

ФГБОУ ВПО
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»
«МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ»

На правах рукописи

Стрелкова
Наталия Павловна

Минимальные сети на поверхностях многогранников

Специальность 01.01.04 — геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор Алексей Августинovich Тужилин

МОСКВА — 2013

Оглавление

| | |
|---|-----------|
| Введение | 4 |
| 1 Сети: определения и предварительные результаты | 11 |
| 1.1 Понятие сети. | 11 |
| 1.2 Деформации и перепараметризация сети. | 13 |
| 1.3 Обыкновенные сети и сети-отображения | 14 |
| 1.4 Сходящаяся последовательность сетей. | 15 |
| 1.5 Виды экстремальных сетей. | 16 |
| 1.6 Критерии локальной минимальности сетей и замкнутые локально минимальные сети на поверхности выпуклых многогранников | 17 |
| 2 Устойчивость локально минимальных сетей | 19 |
| 2.1 Результаты | 19 |
| 2.1.1 Устойчивость локально минимальных сетей в пространствах неположительной кривизны | 19 |
| 2.1.2 «Устойчивость» относительно последовательности деформаций | 20 |
| 2.2 Устойчивость локально минимальных сетей в пространствах неположительной кривизны в смысле А.Д.Александрова | 22 |
| 2.3 «Устойчивость» относительно последовательности деформаций | 30 |
| 3 Замкнутые локально минимальные сети на выпуклых многогранниках | 35 |
| 3.1 Определения и предварительные результаты | 35 |
| 3.1.1 Многогранники, многогранные метрики и развёртки. | 35 |
| 3.1.2 Геодезические и многоугольники | 38 |
| 3.2 Результаты | 41 |
| 3.2.1 Необходимое условие на кривизны вершин. | 41 |
| 3.2.2 Реализация плоских графов на многогранниках в виде минимальных сетей. | 42 |
| 3.2.3 Дважды покрытые треугольники | 45 |

| | | |
|-------|---|-----------|
| 3.2.4 | Минимальные сети на тетраэдрах | 47 |
| 3.2.5 | Система разрезов: геометрическое необходимое условие. | 50 |
| 3.2.6 | Сведение задачи к простым минимальным сетям. . . | 53 |
| 3.2.7 | Факты и гипотезы о существовании минимальных се- тей на многогранниках | 54 |
| 3.2.8 | Физические соображения и тетраэдры с кривизна- ми $\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$ | 55 |
| 3.3 | Доказательства теорем про сети на многогранниках | 56 |
| 3.3.1 | Доказательство леммы 3.6 о длинах сторон геодези- ческого многоугольника | 56 |
| 3.3.2 | Доказательство теоремы 20 о многограннике, на ко- тором минимальные сети реализуются как простые. . | 59 |
| 3.3.3 | Пример многогранника без минимальных сетей, име- ющего систему разрезов (теорема 18). | 60 |
| 3.3.4 | Доказательство теоремы 21 о существовании мини- мальных сетей на почти всех многогранниках с кри- визнами, кратными $\frac{\pi}{3}$ | 64 |
| 3.3.5 | Доказательство теоремы 22 о тетраэдрах с кривизна- ми $\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$ | 72 |
| | Литература | 82 |

Введение

Диссертация посвящена теории экстремальных сетей (это «разветвлённый» аналог геодезических) — одному из активно развивающихся разделов геометрии и топологии. Исследуются геометрические свойства замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях выпуклых многогранников и задача описания класса выпуклых многогранников, на поверхности которых существуют такие сети (глава 3). При изучении замкнутых локально минимальных сетей на многогранниках возник естественный вопрос об устойчивости таких сетей. Ответить на этот вопрос удалось в гораздо большей общности — в диссертации доказана теорема об устойчивости локально минимальных сетей в пространствах неположительной кривизны в смысле А.Д. Александрова (глава 2). В дальнейшем замкнутые локально минимальные сети на многогранниках мы будем, для краткости, часто называть просто *минимальными сетями*.

Сетью мы называем геометрическую реализацию (абстрактного) графа, т. е. представление вершин графа точками некоторого пространства, а ребер — кривыми, соединяющими соответствующие точки. Локально минимальные сети представляют собой один из вариантов обобщения понятия геодезической на «разветвлённый» случай. А именно, неформально говоря, сеть называется локально минимальной, если любой её достаточно малый фрагмент является кратчайшей сетью. Локально минимальные сети с границей в евклидовом пространстве возникают при изучении кратчайших сетей (называемых также минимальными деревьями Штейнера).

Кратчайшие и локально минимальные сети. Поиск кратчайшей сети, соединяющей данное множество точек в некотором пространстве — одна из классических задач теории экстремальных сетей, см., например, обзор в [29], [7] или [5]. Неформально говоря, речь идёт о поиске кратчайшей связной системы дорог, соединяющей данные города, называемые «граничными точками» для искомой кратчайшей сети. При этом дороги не обязаны начинаться и заканчиваться в данных городах, т. е. система дорог может содержать помимо исходных городов (граничных точек) дополнительные перекрёстки (внутренние вершины сети). Задача построения кратчайшей сети в \mathbb{R}^d , соединяющей данные n точек, является

NP -трудной для всех $d \geq 2$; см. [24] или [25]. Очевидно, что кратчайшая сеть не имеет циклов, т.е. является деревом. Несложно доказать следующие локальные свойства кратчайших сетей в евклидовых пространствах: (1) рёбра являются отрезками, (2) вершины имеют степень 1, 2 или 3, (3) в вершинах степени 3 рёбра стыкуются под углами по 120° , а в вершинах степени 2 — под углами не меньше 120° [26]. Эти локальные свойства легко проверить для данной сети и легко строить сети с такими свойствами, но выполнение этих свойств не гарантирует, что сеть является кратчайшей. Можно утверждать лишь, что сеть, обладающая свойствами (1)–(3), является локально минимальной. Существующие алгоритмы точного построения кратчайшей сети в \mathbb{R}^d основаны на построении всевозможных локально минимальных деревьев, соединяющих данное множество точек, и выборе среди них дерева наименьшей длины. При этом экспоненциальная сложность этих алгоритмов обусловлена перебором всевозможных комбинаторных структур локально минимальных деревьев. А для заданной комбинаторной структуры локально минимальное дерево в \mathbb{R}^d с данной границей если существует, то единственно [26], и в случае плоскости его построение может быть выполнено за линейное время с помощью предложенного Хвангом алгоритма [28], представляющего собой улучшение алгоритма Мелзака [32].

Например, для вершин прямоугольника, изображённого на рис. 1, существуют две локально минимальные сети. Пунктирная сеть — короче, она и является кратчайшей сетью, соединяющей четыре данные точки.

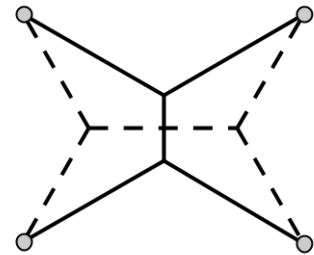


Рис. 1: Две локально минимальные сети, затагивающие вершины прямоугольника.

Кратчайшие сети, а в связи с ними и локально минимальные сети, возникают в приложениях и активно исследуются не только в \mathbb{R}^d , но и в других пространствах (см., например, обзор [29]), в том числе на римановых многообразиях (например, см. [7]) и в пространствах ограниченной кривизны в смысле А.Д. Александрова [30], [18]. Имеет место следующий критерий.

Теорема (см. [7, теорема 3.1]). *Сеть Γ на римановом многообразии локально минимальна тогда и только тогда, когда она (возможно, после перепараметризации) удовлетворяет следующим условиям:*

- все рёбра — геодезические,
- углы между соседними ребрами не меньше 120° ,
- все вершины степени 1 — граничные,
- во всех внутренних вершинах степени 2 угол между ребрами равен 180° .

В статье [4] показано, что те же самые условия, за исключением четвертого, необходимы для локальной минимальности сети в пространствах А. Д. Александрова ограниченной кривизны.

Устойчивость локально минимальных сетей. В главе 2 диссертации доказывается устойчивость локально минимальных сетей в пространствах А. Д. Александрова неположительной кривизны. Так же, как и в случае геодезических, локально минимальная сеть вообще говоря может допускать глобальную деформацию, уменьшающую ее длину (пример — кратчайшая геодезическая на сфере). Однако известно, что на римановых многообразиях неположительной секционной кривизны (и вообще в пространствах А. Д. Александрова неположительной кривизны) длина геодезической не может быть уменьшена никакой деформацией. Мы докажем, что тем же самым свойством во всех пространствах А. Д. Александрова неположительной кривизны обладают и локально минимальные сети. Этот результат, с одной стороны, обобщает соответствующие результаты о геодезических в таких пространствах, с другой стороны, тесно связан с теоремой о единственности локально минимальных сетей на римановых многообразиях отрицательной секционной кривизны, доказанной Прониным [10]. В случае евклидовой плоскости результат, аналогичный доказываемому в диссертации, был установлен в [6].

Помимо рассматривавшихся Прониным [10] параметрических деформаций, сохраняющих комбинаторную структуру сети, мы будем рассматривать и деформации, в процессе которых комбинаторная структура может меняться, и докажем, что у локально минимальной сети в пространстве А. Д. Александрова неположительной кривизны существует окрестность, в которой ее нельзя укоротить и деформациями этого второго вида. Отсюда вытекает, что в пространстве А. Д. Александрова неположительной кривизны всякое локально минимальное дерево является кратчайшим среди сетей, содержащихся в некоторой его малой односвязной окрестности.

Замкнутые локальные минимальные сети. Главная цель диссертации — изучение свойств замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях выпуклых многогранников. Слово «замкнутая» в этом названии имеет тот же смысл, что и в словосочетании «замкнутая геодезическая», т.е. в отличие от кратчайших сетей и произвольных локально минимальных сетей, рассматривавшихся в главе 2, замкнутая локально минимальная сеть не имеет граничных точек. Из цитированного выше критерия локальной минимальности сети на римановом многообразии вытекает, что замкнутая локально минимальная сеть на многообразии (а так же и на поверхности выпуклого многогранника) — это сеть, все вершины

которой имеют степень 3, а рёбра являются геодезическими и стыкуются в вершинах под углами ровно в 120 градусов.

Замкнутые локально минимальные сети на сфере возникают при изучении особенностей мыльных плёнок. А именно, при доказательстве принципов Плато, описывающих эти особенности [34], используется классификация замкнутых локально минимальных сетей на сфере, представляющая собой часть классификации «геодезических сетей с одинаково устроенными вершинами» на сфере, сделанной в работе [27].

Помимо сферы, замкнутые локально минимальные сети были классифицированы на поверхностях плоских торов [14]. С помощью двулистных накрытий классификация сетей со сферы и плоских торов переносится на проективную плоскость [8], поверхности равногранных тетраэдров [15] и на бутылки Клейна с плоской метрикой [8]. Известны также примеры замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях постоянной отрицательной кривизны и на правильных многогранниках (поверхностях платоновых тел) [8].

Результаты главы 2 показывают, что замкнутая локально минимальная сеть на поверхности выпуклого многогранника имеет следующий физический смысл. Её можно представлять себе как сеть, сделанную из эластичного материала, допускающего расщепления в вершинах, и натянутую на многогранник так, что она «не соскальзывает» с его поверхности.

Результаты о свойствах замкнутых локально минимальных сетей на произвольных выпуклых многогранниках, полученные в диссертации, являются, с одной стороны, продолжением исследования таких сетей в локально плоских пространствах. С другой стороны, рассматриваемая задача является обобщением задачи о замкнутых геодезических и квазигеодезических на выпуклых поверхностях [2], [11], [23].

Отметим, что один из основных вопросов, рассматриваемых в диссертации — о существовании замкнутой минимальной сети на данном многограннике — открыт уже в случае, когда в качестве замкнутой локально минимальной сети рассматривается замкнутая геодезическая, а в качестве многогранника — (неравногранный) тетраэдр [13].

С комбинаторной точки зрения замкнутая локально минимальная сеть на выпуклом многограннике представляет собой 3-валентный плоский граф, все грани которого не более чем шестиугольные. Существует богатая литература, посвящённая изучению (с комбинаторной точки зрения) таких графов на сфере, и двойственных к ним графов, т.е. триангуляций сферы, а также вложений различных регулярных (т.е. с заданными ограничениями на степени вершин и граней) графов в другие поверхности, см. например [19], [20]. Интерес к этой теме связан в том числе и с большим числом приложений в химии, кристаллографии и других естественных на-

уках. Упомянем один из наиболее популярных случаев: 3-валентные графы на сфере, имеющие только пяти- и шестиугольные грани, в химии называются фуллеренами и используются для моделирования молекулярных структур [22].

Для нас интересно, что при изучении и классификации (с комбинаторной точки зрения) вложений регулярных графов в поверхности часто используются различные геометрические реализации таких графов. Например, Тёрстон [35] для классификации комбинаторных триангуляций сферы использует локально плоские комплексы, склеенные из одинаковых правильных треугольников по правилам, задаваемым данной триангуляцией сферы, и в результате параметризует триангуляции сферы наборами из 20 целых чисел. Целый ряд параметризаций регулярных графов (в том числе обобщения идей Тёрстона) описаны в работе [21]. А упоминавшаяся выше классификация замкнутых локально минимальных сетей на плоских торах почти ничем не отличается от комбинаторной классификации вложений 3-валентных 6-регулярных (т.е. только с шестиугольными гранями) графов в тор, сделанной независимо в [16] и [33]: любой такой граф может быть реализован как замкнутая локально минимальная сеть на некотором плоском торе, только в случае сетей появляется вопрос о том, на каких именно (с точки зрения метрики) плоских торах реализуется минимальная сеть данной комбинаторной структуры.

В диссертации рассмотрена задача о реализации плоских графов как замкнутых локально минимальных сетей на выпуклых многогранниках и полностью описаны всевозможные комбинаторные структуры и длины рёбер, которые может иметь такая сеть.

В частном случае, когда все рёбра сети имеют одну и ту же длину, замкнутые локально минимальные сети двойственны триангуляциям выпуклых многогранников на правильные треугольники, рассматривавшимся Тёрстоном [35]. Существенно, что изучение минимальных сетей не сводится к изучению таких триангуляций, в частности потому, что на многограннике может существовать минимальная сеть, но не существовать минимальной сети с равными длинами рёбер.

Структура работы.

Работа состоит из введения, трёх глав и списка литературы.

В первой главе вводятся понятия сети, локально минимальной сети и формулируются предварительные результаты, необходимые для работы с этими объектами.

Вторая глава посвящена локально минимальным сетям в пространствах А.Д. Александрова неположительной кривизны. В разделе 2.1 сформулированы и прокомментированы две теоремы об устойчивости локально

минимальных сетей в этих пространствах, а в разделе 2.2 приведены доказательства этих двух теорем.

Третья глава посвящена замкнутым локально минимальным сетям на поверхностях выпуклых многогранников, которые мы для краткости называем **минимальными сетями**. В разделе 3.1 даются определения и предварительные результаты, необходимые для работы с внутренней геометрией на поверхности выпуклых многогранников.

В разделе 3.2 формулируются все результаты третьей главы. Там же приводятся комментарии и короткие доказательства. Более длинные доказательства вынесены в раздел 3.3.

Библиография содержит 39 наименований. Текст диссертации изложен на 84 страницах.

Список основных результатов.

Результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Доказана устойчивость локально минимальных сетей в пространствах Александрова неположительной кривизны (теорема 3).
2. Получено новое необходимое условие существования замкнутой локально минимальной сети на многограннике. Показано, что это условие сильнее известного ранее необходимого условия, но по-прежнему не является достаточным (теоремы 17, 18, 19).
3. Описаны всевозможные комбинаторные структуры и длины рёбер минимальных сетей на выпуклых многогранниках (теоремы 7 и 8).
4. Доказано существование простых замкнутых локально минимальных сетей на открытом всюду плотном подмножестве пространства выпуклых многогранников с кривизнами вершин, кратными 60 градусам (теорема 21).

Для краткого знакомства с результатами диссертации предназначены разделы 2.1 и 3.2.

Методы исследования.

В диссертации применяются методы геометрии и топологии. Используется техника работы с внутренней геометрией на поверхности выпуклых многогранников и методы теории пространств А.Д. Александрова неположительной кривизны.

Автором диссертации вводится новый подход к исследованию замкнутых локально минимальных сетей на выпуклых многогранниках, основанный на рассмотрении системы разрезов и применении теорем А.Д. Александрова о выпуклых многогранниках.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- семинаре «Современные геометрические методы» под руководством акад. А.Т. Фоменко, проф. А.С. Мищенко, проф. А.В. Болсинова, доц. А.А. Ошемкова, доц. Е.А. Кудрявцевой (МГУ, 11 ноября 2009 года)
- на международной конференции «Метрическая геометрия поверхностей и многогранников», посвященная 100-летию со дня рождения Н.В. Ефимова, (Москва, 20 августа 2010 года)
- на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2011» (МГУ, 12 апреля 2011 года)
- на семинаре «Узлы и теория представлений» под руководством В.О. Мантурова, Д.П. Ильютко, И.М. Никонова (МГУ, 13 декабря 2011 года)
- на научной конференции «Ломоносовские чтения» (МГУ, 16 ноября 2011 года)
- на семинаре «По геометрии в целом» под руководством проф. И.Х. Сабитова (МГУ, 20 апреля 2012 года)
- на международной конференции «Александровские чтения» (МГУ, 23 мая 2012 года)
- на семинаре летней школы Международной лаборатории «Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б.Н. Делоне (Ярославль–Красный холм, 30 июля 2012 года)
- семинаре «Дифференциальная геометрия и приложения» под руководством академика А.Т. Фоменко (МГУ, 11 марта 2013 года)
- на семинаре «Экстремальные сети» под руководством профессора А.О. Иванова и профессора А.А. Тужилина (МГУ, 2008–2013 гг.)

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [36]—[39], из них первые три — в журналах из перечня ВАК.

Благодарности.

Автор благодарит своего научного руководителя, профессора А. А. Тужилина, и профессора А. О. Иванова за постановку задачи, постоянную поддержку и внимание к работе, а также весь коллектив кафедры дифференциальной геометрии и приложений за тёплую атмосферу и конструктивные обсуждения.

Глава 1

Сети: определения и предварительные результаты

1.1 Понятие сети.

Любая из наших сетей выглядит просто как объединение конечного числа спрямляемых кривых, и часто бывает удобно представлять сеть именно как конечное семейство кривых.

Определение. *Обыкновенной сетью* будем называть объединение образов конечного семейства вложенных спрямляемых кривых, попарно не имеющих общих точек, за исключением общих концов. Кривые будем называть *рёбрами сети*, а их концы — *вершинами сети*. Сети Γ соответствует (*абстрактный*) граф $G = (V, E)$, в котором *рёбра* из E соответствуют кривым, задающим сеть, а *вершины* из V соответствуют концам кривых. Такой граф G мы называем *типом* сети Γ . Обыкновенная сеть — это множество точек, т.е. сети, отличающиеся заменой параметра на кривой, а также добавлением или удалением вершин степени 2, мы не различаем.

Такое простейшее определение сети будет использоваться при работе с минимальными сетями на многогранниках во всех разделах главы 3, кроме раздела 3.3.5. Интуитивно таким образом определённая сеть — это картинка, нарисованная на какой-то поверхности. Тип сети (абстрактный граф) однозначно определяется по картинке (объединению образов семейства кривых) только в том случае, если мы предполагаем, что кривые пересекаются друг с другом только в общих концах, не имеют самопересечений, в сети нет вершин степени 2 и вырожденных кривых (тождественно отображающих отрезок в точку). Но вообще говоря, одно и то же множество точек можно представлять как объединение разных семейств кривых. Иногда сети, одинаковые как множества точек, хочется считать одинаковыми, иногда — различными. Например, можно представить себе сеть, сделанную из нескольких эластичных нитей. Перемещая концы нитей, можно деформировать сеть, и в какой-то момент могут возникнуть

самопересечения сети, или могут совпасть два ребра сети — две нити могут идти параллельно рядом друг с другом. С точки зрения картинки вместо двух рёбер мы получили одно. С точки зрения сети, сотканной из нитей — имеется по-прежнему два ребра, и при малой деформации сети их снова можно будет различить.

Во второй главе и разделе 3.3.5 мы будем работать с непрерывными деформациями сети, и потому нам будет удобнее рассматривать сеть как геометрическую реализацию некоторого графа, т.е. считать, что прежде всего задан абстрактный граф, а затем этот граф отображается в некоторое пространство. Здесь возникает необходимость говорить о параметризуемом графе сети, перепараметризации сети и т.д. Один из возможных подходов к работе с этими понятиями — теория так называемых сетей-следов — был разработан Ивановым и Тужилиным, см. например [8]. Мы частично заимствуем их терминологию, но вводим также и свои определения.

Сеть как отображение. Пусть дан граф G (по умолчанию — связный, возможно — с кратными ребрами и петлями). Для каждого его ребра рассмотрим отрезок, а затем рассмотрим топологическое пространство T_G , полученное из дизъюнктного объединения этих отрезков отождествлением их концов в соответствии со структурой графа G . Пространство T_G мы будем называть *топологическим графом*, отрезки — *ребрами*, а их концы — *вершинами* топологического графа.

Сетью типа G в пространстве X мы будем называть произвольное непрерывное отображение $\Gamma: T_G \rightarrow X$. Граф G будем называть *параметризуемым графом* сети Γ . Образ отображения Γ будем обозначать через $\text{Im}(\Gamma)$. Ограничение отображения Γ на вершины и ребра графа будем называть *вершинами* и *ребрами сети*. Таким образом, каждое ребро — это некоторая кривая. Мы не будем различать сети, отличающиеся монотонной заменой параметра на одном или нескольких ребрах сети. Будем рассматривать лишь сети, в которых все ребра — *спрямляемые кривые*. *Длиной $\ell(\Gamma)$ сети Γ* будем называть сумму длин всех ее ребер.

Сети часто возникают в задачах следующего типа: дано конечное множество точек, требуется найти сеть, *соединяющую* это множество точек и обладающую некоторыми свойствами, например, имеющую наименьшую возможную длину. Возникает необходимость рассматривать класс сетей, проходящих через данное множество точек, и в связи с этим полезно следующее понятие. *Сеть с границей* — это сеть, в параметризуемом графе которой фиксировано некоторое подмножество вершин, называемых *границными*. *Изоморфизмом* между двумя (абстрактными) графами будем называть биекцию между множествами их вершин при условии, что две вершины в одном графе соединены ребром тогда и только тогда, когда

их образы соединены ребром во втором графе. Две сети с границей *имеют один тип*, если существует изоморфизм между их параметризующими графами, сохраняющий множество граничных вершин и такой, что образы соответствующих граничных вершин обеих сетей совпадают. Все сети мы будем рассматривать как сети с границей, допуская, что граница может быть пустой.

1.2 Деформации и перепараметризация сети.

Параметрической деформацией сети (с границей) Γ будем называть семейство сетей $\Gamma_t = D(\cdot, t)$, $t \in [0, t_0]$, где $\Gamma_0 = \Gamma$ и $D: T_G \times [0, t_0] \rightarrow X$ — произвольное непрерывное отображение, постоянное по t на границе графа, т. е. точка $D(v, t)$, где v — граничная вершина, не зависит от t . Ясно, что все сети Γ_t будут сетями того же типа, что и Γ , и с той же границей.

Параметрические деформации можно определить и для обыкновенных сетей, не переходя к сетям-отображениям. Нам понадобится это определение в разделе 3.2.3. *Параметрической деформацией* обыкновенной сети Γ типа G будем называть семейство обыкновенных сетей $\Gamma_t, t \in [0, t_0]$ того же типа G такое, что $\Gamma_0 = \Gamma$ и для каждого ребра a графа G семейство соответствующих кривых $\Gamma_t(a)$ является непрерывной деформацией кривой $\Gamma_0(a)$, т.е. ребра сети Γ .

Кроме параметрических, нам понадобятся и более общие деформации сетей, при которых тип сети может меняться.

Во-первых, определим операцию подразделения ребра. Заменим в графе G любое ребро ab на пару ребер ac, cb , добавив новую внутреннюю вершину c степени 2, и полученный граф обозначим через G' . Заметим, что $T_{G'} = T_G$ (как топологические пространства, т. е. равенство означает гомеоморфизм). Поэтому любую сеть $\Gamma: T_G \rightarrow X$ типа G можно рассматривать как сеть типа G' , и наоборот. Такая замена параметризующего графа сети в дальнейшем будет называться *подразделением ребра*.

Теперь введем понятие *перепараметризации*. Пусть $\Gamma: T_G \rightarrow X$, H — связный подграф в G , причем все ребра графа H реализованы в сети Γ точечными кривыми, т. е. образ всего подграфа T_H — одна точка. Рассмотрим фактор-граф G/H , соответствующий топологический граф и стандартную проекцию $\pi: T_G \rightarrow T_{G/H} = T_G/T_H$ и определим сеть $\Gamma_{G/H}$ как фактор-отображение $\Gamma_{G/H}: T_{G/H} \rightarrow X$, т. е. $\Gamma_{G/H}(\pi(x)) = \Gamma(x)$ для любого $x \in T_G$. Граница фактор-графа определяется как π -образ границы исходного графа. Мы будем говорить, что две сети отличаются на *перепараметризацию*, если они либо получаются одна из другой описанной операцией (так же, как $\Gamma_{G/H}$ получилась из Γ), либо могут быть соединены конечной цепочкой сетей, в которой каждые две соседние сети получаются

одна из другой такой операцией или операцией подразбиения ребра.

При перепараметризации образ сети не меняется — мы меняем лишь прообразы образов вершин сети, кое-где добавляя, а кое-где удаляя ребра нулевой длины (вырожденные). С помощью перепараметризации всегда можно избавиться от вырожденных ребер. Отметим, что в [8] для класса сетей, отличающихся лишь перепараметризацией, используется термин *сеть-след*; нам он не понадобится.

Деформацией сети всюду ниже мы будем называть параметрическую деформацию любой сети, полученной из данной сети перепараметризацией.

Мы будем говорить, что к сети применили *последовательность деформаций*, если была выполнена конечная последовательность перепараметризаций и параметрических деформаций.

Пусть $\alpha: [a, b] \rightarrow T_G$ — некоторый путь. Тогда путь $\Gamma \circ \alpha: [a, b] \rightarrow \text{Im}(\Gamma)$ будем называть *путем в сети* Γ . Если путь α — вложенный (т.е. соответствующее отображение инъективно), то путь $\Gamma \circ \alpha$ будем называть *простым*. Если путь α — замкнутый, то путь $\Gamma \circ \alpha$ будем называть *циклом* в сети Γ . Если $\alpha(a)$ и $\alpha(b)$ — граничные вершины топологического графа, то путь $\Gamma \circ \alpha$ будем называть *граничным*.

Нам понадобится следующая лемма, непосредственно вытекающая из определений.

Лемма 1.1. *Если одна сеть получена из другой последовательностью деформаций, то для любого цикла или граничного пути в первой сети найдется гомотопный ему цикл или граничный путь во второй сети.*

1.3 Обыкновенные сети и сети-отображения

Сеть Γ будем называть *несамопересекающейся*, если прообраз любой точки $x \in \text{Im}(\Gamma)$ при соответствующем отображении $\Gamma: T_G \rightarrow X$ — это либо одна точка, либо связный подграф в T_G (т.е. T_H для некоторого связного подграфа $H \subset G$).

Если отображение $\Gamma: T_G \rightarrow X$ биективно, сеть будем называть *вложенной*. Ясно, что любой обыкновенной сети однозначно (с точностью до монотонной замены параметров на рёбрах) соответствует вложенная сеть. Обратно, любой самопересекающейся сети (сети-отображению) можно однозначно поставить в соответствие обыкновенную сеть, при этом соответствующая этой обыкновенной сети вложенная сеть будет отличаться от исходной самопересекающейся сети на перепараметризацию. Вообще, сетям, отличающимся на перепараметризацию, соответствует одна и та же обыкновенная сеть.

Если в самопересекающейся сети число точек пересечения конечно, то ей тоже однозначно соответствует обыкновенная сеть, однако в этом случае при переходе к обыкновенной сети, разумеется, теряется информация — о том, какие «нити» и как были соединены в сети-отображении.

Таким образом, при работе с вложенными сетями неважно, как относиться к сети — как к отображению или как к обыкновенной сети, т.е. множеству точек. И мы в таких случаях (во всей главе 3, за исключением раздела 3.3.5) не будем определять отображения и будем использовать определение обыкновенной сети.

1.4 Сходящаяся последовательность сетей.

