

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Степанова Екатерина Ивановна

**Бифуркации минимальных сетей
и минимальных заполнений
конечных подмножеств евклидовой плоскости**

Специальность 01.01.04 — “геометрия и топология”

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
д.ф.-м.н., профессор А. А. Тужилин,
д.ф.-м.н., профессор А. О. Иванов

Москва — 2020

Оглавление

Введение	4
1 Предварительные сведения	16
1.1 Оптимальные соединяющие графы	16
1.1.1 Графы	16
1.1.2 Графы с границей	17
1.1.3 Оптимальные взвешенные графы с границей в псевдометрическом пространстве	17
1.1.4 Бинарные типы	21
1.1.5 Минимальные параметрические графы	23
1.1.6 Обозначение типов и топологий заполнений с четырехугольной границей	24
1.2 Минимальные заполнения конечных метрических пространств	25
1.2.1 Свойства минимальных заполнений	25
1.2.2 Мультиобходы графов и формула Еремина	26
1.3 Геометрия минимальных сетей Штейнера в евклидовом пространстве	28
1.3.1 Геометрическая реализация сетей	28
1.3.2 Деревья Штейнера в евклидовом пространстве	29
1.3.3 Алгоритм Мелзака	32
1.3.4 Планарные структуры	34
1.4 Отношения типа Штейнера	36
2 Дифференцируемость веса оптимального заполнения	38

2.1	Основные результаты главы	38
2.2	Доказательство теоремы	39
3	Бифуркации оптимальных взвешенных графов с плоской границей	41
3.1	Постановка задачи	41
3.2	Бифуркации минимальных остовных деревьев на плоскости	43
3.3	Бифуркации минимальных заполнений на плоскости	44
3.3.1	Бифуркации минимальных заполнений для четырехточечных границ	46
3.4	Бифуркационные диаграммы сетей Штейнера фиксированного бинарного типа	49
3.4.1	Одномерные страты	49
3.4.2	Страты размерностей 0 и 1 в случае четырех граничных точек	51
3.4.3	Двумерные страты в случае четырех граничных точек	55
3.5	Бифуркационные диаграммы бинарных типов минимальных сетей Штейнера	60
3.5.1	Четыре граничные вершины	64
4	Суботношение Штейнера для четырех точек плоскости	75
4.1	Взаимное расположение типов минимальных сетей Штейнера и минимальных заполнений для невыпуклых четырехточечных границ	75
4.2	Суботношение Штейнера для четырех точек на евклидовой плоскости	79
4.2.1	Нестрого выпуклые четырехугольники	80
4.2.2	Невыпуклый случай.	84
4.3	Оценка суботношения Штейнера римановых многообразий	92
	Заключение	97
	Литература	99

Введение

Актуальность темы и степень ее разработанности.

Диссертация посвящена теории бифуркаций кратчайших сетей и минимальных заполнений конечных множеств точек, расположенных в евклидовой плоскости, а также ее применению. Задачи о кратчайшей сети и о минимальных заполнениях конечных множеств в метрическом пространстве принадлежат классу задач о соединении таких множеств взвешенным графом минимального веса с определенными ограничениями на весовую функцию и вершины.

Одна из самых известных задач такого типа — задача о построении минимального остова, то есть о соединении данного конечного множества точек с метрикой связным графом с наименьшим весом, при условии того, что дополнительных вершин в графе нет, а весовая функция совпадает с метрикой. Из соображений минимальности понятно, что решением этой задачи является дерево. Оно называется *минимальным остовным деревом*. Минимальное остовное дерево можно построить всегда, причем за полиномиальное время (например, алгоритмом Крускала или алгоритмом Прима, см. [1, 2]).

Однако оказалось, что, добавляя в искомый граф новые вершины, можно уменьшить его вес по сравнению с минимальным остовным деревом. Так возникла *проблема Штейнера*, в которой исходное множество точек является подмножеством некоторого метрического пространства, новые вершины в графе также лежат в нем, а за весовую функцию, как и в случае остовного дерева, принимается метрика этого пространства. Эта задача естественно возникает в разнообразных прикладных вопросах: при построении кратчайших транспортных сетей, при построении филогенетических деревьев для определения родственных связей между организмами, при топологической проектировке мик-

росхем и др.

Первый известный нам случай ее изучения — задача Пьера Ферма ([3]), которая заключается в поиске точки на евклидовой плоскости, сумма расстояний от которой до вершин лежащего в этой плоскости треугольника минимальна. Решением этого вопроса занимались итальянские математики XVII века В. Вивiani, Б. Кавальери, Э. Торричелли, а позже и другие ученые. Для того, чтобы соединить большее число различных точек плоскости кратчайшей сетью, может понадобиться добавить две и более дополнительных точек. Поиском сети минимальной длины на плоскости для четырех точек занимались Бопп ([4]), Гаусс и Шумахер ([5]), Клапейрон, Ламе. Замечательный исторический обзор проблемы Штейнера дан в [6], где утверждается, что впервые для любого числа точек плоскости эту задачу начал изучать Жергонн в 1811 году в [7] и нашел практически то же решение, что и Мелзак в [8] спустя 150 лет. В 1934 году Ярник и Кёсслер в [9] сделали еще большее обобщение, разрешив соединять сетью произвольное число точек в евклидовом пространстве любой размерности (английский перевод этой работы приведен в [10]). Однако в известной книге Р. Куранта и Г. Роббинса “Что такое математика?” ([11]) эта задача была названа именем Якоба Штейнера (который, на самом деле, обобщил задачу Ферма другим способом: для любого конечного числа точек на плоскости он предлагал найти одну точку, сумма расстояний от которой до данных точек минимальна), с тех пор название прочно закрепилось. В современной классической постановке рассматривается произвольное конечное множество точек в некотором метрическом пространстве и требуется построить граф наименьшей длины с вершинами в этом пространстве, который соединял бы все эти точки. Также как и решение задачи о минимальном остове, этот граф является деревом и называется *минимальным деревом Штейнера*.

В отличие от минимального остовного дерева, минимальное дерево Штейнера существует не всегда. Самое простое препятствие — неполнота объемлющего пространства. Однако даже полнота не может быть гарантией существования минимального дерева Штейнера. Вероятно, первый пример конечного множества точек в полном метрическом пространстве, для которого не существует

решения задачи Штейнера, был построен А. Л. Гаркави в работе [12] в 1974 году. Позже другие примеры были построены Л. Веселы ([13]), П. Л. Папини ([14]) и П. А. Бородиным ([15]). В работе [16] был построен пример банахова пространства, в котором для любого $n > 2$ найдется система из n точек, не затягиваемая кратчайшей сетью.

Но существование минимального дерева Штейнера не означает, что его можно построить достаточно быстро. Проблема Штейнера NP-полна ([17]), то есть до сих пор неизвестно, возможно ли предложить полиномиальный алгоритм для ее решения (подробнее о сложности алгоритмов и об NP-полноте см. в [18], [19], [20]). Все существующие алгоритмы экспоненциальны и являются вариациями алгоритма Мелзака ([8]).

Еще один подход к построению соединяющего графа наименьшего веса возник на стыке описанных задач и проблемы М. Громова о минимальном заполнении риманова многообразия ([21]). В задаче М. Громова дано гладкое замкнутое многообразие M с метрикой ρ и требуется найти компактное многообразие W с метрикой d минимального объема, для которого M является краем и такое, что для любых двух точек p и q из M выполнено: $d(p, q) \geq \rho(p, q)$. Решение этой задачи называется *минимальным заполнением многообразия M* . В работе [22] А. О. Иванов и А. А. Тужилин предложили брать конечное метрическое пространство (M, ρ) и затягивать его связным взвешенным графом так, что вес пути между любыми двумя точками из M не меньше расстояния между ними в метрике ρ . При этом весовая функция порождает метрику d на вершинах графа. То есть в качестве M берется конечное метрическое пространство, а заполнение — стратифицированное многообразие. Взвешенный граф, затягивающий M с указанными условиями и имеющий минимальный вес, называется *минимальным заполнением метрического пространства (M, ρ)* . Отметим, что в задаче о минимальном заполнении новые вершины в граф добавляются абстрактно и не обязаны лежать в объемлющем метрическом пространстве в случае если M рассматривается как его подмножество.

В работе [22] показывается, что минимальное заполнение существует для любого конечного метрического пространства. Однако там же было установлено,

что поиск любого минимального заполнения можно свести к поиску минимального дерева Штейнера в пространстве l_∞ , а эта задача NP-трудна (подробнее о пространствах, в которых минимальные деревья Штейнера являются минимальными заполнениями, см. в [23] и [24]). То есть для поиска минимального заполнения также пока не существует эффективного алгоритма и, скорее всего, не будет существовать. Однако задача о минимальном заполнении интересна сама по себе и позволяет получить новые характеристики метрических пространств, а также продвинуться в изучении проблемы Штейнера. Помимо теоретического, минимальные заполнения представляют также и практический интерес. Например, при поиске топологии филогенетического дерева в биоинформатике методом присоединения соседей строится дерево, являющееся минимальным заполнением в случае аддитивного пространства [25].

Опишем кратко характеристики метрических пространств, о которых говорилось выше. Для произвольного конечного подмножества метрического пространства можно определить инфимум веса каждого из рассмотренных графов и оценить, насколько они различаются, с помощью их отношения. В 1968 году в [26] Э. Гилберт и Г. Поллак ввели *отношение Штейнера метрического пространства*, равное точной нижней грани отношения длины минимального дерева Штейнера к длине минимального остовного дерева, взятой по всем конечным подмножествам этого пространства, содержащим хотя бы два элемента. Отношение Штейнера показывает, как сильно отличаются эти два вида кратчайших сетей в самом худшем случае для данного пространства. В той же работе Э. Гилберт и Г. Поллак выдвинули гипотезу о том, что отношение Штейнера евклидовой плоскости равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$, однако она до сих пор остается открытой, так как выяснилось, что опубликованное в [27] доказательство ошибочно ([28]).

А. О. Иванов и А. А. Тужилин в [22] предложили рассмотреть еще два отношения. *Суботношение Штейнера* показывает близость минимального заполнения и минимального дерева Штейнера, а *отношение Штейнера-Громова* — минимального заполнения и минимального остовного дерева. Все три отношения называются *отношениями типа Штейнера* и являются числовыми характеристиками метрического пространства.

Вычисление отношений типа Штейнера является непростой задачей. Достаточно проследить историю поиска отношения Штейнера степени n евклидовой плоскости, чтобы удостовериться в этом. Отношение типа Штейнера степени n — это точная нижняя грань соответствующего отношения, взятая по всем множествам, количество элементов в которых не превосходит n . Для плоскости отношение Штейнера степени 3 было вычислено сразу же в [26], степени 4 — в 1978 году Поллаком в [29], степени 5 — в 1985 году Ду, Хвангом и Яо в [30], степени 6 — в 1991 году Рубинштейном и Томасом в [31], степени 7 — только в 2008 году де Ветом в [32], а степени 8 — в 2014 году Кирсценблатом в [33]. Это максимальное число точек плоскости, для которого отношение Штейнера плоскости является известным.

Каждое отношение типа Штейнера не больше 1 для любого метрического пространства, так как сети являются заполнениями, а остовные деревья — сетями. Эта оценка достигается для любого отношения типа Штейнера, например, для двухточечных множеств. Нижние оценки получены Э. Ф. Муром и А. С. Пахомовой.

Утверждение 0.0.1 (Э. Ф. Мур в [26]). *Для произвольного метрического пространства X верны следующие оценки:*

$$\text{sr}_n(X) \geq \frac{n}{2(n-1)}, \quad \text{sr}(X) \geq \frac{1}{2}.$$

Эти оценки являются точными, то есть достигаются на некоторых пространствах.

Утверждение 0.0.2 (А. С. Пахомова [34]). *Для произвольного метрического пространства X верны следующие оценки:*

$$\begin{aligned} \text{sgr}_n(X) &\geq \frac{n}{2(n-1)}, & \text{sgr}(X) &\geq \frac{1}{2}; \\ \text{ssr}_n(X) &\geq \frac{n}{2(n-1)}, & \text{ssr}(X) &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Эти оценки являются точными, то есть достигаются на некоторых пространствах.

А. О. Иванов и А. А. Тужилин в [35] доказали, что для любого значения из отрезка $[\frac{1}{2}, 1]$ существует метрическое пространство, отношение Штейнера которого равно этому числу. Аналогичный результат для других двух отношений типа Штейнера доказан А. С. Пахомовой в [34]. Обзор результатов по отношению Штейнера различных метрических пространств представлен в [36].

А. О. Иванов и А. А. Тужилин вычислили суботношение Штейнера степени 3 евклидовой плоскости в первой работе, посвященной минимальным заполнениям [22]. Суботношение Штейнера степени 4 плоскости получено автором настоящей диссертации на основе бифуркационных диаграмм сетей Штейнера и минимальных заполнений. Суботношение плоскости степени 5 до сих пор остается неизвестным, хотя Э. Н. Овсянников в [37] нашел его для класса выпуклых пятиточечных множеств и оценил сверху для невыпуклых (оно оказалось меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}$).

При решении задач о построении указанных графов невозможно не затронуть вопрос об их топологическом строении. Определение количества дополнительных вершин и способа соединения всех вершин в графе представляет основную сложность при построении решений. В настоящей диссертации изучаются проблемы топологического строения минимальных сетей Штейнера и минимальных заполнений. Большое внимание уделяется четырехточечным исходным множествам. С точки зрения топологии минимального дерева Штейнера, ранее в основном изучались выпуклые четырехточечные множества, например, в работах Поллака [29], Ду, Хванга, Сонга и Тинга [38], Оллереншоу [39]. Венг также рассматривал некоторые частные случаи невыпуклых четырехугольников [40]. Эти авторы представили некоторые свойства множеств, позволяющие сделать выводы о специфических топологиях минимального дерева Штейнера.

Основными результатами данной диссертации являются построенные бифуркационные диаграммы, отражающие топологическое строение минимальных сетей Штейнера и минимальных заполнений для всех четырехточечных подмножеств плоскости. Выявлены также некоторые общие свойства таких диаграмм для любого числа исходных точек. Диаграммы строятся следующим образом. Фиксируются на плоскости все граничные точки, кроме одной, положение ко-

торой служит параметром бифуркационной диаграммы. Бифуркационные диаграммы отражают, какое множество топологий и типов минимальных сетей Штейнера и минимальных заполнений реализуются в зависимости от параметра. Эти бифуркационные диаграммы для построения минимальных сетей Штейнера и минимальных заполнений играют роль диаграмм Вороного для построения минимального остовного дерева.

Также в данной диссертации на основе построенных бифуркационных диаграмм вычислено суботношение Штейнера степени 4 евклидовой плоскости и найдены все множества, на которых оно достигается. Наконец, в диссертации доказано, что суботношение Штейнера связного многообразия размерности n не превышает суботношения Штейнера n -мерного евклидового пространства.

Цели и задачи работы

Настоящая работа посвящена развитию теории минимальных сетей и минимальных заполнений конечных метрических пространств, изучению изменения их топологий при изменении граничного множества, а именно построению теории бифуркаций кратчайших взвешенных соединяющих графов, подробному описанию бифуркационных диаграмм для четырех граничных точек и их применению, в частности, к вычислению суботношения Штейнера степени 4 евклидовой плоскости и оценке суботношения Штейнера римановых многообразий.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно. Впервые построена теория бифуркаций оптимальных графов с границей. Впервые построены и использованы бифуркационные диаграммы таких графов для вычисления числовой характеристики евклидовой плоскости — ее суботношения Штейнера степени 4.

Положения, выносимые на защиту

Следующие результаты являются основными и выносятся на защиту.

1. Вес минимального параметрического заполнения и вес минимального заполнения, рассматриваемые как функции конечных подмножеств связного риманова многообразия, дифференцируемы по направлениям;
2. Бифуркационные диаграммы для минимальных остовных деревьев в евклидовой плоскости являются диаграммами Вороного, причем на каждом двумерном страте реализуется одно минимальное остовное дерево, на одномерном — два, а на нульмерном — столько, сколько двумерных стратов содержат его в своей границе;
3. На бифуркационных диаграммах топологий минимальных сетей Штейнера фиксированного бинарного типа \mathcal{T} на евклидовой плоскости:
 - все одномерные страты являются частями прямых и окружностей;
 - на одномерных стратах либо реализуется та топология из примыкающих двумерных стратов, где вырожденных ребер больше, либо (если в одном из примыкающих двумерных стратов тип \mathcal{T} не реализуется) рассматриваемый тип \mathcal{T} не реализуется;
 - в каждой точке — нульмерном страте — реализуется топология, в которой множество вырожденных ребер является объединением множеств вырожденных ребер топологий всех входящих в эту точку одномерных стратов;
4. На бифуркационной диаграмме типов минимальных сетей Штейнера на евклидовой плоскости:
 - одномерные страты склеены из частей алгебраических кривых порядка не выше 12;
 - для четырех точек:
 - одномерные страты склеены из частей алгебраических кривых порядка не выше 8;
 - на каждом двумерном страте реализуется один тип, на каждом одномерном — два типа, на нульмерном — три;

- если в фиксированном треугольнике все углы меньше 120° , то двумерных страта три, одномерных три, нульмерный один, иначе — двумерных два, одномерный один и нульмерных нет;

5. На бифуркационной диаграмме типов минимальных заполнений:

- при количестве точек не больше 7 одномерные страты являются частями ветвей алгебраических кривых;
- при четырех точках:
 - одномерные страты являются ветвями гипербол Содди фиксированного треугольника;
 - на каждом двумерном страте реализуется один тип, на каждом одномерном — два типа, на нульмерном — три;
 - если три фиксированные точки лежат на одной прямой, двумерных страта два, одномерных — два, нульмерный — один;
 - если фиксированные точки не лежат на одной прямой, то при сумме тангенсов половинных углов фиксированного треугольника не больше 2 получается три двумерных страта, три одномерных и один нульмерный, иначе — три двумерных, четыре одномерных и два нульмерных;

6. Суботношение Штейнера степени 4 евклидовой плоскости равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и достигается только на множествах вершин равнобедренных трапеций, у которых основания видны из точки пересечения диагоналей под углом 60° .

Методы исследования

В диссертации используются методы дифференциальной геометрии, математического анализа, теории графов, теории минимальных сетей, теории минимальных заполнений конечных метрических пространств, топологии, евклидовой геометрии, теории алгоритмов. Для экспериментального анализа поведения длины минимальных сетей и веса минимальных заполнений при изменении положения точек привлекается программный пакет “Wolfram Mathematica”.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации представляют интерес для специалистов в области минимальных сетей, минимальных заполнений, евклидовой геометрии, вариационного исчисления, дифференциальной геометрии. Построенные бифуркационные диаграммы дают представление о поведении минимальных сетей и минимальных заполнений на плоскости, могут быть использованы для эффективного построения разных видов оптимальных соединяющих графов для большого числа границ, различающихся одной точкой, а также для поиска приближенных решений задачи Штейнера.

Степень достоверности и апробация результатов.

Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и докладывались на следующих научных семинарах и конференциях:

- на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов–2012” (МГУ, 9–13 апреля 2012)
- на XI международном научном семинаре “Дискретная математика и ее приложения” имени академика О. Б. Лупанова (МГУ, 18–23 июня 2012)
- на международной конференции “Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2016” (г. Воронеж, 25–31 января 2016)
- на международном семинаре “Critical and collective effects in graphs and networks – 2016” (МФТИ, г. Москва, 25–29 апреля 2016)
- на международной конференции “Александровские чтения – 2016” (МГУ, 22–26 мая 2016)
- на III международной школе-конференции “Геометрический анализ и его приложения” (г. Волгоград, 30 мая – 3 июня 2016)
- на семинаре “Дискретная геометрия и геометрия чисел” под руководством проф. Н. К. Долбилина, проф. М. Д. Ковалева и проф. Н. Г. Мощевитина (МГУ, 9 ноября 2016)

- на семинаре “Экстремальные сети” под руководством проф. А. О. Иванова и А. А. Тужилина (МГУ, 2012–2016 гг.)
- на международной конференции “XX Geometrical Seminar” (г. Врнячка Баниа, Сербия, 20–23 мая 2018)
- на международной конференции “Классическая и современная геометрия” (МПГУ, г. Москва, 22–25 апреля 2019)

Публикации автора.

Основные результаты диссертации опубликованы в 5 статьях автора [60]–[64] и 8 тезисах международных конференций, из них: в журналах, удовлетворяющих пункту 2.3 положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова — 5 статей, в журналах, индексируемых SCOPUS — 3 статьи.

Структура и объем диссертации.

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего список публикаций по теме диссертации.

В первой главе даются необходимые определения и предварительные сведения из теории минимальных сетей и минимальных заполнений.

Во второй главе рассматривается вопрос о дифференцируемости веса оптимальных соединяющих графов.

В третьей главе изучаются бифуркации оптимальных соединяющих графов в трех разных классах на плоскости: в классе остовных деревьев, в классе сетей (для двух характеристик: типа и топологии) и в целом классе заполнений.

В четвертой главе вычисляется суботношение Штейнера степени четыре для евклидовой плоскости. Оказалось, что невыпуклый случай четырех точек чрезвычайно нетривиален, и именно бифуркационные диаграммы минимальных сетей Штейнера и минимальных заполнений позволяют его вычислить. Далее в этой главе суботношение Штейнера произвольного риманова многообразия

сравнивается с суботношением Штейнера евклидова пространства той же зерности.

Библиография содержит 64 наименования.

Текст настоящей диссертации изложен на 103 страницах и содержит 10 иллюстраций.

Благодарности.

Автор искренне благодарит своих научных руководителей профессора А. А. Тужилина и профессора А. О. Иванова за постановку задачи, плодотворные обсуждения и поддержку.

Автор также признательна Д. П. Ильютко и А. Б. Жеглову за полезные обсуждения, а также всему коллективу кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ за доброжелательную атмосферу.

Автор благодарит всех участников семинара “Экстремальные сети” за многочисленные дискуссии.

Наконец, автор благодарна всем членам своей семьи за огромную поддержку и помощь.

Глава 1

Предварительные сведения

1.1 Оптимальные соединяющие графы

1.1.1 Графы

Для дальнейшего изложения нам понадобятся базовые сведения из теории графов. *Граф* G — это пара (V, E) , где V — конечное непустое множество, элементы которого называются *вершинами* графа G , а E — множество некоторых неупорядоченных пар различных вершин из V , называемых *ребрами* графа G . Иногда, чтобы подчеркнуть принадлежность вершин и ребер графу G , будем обозначать множества V и E через $V(G)$ и $E(G)$ соответственно. Если $e = \{v, w\}$ — ребро графа G , то говорят, что v и w — *смежные* вершины, *инцидентные* ребру e , и что ребро e *инцидентно* вершинам v и w ; также говорят, что e *соединяет* вершины v и w , или что v и w — *концы* ребра e . Ребро, соединяющее вершины v и w , для краткости обозначим через vw . Количество ребер графа G , инцидентных вершине $v \in V(G)$, называется *степенью* этой вершины. Вершины степени 1 называются *висячими* вершинами. Граф называется *простым*, если каждой паре вершин инцидентно не более одного ребра.

Маршрут, соединяющий вершины v и w в графе G , — это последовательность ребер $\{e_i\}_{i=1}^n$, такая что $e_i = v_i v_{i+1}$ и $v_1 = v$, а $v_{n+1} = w$. *Путь* — это маршрут, в котором все ребра различны. *Циклом* называется замкнутый путь, то есть путь, у которого v_1 и v_{n+1} совпадают. Граф называется *связным*, если для любой пары вершин в нем существует маршрут, который их соединяет. Связный простой граф называется *деревом*, если он не содержит циклов. Более

подробно о теории графов можно посмотреть, например, в [41].

1.1.2 Графы с границей

Пусть M — произвольное конечное множество и G — граф, для которого $V(G) \supset M$. Тогда будем говорить, что *граф G соединяет M* . Множество графов, соединяющих M , обозначим через $\mathcal{G}(M)$.

Множество M назовем множеством *граничных вершин (границей)* графа G , а множество $V(G) \setminus M$ — множеством его *внутренних вершин*.

Далее будем считать, что у всех графов имеется граница, возможно пустая.

Ребра, инцидентные хотя бы одной граничной вершине, также будем называть *граничными*; остальные ребра назовем *внутренними*. Путь, соединяющий граничные вершины графа G , будем называть *граничным*.

Если $v \in V(G)$ — внутренняя вершина степени $(k + 1) \geq 3$ в графе G , смежная с k граничными вершинами w_1, \dots, w_k степени 1, то множество вершин $\{w_1, \dots, w_k\}$, а также множество ребер $\{vw_1, \dots, vw_k\}$, назовем *усами* графа G . Также вершины w_1, \dots, w_k будем называть *концами усов*.

Внутренние вершины степени 2 будем называть *проходными*.

1.1.3 Оптимальные взвешенные графы с границей в псевдометрическом пространстве

Граф G называется *взвешенным*, если на множестве его ребер $E(G)$ задана *весовая функция* $\omega: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$, которая ставит в соответствие каждому ребру $e \in E(G)$ его *вес* $\omega(e)$. Сумма весов всех ребер графа G называется *весом графа* G и обозначается через $\omega(G)$.

