5 (1 + c_{1j}^2) (1 + d_{16}^2)(1 + d_{25}^2) \prod (1 + d_{ijk}^2).$$

- $g^\Theta = C_4$

Корни группы C_4 : $\pm y_i \pm y_j, \pm 2y_i$.
Дополняющие корни: d_{ijk} .

$$\bar{p} = \prod (1 + d_{ijk}^2).$$

$$p(E_6/C_4) = (\bar{p} \bmod \langle q_2, q_6, q_8, q_{12} \rangle) \odot 1.$$

Список литературы

- [1] Адамс Дж.
Лекции по группам Ли. М.: Наука, 1979.
- [2] Takeuchi M.
On Pontrjagin classes of compact symmetric spaces// J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. I. - 1962. - V. 9. - P. 313-328.
- [3] Helgason S.
Differential Geometry, Lie groups and Symmetric spaces. - N. Y. - L.: Acad. Press, 1978.
- [4] Борель А.
О когомологиях главных расслоенных пространств и однородных пространств компактных групп Ли// Расслоенные пространства и их приложения.-М.: ИЛ, 1958. - С. 163-246
- [5] Фоменко А.Т.
Полиномы Пуанкаре некоторых однородных пространств// Тр. сем. вект. тенз. анализу. - М.: Изд-во МГУ, 1970, вып. 15, с.128-152.
- [6] Ковальский О.
Обобщенные симметрические пространства. Пер. с англ. - М.: Мир, 1984. - 240 с.
- [7] Лоос О.
Симметрические пространства. Пер. с англ. - М.: Наука, 1985. - 208 с.
- [8] Винберг Э.Б., Онищик А.Л.
Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: УРСС, 1995. - 343 с.
- [9] Кобаяси Ш., Номидзу К.
Основы дифференциальной геометрии. Т. 1..2.-М.: Наука, 1981.
- [10] Онищик А.Л.
Топология транзитивных групп преобразований. М., 1995.

- [11] Доан Куинь
Полиномы Пуанкаре компактных однородных римановых пространств с неприводимой стационарной группой.// Тр. сем. вект. тенз. анализу.-М.: Изд-во МГУ, 1968, вып. 14, с. 33-93.
- [12] Borel A., Hirzerbruch F.
Characteristic classes and homogenous spaces.I// J. Math. 80, 1958, 459-538
- [13] Borel A., Hirzerbruch F.
Characteristic classes and homogenous spaces.III// Amer. Journ. of Math., 1960, v. 82, N. 3
- [14] Ботт Р., Ту Л.В.
Дифференциальные формы в алгебраической топологии. - М.: Наука, 1989
- [15] Кац В.
Бесконечномерные алгебры Ли.- М.: Мир, 1993.
- [16] Кац В.
Автоморфизмы конечного порядка полупростых алгебр Ли.// Функц. анализ и его прил., т. 3, вып. 3, 1969, с. 94-96
- [17] Coxeter H.S.M.
The product of the generators of a finite group generated by reflections.// Duke Math. J. 18, 1951, 765-782
- [18] Милнор Дж., Стасеф Дж.
Характеристические классы. - М.: Мир, 1979.
- [19] Ведерников В.И., Феденко А.С.
Симметрические пространства и их обобщения. Обзорная статья.- Итоги науки. Алгебра, топология, геометрия. Т. 14. - М.:ВИНИТИ, 1976
- [20] Гантмахер Ф.Р.
Canonical representation of authomorphisms of a complex semi-simple Lie group.// Мат.сб., т.5, вып.47, 1939

- [21] Wolf J.A., Gray A.
Homogenous spaces defined by Lie group automorphisms I// J. Diff. Geometry. V.2, N.1-2. 1968
- [22] Феденко А.С.
Пространства с симметриями// Минск: изд-во БГУ, 1977
- [23] Ledger A.J., Pettit B.
Classification of metrisable regular s-manifolds with integrable symmetry tensor field// J. Math. Soc. Japan, V. 28, N. 4, 1976
- [24] Jimenez J.A.
Existence of Hermitian n-symmetric spaces and of non-commutative naturally-reductive spaces// Math. Z., V. 196, N. 2, 1987
- [25] Тралле А.Е.
О некоторых обобщенных симметрических пространствах нулевой эйлеровой характеристики// Изв. вузов. Математика., N. 4, 1991
- [26] Терзич С.
Вещественные когомологии обобщенных симметрических пространств
Фундаментальная и прикладная математика, в печати
- [27] Терзич С.
Классы Понтрягина обобщенных симметрических пространств
Математические заметки, в печати
- [28] Терзич С.
Вещественные когомологии и характеристические классы Понтрягина обобщенных симметрических пространств
деп. в ВИНТИ, N. 1034-B 98