Мы будем говорить, что последовательность сетей Γ_n одного типа в метрическом пространстве (X, d) *сходится* к сети Γ того же типа, если можно выбрать параметризации *ребер* этих сетей так, что отображения $\Gamma_n: T_G \rightarrow X$ сходятся к отображению $\Gamma: T_G \rightarrow X$ в равномерной метрике, т.е. $\sup_{x \in T_G} d(\Gamma_n(x), \Gamma(x))$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Лемма 1.2. *Пусть Γ_n — последовательность сетей одного типа в пространстве X , причем длины сетей ограничены сверху некоторой константой, а образы сетей содержатся в некотором фиксированном компакте K . Тогда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность Γ_{n_k} , причем длина предельной сети не превосходит $\liminf_k \ell(\Gamma_{n_k})$.*

Доказательство. Параметризуем каждое ребро каждой сети отрезком $[0, 1]$ пропорционально натуральному параметру. В склеенном из отрезков пространстве T_G рассмотрим естественную метрику. Получаем семейство отображений Γ_n из метрического компакта T_G в метрический компакт K . Из ограниченности длины сетей следует ограниченность длин ребер, и потому семейство отображений будет равномерно непрерывным, а значит из этого семейства можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (это следствие обобщенной теоремы Арцела, см. [9, гл. 2, § 7, теор. 7; § 8, теор. 1]), причем для длины предельной сети выполнена указанная в теореме оценка, т.к. соответствующая оценка верна для каждого ребра сети [9, гл. 2, § 8, теор. 2]. \square

Лемма 1.3. *Если последовательность сетей Γ_n сходится к сети Γ в локально односвязном метрическом пространстве X с внутренней метрикой, то для любого $\varepsilon > 0$ существует n_0 такое, что при $n > n_0$ сеть Γ_n можно получить из сети Γ параметрической деформацией внутри $B_\varepsilon(\Gamma)$.*

Доказательство. Рассмотрим такое $\varepsilon > 0$, что для любой точки $x \in \text{Im}(\Gamma)$ шар $B_{2\varepsilon}(x)$ односвязен (это возможно в силу локальной односвязности пространства и компактности $\text{Im}(\Gamma)$). Рассмотрим n_0 такое, что для $n > n_0$ сеть $\Gamma_n: T_G \rightarrow X$ удовлетворяет неравенству $\sup_{u \in T_G} d(\Gamma_n(u), \Gamma(u)) < \varepsilon$ (см. определение сходящейся последовательности выше). Выберем конечную систему точек $\{u_i\} \subset T_G$, содержащую все вершины графа и такую, что для любых двух соседних точек u_i и u_j выполнено $\ell(\Gamma_n(u_i u_j)) < \varepsilon$ и $\ell(\Gamma(u_i u_j)) < \varepsilon$, где через $u_i u_j$ обозначен участок ребра топологического графа, заключенный между выбранными точками. В силу выбора $n > n_0$ для каждого i существует путь γ_i длины не более ε и такой, что $\gamma_i(0) = \Gamma(u_i)$, $\gamma_i(1) = \Gamma_n(u_i)$. Итак, если u_i, u_j — соседние, то каждый из путей $\gamma_i, \Gamma_n(u_i u_j), \gamma_j, \Gamma(u_i u_j)$ не длиннее ε , а значит, все они содержатся в шаре $B_{2\varepsilon}(\Gamma(u_i))$. Этот шар односвязен по предположению, значит, существует гомотопия $\Gamma_t^{ij}: [0, 1] \rightarrow B_{2\varepsilon}(\Gamma(u_i))$, $t \in [0, 1]$ кривой $\Gamma_0^{ij} = \Gamma(u_i u_j)$ в кривую $\Gamma_1^{ij} = \Gamma_n(u_i u_j)$ такая, что $\Gamma_t^{ij}(0) = \gamma_i(t)$, $\Gamma_t^{ij}(1) = \gamma_j(t)$. Выполнив такую гомотопию одновременно для всех участков сети Γ , заключенных между соседними отмеченными точками, мы получим параметрическую деформацию сети Γ в сеть Γ_n (внутри $B_{2\varepsilon}(\Gamma)$), что и требовалось. \square

1.5 Виды экстремальных сетей.

Кратчайшие сети. *Кратчайшей сетью* для некоторого множества точек $M \subset X$ называется связная сеть Γ , соединяющая множество M (т. е. $M \subset \text{Im}(\Gamma)$), если Γ не длиннее любой связной сети, соединяющей M .

Локально минимальные сети. *Локально минимальная сеть* — это, неформально говоря, сеть, любая достаточно малая часть которой является кратчайшей сетью для своей естественной границы. Для аккуратного определения нам понадобится понятие *локальной сети*. Пусть T_G — топологический граф, $P \in T_G$ — данная точка. Пусть U — окрестность точки P в топологическом графе, не содержащая петель и вершин графа T_G , за исключением точки P (если P — вершина). Эта окрестность естественным образом наделяется структурой топологического графа, который мы будем называть *локальным графом* в точке P и обозначать через G_U . Его граница по определению равна $\partial G_U = \partial U \cup (\partial T_G \cap \{P\})$, где через ∂T_G обозначена граница графа T_G . *Локальной сетью* в данной точке $P \in T_G$ называется ограничение сети на локальный граф, с соответствующей границей. Для данной сети Γ рассмотрим параметризацию, в которой нет ребер нулевой длины, и обозначим параметризующий топологический граф через T_G . Если для любой точки в графе T_G найдется локальная сеть, которая является кратчайшей, то сеть Γ называется *локально минималь-*

ной. В диссертации будут рассматриваться только несамопересекающиеся локально минимальные сети.

ε -окрестность множества и устойчивые сети. Через $B_\varepsilon(M)$ будем обозначать замкнутую ε -окрестность множества $M \subset X$ в смысле внутренней метрики пространства X , т. е. множество точек, которые можно соединить с точками множества M путем длины не более ε . Если Γ — сеть, то положим $B_\varepsilon(\Gamma) = B_\varepsilon(\text{Im}(\Gamma))$.

Сеть Γ мы будем называть ε -устойчивой, если любая сеть, полученная из Γ деформацией внутри $B_\varepsilon(\Gamma)$, имеет не меньшую длину, чем сеть Γ . При замене слов «не меньшую» на слово «большую» получается определение *строго ε -устойчивой сети*. Сеть (строго) *устойчива*, если она (строго) ε -устойчива для некоторого $\varepsilon > 0$.

1.6 Критерии локальной минимальности сетей и замкнутые локально минимальные сети на поверхности выпуклых многогранников

Теорема 1 (см. [7, теорема 3.1]). *Сеть Γ на римановом многообразии локально минимальна тогда и только тогда, когда она (возможно, после перепараметризации) удовлетворяет следующим условиям:*

- все рёбра — геодезические,
- углы между соседними рёбрами не меньше 120° ,
- все вершины степени 1 — граничные,
- во всех внутренних вершинах степени 2 угол между рёбрами равен 180° .

В статье [4] показано, что те же самые условия, за исключением четвертого, необходимы для локальной минимальности сети в пространствах А. Д. Александрова ограниченной кривизны.

Сеть называется *замкнутой*, если её граница пуста. Замкнутая локально минимальная сеть, очевидно, не может иметь вершин степени 1. Легко проверить, что сеть не может проходить через вершины выпуклого многогранника, и имеет место следующий критерий.

Теорема 2 ([8, теор. 5.30, сл. 5.41]). *Сеть на поверхности выпуклого многогранника является замкнутой локально минимальной тогда и только тогда, когда*

- все рёбра — геодезические,
- каждая вершина имеет степень 2 или 3,
- угол между смежными рёбрами в вершинах степени 3 равен 120° , а в вершинах степени 2 — 180° .

Хотя замкнутые геодезические естественно считать частным случаем минимальных сетей, мы будем рассматривать лишь сети, отличные от замкнутой геодезической. Мы будем называть замкнутые локально минимальные сети на многогранниках кратко **минимальными сетями**. Всюду будем считать, что вершин степени 2 в минимальной сети нет. Ясно, что это не ограничивает общности.

В разделе 3.1.2 мы подробно обсудим, как устроены геодезические на поверхности выпуклого многогранника.

Дополнение к образу минимальной сети на многограннике состоит из нескольких компонент связности, которые мы будем называть *ячейками* сети.

Определение. Минимальную сеть будем называть *простой*, если каждая её ячейка содержит не более одной вершины многогранника. Остальные минимальные сети будем называть *непростыми*.

Мы будем говорить, что две сети Γ_1, Γ_2 в пространствах X_1, X_2 *гомеоморфны*, если существует гомеоморфизм пространств X_1 и X_2 , переводящий сети друг в друга. Если длины соответствующих при гомеоморфизме рёбер двух сетей одинаковы, то две сети будем называть *изометричными*. Здесь для обыкновенных сетей слова “переводящий сети друг в друга” понять совсем легко — два множества переходят друг в друга при гомеоморфизме. В случае сетей-отображений речь идёт о том, что $\Gamma_1: T_G \rightarrow X_1$, $\Gamma_2: T_G \rightarrow X_2$ и гомеоморфизм $h: X_1 \rightarrow X_2$ таков, что $\Gamma_2 = h \circ \Gamma_1$.

Плоский граф — это вложенная сеть на сфере, рассматриваемая с точностью до гомеоморфизма сферы. Ячейкам сети соответствуют *границы* плоского графа. Будем говорить, что сеть на многограннике *реализует* плоский граф G , если она является представителем этого плоского графа как класса гомеоморфных сетей.

Взвешенным графом (G, w) будем называть пару, состоящую из графа $G = (V, E)$ и положительной весовой функции на множестве его рёбер $w: E \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Глава 2

Устойчивость локально минимальных сетей

Определения устойчивости и локальной минимальности сетей были сформулированы в разделе 1.5.

2.1 Результаты

2.1.1 Устойчивость локально минимальных сетей в пространствах неположительной кривизны

Всякая устойчивая сеть в локально односвязном метрическом пространстве является локально минимальной (это легко доказать, кроме того, это тривиальное следствие теоремы 4, которая будет сформулирована в разделе 2.1.2 и доказана в разделе 2.3). Обратное утверждение в общем случае неверно, например, всякая некратчайшая геодезическая на сфере не устойчива. Мы докажем, что в пространстве неположительной кривизны в смысле А. Д. Александрова всякая локально минимальная сеть устойчива. Слова «в смысле А. Д. Александрова» мы будем для краткости опускать. Определение таких пространств можно найти в книге [3], некоторые их свойства мы сформулируем в разделе 2.2. Отметим, что класс пространств неположительной кривизны содержит, в частности, римановы многообразия неположительной секционной кривизны, в том числе евклидовы пространства и локально евклидовы многообразия.

Теорема 3. *Локально минимальная сеть в полном пространстве неположительной кривизны ∞ -устойчива, а в пространстве строго отрицательной кривизны — строго ∞ -устойчива. Локально минимальное дерево строго ∞ -устойчиво в любом пространстве неположительной кривизны.*

Этот результат можно рассматривать как обобщение аналогичного факта для геодезических в пространствах неположительной кривизны, см. леммы в начале раздела 2.2.

Пронин [10] в случае полных римановых многообразий строго отрицательной кривизны доказал, что среди сетей, получающихся параметрической деформацией из данной сети, существует не более одной локально минимальной. Наше доказательство теоремы 3 очень во многом повторяет рассуждения Пронина [10]. По сути мы используем все те же соображения выпуклости метрики, но для пространств более общего вида. Однако наш результат и теорема из статьи [10] отличаются не только видом пространств, но и доказываемыми свойствами. Определим для компактных локально односвязных пространств два свойства.

Свойство A . Все локально минимальные сети в данном пространстве строго ∞ -устойчивы.

Свойство B . В данном пространстве никакая локально минимальная сеть не может быть деформацией переведена в другую локально минимальную сеть.

Наша теорема 3 утверждает, что все пространства строго отрицательной кривизны обладают свойством A , а результат Пронина [10] по сути заключается в том, что все римановы многообразия строго отрицательной секционной кривизны обладают свойством B .

Легко показать, что из свойства A всегда вытекает свойство B (см. лемму 2.1 ниже). Возможно, обратная импликация тоже верна и свойства A и B равносильны, однако автору диссертации доказать этот факт не удалось.

Лемма 2.1. *Если компактное локально односвязное пространство X обладает свойством A , то оно обладает и свойством B .*

Доказательство. Пусть в данном пространстве X , обладающем свойством A , локально минимальная сеть Γ_2 получена деформацией из локально минимальной сети Γ_1 , т. е., по определению деформации, к Γ_1 применили перепараметризацию, получили при этом некую сеть Γ'_1 , а затем параметрической деформацией перевели Γ'_1 в Γ_2 . Тогда в силу свойства A для сети Γ_1 выполнено $\ell(\Gamma_1) > \ell(\Gamma_2)$. С другой стороны, сеть Γ'_1 связана с сетью Γ_2 параметрической деформацией, т. е. Γ'_1 может быть получена деформацией из сети Γ_2 , поэтому $\ell(\Gamma_2) > \ell(\Gamma'_1)$. Но $\ell(\Gamma'_1) = \ell(\Gamma_1)$, т. е. одновременно $\ell(\Gamma_1) > \ell(\Gamma_2)$ и $\ell(\Gamma_2) > \ell(\Gamma_1)$, противоречие. \square

2.1.2 «Устойчивость» относительно последовательности деформаций

Рассмотрим ε -устойчивое дерево. Устойчивость гарантирует, что длину этого дерева нельзя укоротить (ε -малой) деформацией. Но, может быть, длину этого дерева можно укоротить последовательностью деформаций?

На рис. 1 можно увидеть пример двух деревьев, которые можно соединить последовательностью деформаций, но нельзя соединить деформацией.

Для данной сети Γ через $\mathcal{O}_\varepsilon(\Gamma)$ мы обозначаем множество сетей, которые могут быть получены из сети Γ конечной последовательностью деформаций внутри $B_\varepsilon(\Gamma)$.

В следующей теореме мы рассматриваем метрическое пространство с внутренней метрикой (т. е. расстояние между точками равно точной нижней грани длин соединяющих их путей) и накладываем условия локальной односвязности и локальной компактности пространства относительно этой метрики (для каждой точки все достаточно малые шары с центром в ней компактны и односвязны). Наше доказательство будет существенно использовать все эти свойства, хотя вполне возможно, что теорема верна и в более общих предположениях.

Теорема 4. *Пусть Γ — ε_0 -устойчивая сеть в локально компактном локально односвязном метрическом пространстве с внутренней метрикой. Тогда:*

- 1) *существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\ell(\Gamma) = \min_{D \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Gamma)} \ell(D)$;*
- 2) *если при этом сеть Γ строго ε_0 -устойчива, то ее длина строго меньше, чем длина любой другой сети из $\mathcal{O}_\varepsilon(\Gamma)$;*
- 3) *если U — открытая односвязная окрестность образа сети Γ , содержащаяся в $B_\varepsilon(\Gamma)$ (т. е. $\text{Im}(\Gamma) \subset U \subset B_\varepsilon(\Gamma)$), то сеть Γ — кратчайшая среди сетей, лежащих в U и соединяющих границу сети Γ .*

Нельзя не заметить, что результаты, заключенные в пунктах 1) и 2) теоремы, — очень ожидаемые, ведь малая окрестность сети очень напоминает саму сеть, и потому «существенное» изменение комбинаторной структуры сети, скорее всего, только удлинит сеть, а именно такое изменение и отличает последовательность деформаций от просто деформации. Так что раз сеть устойчива и ее (по определению устойчивости) нельзя укоротить обычной деформацией, то естественно ожидать, что при «существенном» изменении комбинаторной структуры сеть тем более нельзя укоротить.

Результат 3) интересен для деревьев. Ясно, что в любом достаточно хорошем пространстве у несамопересекающегося дерева есть малая односвязная окрестность. Например, очевидно, что в любом евклидовом пространстве уже $B_\varepsilon(\Gamma)$ будет односвязной при малых ε . Однако автор не умеет доказывать существование U в произвольном локально компактном локально односвязном метрическом пространстве.

Формальное доказательство этой теоремы приведено в разделе 2.3. С учетом теоремы 3 получаем следующее следствие для пространств неположительной кривизны.

Следствие 1. *В локально компактном пространстве неположительной кривизны в смысле А. Д. Александрова всякая локально минимальная сеть Γ для некоторого ε является кратчайшей в классе $\mathcal{O}_\varepsilon(\Gamma)$. Локально минимальное дерево Γ для некоторого ε является единственной кратчайшей сетью в классе $\mathcal{O}_\varepsilon(\Gamma)$, и для любой односвязной окрестности U такой, что $\text{Im}(\Gamma) \subset U \subset B_\varepsilon(\Gamma)$, сеть Γ является единственной кратчайшей сетью среди сетей, соединяющих границу Γ и лежащих в U . В случае пространства строго отрицательной кривизны любая локально минимальная сеть Γ является единственной кратчайшей в $\mathcal{O}_\varepsilon(\Gamma)$.*

2.2 Устойчивость локально минимальных сетей в пространствах неположительной кривизны в смысле А.Д.Александрова

Формулировку теоремы и комментариев см. в разделе 2.1.1. Для начала приведем необходимые нам результаты о пространствах неположительной кривизны.

Лемма 2.2 ((см. [3, теорема 9.2.2])). *В полном односвязном пространстве неположительной кривизны любые две точки соединимы единственной геодезической. Каждый геодезический отрезок является кратчайшей.*

Лемма 2.3 ((см. [3, замечание 9.1.18, раздел 9.2])). *Всякое полное пространство неположительной кривизны локально односвязно, и потому имеет локально изометричное универсальное накрытие, причем накрывающее пространство является полным односвязным пространством неположительной кривизны.*

Следствие 2. *В полном пространстве неположительной кривизны в каждом гомотопическом классе кривых с данными концами существует единственная геодезическая. Она является кратчайшей в этом классе.*

Лемма 2.4 ((см. [3, предложение 9.2.13])). *Пусть (X, d) — полное односвязное пространство неположительной кривизны, $\alpha(s), \beta(s)$ — геодезические, параметризованные пропорционально натуральному параметру, или постоянные кривые. Тогда функция $d(\alpha(s), \beta(s))$ — выпукла.*

Следствие 3. *Пусть X — полное пространство неположительной кривизны, $\alpha(s), \beta(s)$ — геодезические, параметризованные пропорционально натуральному параметру, или постоянные кривые, σ_s — непрерывное семейство геодезических, соединяющих точки $\alpha(s)$ и $\beta(s)$. Тогда функция $\ell(\sigma_s)$ — выпукла.*

Замечание 1. Если X — пространство строго отрицательной кривизны, то функция $\ell(\sigma_s)$ из следствия 3 строго выпукла для любой непостоянной деформации σ_s .

Доказательство. Для доказательства следствия рассмотрим универсальное локально изометричное накрытие пространства X и поднятие гомотопии σ_s кривой σ_0 . В накрывающем пространстве расстояние между прообразами точек $\alpha(s), \beta(s)$ будет в точности равно длине единственной соединяющей их геодезической, т. е. длине прообраза пути σ_s (см. лемму 2.3). Но при проекции длины путей сохраняются, поэтому это расстояние равно длине кривой σ_s . Остается применить лемму 2.4. \square

Геодезической сетью будем называть сеть, каждое ребро которой — или натурально параметризованная геодезическая, или постоянная (точечная) кривая. Известно (см. [8]), что на *римановом многообразии* всякая локально минимальная сеть является *экстремальной*, т. е. что для любой деформации Γ_t локально минимальной сети Γ_0 выполняется неравенство $\frac{d}{dt}\ell(\Gamma_t)|_{t=0} \geq 0$, если эта производная существует. Следующая лемма — это некоторый аналог этой теоремы для пространств неположительной кривизны.

Лемма 2.5. Пусть $H_t, t \in [0, 1]$, — параметрическая деформация в классе геодезических сетей локально минимальной сети H_0 в пространстве неположительной кривизны, причем для каждой вершины v параметризующего графа кривая $H_t(v)$ — или точечная, или геодезическая, параметризованная пропорционально натуральному параметру. Тогда существует и неотрицательна правая производная длины сети:

$$\frac{d}{dt}\ell(H_t)\Big|_{t=0} \geq 0.$$

Доказательство. Пусть G — граф, параметризующий наши сети. Тогда

$$\ell(H_t) = \sum_{e \in E(G)} \ell(H_t(e)).$$

Рассмотрим

$$\frac{d}{dt}\ell(H_t(e))\Big|_{t=0}$$

для фиксированного ребра e с концами v_1, v_2 . Если ребро $H_0(e)$ — не точечное, то можно напрямую применить факт, приведенный в [3, теорема 4.5.6, упражнение 4.5.10], и получить, что правая производная существует и равна

$$\frac{d}{dt}\ell(H_t(e))\Big|_{t=0} = -k_1 \cos \alpha_1 - k_2 \cos \alpha_2,$$

где $k_j = \ell(H_t(v_j))$ (длина кривой, она же равна «скорости», т. е. коэффициенту пропорциональности между нашим параметром на кривой и натуральным параметром), а α_j — угол между геодезическими $H_0(e)$ и $H_t(v_j)$ в точке $H_0(v_j)$.

Если же $H_0(e)$ — точечная кривая, то нам достаточно того факта, что производная

$$\left. \frac{d}{dt} \ell(H_t(e)) \right|_{t=0}$$

существует. Докажем это. Пусть $e = v_1 v_2$. Если хотя бы одна из кривых $H_t(v_1), H_t(v_2)$ — точечная, то наше существование производной очевидно (поскольку функция линейна). Пусть теперь $H_t(v_1), H_t(v_2)$ — невырожденные геодезические, тогда определена величина φ угла между ними, равная по определению пределу величин соответствующих углов в треугольниках сравнения. В частности, она равна пределу величин углов плоских треугольников с длинами сторон $\ell(H_t(e)), k_1 t, k_2 t$ (обозначения те же, что и выше), а углы плоских треугольников легко посчитать по теореме косинусов. Тогда

$$\cos \varphi = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(k_1 t)^2 + (k_2 t)^2 - (\ell(H_t(e)))^2}{2k_1 k_2 t^2},$$

откуда следует, что предел

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ell(H_t(e))}{t}$$

существует (и равен $\sqrt{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 \cos \varphi}$).

Для каждой вершины $v \in V(G)$ рассмотрим прообраз

$$H_0^{-1}(H_0(v)).$$

Это некоторый связный подграф графа G , все ребра которого реализованы точечными кривыми в сети H_0 , в том числе этот подграф может оказаться самой вершиной v . Каждый такой подграф будем называть *точечной компонентой*.

Итак, производная длины сети существует и раскладывается в сумму производных длин ребер. Причем производная ребра ненулевой длины есть сумма двух слагаемых, каждое из которых зависит от одного из концов этого ребра. Перегруппируем слагаемые:

$$\left. \frac{d}{dt} \ell(H_t(e)) \right|_{t=0} = \sum_{\tau} \Delta(\tau),$$

где τ пробегает всевозможные точечные компоненты сети H_0 , а $\Delta(\tau)$ — сумма производных нулевых ребер компоненты τ и слагаемых вида

$-k \cos \alpha$, соответствующих лежащим в τ концам невырожденных ребер сети H_0 .

Теперь будем доказывать нашу лемму от противного. Предположим, что

$$\left. \frac{d}{dt} \ell(H_t(e)) \right|_{t=0} < 0,$$

тогда найдется некоторая точечная компонента τ такая, что $\Delta(\tau) < 0$. Временно сделаем перепараметризацию сети H_0 так, чтобы в ней не было ребер нулевой длины. Тогда в ту точку, в которую отображалась точечная компонента τ , будет отображаться ровно одна вершина сети, обозначим ее через v . По определению локально минимальной сети некоторая локальная сеть Γ_{loc} с центром в вершине v является кратчайшей. Сделаем перепараметризацию сети Γ_{loc} так, чтобы вместо вершины v снова была точечная компонента τ , и сделаем параметрическую деформацию $\Gamma_{\text{loc}t}$ этой сети, при которой вершины компоненты τ движутся по тем же кривым, что и в случае исходной деформации сети H_0 , граничные вершины сети Γ_{loc} неподвижны, а все ребра в процессе деформации реализуются геодезическими из нужного гомотопического класса (такие геодезические определены однозначно, см. следствие 2). Тогда из приведенных выше рассуждений ясно, что

$$\left. \frac{d}{dt} \ell(\Gamma_{\text{loc}t}) \right|_{t=0} = \Delta(\tau),$$

но $\Delta(\tau) < 0$ по нашему предположению. Это значит, что

$$\ell(\Gamma_{\text{loc}t}) < \ell(\Gamma_{\text{loc}})$$

при малых значениях t , что противоречит тому факту, что сеть Γ_{loc} — кратчайшая. Лемма доказана. \square

Теперь перейдем к основной задаче этого раздела — доказательству теоремы 3. Пусть Γ — данная локально минимальная сеть в пространстве X . Рассмотрим произвольную перепараметризацию сети Γ и произвольную параметрическую деформацию, переводящую сеть Γ в некоторую сеть, которую мы будем обозначать через Γ' . Будем считать, что сети Γ и Γ' параметризованы графом G . Наша цель — построить с помощью сети Γ' некоторую деформацию H_t сети $H_0 = \Gamma$, удовлетворяющую условиям леммы 2.5, и из неравенства

$$\left. \frac{d}{dt} \ell(H_t) \right|_{t=0} \geq 0$$

некоторым образом вывести, что

$$\ell(\Gamma') \geq \ell(\Gamma),$$

что и утверждается в теореме.

Для каждого невырожденного в сети Γ' ребра $e \in E(G)$ с концами u, v рассмотрим геодезическую с концами $\Gamma'(u), \Gamma'(v)$ из гомотопического класса кривой $\Gamma'(e)$, обозначим ее через $\Gamma_1(e)$ (см. следствие 2). Сделаем параметрическую деформацию сети Γ' , неподвижную на вершинах и вырожденных ребрах и переводящую каждое невырожденное ребро $\Gamma'(e)$ в соответствующую геодезическую $\Gamma_1(e)$. Полученную в результате сеть обозначим через Γ_1 .

Ясно, что сеть Γ_1 может быть получена параметрической деформацией из сети Γ . Обозначим такую деформацию через $\Gamma_s, s \in [0, 1]$. Для каждой вершины $v \in V(G)$ рассмотрим путь $\Gamma_s(v)$. Через $\gamma_v(s)$ обозначим геодезическую с теми же концами из того же гомотопического класса, параметризованную отрезком $[0, 1]$ пропорционально натуральному параметру (следствие 2).

Для каждого ребра $e \in E(G)$ с концами v_1, v_2 и для каждого $s \in [0, 1]$ рассмотрим геодезическую с концами $\gamma_{v_1}(s)$ и $\gamma_{v_2}(s)$ из гомотопического класса кривой

$$(\gamma_{v_1}(t) |_{[0,s]})^{-1} \circ \Gamma(e) \circ (\gamma_{v_2}(t) |_{[0,s]}),$$

где через \circ обозначено произведение путей. Эту геодезическую обозначим через $H_s(e)$. Известно, что $H_s(e)$ непрерывно зависит от s (см. [3, предложение 9.1.17, теорему о глобализации]). Поэтому совокупность геодезических $\{H_s(e) \mid e \in E(G)\}, s \in [0, 1]$, естественным образом задает параметрическую деформацию H_s сети $H_0 = \Gamma$, причем $H_1 = \Gamma_1$.

По следствию 3 длина каждого ребра сети H_s — выпуклая функция от s . Следовательно, и длина сети H_s — выпуклая функция от s , как сумма выпуклых функций. В силу выпуклости

$$\ell(H_s) \leq s\ell(H_1) + (1-s)\ell(H_0) = \ell(H_0) + s(\ell(H_1) - \ell(H_0)).$$

Но по лемме 2.5 производная

$$\left. \frac{d}{ds} \ell(H_s) \right|_{s=0} \geq 0,$$

откуда следует, что $\ell(H_1) - \ell(H_0) \geq 0$. Значит,

$$\ell(\Gamma') \geq \ell(\Gamma_1) = \ell(H_1) \geq \ell(H_0) = \ell(\Gamma).$$

Таким образом, доказано, что произвольная сеть Γ' , полученная параметрической деформацией расщепления сети Γ , имеет не меньшую длину, чем Γ , а значит, сеть Γ — устойчива. В силу замечания 1 ясно, что в пространстве строго отрицательной кривизны $\ell(\Gamma') > \ell(\Gamma)$ если только не $\Gamma' = \Gamma$, т. е. имеет место строгая устойчивость сети Γ .

Строгая устойчивость дерева. Нам осталось доказать строгую устойчивость для случая, когда Γ — дерево. Предположим, что $\ell(\Gamma') = \ell(\Gamma)$. Тогда $\ell(H_1) = \ell(H_0)$, и, в силу выпуклости, $\ell(H_s) \equiv \ell(H_0) = \ell(\Gamma)$, $s \in [0, 1]$. Более того, поскольку длина сети равна сумме длин ребер, а длина каждого ребра — выпуклая функция от s , то из того, что длина сети постоянна, следует, что длина каждого ребра — линейная функция.

Лемма 2.6. *Вершины сети $\Gamma = H_0$ неподвижны при деформации H_s , т. е. $\Gamma(v) = H_s(v) \forall s \in [0, 1], v \in V(G)$.*

Доказательство. Все граничные вершины неподвижны по построению. Проведем доказательство индукцией по числу вершин. Отметим, что для сети, имеющей лишь две вершины, лемма очевидна, так как обе они обязаны быть граничными.

Если в дереве найдется висячая вершина p , инцидентная некоторой вершине u степени 2 (которая в силу нашего соглашения тоже является граничной), то можно удалить из сети ребро pu и тем самым перейти к локально минимальной сети с меньшим числом вершин. В противном случае найдется пара висячих вершин p и q , имеющих общую вершину u (для доказательства существования такой пары достаточно удалить из дерева все висячие ребра и рассмотреть в новом дереве любую висячую вершину). Докажем, что вершина u неподвижна при деформации. После этого можно будет выбросить ребра pu и qu из нашей сети и объявить вершину u — граничной. Новая сеть, очевидно, снова будет локально минимальной, и ограничение на нее нашей деформации будет обладать всеми свойствами, которые имелись у исходной деформации. В новой сети вершин будет меньше, а значит для нее верно предположение индукции о неподвижности вершин. Следовательно, и у исходной сети все вершины были неподвижны, и шаг индукции сделан.