Мы будем рассматривать только неотрицательные весовые функции.

Далее мы будем изучать графы не в метрическом, а в *псевдометрическом* пространстве. Это означает, что расстояние между различными точками может быть равно нулю. Остальные свойства, то есть симметричность и неравенство треугольника, остаются. В случае с евклидовой плоскостью псевдометрика нам

необходима для того, чтобы различные точки могли занимать одинаковое положение. Это допущение оказывается важным при изучении того, как меняется топологическое строение графов при изменении расстояний между вершинами.

Существует несколько подходов к оптимальному соединению множества точек M , лежащему в псевдометрическом пространстве \mathbb{X} . Несмотря на то, что понятие заполнения было введено позже понятия сети, для единообразия нам будет удобно начать именно с определения заполнения множества точек в псевдометрическом пространстве. Оно было предложено А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным в [22]. В общем случае задача о построении заполнения не предполагает, что внутренние вершины лежат в \mathbb{X} . Ограничение на весовую функцию здесь возникает по аналогии с ограничением на вес минимального заполнения в задаче М. Громова [21].

Определение 1. Пара (G, ω) называется *заполнением подмножества M* псевдометрического пространства \mathbb{X} , если G — граф, соединяющий M , а ω — неотрицательная весовая функция на ребрах G такая, что вес любого пути, соединяющего любую пару граничных вершин, не меньше расстояния между ними в псевдометрике ρ пространства \mathbb{X} . При этом граф G называется *параметризующим графом* заполнения (G, ω) .

Семейство всех заполнений множества M будем обозначать через $\mathfrak{G}(M)$.

Определение 2. Пусть \mathcal{K} — некоторый класс заполнений, то есть заполнения, обладающие определенным свойством. Число

$$\text{mf}(M, \mathcal{K}) = \inf_{(G, \omega) \in \mathfrak{G}(M)} \{\omega(G) \mid (G, \omega) \in \mathcal{K}\}$$

будем называть *весом минимального заполнения множества M в классе \mathcal{K}* , а каждое заполнение из \mathcal{K} , имеющее вес $\text{mf}(M, \mathcal{K})$, называется *минимальным заполнением множества M в классе \mathcal{K}* . Минимальное заполнение M в произвольном классе \mathcal{K} будем называть *оптимальным взвешенным графом с границей M в классе \mathcal{K}* или *оптимальным соединяющим графом* или *оптимальным заполнением (в классе \mathcal{K})*.

Если оптимальный соединяющий граф содержит цикл, то вес каждого ребра в нем равен нулю, так как иначе, убрав ненулевое ребро, мы получили бы

оптимальный соединяющий граф меньшего веса. То есть вершины, расстояние между которыми не равно нулю, не участвуют в циклах. Можно убрать достаточное количество ребер нулевой длины так, чтобы оптимальный соединяющий граф стал деревом и его вес не изменился. Поэтому **будем считать, что оптимальный взвешенный граф является деревом.** Это ограничение всего лишь означает, что точки, расстояния между которыми равны нулю, соединены без циклов.

Разумно сделать еще одно ограничение на оптимальный соединяющий граф. Если он содержит внутреннюю висячую вершину, то инцидентное ей ребро, очевидно, имеет вес ноль. Поэтому все такие вершины вместе с инцидентными им ребрами можно удалить, не меняя при этом веса графа. Если же оптимальный соединяющий граф содержит проходную вершину (дополнительную вершину степени 2), то ее можно удалить, объединив при этом инцидентные ей ребра в одно следующим образом: оба эти ребра удаляются, а вместо них добавляется одно, вес которого равен сумме их весов. Удаление всех проходных вершин не меняет вес соединяющего графа, поэтому он по-прежнему оптимальный.

Так как мы рассматриваем задачи поиска оптимальных соединяющих графов, далее будем рассматривать только те графы, которые являются деревьями без внутренних вершин степеней 1 и 2.

Обозначим некоторые классы заполнений, в которых мы будем искать оптимальные.

Тривиальный класс — это все заполнения множества, без каких-либо ограничений.

Определение 3. Оптимальный соединяющий граф множества M в классе всех заполнений называется *минимальным заполнением множества M* .

Множество всех минимальных заполнений множества M обозначим через $MF(M)$.

Естественный способ задать нетривиальный класс — поместить все внутренние вершины заполнения в \mathbb{X} и положить вес каждого ребра равным расстоянию между его концами. Тогда веса ребер будут зависеть от положения внутренних вершин. Так получается одна из самых известных задач об оптимальном соеди-

нении точек — задача Штейнера. В ней требуется соединить M графом наименьшего возможного веса так, что все его внутренние вершины лежат в \mathbb{X} , а вес каждого ребра равен расстоянию между концами этого ребра. Для точного описания задачи Штейнера введем определение сети.

Определение 4. *Сетью с границей M* называется заполнение M такое, что определено инъективное отображение $\phi: V(G) \rightarrow \mathbb{X}$ такое, что элементы M переходят в себя, а вес каждого ребра сети равен расстоянию между точками в \mathbb{X} , соответствующими его концам. Весовую функцию сети назовем *длиной* и обозначим через ρ .

Заметим, что часто сети рассматривают в метрических пространствах и разрешают различным вершинам отображаться в один элемент пространства. Работа с псевдометрическим пространством позволяет сделать отображение ϕ инъективным: если сеть отображает граф в метрическое пространство \mathbb{X} (например, евклидово) и “склеивает” некоторые элементы, то это равнозначно тому, что вместо \mathbb{X} мы рассматриваем псевдометрическое пространство \mathbb{X}' , отличающееся от \mathbb{X} тем, что в нем имеется много копий каждой точки \mathbb{X} , а отображение ϕ теперь переводит все вершины в различные элементы \mathbb{X}' так, что расстояние между “склеиваемыми” элементами равно нулю.

Множество сетей с границей M обозначим через $\Gamma(M)$.

Определение 5. Оптимальный соединяющий граф в классе сетей называется *минимальной сетью Штейнера*. Другими словами, число

$$\text{smn}(M) = \inf_G \{\rho(G) \mid G \in \Gamma(M)\}$$

называется *длиной минимальной сети Штейнера* для M , а каждая сеть, соединяющая M и имеющая длину $\text{smn}(M)$, называется *минимальной сетью Штейнера* для M .

Множество всех минимальных сетей Штейнера с границей M будем обозначать через $\text{SMN}(M)$.

Еще один подход к заданию класса — вообще запретить добавление внутренних точек. Он ведет к задаче о поиске оптимального взвешенного графа в

классе заполнений без внутренних вершин. Очевидно, наиболее выгодная весовая функция в этом случае также будет длиной. Искомый граф в этом случае — хорошо известное минимальное остовное дерево, которое можно построить для любого конечного числа граничных вершин достаточно быстро, в отличие от двух других описанных деревьев.

Определение 6. Сеть без дополнительных вершин и без циклов называется *остовным деревом*.

Определение 7. Оптимальный соединяющий граф в классе остовных деревьев называется *минимальным остовным деревом*. Иначе говоря, число

$$\text{mst}(M) = \min_{G \in \Gamma(M)} \{\rho(G) \mid V(G) = M\}$$

называется *длиной минимального остовного дерева* для M , а каждое остовное дерево для M с длиной $\text{mst}(M)$ называется *минимальным остовным деревом*.

В определении минимального остовного дерева стоит минимум, а не инфимум, так как минимальное остовное дерево существует для любого множества M в любом метрическом пространстве X , это гарантируется отсутствием дополнительных вершин.

Данная диссертация посвящена в основном минимальным заполнениям и минимальным сетям Штейнера, однако для минимальных остовных деревьев будут также описаны бифуркационные диаграммы в 3 главе.

1.1.4 Бинарные типы

Итак, мы пришли к выводу, что можно ограничиться рассмотрением деревьев с внутренними вершинами степени не меньше 3 в качестве параметризующих графов минимальных сетей Штейнера и минимальных заполнений. Оказывается, можно исследовать еще более узкий класс графов — бинарные деревья.

Определение 8. *Бинарным* будем называть дерево, у которого все граничные вершины имеют степень 1, а внутренние — степень 3.

Опишем процесс приведения любого дерева к бинарному. Для этого нам понадобятся операция расщепления вершины.

Определение 9. Пусть u — вершина в графе G , а $E(u)$ — множество ребер, инцидентных u . Рассмотрим разбиение $E(u)$ на непустые множества: $E(u) = E_1 \sqcup E_2$. Заменяем теперь вершину u на две вершины v и w так, что в ребрах из E_1 конец u меняется на v , а в ребрах из E_2 — на w . Также добавим ребро vw . Описанная операция называется *расщеплением вершины u* или *вклейкой ребра vw* .

Расщепление вершины приводит к новому графу. Если G — дерево, то и новый граф тоже дерево.

Предложение 1.1.1. Любое дерево G можно привести к бинарному дереву G' , применив конечное число расщеплений вершин.

Доказательство. Если G содержит граничную вершину u степени $d > 1$, то расщепим ее, заменив на граничную вершину v и внутреннюю w так, что степень v равна 1. Тогда степень w равна $d + 1 > 2$. Расщепив так все граничные невисячие вершины, получим дерево, у которого все граничные вершины имеют степень 1. Теперь, если имеются внутренние вершины степени больше 3, расщепим каждую из них на две внутренние вершины, одна из которых будет иметь степень 3. Тогда степень другой будет на 1 меньше степени расщепленной вершины, и процесс расщепления надо повторять до тех пор, пока степень каждой внутренней вершины не станет 3. В итоге получим бинарное дерево G' . \square

Итак, в любое дерево можно вклеить несколько ребер и получить бинарное. Если в оптимальное заполнение вклеивать только ребра нулевого веса, то его вес не поменяется. Таким образом, можно искать оптимальные взвешенные графы только среди бинарных деревьев. Множество всех бинарных деревьев с границей M из n элементов обозначим через $\text{Bin}(M)$ или $\text{Bin}(n)$.

Определение 10. Каждому заполнению (G, ω) можно поставить в соответствие взвешенное бинарное дерево, равное по весу этому заполнению и полученное из параметризующего графа вклейкой ребер нулевого веса. Такое бинарное дерево (без учета весовой функции) мы будем называть *типом заполнения* и обозначать через $\mathcal{T}(G, \omega)$.

Тип заполнения не единственен, если в этом заполнении имеются внутренние вершины степени больше 3 или граничные вершины степени больше 2. Например, “звезда”, в центре которой находится внутренняя вершина степени больше 3 и все инцидентные ей ребра граничные, может превратиться при расщеплении в любой бинарный тип. “Звезда” из трех ребер, все вершины которой граничные, имеет все три возможных бинарных типа для четырех граничных вершин.

Определение 11. Пара $(\mathcal{T}(G, \omega), E_n)$, где E_n — множество ребер нулевого веса в $\mathcal{T}(G, \omega)$, называется *топологией заполнения* (G, ω) .

Понятия типа и топологии заполнения естественно переносятся и на сети, так как любая сеть является заполнением.

1.1.5 Минимальные параметрические графы

Будем теперь рассматривать фиксированный тип T и всевозможные заполнения этого типа для границы M . Такие заполнения называются *параметрическими заполнениями* множества M .

Определение 12. Число

$$\text{mpf}(M, T, \mathcal{K}) = \inf_{(G, \omega): \mathcal{T}(G, \omega) = T} \{\omega(G) \mid (G, \omega) \in \mathcal{K}\}$$

будем называть *весом минимального параметрического заполнения* множества M типа T в классе \mathcal{K} . *Минимальным параметрическим заполнением* множества M типа T в классе \mathcal{K} будем называть произвольное заполнение из класса \mathcal{K} , имеющее тип T .

Очевидно, минимальное заполнение в классе \mathcal{K} является заполнением минимального веса среди всех минимальных параметрических заполнений в этом классе. Выбрав в качестве \mathcal{K} все заполнения или сети, мы естественно получаем определения минимальных параметрических заполнений и минимальных параметрических сетей. Вес минимального параметрического заполнения типа T множества M будем обозначать через $\text{mpf}(M, T)$, а длину минимальной параметрической сети типа T множества M — через $\text{mpn}(M, T)$.

1.1.6 Обозначение типов и топологий заполнений с четырехточечной границей

Далее нам понадобятся удобные обозначения для топологий заполнений четырехточечных границ, так как мы будем работать с четырьмя граничными точками.

Для обозначения топологии заполнения (G, ω) с границей, помеченной буквами A, B, C, D , будем действовать следующим образом. Рассмотрим бинарный тип $\mathcal{T}(G, \omega)$ этого заполнения, обозначим его внутреннее ребро через e . Воспользуемся следующим алгоритмом.

1. Бинарный тип с усами $\{A, B\}$ и $\{C, D\}$ обозначим через $AB - CD$, с усами $\{B, C\}$ и $\{A, D\}$ — через $AD - BC$, с усами $\{A, C\}$ и $\{B, D\}$ — через $AC - BD$. Знак “—” соответствует ребру e .
2. Если в (G, ω) некоторые граничные ребра имеют нулевой вес, то в обозначении топологии вершинам, инцидентным вырожденным ребрам, соответствуют не большие, а маленькие буквы. При этом если в усах одно ребро нулевое, а другое нет, то маленькие буквы встают рядом с “—”, а большие по краям. Маленькие буквы от одних усов, так же как и большие, упорядочиваются по алфавиту.

Например, $ab - cD$ обозначает цепь из двух звеньев, у которой на одном конце — точки A и B , расстояние между которыми ноль, на другом конце — D , и звенья сходятся в точке C . Еще один пример: $Ba - dC$ — цепь, состоящая из ребер BA, AD и DC . А $Da - BC$ — дерево, в котором одна внутренняя вершина, а вершина A имеет степень 2.

3. Если ребро e имеет нулевой вес, то в обозначении топологии отсутствует знак черты. Например, $ABdC$ — это “звезда” из трех ребер DA, DB и DC бинарного типа $AB - CD$; эта же звезда, полученная обнулением ребер в бинарном дереве $AD - BC$, будет обозначаться через $AdBC$. Если в бинарном дереве $AB - CD$ обнулить усы с концами A и B , а также ребро e , то получится топология $abCD$.

Введенные обозначения отражают и тип, и топологию заполнения.

1.2 Минимальные заполнения конечных метрических пространств

1.2.1 Свойства минимальных заполнений

В первой работе [22] о минимальных заполнениях конечных метрических пространств А. О. Иванов и А. А. Тужилин описали много их важных свойств. Приведем здесь некоторые из них.

Утверждение 1.2.1 ([22]). *Каждое конечное метрическое пространство имеет минимальное заполнение.*

Следуя статье [22], назовем граничный путь, вес которого равен расстоянию между его вершинами, *точным* путем.

Утверждение 1.2.2 ([22]). *Если все граничные пути в заполнении конечного метрического пространства являются точными, то это заполнение является минимальным.*

Пусть теперь M — n -точечное множество, обозначим его M_n . Пусть p_i , где $i = 1, 2, \dots, n$, — элементы M_n , ρ_{ij} — расстояние между точками p_i и p_j . В [22] найдены удобные формулы веса минимальных заполнений для трехточечных и четырехточечных метрических пространств, которые представлены в следующих двух утверждениях.

Утверждение 1.2.3. *Вес минимального заполнения трех точек в любом метрическом пространстве можно вычислить по следующей формуле:*

$$\text{mf}(M_3) = \frac{\rho_{12} + \rho_{23} + \rho_{31}}{2}.$$

Утверждение 1.2.4. *Вес минимального заполнения четырех точек в любом метрическом пространстве можно вычислить по следующей формуле:*

$$\begin{aligned} \text{mf}(M_4) = \frac{1}{2} \left(\min \{ \rho_{12} + \rho_{34}, \rho_{13} + \rho_{24}, \rho_{14} + \rho_{23} \} + \right. \\ \left. + \max \{ \rho_{12} + \rho_{34}, \rho_{13} + \rho_{24}, \rho_{14} + \rho_{23} \} \right). \end{aligned}$$

Если минимум в этой формуле равен $\rho_{ij} + \rho_{kl}$, то минимальное заполнение представляет собой бинарное дерево, усы которого суть $\{p_i, p_j\}$ и $\{p_k, p_l\}$.

Следствие 1.2.5. *Вес минимального заполнения для выпуклого четырехугольника на евклидовой плоскости равен полусумме длин его диагоналей и двух противоположных сторон, сумма длин которых минимальна.*

Следствие 1.2.6. *Вес минимального заполнения четырех точек, одна из которых лежит внутри выпуклой оболочки трех других, равен полупериметру того из трех невыпуклых четырехугольников, чей периметр средний.*

Для большего числа точек в произвольном метрическом пространстве вес минимального заполнения можно вычислить по более сложной формуле, найденной А. Ю. Ереминым в [42].

1.2.2 Мультиобходы графов и формула Еремина

Пусть S — конечное множество мощности n . Назовем *мультициклическим порядком кратности k на множестве S* отображение $\pi : \mathbb{Z}_{nk} \rightarrow S$, такое, что

- 1) для любого $j \in \mathbb{Z}_{nk}$ выполняется: $\pi(j) \neq \pi(j + 1)$;
- 2) для любого элемента $s \in S$ его прообраз при отображении π состоит ровно из k элементов.

Пусть $G = (V, E)$ — бинарное дерево с границей M , состоящей из n вершин. Пусть $e \in E$ — любое ребро дерева G . После его удаления дерево G распадется на две связные компоненты, обозначим их G_1 и G_2 . Положим $M_i = M \cap G_i$. Обозначим через $\mathcal{U}_G(e) = \{M_1, M_2\}$ полученное разбиение M .

Мультициклический порядок на M называется *мультиобходом G* , если существует такое число l , что для каждого $e \in E$ и $M_i \in \mathcal{U}_G(e)$ существует ровно l элементов $p \in \mathbb{Z}_{nk}$, для которых $\pi(p) \in M_i$, но $\pi(p + 1) \notin M_i$. Такое число l назовем *кратностью мультиобхода*, мультиобходы кратности l также будем называть *l -обходами*. Множество всех мультиобходов G обозначим через $\mathcal{P}(G)$.

В статье [42] доказано, что если мультициклический порядок является мультиобходом, то его кратность как мультиобхода равна его кратности как мультициклического порядка (в сделанных выше обозначениях $k = l$).

Если M — метрическое пространство, π — произвольный мультициклический порядок кратности k на нем, то *мультипериметром пространства M по*

отношению к порядку π называется величина

$$P(\mathcal{M}, \pi) = \frac{1}{2k} \sum_{j=0}^{nk-1} \rho(\pi(j), \pi(j+1)).$$

Чтобы ввести понятие *неприводимого* мультиобхода, будем рассматривать векторное пространство $U = \mathbb{R}^{C_n^2} = \left\{ \sum_{i,j} \alpha_{ij} u_{ij} \mid \alpha_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$ с базисом u_{ij} (здесь и далее двойной индекс ij имеет значение $\{i, j\}$, т.е. $u_{ij} = u_{ji}$ и суммирование ведется по всем двухэлементным подмножествам множества M).

Для любого мультициклического порядка π кратности k на множестве M определим $\pi' \in U$:

$$\pi' = \sum_{l=0}^{nk-1} u_{\pi(l)\pi(l+1)}.$$

Два мультициклических порядка π и σ назовем *эквивалентными* ($\pi \sim \sigma$), если $\pi' = \sigma'$.

Суммой мультициклических порядков π_1 и π_2 кратности k и l соответственно называется любой мультициклический порядок π , такой, что $\pi' = \pi'_1 + \pi'_2$. Сумма мультициклических порядков существует и единственна с точностью до эквивалентности ([42]).

Произведением мультициклического порядка на натуральное число m называется любой мультициклический порядок σ , такой, что $\sigma \sim \pi + \dots + \pi$ (в сумме m слагаемых). Аналогично сумме произведение существует и единственно с точностью до эквивалентности.

Назовем мультиобход π бинарного дерева G *неприводимым*, если ни при каком натуральном m мультиобход $m\pi$ не раскладывается в сумму мультиобходов дерева G нетривиальным образом, т.е. из $m\pi \sim \pi_1 + \pi_2$ следует $\pi_1 \sim k\pi, \pi_2 \sim (m-k)\pi$ для некоторого натурального $k \leq m$. Множество всех неприводимых мультиобходов дерева G обозначим через $\mathcal{P}'(G)$.

В статье [42] показано, что у фиксированного бинарного дерева с n граничными вершинами есть не более $C_{C_n^2}^{2n-3}$ неприводимых мультиобходов, а также, что вес минимального параметрического заполнения равен максимальному мультипериметру его границы среди всех мультиобходов соответствующего бинарного дерева. Таким образом, верна следующая формула веса минимального запол-

нения конечного метрического пространства:

$$\text{mf}(\mathcal{M}) = \min_{G \in \text{Bin}(M)} \max_{\pi \in \mathcal{P}'(G)} P(M, \pi),$$

где G — бинарное дерево.

1.3 Геометрия минимальных сетей Штейнера в евклидовом пространстве

1.3.1 Геометрическая реализация сетей

В любом геодезическом пространстве (то есть таком, в котором любая пара точек соединяется кривой, длина которой равна расстоянию между ними, — геодезической) существует геометрическая реализация сетей. Геометрическая реализация вершины — ее образ при отображении ϕ из определения сети. Геометрическая реализация ребра — это геодезическая, соединяющая образы концов этого ребра. Объединение геометрических реализаций всех вершин и ребер называется *геометрической реализацией сети*.

Геометрическая реализация сети дает подмножество пространства, быть может с повторяющимися элементами, если вершины сети попадают в одну точку метрического пространства. Здесь удобно перейти к псевдометрическому пространству, считая, что разные элементы занимают разные точки пространства, даже если расстояние между ними равно нулю. Однако если рассматривать геометрическую реализацию сети как подмножество метрического пространства без повторяющихся элементов, то получится объединение различных вершин и геодезических, их соединяющих. Такую конструкцию в метрическом пространстве мы будем называть *следом сети*.

Определение 13. След минимальной сети Штейнера называется *минимальным деревом Штейнера*.

В метрическом пространстве геометрическая реализация сети — это ее след, каждая вершина которого может иметь несколько копий, при этом все копии соединены графом из ребер нулевого веса (так как мы рассматриваем деревья, то будем считать, что они соединены деревом).

Топология сетей тесно связана с геометрией их следов. Если граница — различные точки в геодезическом метрическом пространстве, то удобно говорить о поиске минимального дерева Штейнера, ее соединяющего, так как в этом случае минимальному дереву Штейнера однозначно соответствует минимальная сеть Штейнера.

Так как в данной диссертации мы будем в основном работать с евклидовым пространством, в следующем разделе будут рассмотрены основные геометрические свойства минимальных деревьев Штейнера в этом пространстве. В силу единственности геодезической, соединяющей две точки в евклидовом пространстве (это просто отрезок), след любой сети в нем единственен.

1.3.2 Деревья Штейнера в евклидовом пространстве

В евклидовом пространстве невырожденные ребра образа сети являются отрезками. В силу того, что евклидово пространство полно и является геодезическим, для любого конечного подмножества евклидова пространства существует минимальное дерево Штейнера, которое его соединяет.

Следующие два утверждения описывают деревья Штейнера (они же минимальные деревья Штейнера) для треугольников на евклидовой плоскости. Эти результаты являются ответом на задачу Ферма о кратчайшем соединении трех точек и были получены в XVII веке.

Утверждение 1.3.1. *Для треугольников, у которых все углы меньше 120° , (минимальное) дерево Штейнера состоит из трех ребер, сходящихся в единственной внутренней точке, в которой все ребра сходятся под углом 120° . Для треугольников с углом, не меньшим 120° , (минимальное) дерево Штейнера состоит из сторон этого треугольника, угол между которыми не меньше 120° .*

Утверждение 1.3.2. *Пусть в \mathbb{R}^2 для $\triangle ABC$ с углами, меньшими 120° , построено (минимальное) дерево Штейнера с внутренней точкой O , а на сторонах треугольника вне его построены правильные треугольники ABC' , BCA' , CAB' . Тогда*

1. окружности, описанные около треугольников ABC' , BCA' , CAB' пересекаются в точке O ,
2. отрезки AA' , BB' , CC' пересекаются в точке O , их длины равны, и длина минимального дерева Штейнера для треугольника ABC равна длине каждого из них.

Определение 14. Отрезки AA' , BB' , CC' называются *линиями Симпсона* (см. [43]).

Из утверждения 1.3.2 очевидно, как построить минимальное дерево Штейнера для любого треугольника на плоскости. Обобщением этого способа построения является алгоритм Мелзака [8]. В следующем разделе мы кратко опишем этот алгоритм, так как на него опираются многие основные результаты диссертации.

Если имеется пара пересекающихся ребер в минимальном дереве Штейнера, мы можем добавить точку пересечения как дополнительную вершину и заменить пару пересекающихся ребер на четыре ребра, сходящиеся в этой внутренней вершине, отчего длина дерева не изменится. Поэтому далее будем рассматривать только деревья без пересекающихся ребер.

Из соображений минимальности длины минимального дерева Штейнера следует следующий факт (см. [35]).

Утверждение 1.3.3. *Углы между ребрами, инцидентными одной вершине, в минимальном дереве Штейнера не меньше 120° .*

Доказательство. Если в минимальном дереве Штейнера существует угол между смежными ребрами, меньший 120° , то концы этих ребер — три точки, и длина минимального дерева Штейнера для них меньше, чем сумма длин рассматриваемых ребер по утверждению 1.3.1. Поэтому длина исходного соединяющего дерева не является минимально возможной. Из этого противоречия и следует утверждение. \square

Из этого утверждения сразу же вытекает, что степень каждой вершины в минимальном дереве Штейнера не больше 3 и во всех вершинах степени 3 ребра сходятся под углами ровно 120° . Так как внутренних вершин степеней 1 и 2

в оптимальных соединяющих графах нет, то все внутренние вершины в минимальном дереве Штейнера имеют степень 3.

Следуя Гилберту и Поллаку [26], будем называть любое дерево в евклидовом пространстве с углами между ребрами не меньше 120° (а также степенями внутренних вершин, равными 3, и граничных — 1, 2 или 3) *деревом Штейнера*. Минимальное дерево Штейнера является деревом наименьшей длины среди всех деревьев Штейнера, соединяющих данное конечное множество точек в евклидовом пространстве.

Утверждение 1.3.4 ([26]). *В евклидовом пространстве для каждого бинарного типа на данной границе существует не более одного дерева Штейнера, являющегося следом сети этого типа.*

Утверждение 1.3.5 ([9]). *Дерево Штейнера в \mathbb{R}^2 лежит внутри и на границе выпуклой оболочки своей границы.*

Следствие 1.3.6. *В евклидовом пространстве для фиксированной границы из n точек существует одновременно не больше минимальных деревьев Штейнера, чем бинарных деревьев для границ с n точками.*

Утверждение 1.3.7 ([44]). *Бинарных деревьев для границ с n точками*

$$\frac{(2n - 4)!}{2^{n-2}(n - 2)!}$$

штук.

Итак, мы имеем оценку на число минимальных деревьев Штейнера в евклидовом пространстве.

Следствие 1.3.8. *Для границы, состоящей из n точек в евклидовом пространстве, может быть одновременно не более*

$$\frac{(2n - 4)!}{2^{n-2}(n - 2)!}$$

минимальных деревьев Штейнера.

В частности, эта оценка дает ограничение на количество типов сетей Штейнера для четырех граничных точек: их не более трех.

1.3.3 Алгоритм Мелзака

Заметим, что если дерево Штейнера содержит граничную вершину степени 2, то, разбив его на две части по этой вершине, мы получим два дерева Штейнера. Если разбить дерево Штейнера на три части по граничной вершине степени 3, то эти части также будут деревьями Штейнера. При этом, если мы разбивали минимальное дерево Штейнера, то и части будут минимальными деревьями Штейнера.

Таким образом, любое (минимальное) дерево Штейнера делится на части, которые являются бинарными деревьями Штейнера и называются *бинарными компонентами*. Очевидно, топология сети однозначно задает набор бинарных компонент. Процесс построения бинарных компонент описан в *алгоритме Мелзака* ([8]).

Его идея следующая. Пусть $\{A, B\}$ — концы усов $\{e_1, e_2\}$ бинарной компоненты, O — их общая вершина, а e — еще одно ребро, инцидентное O . Построим правильный треугольник со стороной AB в полуплоскости, не содержащей e . Его новую вершину обозначим через C . Из утверждения 1.3.2 следует, что прямая, содержащая ребро e , проходит через C и длина OC равна сумме длин e_1 и e_2 . Значит, если заменить точки A и B на точку C и построить бинарную компоненту для нового множества точек (все граничные вершины, кроме A и B , остаются, а пара вершин A и B заменяется на C), то ее длина будет такой же, как и для исходного граничного множества, и ребра e_1 , e_2 и e однозначно восстанавливаются по положению прямой, проходящей по e , и положению A и B . Замена усов $\{A, B\}$ на C называется *шагом прямого хода алгоритма Мелзака*, а построение ребер e , e_1 и e_2 — *шагом обратного хода алгоритма Мелзака*. За конечное число шагов прямого хода мы придем к двухэлементному множеству, соединяемому отрезком, а затем проделаем все шаги обратного хода, и искомое бинарное дерево будет построено.

Заметим, что даже при фиксированном выборе топологии дерева Штейнера на каждом шаге мы имеем возможность построить правильный треугольник двумя способами, и поэтому прямых ходов алгоритма будет 2^{n-2} . Но лишь один из них может дать дерево Штейнера, в остальных случаях возникнут колли-

зии из-за требования на углы. Если же коллизии возникают во всех вариантах прямого хода, то дерева Штейнера такой бинарной топологии не существует.

Таким образом, чтобы построить минимальное дерево Штейнера для данного множества граничных точек, надо выделить границы бинарных компонент (если мы задали топологию, эта задача решена), построить бинарное дерево Штейнера для каждой из них и удостовериться, что ребра из различных компонент сходятся под углами не меньше 120° . Если же какой-то из этих углов меньше 120° , то выбор бинарных компонент необходимо пересмотреть.

Далее мы подробнее опишем случай четырехугольника на плоскости. Построение бинарного дерева Штейнера для четырехугольника — частный случай только что изложенного алгоритма Мелзака.

Утверждение 1.3.9. *Для четырехугольника $ABCD$ существует дерево Штейнера с двумя внутренними точками O_1 и O_2 и усами $\{AO_1, BO_1\}$ и $\{CO_2, DO_2\}$ тогда и только тогда, когда оно может быть построено следующим способом.*

На стороне AB строится правильный треугольник ABO'_1 . Далее строится дерево Штейнера для треугольника O'_1CD . Точка Штейнера треугольника O'_1CD является также точкой Штейнера четырехугольника $ABCD$, обозначим ее через O_2 (если она не может быть построена, то не может быть построено и искомое дерево Штейнера). Затем на отрезке O'_1O_2 внутри выпуклой оболочки $ABCD$ строится точка O_1 , из которой отрезок AB виден под углом 120° (если она не может быть построена, то также не может быть построено искомое дерево Штейнера).

При этом длина построенного дерева Штейнера равна длине минимального дерева Штейнера для треугольника O'_1CD .

Следующий результат принадлежит Поллаку.

Утверждение 1.3.10 ([29]). *Если четырехточечное подмножество M евклидовой плоскости соединяется минимальным деревом Штейнера с двумя различными внутренними точками, то M — вершины выпуклого четырехугольника (и никакие три из них не лежат на одной прямой).*

1.3.4 Планарные структуры

Заметим, что топология сети на плоскости в случае больше двух граничных точек не позволяет понять взаимное расположение этих точек. В случае трех точек мы не знаем ориентацию граничного треугольника. В случае четырех — вариантов еще больше. Например, оба квадрата $ABCD$ и $ABDC$ на плоскости можно соединить сетью Штейнера топологии $AB - CD$, хотя в первом случае точка D лежит внутри $\angle ABC$, а во втором — внутри $\angle BAC$. В первом случае граничные точки соединяются также сетью Штейнера топологии $AD - BC$, а во втором — $AC - BD$, и третий бинарный тип в каждой ситуации не реализуется. Поэтому при работе с плоскостью нам будет удобно ввести такое понятие, которое учитывает и топологию сети, и взаимное расположение граничных точек. Для этого воспользуемся *планарным обходом дерева*.

Определение 15. Мультиобход бинарного дерева степени 1 называется *обходом* этого дерева.

Определение 16. Обход бинарного дерева Штейнера с граничными вершинами на плоскости называется *планарным*, если многоугольник, образованный соединением отрезками граничных вершин этого дерева в порядке обхода, является простым (без самопересечений). Такой многоугольник будем называть *многоугольником обхода*.

Так как многоугольник планарного обхода строится единственным образом, то планарных обходов два: этот многоугольник можно обойти всего двумя способами.

Определение 17. Планарный обход π называется *положительным*, если внутренность многоугольника планарного обхода остается слева при перечислении граничных вершин в порядке π .

Определение 18. *Планарной структурой бинарного дерева на плоскости* мы будем называть пару (\mathcal{T}, π) , где \mathcal{T} — тип этого дерева, а π — его положительный планарный обход.

Но помимо планарной структуры каждой бинарной компоненты взаимное расположение граничных точек влияет на то, как расположены сами компоненты друг относительно друга.

Определение 19. *Вспомогательным тройником граничной вершины A_i степени 3 в дереве Штейнера будем называть три отрезка, стыкующихся в точке A_i .*

Определение 20. *Положительным планарным обходом граничной вершины A_i степени 3 будем называть положительный планарный обход вспомогательного тройника A_i .*

Определение 21. *Планарной структурой сети Штейнера на плоскости мы будем называть тройку (τ, Π, Λ) , где τ — топология сети (определяющая набор бинарных компонент образа сети, а также совпадающие граничные вершины), $\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_m)$ — набор планарных структур всех бинарных компонент образа сети, а $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ — набор положительных планарных обходов всех k граничных вершин степени 3.*

В диссертации будут подробно рассматриваться сети Штейнера с четырехугольной границей на плоскости. Поэтому здесь мы введем обозначения их планарных структур на основе обозначения их топологий. Обозначение планарной структуры отличается от обозначения топологии только перестановкой букв: буквы ставятся не в алфавитном порядке, а в том, в котором они идут в порядке положительного планарного обхода бинарной компоненты, если в ней более двух точек; если в дереве Штейнера есть граничная вершина степени три, то остальные граничные вершины перечисляются так, что треугольник из этих вершин обходится положительно. Для единообразия при переходе от обозначения топологии к обозначению планарной структуры будем разрешать минимальное количество изменений, то есть порядок остается алфавитным там, где это возможно. Например, планарная структура $AB - DC$ означает, что дерево Штейнера бинарно и четырехугольник $ABDC$ простой и обходится против часовой стрелки, а в дереве планарной структуры $BaDC$ три ребра AC , AB и AD , и $\triangle DCB$ положительно ориентирован.

1.4 Отношения типа Штейнера

Дадим строгие определения отношений типа Штейнера, упоминавшихся во введении.

Определение 22. Пусть M — конечное подмножество метрического пространства X . Существуют следующие *отношения типа Штейнера*:

отношение Штейнера множества M :

$$\text{sr}(M) = \frac{\text{smn}(M)}{\text{mst}(M)};$$

отношение Штейнера-Громова множества M :

$$\text{sgr}(M) = \frac{\text{mf}(M)}{\text{mst}(M)};$$

суботношение Штейнера множества M :

$$\text{ssr}(M) = \frac{\text{mf}(M)}{\text{smn}(M)}.$$

Определение 23. Определим отношения типа Штейнера степени n метрического пространства X :

отношение Штейнера степени n :

$$\text{sr}_n(X) = \inf_M \{\text{sr}(M) \mid 1 < \#M \leq n\};$$

отношение Штейнера-Громова степени n :

$$\text{sgr}_n(X) = \inf_M \{\text{sgr}(M) \mid 1 < \#M \leq n\};$$

суботношение Штейнера степени n :

$$\text{ssr}_n(X) = \inf_M \{\text{ssr}(M) \mid 1 < \#M \leq n\},$$

где через $\#M$ обозначено количество элементов в множестве M .

Определение 24. Инфимум отношения типа Штейнера степени n метрического пространства X , взятый по всем $n > 1$ (то есть инфимум отношения, взятый по всем конечным подмножествам X , в которых есть хотя бы два элемента), называется соответствующим отношением пространства X :

отношение Штейнера пространства X :

$$\text{sr}(X) = \inf_{n>1} \text{sr}_n(X);$$

отношение Штейнера-Громова пространства X :

$$\text{sgr}(X) = \inf_{n>1} \text{sgr}_n(X);$$

суботношение Штейнера пространства X :

$$\text{ssr}(X) = \inf_{n>1} \text{ssr}_n(X).$$

Каждое отношение типа Штейнера не больше 1 для любого метрического пространства, так как сети являются заполнениями, а остовные деревья — сетями. Эта оценка достигается для любого отношения типа Штейнера, например, для двухточечных множеств. Перейдем теперь к известным результатам о суботношении Штейнера евклидовой плоскости, так как именно эта тема будет развита в данной диссертации.

Утверждение 1.4.1 ([22]). *Суботношение Штейнера степени 3 евклидовой плоскости равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$, причем оно достигается тогда и только тогда, когда граничное множество представляет собой вершины правильного треугольника.*

Утверждение 1.4.2 ([37]). *Суботношение Штейнера степени 5 евклидовой плоскости меньше $\sqrt{3}/2$ и достигается на некоторой невыпуклой границе.*

Глава 2

Дифференцируемость веса оптимального заполнения

2.1 Основные результаты главы

Пусть X — связное полное риманово многообразие, $M = \{p_1, \dots, p_n\} \subset X$, $n > 1$, и $M_t = \{p_1(t), \dots, p_n(t)\}$, $t \in [0, 1]$, $p_i(0) = p_i$, — некоторая гладкая деформация множества M , то есть набор гладких кривых $p_i(t)$.

Ивановым и Тужилиным в [45] была доказана следующая теорема о дифференцируемости по направлениям длин минимальной параметрической сети, минимальной сети Штейнера и минимального остовного дерева, а также отношения Штейнера.

Утверждение 2.1.1. *Функции $\text{mpn}(M_t, T)$, $\text{smn}(M_t)$, $\text{mst}(M_t)$ и $\text{sr}(M_t)$ дифференцируемы при $t = 0+$, и*

$$\left. \frac{d \text{sr}(M_t)}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{1}{\text{mst}(M)} (\text{smn}'(M_0) - \text{sr}(M) \text{mst}'(M_0)).$$

В настоящей диссертации получено аналогичное утверждение для минимального заполнения и двух других отношений Штейнера.

Теорема 2.1.2. *Функции $\text{mpf}(M_t, T)$, $\text{mf}(M_t)$, $\text{ssr}(M_t)$ и $\text{sgr}(M_t)$ дифференцируемы при $t = 0+$, и*

$$\left. \frac{d \text{ssr}(M_t)}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{1}{\text{smn}(M)} (\text{mf}'(M_0) - \text{ssr}(M) \text{smn}'(M_0)).$$
$$\left. \frac{d \text{sgr}(M_t)}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{1}{\text{mst}(M)} (\text{mf}'(M_0) - \text{sgr}(M) \text{mst}'(M_0)).$$

Следствие 2.1.3. *Функции $\text{mpn}(M_t, T)$, $\text{smn}(M_t)$, $\text{mpf}(M_t, T)$, $\text{mf}(M_t)$ и $\text{ssr}(M_t)$ являются непрерывными по отношению к гладким деформациям граничного множества M .*

2.2 Доказательство теоремы

Утверждение. *Функции $\text{mpf}(M_t, T)$ и $\text{mf}(M_t)$ дифференцируемы по t при $t = 0+$.*

При доказательстве этого утверждения воспользуемся формулой Еремина веса минимального заполнения конечного метрического пространства M . Подставляя в нее выражение для мультипериметра, находим:

$$\begin{aligned} \text{mf}(M) &= \min_{G \in \mathcal{G}(M)} \text{mpf}(M_t, T) = \min_{G \in \mathcal{G}(M)} \max_{\pi \in \mathcal{P}'(G)} p(M, \pi) = \\ &= \min_{G \in \mathcal{G}(M)} \max_{\pi \in \mathcal{P}'(G)} \frac{1}{2k} \sum_{i=0}^{nk-1} \rho(\pi(j), \pi(j+1)). \end{aligned}$$

Далее нам понадобится следующая лемма, доказанная в [45].

Лемма 1. *Пусть γ_1 и γ_2 — две гладкие кривые на W , определенные на отрезке $[0, 1]$. Тогда функция $f(t) = \rho(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ дифференцируема при $t = 0+$.*

Но в формуле, выражающей вес минимального заполнения через мультипериметр, как раз стоит сумма расстояний между кривыми при $t = 0$. Так как композиция дифференцируемых функций дифференцируема, то для доказательства исходного утверждения достаточно применить следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть $\{f_i(t)\}, t \in [0, 1]$, — конечный набор функций, дифференцируемых при $t = 0+$ и таких, что значения $f_i(0)$ одинаковы при всех i . Тогда функции $f(t) = \min_i f_i(t)$ и $F(t) = \max_i f_i(t)$ также дифференцируемы при $t = 0+$. При этом $f'(0) = \min_i f'_i(0)$ и $F'(0) = \max_i f'_i(0)$.*

Доказательство. Допустим, что $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\min_i f_i(t) - f(0)}{t}$ не существует или, если существует, то не равен $\min_i f'_i(0)$. Это означает, что существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ существует $t_0 \in (0, \delta)$, такое, что

$$\left| \frac{\min_i f_i(t_0) - f(0)}{t} - \min_i f'_i(0) \right| \geq \varepsilon.$$

Раскрывая модуль, получаем совокупность неравенств:

$$\begin{cases} \frac{\min_i f_i(t_0) - f(0)}{t_0} \geq \min_i f'_i(0) + \varepsilon, \\ \frac{\min_i f_i(t_0) - f(0)}{t_0} \leq \min_i f'_i(0) - \varepsilon. \end{cases}$$

Теперь избавимся от минимумов в левых частях неравенств:

$$\begin{cases} \frac{f_j(t_0) - f(0)}{t_0} \geq \min_i f'_i(0) + \varepsilon & \text{при всех } j \\ \frac{f_k(t_0) - f(0)}{t_0} \leq \min_i f'_i(0) - \varepsilon & \text{при некотором } k = k(t_0). \end{cases}$$

Но так как функции $f_i(t)$ при всех i дифференцируемы в нуле справа, то для таких j , что $f'_j(0) = \min_i f'_i(0)$, выполнено следующее: для любого $\varepsilon' > 0$ существует число $\delta' > 0$ такое, что при всех t из интервала $(0, \delta')$ верно неравенство $\frac{f_j(t) - f(0)}{t} < \min_i f'_i(0) + \varepsilon'$. Значит, если взять $\varepsilon' = \varepsilon$ и $\delta = \delta'$, то при $t = t_0$ должно быть выполнено $\frac{f_j(t_0) - f(0)}{t_0} < \min_i f'_i(0) + \varepsilon$, что противоречит первому неравенству из совокупности.

Также из дифференцируемости функций $f_i(t)$ следует, что для каждого i и любого $\varepsilon' > 0$ существует $\delta' > 0$, такое, что для любого $t \in (0, \delta')$ выполнено неравенство $\frac{f_i(t) - f(0)}{t} > f'_i(0) - \varepsilon'$. Возьмем $\varepsilon' = \varepsilon$, $\delta = \delta'$ и $t = t_0$. Тогда при любом i верно неравенство $\frac{f_i(t_0) - f(0)}{t_0} > f'_i(0) - \varepsilon \geq \min_k f'_k(0) - \varepsilon$, что противоречит второму утверждению из совокупности.

Значит, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\min_i f_i(t) - f(0)}{t}$ существует и равен $\min_i f'_i(0)$, т.е. функция $f(t)$ дифференцируема справа в нуле и $f'(0) = \min_i f'_i(0)$.

Утверждения, касающиеся функции $F(t)$, доказываются аналогично. \square

Таким образом, дифференцируемость веса минимального параметрического заполнения и минимального заполнения как функций конечных подмножеств связного риманова многообразия доказана. А так как длины минимального остовного дерева и минимальной сети Штейнера также дифференцируемы как функции таких подмножеств, то и отношения типа Штейнера дифференцируемы. Формулы для их производных получаются применением формулы производной отношения двух дифференцируемых функций.

Глава 3

Бифуркации оптимальных взвешенных графов с плоской границей

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим произвольную границу из n точек на плоскости. Все точки, кроме одной, закрепим. Различные фиксированные точки не могут занимать одно и то же положение (иначе будем считать, что граница состоит из меньшего числа точек). Последней точке позволим занимать произвольное положение на плоскости, ее позицию будем называть *параметром бифуркационной диаграммы*. Мы будем рассматривать бифуркации (изменения, скачки) некоторых свойств разных оптимальных соединяющих графов. Дадим общее определение.

Определение 25. *Бифуркационной диаграммой свойства σ оптимальных заполнений в классе \mathcal{K} мы будем называть разбиение плоскости как множества значений параметра такое, что на каждом элементе разбиения своя реализация свойства σ для оптимальных заполнений в смысле \mathcal{K} . Элемент разбиения будем называть *стратом бифуркационной диаграммы*.*

Основная наша цель — изучить бинарные типы минимальных заполнений и минимальных сетей Штейнера. При изучении типов кратчайших сетей возникла необходимость рассмотреть также, какие планарные структуры сетей Штейнера реализуются при разном значении параметра в случае, когда бинарный тип фиксирован. То есть в случае минимальных сетей Штейнера в качестве свойств мы рассматриваем тип и планарную структуру сети. В случае мини-

мальных заполнений — тип заполнения, а также формулу веса, так как именно она имеет наибольшее практическое значение.

В силу непрерывности веса минимального параметрического заполнения в классах сетей и всех заполнений (следствие 2.1.3), страт, на котором реализуется один тип оптимального заполнения, представляет собой открытое двумерное множество. Каждую компоненту связности будем считать отдельным стратом. Границы таких стратов — одномерные множества без границы, на которых реализуются два типа. Это одномерные страты. В свою очередь, они могут пересекаться в точках, в которых реализуются все типы с соответствующих одномерных стратов. Эти точки — нульмерные страты.

Однако, в общем случае ничто не мешает тому, чтобы на двумерном страте реализовывалось несколько типов, а на одномерном — больше двух. Но непрерывность веса минимального параметрического заполнения в рассматриваемых классах все равно гарантирует, что двумерные страты на бифуркационной диаграмме типов — открытые связные множества, а одномерные страты не имеют границы.

Для бифуркационных диаграмм планарных структур сетей Штейнера фиксированного бинарного типа нам также будет удобно рассматривать в качестве двумерных стратов области, одномерных — границы, разделяющие двумерные страты, и нульмерных — точки, являющиеся границами одномерных стратов.

Определение 26. *Типом бифуркационной диаграммы* называется набор стратов на ней вместе с их взаимным расположением и реализацией свойства на каждом страте.

Итак, посмотрим, как могут выглядеть бифуркационные диаграммы для разных оптимальных заполнений и их свойств. В случае менее четырех граничных точек имеется только один бинарный тип, поэтому в случаях с дополнительными вершинами мы подробнее остановимся на бифуркациях для четырехточечных границ.

3.2 Бифуркации минимальных остовных деревьев на плоскости

В случае с минимальными остовными деревьями речь не идет о бинарных типах. Бифуркации изучаются с точки зрения изменения набора ребер, соединяющих граничные вершины. В момент, когда набор ребер меняется, происходит бифуркация. Страт — множество значений параметра бифуркационной диаграммы с одинаковым набором минимальных остовных деревьев.

Пусть $M = \{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathbb{X}$, A_n — параметр бифуркационной диаграммы.

Напомним, что такое диаграмма Вороного для множества точек $M \setminus \{A_n\}$ ([47]).

Определение 27. *Ячейкой Вороного $V_i, i = 1, \dots, n - 1$ называется множество положений точки A_n такое, что A_n расположена к A_i ближе, чем к $A_j, j \in 1, \dots, n - 1, j \neq i$.*

Определение 28. *Диаграммой Вороного называется разбиение пространства \mathbb{X} на ячейки Вороного.*

Для двух фиксированных точек на плоскости ячейки Вороного разделяются серединным перпендикуляром к отрезку, их соединяющему, поэтому для любого числа точек на плоскости каждая ячейка Вороного V_i образуется пересечением нескольких полуплоскостей и представляет собой выпуклое замкнутое (если A_i лежит внутри выпуклой оболочки M) или незамкнутое (если A_i лежит на границе выпуклой оболочки M) множество. В частности, если фиксировано три точки на одной прямой, то для построения диаграммы Вороного необходимо построить серединные перпендикуляры к тем двум отрезкам из трех, длины которых меньше, а если три закрепленные точки не лежат на одной прямой, то серединные перпендикуляры ко всем трем отрезкам пересекутся в центре окружности, проходящей через все три точки.

Теперь вспомним алгоритм Прима построения минимального остовного дерева ([2]). Сначала берется произвольная вершина, она соединяется ребром с ближайшей к ней точкой. Затем рассматриваются расстояния между уже соединенными вершинами и остальными. Выбирается минимальное из них и строится

соответствующее ребро. И так далее, пока все вершины не попадут в остовное дерево. Будем считать, что последней мы присоединяем вершину A_n . На последнем шаге точка A_n соединяется ребром с той из $A_i, i < n$, расстояние до которой наименьшее.

Получается, что диаграмма Вороного для множества точек $M \setminus \{A_n\}$ помогает строить минимальное остовное дерево. Если минимальное остовное дерево для $\{A_1, \dots, A_{n-1}\}$ уже построено, то строение минимального остовного дерева для M зависит только от того, в какую ячейку Вороного попадет A_n . Если A_n лежит на границе двух ячеек Вороного — то реализуется две структуры минимального остовного дерева, если в пересечении k границ — то реализуется k структур.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.2.1. *Диаграмма Вороного является бифуркационной диаграммой для структуры минимального остовного дерева.*

3.3 Бифуркации минимальных заполнений на плоскости

Пусть $M = \{A_1, \dots, A_n\}$ — граничные вершины, A_n — параметр бифуркационной диаграммы, остальные точки закреплены на плоскости. Чтобы описать бифуркации минимальных заполнений, найдем, при каких значениях параметра будут равны веса минимальных заполнений разных типов.