Осталось показать, что вершина u неподвижна. Как было показано выше, длина каждого ребра — линейная функция от s . Отметим, что все сети H_s локально минимальны, так как иначе их можно было бы укоротить малой деформацией и получить сеть Γ' строго меньшей длины, чем сеть Γ . Причем всякую такую сеть можно было бы получить из сети Γ параметрической деформацией внутри $B_\varepsilon(\Gamma)$. Это противоречит уже доказанной части нашей теоремы.

Если длина ребра $H_s(pu)$ равна нулю хотя бы при двух значениях s , то, как линейная функция, она должна быть тождественно равна нулю, и тогда очевидно, что вершина u неподвижна. Далее рассматриваем значения s , при которых оба ребра $H_s(pu)$ и $H_s(qu)$ имеют ненулевую длину. Если ребро pu реализовано невырожденной геодезической, то производная

его длины выражается формулой

$$\left. \frac{d}{ds} \ell(H_s(pu)) \right|_{s=s_0} = -k \cos \alpha_{s_0},$$

где k — постоянная скорость, с которой образ вершины u едет по геодезической $H_s(u)$, а α_{s_0} — угол между геодезическими $H_{s_0}(pu)$ и $H_{s_0}(u)$ (при определении угла первая геодезическая ориентирована от u к p , а вторая — в направлении увеличения параметра s). Если $k = 0$, то вершина u неподвижна и все доказано, а в противном случае из линейности функции $\ell(H_s(pu))$ вытекает, что значение $\cos \alpha_{s_0}$ постоянно, а значит, постоянно по s_0 и значение угла между геодезическими $H_{s_0}(pu)$ и $H_{s_0}(u)$. Поэтому далее мы всюду используем, что $\alpha_s \equiv \alpha_0$.

Рассмотрим образованный нашими геодезическими треугольник Δ с вершинами в точках $H_0(p), H_{s_1}(u), H_{s_2}(u)$. Очевидно, что этот треугольник-контур ограничивает диск. Но для стягиваемого треугольника в пространстве неположительной кривизны выполняется условие сравнения углов: его углы не превосходят соответствующих углов треугольника с теми же длинами сторон на евклидовой плоскости (см. [3, теорема 9.2.9]). Заметим, что углы треугольника Δ в вершинах $H_{s_1}(u)$ и $H_{s_2}(u)$ в сумме дают не меньше π (один из них равен α_0 , а другой не меньше $\pi - \alpha_0$, т.к. сумма смежных углов не меньше π). Значит, третий угол треугольника Δ равен нулю, и все углы треугольника сравнения равны углам треугольника Δ . Тогда треугольник сравнения — вырожденный, и, поскольку вершины $H_{s_1}(u)$ и $H_{s_2}(u)$ не совпадают, два угла треугольника должны быть равны нулю, а третий равен π . Углы треугольника Δ имеют те же значения, т.е. стороны треугольника $H_0(p)H_{s_1}(u)H_{s_2}(u)$ лежат на одной геодезической для любых значений s_1, s_2 из некоторого интервала. Зафиксируем некоторые s_1, s_2 . Аналогично, стороны треугольника $H_0(q)H_{s_1}(u)H_{s_2}(u)$ лежат на одной геодезической. У этих двух треугольников есть общая сторона $H_{s_1}(u)H_{s_2}(u)$ — участок геодезической, по которой вершина u движется при деформации. Точки $H_0(p), H_0(q)$ не лежат на этом отрезке, поскольку мы выбрали интервал, на котором длины ребер pu и qu не обнуляются.

Возможны два случая: либо в одном треугольнике (скажем, $H_0(p)H_{s_1}(u)H_{s_2}(u)$) угол $\angle H_{s_1}(u) = \pi$, а в другом — угол $\angle H_{s_2}(u) = \pi$, либо в обоих треугольниках значение π имеет угол с вершиной в одной и той же точке, скажем, $H_{s_1}(u)$.

В первом случае получаем, что для каждого $s, s_1 \leq s \leq s_2$, ребра $H_s(pu)$ и $H_s(qu)$ вместе образуют одну геодезическую, поскольку ребро $H_s(pu)$ — это часть геодезической $H_0(p)H_{s_2}(u)$, ребро $H_s(qu)$ — это часть геодезической $H_0(q)H_{s_1}(u)$, а геодезические $H_0(p)H_{s_2}(u)$ и $H_0(q)H_{s_1}(u)$ имеют общий отрезок $H_{s_1}(u)H_{s_2}(u)$ и, следовательно, содержатся в общей геодезической, соединяющей $H_0(p)$ и $H_0(q)$ (на рис. 2.1

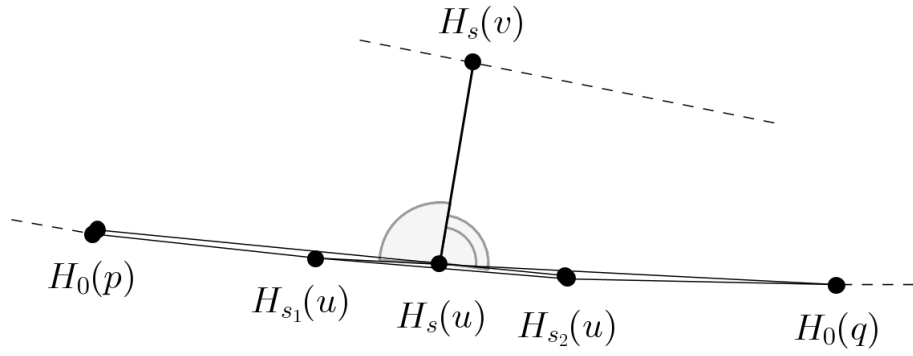


Рис. 2.1: Первый случай.

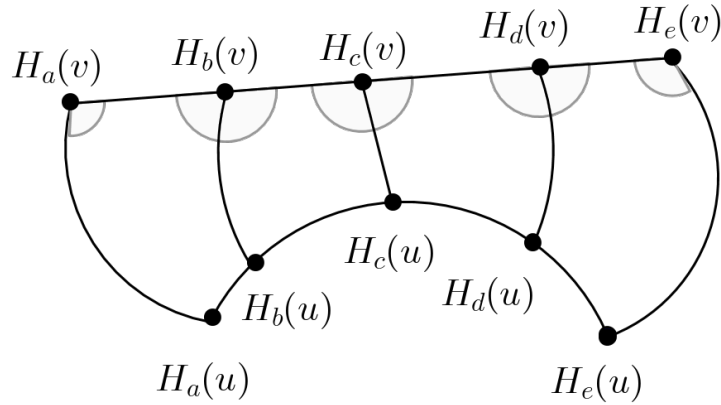


Рис. 2.2: Сумма 8 углов.

точки $H_0(p)$, $H_{s_1}(u)$, $H_s(u)$, $H_{s_2}(u)$, $H_0(q)$ специально нарисованы не лежащими на одной прямой, но мы только что доказали, что они лежат на одной геодезической). Рассмотрим еще одно ребро, инцидентное вершине u , назовем его uv . Поскольку все сети H_s локально минимальны, то углы, которые ребро $H_s(uv)$ образует с ребрами $H_s(pu)$, $H_s(qu)$ при каждом s должны быть не меньше $\frac{2\pi}{3}$ (см. [4]). Рассмотрим путь $H_s(v)$, по которому движется вершина v . Если бы этот путь был постоянным (точечным), то был бы стягиваемый треугольник $H_0(v)H_{s_1}(u)H_{s_2}(u)$, в котором $\angle H_{s_1}(u) \geq \frac{2\pi}{3}$ и $\angle H_{s_2}(u) \geq \frac{2\pi}{3}$, а это противоречит тому факту, что сумма углов треугольника не больше π . Значит, $H_s(v)$ — некоторая геодезическая. Рассмотрим два момента времени a, b .

Геодезические $H_s(v)$ ($a \leq s \leq b$), $H_b(uv)$, $H_s(u)$ ($a \leq s \leq b$), $H_a(uv)$ образуют стягиваемый четырехугольник, сумма углов которого не больше 2π , но сумма его углов при вершинах $H_a(u)$ и $H_b(u)$ не меньше $\frac{4\pi}{3}$, значит, сумма углов при вершинах $H_a(v)$, $H_b(v)$ не больше $\frac{2\pi}{3}$. Теперь рассмотрим пять моментов времени $s = a, b, c, d, e$, $s_1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq s_2$, и обратим внимание на сумму S восьми углов четырех соответствующих четырехугольников при вершинах $H_a(v)$, $H_b(v)$, $H_c(v)$, $H_d(v)$, $H_e(v)$, см. рис. 2.2. Сумма смежных углов не меньше π . Поэтому $S \geq 3\pi$. Но, с другой сторо-

ны, в каждом четырехугольнике сумма двух «верхних» углов по доказанному выше не больше, чем $\frac{2\pi}{3}$, поэтому $S \leq \frac{8\pi}{3}$. Противоречие завершает доказательство первого случая.

Во втором случае оказывается, что угол между ребрами $H_{s_2}(pu)$ и $H_{s_2}(qu)$ равен нулю, и сеть H_{s_2} можно тривиальным образом укоротить в малой окрестности $H_{s_2}(u)$, что противоречит локальной минимальности сети H_{s_2} . Лемма доказана. \square

Осталось заметить, что при деформации все ребра по определению являются геодезическими, а значит в силу следствия 2 из неподвижности всех вершин следует неподвижность сети. Поэтому $\Gamma = \Gamma_1$. А поскольку каждое ребро сети Γ' должно быть не длиннее соответствующего ребра сети Γ_1 и лежит в том же гомотопическом классе, то $\Gamma' = \Gamma_1 = \Gamma$, что и завершает доказательство теоремы 3.

2.3 «Устойчивость» относительно последовательности деформаций

Формулировку теоремы, комментарий и определение класса $\mathcal{O}_\varepsilon(\Gamma)$ см. в разделе 2.1.2. В этом разделе через $X = (X, d)$ всюду обозначено локально односвязное и локально компактное метрическое пространство с внутренней метрикой.

Для доказательства первой части теоремы 4 докажем следующую лемму.

Лемма 2.7. *Пусть Γ — произвольная несамопересекающаяся сеть в X . Пусть $\varepsilon_n \rightarrow 0+$ и $\Gamma_n \in \mathcal{O}_{\varepsilon_n}(\Gamma)$ такие, что*

$$|\ell(\Gamma_n) - \inf_{D \in \mathcal{O}_{\varepsilon_n}(\Gamma)} \ell(D)| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Тогда существует подпоследовательность n_k и сети $\Gamma'_{n_k} \in \mathcal{O}_{\varepsilon_{n_k}}(\Gamma)$ такие, что $\ell(\Gamma'_{n_k}) \leq \ell(\Gamma_{n_k})$ и каждую Γ'_{n_k} можно получить из Γ деформацией внутри $B_{\varepsilon'_{n_k}}(\Gamma)$, где $\varepsilon'_{n_k} \rightarrow 0+$.

Доказательство. Наша первая цель — выбрать из последовательности Γ_n сходящуюся подпоследовательность. Для этого нужна подпоследовательность сетей одного типа, но пока вполне может оказаться, что все сети Γ_n имеют разный тип. Чтобы ограничить число возможных типов, нужно исключить наличие циклов и висячих вершин в неограниченном количестве. Этому посвящена следующая лемма.

Лемма 2.8. *Для всякой сети $D \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Gamma)$ найдется сеть $D' \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Gamma)$, не имеющая неограниченных вершин степени 1 и 2, стягиваемых циклов и такая, что $\ell(D') \leq \ell(D)$.*

Число ребер в сети D' не больше некоторой величины N , которая определяется сетью Γ .

Доказательство. Первая часть — очевидное следствие следующей леммы.

Лемма 2.9.

- 1) Если в сети $D \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Gamma)$ есть стягиваемый в $B_\varepsilon(\Gamma)$ цикл, то при удалении любого ребра этого цикла из сети D получившаяся сеть по-прежнему будет лежать в $\mathcal{O}_\varepsilon(\Gamma)$.
- 2) При удалении ребра, инцидентного неграничной висячей вершине, сеть остается в $\mathcal{O}_\varepsilon(\Gamma)$.
- 3) При удалении из сети неграничной вершины степени 2 и объединении двух инцидентных ей ребер в одно сеть остается в $\mathcal{O}_\varepsilon(\Gamma)$.

Доказательство. Пусть сеть $D \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Gamma)$, т. е. D может быть получена из Γ последовательностью деформаций внутри $B_\varepsilon(\Gamma)$. Продолжим эту последовательность — сделаем параметрическую деформацию сети D , стягивающую данный цикл в точку, неподвижную вне ребер, имеющих с циклом общие вершины, и «продлевающую» ребра, имеющие с циклом общие вершины, но не входящие в него. В результате мы получаем сеть, в которой данный цикл отображается в точку. Сделаем перепараметризацию этой сети, удалив в графе из данного цикла любое ребро. Затем сделаем параметрическую деформацию новой сети, обратную выполненному до этого сжатию цикла. В результате получим сеть D' , отличающуюся от сети D отсутствием некоторого ребра данного цикла.

В случае удаления ребра, инцидентного висячей неграничной вершине, ситуация еще проще, — достаточно стянуть это ребро в свою невисячую вершину и сделать перепараметризацию сети.

В пункте 3) достаточно сделать операцию, обратную к подразбиению ребра, а эта операция — по определению один из видов перепараметризации. □

Докажем вторую часть леммы 2.8. Через v, e и v', e' обозначим число вершин и ребер сетей Γ и D' , а через n — число граничных вершин (оно одинаково в двух сетях). Поскольку все внутренние вершины сети D' имеют степень не менее трех, выполнено: $3(v' - n) + n \leq 2e'$. С другой стороны, поскольку в сети D' нет стягиваемых циклов и каждый цикл в сети D' гомотопен некоторому циклу в сети Γ (лемма 1.1), цикломатическое число графа сети D' не больше, чем графа сети Γ , т. е. $e' - v' \leq e - v$. Из двух неравенств получаем $3(v' - n) + n + 3(e' - v') \leq 2e' + 3(e - v)$, т. е. $e' \leq 2n + 3(e - v)$. □

Итак, заменим с помощью леммы 2.8 каждую сеть Γ_n на сеть Γ'_n . Теперь число ребер в сетях ограничено некоторой константой, поэтому

можно выбрать подпоследовательность сетей, параметризованных одним и тем же типом, который мы обозначим через G' . По лемме 1.2 выберем сходящуюся подпоследовательность сетей, которую снова обозначим через Γ'_n . Предельную сеть обозначим через Γ' . Поскольку $\text{Im}(\Gamma') \subset B_{\varepsilon_n}(\Gamma)$ для каждого n , то $\text{Im}(\Gamma') \subset \text{Im}(\Gamma)$. По лемме 1.3 сеть Γ' может быть параметрической деформацией внутри любой малой ε -окрестности переведена в сеть Γ'_n при всех достаточно больших n . Значит, в частности, $\Gamma' \in \mathcal{O}_{\varepsilon_n}(\Gamma)$ при всех n (поскольку $\Gamma'_n \in \mathcal{O}_{\varepsilon_n}(\Gamma)$).

Докажем теперь, что $\text{Im}(\Gamma') = \text{Im}(\Gamma)$. Пусть какая-то точка P сети Γ оказалась вне образа сети Γ' . Рассмотрим простой цикл или граничный путь γ в сети Γ , проходящий через точку P . По лемме 1.1 существует цикл или граничный путь γ' в сети Γ' , гомотопный пути γ в $B_{\varepsilon_n}(\Gamma)$ (для любого ε_n). Поскольку $\text{Im}(\Gamma') \subset \text{Im}(\Gamma)$, путь γ' одновременно представляет собой и путь в сети Γ , но $\gamma \neq \gamma'$, так как путь γ проходит через точку P , а путь γ' — нет. Сумма этих путей дает нетривиальный (т. е. не гомотопный нулю внутри $\text{Im}(\Gamma)$) цикл в сети Γ , стягиваемый в $B_{\varepsilon_n}(\Gamma)$ для любого ε_n . Противоречие.

Значит, $\text{Im}(\Gamma') = \text{Im}(\Gamma)$ и, поскольку сеть Γ — несамопересекающаяся, то $\ell(\Gamma') \geq \ell(\Gamma)$. Кроме того,

$$\ell(\Gamma') = \lim_{\varepsilon} \inf_{D \in \mathcal{O}_{\varepsilon}(\Gamma)} \ell(D) \leq \ell(\Gamma),$$

значит, $\ell(\Gamma') = \ell(\Gamma)$ и каждая внутренняя точка каждого невырожденного ребра сети Γ принадлежит образу лишь одного ребра сети Γ' . Итак, образ сети Γ' содержится в образе нашей исходной сети Γ , причем по каждому невырожденному участку сети Γ сеть Γ' проходит лишь однажды. Отсюда вытекает, что каждое невырожденное ребро сети Γ совпадает с некоторым ребром сети Γ' (с точностью до выбора параметра на кривой). Кроме того, выполнена лемма 1.1, поэтому ребра сети Γ' , соответствующие смежным невырожденным ребрам в сети Γ (общую вершину которых обозначим через $A = \Gamma(v)$), либо смежны в сети Γ' , либо соединены в сети Γ' путем, отображающимся в точку A . Это означает, что можно сделать перепараметризацию сети Γ , превращающую ее в сеть Γ' .

Но ранее мы доказали, что для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n сеть Γ' может быть параметрической деформацией переведена в сеть Γ'_n , т. е. для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n сеть Γ'_n получена из сети Γ деформацией внутри $B_{\varepsilon}(\Gamma)$, откуда и вытекает требуемое в лемме. \square

Покажем, что из только что доказанной леммы вытекает утверждение 1) теоремы. Если бы утверждение 1) теоремы было неверно, то для

каждого ε_n нашлась бы сеть $\Gamma_n \in \mathcal{O}_{\varepsilon_n}(\Gamma)$ такая, что $\ell(\Gamma_n) < \ell(\Gamma)$ и

$$|\ell(\Gamma_n) - \inf_{D \in \mathcal{O}_{\varepsilon_n}(\Gamma)} \ell(D)| < \frac{1}{n}.$$

Но по лемме 2.7 для некоторой подпоследовательности n_k сети Γ'_{n_k} получены из сети Γ деформацией внутри $B_{\varepsilon_{n_k}}(\Gamma)$, а значит, в силу ε_0 -устойчивости, начиная с некоторого момента имеют длину не меньше $\ell(\Gamma)$ — противоречие с оценкой $\ell(\Gamma'_{n_k}) \leq \ell(\Gamma_{n_k}) < \ell(\Gamma)$.

Для доказательства второй части теоремы 4 предположим, что для каждого ε_n из некоторой последовательности $\varepsilon_n \rightarrow 0+$ существует сеть $\Gamma_n \neq \Gamma$ такая, что $\ell(\Gamma_n) = \ell(\Gamma)$. Рассмотрим существующую по лемме 2.7 последовательность $\Gamma'_{n_k} \in \mathcal{O}_{\varepsilon_{n_k}}(\Gamma)$ такую, что $\ell(\Gamma'_{n_k}) \leq \ell(\Gamma_{n_k})$, и каждую Γ'_{n_k} можно получить из Γ деформацией внутри $B_{\varepsilon_{n_k}}(\Gamma)$. В силу строгой устойчивости начиная с некоторого момента $\ell(\Gamma_{n_k}) = \ell(\Gamma)$ и сети Γ'_{n_k} и Γ равны с точностью до перепараметризации. Ясно, что при удалении «лишних» ребер из Γ_{n_k} при переходе к Γ'_{n_k} в лемме 2.8 могут быть удалены только ребра нулевой длины, т. е. сети Γ_{n_k} равны сети Γ с точностью до перепараметризации, что противоречит нашему предположению $\Gamma_n \neq \Gamma$.

Оставшаяся третья часть теоремы 4 очевидным образом вытекает из первой части и следующей леммы.

Лемма 2.10. *Если односвязная окрестность U такова, что $\text{Im}(\Gamma) \subset U \subset B_\varepsilon(\Gamma)$, то любая сеть, содержащаяся в U и имеющая ту же границу, что и Γ , содержится в $\mathcal{O}_\varepsilon(\Gamma)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную сеть, содержащуюся в U и имеющую ту же границу, что и Γ , см. рис. 2.3. Сделаем перепараметризацию так, чтобы все граничные вершины имели степень 1. Затем параметрической деформацией стянем в точки все циклы в этой сети. После перепараметризации получим дерево D . Теперь, очевидно, некоторой параметрической деформацией $D_t, 0 \leq t \leq 1$ внутри образа сети D (т. е. $\text{Im}(D_t) \subset \text{Im}(D)$) можно добиться, чтобы все внутренние вершины сети D_1 и одна граничная отображались в некоторую точку P , и в эту же точку отображались все ребра, за исключением $|\partial\Gamma| - 1$ ребер, соединяющих $D_1^{-1}(P)$ с остальными граничными вершинами (через $|\partial\Gamma|$ обозначено число граничных вершин сети Γ). После перепараметризации получим сеть типа «звездочка» (с единственной внутренней вершиной). Ясно, что любые две сети типа «звездочка» с одной и той же границей соединяются параметрической

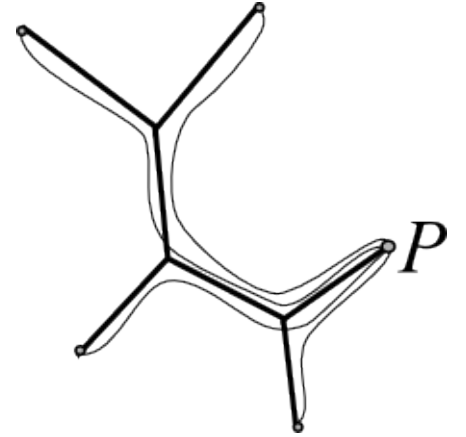


Рис. 2.3: Дерево можно деформировать в сеть типа «звездочка».

деформацией внутри односвязной окрестности U . Таким образом, все сети, содержащиеся в U и имеющие ту же границу, что и Γ , связаны между собой последовательностью деформаций, а значит, все они лежат в $\mathcal{O}_\varepsilon(\Gamma)$. \square

Глава 3

Замкнутые локально минимальные сети на выпуклых многогранниках

3.1 Определения и предварительные результаты

3.1.1 Многогранники, многогранные метрики и развёртки.

Определение. Многогранной метрикой будем называть внутреннюю метрику на двумерном многообразии, относительно которой каждая внутренняя точка многообразия имеет окрестность, изометричную либо плоскому кругу, либо окрестности вершины конуса с плоской метрикой, а каждая граничная точка многообразия имеет окрестность, изометричную окрестности вершины сектора с плоской метрикой.

Здесь метрика называется *внутренней*, если расстояние между любыми двумя точками равно точной нижней грани длин соединяющих их кривых. Под *сектором* с полным углом $\alpha < 2\pi$ мы понимаем сектор на плоскости, ограниченный двумя лучами с общим началом и углом α между ними. Под *конусом* с полным углом $\alpha < 2\pi$ мы понимаем метрическое пространство, полученное из сектора с углом α отождествлением двух его граничных лучей. Рассматривая универсальное накрытие над плоскостью без одной точки, легко определить сектор и конус с полным углом, большим 2π , но нам они не понадобятся, поэтому мы не приводим подробные определения.

Ясно, что на компактном многообразии с многогранной метрикой найдётся лишь конечное число точек, не имеющих изометричной кругу окрестности. Эти точки мы будем называть *вершинами* многогранной метрики. *Кривизна* вершины по определению равна 2π минус *полный угол* при этой вершине (т.е. полный угол при вершине конуса, которому изометрична окрестность данной вершины). Про остальные внутренние точки будем говорить, что они *имеют нулевую кривизну*. Мы будем рассматривать только многогранные метрики *неотрицательной кривизны*, т.е. метрики, в которых кривизны всех вершин положительны.

Для конкретного задания многогранной метрики мы будем использовать понятие *развёртки* в следующем смысле [1]. Рассмотрим произвольное конечное семейство плоских многоугольников. На множестве их сторон зададим *правила склейки*, т.е. укажем пары соответствующих друг другу сторон и для каждой пары зададим изометрию одной стороны на другую. (Соответствующие стороны должны иметь одинаковую длину.) Каждая сторона должна соответствовать не более, чем одной другой стороне. Соответствовать друг другу могут в том числе и стороны одного и того же многоугольника.

Определение. Развёртка — это конечное семейство многоугольников и правила склейки их сторон, удовлетворяющие описанным выше условиям.

Теперь рассмотрим дизъюнктное объединение всех многоугольников развёртки и отождествим в нём точки сторон, соответствующие друг другу при выбранных изометриях («склеим» многоугольники вдоль некоторых сторон, подразумевается абстрактное отождествление точек, без привязки к каким-либо склеиваниям и сгибаниям физических многоугольников в трёхмерном пространстве). Полученное топологическое пространство естественным образом наделяется внутренней метрикой — расстоянием между двумя точками считаем инфимум длин соединяющих их путей. Здесь длина пути, проходящего по одному многоугольнику вычисляется в обычной евклидовой метрике, а длина произвольного пути равна сумме длин путей в произвольном разбиении данного пути на части, каждая из которых содержится в одном многоугольнике. Очевидно, что в результате получается пространство с многогранной метрикой в смысле нашего определения, данного в разделе 3.1.1. В этом случае будем говорить, что эта *развёртка задаёт эту многогранную метрику*, или что эта развёртка есть *развёртка данной многогранной метрики*. Мы будем говорить о развёртке как о метрическом пространстве, имея в виду эту метрику.

Обратно, любое компактное пространство с многогранной метрикой может быть представлено в виде развёртки, т.е. допускает разбиение на части, изометричные плоским многоугольникам. Это легко проверить: покрываем пространство конечным числом маленьких плоских треугольников (вообще говоря, перекрывающихся), а затем части, на которые границы этих треугольников разбивают пространство, объявляем многоугольниками развёртки.

Невырожденным выпуклым многогранником будем называть границу выпуклой оболочки нескольких точек в \mathbb{R}^3 , не лежащих в одной плоскости. *Вырожденным выпуклым многогранником* (или *дважды покрытым выпуклым многоугольником*) будем называть сферу, снабжённую многогранной метрикой, развёртка которой состоит из двух равных выпуклых

многоугольников, склеенных по соответственным сторонам. Везде ниже под словами «*выпуклый многогранник*» или просто «*многогранник*» будем понимать вырожденный или невырожденный выпуклый многогранник в \mathbb{R}^3 .

Определение. *Полный угол вершины многогранника* — это сумма углов граней многогранника при этой вершине.

Определение. *Кривизной вершины многогранника* называется величина, равная 2π минус полный угол в этой вершине.

Ясно, что естественная внутренняя метрика на выпуклом многограннике является многогранной метрикой положительной кривизны (и кривизны вершин этой метрики равны кривизнам вершин многогранника). Верно и обратное.

Теорема 5 ([1]). *Для любой многогранной метрики положительной кривизны на сфере существует выпуклый многогранник, обладающий этой метрикой. Этот многогранник определён однозначно с точностью до движения в \mathbb{R}^3 , в том числе любая изометрия (в смысле внутренней метрики) многогранника на себя может быть реализована движением в \mathbb{R}^3 .*

Из авторского доказательства последней теоремы, а именно из [1, гл. 2 § 2 п. 2 и гл. 4 § 2 лемма 3] непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Отображение, ставящее в соответствие данной многогранной метрике выпуклый многогранник, непрерывно относительно следующих топологий. Две многогранные метрики с одинаковым числом вершин ε -близки, если существуют их развёртки, состоящие лишь из треугольников и имеющие одинаковое комбинаторное строение (т.е. гомеоморфные как триангуляции сферы), соответствующие стороны которых отличаются не более, чем на ε . Два многогранника с одинаковым числом вершин ε -близки, если их можно расположить в \mathbb{R}^3 так, чтобы расстояние между соответствующими вершинами было меньше ε .*

Более того, при этом отображении образ границ многоугольников развёртки на многограннике непрерывно зависит от развёртки.

Замечание 2. Многогранник несёт в себе информацию двух видов: внутреннюю метрику и способ реализации в \mathbb{R}^3 . В случае выпуклых многогранников внутренняя метрика однозначно определяет реализацию в \mathbb{R}^3 , но по заданной многогранной метрике вообще говоря трудно найти эту реализацию (трудно найти рёбра — геодезические, по которым нужно «сгибать»).

Задачи, рассматриваемые в диссертации, затрагивают лишь свойства внутренней метрики многогранника, т.е. не зависят от реализации многогранника в \mathbb{R}^3 , и потому могут рассматриваться как задачи о сетях на пространствах с многогранной метрикой. Часто для перехода от многогранной метрики к многограннику будет использоваться теорема 5. Вопрос способов поиска реализации метрики многогранником затрагиваться не будет.

3.1.2 Геодезические и многоугольники

Следующие объекты мы определим для произвольной многогранной метрики неотрицательной кривизны (а значит, и на произвольном выпуклом многограннике).