Пусть (x, y) — координаты точки A_n . Воспользуемся формулой Еремина. Рассмотрим множество пар (x, y) , при которых равны веса двух разных минимальных параметрических заполнений. Пусть вес первого минимального заполнения равен мультипериметру P_1 , а вес второго — мультипериметру P_2 множества M (с евклидовой метрикой). Обозначим кратность неприводимого мультиобхода, соответствующего P_1 , через k , а кратность неприводимого мультиобхода, соответствующего P_2 , — через l . Тогда равенство $P_1 = P_2$ запишется так:

$$\rho_{ni_1} + \dots + \rho_{ni_{2k}} + C_1 = \rho_{nj_1} + \dots + \rho_{nj_{2l}} + C_2, \quad (3.3.1)$$

где ρ_{nt} — расстояние от A_n до A_t , $t < n$, а C_1 и C_2 равны суммам некоторых

расстояний между граничными точками, среди которых нет A_n , поэтому они не зависят от (x, y) .

Недавно Иванов и Тужилин показали [48], что кратность неприводимого мультиобхода бинарного дерева с n -точечной границей не превосходит 2^{2n-5} , поэтому в каждой части выпisanного равенства не более 2^{2n-4} слагаемых, зависящих от точки A_n . Каждое из таких слагаемых — евклидово расстояние от A_n до фиксированной точки, поэтому оно имеет вид квадратного корня из многочлена степени 2 от переменных x и y .

Если в одной из частей уравнения стоит $m > 1$ различных квадратных корней, то при возведении ее в квадрат мы получим C_m^2 новых квадратных корней, поэтому при $m > 2$ количество квадратных корней не уменьшится. Значит, при общем количестве их больше 5 мы не сможем перебрасыванием слагаемых из одной части в другую и возведениями в квадрат привести 3.3.1 к полиномиальному виду. Итак, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3.3.1. *Если $k + l > 5$ и после сокращения подобных слагаемых в уравнении 3.3.1 осталось более 5 слагаемых, зависящих от параметра бифуркационной диаграммы (более пяти расстояний, участвующих в обоих мультиобходах, различны), то описываемая уравнением 3.3.1 кривая не является частью алгебраической. Иначе она является частью алгебраической.*

Как показывает теорема 3.3.1, в общем случае страты на бифуркационной диаграмме минимальных заполнений могут принимать очень нетривиальный вид. Однако, как было показано в [48], в случае не более 7 граничных точек кратность мультиобхода не превосходит 2, поэтому одномерные страты, на которых реализуется два типа минимальных заполнений, являются частями алгебраических кривых. При количестве граничных вершин меньше 4 всегда один тип и одна формула минимального заполнения, поэтому бифуркационная диаграмма тривиальна. В следующем пункте мы разберем случай четырех точек, в котором одномерные страты — ветви гипербол.

3.3.1 Бифуркации минимальных заполнений для четырехточечных границ

Будем рассматривать $\{A, B, C, D\}$ — всевозможные конфигурации на плоскости, состоящие из четырех точек.

Фиксируем точки A, B, C . Посмотрим, как будут меняться свойства минимальных заполнений, затягивающих границу $\{A, B, C, D\}$, в зависимости от положения точки D — параметра бифуркационной диаграммы. В качестве свойств минимальных заполнений мы будем рассматривать его тип и формулу веса.

Пусть сначала точки A, B, C не лежат на одной прямой.

Существует три различных четырехугольника (не обязательно простых) с вершинами A, B, C, D . По утверждению 1.2.4, вес минимального заполнения равен полупериметру того из них, чей периметр не больше и не меньше остальных. Найдем положения точки D , в которых таких четырехугольников два (их периметры равны).

Введем следующие обозначения: $BC = a, CA = b, AB = c, AD = x, BD = y, CD = z$.

Сначала найдем геометрическое место точек D таких, что

$$a + b + x + y = a + c + x + z.$$

Переписывая равенство, получаем:

$$b - c = z - y,$$

а это ветвь гиперболы с фокусами B и C , проходящая через точку A (если $b = c$, то она вырождается в прямую). Назовем ее mf_a -кривой.

Точно так же находим положения точки D , в которых равны периметры других пар четырехугольников. Это ветви гипербол с фокусами в двух вершинах треугольника, проходящие через третью вершину, назовем их, соответственно, mf_b - и mf_c -кривыми. Если неважно, какая из трех кривых имеется в виду, будем говорить просто о mf -кривой.

Построенные гиперболы (имеющие по две ветви) называются *гиперболами Soddi* [49]. Точку пересечения ветвей, проходящих через вершины треугольни-

ка, называют *точкой равного обхода* (*equal detour point*, $X(176)$ в [50]), а точку пересечения других ветвей— *изопериметрическим центром* (*isoperimetric center*, $X(175)$ в [50]). Встречается также термин “*точки Coddru*” [51, 50]. В [50] утверждается, что впервые эти точки были рассмотрены Лемуаном в 1890 году.

В 2007 году в [52] было найдено необходимое и достаточное условие того, что для $\triangle ABC$ существует две точки равного обхода: $\operatorname{tg} A/2 + \operatorname{tg} B/2 + \operatorname{tg} C/2 > 2$. Одна из этих точек всегда существует и лежит внутри $\triangle ABC$, а другая, если существует, лежит вне него.

Очевидно, точки равного обхода есть точки равенства трех минимальных параметрических заполнений.

Итак, mf-кривые делят плоскость $\triangle ABC$ на несколько открытых областей. Какой тип реализуется в каждой области?

Рассмотрим область, на границе которой лежит точка C и которую пересекает отрезок BC . В ней выполнены следующие соотношения:

$$x - y > b - a, \quad x - z > c - a, \quad y - z > c - b.$$

Это равносильно таким неравенствам:

$$x + a > y + b, \quad x + a > z + c, \quad y + b > z + c,$$

то есть $x + a > y + b > z + c$. По утверждению 1.2.4, $\operatorname{mf} = \frac{x+a+z+c}{2}$, а усы минимального заполнения — $\{C, D\}$ и $\{A, B\}$.

Аналогично определяются тип и вес минимального заполнения для остальных частей. В итоге имеем бифуркационные диаграммы, представленные на рис. 3.6 и 3.2.

Рассмотрим теперь случай, когда точки A, B, C лежат на одной прямой, но все различны, и, скажем, A лежит между B и C .

Тогда mf_b и mf_c -кривые “схлопываются” в лучи AC и AB . Если D лежит на луче AC и не совпадает с точкой A , то $x+a = y+b > z+c$. Поэтому минимальное заполнение имеет тип $AB - CD$, но для mf подходят две формулы: $\frac{a+x+c+z}{2}$ и $\frac{b+y+c+z}{2}$. На луче AB , аналогично, один тип — $AC - BD$, но две формулы веса минимального заполнения: $\frac{a+x+b+y}{2}$ и $\frac{c+z+b+y}{2}$. Все эти формулы соотносятся с

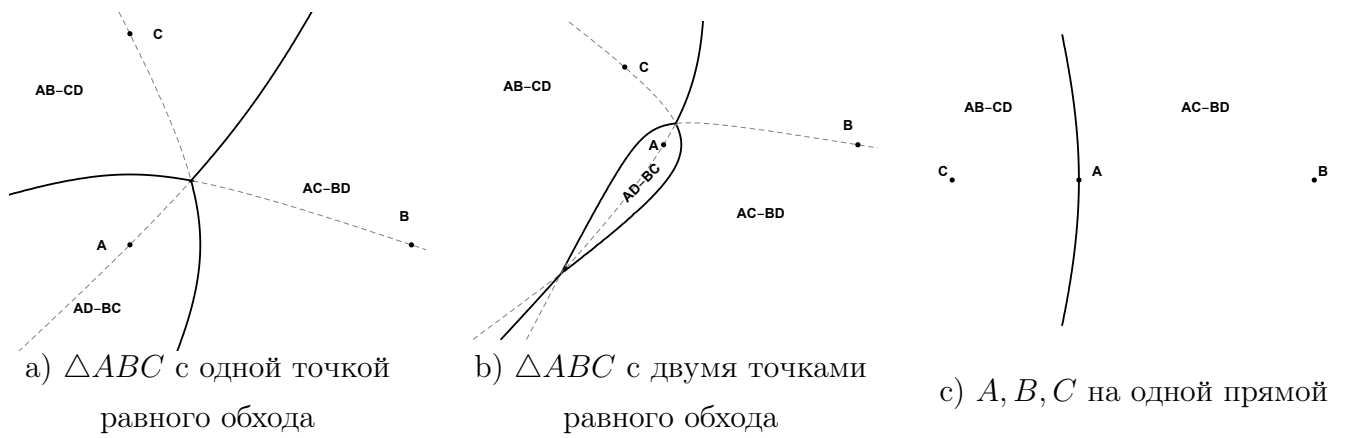


Рис. 3.1: Бифуркационные диаграммы типов минимальных заполнений для четырех граничных точек

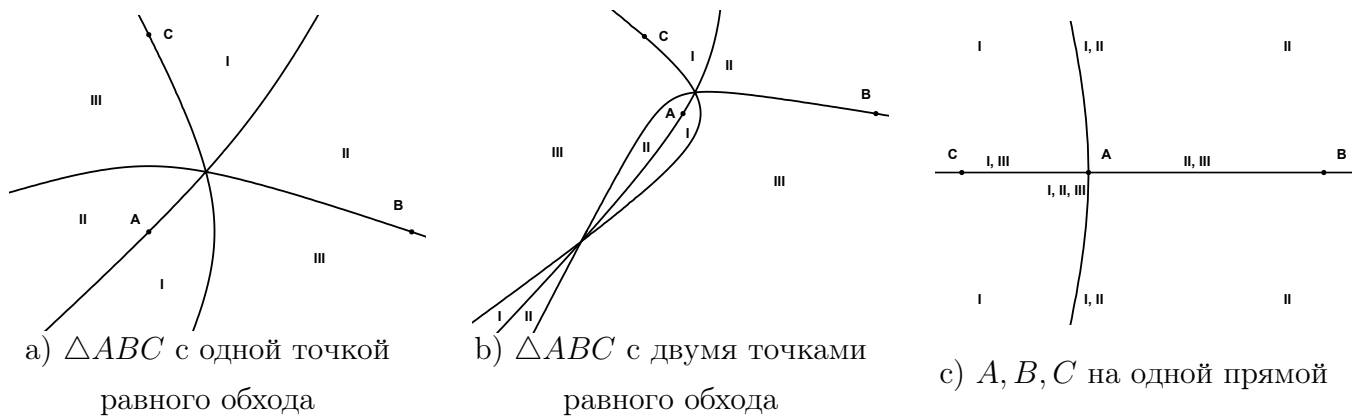


Рис. 3.2: Бифуркационные диаграммы весов минимальных заполнений для четырех граничных точек. Через I обозначена формула $\frac{x+a+z+c}{2}$, через II — $\frac{x+a+y+b}{2}$, через III — $\frac{y+b+z+c}{2}$.

тем, что, очевидно, вес минимального заполнения точек на одной прямой равен наибольшему расстоянию между ними.

Ветвь гиперболы Содди, проходящая через точку A , остается ветвью гиперболы (или прямой, если $AB = AC$), и на ней реализуются типы минимального заполнения $AC - BD$ и $AB - CD$. Однако в точку A теперь попадает точка равного обхода, и если и только если D совпала с A , получают минимальные заполнения трех типов.

Бифуркационные диаграммы для трех точек на одной прямой изображены на рис. 3.6,с) и 3.2,с).

Заметим, что когда подвижная точка D лежит в двумерном страте, минимальное заполнение имеет такой тип, в котором D находится в одних усах с фиксированной граничной вершиной, лежащей в этом страте.

3.4 Бифуркационные диаграммы сетей Штейнера фиксированного бинарного типа

Перейдем теперь к бифуркациям сетей Штейнера. В этой главе мы зафиксируем тип и будем смотреть на возможные топологии.

3.4.1 Одномерные страты

Сначала опишем, когда происходят бифуркации топологии минимальной сети Штейнера фиксированного бинарного типа. Это как раз те ситуации, в которых происходит изменение набора бинарных компонент дерева Штейнера. Пусть граница содержит n точек $\{A_1, \dots, A_n\}$, через A_n обозначена подвижная граничная вершина.

Определение 29. Назовем бинарные компоненты в дереве Штейнера *смежными*, если они содержат одну и ту же вершину.

Определение 30. Назовем *углом между смежными бинарными компонентами* угол между ребрами, инцидентными их общей вершине.

Определение 31. Пусть в результате прямого хода алгоритма Мелзака для некоторой бинарной компоненты получился отрезок, соединяющий одну из граничных точек со вспомогательной точкой. Назовем его *вспомогательным отрезком этой бинарной компоненты*.

Теорема 3.4.1. *Множество одномерных стратов на бифуркационной диаграмме топологий фиксированного бинарного типа содержит только следующие страты:*

- 1) *дуги окружностей, на которых A_n является вершиной степени 2 в дереве Штейнера так, что угол в ней равен 120° ;*
- 2) *лучи или отрезки, на которых A_n занимает такие положения, при которых угол между бинарной компонентой, содержащей A_n , и смежной бинарной компонентой равен 120° ;*
- 3) *страты, на которых или вблизи которых дерево Штейнера данного типа перестает существовать:*

(a) одна из дуг окружностей, из точек которых отрезок A_iA_j виден под углом 120° , где точки $\{A_i, A_j\}$ — усы в данном бинарном типе;

(b) лучи или отрезки такие, что некоторая граничная точка (не A_n) становится вершиной степени 3 с углами в ней, равными 120° ;

(c) лучи или отрезки такие, что при построении в алгоритме Мелзака образуется внутренняя вершина степени больше 3.

Доказательство. 1) Если указанный угол больше или равен 120° , то A_n — все еще вершина степени 2 в дереве Штейнера, а если меньше — то происходит перестройка бинарных компонент, то есть бифуркация.

2) Аналогично предыдущему пункту. Докажем, что это именно части прямых. Указанный угол — угол между вспомогательными отрезками смежных бинарных компонент. Каждая вспомогательная точка в алгоритме Мелзака линейно зависит от граничных точек, так как она получается поворотом одной граничной точки вокруг другой. Значит, между A_n и вспомогательной точкой v , являющейся концом вспомогательного отрезка бинарной компоненты с A_n , есть линейная зависимость. Множество v , когда указанный угол равен 120° , — либо луч, составляющий 120° с соответствующим ребром смежной бинарной компоненты, либо его часть, ограниченная другим одномерным стратом. Поэтому и искомый страт — также луч или отрезок.

3) Мы перечислили все возможные положения точек, при которых происходит изменение набора бинарных компонент, то есть бифуркация. Остались одномерные страты, при переходе через которые дерево Штейнера данного бинарного типа не реализуется.

(a) Если $\angle A_iA_nA_j = 120^\circ$, то дерево Штейнера с усами $\{A_i, A_j\}$ возможно, только если в точке A_n три ребра сходятся под углами 120° , а это возможно не более чем в одном положении на указанной дуге. Дуга выбирается та, которая лежит в той же полуплоскости относительно прямой A_iA_j , что и усы $\{A_i, A_j\}$ в случае существования дерева Штейнера.

(b) Если при некотором положении A_n углы при некоторой другой вершине A_i не все равны по 120° , то дерева Штейнера для M не существует, поэтому множество положений A_n , дающее углы по 120° при A_i — страт на бифурка-

ционной диаграмме. Если есть бинарная компонента, содержащая и A_n , и A_i , то этот страт — множество значений параметра диаграммы, при которых вспомогательный отрезок бинарной компоненты, содержащей A_n и A_i , составляет углы 120° с каждым из двух других отрезков с концом A_i . В силу линейной зависимости A_n и конца вспомогательного отрезка (как в пункте 2), этот страт представляет собой луч или отрезок. Если же A_n и A_i не лежат в одной бинарной компоненте, то углы при вершине A_i не зависят от положения A_n , от параметра диаграммы зависят ситуации, рассмотренные в других пунктах.

(с) Единственная оставшаяся возможная проблема при построении по алгоритму Мелзака — пересечение ребер. Бифуркация наступает, когда некоторая внутренняя вершина имеет степень 4, при вырождении соответствующего внутреннего ребра. Алгоритм Мелзака предполагает, что все построенные углы при внутренних вершинах равны 120° , значит, в момент вырождения внутреннего ребра при такой бифуркации образуется вершина степени 4 с углами между инцидентными ей ребрами $120^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 60^\circ$, то есть ребра лежат на пересекающихся прямых, между которыми 60° . Как и раньше, точка A_n находится в линейной зависимости со вспомогательной точкой в алгоритме Мелзака, лежащей на одной из этих прямых. Поэтому искомым стратом — опять луч или отрезок. \square

Следствие 3.4.2. *На одномерном страте, разделяющем двумерные страты с разными топологиями, реализуется та из этих топологий, где вырожденных ребер больше. В точке пересечения одномерных стратов реализуется топология, в которой вырожденными являются те и только те ребра, которые вырождены хотя бы в одном из этих одномерных стратов. На одномерных стратах, лежащих на границе двумерного страта, на котором нет дерева Штейнера данного бинарного типа, реализации этого типа также нет.*

3.4.2 Страты размерностей 0 и 1 в случае четырех граничных точек

Здесь мы докажем несколько фактов о взаимном расположении прямых и окружностей, части которых являются стратами на бифуркационных диаграммах. То, что это действительно страты, будет доказано далее.

Будем обозначать окружность, описанную около треугольника XYZ , через (XYZ) , а луч с началом в точке X , проходящий через Y , — через (XY) . Некоторую точку, расположенную на (XY) , будем обозначать через X_y (ее точное положение либо не важно, либо отдельно оговаривается в каждом случае). То, что точки Z и W лежат в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через точки X и Y , будем обозначать через $Z \sim W(XY)$, а то, что в разных, — через $Z \approx W(XY)$.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC . Введем обозначения:

- A' — вершина правильного треугольника $A'BC$ такая, что $A \approx A'(BC)$;
- A^0 — вершина правильного треугольника BA^0C такая, что точки $A \sim A^0(BC)$;
- A^b и A^c — вершины правильных треугольников $\triangle AA'A^b$ и $\triangle AA'A^c$, при этом $\triangle ABC$ ориентирован так же, как и $\triangle AA^bA^c$.

Аналогично точкам A', A^0, A^b, A^c строим точки $B', C', B^0, C^0, B^c, B^a, C^a, C^b$.

В статье [38] авторы показали, что для любого треугольника $\triangle ABC$ выполняется следующее.

Утверждение 3.4.3. *Треугольник $\triangle A^bB^cC^b$ — правильный, а четырехугольник AA^bC^bC — параллелограмм.*

Продолжая это утверждение, докажем следующую лемму.

Лемма 3.4.4. *Для любого треугольника $\triangle ABC$ верны следующие утверждения (рис. 3.3).*

1. $(C^bB^0), (C'A), (CC'C^b), (CB^0A)$ пересекаются в одной точке: $C_{b^0}^b$.
2. $(C^bB), (CA), (CC'C^b), (C'BA)$ пересекаются в одной точке: C_b^b .
3. $(C^bA'), (C'B), (CC'C^b), (CBA')$ пересекаются в одной точке: C_a^b .
4. C^bB^0AB — параллелограмм.
5. $C^bA'AC'$ — параллелограмм.

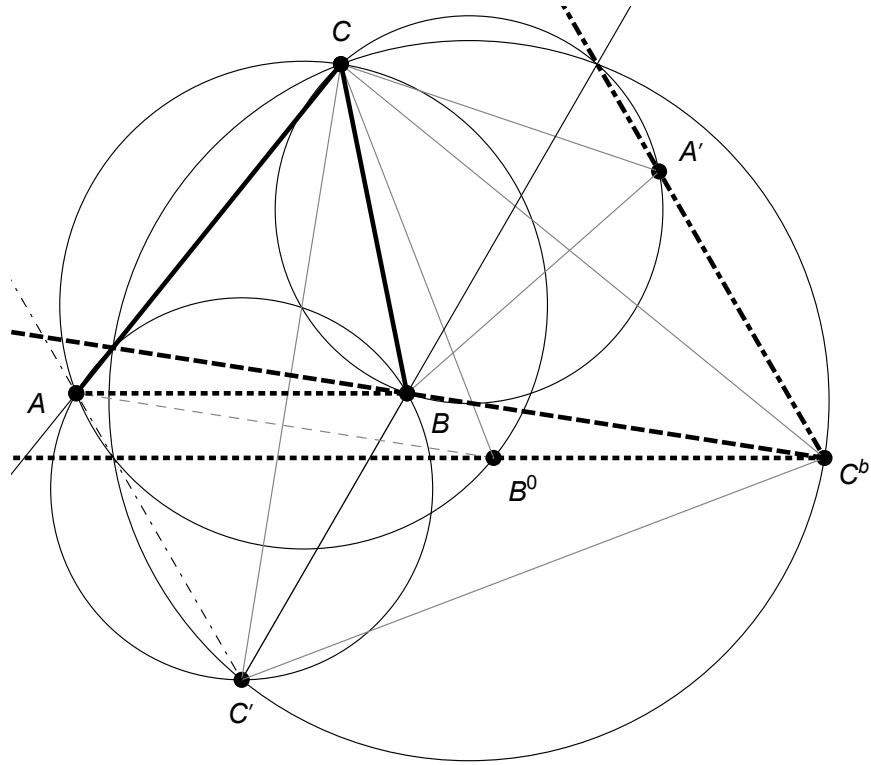


Рис. 3.3: Иллюстрация к лемме 3.4.4

- Доказательство.* 1. Пусть $C_{b^0}^b = (C^b B^0) \cap (C' A)$. $\triangle C^b B^0 C$ получается из $\triangle C' A C$ поворотом на 60° вокруг точки C . Значит, $\angle C' C_{b^0}^b C^b = 60^\circ$, а $\angle A C_{b^0}^b B^0$ равен 60° или 120° в зависимости от того, пересекает ли луч $(C^b B^0)$ дугу $B^0 A$ или $A C$ окружности $(B^0 A C)$. Поэтому $C_{b^0}^b$ лежит на окружностях $(C C' C^b)$ и $(C B^0 A)$.
2. Пусть $C_b^b = (C^b B) \cap (C A)$. Из утверждения 3.4.3 следует, что $\angle C^b C_b^b C = \angle B C_b^b C = \angle C_b^b C^b A^b = 60^\circ$, значит, $C_b^b \in (C C' C^b)$ и $C_b^b \in (C' B A)$, то есть этот пункт также верен.
3. Пусть $C_{a'}^b = (C^b A') \cap (C' B)$. $\triangle A' C^b C$ получается из $\triangle B C' C$ поворотом на 60° вокруг точки C , поэтому $\angle C' C_{a'}^b C^b = \angle B C_{a'}^b A' = 60^\circ$, значит $C_{a'}^b$ лежит на окружностях $(C C' C^b)$ и $(C B A')$.
4. Отрезок BA получается из $C' A$ поворотом на 60° вокруг точки A , а, как было замечено в пункте (1), $C^b B^0$ — из $C' A$ поворотом на 60° вокруг C . Поэтому $(C^b B^0) \parallel (BA)$ и $C^b B^0 = BA$.
5. Как было замечено в пункте (3), $\angle C^b C_{a'}^b C' = 60^\circ = \angle C_{a'}^b C' A$, поэтому

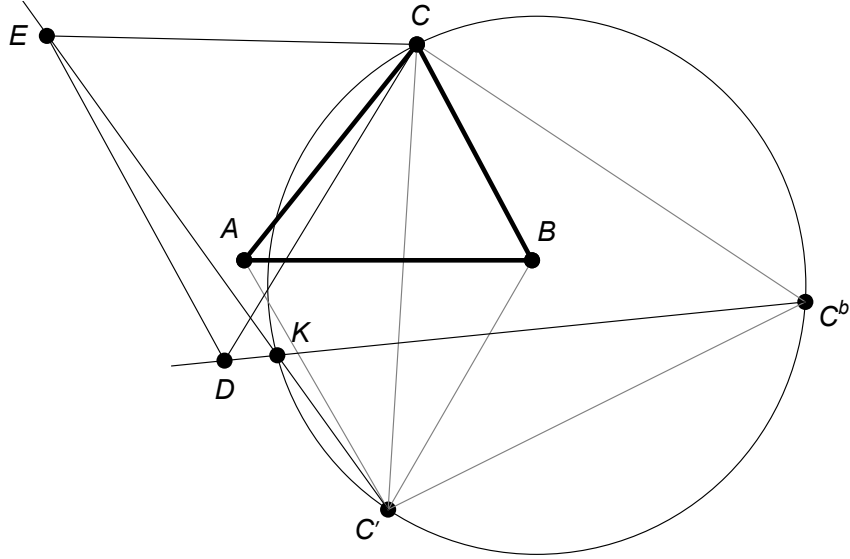


Рис. 3.4: Иллюстрация к лемме 3.4.5

$(C^b A') \parallel (C' A)$. Отрезки $C^b C'$ и $A' A$ параллельны, так как оба составляют с CC' угол 60° . Значит, $C^b A' A C'$ — параллелограмм.

□

Аналогично точкам $C_{b^0}^b, C_b^b, C_{a'}^b$ строятся точки $C_{a^0}^a, B_a^a, A_{c'}^b$ и т.д.

Через E будем обозначать вершину правильного $\triangle CDE$ такую, что $E \approx B(CD)$.

Докажем еще один факт.

Лемма 3.4.5. Пусть K — любая точка на дуге CC' окружности $(CC'C^b)$, D — любая точка вне $(CC'C^b)$. Тогда $D \in C^b K$ тогда и только тогда, когда $E \in (C'K)$ (рис. 3.4).

Доказательство. Пусть $D \in C^b K$. Построим отрезок DF такой, что $\angle CDF = 60^\circ$, $F \approx B(CD)$ и $F \in (C'K)$.

Заметим, что $\angle CKF = 60^\circ$, так как $K \in (CC'C^b)$, а также $\angle FKD = \angle C'KC^b = 60^\circ$, так как $\triangle CC'C^b$ правильный.

Это равносильно тому, что точки C, K, D и F лежат на одной окружности, так как $\angle CKF = \angle CDF = 60^\circ$. Также $\angle DFC = 180^\circ - \angle CKD = 60^\circ$, поэтому $\triangle CDF$ — правильный, значит, $F = E$, и E действительно лежит на $(C'K)$.

Так как правильный треугольник в фиксированной полуплоскости строится единственным образом, то из того, что $E \in (C'K)$, следует, что $D \in (C^b K)$. □

3.4.3 Двумерные страты в случае четырех граничных точек

Зафиксируем различные граничные точки A , B , и C , а точку D сделаем параметром бифуркационной диаграммы. Будем считать, что треугольник ABC ориентирован так, что точки A , B , C обходятся против часовой стрелки. Без ограничения общности, будем рассматривать сети бинарного типа $AB - CD$.

Введем следующие обозначения. Замыкание множества s будем обозначать через \bar{s} , а внутренность множества с границей l — через $\iota(l)$. Через $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ обозначим углы $\triangle ABC$. Также будем пользоваться обозначениями, введенными в разделе 3.4.2. В частности, вот некоторые точки: C_c^b симметрична C^b относительно C , C_c^a симметрична C^a относительно C , A_c' симметрична A' относительно C , A_c^0 симметрична A^0 относительно C , B_c' симметрична B' относительно C , B_c^0 симметрична B^0 относительно C .

Все углы будем отсчитывать против часовой стрелки.

Замечание 1. Если $\angle C > 120^\circ$, то ни при каком положении точки D не существует дерева Штейнера типа $AB - CD$. Если $\angle C = 120^\circ$, то единственным возможным деревом Штейнера типа $AB - CD$ является $ABcD$, и оно реализуется тогда и только тогда, когда точка D лежит на продолжении биссектрисы $\angle C$.

Далее в этом параграфе рассматриваем треугольники $\triangle ABC$ с $\angle C < 120^\circ$.

Нам удобнее будет рассматривать планарные структуры, так как мы будем описывать страты с помощью расположения точки D относительно окружностей и углов, которые зависят от точек A , B , C . Поэтому далее в этом параграфе мы будем различать страты, соответствующие разным планарным структурам.

Теорема 3.4.6. *Если точки A , B и C различны и $\angle C < 120^\circ$, то бифуркационная диаграмма сетей Штейнера бинарного типа $AB - CD$ содержит следующие двумерные страты (условие, при котором страт содержится в бифуркационной диаграмме, представлено в правой колонке таблицы):*

	планарная структура	двумерный страт	когда есть
1	$Ab - dC$	$\iota((BCA^0)) \cap \iota((BCA')) \setminus \overline{\iota(\angle BC'A)}$	$\angle B > 60^\circ$
2	$Ab - DC$	$\iota(\angle BA^0C_{a^0}^a) \cap \iota(\angle BA^0C) \setminus \overline{\iota((BA^0C))}$	$\angle B > 60^\circ$
3	$Ab - cD$	$\iota(\angle A_c^0CA'_c)$	$\angle B > 120^\circ$
4	$Ab - CD$	$\iota(\angle CC^bA') \setminus \overline{\iota((CA'B))}$	$\angle B > 120^\circ$
5	$AB - dC$	$\iota((CC'C^b)) \cap \iota((CC'C^a)) \cap$ $\cap \iota(\angle BC'A) \setminus \overline{\iota((BC'A))}$	$\angle A, \angle B < 180^\circ$
6	$AB - DC$	$\iota(\angle A^0C^aC) \cap \iota(\angle AC^aC) \setminus \overline{\iota((CC'C^a))}$	$\angle B < 120^\circ$
7	$AB - cD$	$\iota(\angle C_c^aCC_c^b)$	$\angle A, \angle B < 120^\circ$
8	$AB - CD$	$\iota(\angle CC^bB^0) \cap \iota(\angle CC^bB) \setminus \overline{\iota((CC'C^b))}$	$\angle A < 120^\circ$
9	$Ba - dC$	$\iota((ACB^0)) \cap \iota((ACB')) \setminus \overline{\iota(\angle BC'A)}$	$\angle A > 60^\circ$
10	$Ba - DC$	$\iota(\angle B'C^aC) \setminus \overline{\iota((CB'A))}$	$\angle A > 120^\circ$
11	$Ba - cD$	$\iota(\angle B'_cCB_c^0)$	$\angle A > 120^\circ$
12	$Ba - CD$	$\iota(\angle C_{b^0}^bB^0A) \cap \iota(\angle CB^0A) \setminus \overline{\iota((CB^0A))}$	$\angle A > 60^\circ$

На единственной оставшейся области (обозначим ее через U) не реализуется ни одна топология типа $AB - CD$.

Доказательство. Строка 1. Найдем страт, на котором реализуется топология (планарная структура) $Ab - dC$. Дерево Штейнера сети этой топологии представляет собой ломаную, в которой $\angle ABD \geq 120^\circ$ и $\angle BDC \geq 120^\circ$. Первое условие означает, что точка D лежит вне $\angle BC'A$, а второе — что D лежит внутри окружностей (BCA^0) и (BCA') .

Заметим, что в зависимости от углов $\triangle ABC$ страт, на котором реализуется топология $Ab - dC$, может выглядеть по-разному. Если $\angle B \leq 60^\circ$, то $A^0 \approx C(AB)$, и $\iota((BCA^0)) \subset \overline{\iota(\angle BC'A)} = \emptyset$, поэтому этого страта не будет. Если $\angle B > 60^\circ$, то $\iota((BCA^0)) \subset \overline{\iota(\angle BC'A)} \neq \emptyset$, и этот страт будет.

Строка 2. Планарная структура $Ab - DC$ предполагает, что дерево Штейнера делится точкой B на отрезок AB и дерево Штейнера для $\triangle BDC$, кроме того, $D \approx A(BC)$. Это означает, что

1. все углы $\triangle BDC$ меньше 120° ;

2. $\angle EBA \geq 120^\circ$;

3. $D \approx A(BC)$.

Комбинация условий (1) и (3) равнозначна тому, что D лежит внутри $\angle BA^0C$ и вне (BA^0C) . Покажем, что если $D \in (A^0B)$ вне (BA^0C) , то выполнено условие (2).

Пусть F — точка, лежащая на (BA') и такая, что $\angle FDC = 60^\circ$. Так как $\angle FBC = 60^\circ$, то F, D, B, C лежат на одной окружности. Также $\angle DBF = 60^\circ$, так как $\triangle BCA^0$ и $\triangle BCA'$ — правильные. Значит, $\angle CFD = 180^\circ - \angle DBF - \angle FBC = 60^\circ$, поэтому $\triangle CDF$ — правильный. Так как правильный треугольник строится в фиксированной полуплоскости единственным образом, то условие $D \in (A^0B) \setminus \overline{\iota((BA^0C))}$ равнозначно тому, что $E \in (BA') \setminus \overline{\iota((BA'^0C))}$.

Если двигать точку D от (A^0B) против часовой стрелки вокруг точки A^0 , то условие (2) будет выполняться, пока D не достигнет некоторой границы. Найдем ее.

По лемме 3.4.5, D лежит на луче (C^aA^0) начиная от точки $C_{a^0}^a$ тогда и только тогда, когда $E \in (C'B)$, а именно в этом случае $\angle EBA = 120^\circ$.

Если $\angle B \leq 60^\circ$, то $C \sim A(C^aA^0)$ или C^a, A^0, A лежат на одной прямой так, что $\iota(\angle BA^0C)$ не пересекается с (C^aA^0) , и топология $Ab - DC$ не реализуется.

Если $60^\circ < \angle B < 120^\circ$, то (C^aA^0) делит $\angle BA^0C$ на два угла. Условие (2) реализуется тогда и только тогда, когда $D \in \iota(\angle BA^0C_{a^0}^a) \cup (A^0C_{a^0}^a)$ вне (BA^0C) .

Если $\angle B \geq 120^\circ$, то (C^aA^0) расположен так, что если D лежит внутри $\angle BA^0C$, то $\angle C'BE \leq 180^\circ$.

Строка 2 доказана.

Строка 3. Когда $\angle B \geq 120^\circ$, возможна топология $Ab - cD$. Она реализуется в том и только том случае, когда $\angle BCD \geq 120^\circ$, что и означает, что $D \in \iota(\angle A_c^0CA'_c)$.

Строка 4. Планарная структура $Ab - CD$ показывает, что дерево Штейнера делится точкой B на отрезок AB и дерево Штейнера для $\triangle BDC$, кроме того, $D \sim A(BC)$. Это означает, что

1. все углы $\triangle BDC$ меньше 120° ;

2. $\angle EBA \geq 120^\circ$;

3. $D \sim A(BC)$.

Комбинация условий (1) и (3) равнозначна тому, что D лежит внутри $\angle CA'B$ и вне $(CA'B)$. Из условия (3) следует, что $E \sim A(BC)$. Значит, планарная структура $Ab - CD$ реализуется, только если $\angle B > 120^\circ$.

Найдем те положения точки D , при которых $\angle EBA = 120^\circ$, то есть $E \in (C'B)$. По лемме 3.4.5, вне $(CC'C^b)$ это точки луча (C^bA') , откуда и следует строка 4.

Строка 5. Планарная структура $AB - dC$ реализуется тогда и только тогда, когда дерево Штейнера состоит из отрезка CD и дерева Штейнера для $\triangle ABD$. Это равнозначно тому, что $120^\circ \leq \angle CDC' \leq 240^\circ$, а также все углы в $\triangle ABD$ меньше 120° .

Первое из этих условий означает, что D лежит внутри или на границе $(CC'C^a)$ и $(CC'C^b)$. Второе — что D лежит внутри $\angle BC'A$ и вне $(BC'A)$, что и доказывает строку 5.

Строка 6. Дерево Штейнера планарной структуры $AB - DC$ содержит две внутренние точки.

Пусть внутренние точки — O_1 и O_2 , O_1 смежна с A и B , а O_2 — с C и D . Из алгоритма Мелзака следует, что $\angle CO_2C' = 120^\circ$, и так как точки A, B, C, D образуют выпуклый четырехугольник $ABDC$, то O_2 лежит на $(CC'C^a)$. Также $\angle DO_2C = 120^\circ$, поэтому точки C^a, O_2 и D лежат на одной прямой (ведь $\angle CO_2C^a = 60^\circ$). При этом точка D может быть в любом месте на луче (C^aO_2) вне $(CC'C^a)$. Осталось найти возможные положения точки O_2 .

Точка O_2 должна лежать на $(CC'C^a)$ внутри угла A .

Далее, O_2 должна лежать внутри $\angle BC'A$, так как $A \approx B(C'O_2)$. Это условие может выполняться, только если $\angle B < 120^\circ$. Точка пересечения $(CC'C^a)$ и $(C'B) - C_{a_0}^a$, то есть O_2 лежит на дуге $C_{a_0}^aC$, а D расположена внутри $\angle C_{a_0}^aC^aC$ и вне $(CC'C^a)$.

Единственное, что осталось проверить, — что $\angle AO_2B < 120^\circ$, иначе усы дерева Штейнера пересекутся. То есть O_2 должна лежать вне (ABC') . Но $(CC'C^a) \cap$

$(ABC') = C_a^a$, эта точка лежит также на (C^aA) и BC . Получаем, что O_2 лежит на дуге C_a^aC . Значит, D лежит внутри $\angle C_a^aC^aC$ и вне $(CC'C^a)$.

Пересечение полученных областей и дает страт из строки 6.

Строка 7. Планарная структура $AB - cD$ означает, что дерево Штейнера делится точкой C на отрезок CD и дерево Штейнера для $\triangle ABC$. То, что $\angle C < 120^\circ$, мы приняли в условии теоремы. Углы $\angle A$ и $\angle B$ также должны быть меньше 120° . Также $120^\circ < \angle DCC' < 240^\circ$, что то же самое, что $D \in \iota(\angle C_c^aCC_c^b)$.

Строка 8. Доказывается аналогично строке 6.

Строка 9. Доказывается аналогично строке 1.

Строка 10. Доказывается аналогично строке 4.

Строка 11. Доказывается аналогично строке 3.

Строка 12. Доказывается аналогично строке 2.

□

Итак, мы разделили плоскость на страты различных топологий и страт U . При переходе из одного страта на другой дерево Штейнера типа $AB - CD$ меняет топологию или перестает существовать. Таким образом, мы получили бифуркационные диаграммы планарных структур сетей Штейнера типа $AB - CD$ для всевозможных конфигураций различных точек A, B, C .

Из последнего столбца таблицы теоремы 3.4.6 следует, что при изменении углов $\angle A$ и $\angle B$ некоторые страты могут исчезать или появляться, то есть будет меняться тип бифуркационной диаграммы.

Зафиксируем теперь только точки A и B , а точку C будем двигать в той полуплоскости, в которой вершины треугольника $\triangle ABC$ обходятся против часовой стрелки (это как раз обеспечит изменение углов $\angle A$ и $\angle B$). Тогда полуплоскость стратифицируется в зависимости от того, какой тип бифуркационной диаграммы получится при попадании C в каждый страт. Эта стратификация представлена на рис. 3.5.

Очевидно, что если продолжить рис. 3.5 на всю плоскость, то верхняя полуплоскость отразится относительно прямой AB , и получится полностью симметричная относительно AB картина.

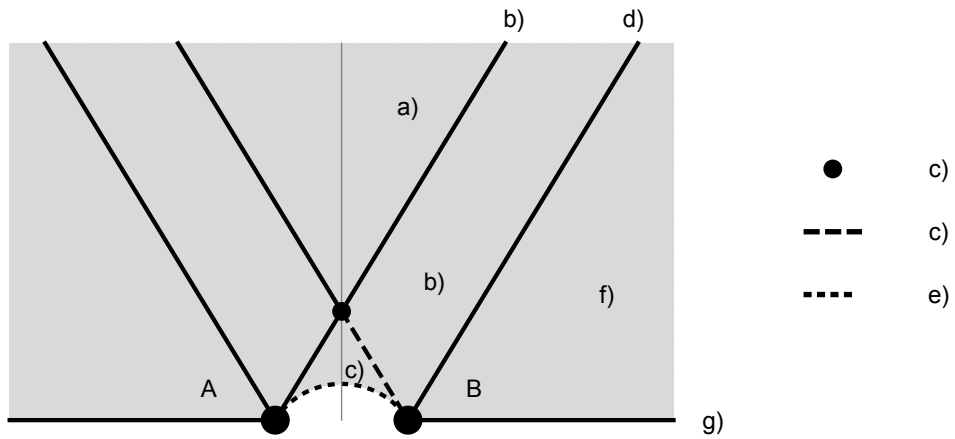
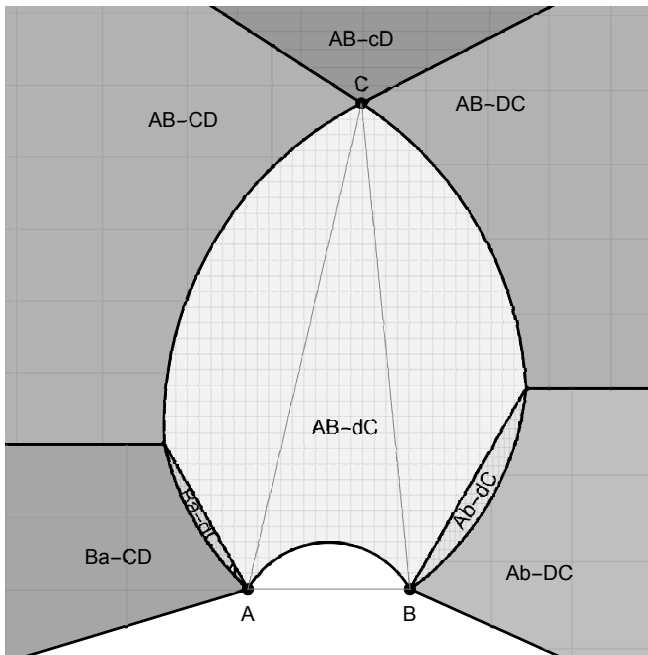


Рис. 3.5: Изменение типа бифуркационной диаграммы планарных структур сетей Штейнера бинарного типа $AB - CD$ при изменении положения точки C , когда $\triangle ABC$ ориентирован против часовой стрелки. При нахождении точки C в незакрашенной лунке нет деревьев Штейнера типа $AB - CD$. Закрашенная часть плоскости делится на страты так, что при нахождении точки C в одном страте реализуется один тип бифуркационной диаграммы, параметризованной точкой D , для бинарного типа $AB - CD$ (в разных стратах могут быть одинаковые типы). Все лучи пересекаются под углом 60° , а дуга AB — множество точек, из которых отрезок AB виден под углом 120° . Для каждого страта справа от вертикальной прямой (она не является стратом) соответствующий тип бифуркационной диаграммы изображен на рис. 3.6. Для каждого страта s слева от вертикальной прямой соответствующий тип бифуркационной диаграммы симметричен типу, который соответствует страту, симметричному s .

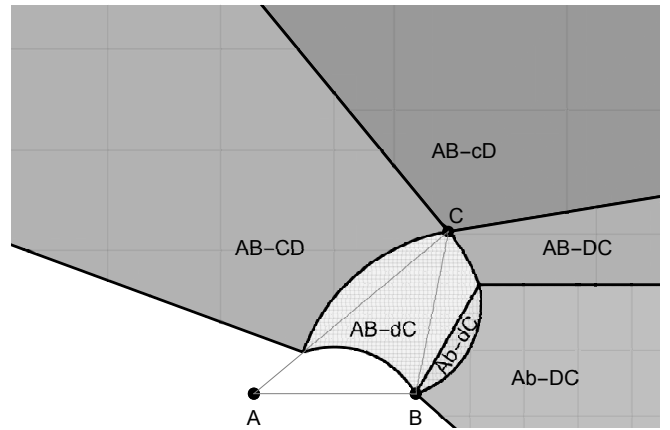
На рис. 3.6 представлены различные типы бифуркационных диаграмм, когда C попадает в разные страты на рис. 3.5. В белом страте нет деревьев Штейнера бинарного типа $AB - CD$.

3.5 Бифуркационные диаграммы бинарных типов минимальных сетей Штейнера

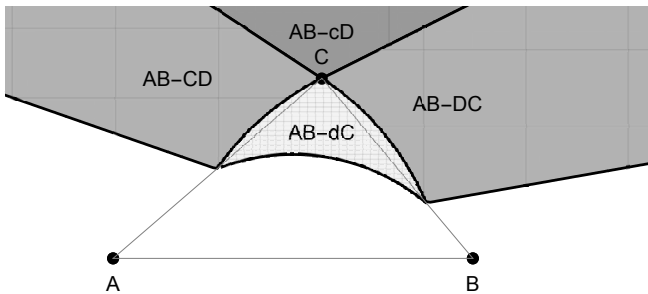
Зафиксируем $n - 1$ различную точку A_1, \dots, A_{n-1} , а одну точку A_n будем двигать по плоскости. При этом бинарный тип минимальной сети Штейнера для границы $M = \{A_1, \dots, A_n\}$ будет меняться. Накладывая друг на друга бифуркационные диаграммы для разных бинарных типов, можно получить бифуркационные диаграммы типов, на которых показано, как меняются бинарные типы минимальной сети Штейнера для M при изменении положения одной гранич-



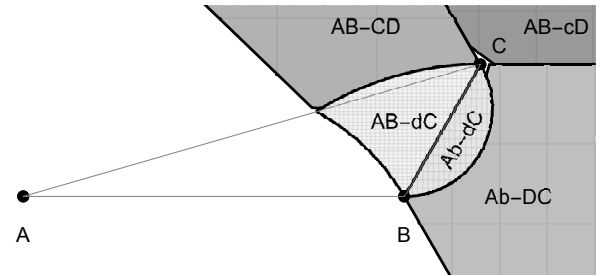
a) $60^\circ < \angle A < 120^\circ, 60^\circ < \angle B < 120^\circ$



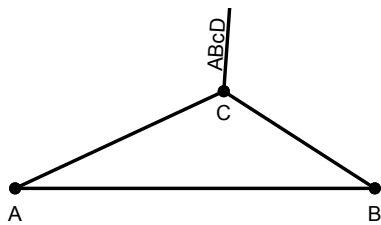
b) $0^\circ < \angle A \leq 60^\circ, 60^\circ < \angle B < 120^\circ$



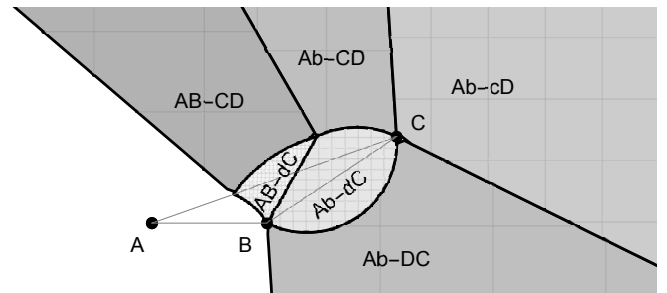
c) $0^\circ < \angle A \leq 60^\circ, 0^\circ < \angle B \leq 60^\circ, \angle C < 120^\circ$



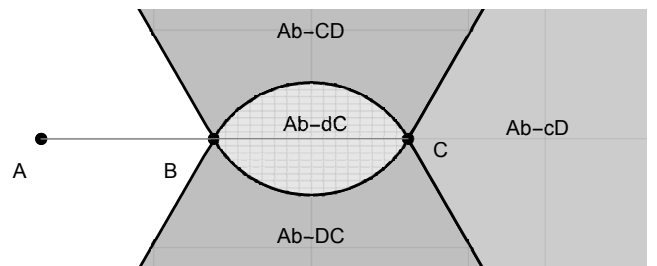
d) $\angle B = 120^\circ$



e) $\angle C = 120^\circ$



f) $120^\circ < \angle B < 180^\circ$



g) $\angle B = 180^\circ$

Рис. 3.6: Различные типы бифуркационных диаграмм

ной точки A_n . Будем обозначать бифуркационные диаграммы бинарных типов для n граничных точек через BD_n .

Определение 32. Будем называть smn^q -стратом страт на бифуркационной диаграмме BD_n , на котором реализуется q минимальных сетей Штейнера.

Определение 33. Будем называть smn -кривой одномерный smn^2 -страт на BD_n .

Теорема 3.5.1. При любом n любой кусок smn -кривой, проходящий по паре областей на соответствующих бифуркационных диаграммах, является частью ветви алгебраической кривой не выше 12 порядка.

Доказательство. По алгоритму Мелзака, каждое дерево Штейнера по длине равно сумме длин нескольких вспомогательных отрезков, по одному для каждой бинарной компоненты. Если A_n является вершиной степени k в дереве Штейнера, то длины ровно k из этих вспомогательных отрезков зависят от A_n . Степень вершины в дереве Штейнера не может быть больше 3, поэтому $k \leq 3$.

Лемма 3.5.2. Если в дереве Штейнера степень k вершины A_n равна 3, то длина этого дерева не зависит от A_n .

Доказательство. Как было только что замечено, от A_n зависят длины только тех трех вспомогательных отрезков из алгоритма Мелзака, которые сходятся в точке A_n под углом 120° . При этом концы этих отрезков O_1, O_2, O_3 , отличные от A_n , не зависят от A_n . Получается, что сумма длин этих трех отрезков равна длине дерева Штейнера для точек O_1, O_2, O_3 , что и заканчивает доказательство леммы. \square

Пусть (x, y) — координаты точки A_n в некоторой прямоугольной системе координат. Первая вспомогательная точка в алгоритме Мелзака получается поворотом одной граничной точки вокруг другой, поэтому ее координаты линейно зависят от координат граничной точки. Каждая следующая вспомогательная точка — результат поворота граничной или вспомогательной точки вокруг граничной. Поэтому координаты любой вспомогательной точки, зависящей от A_n , линейно зависят от x и y . Значит, длина любого вспомогательного отрезка является квадратным корнем из некоторой квадратичной функции от x и y . Поэтому длина дерева Штейнера равна сумме константы и не более двух таких корней.