Кратчайшей с данными концами будем называть кривую, имеющую наименьшую длину среди всех кривых с этими концами.

Если каждая внутренняя точка данной кривой имеет окрестность, изометричную кругу или сектору круга (если точка лежит на границе многообразия), причём при изометрии каждой такой окрестности на круг или сектор круга участок кривой, содержащийся в этой окрестности, переходит в диаметр круга, то кривую будем называть *геодезической*. Отметим, что геодезическая всегда является локально кратчайшей кривой, а в случае многогранной метрики положительной кривизны на сфере верно и обратное: любая локально кратчайшая кривая является геодезической. *Геодезической ломаной* будем называть путь, который можно разбить на конечное число путей (*звеньев*), каждый из которых является геодезической.

Рассмотрим непрерывное отображение плоского замкнутого круга в пространство с многогранной метрикой, ограничение которого на внутренность круга является гомеоморфизмом. Граничная окружность плоского круга перейдёт при этом в некоторую непрерывную замкнутую кривую. Если эта кривая является геодезической ломаной, то образ на развёртке внутренности круга будем называть *многоугольником*, а образ окружности — его *границей*. Если границу нельзя представить как замкнутую геодезическую ломаную меньше, чем с n звеньями, а с n звеньями — можно, то многоугольник будем называть n -угольником, а узлы этой ломаной — *вершинами* многоугольника.

Итак, многоугольник — открытое множество, гомеоморфное открытому двумерному диску. Если граница многоугольника не имеет самопересечений, то многоугольник с добавленной к нему границей будем называть *замкнутым геодезическим многоугольником*. В частности, любой диск с многогранной метрикой является замкнутым геодезическим многоугольником. Но граница многоугольника может иметь самопересечения, и тогда

замыкание многоугольника на многограннике не обязательно гомеоморфно замкнутому кругу. Например, многогранник с выброшенным ребром AB — это двуугольник. Нам будет полезна формула для суммы углов многоугольника — одна из дискретных версий формулы Гаусса–Бонне.

Лемма 3.2 ([1, Гл. 1 § 8 теор. 2]). *Пусть $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ — внутренние углы n -угольника, а $k_j, j = 1, \dots, s$ — кривизны вершин многогранной метрики, находящиеся внутри n -угольника. Тогда*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \pi(n - 2) + \sum_{j=1}^s k_j.$$

Геодезически выпуклым будем называть подмножество пространства с многогранной метрикой, если любые две его точки можно соединить геодезической, лежащей целиком в этом множестве.

Лемма 3.3 ([1, гл. 1, § 8]). *На любом замкнутом (как метрическое пространство) многообразии с многогранной метрикой положительной кривизны каждые две точки можно соединить кратчайшей. Эта кратчайшая является геодезической ломаной. Причём преломляться (иметь с какой-то стороны угол, отличный от π) кратчайшая может только в вершинах границы многообразия, угол в которых больше π .*

Следствие 4. *Многоугольник, все углы которого меньше или равны π , является геодезически выпуклым.*

Нам понадобится внутри такого многоугольника «соединять геодезическими» больше, чем две точки. Этому посвящена следующая лемма.

Пусть дано подмножество U некоторого многогранника, и множество $X \subset U$. *Выпуклой оболочкой $C(X, U)$ множества $X \subset U$ в множестве U будем называть наименьшее по включению множество C такое, что $X \subset C \subset U$ и любая содержащаяся в U геодезическая с концами в C целиком содержится в C .*

Лемма 3.4. *Пусть $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ — множество вершин многогранника, попавших внутрь многоугольника U , углы которого $\leq \pi$. Тогда выпуклая оболочка $C(X, U)$ — это либо замкнутый геодезический многоугольник с углами $\leq \pi$, вершины которого содержатся в X , либо геодезическая с концами из X , либо точка (при $n = 1$). Причём при $n \geq 2$ углы фигуры $U \setminus C$ в вершинах C не меньше π .*

Доказательство. Для каждой пары X_i, X_j обозначим через γ_{ij} кратчайшую среди соединяющих их кривых, лежащих в U (в силу леммы 3.3 каждая из кратчайших будет геодезической на поверхности многогранника). Теперь среди всевозможных замкнутых n -звенных ломаных с множеством вершин X и звеньями среди выбранных кратчайших выберем

ломаную наименьшей длины. От противного легко доказать, что такая ломаная будет несамопересекающейся и, значит, ограничивает некоторый геодезический многоугольник M_1 .

Если для некоторых X_i, X_j существует геодезическая γ с концами X_i, X_j , строго содержащаяся в $U \setminus M_1$, то γ разбивает $U \setminus M_1$ на две части: одна из них гомеоморфна кольцу, а другая гомеоморфна кругу и, значит, является геодезическим многоугольником, который мы обозначим через N_1 . Рассмотрим $M_1 \cup N_1 = M_2$. Докажем, что многоугольник M_2 имеет строго меньше вершин, чем M_1 . Действительно, внутрь M_2 попадают вершины M_1 , находящиеся на его границе между X_i и X_j и являющиеся вершинами N_1 . Отсутствие исчезнувших вершин означало бы, что N_1 является двуугольником, ограниченным геодезической γ и стороной многоугольника M_1 , но любой двуугольник содержит внутри себя точку положительной кривизны, а их внутри $U \setminus M_1$ нет по построению. Далее, на k -ом шаге рассматриваем $U \setminus M_k$ и, если существует геодезическая внутри $U \setminus M_k$ с концами в вершинах M_k , расширяем с помощью неё многоугольник M_k до M_{k+1} . Поскольку число вершин при этом убывает, процесс остановится на некоем многоугольнике M_∞ таком, что в $U \setminus M_\infty$ не существует геодезической с концами в вершинах M_∞ . Напомним, что M_∞ содержит (внутри или на границе) всё X , т.е. все содержащиеся в U вершины многогранника.

Докажем, что все углы $U \setminus M_\infty$ в вершинах M_∞ не меньше π .

Первый случай: M_∞ — одноугольник. Из формулы Гаусса-Бонне для многоугольников (по нашему определению гомеоморфных диску) легко вывести, что в случае не содержащего вершин ненулевой кривизны и гомеоморфного кольцу $U \setminus M_\infty$ его сумма углов равна $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i + \beta = \pi(n+1)$, где α_i — углы многоугольника U , β — угол $U \setminus M_\infty$ в вершине одноугольника M_∞ . Поскольку $\alpha_i \leq \pi$ по условию леммы, $\beta \geq \pi$, что нам и требовалось.

Второй случай: M_∞ имеет хотя бы две вершины. Предположим, что угол $U \setminus M_\infty$ в вершине X_2 многоугольника M_∞ меньше π . Пусть он образован сторонами X_1X_2 и X_2X_3 (возможно, $X_1 = X_3$). Рассмотрим кратчайшую среди кривых, содержащихся в $U \setminus M_\infty$, соединяющих X_1 и X_3 и гомотопных в $U \setminus M_\infty$ ломаной $X_1X_2X_3$. Эта кратчайшая является геодезической ломаной с узлами в вершинах $U \setminus M_\infty$ с углом больше π (лемма 3.3), т.е. её узлы не могут лежать ни в вершинах U , ни в вершине X_2 . С другой стороны, она не может быть второй половиной границы многоугольника M_∞ , так как эта вторая половина не гомотопна ломаной $X_1X_2X_3$. Значит, эта геодезическая ломаная содержит звено, лежащее строго внутри $U \setminus M_\infty$ и соединяющее вершины M_∞ , но это звено есть геодезическая, которых не существует по определению M_∞ . Противоречие завершает доказательство того факта, что все углы $U \setminus M_\infty$ в вершинах M_∞ не меньше π .

Докажем, что любая содержащаяся в U геодезическая с концами в M_x целиком содержится в M_x . Предположим, что это не так, тогда существует геодезическая γ с концами на границе M_x и внутренностью внутри $U \setminus M_x$. Геодезическая γ разбивает $U \setminus M_x$ на две части. Часть, гомеоморфная кругу, представляет собой геодезический многоугольник, все углы которого, за исключением двух углов в концах γ , заведомо больше π , но это противоречит формуле Гаусса-Бонне.

Наконец, докажем, что любое множество C такое, что $X \subset C \subset U$ и любая содержащаяся в U геодезическая с концами в C целиком содержится в C , содержит M_x . Тем самым будет доказано, что $M_x = C(X, U)$. Ясно, что все геодезические, соединяющие X_i и лежащие в U , содержатся в любом C . Сделаем триангуляцию многоугольника M_x геодезическими так, чтобы множество вершин триангуляции совпадало с множеством X [1, Гл. 4, § 1, лемма 2]. Все стороны треугольников такой триангуляции лежат в C . Любой из её треугольников — изометричен плоскому, значит, любая его точка принадлежит некоторой геодезической с концами на его сторонах, а значит, тоже лежит в C . Итак, все точки треугольников триангуляции, а значит и все точки многоугольника M_x , лежат в C , что и требовалось. \square

3.2 Результаты

Здесь мы приводим все результаты главы, а также упоминаем другие известные нам факты о минимальных сетях на многогранниках. Короткие доказательства мы приводим здесь же, а более длинные вынесены в раздел 3.3. Определения сетей были введены в главе 1, особенно нам понадобятся определения, данные в разделе 1.6. Сейчас мы лишь напомним, что во всей этой главе, за исключением раздела 3.3.5, мы рассматриваем обыкновенные сети, а с учётом критерия 2 можно дать следующее определение минимальной сети на выпуклом многограннике, эквивалентное общему определению замкнутой локально минимальной сети, данному в разделе 1.5.

Определение. *Минимальная сеть на выпуклом многограннике* — это связная сеть со следующими свойствами: (1) все её рёбра — геодезические, (2) каждая вершина имеет степень 3, (3) угол между смежными рёбрами равен 120° .

3.2.1 Необходимое условие на кривизны вершин.

Пусть дана минимальная сеть на многограннике. Запишем для каждой ячейки сети формулу Гаусса-Бонне (лемма 3.2): $\frac{2\pi n}{3} = \pi(n-2) + \sum_v k(v)$, где суммирование идёт по вершинам многогранника, попавшим внутрь

данной n -угольной ячейки и $k(v)$ — кривизна вершины v (см. определения в разделе 3.1.1). Получаем следующие утверждения.

Лемма 3.5 ([8, Предл. 5.34]). *Для n -угольной ячейки минимальной сети сумма кривизн попавших в эту ячейку вершин многогранника равна $\sum_v k(v) = 2\pi - \frac{\pi n}{3}$. Минимальная сеть на выпуклом многограннике состоит из не более чем шестиугольных ячеек. Шестиугольные ячейки не содержат вершин многогранника.*

Теорема 6 (Необходимое условие на кривизны). *Для того, чтобы на выпуклом многограннике существовала минимальная сеть, необходимо, чтобы множество V его вершин можно было разбить на несколько подмножеств $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_s$ так, что сумма кривизн вершин в каждом подмножестве V_i кратна $\frac{\pi}{3}$ и меньше 2π , т.е. равна одному из чисел $\frac{\pi k}{3}$, $k = 1, \dots, 5$.*

Напомним, что сумма всех кривизн (сферического) многогранника равна 4π , и, значит, минимальная сеть некоторым образом разбивает 4π на части вида $\frac{k\pi}{3}$. Всего существует 47 таких разбиений (т.е. решений уравнения $x_1 \frac{\pi}{3} + x_2 \frac{2\pi}{3} + x_3 \pi + x_4 \frac{4\pi}{3} + x_5 \frac{5\pi}{3} = 4\pi$ в целых неотрицательных числах).

В [37] был приведён пример не имеющего минимальных сетей тетраэдра, кривизны вершин которого удовлетворяют соотношениям $k(A) = \frac{2\pi}{3}$, $k(B) = \frac{5\pi}{3}$, $k(C) + k(D) = \frac{5\pi}{3}$. Таким образом, **необходимое для существования минимальной сети условие на кривизны многогранника из теоремы 6 не является достаточным уже в случае тетраэдров.** Отметим, что приведённое в [37] доказательство этого факта было длинным и непрозрачным. В теореме 19 (раздел 3.2.5) мы покажем, как с помощью результатов диссертации совсем коротко доказать недостаточность необходимого условия из теоремы 6.

3.2.2 Реализация плоских графов на многогранниках в виде минимальных сетей.

Если забыть про длины рёбер и углы между ними, то минимальная сеть на многограннике — это одна из возможных реализаций на сфере некоторого плоского графа. Попробуем пойти в обратном направлении. Рассмотрим произвольный плоский граф с вершинами степени 3 и не более чем шестиугольными гранями. Припишем каждому ребру некоторый вес — положительное число. Зададимся целью построить многогранник, на котором этот граф был бы реализован как минимальная сеть, длины рёбер которой равнялись бы весам соответствующих рёбер графа. Если бы такая минимальная сеть нашлась, то каждая её ячейка представляла бы собой

геодезический многоугольник, в котором нам известны величины всех углов (120°) и длины всех сторон. Следующая лемма объясняет, насколько эти данные задают геодезический многоугольник.

Лемма 3.6. (1) *Геодезический n -угольник с углами по 120° , длинами последовательных сторон a_1, \dots, a_n (все $a_i > 0$, далее считаем $a_{i+n} \equiv a_i$ для всех i) и не содержащий внутри себя точек отрицательной кривизны существует тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*

при $n = 6$: $a_1 + a_2 = a_4 + a_5$ и $a_2 + a_3 = a_5 + a_6$

при $n = 5$: $a_i < a_{i+2} + a_{i+3}$, $i = 1, \dots, 5$

при $n = 4$: $a_i < a_{i+1} + 2a_{i+2} + a_{i+3}$, $i = 1, \dots, 4$

при $n \leq 3$ существует всегда.

(2) *При выполнении условий из пункта 1 существует и n -угольник, содержащий внутри себя не более одной вершины ненулевой кривизны.*

(3) *Многоугольник из пункта 2 единственен с точностью до изометрии; его развёртка может быть построена конструктивно.*

Лемма будет доказана в разделе 3.3.1. А сейчас выведем из этой леммы следствия. Будем говорить, что *плоский взвешенный граф* реализуется на многограннике P как минимальная сеть, если на многограннике P существует минимальная сеть, реализующая этот плоский граф и имеющая длины рёбер, равные весам соответствующих рёбер графа. Ясно, что для каждой минимальной сети однозначно определён плоский взвешенный граф, который она реализует.

Всякому многограннику с минимальной сетью на нём естественным образом соответствует семейство геодезических многоугольников (ячеек сети), а длины их сторон удовлетворяют соотношениям из леммы 3.6. Значит, этим соотношениям обязаны удовлетворять веса рёбер любого плоского взвешенного графа, который может быть реализован как минимальная сеть.

Обратно, для каждой грани плоского графа с весовой функцией, удовлетворяющей этим соотношениям, в соответствии с первым пунктом леммы 3.6, существует геодезический многоугольник с углами по 120° и длинами сторон, равными весам соответствующих рёбер. Построим такие многоугольники для всех граней плоского графа. Зададим на множестве этих многоугольников правила склейки, отождествляя две стороны (вершины) многоугольников в том случае, если эти стороны (вершины) соответствуют одному и тому же ребру (или вершине) графа. Легко проверить, что при этом получается гомеоморфное сфере пространство с многогранной метрикой положительной кривизны. Причём по построению границы многоугольников этой развёртки образуют минимальную сеть, реализую-

щую данный плоский взвешенный граф. По теореме 5 эта метрика реализуется некоторым выпуклым многогранником, и тем самым доказана достаточность соотношений из леммы 3.6 для существования многогранника с минимальной сетью, реализующей данный взвешенный граф. Итак, из леммы 3.6 мы вывели следующую теорему.

Теорема 7. *Для взвешенного плоского графа (G, w) существует выпуклый многогранник, на котором (G, w) реализуется как минимальная сеть, тогда и только тогда, когда (G, w) обладает свойствами:*

- (1) *степень каждой вершины равна трём;*
- (2) *всякая грань является не более чем шестиугольной;*
- (3) *$w(v_1v_2) + w(v_2v_3) = w(v_4v_5) + w(v_5v_6)$ для любой нумерации $v_1 \dots v_6$ последовательных вершин любой шестиугольной грани;*
- (4) *$w(v_1v_2) < w(v_2v_3) + 2w(v_3v_4) + w(v_4v_1)$ для любой нумерации $v_1 \dots v_4$ последовательных вершин любой четырёхугольной грани;*
- (5) *$w(v_1v_2) < w(v_3v_4) + w(v_4v_5)$ для любой нумерации $v_1 \dots v_5$ последовательных вершин любой пятиугольной грани.*

Для любого плоского графа G весовая функция, принимающая на каждом ребре значение 1, удовлетворяет условиям 3–5, откуда вытекает следующее следствие.

Следствие 5. *Для всякого плоского графа G , у которого степень всех вершин равна трём и все грани не более чем шестиугольные, существует выпуклый многогранник, на котором G реализуется как минимальная сеть.*

Следующая теорема — ещё одно следствие леммы 3.6.

Теорема 8. *Для всякого графа (G, w) со свойствами (1)–(5) из теоремы 7 существует единственный (с точностью до движения в \mathbb{R}^3) выпуклый многогранник, на котором (G, w) реализуется как простая минимальная сеть, причём на этом многограннике существует единственная с точностью до движения \mathbb{R}^3 минимальная сеть, реализующая данный взвешенный граф.*

Доказательство. Доказательство существования представляет собой повторение доказательства достаточности в предыдущей теореме, но с учётом пункта 2 леммы 3.6. Для доказательства единственности предположим, что нашлись два многогранника, на каждом из которых данный плоский взвешенный граф реализуется как простая минимальная сеть. В силу пункта 3 леммы 3.6 ячейки двух сетей, соответствующие одной и той же грани плоского графа, представляют собой изометричные многоугольники. Поскольку комбинаторная структура двух сетей одинакова, эти

ячейки склеены между собой в двух сетях одинаковым образом, поэтому, объединяя изометрии пар ячеек, получаем изометрию одного многогранника на другой, переводящую данные минимальные сети друг в друга. По теореме 5 такая изометрия может быть реализована движением \mathbb{R}^3 , что и требовалось. \square

3.2.3 Дважды покрытые треугольники

Теорема 9. *В случае многогранников с тремя вершинами (т.е. дважды покрытых треугольников) необходимое условие на кривизны из теоремы 6 является достаточным.*

Доказательство. Для выполнения необходимого условия из теоремы 6 вершины многогранника должны иметь кривизны $\{\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$, $\{\pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$ или $\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$. Каждому из этих наборов кривизн соответствует один (с точностью до гомотетии) дважды покрытый треугольник. На рис. 3.1 для каждого из случаев изображена развёртка многогранника и пример минимальной сети на нём. \square

Теорема 10. *На дважды покрытом треугольнике любая минимальная сеть может быть переведена параметрической деформацией в классе минимальных сетей в сеть, длины всех рёбер которой одинаковы.*

Доказательство опирается на теорему 8 и тот факт, что в случае трёх вершин их кривизны однозначно определяют многогранник с точностью до подобия. Итак, пусть на любом из трёх возможных дважды покрытых треугольников имеется минимальная сеть Γ типа G , реализующая некоторый плоский граф (G, w) (т.е. длина ребра $\Gamma(e)$ равна $w(e)$, $e \in E(G)$). Рассмотрим семейство взвешенных графов (G, w_t) , $0 \leq t \leq 1$ с весовой функцией $w_t(e) = (1 - t)w(e) + t$. Докажем, что все эти взвешенные графы реализуются как минимальные сети на многогранниках. Для этого проверим выполнение условий теоремы 7. Условия 1 и 2 выполнены, так как (G, w_0) реализуется. Кроме того, $w_1(e) \equiv 1$, поэтому для (G, w_1) также выполнены все условия теоремы 7. При фиксированном G условия 3–5 ограничивают выпуклое подмножество в множестве всех весовых функций, поэтому w_t , как выпуклая линейная комбинация w_0 и w_1 , также удовлетворяет условиям 3–5, а значит, по теореме 8, существует выпуклый многогранник P_t , на котором взвешенный плоский граф (G, w_t)

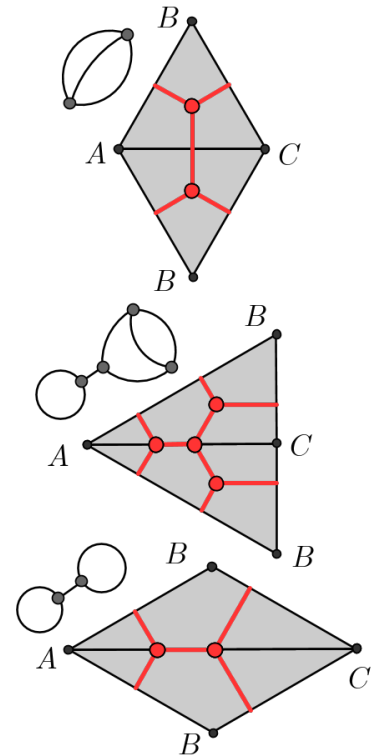


Рис. 3.1: Все дважды покрытые треугольники, имеющие минимальную сеть

реализуется как простая минимальная сеть. Тогда многогранник P_t должен иметь ровно три вершины тех же кривизн, что и исходный дважды покрытый треугольник P_0 , а значит, P_t может отличаться от P_0 только растяжением с некоторым коэффициентом k_t . Значит, каждый взвешенный граф из семейства $(G, \frac{1}{k_t}w_t)$ реализуется на P_0 как минимальная сеть. Обозначим эту сеть через Γ_t . Нам осталось доказать, что параметрическая деформация Γ_t непрерывна. Коэффициент k_t непрерывен, так как он пропорционален площади развёртки, а она непрерывно зависит от w_t , поэтому семейство взвешенных графов $(G, \frac{1}{k_t}w_t)$ непрерывно. Значит, соответствующие многогранные метрики непрерывно зависят от t (в смысле топологии из леммы 3.1). Рассмотрим отображение, ставящее в соответствие развёртке (многогранной метрике) пару (изометричный ей многогранник, границы многоугольников развёртки, нарисованные на этом многограннике). В силу леммы 3.1 это отображение непрерывно (относительно топологии в образе, считающей близкими близкие многогранники с близким разбиением на многоугольники развёртки). В нашем случае образ границ многоугольников развёртки — это сеть, откуда и вытекает, что Γ_t непрерывно зависит от t . \square

Замечание 3. Из теорем 8 и 10 вытекает, что минимальные сети на дважды покрытых треугольниках однозначно (с точностью до линейной деформации) соответствуют 3-валентным плоским графам с тремя гранями степени меньше 6 и остальными гранями степени ровно 6. Или, эквивалентно, двойственным графам, т.е. (рассматриваемым с точностью до гомеоморфизма сферы) триангуляциям сферы, все вершины которых, за исключением трёх, имеют степень 6, а три оставшиеся имеют степени $(1, 2, 3)$, $(2, 2, 2)$ или $(1, 1, 4)$. Множество таких триангуляций, как уже отмечалось во введении, изучено в работе [35].

В случае многогранников с тремя вершинами геометрическая конструкция построения триангуляций, описанная в [35], оказывается совсем простой и даёт результат, который мы формулируем в следствии 6 после краткого описания конструкции.

Конструкция. Возьмём любую из изображённых на рис. 3.1 развёрток (мы возьмём «чистую» развёртку, без нарисованной на ней сети) и поместим её на плоскость, разбитую на правильные шестиугольники, так, чтобы все вершины развёртки оказались в центрах шестиугольников разбиения. «Вырежем» развёртку из плоскости и склеим дважды покрытый треугольник T . Попавшие на развёртку «следы» шестиугольников разбиения превратятся в минимальную сеть на T .

Следствие 6. *Любая минимальная сеть на дважды покрытом треугольнике может быть линейной деформацией в классе минимальных сетей*

переведена в минимальную сеть, полученную в результате этой конструкции.

Для произвольного многогранника аналоги теоремы 10 и замечания 3 неверны даже в случае простых сетей, что и делает задачу о минимальных сетях на многогранниках не только комбинаторной, но и геометрической.

Замечание 4. Дважды покрытые треугольники с кривизнами $\{\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$ и $\{\pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$ допускают разветвлённые накрытия плоским тором, склееным из ромба с углом $\frac{\pi}{3}$ (см. рис. 3.2). Отсюда следует, что любая минимальная сеть на таких многогранниках при помощи поднятия канонически может быть переведена в минимальную сеть на этом плоском торе. Обратно, все минимальные сети на этом плоском торе, обладающие определёнными симметриями, проецируются в минимальные сети на дважды покрытых треугольниках. Это позволяет при желании «спроецировать» описанную в [8, 14] классификацию минимальных сетей на плоских торах и получить классификацию минимальных сетей на двух указанных дважды покрытых треугольниках. Мы не будем этим заниматься, так как в силу предыдущего замечания это фактически приведёт к частным случаям описанной в [35] классификации.

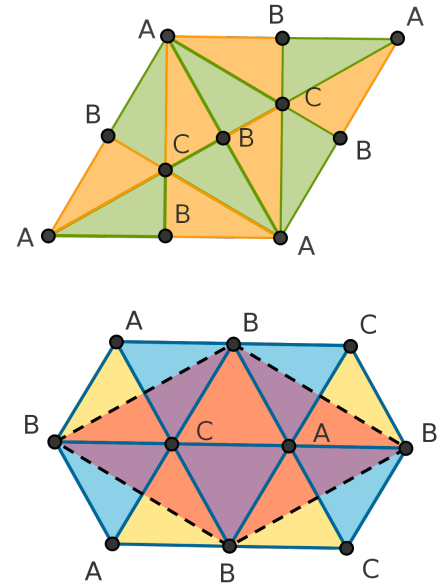


Рис. 3.2: Накрытия тором.

3.2.4 Минимальные сети на тетраэдрах

Выпуклый многогранник с четырьмя вершинами — это либо тетраэдр, либо дважды покрытый выпуклый четырёхугольник. Ниже мы будем допускать вольность речи и называть тетраэдрами все выпуклые многогранники с четырьмя вершинами.

Теорема 11. Если на поверхности тетраэдра существует минимальная сеть, то набор **полных углов** тетраэдра имеет один из семи видов:

- (равногранные) $\{\pi, \pi, \pi, \pi\}$
- (1-1) $\{\pi/3, \pi/3, \alpha, \beta\}$
- (1-2) $\{\pi/3, 2\pi/3, \alpha, \beta\}$
- (1-3) $\{\pi/3, \pi, \alpha, \beta\}$
- (1-4) $\{\pi/3, 4\pi/3, \alpha, \beta\}$
- (2-2) $\{2\pi/3, 2\pi/3, \alpha, \beta\}$
- (2-3) $\{2\pi/3, \pi, \alpha, \beta\}$

Замечание 5. Здесь α, β — полные углы вершин, про которые в теореме ничего не утверждается. Написанное в круглых скобках сочетание цифр будем называть *типом* соответствующего тетраэдра. Один и тот же тетраэдр может принадлежать нескольким типам.

Доказательство. Вспоминаем теорему 6. Поскольку вершин четыре и их суммарная кривизна равна 4π , возможны два варианта: 1) кривизна каждой вершины кратна $\frac{\pi}{3}$, 2) кривизны двух вершин кратны $\frac{\pi}{3}$, а кривизны двух других в сумме дают строго меньше, чем 2π . В варианте (1) либо сумма кривизн любых двух вершин равна 2π , и тогда кривизна каждой вершины тетраэдра равна π , а это означает [12, задача 2.32], что тетраэдр равногранный (все его грани — равные треугольники). Либо, так же как и в варианте (2), найдётся пара вершин с кривизнами, кратными $\frac{\pi}{3}$, и суммарной кривизной больше 2π . Простым перебором получаем, что пара кривизн этих вершин может принимать шесть значений ($\frac{5\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ и π , $\frac{5\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ и π). Им соответствуют шесть пар полных углов, указанных в формулировке теоремы. \square

Следующий несложный факт следует, например, из классификации минимальных сетей на равногранных тетраэдрах [8, 15].

Теорема 12. *На любом многограннике с четырьмя вершинами и кривизнами $\{\pi, \pi, \pi, \pi\}$ существует простая минимальная сеть.*

Теорема 13. *На всех тетраэдрах, кроме некоторых тетраэдров типа 1-4, существует минимальная сеть.*

Доказательство непосредственно вытекает из следующей теоремы.

Теорема 14. *Если у многогранника есть две вершины A и B кривизн 1) $\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$, 2) $\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$, 3) $\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$, 4) $\pi, \frac{5\pi}{3}$, или 5) $\pi, \frac{4\pi}{3}$, то на этом многограннике существует минимальная сеть. Более того, для любой A - B -геодезической на этом многограннике существует минимальная сеть, расположенная в сколь угодно малой окрестности этой геодезической.*

Доказательство. Рассмотрим любую геодезическую γ , соединяющую две данные вершины (хотя бы одна такая геодезическая всегда существует, см. следствие 4). Рассмотрим малое ε такое, что окрестность $B_\varepsilon(\gamma)$ не содержит других вершин многогранника. Выпустим из вершины A луч геодезической γ_A , составляющий равные углы с геодезической γ (углы измеряются во внутренней метрике на поверхности многогранника), и проведём этот луч до пересечения с границей окрестности $B_\varepsilon(\gamma)$. Аналогично построим луч γ_B из вершины B . Сделаем разрез поверхности многогранника вдоль двух проведённых лучей. Множество $B_\varepsilon(\gamma) \setminus \gamma_A \setminus \gamma_B$ — геодезический многоугольник, не содержащий внутри себя вершин многогранника,

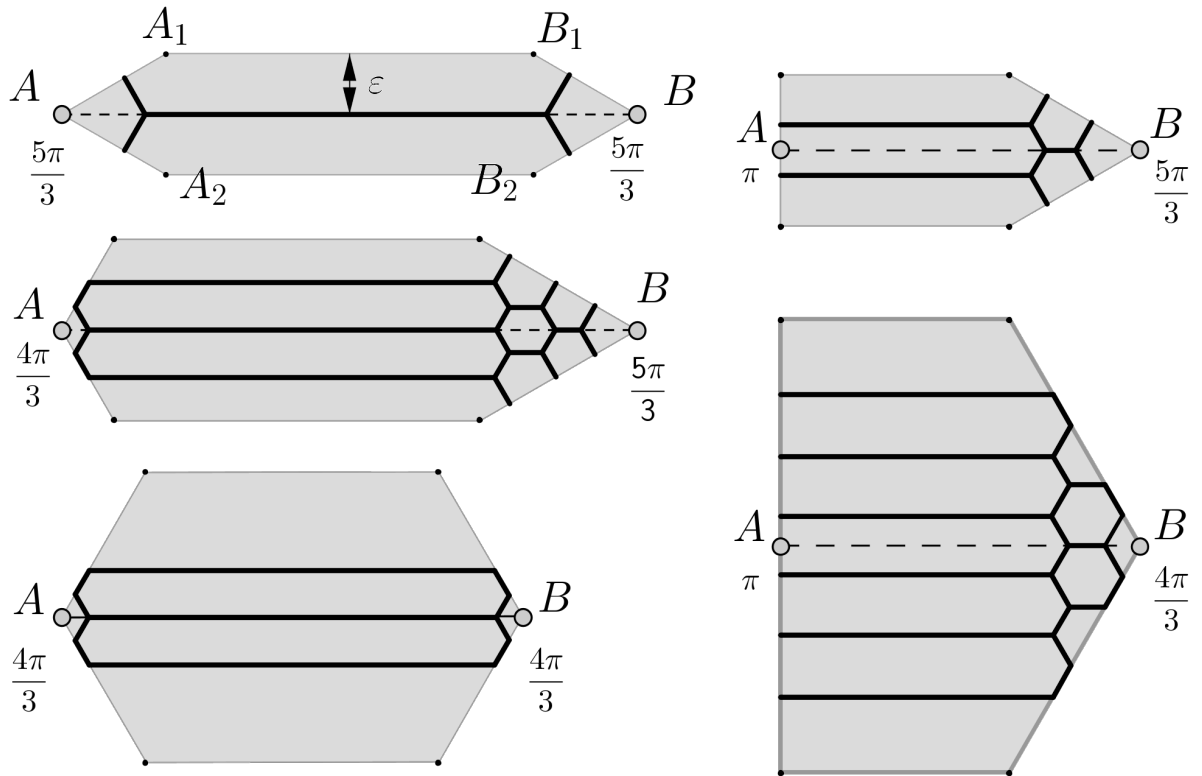


Рис. 3.3: Минимальные сети, расположенные в ε -окрестности геодезической, соединяющей пару вершин многогранника. Рядом с каждой вершиной указана её кривизна.

поэтому его можно «развернуть на плоскость», более того, во всех наших пяти случаях он изометричен плоскому вложенному многоугольнику, см. рис. 3.3. На левой верхней картинке изображён случай вершин с кривизнами $\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ и отмечены все вершины получившегося многоугольника. Отрезок AB — геодезическая γ , отрезки AA_1, AA_2 соответствуют разрезу вдоль γ_A , BB_1, BB_2 — разрезу вдоль γ_B , граница окрестности $B_\varepsilon(\gamma)$ состоит из двух отрезков A_1B_1 и A_2B_2 . Во всех пяти случаях на рисунке изображён пример минимальной сети. Легко видеть, что при склеивании изображённые сети превращаются в минимальную сеть на многограннике и что построение этих сетей возможно в любой сколь угодно малой окрестности отрезка AB , т.е. геодезической γ . \square

Как уже было сказано в разделе 3.2.1, на некоторых тетраэдах типа (1-4) минимальных сетей нет. Мы докажем этот факт в разделе 3.2.5 (теорема 19). А сейчас приведём пример тетраэдров этого типа, имеющих минимальную сеть.

Теорема 15. *Существуют тетраэдры типа (1-4), не принадлежащие другим типам, на которых есть минимальная сеть.*

Доказательство. Пусть в тетраэдре $ABCD$ полные углы при вершинах B и A равны $\pi/3$ и $4\pi/3$ и выполняется следующее условие: ребро AB со-

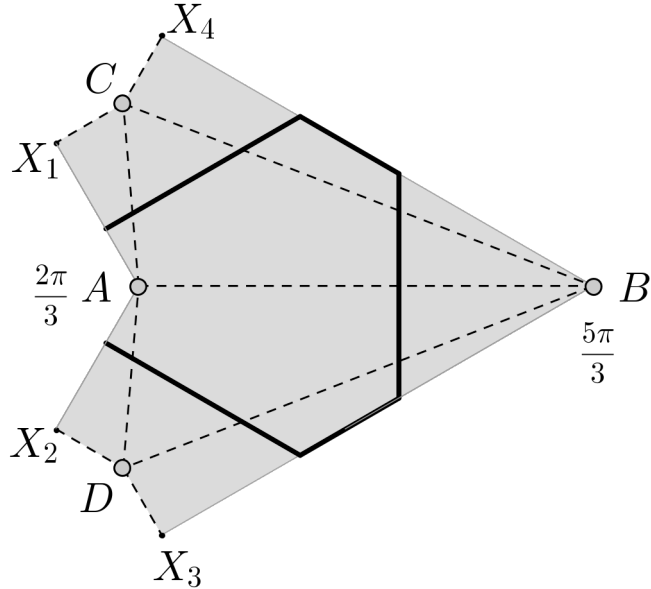


Рис. 3.4: Тетраэдр типа (1-4): пример с минимальной сетью. На развёртке пунктиром отмечены рёбра тетраэдра. В изображённом случае точка X — середина ребра CD .

ставляет с рёбрами AC и AD углы, большие $\pi/6$. Тогда на этом тетраэдре существует сеть типа $\bigcirc-\bigcirc$, см. рис. 3.4. По этому рисунку, в частности, видно, что тетраэдры типа (1-4), обладающие указанным условием, существуют. Теорема доказана. \square

Теорема 16. *Если кривизны всех вершин многогранника с четырьмя вершинами кратны $\frac{\pi}{3}$, то на этом многограннике существует минимальная сеть.*

Доказательство. Рассмотрим две вершины с наибольшими кривизнами. Учитывая, что сумма четырёх кривизн равна 4π , получаем, что две наибольших кривизны могут быть равны либо π, π (в случае равногранного тетраэдра), либо $\frac{4\pi}{3}, \pi$, либо $\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$, либо $\frac{5\pi}{3}, \pi$, либо $\frac{5\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$, либо $\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. Существование минимальных сетей на равногранных тетраэдрах вытекает из работы [14] (теорема 12).,; а во всех остальных случаях — из теоремы 13 (или из теоремы 14). \square

3.2.5 Система разрезов: геометрическое необходимое условие.

Пусть многогранник P удовлетворяет необходимому условию из теоремы 6. Рассмотрим какое-нибудь из разбиений множества V его вершин на подмножества $V_1 \sqcup \dots \sqcup V_s$, подходящие под это условие. Как найти минимальную сеть, разбивающую вершины этим способом (или убедиться, что такой сети нет)? Для каждого V_i мы знаем, что его вершины должны содержаться в одной k_i -угольной ячейке сети, где k_i определяется соотношением $\sum_{v \in V_i} k(v) = 2\pi - \frac{2\pi k_i}{3}$ (лемма 3.5). Наша задача — «нарисовать»

«вокруг» каждого множества V_i свой k_i -угольник U_i (ячейку) так, чтобы их внутренности не пересекались между собой, и, более того, чтобы объединение границ всех U_i можно было, возможно, добавив некоторые рёбра, превратить в минимальную сеть. Одна из сложностей здесь в том, что «окружать» несколько точек многоугольником можно *существенно разными способами*, т.е. не гомотопными в классе гомотопий, не проходящих через вершины многогранника. Чтобы формализовать понятие «способа окружения вершин ячейками», мы вводим следующее определение.

Определение. *Системой разрез* на многограннике P будем называть разбиение его множества вершин $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_s$ и систему попарно непересекающихся подмножеств многогранника $\{M_i\}_{i=1}^s$, если для каждого $i = 1, \dots, s$

- (1) V_i удовлетворяет условию теоремы 6 (т.е. сумма кривизн вершин, входящих в V_i , равна одному из чисел $\pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$)
- (2) $V_i \subset M_i$
- (3) M_i — это либо точка из V_i , либо геодезическая с концами в V_i , либо замкнутый геодезический многоугольник, все вершины которого содержатся в V_i
- (4) все углы многоугольника $P \setminus M_i$ больше или равны π (если M_i не одноточечно.)

Пусть дана минимальная сеть с шестигонными ячейками U_i , $i = 1, \dots, s$ на многограннике с множеством вершин V . Положим $V_i = V \cap U_i$ и $M_i = C(V_i, U_i)$ (здесь $C(X, U)$ — выпуклая оболочка подмножества $X \subset U$, см. определения в разделе 3.1.2). Из леммы 3.4 следует, что $\{V_i, M_i\}_{i=1}^s$ — система разрез. Будем говорить, что эта система разрез *соответствует* данной минимальной сети. Итак, доказано следующее необходимое условие существования минимальной сети.

Теорема 17. *Если на выпуклом многограннике есть минимальная сеть, то на этом многограннике существует система разрез.*

Это необходимое условие сильнее, чем необходимое условие из теоремы 6 (см. теорему 19 ниже). Однако оно по-прежнему не является достаточным.

Теорема 18. *Существует многогранник, имеющий систему разрез, хотя на нём нет ни одной минимальной сети.*

Доказательство мы приводим в разделе 3.3.3. В качестве искомого примера будет построен многогранник, напоминающий очень вытянутый прямоугольный параллелепипед. Отметим, что это доказательство обобщает идеи неопубликованной дипломной работы Максима Гортинского, посвящённой минимальным сетям на кубе.

Пример: прямоугольный параллелепипед. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед P с размерами $\ell \times w \times h$. Кривизна каждой его вершины равна $\frac{\pi}{2}$. Какой может быть система разрезов? Из пункта (1) определения системы разрезов вытекает, что каждое множество V_i должно состоять из двух вершин (их суммарная кривизна равна π). В качестве множеств M_i можно рассмотреть любую четвёрку попарно непересекающихся геодезических с концами в вершинах параллелепипеда (отметим, что при этом углы $P \setminus M_i$ равны $\frac{3\pi}{2} \geq \pi$, т.е. все условия из определения системы разрезов выполнены).

На любом параллелепипеде существует минимальная сеть. Например, пусть $\ell \geq w \geq h$, тогда несложно проверить, что существует сеть, изображённая на рис. 3.5 на одной из стандартных развёрток параллелепипеда $\ell \times w \times h$. Система разрезов, соответствующая этой минимальной сети, состоит из двух самых коротких рёбер и двух средних по длине (они выделены пунктиром).

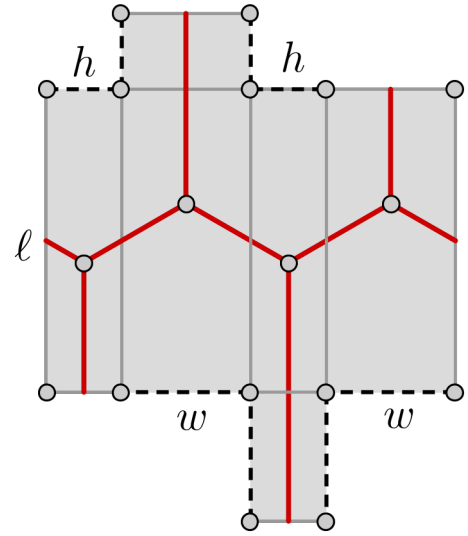


Рис. 3.5: Сеть на параллелепипеде.

Доказательство следующей теоремы 19 показывает, что необходимое условие на кривизны из теоремы 6 слабее необходимого условия на наличие системы разрезов из теоремы 17.

Теорема 19. *Минимальной сети нет на любом тетраэдре $ABCD$, удовлетворяющем следующим условиям на кривизны вершин, длину ребра CD и площадь поверхности S (сумму площадей граней)*

- (1) $k(A) = \frac{2\pi}{3}$, $k(B) = \frac{5\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} < k(D) < \frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6} < k(C) < \frac{4\pi}{3}$;
- (2) $\frac{S}{|CD|^2} < \frac{1}{4}$.

Замечание 6. Можно проверить, что эта теорема представляет собой усиление теоремы 5 из работы [37], упоминавшейся в разделе 3.2.1.

На рис. 3.6 показано, как построить пример развёртки $A_1C_1DC_2A_2B$ дважды покрытого четырёхугольника $ABCD$, подходящего под условия теоремы 19. Здесь XA_1BA_2 — ромб с углом $\frac{\pi}{3}$, точка D принадлежит диагонали XB ромба, $\angle C_1DC_2$ чуть больше $\frac{\pi}{3}$, а длина $A_1C_1 = A_2C_2$ мала по сравнению со стороной ромба.

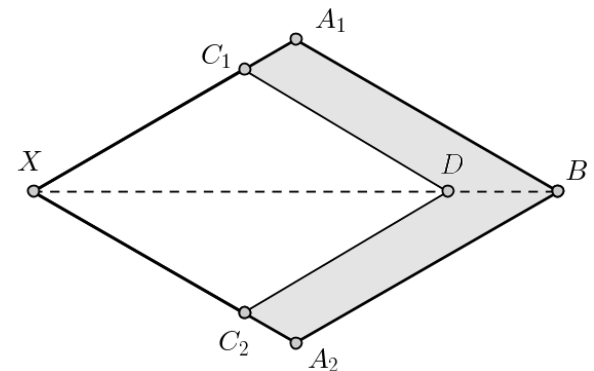


Рис. 3.6: Развёртка тетраэдра.

Доказательство. Покажем, что на многограннике $ABCD$, удовлетворяющем условиям теоремы, не существует системы разрезов — тогда по теоре-

ме 17 на нём не существует и минимальных сетей. Предположим противное и рассмотрим систему разрезов $\{V_i, M_i\}$. Из условия (1) следует, что кривизна каждой из вершин C и D не кратна $\frac{\pi}{3}$. Учитывая тот факт, что сумма кривизн всех вершин сферического многогранника равна 4π , получаем, что $k(C) + k(D) = \frac{5\pi}{3}$ и единственное возможное разбиение вершин на три подмножества в системе разрезов — это $V_1 = \{A\}, V_2 = \{B\}, V_3 = \{C, D\}$. Рассмотрим множество M_3 . Поскольку полный угол в вершине C меньше π , C не может лежать на границе M_3 , иначе нарушится свойство (4) из определения системы разрезов. Значит, на границе M_3 лежит только вершина D , т.е. M_3 — одноугольник с вершиной D , содержащий внутри себя вершину C .

Докажем, что такого одноугольника на нашем тетраэдре не существует. По-прежнему предполагая противное, найдём кратчайшую геодезическую γ внутри M_3 , соединяющую C и D (лемма 3.3). Тогда $M_3 \setminus \gamma$ — геодезический треугольник, изометричный равнобедренному треугольнику CD_1D_2 на плоскости. Причём в треугольнике CD_1D_2 угол при вершине C равен полному углу при вершине C тетраэдра, т.е. $\frac{2\pi}{3} < \angle D_1CD_2 < \frac{5\pi}{6}$. Оценим площадь треугольника $S(CD_1D_2) = \frac{1}{2}|CD_1| \cdot |CD_2| \sin \angle D_1CD_2 > \frac{1}{2}(\ell(\gamma))^2 \cdot \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}|CD|^2$, поскольку ребро короче любой геодезической, соединяющей его концы. Но площадь треугольника равна площади одноугольника M_3 , которая, в свою очередь, меньше площади поверхности тетраэдра, обозначенной через S в формулировке теоремы. Получаем $S > S(D_1CD_2) > \frac{1}{4}|CD|^2$, противоречие с условием (2) доказываемой теоремы. \square

3.2.6 Сведение задачи к простым минимальным сетям.

Из теорем 7 и 8 вытекает следующий факт.

Следствие 7. *Для всякой минимальной сети N на выпуклом многограннике P существует единственный выпуклый многогранник $P_S(N)$, на котором существует простая минимальная сеть, изометричная сети N .*

Более того, в разделе 3.3.2 будет показано, что для всех минимальных сетей N на многограннике P , которым соответствует данная система разрезов, многогранник $P_S(N)$ будет одним и тем же, т.е. верна следующая теорема.

Теорема 20. *Для каждой системы разрезов M_{cut} на многограннике P существует и единственен многогранник $P_S(M_{cut})$ такой, что для любой минимальной сети N на многограннике P , которой соответствует система разрезов M_{cut} , существует простая минимальная сеть на многограннике $P_S(M_{cut})$, изометричная сети N .*

В доказательстве будет показано, что развёртку многогранника $P_S(M_{cut})$ можно построить конструктивно. Таким образом, для изучения минимальных сетей на данном многограннике P можно рассмотреть всевозможные системы разрезов на P , для каждой системы разрезов M_{cut} построить соответствующий многогранник $P_S(M_{cut})$ и на нём изучить простые минимальные сети. Затем перенести полученные результаты обратно на многогранник P . При этом, вообще говоря, не все простые минимальные сети, реализующиеся на $P_S(M_{cut})$, реализуются на P , верно только утверждение в обратном направлении.

Эта конструкция принципиально сводит задачу поиска произвольных минимальных сетей на данном многограннике P к задаче поиска простых минимальных сетей на некотором семействе многогранников $\mathcal{S}(P)$. Вторая задача в некотором смысле проще первой, поскольку простые минимальные сети существуют лишь на многогранниках, все кривизны которых кратны $\frac{\pi}{3}$. К сожалению, гарантировать, что семейство $\mathcal{S}(P)$ конечно, мы не можем, поскольку существуют многогранники с бесконечным числом систем разрезов (например, куб).

Замечание 7. Поскольку для любых двух точек многогранника множество геодезических с концами в этих точках не более чем счётно, множество всех возможных систем разрезов на любом многограннике, а значит и семейство $\mathcal{S}(P)$, тоже не более чем счётно.

Гипотеза 1. *Каждый выпуклый многогранник имеет не более чем конечное число систем разрезов, которым соответствуют минимальные сети.*

3.2.7 Факты и гипотезы о существовании минимальных сетей на многогранниках

Поскольку необходимое условие на кривизны (теорема 6) не является достаточным (раздел 3.2.5 теорема 19), возникает вопрос о достаточности следующего более сильного условия (не являющегося необходимым).

Гипотеза 2. *Если кривизны всех вершин многогранника кратны $\frac{\pi}{3}$, то на этом многограннике существует минимальная сеть.*

Как мы уже знаем, это верно для дважды покрытых треугольников (теорема 9) и тетраэдров (теорема 16).

По лемме 3.5 из существования простой минимальной сети на многограннике следует, что кривизна каждой вершины этого многогранника делится на $\frac{\pi}{3}$. Следующая гипотеза — усиление гипотезы 2.

Гипотеза 3. *Если кривизны всех вершин многогранника кратны $\frac{\pi}{3}$, то на этом многограннике существует простая минимальная сеть.*

Справедливость этой гипотезы доказана только в случае многогранников с тремя вершинами (наша теорема 9), в случае равногранных тетраэдров (теорема 12) и в случае тетраэдров с кривизнами $\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$ (см. теорему 22 ниже).

Следующую теорему 21 можно рассматривать как новый аргумент «в пользу» гипотезы 3.

Теорема 21. Пусть $\mathcal{P}(k_1, \dots, k_n)$ — множество многогранников с n вершинами и кривизнами $\frac{k_1\pi}{3}, \dots, \frac{k_n\pi}{3}$, где $k_i \in \mathbb{Z}, k_i \geq 0$. Тогда множество многогранников, имеющих простую минимальную сеть, открыто и всюду плотно в $\mathcal{P}(k_1, \dots, k_n)$.

Открытость и всюду плотность здесь понимается относительно топологии на $\mathcal{P}(k_1, \dots, k_n)$, порождённой следующим отношением. Два многогранника с n занумерованными вершинами ε -близки, если их можно расположить в \mathbb{R}^3 так, что расстояния между соответствующими вершинами меньше ε . Доказательство теоремы 21 приведено в разделе 3.3.4.

3.2.8 Физические соображения и тетраэдры с кривизнами $\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$

Вернёмся к сделанному во введении замечанию, что минимальная сеть «натянута на многогранник и не соскальзывает с его поверхности». Ясно, что на любом многограннике можно нарисовать сколько угодно неминимальных сетей. Естественно спросить: а что происходит с соответствующими сетями из эластичных нитей, т.е. «куда» они «соскальзывают»? Соскальзывая, сеть сокращает свою длину, и если в некоторый «регулярный» момент соскальзывание прекратится, то это будет означать, что сеть достигла локального минимума длины, т.е. превратилась в минимальную сеть! Однако чаще такое соскальзывание заканчивается тем, что рёбра сети «наезжают» на вершины многогранника, переходят через них, и, в конце концов, вся сеть оказывается внутри одной грани, где и сжимается в точку — абсолютный минимум длины.

Если же удаётся показать, что на данном многограннике «соскальзывание» должно «остановиться», то это значит, что на данном многограннике существует минимальная сеть. Например, можно показать, что ребро сети не может «наехать» на вершину с полным углом не больше π . Но, к сожалению, многогранников, у которых полные углы всех вершин не больше π (т.е. кривизны не меньше π), очень мало: это равногранные тетраэдры и дважды покрытый равносторонний треугольник; с минимальными сетями на этих многогранниках и так всё ясно.

Описанные соображения оказались полезны в случае многогранников с кривизнами $\{\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$.

Теорема 22. *На любом тетраэдре с кривизнами $\{\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$ существует простая минимальная сеть, а именно, всегда существует минимальная сеть, реализующая плоский граф, изображённый на рис. 3.7.*

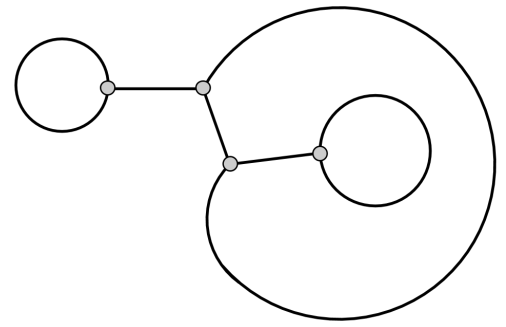


Рис. 3.7: Сеть такого типа реализуется на всех тетраэдрах с кривизнами $\{\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$.

Доказательство этой теоремы мы приводим в разделе 3.3.5. Сеть, существование которой устанавливается в доказательстве, имеет наименьшую длину среди сетей на данном тетраэдре, имеющих тип, изображённый на рис. 3.7, и содержащих внутри каждой своей пятиугольной ячейки одну вершину тетраэдра кривизны $\frac{\pi}{3}$, а внутри каждой одноугольной ячейки — одну вершину кривизны $\frac{5\pi}{3}$.

Отметим, что аналог теоремы 22 для произвольного графа и тетраэдров с соответствующими кривизнами неверен. Например, можно доказать, что минимальная сеть, реализующая граф, изображённый на рис. 3.8, существует *не* на всех многогранниках с кривизнами $\{\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$. Открыт следующий вопрос (имеющий смысл при условии, что верна гипотеза 3): верно ли, что для каждого семейства многогранников с фиксированными кривизнами, кратными $\frac{\pi}{3}$ (т.е. множества $\mathcal{P}(k_1, \dots, k_n)$, введённого в формулировке теоремы 21), существует плоский граф, реализующийся как минимальная сеть на всех многогранниках этого семейства.

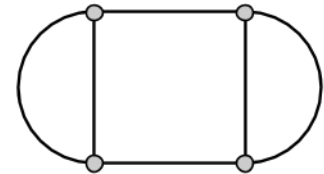


Рис. 3.8: Сеть такого типа существует *НЕ* на всех тетраэдрах с кривизнами $\{\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$.

3.3 Доказательства теорем про сети на многогранниках

3.3.1 Доказательство леммы 3.6 о длинах сторон геодезического многоугольника

При $n = 6$ из формулы Гаусса-Бонне (лемма 3.2) вытекает, что суммарная кривизна вершин внутри шестиугольника с углами по 120° должна быть равна нулю, т.е. речь идёт о плоском шестиугольнике с углами по 120° и заданными длинами сторон. Пусть $a_1 + a_2 = a_4 + a_5$ и $a_2 + a_3 = a_5 + a_6$. Рассмотрим правильный треугольник со стороной $a_1 + a_2 + a_3$ и отрезем от него три угла в виде правильных треугольников со сторонами a_1 , a_3 и a_5 . Из равенств $a_1 + a_2 + a_3 = a_3 + a_4 + a_5 = a_5 + a_6 + a_1$ следует,

что получившийся шестиугольник будет иметь требуемые длины сторон. Для доказательства в обратную сторону нужно, наоборот, достроить шестиугольник до правильного треугольника. Пункты 2 и 3 леммы в этом случае очевидны.

При $n < 6$ суммарная кривизна точек внутри n -угольника с углами 120° равна $2\pi - \frac{\pi}{3}n$ (лемма 3.2). Из теоремы 8 книги [1, гл. 5, § 1] вытекает, что если для данных длин сторон и углов существует геодезический многоугольник, то существует такой многоугольник, содержащий внутри себя единственную вершину положительной кривизны (см. также сноску к доказательству этой теоремы 8 книги [1, гл. 5, § 1]). Поэтому пункт 2 леммы 3.6 вытекает из пункта 1, и для доказательства пункта 1 достаточно рассматривать многоугольники, содержащие ровно одну вершину положительной кривизны. Дальнейшие рассуждения (кроме леммы 3.7) во многом аналогичны доказательству той же теоремы 8 книги [1, гл. 5, § 1], но мы приводим их для полноты.

Пусть для данных a_1, \dots, a_n существует геодезический многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$, $\angle A_i = 120^\circ$, содержащий внутри себя единственную вершину положительной кривизны X . Через γ_i обозначим кратчайшую внутри этого многоугольника, соединяющую X и A_i (γ_i существуют и являются геодезическими, см. лемму 3.3). Легко показать, что в нашем случае γ_i определены однозначно и не пересекаются между собой. Треугольники $A_iA_{i+1}X$, ограниченные γ_i, γ_{i+1} и стороной A_iA_{i+1} , не содержат внутри себя вершин ненулевой кривизны, и потому изометричны треугольникам на плоскости. Нарисуем эти треугольники на плоскости последовательно, сначала $A'_1X'A'_2$ (изометричный треугольнику A_1XA_2), затем $A'_2X'A'_3$ (изометричный треугольнику A_2XA_3 , по другую сторону от отрезка A'_2X'), и т.д., а последний треугольник, изометричный треугольнику A_nXA_1 , обозначим через $A'_nX'A''_1$. Тогда суммарный угол треугольников при вершине X' равен полному углу многогранной метрики в вершине X , т.е. $\frac{\pi}{3}n$. Отсюда ясно, что треугольники не перекрываются, и их объединение представляет собой вложенный $(n+2)$ -угольник на плоскости, ограниченный замкнутой ломаной $A'_1A'_2 \dots A'_nA''_1X'A'_1$, причём $|A'_1X'| = \ell(\gamma_1) = |A''_1X'|$, $\angle A'_i = 120^\circ, i = 2, \dots, n$, $|A'_1A'_2| = a_1, |A'_iA'_{i+1}| = a_i, |A'_nA''_1| = a_n, \angle X' = \frac{\pi}{3}n$. Обратно, если такой плоский многоугольник для данных a_1, \dots, a_n существует, то задав на нём склейку $A'_1X' \equiv A''_1X'$, получим развёртку требуемого геодезического многоугольника. Итак, пункт 1 леммы 3.6 равносильно следующей лемме 3.7.