Пусть на рассматриваемой smn-кривой равны длины деревьев ST_1 и ST_2 . Получаем систему уравнений для smn-кривой:

$$\begin{cases} \sqrt{Q_1(x, y)} + \sqrt{Q_2(x, y)} + C_1 = r, \\ \sqrt{Q_3(x, y)} + \sqrt{Q_4(x, y)} + C_2 = r, \end{cases} \quad (3.5.1)$$

где r меняется вдоль smn-кривой и равно длине каждого из деревьев ST_1 и ST_2 , $Q_i(x, y), i \in \{1, 2, 3, 4\}$ — квадратичные функции от x и y , а C_1 и C_2 не зависят от x и y .

Далее перенесем в правые части уравнений C_1 и C_2 , а затем возведем обе части уравнений в квадрат. Множество решений исходной системы будет подмножеством множества решений новой системы. Новая система примет вид:

$$\begin{cases} Q_1(x, y) + Q_2(x, y) + 2\sqrt{Q_1(x, y)Q_2(x, y)} = r^2 + C_1^2 - 2C_1r, \\ Q_3(x, y) + Q_4(x, y) + 2\sqrt{Q_3(x, y)Q_4(x, y)} = r^2 + C_2^2 - 2C_2r. \end{cases}$$

Опять преобразуем уравнения, перенеся $Q_i(x, y) + Q_j(x, y)$ вправо и возведя в квадрат обе части. После приведения подобных членов получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (Q_1(x, y) - Q_2(x, y))^2 - 2(Q_1(x, y) + Q_2(x, y))(r - C_1)^2 + \\ \quad + (r^2 + C_1^2)^2 + 4C_1r(C_1r - r^2 - C_1^2), \\ (Q_3(x, y) - Q_4(x, y))^2 - 2(Q_3(x, y) + Q_4(x, y))(r - C_2)^2 + \\ \quad + (r^2 + C_2^2)^2 + 4C_2r(C_2r - r^2 - C_2^2). \end{cases}$$

Через $Q_i(x, y)$ мы обозначили квадрат евклидова расстояния от точки $A_n = (x, y)$ до некоторой точки, координаты которой мы будем обозначать через (x_i, y_i) , то есть $Q_i(x, y) = x^2 + y^2 + x_i^2 + y_i^2 - 2x_i x - 2y_i y$. Поэтому

$$Q_i(x, y) - Q_j(x, y) = x_i^2 + y_i^2 - x_j^2 - y_j^2 - 2x(x_i - x_j) - 2y(y_i - y_j),$$

то есть это линейная от (x, y) функция, которую мы обозначим через $L_{ij}(x, y)$. Тогда последняя система переписется так:

$$\begin{cases} L_{12}(x, y)^2 - 2(Q_1(x, y) + Q_2(x, y))(r - C_1)^2 + \\ \quad + (r^2 + C_1^2)^2 + 4C_1r(C_1r - r^2 - C_1^2), \\ L_{34}(x, y)^2 - 2(Q_3(x, y) + Q_4(x, y))(r - C_2)^2 + \\ \quad + (r^2 + C_2^2)^2 + 4C_2r(C_2r - r^2 - C_2^2). \end{cases}$$

Теперь вместо второго уравнения системы запишем разность первого и второго:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{12}(x, y)^2 - 2(Q_1(x, y) + Q_2(x, y))(r - C_1)^2 + \\ \quad + (r^2 + C_1^2)^2 + 4C_1r(C_1r - r^2 - C_1^2), \\ L_{12}(x, y)^2 - L_{34}(x, y)^2 - 2r^2(L_{13}(x, y) + L_{24}(x, y)) - \\ \quad - 2C_1(2r - C_1)(Q_1(x, y) + Q_2(x, y)) + \\ \quad + 2C_2(2r - C_2)(Q_3(x, y) + Q_4(x, y)) + \\ \quad + 4r^2(C_1^2 - C_2^2) - 4r^3(C_1 - C_2) - 4r(C_1^3 - C_2^3). \end{array} \right.$$

Мы получили систему из двух алгебраических уравнений от неизвестных x, y, r . Первое — четвертого порядка, а второе — третьего. Поэтому эта система задает в трехмерном пространстве либо поверхность (тогда не получится smn -кривая), либо кривую не выше 12 порядка. Проекция этой кривой на плоскость (x, y) является кривой, очевидно, также не выше 12 порядка. Значит, smn -кривая состоит из кусков алгебраических кривых не выше 12 порядка. \square

Следствие 3.5.3. *Каждая smn -кривая кусочно дифференцируема.*

Далее мы подробно рассмотрим случай четырех граничных точек и покажем, что smn -кривые в этом случае устроены немного проще.

3.5.1 Четыре граничные вершины

Рассмотрим границу $M = \{A, B, C, D\}$. Как и раньше, зафиксируем точки A, B, C , а точку D будем двигать по плоскости, она будет параметром бифуркационной диаграммы. Чтобы определить, какие типы реализуются при каждой позиции точки D , наложим одну на другую бифуркационные диаграммы топологий сетей Штейнера, соответствующие разным бинарным типам, для одного и того же расположения точек A, B, C и сравним длины сетей этих типов (рис. 3.7).

Нам достаточно изучить одномерные страты, так как двумерные ими ограничены, а нульмерные являются их границей.

Определение 34. Назовем smn -кривую, на которой равны длины SMN типов $AB - CD$ и $AC - BD$, — smn_a -кривой, smn -кривую, на которой равны длины

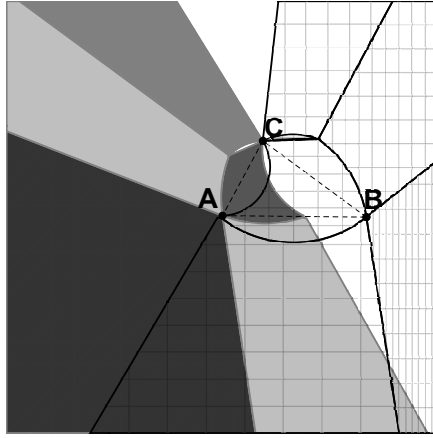


Рис. 3.7: Наложение бифуркационных диаграмм двух разных типов (один тип обозначен цветом, а другой — штриховкой)

SMN типов $AB - CD$ и $BC - AD$, — smn_b -кривой и smn -кривую, на которой равны длины SMN типов $AC - BD$ и $BC - AD$, — smn_c -кривой.

Если $\triangle ABC$ содержит точку Штейнера S , то в S пересекаются все три smn -кривые, так как при попадании D в S реализуются топологии SMN $ABdC$, $AdBC$ и $ACdB$ (то есть в S реализуются три бинарных типа SMN, но их следы совпадают). По утв. 1.3.2, S есть точка пересечения окружностей, описанных около правильных треугольников ABC' , BCA' , CAB' . Если точка D лежит внутри окружности (ABC') , то $\angle ADB > 120^\circ$, значит, для такой точки D минимальная сеть Штейнера типа $AB - CD$ не реализуется. Аналогично для двух других окружностей. В пересечении двух открытых кругов, ограниченных этими окружностями, возможна только одна топология SMN, та, в которой есть ребро, соединяющее точку D с точкой пересечения границ кругов, являющейся вершиной $\triangle ABC$. А вне таких двух кругов, расположена соответствующая smn -кривая. Она начинается от точки S и сначала идет внутри третьего круга. После того, как точка D по smn -кривой выйдет из $\triangle ABC$, четырехугольник $ABCD$ становится выпуклым, и для него реализуются два типа SMN.

Пусть точка D лежит внутри угла $\angle C_b B A_b$, где A_b и C_b — точки, симметричные A и C относительно B . Три типа SMN реализуются тогда и только тогда, когда все углы $\angle ABD$, $\angle CBD$ и $\angle ABC$ не больше 120° , то есть все они равны по 120° , а значит, только для $\triangle ABC$ с углом 120° . В этом случае луч с началом в B , составляющий угол 120° с AB и BC , дает все положения точки D , при

которых есть три типа SMN (с одинаковыми следами).

Если $\angle B > 120^\circ$, то smp_b -кривая проходит через точку B и продолжается за нее в обоих направлениях.

Будем двигаться по smp_b -кривой от точки S или B , соответственно, по направлению к стороне AC . Опираясь на бифуркационные диаграммы нужных бинарных типов, заключаем, что, пока точка D не встретит одномерный страт на какой-нибудь из этих диаграмм, на smp_b -кривой равны длины деревьев Штейнера топологий $Ad - BC$ и $AB - dC$. Как только встретится одна (или две) из этих границ, одна (или обе) топология равных по длине сетей Штейнера меняется.

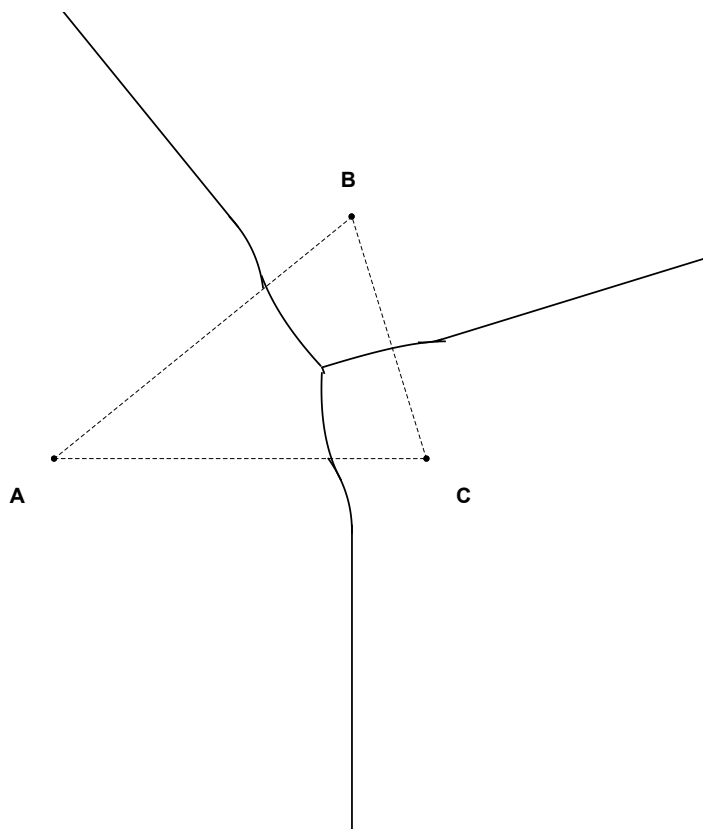
При дальнейшем движении точки D по smp -кривой одна или обе топологии деревьев Штейнера одинаковой длины меняются в момент пересечения одномерного страта хотя бы на одной из бифуркационных диаграмм.

В случае $\angle B > 120^\circ$ при движении точки D по smp_b -кривой за точку B вне $\triangle ABC$ меняются сразу две топологии SMN. Здесь равны длины SMN топологий $Ab - CD$ и $AD - bC$ типов $AB - CD$ и $AD - BC$, соответственно. Области этих топологий пересекаются по углу, так как $\angle B > 120^\circ$.

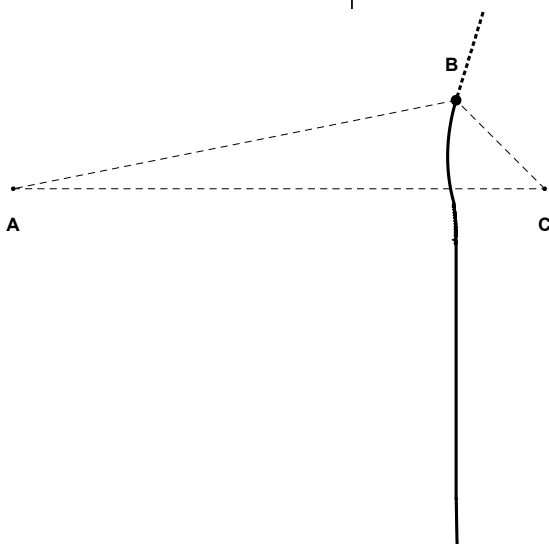
Таким образом, smp -кривая склеивается из кусков ветвей кривых, задаваемых различными уравнениями в некоторой системе координат (рис. 3.8). Из взаимного расположения одномерных стратов на бифуркационной диаграмме топологий сетей Штейнера фиксированного бинарного типа следует, что smp -кривые могут пересекаться только в точке S .

Теорема 3.5.4. *При четырех граничных точках любой кусок smp -кривой, проходящий по одной паре двумерных стратов на бифуркационных диаграммах соответствующих фиксированных типов, является частью ветви алгебраической кривой порядка не выше 8. Причем внутри фиксированного треугольника порядок кривой не выше 5, а неограниченная часть квадратична.*

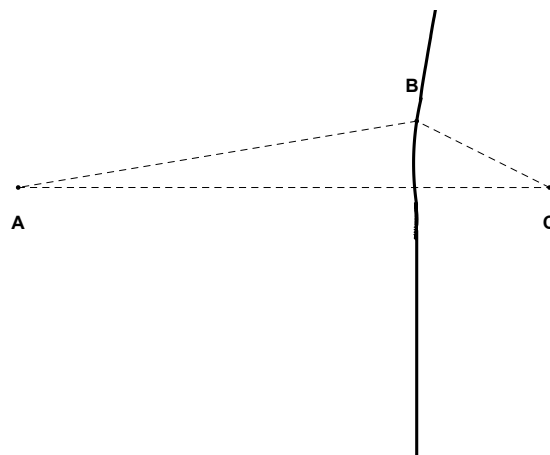
Доказательство. Перепишем систему уравнений 3.5.1, задающую smp -кривую. Будем считать, что все $Q_i(x, y)$ и C_i не равны тождественно нулю. Чтобы оставить возможность меньшего числа бинарных компонент в дереве Штейнера, введем коэффициенты при всех слагаемых, которые могут принимать значе-



а) Все углы $\triangle ABC$ меньше 120° . Плоскость делится на три части, в каждой из которых свой тип SMN. Их разделяют smn -кривые с двумя типами, которые пересекаются в точке Штейнера $\triangle ABC$, где реализуются SMN трех типов (с одинаковыми следами).



б) $\angle B = 120^\circ$. На луче с началом в точке B , составляющем 120° с AB и BC , реализуются три типа SMN (но один след), на единственной smn -кривой — два типа. В двух областях по одному типу.



в) $\angle B > 120^\circ$. Реализуются только два типа SMN, плоскость делится на две части единственной smn -кривой.

Рис. 3.8: Типы бифуркационных диаграмм типов SMN для четырех граничных точек, когда вершины A, B, C не в одной точке. Все smn -кривые состоят из кусков алгебраических кривых.

ния 0 и 1. Система примет вид:

$$\begin{cases} a_1\sqrt{Q_1(x, y)} + a_2\sqrt{Q_2(x, y)} + a_3C_1 = r, \\ b_1\sqrt{Q_3(x, y)} + b_2\sqrt{Q_4(x, y)} + b_3C_2 = r, \end{cases}$$

где $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots$, равны нулю или единице, причем $a_1 + a_2 \neq 0$ и $b_1 + b_2 \neq 0$, а $r = \text{smn}(M)$.

Без ограничения общности, будем считать, что среди a_i единиц не меньше, чем среди b_i .

Лемма 3.5.5. *Для четырех граничных точек двух минимальных деревьев Штейнера, являющихся трехзвенными ломаными, не бывает.*

Доказательство. Пусть они существуют. Без ограничения общности, считаем, что первая ломаная — дерево Штейнера $Ab - dC$, тогда все углы при вершинах A и C меньше 120° , и вторая ломаная может быть только $Ad - bC$. Но $\angle ADB$ также меньше 120° , поэтому второе дерево Штейнера, являющееся ломаной с тремя звеньями, не может существовать. \square

Следствие 3.5.6. *Хотя бы один из шести коэффициентов a_i, b_i равен нулю.*

1. Пусть все a_i не равны нулю, то есть первое минимальное дерево Штейнера — ломаная из трех звеньев. По лемме 3.5.5, второе дерево содержит не более двух бинарных компонент, то есть в нем не более одной вершины степени 2.

Лемма 3.5.7. *Если точки множества $M = \{A, B, C, D\}$ соединяются трехзвенной ломаной L в последовательности A, B, C, D с углами между звеньями не меньшими 120° и точками A и D по разные стороны от прямой, проходящей через B и C , то L является единственным минимальным деревом Штейнера, соединяющим M .*

Доказательство. По лемме 3.5.5, второго минимального дерева Штейнера, являющегося ломаной из трех звеньев, быть не может.

Значит, если существует второе минимальное дерево Штейнера для M , то оно должно иметь хотя бы одну внутреннюю вершину O , которая ле-

жит внутри или на стороне выпуклой оболочки четырехугольника $ABCD$ (утверждение 1.3.5).

Допустим, внутренняя точка O единственна. Она должна быть также точкой Штейнера в бинарной компоненте, которой она принадлежит, то есть точка O должна быть также внутренней вершиной в дереве Штейнера для $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle BDA$ или $\triangle CDA$. Но в каждом из этих треугольников есть угол, который больше или равен 120° , поэтому ни один из них не может содержать внутренней вершины (утверждение 1.3.1). Противоречие.

Пусть теперь второе минимальное дерево Штейнера содержит две внутренние точки. По утверждению 1.3.10, точки A, B, C, D образуют выпуклый четырехугольник. Его диагонали — AD и BC , значит, дерево Штейнера типа $AD - BC$ не реализуется. Единственный оставшийся тип — $AC - BD$. Попробуем построить дерево Штейнера с двумя внутренними точками типа $AC - BD$ по алгоритму Мелзака. Отрезок AC из точки B виден под углом больше 120° , но внутренняя точка O , смежная с A и C , лежит в выпуклой оболочке множества M , поэтому O обязана лежать в $\triangle BCD$. Поэтому $\angle BOD \geq 120^\circ$, и вторую внутреннюю точку искомого дерева мы построить не сможем. \square

Замечание 2. Если в лемме 3.5.7 убрать условие того, что точки A и D лежат по разные стороны от прямой BC , то ломаная с углами не меньше 120° может не быть минимальным деревом Штейнера.

Пример. Возьмем прямоугольный $\triangle ABC$ с прямым углом $\angle C$, углом 60° при вершине B и отрезем от него правильный треугольник с вершиной B отрезком DE так, что D лежит на AB , а E — на BC , причем сторона отрезанного треугольника $\varepsilon < AB - AC$. Тогда $ADEC$ — ломаная с углами 120° , длина которой $AD + DE + EC > DE + EC + CA$. Но $DECA$ — ломаная, у которой один угол равен 90° , значит, минимальное дерево Штейнера для $ABCD$ не является ломаной.

Следствие 3.5.8. Если M соединяется двумя минимальными деревьями Штейнера, одно из которых — ломаная с тремя звеньями, то M не

может быть невыпуклым четырехугольником.

Итак, по следствию 3.5.8, $ADBC$ — строго или нестрого выпуклый четырехугольник. Значит, отрезки AB и CD пересекаются, поэтому дерево Штейнера типа $AB - CD$ не реализуется. Поэтому второе минимальное дерево Штейнера имеет тип $AC - BD$.

- (a) Если оно содержит одну внутреннюю точку, то оно должно содержать либо отрезок AC , либо отрезок BD . Однако AC оно содержать не может, так как и в $\triangle ABD$, и в $\triangle CBD$ есть углы не меньше 120° . Значит, оно обязательно содержит отрезок BD , а граница второй бинарной компоненты либо $\{A, C, D\}$, либо $\{A, C, B\}$. Приравняем длины двух минимальных деревьев Штейнера:

$$AD + DB + BC = BD + \sqrt{Q_3(x, y)} \quad \text{или} \quad AD + DB + BC = BD + C_2,$$

то есть

$$\sqrt{Q_1(x, y)} + C_1 = \sqrt{Q_3(x, y)} \quad \text{или} \quad \sqrt{Q_1(x, y)} + C_1 = C_2.$$

Возведя обе части первого уравнения в квадрат, получим:

$$Q_1(x, y) + C_1^2 + 2C_1\sqrt{Q_1(x, y)} = Q_3(x, y),$$

откуда следует, что

$$4C_1^2Q_1(x, y) = (Q_3(x, y) - Q_1(x, y) - C_1^2)^2,$$

но $Q_3(x, y) - Q_1(x, y) = L_{31}(x, y)$ — линейная функция от (x, y) , поэтому это уравнение алгебраической кривой не выше 2 порядка, а искомое множество точек D — ее часть.

Из второго уравнения получается $Q_1(x, y) = (C_2 - C_1)^2$, то есть в этом случае положения точки D также образуют часть кривой 2 порядка.

- (b) Если же второе минимальное дерево Штейнера не содержит внутренних точек, то smn -кривая задается уравнением

$$\sqrt{Q_1(x, y)} + \sqrt{Q_2(x, y)} + C_1 = \sqrt{Q_3(x, y)}$$

Перенесем константу вправо и возведем обе части уравнения в квадрат:

$$Q_1(x, y) + Q_2(x, y) + 2\sqrt{Q_1(x, y)Q_2(x, y)} = Q_3(x, y) + C_1^2 - 2C_1\sqrt{Q_3(x, y)},$$

$$2\sqrt{Q_1(x, y)Q_2(x, y)} + 2C_1\sqrt{Q_3(x, y)} = C_1^2 - L_{13}(x, y) - Q_2(x, y).$$

Еще два раза возведем в квадрат, от чего множество решений уравнения не уменьшится:

$$4Q_1(x, y)Q_2(x, y) + 4C_1^2Q_3(x, y) + 8C_1\sqrt{Q_1(x, y)Q_2(x, y)Q_3(x, y)} =$$

$$= (C_1^2 - L_{13}(x, y) - Q_2(x, y))^2,$$

$$64C_1^2Q_1(x, y)Q_2(x, y)Q_3(x, y) =$$

$$= ((C_1^2 - L_{13}(x, y) - Q_2(x, y))^2 - (4Q_1(x, y)Q_2(x, y) + 4C_1^2Q_3(x, y)))^2,$$

а это полиномиальное уравнение 8 степени.

Заметим, что только ограниченный участок smn -кривой задается этим уравнением (и является частью алгебраической кривой 8 порядка), так как одно из минимальных деревьев Штейнера в этой ситуации является ломаной с тремя звеньями и вершиной D степени 2, а на бифуркационных диаграммах сетей Штейнера фиксированного бинарного типа показано, что такие деревья реализуются в ограниченных лунках.

2. Пусть теперь первое минимальное дерево Штейнера — ломаная из двух звеньев, то есть ровно одно из a_i равно нулю. Тогда возможны следующие варианты.

(a) $\sqrt{Q_1(x, y)} + \sqrt{Q_2(x, y)} = \sqrt{Q_3(x, y)} + \sqrt{Q_4(x, y)}$. Это случай, когда в каждом из минимальных деревьев Штейнера точка D является вершиной степени 2. Введем параметр $r = \text{smn}(M)$. Тогда множество решений этого уравнения будет совпадать с множеством решений следующей системы при всех неотрицательных r :

$$\begin{cases} \sqrt{Q_1(x, y)} + \sqrt{Q_2(x, y)} = r, \\ \sqrt{Q_3(x, y)} + \sqrt{Q_4(x, y)} = r. \end{cases}$$

Как и раньше, возведем обе части уравнений в квадрат с переносом слагаемых несколько раз:

$$\begin{cases} Q_1(x, y) + Q_2(x, y) + 2\sqrt{Q_1(x, y)Q_2(x, y)} = r^2, \\ Q_3(x, y) + Q_4(x, y) + 2\sqrt{Q_3(x, y)Q_4(x, y)} = r^2, \\ \begin{cases} r^4 - 2r^2(Q_1(x, y) + Q_2(x, y)) + L_{12}^2(x, y) = 0, \\ r^4 - 2r^2(Q_3(x, y) + Q_4(x, y)) + L_{34}^2(x, y) = 0, \end{cases} \end{cases}$$

Заменим второе уравнение системы на разность второго и первого:

$$\begin{cases} r^4 - 2r^2(Q_1(x, y) + Q_2(x, y)) + L_{12}^2(x, y) = 0, \\ 2r^2(L_{13}(x, y) + L_{24}(x, y)) + L_{34}^2(x, y) - L_{12}^2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы видим, что если $L_{34}^2(x, y) = L_{12}^2(x, y)$, то и $L_{13}(x, y) + L_{24}(x, y) = 0$. Иначе подставим

$$r^2 = \frac{L_{12}^2(x, y) - L_{34}^2(x, y)}{2(L_{13}(x, y) + L_{24}(x, y))}$$

в первое уравнение и получим, домножив на $4(L_{13}(x, y) + L_{24}(x, y))^2$:

$$\begin{aligned} & (L_{12}^2(x, y) - L_{34}^2(x, y))^2 - \\ & - 2(L_{12}^2(x, y) - L_{34}^2(x, y))(L_{13}(x, y) + L_{24}(x, y))(Q_1(x, y) + Q_2(x, y)) + \\ & + 4(L_{13}(x, y) + L_{24}(x, y))^2 L_{12}^2(x, y) = 0. \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

Но для этого уравнения если $L_{34}^2(x, y) = L_{12}^2(x, y)$, то $L_{13}(x, y) + L_{24}(x, y) = 0$ (как и для второго уравнения последней системы) или $L_{12}(x, y) = L_{34}(x, y) = 0$. Понятно, что вторая ситуация нам не подходит, так как тогда в уравнении 3.5.2 все слагаемые тождественно равны нулю, а уравнению $L_{12}(x, y) = L_{34}(x, y) = 0$ удовлетворяет лишь точка пересечения серединных перпендикуляров к двум отрезкам.

Поэтому уравнение 3.5.2 эквивалентно последней системе, а это алгебраическое уравнение 5 порядка.

Исходя из бифуркационных диаграмм сетей Штейнера для фиксированных бинарных типов и из следствия 3.5.8, заключаем, что внутри фиксированного треугольника smn -кривая является частью алгебраической кривой не выше 5 порядка.

(b) $\sqrt{Q_1(x, y)} + \sqrt{Q_2(x, y)} = \sqrt{Q_3(x, y)} + C_2$. Это уравнение аналогично уравнению из пункта (b) варианта 1, оно также задает алгебраическую кривую 8 порядка. Так как одно из деревьев Штейнера — ломаная из двух звеньев с вершиной D степени 2 (ему соответствует ограниченный двумерный страт на бифуркационной диаграмме топологий), то участок smn -кривой, задаваемый этим уравнением, ограничен.

(c) $\sqrt{Q_1(x, y)} + C_1 = \sqrt{Q_3(x, y)} + \sqrt{Q_4(x, y)}$. Этот вариант полностью аналогичен предыдущему.

(d) $\sqrt{Q_1(x, y)} + C_1 = \sqrt{Q_3(x, y)} + C_2$. Преобразуем это уравнение, не уменьшая множество решений:

$$Q_1(x, y) = Q_3(x, y) + (C_2 - C_1)^2 + 2(C_2 - C_1)\sqrt{Q_3(x, y)},$$

$$4(C_2 - C_1)^2 Q_3(x, y) = L_{13}^2(x, y) + (C_2 - C_1)^4 - 2(C_2 - C_1)^2 L_{13}(x, y).$$

Это уравнение задает алгебраическую кривую 2 порядка.

(e) $\sqrt{Q_1(x, y)} + \sqrt{Q_2(x, y)} = \sqrt{Q_3(x, y)}$. Преобразуем это уравнение, не уменьшая множество решений:

$$Q_1(x, y) + Q_2(x, y) + 2\sqrt{Q_1(x, y)Q_2(x, y)} = Q_3(x, y),$$

$$4Q_1(x, y)Q_2(x, y) = L_{13}^2(x, y) + Q_2^2(x, y) + 2L_{13}(x, y)Q_2(x, y).$$

Это уравнение 4 порядка. Часть smn -кривой, задаваемая им, ограничена, так как первое дерево Штейнера в данном случае реализуется на ограниченном двумерном страте.

(f) $\sqrt{Q_1(x, y)} + C_1 = \sqrt{Q_3(x, y)}$. Сделаем преобразования:

$$Q_1(x, y) + C_1^2 + 2C_1\sqrt{Q_1(x, y)} = Q_3(x, y),$$

$$4C_1^2 Q_1(x, y) = (L_{13}(x, y) + C_1^2)^2.$$

Это уравнение задает квадратичную кривую.

3. Пусть теперь только один коэффициент из a_i равен 1, то есть первое минимальное дерево Штейнера состоит из одной бинарной компоненты, а значит, содержит две точки Штейнера. Варианты, когда второе дерево Штейнера содержит более одной бинарной компоненты, аналогичны пунктам 1

и 2 данного доказательства. остается единственный вариант, в котором оба минимальных дерева Штейнера — бинарные. приравняем их длины:

$$\sqrt{Q_1(x, y)} = \sqrt{Q_2(x, y)},$$

$$Q_1(x, y) = Q_2(x, y),$$

$$L_{12}(x, y) = 0.$$

Получилось линейное уравнение. Оно соответствует утверждению [29] Поллака о том, что если для четырехугольника существуют два бинарных дерева Штейнера, то минимальную длину имеет то из них, чьи усы видны из точки пересечения диагоналей четырехугольника под острым углом.

Теорема доказана.

□

Глава 4

Суботношение Штейнера для четырех точек плоскости

В этой части диссертации мы применим результаты о бифуркациях оптимальных соединяющих графов для вычисления одной числовой характеристики плоскости — ее суботношения Штейнера степени 4, а затем покажем, что среди всех связных римановых многообразий одной и той же размерности максимальное суботношение имеет евклидово пространство. Сначала нам потребуется выяснить взаимное расположение бифуркационных диаграмм бинарных типов минимальных заполнений и минимальных сетей Штейнера для одних и тех же границ. Этот вопрос в данном контексте представляет интерес только для невыпуклых границ, так как для выпуклых суботношение легко вычисляется другим методом, о чем будет написано далее.

4.1 Взаимное расположение типов минимальных сетей Штейнера и минимальных заполнений для невыпуклых четырехточечных границ

Возьмем треугольник ABC , обозначим через a, b, c длины сторон, противолежащих одноименным углам.

Посмотрим, как лежат друг относительно друга одноименные mf - и smn -кривые внутри $\triangle ABC$.

Будем говорить, что объект лежит *внутри* mf -кривой, если он расположен

в выпуклой части плоскости, отсекаемой этой кривой.

Если какие-то стороны треугольника равны, то имеет место очевидное утверждение (без ограничения общности, считаем равными стороны AB и BC).

Утверждение 4.1.1. *Если $a = c$, то smn_b - и mf_b -кривые лежат на биссектрисе $\angle B$ (и ее продолжении).*

Если же равных сторон нет, то верна следующая теорема.

Теорема 4.1.2. *Для любого неравностороннего треугольника ABC верно, что внутри него smn -кривая лежит внутри одноименной mf -кривой.*

Доказательство. Без ограничения общности, докажем утверждение теоремы для smn_c -кривой и mf_c -кривой.

Вспомним, что внутри $\triangle ABC$ smn -кривая является кривой, на которой равны длины двух минимальных деревьев Штейнера, причем каждое дерево состоит из двух бинарных компонент и вершина D имеет степень 2. Так, smn_c -кривая является подмножеством множества решений (берем только часть алгебраической кривой от точки Штейнера $\triangle ABC$ или точки C , пересекающую AB) системы равенств

$$\begin{cases} AD + DA' = r, \\ BD + DB' = r, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

где параметр r меняется от l до бесконечности, $l = AA' = BB'$ в случае $\triangle ABC$ с углами меньше 120° и $l = AC + CA' = BC + CB'$ иначе.

В системе 4.1.1 каждое уравнение с параметром r задает эллипс с фокусами A, A' и B, B' , соответственно. Сама система 4.1.1 задает множество точек пересечения пар изометричных эллипсов с разными фокусами. Как мы видели в предыдущей части, множество ее решений — алгебраическая кривая не выше 5 порядка. Обозначим ее через $(A, A'; B, B')$.

Обозначим гиперболу Содди с фокусами A и B и проходящую через точку C через $(A, B; C)$. mf_c -кривая является ее частью.

Пусть $(A', B'; C)$ — гипербола с фокусами A' и B' , проходящая через точку C . Для любой точки X , лежащей на этой гиперболе, выполняется $|A'X - B'X| = |a - b|$.

Лемма 4.1.3. Кривые $(A, A'; B, B')$ и $(A, B; C)$ пересекаются в тех же точках, что и кривые $(A, B; C)$ и $(A', B'; C)$.

Доказательство. Геометрическое место точек X , принадлежащих гиперболе $(A, B; C)$, задается уравнением $|AX - BX| = |b - a|$. Такие точки принадлежат кривой $(A, A'; B, B')$ тогда и только тогда, когда $AX + A'X = BX + B'X$, то есть

$$BX + |b - a| + A'X = BX + B'X \quad \text{или} \quad AX + A'X = |b - a| + AX + B'X,$$

что равносильно тому, что $|b - a| = |A'X - B'X|$. \square

Проведем отрезки AA' и BB' . Рассмотрим точки пересечения гиперболы $(A, B; C)$ с этими отрезками. Обозначим точку пересечения mf_c -кривой с AA' через P , с BB' — через Q , второй ветви гиперболы с AA' — через R , ее же с BB' — через T .

Лемма 4.1.4. Точки P и Q лежат по разные стороны одной из ветвей гиперболы $(A', B'; C)$, а T и R — по разные стороны другой ее ветви.

Доказательство. Без ограничения общности, будем считать, что $a < b$. Для точки P верно следующее: $AP + PA' < BP + PB'$, так как $AA' = BB'$. Поэтому $PB' - PA' > AP - BP = b - a$. Для точки Q , аналогично, $BQ + QB' < AQ + QA'$, поэтому $QB' - QA' < AQ - QB = b - a$. Неравенство $QB' - QA' < b - a < PB' - PA'$ как раз и означает первое утверждение леммы.

Так же для второй пары точек. Для точки R верно следующее: $AR + RA' < BR + RB'$, так как $AA' = BB'$. Поэтому $RB' - RA' > AR - BR = a - b$. Для точки T выполняется $BT + TB' < AT + TA'$, поэтому $TB' - TA' < AT - TB = a - b$. Неравенство $TB' - TA' < a - b < RB' - RA'$ означает второе утверждение леммы. \square

Из лемм 4.1.4 и 4.1.3 следует, что на гиперболе $(A, B; C)$ между указанными парами точек лежат точки, в которых пересекаются все три кривые $(A, B; C)$, $(A', B'; C)$ и $(A, A'; B, B')$.

Лемма 4.1.5. Точка C является точкой касания гипербол $(A', B'; C)$ и $(A, B; C)$.

Доказательство. По оптическому свойству гиперболы, в точке C касательная к гиперболе $(A, B; C)$ содержит биссектрису $\angle ACB$, а касательная к гиперболе $(A', B'; C)$ содержит биссектрису $\angle A'CB'$. Но так как $\angle ACB' = \angle BCA' = 60^\circ$, эти биссектрисы продолжают друг друга, и значит, касательные к обоим гиперболам в точке C совпадают. \square

Так как две кривые второго порядка могут пересекаться не более чем в четырех точках, а точка касания — точка пересечения кратности не менее чем два, то гиперболы $(A, B; C)$ и $(A', B'; C)$ пересекаются только в найденных в леммах 4.1.4 и 4.1.5 точках, а значит, и кривая $(A, A'; B, B')$ пересекается с ними только в этих точках.

Лемма 4.1.6. *Если $\triangle ABC$ не равнобедренный и для него существует точка Штейнера, то точка Штейнера $\triangle ABC$ расположена внутри всех mf -кривых.*

Доказательство. Обозначим точку Штейнера $\triangle ABC$ через S , а расстояния от нее до точек A, B, C — x, y, z , соответственно. По утв. 1.3.1, углы $\angle ASB, \angle BSC, \angle CSA$ равны 120° , значит,

$$\begin{cases} a^2 = y^2 + z^2 + yz \\ b^2 = z^2 + x^2 + zx \\ c^2 = x^2 + y^2 + xy. \end{cases}$$

Вычтем первое уравнение из второго:

$$(b - a)(b + a) = (x - y)(x + y + z).$$

Равенство $x = y$ выполняется тогда и только тогда, когда $a = b$. При этом гипербола, проходящая через точку C , вырождается в прямую — биссектрису угла $\angle ACB$ вместе с ее продолжением, и точка S лежит на этой прямой. Если же $a < b$, то

$$0 < \frac{b - a}{x - y} = \frac{\text{smn}(\{A, B, C\})}{b + a} < 1,$$

а это означает, что точка S расположена в выпуклой части треугольника, отсекаемой mf_c -кривой. Аналогично с двумя другими mf -кривыми. В итоге получаем, что точка Штейнера треугольника ABC расположена внутри всех mf -кривых, то есть в единственной выпуклой области из тех, на которые ими разбивается этот треугольник, если треугольник не имеет равных сторон. В случае

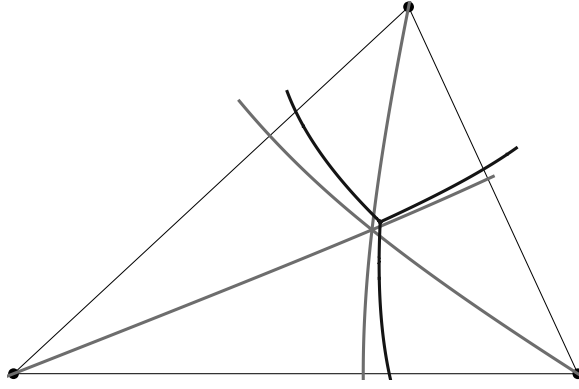


Рис. 4.1: Взаимное расположение mf- и smn-кривых

равенства двух сторон точка S лежит на границе между областями, расположенными симметрично. \square

Таким образом, mf_c -кривая имеет две точки пересечения с кривой $(A, A'; B, B')$. Одна из них — точка C , а другая — одна из точек, найденных в лемме 4.1.4. Обе они расположены вне $\triangle ABS$, поэтому они не принадлежат smn-кривой. Так как, вследствие леммы 4.1.6, точка S лежит внутри mf-кривой, то и smn-кривая целиком расположена внутри mf-кривой. \square

Расположение mf- и smn-кривых изображено на рис. 4.1.

4.2 Суботношение Штейнера для четырех точек на евклидовой плоскости

Одним из важнейших примеров применения теории бифуркаций оптимальных соединяющих графов является представленное в этом разделе вычисление суботношения Штейнера степени 4 евклидовой плоскости. На момент написания диссертации 4 является максимальной степенью, для которой найдено суботношение плоскости.

Рассмотрим различные способы расположения четырех точек на евклидовой плоскости и оценим для них суботношение Штейнера.

4.2.1 Нестрого выпуклые четырехугольники

Лемма 4.2.1. *Суботношение Штейнера для четырех точек, лежащих на одной прямой, равно 1.*

Доказательство. Пусть точки A, B, C, D лежат последовательно на прямой, обозначим множество этих точек через M .

Рассмотрим взвешенное дерево, состоящее из ребер AB, BC, CD , в котором вес каждого ребра равен расстоянию между инцидентными ему вершинами. По определению, оно является заполнением множества M . В нем все пути являются точными, а значит, не существует заполнения для M с меньшим весом (по утверждению 1.2.2). Значит, это дерево является минимальным заполнением для M и $\text{mf}(M) = AB + BC + CD = AD$. Очевидно, оно также является сетью с границей M , поэтому $\text{smn}(M) = AD$.

Итак, $\text{ssr}(M) = 1$. □

Лемма 4.2.2. *Суботношение Штейнера для четырех точек, ровно три из которых лежат на одной прямой, больше, чем $\frac{\sqrt{3}}{2}$.*

Доказательство. Рассмотрим множество точек $M = \{A, B, C, D\}$ такое, что точка B лежит между точками A и C , а точка D не лежит с ними на одной прямой.

По неравенству треугольника, $CB + BD > CD$ и $AB + BD > AD$, значит, $AC + BD = AB + BC + BD$ больше, чем $AB + CD$ и $BC + AD$. Без ограничения общности, будем считать, что $AB + CD \leq BC + AD$, то есть (по утверждению 1.2.4) концы усов минимального заполнения для M образуют пары $\{A, B\}$ и $\{C, D\}$ и $\text{mf}(M) = \frac{AB+BD+DC+CA}{2} = AB + \frac{BC+CD+DB}{2}$.

Обозначим через smn_1 и smn_2 длины минимальных сетей Штейнера для множеств $\{A, B\}$ и $\{B, C, D\}$ соответственно, а через mf_1 и mf_2 — веса минимальных заполнений для них. Объединение минимальных деревьев Штейнера для этих множеств является деревом, соединяющим множество M , значит, по определению, $\text{smn}(M) \leq \text{smn}_1 + \text{smn}_2$.

Для двух точек A и B минимальное заполнение состоит из одного ребра, вес которого равен расстоянию между этими точками, а значит вес минимального

заполнения для $\{A, B\}$ равен длине минимального дерева Штейнера для этого множества: $\text{smn}_1 = \text{mf}_1$.

В силу формулы веса минимального заполнения для трех точек (утверждение 1.2.3), имеем:

$$\text{mf}(M) = AB + \frac{1}{2}(BC + CD + DB) = \text{mf}_1 + \text{mf}_2,$$

то есть $\text{mf}(M) = \text{mf}_1 + \text{mf}_2$.

Учитывая также то, что для любых трех точек на евклидовой плоскости вес минимального заполнения не меньше, чем $\frac{\sqrt{3}}{2}$ длины минимального дерева Штейнера (по утверждению 1.4.1), получаем:

$$\begin{aligned} \text{ssr}(M) = \frac{\text{mf}(M)}{\text{smn}(M)} &\geq \frac{\text{mf}(M)}{\text{smn}_1 + \text{smn}_2} = \frac{\text{mf}_1 + \text{mf}_2}{\text{smn}_1 + \text{smn}_2} \geq \\ &\geq \frac{\text{smn}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{smn}_2}{\text{smn}_1 + \text{smn}_2} > \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \text{smn}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{smn}_2}{\text{smn}_1 + \text{smn}_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

то есть $\text{ssr}(M)$ строго больше, чем $\frac{\sqrt{3}}{2}$, когда M состоит из четырех различных точек, ровно три из которых лежат на одной прямой. \square

Лемма 4.2.3. *В классе выпуклых четырехугольников суботношение Штейнера равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$, причем это число достигается, если и только если граничное множество представляет собой вершины равнобедренной трапеции, у которой основания видны из точки пересечения диагоналей под углом 60° .*

Доказательство. Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$ с диагоналями AC и BD , пересекающимися в точке O . Обозначим через M множество вершин этого четырехугольника.

По неравенству треугольника, $AO + OD > AD$, $AO + OB > AB$, $BO + OC > BC$, $CO + OD > CD$, значит, сумма диагоналей больше суммы длин любой пары противоположных сторон. Значит, по утверждению 1.2.4, концы усов минимального заполнения для M образуют пары $\{A, B\}$, $\{C, D\}$ или $\{A, D\}$, $\{B, C\}$. Без ограничения общности считаем верным первый вариант, то есть, по утверждению 1.2.4, $\text{mf}(M) = \frac{1}{2}(AB + BD + DC + CA)$.

Пусть smn_1 и smn_2 — длины минимальных деревьев Штейнера для треугольников AOB и COD соответственно, mf_1 и mf_2 — веса минимальных заполнений этих треугольников. Объединение минимальных деревьев Штейнера для

треугольников AOB и COD является деревом, соединяющим множество M , значит, по определению, $\text{smn}(M) \leq \text{smn}_1 + \text{smn}_2$.

В силу формул веса минимального заполнения для трех и четырех точек (утверждения 1.2.3, 1.2.4),

$$\begin{aligned} \text{mf}(M) &= \frac{1}{2}(AB + BD + DC + CA) = \frac{1}{2}(AB + BO + OD + DC + CO + OA) = \\ &= \frac{1}{2}(AB + BO + OA) + \frac{1}{2}(OD + DC + CO) = \text{mf}_1 + \text{mf}_2, \end{aligned}$$

то есть $\text{mf}(M) = \text{mf}_1 + \text{mf}_2$.

Вспоминая, что для любых трех точек на евклидовой плоскости вес минимального заполнения не меньше, чем $\frac{\sqrt{3}}{2}$ длины минимального дерева Штейнера (утверждение 1.4.1), имеем:

$$\text{ssr}(M) = \frac{\text{mf}(M)}{\text{smn}(M)} \geq \frac{\text{mf}(M)}{\text{smn}_1 + \text{smn}_2} = \frac{\text{mf}_1 + \text{mf}_2}{\text{smn}_1 + \text{smn}_2} \geq \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \text{smn}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{smn}_2}{\text{smn}_1 + \text{smn}_2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

поэтому суботношение Штейнера для множества вершин выпуклого четырехугольника на евклидовой плоскости больше или равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Найдем все выпуклые четырехугольники, для которых оно в точности равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Это такие множества, что оба неравенства

$$\text{smn}(M) \leq \text{smn}_1 + \text{smn}_2$$

и

$$\text{mf}_1 + \text{mf}_2 \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{smn}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{smn}_2$$

превращаются в равенства. Второе неравенство становится равенством тогда и только тогда, когда $\text{mf}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{smn}_1$ и $\text{mf}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{smn}_2$, то есть когда треугольники AOB и COD правильные. При этом угол между сходящимися в точке O ребрами минимальных деревьев Штейнера треугольников AOB и COD будет развернутым (по утверждению 1.3.1), то есть объединение этих деревьев даст бинарное дерево, соединяющее M , в котором ребра сходятся под углами, равными 120° (для получения бинарного дерева точку O — вершину степени 2 — убираем, а инцидентные ей ребра заменяем одним ребром). Осталось показать, что это бинарное дерево и есть минимальное дерево Штейнера для M (а значит, и первое неравенство обратится в равенство).

Лемма 4.2.4. В случае, когда треугольники AOB и COD правильные, усы минимального дерева Штейнера для $ABCD - \{A, B\}$ и $\{C, D\}$.

Доказательство. Так как M состоит из четырех точек, минимальное дерево Штейнера для M имеет не более двух внутренних вершин, и углы между всеми его ребрами не менее 120° . Далее, так как углы $\angle ADB, \angle ACB, \angle CAD, \angle CBD$ меньше угла $\angle AOB = 60^\circ$, то все углы трапеции $ABCD$ меньше 120° . Поэтому минимальное дерево Штейнера не может не содержать внутренних вершин. Если бы внутренняя вершина была одна, то существовала бы пара смежных ребер, одно из которых соединяет граничные вершины, а другое — внутреннюю с одной из этих граничных. Угол между этими ребрами был бы меньше 120° в силу того, что внутренняя вершина лежала бы внутри четырехугольника $ABCD$ (по утверждению 1.3.5) и все углы трапеции меньше 120° . Значит, минимальное дерево Штейнера для таких трапеций содержит две внутренние вершины.

Предположим, что существует дерево Штейнера для $ABCD$, усы которого $\{A, D\}$ и $\{B, C\}$. Пользуясь утверждением 1.3.9, построим точки O'_1 и O'_2 — вершины правильных треугольников на боковых сторонах трапеции. Из симметрии равнобедренной трапеции получаем, что $O'_1O'_2$ параллелен AB и CD , то есть углы между $O'_1O'_2$ и диагоналями трапеции равны 60° . Получаем, что $\{OA, OD\}$ и $\{OB, OC\}$ должны быть усами этого дерева Штейнера, то есть его внутренние вершины слились в одну степени 4. Противоречие.

Единственный оставшийся вариант — бинарное минимальное дерево Штейнера с усами $\{A, B\}$ и $\{C, D\}$. □

Итак, мы нашли те и только те выпуклые четырехугольники, для множества вершин которых суботношение Штейнера в точности равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Это четырехугольники, у которых пара противоположных сторон и диагонали образуют два правильных треугольника, то есть это равнобедренные трапеции, у которых основания видны из точки пересечения диагоналей под углом 60° . Лемма доказана. □

Осталось разобрать невыпуклый случай — когда одна из точек границы ле-

жит внутри треугольника, образованного остальными граничными точками. Эта ситуация сложнее, чем предыдущие, здесь выделяются различные методы для разных конфигураций. Поэтому невыпуклые четырехточечные границы мы рассмотрим в специальном разделе.

4.2.2 Невыпуклый случай.

Теорема 4.2.5. *В классе невыпуклых четырехугольников суботношение Штейнера больше, чем $\frac{\sqrt{3}}{2}$.*

Доказательство. Для любых фиксированных точек A, B, C , не лежащих на одной прямой, рассмотрим всевозможные расположения точки D внутри и на границе треугольника ABC . Обозначим через $M = M(D)$ множество $\{A, B, C, D\}$, а через smn , mf и $\text{ssr} = \text{smn}(M)$, $\text{mf}(M)$ и $\text{ssr}(M)$ соответственно.

Лемма 4.2.6. *Если для невыпуклого четырехточечного множества минимальное дерево Штейнера — ломаная с углами между звеньями, большими или равными 120° , то его суботношение больше $\frac{\sqrt{3}}{2}$.*

Доказательство. Без ограничения общности, считаем, что эта ломаная состоит из отрезков AD , DB и BC , а значит, $\text{smn} = AD + DB + BC$.