Лемма 3.7. *Плоский многоугольник $A'_1A'_2 \dots A'_nA''_1X'$ со свойствами $|A'_1A'_2| = a_1, |A'_iA'_{i+1}| = a_i, |A'_nA''_1| = a_n, |A'_1X'| = |A''_1X'|, \angle A'_i = 120^\circ, i = 2, \dots, n, \angle X' = \frac{\pi}{3}n$ существует при $n \leq 3$: для любых $a_i > 0$, а при больших n — тогда и только тогда, когда*

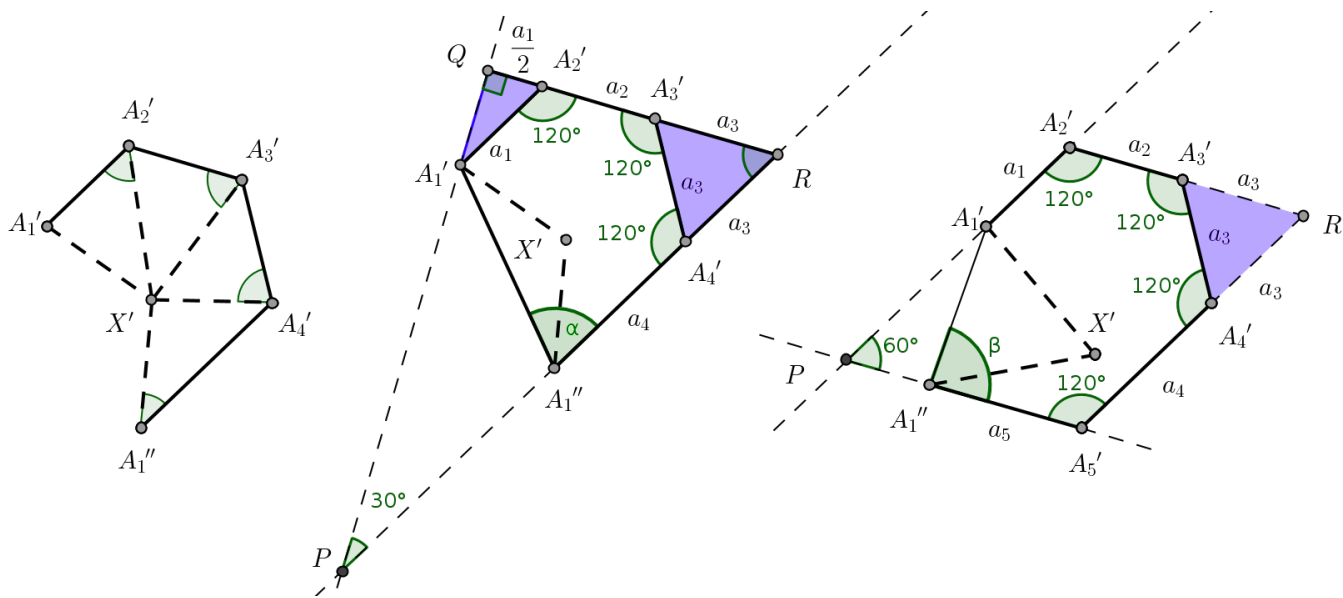


Рис. 3.9: В центре: $\alpha > 30^\circ \Leftrightarrow 2(\frac{a_1}{2} + a_2 + a_3) > a_4 + a_3$; справа: $\beta > 60^\circ \Leftrightarrow a_5 < a_2 + a_3$.

при $n = 4$: $a_i < a_{i+1} + 2a_{i+2} + a_{i+3}$, $i = 1, \dots, 4$ (считаем $a_{i+4} = a_i$ для всех i);

при $n = 5$: $a_i < a_{i+2} + a_{i+3}$, $i = 1, \dots, 5$ (считаем $a_{i+5} = a_i$ для всех i).

Прежде чем перейти к доказательству леммы 3.7, заметим, что ломаная $A'_1 A'_2 \dots A'_n A''_1$ однозначно задаётся длинами своих сторон (a_1, \dots, a_n) и (ориентированными) углами (все по 120°). Положение точки X' тоже определено однозначно — это вершина равнобедренного треугольника с данным основанием и углом. Значит, набор a_1, \dots, a_n однозначно задаёт построенную нами развёртку геодезического многоугольника, а значит и сам многоугольник, т.е. доказан пункт 3 леммы 3.6.

Доказательство леммы 3.7. Для заданных a_1, \dots, a_n рассмотрим плоскую ломаную $A'_1 A'_2 \dots A'_n A''_1$ с данными длинами сторон и углами по 120° , а затем построим точку X' как вершину равнобедренного треугольника $A'_1 A''_1 X'$ с нужным углом X' . При $n = 1, 2, 3$ внутренний угол X' ломаной $A'_1 A'_2 \dots A'_n A''_1 X'$ равен $\frac{\pi n}{3} \leq \pi$, поэтому очевидно, что ломаная $A'_1 A'_2 \dots A'_n A''_1 X' A'_1$ не имеет самопересечений и ограничивает вложенный многоугольник, т.е. случай $n \leq 3$ разобран.

При $n = 4$ многоугольник $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4 A''_1$ при любых a_1, \dots, a_4 является выпуклым. Пусть нумерация вершин в $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4 A''_1$ идёт по часовой стрелке. Будем говорить, что $\angle ABC$ положителен, если луч AB переходит в луч BC при повороте против часовой стрелки на угол, меньший π . Отсутствие самопересечений у замкнутой ломаной $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4 A''_1 X' A'_1$ равносильно тому, что точка X' лежит внутри пятиугольника $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4 A''_1$, а это равносильно положительности углов $\angle A'_i A'_{i+1} X'$, $i = 1, 2, 3$ и $\angle A'_4 A''_1 X'$. Докажем, что положительность углов равносильна системе неравенств.

Сначала докажем, что $\angle A'_4 A''_1 X'$ положителен тогда и только тогда,

когда $a_4 < a_3 + 2a_2 + a_1$. Построим правильный $\triangle A'_3 A'_4 R$ и прямоугольный $\triangle A'_1 A'_2 Q$ с углами $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ и гипотенузой $A'_1 A'_2$ и рассмотрим $\triangle PQR$ с углами $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, см. рис. 3.9 (в центре). Заметим, что $|QR| = \frac{a_1}{2} + a_2 + a_3$, а $|A'_2 R| = a_4 + a_3$. Значит, $|PR| = a_1 + 2a_2 + 2a_3 > a_4 + a_3 = |A''_1 R|$ равносильно тому, что A''_1 лежит внутри гипотенузы треугольника PQR , и потому равносильно условию $\angle A'_1 A''_1 A'_4 > \frac{\pi}{6}$, т.е. $\angle A'_4 A''_1 X' > 0$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь любой из углов $\angle A'_{k-1} A'_k X'$, $i = 2, 3, 4$, и замкнутую ломаную $L(k)$, состоящую из отрезков $A'_1 X'$, $X' A'_k$ и участка ломаной $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4 A''_1$ от A'_k до A''_1 . Повернём ломаную $L(k)$ на $\frac{2\pi}{3}$ по часовой стрелке вокруг точки X' . При этом точка A''_1 перейдёт в A'_1 , образ вершины A'_i , $k \leq i \leq 4$ обозначим через A''_i и рассмотрим ломаную $A''_k \dots A''_4 A'_1 A'_2 \dots A'_{k-1}$. Все углы этой ломаной по построению равны 120° , длины сторон — $a_k, a_{k+1}, \dots, a_n, a_1, \dots, a_{k-1}$, $|A''_k X'| = |A'_k X'|$, «внутренний» $\angle A'_k X' A''_k = 240^\circ$. Т.е. это ломаная с теми же свойствами, но для набора $(a_k, a_{k+1}, \dots, a_n, a_1, \dots, a_{k-1})$. Условие того, что $\angle A'_{k-1} A'_k X'$ положителен равносильно условию, что положителен его образ при повороте, т.е. $\angle A''_{k-1} A''_k X'$, а это уже выведенное нами условие на положительность «крайнего» угла для $A''_k \dots A''_4 A'_1 A'_2 \dots A'_{k-1} A'_k X'$, т.е. в точности соответствующее неравенство системы.

Случай $n = 5$ может быть разобран аналогично с использованием рис. 3.9 (правый рисунок). \square

3.3.2 Доказательство теоремы 20 о многограннике, на котором минимальные сети реализуются как простые.

Пусть дана система разрезов $M_{cut} = \{V_i, M_i\}$. Рассмотрим незамкнутый многогранник Q , получающийся из P выбрасыванием всех неодноточечных M_i . По определению системы разрезов углы Q во всех граничных вершинах не меньше π , поэтому по теореме [1, гл. 5, § 1, теор. 8] существует и единственен замкнутый многогранник P_S , содержащий незамкнутый многогранник Q_1 , изометричный Q и такой, что всякая компонента связности $P_S \setminus Q_1$ содержит ровно по одной вершине многогранника P_S . В [1] развёртка многогранника P_S строится конструктивно — используется построение развёртки геодезического многоугольника с заданными длинами сторон и величинами углов и единственной вершиной положительной кривизны. Это построение выполняется с помощью развёртки, аналогичной развёртке $A'_1 A'_2 \dots A'_n A''_1 X'$ из предыдущего пункта.

Если минимальной сети N на многограннике P соответствует система разрезов M_{cut} , то $N \subset Q$. Поскольку многогранник Q_1 изометричен Q , на нём имеется сеть N_1 , изометричная (как множество, в смысле внутренних метрик на Q и Q_1) минимальной сети N . По построению в каждой

шестиугольной ячейке сети N_1 содержится ровно одна вершина многогранника P_S . Итак, все минимальные сети с данной системой разрезов на P реализуются как простые минимальные сети на многограннике P_S . Единственность P_S вытекает из теоремы 8. \square

3.3.3 Пример многогранника без минимальных сетей, имеющего систему разрезов (теорема 18).

Этот раздел посвящён доказательству теоремы 18. В качестве искомого примера мы построим многогранник, напоминающий очень вытянутый прямоугольный параллелепипед. Дело в том, что при достаточно большой длине ℓ (по сравнению с w и h) на параллелепипеде $\ell \times w \times h$ не существует минимальной сети с системой разрезов, состоящей из четырёх рёбер длины ℓ . Однако, как мы отмечали в разделе 3.2.5, на любом параллелепипеде существует минимальная сеть (хоть с какой-нибудь системой разрезов), так что сам параллелепипед не подходит для доказательства теоремы 18. Мы чуть-чуть пошевелим вершины «длинного» параллелепипеда так, чтобы на нём «не осталось» систем разрезов, содержащих относительно короткие геодезические (как в примере на рис. 3.5), — тогда минимальная сеть должна иметь систему разрезов с длинными геодезическими, что, как мы покажем, невозможно, и тем самым будет доказано отсутствие минимальных сетей на этом многограннике.

Лемма 3.8. *Для любых положительных ℓ, w, h и ε и прямоугольного параллелепипеда P размером $\ell \times w \times h$ существует многогранник P^* с восемью вершинами и биекция $\beta: V(P) \rightarrow V(P^*)$ такие, что*

- (1) $|k(v) - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon$ для всех $v \in V(P^*)$;
- (2) для $v_1, v_2 \in V(P)$ равенство $k(\beta(v_1)) + k(\beta(v_2)) = \pi$ выполняется тогда и только тогда, когда v_1 и v_2 — концы некоторого ребра длины ℓ , причём в этом случае расстояние между $\beta(v_1)$ и $\beta(v_2)$ на многограннике P^* не меньше $\ell - 2\varepsilon$;
- (3) площади поверхности $S(P)$ и $S(P^*)$ двух многогранников отличаются не более чем на ε .

Доказательство леммы состоит в описании развёртки многогранника P^* , изображённой на рис. 3.10. Обозначим вершины параллелепипеда P через A, B, C, D, K, L, M, N , пусть $AK = BL = CM = DN = \ell$. Рассмотрим произвольный выпуклый четырёхугольник $A_1A_1^*K_1^*K_1$, в котором $A_1K_1 = \ell, \angle A_1 = \angle K_1 = 45^\circ$, и пусть $A_2A_2^*K_2^*K_2$ — равный ему четырёхугольник. Рассмотрим дизъюнктивное объединение граней параллелепипеда и двух построенных четырёхугольников и зададим на этом множестве правила склейки: отождествляются рёбра граней параллелепипеда, соответствующие одному ребру, за исключением пары сторон, соответствующи-

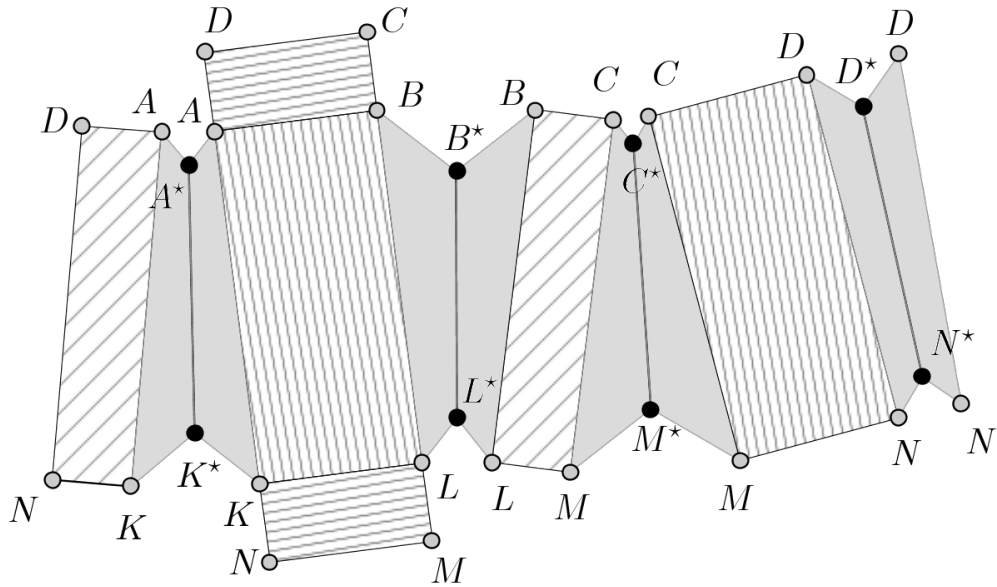


Рис. 3.10: Развёртка многогранника P^* , полученного малым шевелением параллелепипеда.

щих ребру AK ; отождествляются стороны $A_1A_1^* \equiv A_2A_2^*$, $A_1^*K_1^* \equiv A_2^*K_2^*$, $K_1^*K_1 \equiv K_2^*K_2$; сторона A_1K_1 отождествляется со стороной AK грани $AKND$, а сторона A_2K_2 — со стороной AK грани $AKLB$. Получаем гомотопную сфере развёртку положительной кривизны (см. определение развёртки в разделе 3.1.1), которая по теореме 5 изометрична некоторому выпуклому многограннику. Заметим, что точки A и K в новой развёртке имеют нулевую кривизну (к имевшемуся полному углу $\frac{3\pi}{2}$ мы приклеили два угла по $\frac{\pi}{4}$), зато появились вершины A^* и K^* (так мы обозначаем точки, полученные при склеивании A_1^* и A_2^* , K_1^* и K_2^*). При этом, меняя длины сторон $A_1A_1^*$ и $K_1K_1^*$, мы можем менять кривизны вершин A^* и K^* , но в сумме они в любом случае будут давать π .

Тем же способом «приклеим» к параллелепипеду ещё три похожие, но попарно не равные «заплатки» вдоль рёбер BL, CM, DN , см. рис. 3.10. При этом выберем приклеиваемые четырёхугольники так, чтобы углы четырёхугольников в вершинах со звёздочками были попарно различны и близки к $\frac{3\pi}{4}$, а боковые стороны малы (не превосходят $\min(\varepsilon, \frac{\varepsilon}{16\ell})$). Тогда получившийся в результате многогранник P^* с вершинами $A^*, B^*, C^*, D^*, K^*, L^*, M^*, N^*$ будет удовлетворять требуемым свойствам. \square

Далее будем рассматривать многогранник P^* , построенный с помощью этой леммы для маленького ε (скажем, меньше $\frac{1}{100}$) и большого ℓ (скажем, $\ell > 100(w + b + \varepsilon)$).

Предположим, что на P^* существует минимальная сеть N и $M_{cut} = \{V_i, M_i\}$ — соответствующая ей система разрезов. Поскольку кривизны вершин многогранника P^* ε -близки к $\frac{\pi}{2}$, сумма кривизн любых t вершин

$\frac{m}{100}$ -близка к $\frac{m\pi}{2}$, а значит группа вершин с суммарной кривизной, кратной $\frac{\pi}{3}$ и меньшей 2π , может состоять только из двух вершин (и иметь суммарную кривизну π). Учитывая пункт (2) леммы, получаем, что с точностью до изменения номеров V_i выполняется $V_1 = \{A^*, K^*\}, V_2 = \{B^*, L^*\}, V_3 = \{C^*, M^*\}, V_4 = \{D^*, N^*\}$. Далее, каждое множество M_i — это геодезическая длиной не меньше $\ell - 2\varepsilon$ (одноугольником оно не может быть из-за того, что кривизны обеих вершин в паре V_i близки к $\frac{\pi}{2}$, а если внутри одноугольника содержится единственная вершина, то по формуле Гаусса-Бонне (лемма 3.2) её кривизна не меньше π).

Лемма 3.9. Пусть $\varepsilon < \frac{1}{100}$ и $\ell > 100\varepsilon$. Тогда площадь ячейки сети N , содержащей пару вершин A^* и K^* , не меньше $\text{const} \cdot \ell^2$, где const — некоторое положительное число, не зависящее ни от выбора ε, ℓ, P^* , ни от выбора минимальной сети N .

Доказательство леммы. Пусть $P_S(M_{cut})$ — многогранник, на котором сеть N реализуется как простая минимальная сеть (теорема 20) и $f: P^* \setminus \cup M_i \rightarrow P_S(M_{cut})$ — изометричное вложение, построенное в доказательстве теоремы 20. Тогда многогранник $P_S(M_{cut})$ имеет четыре вершины кривизны π , т.е. является равногранным тетраэдром. Рассмотрим ячейку минимальной сети N , содержащую вершины A^*, K^* . По лемме 3.5 эта ячейка треугольная. Соответствующая треугольная ячейка сети $f(N)$ содержит единственную вершину многогранника $P_S(M_{cut})$, обозначим эту ячейку через $Y_1Y_2Y_3$, а вершину внутри — через X . Пусть $Con(X) = Y_1Y_2Y_3 \setminus f(P^* \setminus \cup M_i)$. Иными словами, $Con(X)$ — это тот двуугольник, которым в доказательстве теоремы 20 мы заклеивали дыру, получившуюся после разреза вдоль геодезической M_1 , соединяющей вершины A^* и K^* . Ниже f -образы вершин A^* и K^* на многограннике $P_S(M_{cut})$, т.е. вершины двуугольника $Con(X)$, мы будем по-прежнему обозначать через A^* и K^* .

Соединим X и Y_1 кратчайшей XY_1 внутри ячейки (следствие 4) и изометрично отобразим многоугольник $Y_1Y_2Y_3 \setminus XY_1$ на плоскость. Поскольку кривизна вершины X равна π , получим плоский выпуклый четырёхугольник, см. рис. 3.11. Пусть T — точка пересечения кратчайшей XY_1 и границы двуугольника $Con(X)$. Тогда образ двуугольника $Con(X)$ при разворачивании — это некоторый четырёхугольник $TT'K^*A^*$.

Рассмотрим многоугольник $Y_1Y_2Y_3Y_1'T'K^*A^*T$. По построению он получается разворачиванием области $f(P^* \setminus \cup M_i) \cap Y_1Y_2Y_3$, т.е. той части ячейки $Y_1Y_2Y_3$, которая

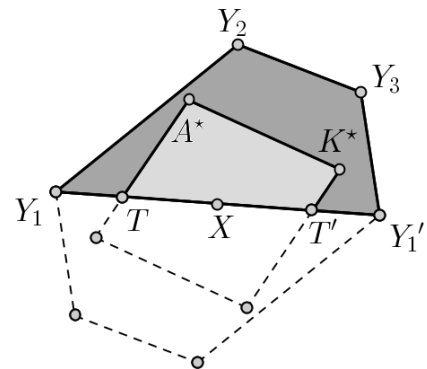


Рис. 3.11: Развёртка ячейки сети на многограннике $P_S(M_{cut})$ и её центрально симметричная копия.

изометрична разрезанной по геодезической M_1 ячейке сети N на многограннике P^* . Значит, площадь многоугольника $Y_1Y_2Y_3Y_1'T'T'K^*A^*T$ равна площади ячейки из условия леммы, т.е. лемма сводится к доказательству оценки $S(Y_1Y_2Y_3Y_1'T'T'K^*A^*T) \geq \text{const} \cdot \ell^2$. Далее все рассуждения проводим для многоугольников на плоскости.

Рассмотрим образ четырёхугольников $Y_1Y_2Y_3Y_1'$ и $TT'K^*A^*$ при симметрии с центром в точке X . По построению $XT = XT'$, $XY_1 = XY_1'$, поэтому объединение четырёхугольника $Y_1Y_2Y_3Y_1'$ и его образа при симметрии — это некоторый центрально симметричный шестиугольник, все углы которого равны 120° . Объединение четырёхугольника $TT'K^*A^*$ и его образа — это ромб, длина стороны которого равна длине стороны («равнобедренного») двугульника $Con(X)$, которая в свою очередь равна длине геодезической M_1 . Углы этого ромба равны кривизнам вершин A^* и K^* многогранника P^* и, значит, ε -близки к $\frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим ромб R со стороной длины 1 и углами, ε -близкими к $\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим всевозможные центрально симметричные шестиугольники с углами по 120° , содержащие этот ромб. Пусть $\sigma(R)$ — точная нижняя грань площадей таких шестиугольников. Тогда $\sigma(R)$ строго больше площади $S(R)$ нашего ромба — в противном случае существовала бы последовательность шестиугольников, содержащих ромб и сходящихся к нему (скажем, в метрике Хаусдорфа) — но такая последовательность шестиугольников не может существовать из-за наших ограничений на углы ромба и шестиугольников. Итак, число $\delta(R) = \sigma(R) - S(R)$ положительно. Значит, поскольку множество рассматриваемых ромбов компактно и для каждого из них $\delta(R)$ положительно, выполняется $\inf_R \delta(R) > 0$, где инфимум берётся по всевозможным ромбам R со стороной 1 и углами, $\frac{1}{100}$ -близкими к $\frac{\pi}{2}$. Обозначим этот инфимум $\inf_R \delta(R) = \text{const}_1$. Очевидно, что для ромба со стороной x выполняется $\delta(\text{ромба}) \geq \text{const}_1 \cdot x^2$.

Вернёмся к нашей развёртке, см. рис. 3.11: $S(Y_1Y_2Y_3Y_1'T'T'K^*A^*T) = S(Y_1Y_2Y_3Y_1') - S(TA^*K^*T') = \frac{1}{2}(S(\text{шестиугольника}) - S(\text{ромба})) \geq \frac{1}{2}\delta(\text{ромба}) \geq \frac{1}{2}\text{const}_1 \cdot |K^*A^*|^2 \geq \frac{1}{2}\text{const}_1 \cdot (\ell - 2\varepsilon)^2 \geq \text{const} \cdot \ell^2$, например, для $\text{const} = \frac{1}{4}\text{const}_1$. Как мы показали выше, из этой оценки вытекает доказываемая лемма. \square

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед P с таким большим ℓ , что его площадь поверхности $S(P) = 2\ell \cdot (b + w) + 2bw < \text{const} \cdot \ell^2$, где const — константа из последней леммы. Затем с помощью леммы 3.8 построим многогранник P^* , причём так, чтобы снова выполнялось $S(P^*) < \text{const} \cdot \ell^2$. Предполагая, что на P^* существует минимальная сеть, переходим к $P_S(M_{cut})$ и получаем, что по лемме 3.9 площадь уже одной ячейки сети на многограннике P^* больше $\text{const} \cdot \ell^2$, хотя площадь всей поверхности многогранника P^* меньше $\text{const} \cdot \ell^2$.

— противоречие. Теорема 18 доказана.

3.3.4 Доказательство теоремы 21 о существовании минимальных сетей на почти всех многогранниках с кривизнами, кратными $\frac{\pi}{3}$

В теореме 23 докажем, что множество многогранников с минимальной сетью всюду плотно, а затем в теореме 24 докажем, что оно открыто в $\mathcal{P}(k_1, \dots, k_n)$.

Теорема 23. *Для любого выпуклого многогранника P , все кривизны которого делятся на $\frac{\pi}{3}$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся ε -близкий к P многогранник P' , на котором есть простая минимальная сеть.*

Доказательство. Обозначим вершины данного многогранника P через A_1, A_2, \dots, A_n . Выберем на поверхности P произвольную точку X , пусть γ_i — кратчайшая, соединяющая X и A_i , $i = 1, \dots, n$. Несложно проверить, что различные кратчайшие γ_i не могут пересекаться между собой. В [17] доказано, что геодезический многоугольник $P \setminus \cup_{i=1}^n \gamma_i$ изометричен вложенному многоугольнику на плоскости. Обозначим этот плоский многоугольник через $M = X_1 A_1 X_2 A_2 \dots X_n A_n$, где геодезической γ_i соответствуют стороны $A_i X_{i+1}$ и $A_i X_i$, $i = 1, \dots, n$ (всюду считаем, что $X_{n+1} = X_1$). Этот многоугольник с естественными правилами склейки ($A_i X_{i+1} \equiv A_i X_i$), очевидно, является развёрткой для многогранника P , которую часто называют *звёздной*.

Разобьём плоскость на равные правильные шестиугольники с длиной стороны, равной некоторому δ , так, чтобы вершины нашего многоугольника M оказались внутри различных шестиугольников разбиения. Обозначим через X'_i центр шестиугольника, содержащего вершину X_i . Для каждого $i = 1, \dots, n$ построим равнобедренный треугольник $A'_i X'_i X'_{i+1}$ с основанием $X'_i X'_{i+1}$, подобный треугольнику $A_i X_i X_{i+1}$ и так же ориентированный на плоскости (т.е. если A_i, X_i и X_{i+1} расположены по часовой стрелке, то и A'_i, X'_i и X'_{i+1} расположены так же). Мы всюду считаем, что $X_{n+1} = X_1, X'_{n+1} = X'_1$. Угол при вершине A_i многоугольника M по построению равен полному углу при вершине A_i многогранника P , т.е. может быть равен одному из чисел $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. Значит, построенный нами равнобедренный треугольник $A'_i X'_i X'_{i+1}$ либо равносторонний, либо вырожденный (с углом π при вершине A'_i), либо имеет углы $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$. Учитывая, что X'_i и X'_{i+1} — центры некоторых шестиугольников, несложно проверить следующую лемму.

Лемма 3.10. *Для каждого i точка A'_i — либо центр, либо середина стороны некоторого шестиугольника разбиения.*

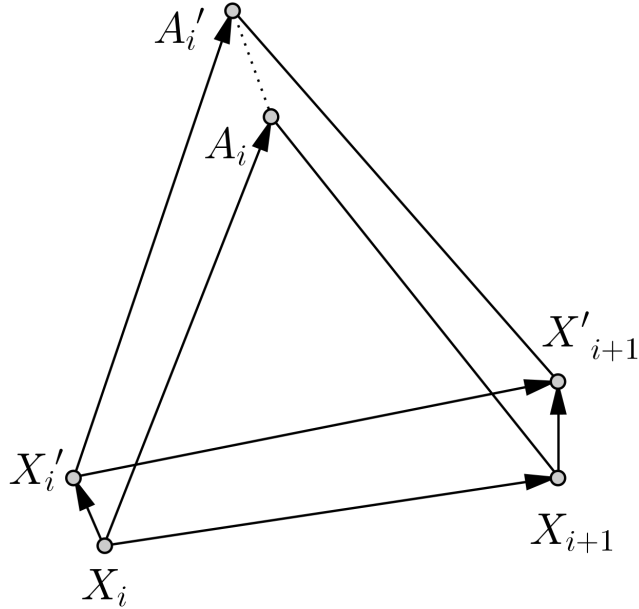


Рис. 3.13: Оценка $|A_i A'_i|$.

В случае, если какие-то из точек A'_i оказались серединами сторон шестиугольников, рассмотрим разбиение плоскости на более мелкие шестиугольники, в котором все центры и середины сторон шестиугольников старого разбиения являются центрами шестиугольников, см. рис. 3.12.

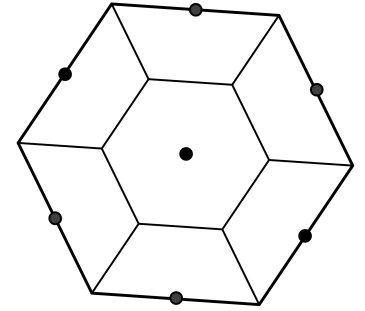


Рис. 3.12: Подразбиение

Лемма 3.11. $|X_i X'_i| < \delta$, $|A_i A'_i| < 2\delta$, $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Первое очевидно, поскольку X_i находится внутри правильного шестиугольника с центром X'_i и стороной длины δ . Докажем второе неравенство. Через ε обозначим следующее аффинное преобразование, переводящее вектор $\overrightarrow{X_i X_{i+1}}$ в вектор $\overrightarrow{X_i A_i}$, а вектор $\overrightarrow{X'_i X'_{i+1}}$ — в вектор $\overrightarrow{X'_i A'_i}$: в случае $\angle X_i A_i X_{i+1} = 180^\circ$ — сжатие в два раза, в случае $\angle X_i A_i X_{i+1} = 60^\circ$ — поворот на 60° в нужную сторону (рис. 3.13), а в случае $\angle X_i A_i X_{i+1} = 120^\circ$ — композицию поворота на 30° и сжатия в $\sqrt{3}$ раз.

Тогда $|\overrightarrow{A_i A'_i}| = |(\overrightarrow{X_i X'_i} + \varepsilon(\overrightarrow{X'_i X'_{i+1}})) - \varepsilon(\overrightarrow{X_i X_{i+1}})| = |(\overrightarrow{X_i X'_i} - \varepsilon(\overrightarrow{X_i X'_i})) + \varepsilon(\overrightarrow{X_i X'_i} + \overrightarrow{X'_i X'_{i+1}} - \overrightarrow{X_i X_{i+1}})| \leq (|\overrightarrow{X_i X'_i}| + |\overrightarrow{X_{i+1} X'_{i+1}}|) < 2\delta$. Предпоследнее неравенство следует из неравенства треугольника и соотношений $|x - \varepsilon x| = |\varepsilon x| \leq |x|$, которые легко проверить для каждого из трёх наших ε . \square

Поскольку ломаная $X_1 A_1 X_2 A_2 \dots X_n A_n X_1$ ограничивает вложенный многоугольник по свойству звёздной развёртки, из леммы 3.11 вытекает, что при достаточно малых δ ломаная $X'_1 A'_1 X'_2 A'_2 \dots X'_n A'_n X'_1$ не имеет

самопересечений. В ограниченном ею многоугольнике M' для каждого i стороны $A'_i X'_i$ и $A'_i X'_{i+1}$ имеют по построению одинаковую длину. Зададим на M' правила склейки $A'_i X'_i \equiv A'_i X'_{i+1}$, получим развёртку, задающую многогранной метрику на сфере с теми же кривизнами вершин, что и у многогранника P . Поэтому изометричный этой развёртке выпуклый многогранник P' существует (теорема 5) и имеет те же кривизны, что и многогранник P . В силу непрерывности отображения, ставящего в соответствие развёртке изометричный ей многогранник (лемма 3.1), δ можно выбрать так, что многогранники P и P' будут ε -близки.

Остаётся убедиться, что границы шестиугольников разбиения, попавшие внутрь M' , при переходе к многограннику P' образуют на нём минимальную сеть. Пример фрагмента многоугольника M' изображён на рис. 3.14. Ясно, что во всех внутренних точках многоугольника M' свойства минимальной сети выполнены (по определению минимальной сети, данному в начале раздела 3.2). Рассмотрим пересечение некоторой стороны $A'_i X'_i$ многоугольника M' и некоторой стороны шестиугольника разбиения. Поскольку угол при вершине A'_i кратен $\frac{\pi}{3}$, отождествлению сторон $A'_i X'_i \equiv A'_i X'_{i+1}$ соответствует поворот с центром в точке A'_i (напомним, это центр некоторого шестиугольника разбиения) на угол, кратный $\frac{\pi}{3}$. Разбиение на шестиугольники инвариантно относительно такого поворота, откуда вытекает, что точки границ шестиугольников на границе многоугольника M' склеиваются попарно и с соблюдением свойств минимальной сети. Это наблюдение двойственно утверждению про триангуляцию из [35, раздел 7]. Итак, мы нашли многогранник с простой минимальной сетью, ε -близкий к данному, что и требовалось в теореме 23. \square

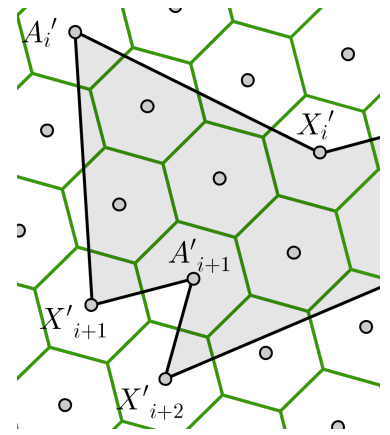


Рис. 3.14: Фрагмент M' .

Теорема 24. *Если на многограннике P есть минимальная сеть, то найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что на всех ε -близких многогранниках с теми же кривизнами вершин тоже есть минимальная сеть (причём того же типа).*

Доказательство. Пусть Γ — минимальная сеть на многограннике $P \in \mathcal{P}(k_1, \dots, k_n)$. Через $B_\delta(\Gamma)$ обозначим δ -окрестность сети Γ , т.е. множество точек многогранника P , которые можно соединить с сетью Γ путём длины не более δ . Ясно, что при достаточно малом δ множество $B_\delta(\Gamma)$ не содержит вершин многогранника и может быть

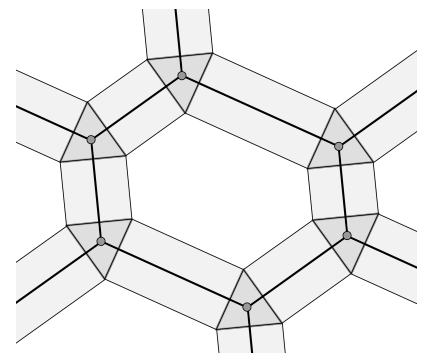


Рис. 3.15: Часть $B_\delta(\Gamma)$.

разбито на несколько геодезических многоугольников двух видов: изометричных плоским правильным треугольникам со стороной длины 2δ (они содержат вершины сети) и изометричных плоским неквадратным прямоугольникам ширины 2δ (каждому ребру сети соответствует один такой прямоугольник), см. рис. 3.15. Фиксируем малое (в указанном смысле) δ . Развёртку окрестности $B_\delta(\Gamma)$, состоящую из описанных правильных треугольников и прямоугольников с естественными правилами склейки, будем обозначать через D .

Триангулируем многогранник P следующим образом. Сначала дотриангулируем $B_\delta(\Gamma)$, разбив каждый «прямоугольник» окрестности $B_\delta(\Gamma)$ любой из двух его диагоналей на два треугольника. Затем рассмотрим любую компоненту связности $P \setminus B_\delta(\Gamma)$ — это геодезический многоугольник с углами по 120° , обозначим его через M . Выберем любую вершину на границе M и, пользуясь следствием 4, соединим её геодезическими γ_i с каждой из вершин многогранника, содержащихся в M (если такие вершины есть). Тогда $M \setminus \cup_i \gamma_i$ — геодезический многоугольник, не содержащий внутри себя точек ненулевой кривизны. Точно так же, как в доказательстве [1, Гл.4, §1, лемма 2], разобьём $M \setminus \cup_i \gamma_i$ на треугольники непересекающимися диагоналями (т.е. геодезическими с концами в вершинах многоугольника $M \setminus \cup_i \gamma_i$, причём начало и конец диагонали не должны совпадать).

В итоге получим некоторую триангуляцию T всего многогранника P , каждый треугольник в которой не содержит внутри себя точек ненулевой кривизны, т.е. изометричен плоскому. В силу [1, Гл. 4, § 2, Лемма 1] для любого $\mu > 0$ существует $\nu > 0$ такое, что на любом ν -близком к P многограннике P' существует триангуляция T' той же комбинаторной структуры, что и T , и такая, что длины соответствующих рёбер двух триангуляций отличаются не более чем на μ . Слова «той же комбинаторной структуры» означают, что существует гомеоморфизм $\psi_{hom}: P \rightarrow P'$, переводящий вершины многогранника P в соответствующие вершины многогранника P' , а триангуляцию T — в триангуляцию T' . Пусть $\psi: P \rightarrow P'$ — кусочно-аффинный гомеоморфизм, который на вершинах триангуляции T совпадает с ψ_{hom} и каждый треугольник $\Delta \in T$ аффинно отображает на $\psi_{hom}(\Delta)$. Здесь под *аффинным отображением Δ на $\psi_{hom}(\Delta)$* мы понимаем композицию $(f')^{-1} \circ h \circ f$, где $f: \Delta \rightarrow \Delta' \subset \mathbb{R}^2$ и $f': \psi_{hom}(\Delta) \rightarrow (\psi_{hom}(\Delta))' \subset \mathbb{R}^2$ — изометричные вложения треугольников в плоскость, $h: \Delta' \rightarrow (\psi_{hom}(\Delta))'$ — аффинное отображение плоских треугольников.

Отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ будем называть ε -изометрией пространств с внутренней метрикой (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) , если φ — гомеоморфизм и $|\rho_Y(\varphi(a), \varphi(b)) - \rho_X(a, b)| < \varepsilon$ для любых $a, b \in X$. Из сказанного выше и свойств аффинных отображений вытекает лемма.

Лемма 3.12. *Для любого $\zeta > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого многогранника P' , ε -близкого к P , построенное нами отображение $\psi: P \rightarrow P'$ является ζ -изометрией.*

Рассмотрим двойственный граф D^* развёртки D (т.е. абстрактный граф, множество вершин которого — многоугольники развёртки, а рёбра соответствуют склеенным сторонам). Очевидно, что граф D^* отличается от графа G сети Γ лишь добавлением вершины степени 2 внутрь каждого ребра (эта вершина степени 2 соответствует прямоугольнику развёртки). Найдём в графе D^* остовное дерево D_0^* и определим новую развёртку D_0 с тем же множеством многоугольников, что и в D , но с меньшим набором правил склейки — отождествляются только стороны, соответствующие ребру остовного дерева D_0^* . Неформально говоря, мы разрезаем развёртку D по тем рёбрам, которым в двойственном графе соответствуют рёбра, не входящие в D_0^* .

Для многогранника $P' \in \mathcal{P}(k_1, \dots, k_n)$, ε -близкого к P (малое ε мы определим позже), построим ψ . Подмножество $\psi(B_\delta(\Gamma))$ многогранника P' , вместе с перенесённым с D с помощью ψ разбиением на треугольники и четырёхугольники, представляет собой развёртку, которую мы обозначим через D' . В двойственном графе развёртки D' рассмотрим соответствующее остовное дерево $(D'_0)^* = \psi^*(D_0^*)$ (здесь через $\psi^*: D^* \rightarrow (D')^*$ обозначен изоморфизм двойственных графов, индуцированный гомеоморфизмом ψ) и определим развёртку D'_0 с тем же набором многоугольников, что и D' , и правилами склейки, заданными графом $(D'_0)^*$. Ясно, что развёртки D_0 и D'_0 изометричны дискам с многогранными метриками нулевой кривизны. Границы этих дисков будем обозначать через ∂D_0 , $\partial D'_0$. Отображение ψ индуцирует отображение $\psi_i: M_i \rightarrow M'_i$ на каждом из многоугольников M_i , составляющих развёртку D , а значит и на каждом из многоугольников, составляющих D_0 . Объединение всех ψ_i даёт отображение $\psi_0: D_0 \rightarrow D'_0$. Таким образом, ψ есть фактор-отображение отображения ψ_0 по отождествлению сторон развёртки D_0 , превращающему D_0 в D . Ясно, что ψ_0 является ε -изометрией при всех ε , при которых ψ является ε -изометрией.

Образы точек сети Γ на развёртке D_0 образуют сеть, которую мы обозначим через Γ_0 . Неформально говоря, сеть Γ_0 получается из сети Γ в результате разрыва некоторых её рёбер при разрезе развёртки D по сторонам, не лежащим в D_0^* .

Локально минимальным деревом будем называть сеть, тип которой — дерево, все вершины которого имеют степень 1 и 3, рёбра — геодезические, а углы между смежными рёбрами равны 120° . Множество висячих вершин локально минимального дерева H будем называть его *границей* и обозначать через ∂H . Ясно, что сеть Γ_0 — локально минимальное дерево

(поскольку D_0^* — дерево), причём $\partial\Gamma_0 \subset \partial D_0$.

Наша цель — нарисовать на D'_0 локально минимальное дерево с границей $\psi_0(\partial\Gamma_0)$ и того же типа, что и Γ_0 , которое при переходе от D'_0 обратно к D' превращалось бы в минимальную сеть на D' . На плоскости локально минимальное дерево данного типа с данной границей может быть построено с помощью алгоритма Мелзака [32], аналог которого для дисков с многогранной метрикой, имеющих развёртку типа D , и заключён в доказательстве следующей леммы. Сама лемма 3.13 представляет собой обобщение на наш случай следствия из алгоритма Мелзака о непрерывной зависимости локально минимального дерева данного типа на плоскости от своей границы [6, Предл.5.2].

Лемма 3.13. Пусть A — гомеоморфная диску развёртка, состоящая из неквадратных прямоугольников ширины 2δ и правильных треугольников со стороной 2δ , склеенных по некоторым сторонам длины 2δ ;

H — локально минимальное дерево на A с границей $\partial H \subset \partial A$, причём пересечение любого прямоугольника развёртки с сетью H равно средней линии этого прямоугольника, соединяющей стороны длины 2δ , а пересечение любого треугольника развёртки с сетью H состоит из трёх перпендикуляров, опущенных из центра треугольника на его стороны;

T — триангуляция развёртки A , полученная в результате разбиения каждого прямоугольника на два треугольника любой из двух его диагоналей.

Тогда для любого $\lambda > 0$ существует $\zeta > 0$ такое, что для любой ζ -изометрии $\psi_\zeta: A \rightarrow A'$, аффинной на треугольниках из T , существует λ -изометрия $\psi_\lambda: A \rightarrow A'$ такая, что $\psi_\lambda|_{\partial A} = \psi_\zeta|_{\partial A}$ и $H' = \psi_\lambda(H)$ — локально минимальное дерево.

Доказательство леммы проведём индукцией по числу граничных (т.е., напомним, висячих) вершин сети H . Базу индукции проверим для $|\partial H| = 2$. В этом случае дерево H состоит лишь из одного ребра-геодезической γ , а развёртка A состоит из нескольких прямоугольников одинаковой ширины, склеенных последовательно, и изометрична плоскому прямоугольнику со средней линией γ . Ясно, что при малом ζ развёртка $A' = \psi_\zeta(A)$ изометрична плоскому многоугольнику, склеенному из плоских четырёхугольников, близких к прямоугольникам развёртки A , и при малом ζ отрезок γ' , соединяющий ψ_ζ -образы концов геодезической γ , содержится внутри этого многоугольника и делит его на два многоугольника.

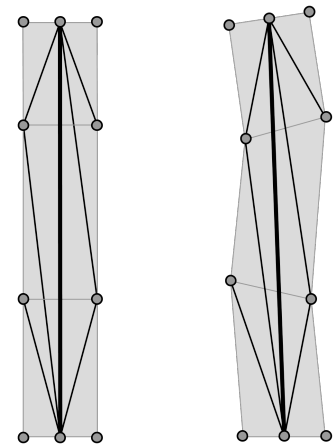


Рис. 3.16: База: A и A' .

Триангулируем каждый из этих двух многоугольников-частей непересекающимися диагоналями и сделаем комбинаторно такие же триангуляции многоугольников $A \setminus \gamma$ (с вершинами в ψ_ζ^{-1} -образах вершин триангуляций многоугольников $A' \setminus \gamma'$). Определим кусочно аффинное отображение $\psi_\lambda: A \rightarrow A'$, совпадающее с ψ_ζ на вершинах триангуляции и аффинно отображающее каждый треугольник триангуляции на A в треугольник триангуляции на A' . Ясно, что при достаточно малом ζ отображение ψ_λ будет требуемой λ -изометрией.

Шаг индукции: пусть лемма доказана для сетей с k граничными вершинами, рассмотрим сеть H с $|\partial H| = k + 1$. Найдём в сети H пару висячих вершин, имеющих общую смежную вершину, и обозначим их соответственно p, q, v , а через u обозначим третью вершину, смежную с вершиной v . Обозначим через A_1 объединение всех многоугольников развёртки A , пересекающихся с рёбрами pv, qv, vu , и сделаем изометричное вложение A_1 в плоскость, см. рис. 3.17 (вложение существует, поскольку три прямоугольника, построенные на сторонах правильного треугольника, не могут перекрываться).

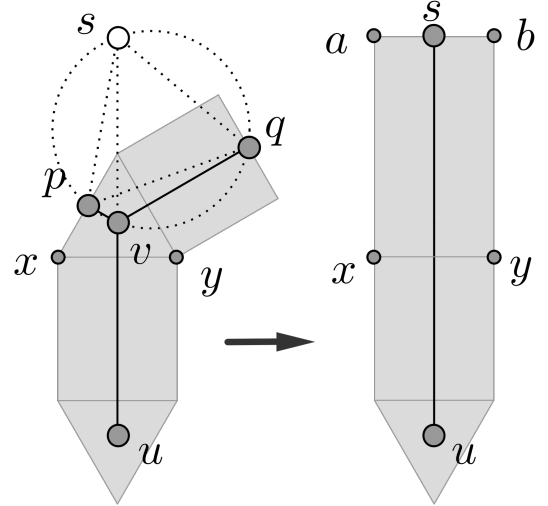


Рис. 3.17: От A к A_k .

На плоскости построим правильный треугольник с основанием pq и третьей вершиной s , лежащей по другую сторону от прямой pq , чем точка v . Согласно известному факту планиметрии (используемому в классическом алгоритме Мелзака), точка v лежит на пересечении отрезка us и меньшей дуги pq окружности, описанной около Δpqs . Пусть $\Delta(v) = xyz$ — треугольник развёртки A , содержащий вершину v , причём xy — его основание, пересекающее ребро uv , а M — многоугольник развёртки, приклеенный к $\Delta(v)$ по стороне xy . Удалим из развёртки A все многоугольники, пересекающие рёбра pv, vq и добавим плоский прямоугольник $abux$, в котором s — середина стороны ab , приклеенный по отрезку xy к многоугольнику M так, как это реализовано на плоскости. Новую развёртку обозначим через A_k и рассмотрим на ней сеть, пересечение которой со всеми «старыми» многоугольниками такое же, как у сети H , а пересечение с новым прямоугольником равно его средней линии. Тем самым из сети H удалены рёбра pv, vq , а ребро uv заменено на us . Получившуюся сеть на развёртке A_k обозначим через H_k . Ясно, что развёртка A_k и сеть H_k удовлетворяют условиям леммы и, более того, утверждение леммы для них верно по предположению индукции.

Пусть $\psi_\zeta: A \rightarrow A'$ — ζ -изометрия развёрток (для некоторого ζ , которое мы определим ниже), аффинная на треугольниках из T , рассмотрим

$A'_1 = \psi_\zeta(A_1)$ — образ той части развёртки A , которую мы разворачивали на плоскость выше, и сделаем изометричное вложение A'_1 в плоскость. Для точек $p' = \psi_\zeta(p), q' = \psi_\zeta(q)$ строим на плоскости правильный треугольник $p'q's'$ и параллелограмм $a'b'y'x'$ с основанием $x'y'$, для которого s' — середина стороны $a'b'$. Удаляем из A' многоугольники, соответствующие удалённым из A , и добавляем параллелограмм $a'b'y'x'$, приклеенный по $x'y'$; новую развёртку обозначаем через A'_k . Определяем отображение $\psi_{\zeta'}: A_k \rightarrow A'_k$, совпадающее с ψ_ζ на $A_k \cap A$, и аффинно отображающее прямоугольник $abux$ на параллелограмм $a'b'y'x'$. Ясно, что для любого $\zeta' > 0$ можно подобрать $\zeta > 0$ так, что $\psi_{\zeta'}$ будет ζ' -изометрией развёрток A_k и A'_k . По предположению индукции для любого $\lambda' > 0$ существует ζ' такое, что найдётся λ' -изометрия $\psi_{\lambda'}: A_k \rightarrow A'_k$ такая, что $H'_k = \psi_{\lambda'}(H_k)$ — локально минимальное дерево, причём $\psi_{\lambda'}(s) = \psi_{\zeta'}(s) = s'$.

При достаточно малых ζ, ζ' и λ' ребро $s'u'$ дерева H'_k (где $u' = \psi_{\lambda'}(u)$) пересекает меньшую дугу $p'q'$ окружности, описанной около $p's'q'$, в точке, лежащей внутри треугольника $\psi_\zeta(\Delta(v))$ (обозначим эту точку через v') и, более того, отрезки $v'p', v'q'$ на плоскости лежат внутри A'_1 — поскольку аналогичное свойство имеет место для A_1 и сохраняется при непрерывном изменении развёртки. Значит, можно рассмотреть сеть H' на развёртке A' , отличающуюся от сети H'_k заменой ребра $u's'$ на $u'v'$ и добавлением рёбер $p'v', q'v'$. Из свойств вписанных углов вытекает, что все углы при вершине v' равны 120° и потому H' — локально минимальное дерево с требуемой границей. Отображение $\psi_\lambda: A \rightarrow A'$ определим теперь на многоугольниках развёртки A , входящих в развёртку A_k , равным $\psi_{\lambda'}$, а на A_1 — как кусочно аффинное отображение для триангуляций $A_1 \setminus H$ и $A'_1 \setminus H'$ аналогично тому, как это было сделано в базе индукции. Шаг индукции сделан. Лемма доказана.

Очевидно, что развёртка D_0 и сеть Γ_0 удовлетворяют условиям леммы 3.13. Найдём для $\lambda = 1$ число ζ из этой леммы и рассмотрим ε из леммы 3.12 такое, что для любого ε -близкого к P многогранника P' отображение $\psi_0: D_0 \rightarrow D'_0$ есть ζ -изометрия. Построим с помощью леммы 3.13 локально минимальное дерево $\Gamma'_0 = \psi_\lambda(\Gamma_0) \subset D'_0$.

Рассмотрим пару α, β сторон развёртки D_0 , склеиваемых в развёртке D' . По построению отображение ψ_λ , так же как и ψ_0 , отображает отрезки α и β аффинно на некоторые стороны α' и β' развёртки D'_0 . Поэтому любая пара точек сторон α и β , отождествляемая в D , переходит при отображении ψ_λ в пару точек развёртки D'_0 , отождествляемых в развёртке D' . Значит, корректно определено фактор-отображение $\overline{\psi_\lambda}: D \rightarrow D'$. В том числе, две граничные вершины (пусть это вершины $a \in \alpha$ и $b \in \beta$) сети Γ_0 при отождествлении сторон α и β сливаются и превращаются в некоторую точку c на ребре сети Γ , а вершины $a' = \psi_\lambda(a) = \psi_0(a)$ и $b' = \psi_\lambda(b) = \psi_0(b)$

сети Γ'_0 в развёртке D' склеиваются в точку $c' = \psi(c)$.

Ясно, что $\overline{\psi_\lambda}$ является 2λ -изометрией развёрток D и D' , переводящей сеть Γ в некоторую сеть Γ' . Поскольку Γ'_0 — локально минимальное дерево, сеть Γ' обладает свойствами минимальной сети (см. определение, данное в начале раздела 3.2) во всех своих точках, за исключением мест «склейки» — точек c' из предыдущего абзаца. Докажем, что в каждой такой точке $c' = \psi(c)$ угол между двумя рёбрами сети Γ' , инцидентными c' , равен 180° . Найдём в дереве Γ'_0 простой путь, соединяющий a' и b' . В сети Γ' этому пути соответствует замкнутая геодезическая ломаная γ' с концами в c' , ограничивающая некоторый геодезический многоугольник M' . Путь $\overline{\psi_\lambda}^{-1}(\gamma')$ в сети Γ ограничивает многоугольник M , причём по построению все углы многоугольников M и M' одинаковы, за исключением, возможно, углов в точках c и c' (угол многоугольника M в c равен 180° , а про угол M' в c' мы пока ничего не знаем). Но по определению D' и из-за выбора $P, P' \in \mathcal{P}(k_1, \dots, k_n)$ сумма кривизн вершин многогранника P' , попавших в M' , равна сумме кривизн вершин многогранника P , попавших в M . Значит, по формуле Гаусса-Бонне (лемма 3.2), угол M' в точке c' также равен 180° , что и требовалось. □

3.3.5 Доказательство теоремы 22 о тетраэдрах с кривизнами $\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$.

В этом разделе мы будем использовать определение сети как отображения (см. главу 1), поскольку в процессе доказательства понадобится рассматривать деформации сети и невложенные сети. Хотя и здесь часто можно будет относиться к сети как к нарисованной на многограннике картинке, т.е. использовать определение обыкновенной сети.

Мы докажем, что на любом многограннике T с кривизнами $\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$ существует простая минимальная сеть, реализующая плоский граф G , изображённый на рис. 3.7. Через T_0 обозначим поверхность многогранника T с выброшенными вершинами.

Обозначим через Ω множество всех (необязательно минимальных!) сетей Γ со следующими свойствами

- Γ реализует плоский граф G в T_0 (см. определение в разделе 1.6)
- каждая одноугольная ячейка сети Γ содержит внутри себя одну вершину многогранника кривизны $\frac{5\pi}{3}$
- каждая пятиугольная ячейка сети Γ содержит внутри себя одну вершину многогранника кривизны $\frac{\pi}{3}$.

Отметим, что все сети из Ω — вложенные, так как они реализуют плоский граф, являющийся вложенной сетью по нашему определению.

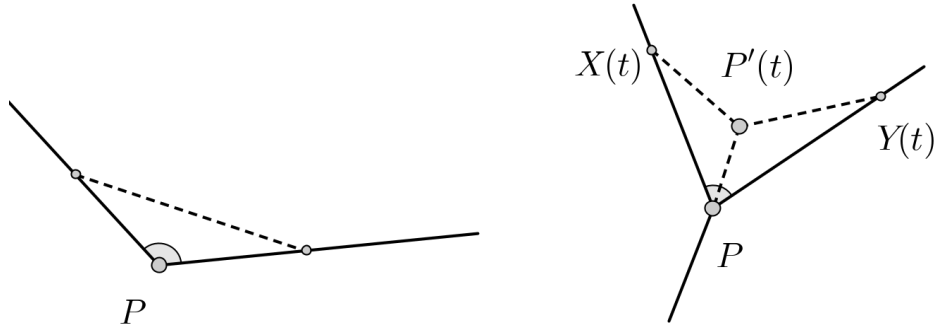


Рис. 3.18: Спряmlение и вклейка тройничка.

Иными словами, сети из Ω не имеют самопересечений и вырожденных рёбер.

Теорема 22 очевидно вытекает из следующих двух лемм. Через $\ell(\Gamma)$ мы обозначаем длину сети Γ .

Лемма 3.14. *Существует сеть $\Gamma_{\min} \in \Omega$ такая, что $\ell(\Gamma_{\min}) = \min_{\Gamma \in \Omega} \ell(\Gamma)$.*

Лемма 3.15. *Если $\Gamma_{\min} \in \Omega$ и $\ell(\Gamma_{\min}) = \min_{\Gamma \in \Omega} \ell(\Gamma)$, то Γ_{\min} — минимальная сеть.*

Доказательство леммы 3.15 совсем несложно. Определим два простых вида деформаций сети, уменьшающих её длину: *спряmlение* и *вклейку тройничка*. **Спряmlение.** Пусть в точке P внутри некоторого ребра сети один из углов меньше π . Тогда возможна малая деформация ребра, изображённая на рис. 3.18 слева. **Вклейка тройничка.** Пусть P — вершина сети, рёбра, инцидентные P , вблизи P представляют собой отрезки геодезических, и один из углов между рёбрами сети, инцидентными P , меньше $\frac{2\pi}{3}$. Пусть $X(t), Y(t)$ — точки на этих рёбрах такие, что $|X(t)P| = |Y(t)P| = t$. При малых t имеется треугольник $X(t)PY(t)$, изометричный плоскому и имеющий выбранный угол при вершине P . Рассмотрим для этого плоского равнобедренного треугольника кратчайшую сеть: она состоит из трёх рёбер, стыкующихся под углами $\frac{2\pi}{3}$ в дополнительной вершине $P'(t)$ [26], и имеет меньшую длину, чем ломаная $X(t)PY(t)$. При деформации в момент времени t мы будем рассматривать сеть Γ_t , отличающуюся от Γ_0 переносом вершины P в точку $P'(t)$, заменой участков рёбер $X(t)P, Y(t)P$ на $X(t)P'(t), Y(t)P'(t)$ и удлинением третьего ребра на участок $PP'(t)$, см. рис. 3.18 справа.

Вернёмся теперь к доказательству леммы 3.15. Нам достаточно проверить, что выполняется определение минимальной сети, данное в начале раздела 3.2. Если какое-то ребро не является геодезической, то можно сделать спряmlение. Если в какой-то вершине не все углы равны $\frac{2\pi}{3}$, то

какой-то из углов меньше $\frac{2\pi}{3}$, и можно сделать вклейку тройничка. В обоих случаях получаем более короткую сеть, по-прежнему принадлежащую Ω , — противоречие. \square

Отметим, что это доказательство проходит для любого плоского графа и для любого многогранника. Доказательство леммы 3.14, наоборот, существенно использует и свойства многогранника T , и свойства графа G . Из определения сразу видно, что множество Ω не является замкнутым ни в каком естественном смысле — непрерывно деформируясь, сеть может «наехать» на вершины многогранника, или может выродиться ребро — и получившаяся сеть уже не будет лежать в Ω . Поэтому тот факт, что минимум длины достигается на какой-то сети из Ω далеко не очевиден.

Прежде, чем приступить к доказательству леммы 3.14, дадим несколько определений и обсудим свойства Ω , не зависящие от многогранника и графа.

Напомним, что в разделе 1.4 было дано определение сходимости для последовательности сетей одного типа в метрическом пространстве. Ниже мы будем применять это определение для сетей из Ω , в качестве метрики мы рассматриваем внутреннюю метрику на поверхности нашего тетраэдра.

Множество сетей Γ , для которых существует последовательность $\Gamma_n \in \Omega$, сходящаяся к Γ , будем называть *замыканием* Ω и обозначать через $\overline{\Omega}$.

Лемма 3.16. *Если $\Gamma_n \in \Omega$ — минимизирующая последовательность, т.е. $\ell(\Gamma_n) \rightarrow \inf_{\Gamma \in \Omega} \ell(\Gamma)$, и Γ_0 — равномерный предел этой минимизирующей последовательности, то рёбра Γ_0 — конечно звенные геодезические ломаные, внутренние вершины которых (если они есть) расположены в вершинах многогранника.*

Доказательство. Предположим, что это не так, и возьмём любую точку P на ребре сети Γ_0 такую, что P не является вершиной многогранника и ни в какой окрестности P ребро сети Γ_0 не является геодезической. Рассмотрим круг $B_\varepsilon(P)$ на поверхности многогранника с центром в точке P , настолько маленький, что он не содержит ни вершин многогранника, ни вершин сети Γ_0 . Возможно, пересечение этого круга с сетью состоит более чем из одной компоненты связности. Каждую компоненту связности (т.е. участок ребра сети от одной точки пересечения с границей круга (точки входа) до следующей (точки выхода)) заменим на хорду круга, соединяющую концы этой компоненты связности. Иными словами, сделаем одновременно несколько спрямлений. Получившуюся сеть обозначим через Γ'_0 . Точно так же поступим с сетями Γ_n : заменим участки рёбер на хорды того же самого круга $B_\varepsilon(P)$. Очевидно, при такой замене в сети Γ_n не могут возникнуть самопересечения и новая сеть Γ'_n по-прежнему лежит в Ω , а

последовательность Γ'_n сходится к сети Γ'_0 . Но сеть Γ'_0 строго короче, чем сеть Γ_0 , т.е. $\lim \ell(\Gamma'_n) < \lim \ell(\Gamma_n)$ — противоречие. \square

Лемма 3.16 позволит нам далее интересоваться только теми сетями из $\overline{\Omega}$, которые являются конечнозвенными геодезическими ломаными, что мы и будем делать для упрощения техники.

Лемма 3.17. *Сеть Γ_0 , рёбра которой являются конечнозвенными геодезическими ломаными, лежит в замыкании $\overline{\Omega}$ тогда и только тогда, когда*

- $\Gamma_0: T_G \rightarrow T$
- Γ_0 не имеет трансверсальных самопересечений,
- существует биекция σ между гранями плоского графа G и вершинами тетраэдра T со свойствами: для каждой грани f вершина $\sigma(f)$ лежит внутри или на границе ячейки $\Gamma(f)$ и если грань n_f -угольная, то вершина $\sigma(f)$ имеет кривизну $(2\pi - \frac{\pi}{3}n_f)$.

Причём для каждой $\Gamma \in \overline{\Omega}$ существует сходящаяся к Γ последовательность $\Gamma_n \in \Omega$ такая, что $\ell(\Gamma_n) \rightarrow \ell(\Gamma)$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть $\Gamma \in \overline{\Omega}$ и $\Gamma_n \in \Omega$ — некоторая сходящаяся последовательность. Для каждого n определим естественную биекцию σ_n между вершинами многогранника $V(T)$ и гранями графа $F(G)$: грани соответствует вершина многогранника, лежащая внутри Γ_n -образа этой грани. Поскольку биекций между двумя четырёхточечными множествами конечное число, мы можем выбрать подпоследовательность сетей Γ_{n_k} с одной и той же биекцией $\sigma_{n_k} =: \sigma$. Очевидно, что для предельной сети Γ_0 биекция σ удовлетворяет описанным свойствам.

Пусть теперь для сети Γ_0 , реализующей граф G на многограннике T , и для биекции σ выполняются указанные в лемме свойства. По определению каждое ребро сети — это некоторая конечнозвенная ломаная. Значит, число самопересечений, самоналожений (пар участков рёбер, отображающихся в одну и ту же кривую) и прохождений через вершины многогранника конечно. В малой окрестности каждого из этих случаев немного пошевелим сеть Γ_0 так, чтобы убрать самопересечения и поместить вершины многогранника в σ -соответствующие им ячейки сети. Сделаем это так, чтобы длина сети увеличилась не более чем на $\frac{1}{n}$ и получившуюся сеть обозначим через Γ_n . Тогда $\Gamma_n \in \Omega$, Γ_n равномерно сходятся к Γ_0 , а значит $\Gamma_0 \in \overline{\Omega}$. Кроме того, при этом длины сетей в построенной последовательности стремятся к длине сети Γ_0 . \square

Рассмотрим $I = \inf_{\Gamma \in \Omega} \ell(\Gamma)$ и выберем минимизирующую последовательность $\Gamma_n \in \Omega$, $\ell(\Gamma_n) \rightarrow I$ при $n \rightarrow \infty$. Пользуясь леммой 1.2, мы выбираем сходящуюся подпоследовательность, которую снова обозначим

через Γ_n . Предельную сеть обозначим через Γ_0 . По определению $\Gamma_0 \in \bar{\Omega}$ и по лемме 3.16 её ребра являются конечно звенными геодезическими ломаными, следовательно, она обладает свойствами из леммы 3.17.

Из леммы 3.17 вытекает, что любая сеть из $\bar{\Omega}$ может быть приближена сетями из Ω близкой длины. Предел любой последовательности сетей из $\bar{\Omega}$ лежит в $\bar{\Omega}$. Поэтому верна следующая лемма.

Лемма 3.18.

$$\min_{\Gamma \in \bar{\Omega}} \ell(\Gamma) = \inf_{\Gamma \in \Omega} \ell(\Gamma) = \ell(\Gamma_0)$$

Следствие 8. *Рёбра сети Γ_0 — геодезические ломаные, внутренние вершины которых (если они есть) расположены в вершинах многогранника кривизны $\frac{\pi}{3}$, а углы между смежными невырожденными рёбрами, стыкующимися вне вершин многогранника, больше или равны $\frac{2\pi}{3}$.*

Доказательство. Первая часть следствия уже была доказана в лемме 3.16. Если вершина x сети Γ_0 не является вершиной многогранника, то малая деформация посредством вклейки тройничка (см. определение в доказательстве леммы 3.15) в этой точке не нарушает условий леммы 3.17, т.е. продеформированная (укороченная) сеть остаётся в $\bar{\Omega}$, что противоречит лемме 3.18. Поэтому вне вершин многогранника углы между парами невырожденных рёбер больше или равны 120° (иначе в них вклеивается укорачивающий тройничок). В вершинах нашего многогранника кривизны $\frac{5\pi}{3}$ полный угол равен $\frac{\pi}{3}$, поэтому если ребро сети проходит через такую вершину V , то угол ребра в этой вершине с обеих сторон меньше π , и можно делать спрямление в любую из двух сторон. Посмотрим на биекцию σ , соответствующую сети Γ_0 , и сделаем спрямление так, чтобы вершина V оказалась внутри соответствующей ей грани $\sigma^{-1}(V)$. Поскольку остальные вершины многогранника эта деформация не затрагивает, соответствие σ сохраняется, условия леммы 3.17 по-прежнему выполнены, а значит продеформированная сеть останется в $\bar{\Omega}$, что снова противоречит тому, что сеть Γ_0 — кратчайшая в $\bar{\Omega}$. \square

Перейдём теперь непосредственно к доказательству леммы 3.14.

Ясно, что нам достаточно найти сеть $\Gamma' \in \Omega$ той же длины, что и Γ_0 , или доказать, что $\Gamma_0 \in \Omega$. Из следствия 8 вытекает, что если сеть Γ_0 не имеет вырожденных рёбер, самопересечений и содержится в T_0 , то $\Gamma_0 \in \Omega$. Мы рассмотрим все возможные варианты конфигураций, в которых $\Gamma_0 \notin \Omega$, и для каждого случая либо докажем, что он невозможен, либо перейдём от сети Γ_0

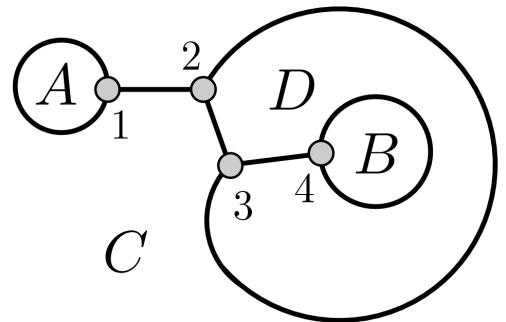


Рис. 3.19: Граф G

к некоторой другой сети, на которой также достигается минимум длины в $\bar{\Omega}$ (множество всех таких сетей обозначим через Ω_{\min}). Двигаясь таким образом по множеству Ω_{\min} , мы в конце концов придём к сети, лежащей в Ω , и тем самым докажем лемму 3.14.

Найдём для сети Γ_0 соответствие σ между вершинами многогранника T и гранями графа G , описанное в лемме 3.17. Занумеруем вершины графа и обозначим буквами вершины многогранника так, как показано на рис. 3.19, где каждая буква написана внутри соответствующей ей грани графа. План доказательства следующий.

1. (a) Случай $\ell(11) = 0 = \ell(12)$ невозможен.
- (b) Если $\ell(11) = 0 \neq \ell(12)$, то существует сеть $\Gamma_1 \in \Omega_{\min}$, отличающаяся от Γ_0 лишь в сколь угодно малой окрестности вершины A , для которой $\ell(11) > 0$.
- (c) Если $\ell(11) > 0$, то $A \notin [11]$, т.е. вершина A не может лежать ни внутри ребра 11, ни в его вершине 1.
- (d) Существует сеть $\Gamma_2 \in \Omega_{\min}$, отличающаяся от Γ_1 лишь в сколь угодно малой окрестности ребра 11, для которой ребро $[11]$ не содержит вершин многогранника.
- (e) Существует сеть $\Gamma_3 \in \Omega_{\min}$, отличающаяся от Γ_2 лишь в сколь угодно малой окрестности ребра 11, для которой $\ell(12) > 0$.
2. Аналогичные утверждения верны для вершины B , рёбер 44 и 43. Поэтому далее без ограничения общности считаем, что в сети $\Gamma_0 \in \Omega_{\min}$ рёбра 11, 12, 43, 44 невырождены, причём рёбра 11 и 44 (включая их концы) не проходят через вершины многогранника.
3. Ни одно из рёбер 23 не может быть вырождено.
4. Вершина C не может лежать на ребре 12 (включая его концы), аналогично $D \notin [34]$.
5. На данный момент мы получили сеть $\Gamma_0 \in \Omega_{\min}$, в которой все рёбра невырождены, вершины A и B многогранника лежат внутри своих ячеек, а вершины C и D — либо внутри своих ячеек, либо на рёбрах 23 (внутри этих рёбер или, возможно, в их концах).
 - (a) Случай, что обе вершины C и D принадлежат рёбрам 23, невозможен.
 - (b) Если ровно одна из вершин C или D принадлежит рёбрам 23, то существует сеть $\Gamma' \in \Omega_{\min}$, отличающаяся от Γ_0 лишь в сколь угодно малой окрестности рёбер 23, для которой оба ребра $[23]$ не проходят через вершины многогранника.

Итак, в результате мы получим сеть $\Gamma' \in \Omega_{\min} \cap \Omega$, т.е. докажем, что минимум длины достигается на некоторой сети внутри Ω , что и требуется.

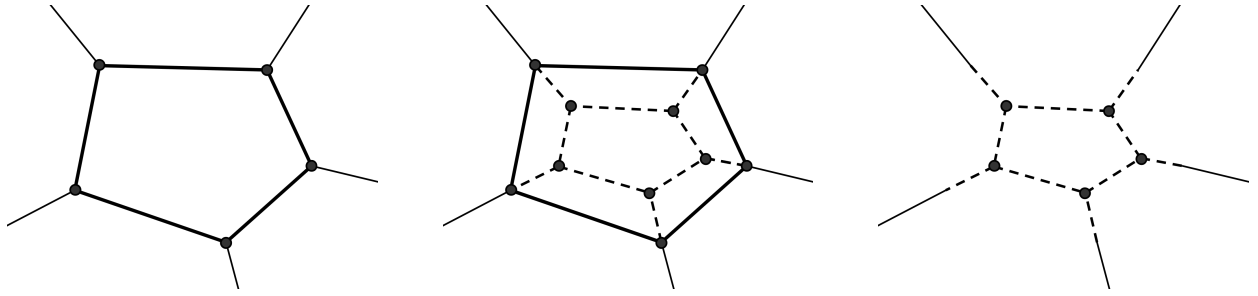


Рис. 3.20: Сжатие ячейки.

Осталось доказать каждый из пунктов. Нам понадобятся специальные деформации сети, не меняющие её длину — **сжатие** и **растяжение ячейки**. Начнём со сжатия. Пусть ячейка сети представляет собой многоугольник, все углы которого равны 120° и находятся в вершинах сети (т.е. рёбра сети, образующие ячейку, не имеют изломов со стороны ячейки; при этом они вообще говоря не обязаны быть геодезическими, так как им не запрещается иметь излом с внешней стороны). Выберем маленькое ε и построим во внутреннюю сторону на каждой стороне нашего многоугольника как на большем основании равнобокую трапецию с углом 60° и боковой стороной ε . Заменяем теперь в сети исходный цикл из больших оснований этих трапеций на их боковые стороны и меньшие основания, см. рис. 3.20. Легко проверить, что при этом длина сети не изменится.

Ясно, что при условии, что все рёбра, ограничивающие ячейку, являются геодезическими, и в каждой вершине сети на границе ячейки три невырожденных ребра сходятся под углами в 120° , возможна обратная операция — растяжение ячейки.

1 (а). Предположим, что $\ell(12) = 0$ и вершина A совпадает с точкой 1. Тогда вершина 2 сети находится в вершине A многогранника, полный угол в которой равен $\frac{\pi}{3}$. Поэтому если оба ребра 23 невырождены, то угол между ними в вершине 2 меньше, чем $\frac{2\pi}{3}$, и вклейка тройничка в этот угол укорачивает сеть, не нарушая соответствия σ , а значит оставляя сеть в $\bar{\Omega}$. Противоречие, значит, ровно одно из рёбер 23 вырождено (очевидно, что оба они вырождены быть не могут). Тогда вершина 3 тоже находится в точке A . Если ребро 34 невырождено, то аналогично предыдущему рассуждению получаем противоречие вклейкой тройничка в угол между невырожденными рёбрами 32 и 34. Значит, ребро 34 тоже вырождено, и $A = 4$, значит, $4 \neq B$, т.е. ребро 44 невырождено, а угол ячейки 44 в вершине $4 = A$ меньше $\frac{2\pi}{3}$ — вклейка тройничка в этот угол приводит нас к окончательному противоречию.

1 (б). Пусть $\ell(11) = 0 \neq \ell(12)$. Сделаем «растяжение» вырожденного одноугольника. Малая окрестность точки A изометрична конусу с локально плоской метрикой и полным углом $\frac{\pi}{3}$ при вершине, а ребро 12

изометрично одной из образующих этого конуса. На рис. 3.21 показана развёртка конуса, полученная в результате разреза вдоль образующей, и нарисована полученная в результате растяжения одноугольная ячейка с вершиной в точке X . Вместо участка $AХ$ в старой сети в новой сети появляется ребро $ХХ$ той же длины, так что легко видеть, что длина сети при такой деформации не меняется.

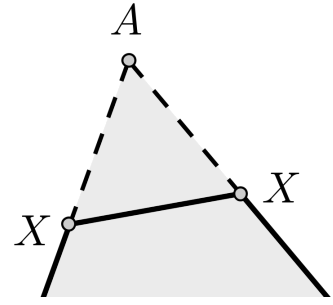


Рис. 3.21: Одноугольник

1 (с). Предположим, что $\ell(11) > 0$. Вершина A не может лежать внутри ребра 11 по следствию 8. Предположим, что вершина A совпала с точкой 1. Ребро 12 невырожденно по доказанному в пункте 1(а), поэтому снова приводит к противоречию вклейка тройничка (в любой из двух углов между рёбрами 11 и 12).

1 (d). Как мы уже показали, вершина A находится внутри своей ячейки. Значит, угол этой ячейки в вершине 1 не меньше 120° (иначе вклейка тройничка в этот угол приводит к противоречию). Если внутри ребра 11 имеются какие-то другие вершины, то угол с внутренней стороны нашей ячейки в этих вершинах не меньше π (иначе спрямление внутрь приводит к противоречию). Значит, если всего в ячейке n углов, то их сумма не меньше $(n - 1)\pi + \frac{2\pi}{3} = (n - 2)\pi + \frac{5\pi}{3}$. Но по формуле Гаусса-Бонне (лемма 3.2) сумма углов ячейки должна быть равна как раз $\pi(n - 2) + \frac{5\pi}{3}$, значит, угол при вершине 1 — ровно $\frac{2\pi}{3}$, а остальные внутренние «углы» ячейки равны π , т.е. других изломов нет. Значит, можно применить описанное выше сжатие ячейки, после которого ребро 11 (включая точку 1) уже точно не будет содержать вершин многогранника.

1 (е). С учётом проделанных операций ячейка 11 удовлетворяет всем условиям, необходимым для сжатия. Поэтому если ребро 12 в нашей сети вырожденно, сделаем сжатие ячейки 11 и тем самым удлиним ребро 12.

3. Предположим, что одно из рёбер 23 вырождено. Тогда в точке $2 = 3$ сходятся 4 невырожденных ребра — ребро 12, ребро 34 и два конца невырожденного ребра 23. Они образуют 4 угла, значит, хотя бы один из них меньше $\frac{2\pi}{3}$. Сделаем вклейку тройничка в этот угол и докажем, что получившаяся в результате сеть принадлежит $\bar{\Omega}$. Во-первых, легко проверить, что новая сеть будет реализовывать плоский граф G , см. рис. 3.22. Во-вторых, если ни вершина C , ни вершина D не совпадали с точкой $2 = 3$, то соответствие σ для новой сети очевидным образом получается из старого соответствия. Если же, на-

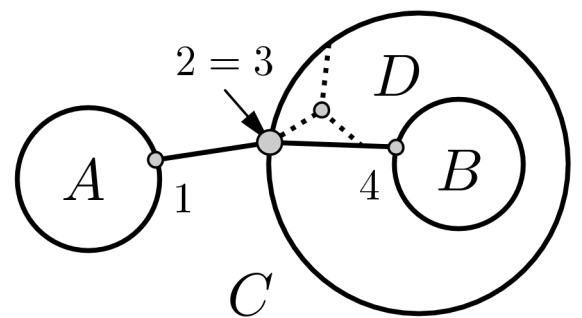


Рис. 3.22: К пункту 3.

пример, $C = 2 = 3$, то ситуация немногим сложнее — точка C лежит на границе обеих пятиугольных ячеек новой сети, так что старое соответствие σ снова подходит. Итак, новая, более короткая, сеть лежит в $\bar{\Omega}$, противоречие.

4. Предположим, что вершина C лежит внутри ребра 12. Поскольку полный угол в вершине C меньше 2π , возможно спрямление ребра в этой точке хотя бы в одну из двух сторон. Полученная в результате спрямления сеть короче и по-прежнему принадлежит $\bar{\Omega}$ с тем же соответствием σ , поскольку в исходной сети по обе стороны от ребра 12 находится ячейка, соответствующая C . Если же вершина C попала в один из концов ребра 12, то к противоречию приводит вклейка тройничка в угол, меньший $\frac{2\pi}{3}$. Легко проверить, что вклейка тройничка в любой из (шести потенциально возможных) углов сохраняет соответствие σ .

5 (а). Предположим, что обе вершины C и D принадлежат рёбрам 23. В таком случае обе эти вершины лежат на границах обеих пятиугольных ячеек, поэтому помимо выбранного нами соответствия σ , изображённого на рис. 3.19, подходит и ещё одно соответствие σ' , в котором $\sigma'(C) = \sigma(D)$, $\sigma'(D) = \sigma(C)$.

В пункте (4) мы доказали, что $C \neq 2$ и, аналогично, $D \neq 3$. Если $C = 3$, рассмотрим соответствие σ' — для этого соответствия рассуждение, проведённое в (4), даёт, что $C \neq 3$. Предположим теперь, что вершина C лежит внутри какого-то ребра 23. Тогда хотя бы один из углов этого ребра в этой точке меньше π , сделаем спрямление. В сети, получившейся после спрямления, точка C будет лежать уже не на ребре, а внутри одной из пятиугольных граней, т.е. либо внутри грани $\sigma(C)$, либо внутри грани $\sigma'(C)$, а вершина D по-прежнему будет лежать на границе обеих граней. Значит, для новой сети подходит либо соответствие σ , либо σ' , т.е. новая сеть лежит в $\bar{\Omega}$, противоречие.

5 (b). Пусть вершина D находится на ребре 23 или в вершине 2, а точка C — внутри своей ячейки. По формуле Гаусса-Бонне (лемма 3.2) для этой пятиугольной ячейки получаем в первом случае $5 \cdot \frac{2\pi}{3} + \angle D = \pi(5 - 2 + 1) + \frac{\pi}{3}$, откуда $\angle D = \pi$, или во втором случае, когда $D = 2$, обозначим через $\angle D$ внутренний угол ячейки $\sigma(D)$ в точке $D = 2$, тогда $3 \cdot \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} - \angle D = \pi(5 - 2) + \frac{\pi}{3}$, откуда $\angle D = \frac{\pi}{3}$. Значит, углы ячейки $\sigma(C)$ в точке 3 в сумме дают $\frac{4\pi}{3}$. Кроме того, каждый из них не меньше $\frac{2\pi}{3}$ (иначе возможна вклейка тройничка), поэтому оба они равны $\frac{2\pi}{3}$.

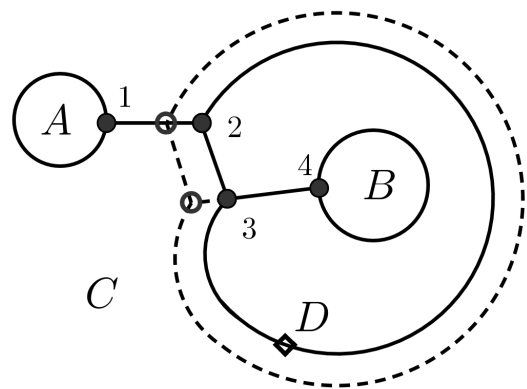


Рис. 3.23: К пункту 5(b).

Итак, мы доказали, что ячейка $\sigma(C)$ представляет собой пятиугольник, все углы которого равны $\frac{2\pi}{3}$, поэтому она пригодна для сжатия. Правда, эта ячейка имеет самоналожение границы (ребро 12), но это не мешает провести сохраняющую длину сети операцию, аналогичную сжатию — построить на рёбрах 23 внутри ячейки $\sigma(C)$ два параллелограмма с углом 60° , см. рис. 3.23. После «сдвига» рёбер 23 «влево» на место пунктирных линий мы получим новую сеть из Ω_{\min} , уже не содержащую на рёбрах 23 вершин многогранника.

Итак, доказаны все заявленные утверждения, и доказательство леммы 3.14 завершено. \square

Помимо существования простой минимальной сети на всех многогранниках с кривизнами $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$, приведённое рассуждение имеет следующий интуитивный смысл. Если мы вложим сеть из эластичных резиночек типа G , так что вершины многогранника находятся в нужных ячейках (так, как описано в определении Ω), и вставим иголки в вершины многогранника так, чтобы сеть не могла соскользнуть с них, причём попросим сеть «отодвигаться» от вершин многогранника в том случае, если есть возможность сделать это, не меняя длину, разрешим рёбрам 12 и 34 перескакивать через вершины C и D соответственно, а так же запретим сети перестраивать структуру, то сеть либо превратится в минимальную, либо будет натянута рёбрами 23 на вершины C, D . Если разрешить ещё и одновременное перепрыгивание через них, то сеть в конце концов (следуя нашим рекомендациям по отодвиганию от вершин) придёт в устойчивое положение, т.е. превратится в минимальную.

Литература

- [1] А. Д. Александров, *Выпуклые многогранники*, Москва–Ленинград, 1950.
- [2] А. Д. Александров *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей* ОГИЗ, Москва–Ленинград, 1948.
- [3] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии* РХД, Москва–Ижевск, 2004.
- [4] Завальнюк Е.А. *Локальная структура кратчайших сетей в пространствах А.Д. Александрова ограниченной кривизны* // Вестн. Моск. ун-та Матем. Механ. — 2013.
- [5] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато* // УМН. — 1992. — **47**:2(284) — С. 53–115.
- [6] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Геометрия множества минимальных сетей данной топологии с фиксированной границей* // Изв. РАН. Сер. матем. — 1997. — **61**. №6. — С. 119–152.
- [7] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Разветвленные геодезические. Геометрическая теория локально минимальных сетей* // Российские математические и научные исследования, Эдвин-Меллен Пресс, 1999. — Т. 5.
- [8] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей* // Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003.
- [9] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа* // Наука, Москва, 1972.
- [10] Пронин М.В. *Локально минимальные сети на римановых многообразиях отрицательной секционной кривизны* // Вестник Моск. ун-та. Матем. Механ. — 1998. — №5. — С. 12–16.
- [11] А. В. Погорелов *Квази-геодезические линии на выпуклой поверхности* // Матем. сб. — 1949. — **25**(67):2 — С. 275–306.
- [12] В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин *Задачи по стереометрии* // Наука, Москва, 1989.
- [13] В. Ю. Протасов, *Замкнутые геодезические на поверхности симплекса* // Матем. сб. — 2007 — **198**№2 — С. 103–120.

- [14] И. В. Птицына, А. О. Иванов, А. А. Тужилин *Классификация замкнутых минимальных сетей на плоских двумерных торах* // Матем. сб. — 1992 — **183** №12 — с. 3–44.
- [15] И. В. Птицына *Классификация замкнутых локально минимальных сетей на тетраэдрах* // Матем. сб. — 1994 — **185** №5 — С. 119–138.
- [16] A. Altshuler *Construction and enumeration of regular maps on the torus* // Discrete Math. — 1973 — V. 4, № 3 — P. 201–217.
- [17] B. Aronov and J. O'Rourke *Nonoverlap of the star unfolding* // Discrete and Computational Geometry — 1992 — №8 — P. 219–250.
- [18] Dahl J. *Steiner problems in optimal transport.* // Trans. Am. Math. Soc. — 2011 — **363** № 4 — P. 1805–1819.
- [19] M. Deza, M. Dutour Sikirić *Geometry of chemical graphs. Polycycles and two-faced maps.* // Encyclopedia of Mathematics and its Applications — **119**. — Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- [20] M. Deza, M. Dutour Sikirić, *Zigzag and central circuit structure of $(\{1, 2, 3\}, 6)$ -spheres* // Taiwanese J. Math. — 2012 — **16** № 3 — P. 913–940.
- [21] M. Dutour Sikirić, *Complex parametrization of triangulations on oriented maps* // Ars Mathematica Contemporanea — 2013. — №6. — P. 69–81.
- [22] P.W. Fowler and D.E. Manolopoulos *An Atlas of Fullerenes* // Clarendon Press, Oxford. 1995.
- [23] Galperin G. *Convex polyhedra without simple closed geodesics.* // Regul. Chaotic Dyn. — 2003 — **8** №1 — P. 45–58.
- [24] M.R. Garey, R.L. Graham and D.S. Johnson. *Some NP-complete geometric problems.* // Proc. 8th Ann. Symp. Theory Comput. — 1976 — P. 10–22.
- [25] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability: a Guide to the Theory of NP-Completeness.* // W.H. Freeman, San Francisco, California, 1979.
- [26] E. N. Gilbert and H. O. Pollak. *Steiner minimal trees.* // SIAM J. Appl. Math. — 1968 — **16** № 1 — P. 1–29.
- [27] A. Heppes. *Isogonal spherischen netze* // Ann. Univ. Sci., Budapest, Sect. Math. — 1964 — **7** — P. 41–48.
- [28] Hwang F. K. *A linear time algorithm for full Steiner trees* // Oper. Res. Letter. — 1986. V. 5. — P. 235–237.
- [29] Hwang F. K., Richards D., Winter P. *The Steiners Tree Problem.* // Elsevier Science Publishers. 1992.
- [30] N. Innami and S. Naya *A comparison theorem for Steiner minimum trees in surfaces with curvature bounded below* // Tohoku Math. J. — 2013 — V. 65 № 1 — P. 131–157.

- [31] A. O. Ivanov and A. A. Tuzhilin *Minimal networks — the Steiner problem and its generalizations* // CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.
- [32] Z. A. Melzak. *On the problem of Steiner.* // Canad. Math. Bulletin — 1961 — **4** — P. 143–148.
- [33] S. Negami, *Uniqueness and faithfulness of embedding of toroidal graphs* // Discrete Math. — 1983 — **44** — P. 161–180.
- [34] J.E. Taylor, *The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces* // Annals of Mathematics — 1976 — **103** — P. 489–539.
- [35] W.P. Thurston, *Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere* // The Epstein birthday schrift, Geom. Topol. Monogr. — 1998 — **1** — P. 511–549.

Работы автора по теме диссертации

- [36] Стрелкова Н. П., *Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях выпуклых многогранников* // Моделирование и анализ информационных систем. — 2013. — Т. 20, №5. — С. 116–145.
- [37] Стрелкова Н. П., *Замкнутые локально минимальные сети на поверхностях тетраэдров* // Матем. сб. — 2011 — Т. 202, №1 — С. 141–160.
- [38] Стрелкова Н. П., *Реализация плоских графов как замкнутых локально минимальных сетей на выпуклых многогранниках* // Доклады РАН — 2010 — Т. 435, №4 — С. 1–3.
- [39] Стрелкова Н. П., *Устойчивость локально минимальных сетей* // Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике — 2013 — **29** — С. 148–170.