Заметим, что $AB + CD > AD + BC$, так как углы $\angle ADB$ и $\angle DBC$ тупые. А из того, что вес минимального заполнения есть полусумма максимальной и минимальной сумм противоположных сторон четырехугольника (утверждение 1.2.4), следует, что

$$\text{mf} \geq \frac{AD + DB + BC + CA}{2}$$

. Значит,

$$\frac{\text{mf}}{\text{smn}} \geq \frac{AD + DB + BC + CA}{2(AD + DB + BC)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{CA}{AD + DB + BC} \right).$$

Рассмотрим точку K на пересечении прямых AC и BD . Так как $AK + KD > AD$, то $AK + KB + BC = AK + KD + DB + BC > AD + DB + BC$. Значит,

$$\frac{\text{mf}}{\text{smn}} > \frac{1}{2} \left(1 + \frac{CA}{AK + KB + BC} \right) = \frac{AK + KB + BC + CA}{2(AK + KB + BC)}.$$

Но $\text{mf}(\{A, B, C, K\}) = \frac{AK+KB+BC+CA}{2}$, так как $AC + KB > AB + KC$ и $AC + KB > AK + BC$ по неравенству треугольника, а $AK + BC < AB + CK$, из того, что $\angle AKB > \angle KBC > 120^\circ > 90^\circ$. Также выполнено $\text{smn}(\{A, B, C, K\}) = AK + KB + BC$. Значит,

$$\frac{\text{mf}}{\text{smn}} > \frac{AK + KB + BC + CA}{2(AK + KB + BC)} = \text{ssr}(\{A, B, C, K\}).$$

То есть суботношение в рассматриваемом случае больше суботношения для четырех точек, три из которых лежат на одной прямой, а значит, строго больше $\frac{\sqrt{3}}{2}$. □

Лемма 4.2.7. *Если минимальное дерево Штейнера — звезда из трех отрезков, сходящихся в точке D , то суботношение Штейнера больше $\frac{\sqrt{3}}{2}$.*

Доказательство. Такое минимальное дерево Штейнера совпадает как подмножество плоскости с минимальным деревом Штейнера для множества $M \setminus \{D\}$. А вес минимального заполнения для границы M больше веса минимального заполнения для $M \setminus \{D\}$, что следует из формул веса минимального заполнения и неравенства треугольника. Поэтому суботношение множества M больше суботношения $M \setminus \{D\}$, значит, оно больше $\frac{\sqrt{3}}{2}$. □

Из бифуркационных диаграмм топологий сетей Штейнера следует, что осталось рассмотреть только одну топологию сети Штейнера — с одной внутренней точкой, причем таких деревьев может быть одно или два.

Дальше будем пользоваться следующей идеей. Множество, в котором может лежать точка D , — это компакт, а суботношение Штейнера непрерывно по отношению к деформациям граничного множества (следствие 2.1.3). Значит, по теореме Вейерштрасса, существует такое положение точки D на этом компакте, на котором достигается минимум отношения веса минимального заполнения к длине минимальной сети Штейнера.

Допустим, что минимум суботношения Штейнера ssr достигается внутри компакта, то есть когда точка D лежит внутри $\triangle ABC$. Докажем, что такого быть не может. Для этого достаточно показать, что найдется какое-нибудь

направление движения точки D , производная по которому от ssr отрицательна. По теореме 2.1.2,

$$(ssr)' = \left(\frac{mf}{smn} \right)' = \frac{1}{smn} \left((mf)' - \frac{mf}{smn} (smn)' \right).$$

Докажем, что существует направление, производная по которому от mf отрицательна, а от smn положительна. Отсюда, так как $smn > 0$ и $\frac{mf}{smn} > 0$, будет следовать, что $\left(\frac{mf}{smn} \right)' < 0$ по этому направлению, а значит, рассматриваемая точка D не является точкой минимума. Каждое такое направление будем называть *подходящим*.

Далее везде рассматриваем углы, меньшие 180° , если иное не указывается специально.

Нам понадобится следующая лемма об изменении длины ломаной из двух звеньев.

Лемма 4.2.8. Пусть $A_1A_2A_3$ — ломаная, вершины A_1 и A_3 закреплены, а A_2 может двигаться. Тогда длина этой ломаной уменьшается при движении A_2 по направлениям, составляющим острый угол с биссектрисой $\angle A_1A_2A_3$, и увеличивается при движении A_2 в противоположных направлениях.

Доказательство. Длина такой ломаной не меняется, если A_2 движется по эллипсу с фокусами A_1, A_3 , проходящему через данное положение точки A_2 , уменьшается, если A_2 движется внутрь этого эллипса, и увеличивается, если A_2 выходит за него. По оптическому свойству эллипса, A_1A_2 составляет такой же угол с касательной эллипса, что и A_2A_3 . Поэтому биссектриса $\angle A_1A_2A_3$ перпендикулярна касательной к эллипсу в точке A_2 . Отсюда и получаем утверждение леммы. \square

Лемма 4.2.9. Если для невыпуклой четырехточечной границы M реализуется одно минимальное заполнение, то существуют подходящие направления.

Доказательство. Как было замечено выше, нам осталось проверить две ситуации: когда есть одно минимальное дерево Штейнера с одной внутренней точкой и когда их два.

Пусть одно из минимальных деревьев Штейнера имеет топологию $Ad - BC$, а второе, если реализуется, — $AC - dB$. Обозначим их точки Штейнера через O_1 и O_2 , соответственно. Как и раньше, через A' и B' обозначаем вершины правильных треугольников, построенных на сторонах BC и AC треугольника ABC вне его. Тогда, в силу алгоритма Мелзака, $\text{smn} = BD + DB' = AD + DA'$.

Заметим, что, так как три ребра сходятся в дереве Штейнера под углами 120° и сумма углов каждого из треугольников ADO_2 , CDO_2 , CDO_1 , BDO_1 равна 180° , то все углы $\angle ADO_2$, $\angle O_2DC$, $\angle CDO_1$, $\angle O_1DB$ меньше 60° . Поэтому углы $\angle ADO_1$ и $\angle BDO_2$ как суммы трех из четырех рассмотренных меньше 180° .

Найдем сначала направление, при движении точки D по которому длины обоих деревьев Штейнера увеличатся. Тогда обязательно smn' будет больше нуля. Для этого построим DM_1 и DM_2 — продолжения биссектрис углов $\angle ADO_1$ и $\angle BDO_2$. Полуплоскости, границы которых перпендикулярны DM_1 и DM_2 , и содержащие DM_1 и DM_2 (обозначим их через α_1 и α_2 , соответственно), пересекаются по внутренности угла $\angle K_1DK_2$, лежащего внутри угла $\angle ADB$. Внутренность угла $\angle K_1DK_2$ как раз и содержит нужные для положительности $(\text{smn})'$ направления (по лемме 4.2.8). Докажем, что внутри этого угла обязательно найдутся направления, производные по которым от mf отрицательны. Рассмотрим три четырехугольника, полупериметрам которых может быть равен вес минимального заполнения.

1. Пусть mf равно половине периметра четырехугольника $ADBC$. Тогда при движении точки D внутрь угла K_1DK_2 она попадает также внутрь угла $\angle ADB$, и образует с его биссектрисой острый угол. Значит, все направления внутрь угла K_1DK_2 подходят не только для положительности $(\text{smt})'$, но и для отрицательности $(\text{mf})'$, и эти направления являются подходящими.

2. Пусть mf равно полупериметру четырехугольника $ABDC$. Для отрицательности $(\text{mf})'$ подходят направления, составляющие с биссектрисой DM_3 угла $\angle BDC$ острый угол. А это те вектора, которые лежат в полуплоскости, содержащей DM_3 , и граница которой перпендикулярна DM_3 (обозначим ее через γ). Покажем, что полуплоскость γ пересекается с углом K_1DK_2 .

Это верно, так как $\angle BDC < \angle BDO_2$ (значит, луч DL , являющийся частью

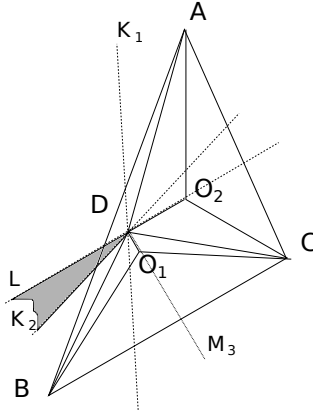


Рис. 4.2: Угол направлений, по которым $(ssr)'$ отрицательна.

границы γ , лежит внутри $\angle K_1DK_2$, рис. 4.2). Угол $\angle K_2DL$ — область пересечения. Это и есть угол всех подходящих направлений.

3. Случай, когда mf равно полупериметру четырехугольника $ABCD$, симметричен случаю 2, и рассуждения здесь аналогичны.

Если же реализуется только одно минимальное дерево Штейнера, то надо искать пересечение двух из трех рассмотренных полуплоскостей. Очевидно, угол подходящих направлений будет не меньше. \square

Лемма 4.2.10. *Если минимальных заполнений для невыпуклой четырехточечной границы M два, то либо подходящие направления существуют, либо нет, но при этом суботношение Штейнера больше $\frac{\sqrt{3}}{2}$.*

Доказательство. Рассмотрим точки D , лежащие на mf -кривой внутри $\triangle ABC$. Будем двигаться по этой кривой от вершины треугольника к противоположной стороне.

Без ограничения общности, будем работать с mf_a -кривой. На ней $mf = AD + DB + BC + CA = AB + BC + CD + DA$. Пока точка D лежит между точкой A и smn -кривой, минимальная сеть Штейнера имеет топологию $Ad - BC$, и, по алгоритму Мелзака, длина минимального дерева Штейнера равна $AD + DA'$, где A' — вершина правильного $\triangle BCA'$, построенного вне $\triangle ABC$ (аналогично, B' и C' — вершины соответствующих правильных треугольников).

Найдем направления, при движении точки D по которым mf уменьшается. Это все направления, содержащиеся в угле пересечения полуплоскостей γ_1 и γ_2 ,

таких что граница γ_1 перпендикулярна биссектрисе $\angle ADB$, а граница γ_2 — биссектрисе $\angle ADC$, и обе полуплоскости содержат соответствующие биссектрисы. Полученный угол содержит отрезок AD .

Длина минимального дерева Штейнера увеличивается при движении точки D внутрь полуплоскости, не содержащей $\angle ADA'$, с границей, перпендикулярной его биссектрисе. Так как $\angle ADA' > \angle ADB$ и $\angle ADA' > \angle ADC$, то эта полуплоскость пересекается с углом направлений, производная по которым от mf отрицательна. Угол пересечений и есть угол подходящих направлений.

Изменение типа сети Штейнера при движении точки D по mf_a -кривой о вершины к стороне происходит при встрече с smn -кривой. Она не является smn_a -кривой, так как одноименные mf - и smn - кривые не пересекаются, по теореме 4.1.2.

Будем считать, что встретившаяся smn -кривая — smn_b -кривая (на ней $\text{smn} = AD + DA' = CD + DC'$). Докажем, что в точке ее пересечения с mf_a -кривой существует направление, по которому ssr' отрицательна. По сравнению с предыдущей ситуацией, добавляется еще полуплоскость направлений, при движении точки D по которым длина ломаной CDC' увеличивается. Но эта полуплоскость уже содержит угол подходящих для предыдущей ситуации направлений, так как $\triangle CDC'$ ориентирован так же, как и $\triangle CAC'$, пока не встретила линия Симпсона CC' .

После встречи с smn_b -кривой точка D попадает в область, где реализуется топология минимальной сети Штейнера $AB - dC$. Причем до линии Симпсона CC' точка D лежит по одну сторону с точкой A от CC' , а после — по одну сторону с точкой B от нее. В первом случае условия на подходящие направления такие же, как при пересечении smn_b -кривой, за исключением увеличения длины дерева $Ad - BC$, поэтому подходящие направления существуют. На линии CC' длина минимального дерева Штейнера увеличивается при любом смещении точки D не вдоль CC' , поэтому подходят все направления, при движении по которым mf уменьшается, а мы уже показали, что такие есть.

Осталась ситуация, когда минимальная сеть Штейнера имеет топологию $AB - dC$ и точки B и D лежат по одну сторону от линии CC' . В этом случае

полуплоскость направлений, при движении по которым точки D длина ломаной CDC' увеличивается, и угол направлений, при движении по которым точки D вес обоих минимальных заполнений уменьшается, не пересекаются, поэтому ту же технику применить не получится.

Возможно два варианта: либо сначала встретится точка равенства весов трех минимальных заполнений M , а затем линия Симпсона CC' , либо наоборот.

Допустим, точка D уже прошла за точку равного обхода $\triangle ABC$ (это верно в первом варианте и во втором после встречи с mf_c -кривой). Тогда если точка D будет смещаться с mf -кривой в любой двумерный страт, одно минимальное заполнение останется минимальным, а вес другого станет равным максимальному полупериметру из трех полупериметров четырехугольников с вершинами из M . Поэтому достаточно найти направления, при движении по которым увеличится min , а уменьшаться будет вес только одного минимального заполнения, тип которого реализуется вблизи точки D в угле подходящих направлений. Рассмотрим, например, минимальное заполнение с удвоенным весом $AD + DC + CB + BD$. Его вес уменьшается тогда и только тогда, когда уменьшается длина ломаной ADC . Полуплоскость подходящих для этого направлений пересекается с полуплоскостью подходящих для увеличения длины CDC' направлений, так как у этих ломаных ровно одно звено общее. При этом часть угла подходящих направлений внутри $\triangle ABC$ лежит в страте, в котором реализуется минимальное заполнение с удвоенным весом $AD + DC + CB + BD$, поэтому эти направления действительно являются уменьшающими ssr .

Во втором варианте неисследованной осталась ситуация, когда точка D лежит между линией Симпсона CC' и mf_c -кривой (и точка D лежит с той же стороны от CC' , что и точка B). Здесь воспользуемся следующими соображениями. Вес одного из минимальных заполнений равен полупериметру четырехугольника $ABCD$. Рассмотрим эллипс с фокусами A и C , проходящий через точку D . Он пересекает сторону треугольника CB в некоторой точке K . Исходя из бифуркаций минимальных заполнений для четырех граничных точек, заключаем, что при попадании D в точку K

$$\text{mf}(\{A, B, C, D\}) = \frac{AB + BC + CD + DA}{2},$$

то есть формула веса минимального заполнения та же. Топология минимальной сети Штейнера так же не изменилась, так как mf -кривые лежат внутри mf -кривых. Вес минимального заполнения так же не изменился, потому что точка K лежит на построенном эллипсе, а длина минимального дерева Штейнера увеличилась. Поэтому суботношение Штейнера на рассматриваемом участке больше, чем в точке K , а мы уже доказали, что если ровно три из четырех граничных вершин лежат на одной прямой, то суботношение больше $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Мы разобрали все точки mf -кривой, кроме точки равного обхода $\triangle ABC$, поэтому лемма доказана. \square

Лемма 4.2.11. *Если для M реализуются три минимальных заполнения, то есть D расположена в точке $X(176)$ равного обхода $\triangle ABC$, то подходящие направления существуют.*

Доказательство. Без ограничения общности, будем считать, что минимальная сеть Штейнера имеет топологию $AB - dC$, то есть ее длина равна $CD + DC'$. Полуплоскость с направлениями, увеличивающими ее длину, содержит либо точку A , либо точку B , поэтому она содержит часть от $X(176)$ до вершины $\triangle ABC$ либо mf_a -, либо mf_b -кривой. Но при движении точки D по mf -кривой в сторону вершины $\triangle ABC$ вес минимального заполнения M уменьшается, так как при движении по касательной к mf -кривой уменьшаются периметры обоих четырехугольников, чьи полупериметры дают формулы веса минимального заполнения на mf -кривой. Поэтому подходящие направления существуют. \square

Итак, мы рассмотрели все возможные ситуации топологий минимальных сетей Штейнера и формул минимальных заполнений для невыпуклой границы из четырех точек, опираясь на бифуркационные диаграммы и их взаимное расположение, поэтому теорема доказана. \square

Итак, мы показали, что суботношение Штейнера евклидовой плоскости равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Очевидно, в евклидовом пространстве большей размерности возможно больше конфигураций граничных точек, поэтому для них суботношение не

больше этой величины (например, З. Н. Овсянников в [37] показал, что минимум суботношения Штейнера для четырех точек в трехмерном пространстве равен $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7} < \frac{\sqrt{3}}{2}$). Оказывается, на евклидовом пространстве достигается наибольшая величина каждого из отношений типа Штейнера среди всех n -мерных пространств, о чем будет рассказано в следующей главе.

4.3 Оценка суботношения Штейнера римановых многообразий

В [53] А. О. Иванов и А. А. Тужилин показали, что отношение Штейнера любого связного риманова n -мерного многообразия не больше, чем отношение Штейнера n -мерного евклидова пространства. В [46] В. А. Мищенко доказала аналогичный результат для отношения Штейнера-Громова. Основным результатом данного раздела является то, что для любого связного риманова многообразия суботношение Штейнера не больше, чем суботношение евклидова пространства той же размерности, а значит, с учетом приведенных выше результатов, для размерности не меньше 2 оно меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (с учетом найденного З. Н. Овсянниковым примера пяти точек на плоскости, для которых суботношение Штейнера меньше $\frac{\sqrt{3}}{2}$).

Теорема 4.3.1. *Суботношение Штейнера произвольного связного риманова многообразия размерности n не превосходит суботношения Штейнера евклидова пространства \mathbb{R}^n .*

Сначала докажем несколько вспомогательных результатов.

Лемма 4.3.2. *Пусть X — множество, а ρ_1 и ρ_2 — метрики на нем. Предположим, что для некоторых чисел $c_2 \geq c_1 > 0$ неравенства $c_1\rho_2(x, y) \leq \rho_1(x, y) \leq c_2\rho_2(x, y)$ выполнены для любых точек x и y из X . Тогда*

$$\frac{c_1}{c_2} \text{ssr}(X, \rho_2) \leq \text{ssr}(X, \rho_1) \leq \frac{c_2}{c_1} \text{ssr}(X, \rho_2).$$

Доказательство. Если G — минимальная сеть Штейнера с границей $N \subset X$ в метрике ρ_1 , то G является соединяющей N сетью в любой другой метрике,

поэтому

$$\text{smn}(N, \rho_1) = \rho_1(G) \geq c_1 \rho_2(G) \geq c_1 \text{smn}(N, \rho_2).$$

Аналогично,

$$\text{smn}(N, \rho_2) \geq \frac{1}{c_2} \text{smn}(N, \rho_1),$$

то есть

$$\text{smn}(N, \rho_1) \leq c_2 \text{smn}(N, \rho_2).$$

В [46] было показано, что

$$\text{mf}(N, \rho_1) \geq c_1 \text{mf}(N, \rho_2) \quad \text{и} \quad \text{mf}(N, \rho_1) \leq c_2 \text{mf}(N, \rho_2).$$

Поэтому для любого конечного неодноточечного множества N , для которого существует минимальная сеть Штейнера (минимальное заполнение существует всегда [22]),

$$\text{ssr}(N, \rho_1) = \frac{\text{mf}(N, \rho_1)}{\text{smn}(N, \rho_1)} \leq \frac{c_2 \text{mf}(N, \rho_2)}{c_1 \text{smn}(N, \rho_2)} = \frac{c_2}{c_1} \text{ssr}(N, \rho_2).$$

Значит,

$$\text{ssr}(X, \rho_1) = \inf_N \text{ssr}(N, \rho_1) \leq \frac{c_2}{c_1} \inf_N \text{ssr}(N, \rho_2) = \frac{c_2}{c_1} \text{ssr}(X, \rho_2).$$

Аналогично получается второе неравенство из утверждения леммы. \square

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и (X', ρ') — его подпространство, т. е. $X' \subset X$ и для любых точек $u, v \in X'$ выполнено $\rho'(u, v) = \rho(u, v)$. Так как каждое конечное подмножество подпространства X' является также конечным подмножеством всего пространства X , справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.3.3. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, (X', ρ') — его подпространство. Тогда $\text{ssr}(X', \rho') \geq \text{ssr}(X, \rho)$.

Следующая лемма основана на том, что оптимальный соединяющий граф останется соединяющим при отображении, не увеличивающем расстояния. Доказательство можно найти в [53] и [46].

Лемма 4.3.4. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение метрического пространства (X, ρ_X) в метрическое пространство (Y, ρ_Y) , не увеличивающее расстояний,

то есть $\rho_X(x, y) \geq \rho_Y(f(x), f(y))$ для любых точек x и y из X . Тогда для любого конечного подмножества $N \subset X$ выполняется:

$$\text{mf}(N) \geq \text{mf}(f(N)), \quad \text{smn}(N) \geq \text{smn}(f(N)).$$

Пусть M — связное n -мерное риманово многообразие. Для любой кусочно-гладкой кривой γ ее длину по отношению к римановой метрике обозначим через $\text{len}(\gamma)$. Тогда внутренняя метрика ρ , порожденная римановой метрикой, — это точная нижняя грань длин всех таких кривых, соединяющих точки, то есть $\rho(x, y) = \inf_{\gamma} \text{len}(\gamma(x, y))$, где $\gamma(x, y)$ — произвольная кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки x и y на M .

Пусть P — точка многообразия M . Рассмотрим нормальные координаты x_1, \dots, x_n с центром в точке P , для которых риманова метрика g_{ij} , вычисленная в точке P , совпадает с δ_{ij} . Возьмем выпуклый открытый шар $U(\delta)$ с центром в точке P радиуса δ , для которого каждая пара его точек x и y соединяется единственной кратчайшей геодезической γ , лежащей в $U(\delta)$. Тогда $\rho(x, y) = \text{len}(\gamma)$. Таким образом, $U(\delta)$ является метрическим пространством с внутренней метрикой.

В координатах x_1, \dots, x_n шар $U(\delta)$ задается так: $U(\delta) = \{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < \delta^2\}$, поэтому если на $U(\delta)$ задать евклидово расстояние ρ_e (по отношению к нормальным координатам x_i), то метрическое пространство $(U(\delta), \rho_e)$ также будет пространством с внутренней метрикой, порожденной евклидовой метрикой δ_{ij} .

В силу гладкой зависимости метрики $g_{ij}(x)$ от точки x в шаре $U(\delta)$, для любого положительного числа $\varepsilon < \frac{1}{n^2}$ существует такое положительное число δ , что для всех точек x из $U(\delta)$ выполнено:

$$|g_{ij}(x) - \delta_{ij}| < \varepsilon. \quad (4.3.1)$$

Отсюда вытекает следующая лемма, доказательство которой приведено в [53].

Лемма 4.3.5. Пусть $\|v\|_g$ обозначает длину касательного вектора $v \in T_x M$ в метрике g_{ij} , а $\|v\|_e$ — длину этого вектора в евклидовой метрике δ_{ij} . Если для любых i и j выполняется неравенство (4.3.1), то

$$\sqrt{1 - n^2\varepsilon} \|v\|_e \leq \|v\|_g \leq \sqrt{1 + n^2\varepsilon} \|v\|_e.$$

Опираясь на определение расстояния между точками связного риманова многообразия, сразу же получаем следующий результат.

Следствие 4.3.6. Пусть M — произвольное связное риманово многообразие, $U(\delta)$ — открытый шар радиуса δ , ρ — внутренняя метрика, порожденная римановой метрикой на нем, ρ_ϵ — внутренняя метрика, порожденная евклидовой метрикой на нем. Тогда для любого положительного $\epsilon < \frac{1}{n^2}$ существует положительное δ такое, что для всех точек $x, y \in U(\delta)$ выполняется

$$\sqrt{1 - n^2\epsilon}\rho_\epsilon(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \sqrt{1 + n^2\epsilon}\rho_\epsilon(x, y).$$

Лемма 4.3.7. Пусть U — открытый шар в \mathbb{R}^n со стандартной евклидовой метрикой. Тогда $\text{ssr}(\mathbb{R}^n) = \text{ssr}(U)$.

Доказательство. Любое конечное множество N можно сжатием и сдвигом поместить в шар U , при этом все расстояния умножаются на одно и то же число λ . Поэтому и вес каждого оптимального соединяющего графа умножится на λ , а значит, все отношения типа Штейнера сохранятся, откуда и следует утверждение леммы. \square

Из всего сказанного вытекает следующий результат.

Следствие 4.3.8. Пусть M — произвольное связное риманово многообразие размерности n и $U(\delta)$ — открытый шар радиуса δ с центром в некоторой точке $P \in M$. Обозначим через ρ внутреннюю метрику на M , порожденную римановой метрикой. Тогда для любого положительного числа $\epsilon < \frac{1}{n^2}$ существует положительное δ такое, что для всех точек x и y из $U(\delta)$ верно:

$$\sqrt{\frac{1 - n^2\epsilon}{1 + n^2\epsilon}} \text{ssr}(\mathbb{R}^n) \leq \text{ssr}(U(\epsilon), \rho) \leq \sqrt{\frac{1 + n^2\epsilon}{1 - n^2\epsilon}} \text{ssr}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство теоремы 4.3.1.

Пусть M — связное риманово n -мерное многообразие, ρ — внутренняя метрика на нем, порожденная римановой метрикой. Пусть P — произвольная точка из M и $U(\delta)$ — открытый шар радиуса δ с центром в этой точке. Введем в $U(\delta)$ нормальные координаты x_i , и пусть ρ_ϵ — внутренняя метрика на $U(\delta)$, порожденная евклидовой метрикой δ_{ij} . Здесь δ такое же, как в следствии 4.3.8.

Пусть $\{\varepsilon_i\}$ — некоторая убывающая последовательность положительных чисел такая, что $\varepsilon_i < \delta$ для любого i и $\varepsilon_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Рассмотрим семейство вложенных множеств $X_i = U(\varepsilon_i)$. Из леммы 4.3.7 получаем, что $\text{ssr}(U(\varepsilon_i), \rho_e) = \text{ssr}(\mathbb{R}^n)$.

В силу выпуклости шаров $U(\varepsilon_i)$, внутренняя метрика на них, порожденная римановой метрикой многообразия M , совпадает с ограничением метрики ρ . По следствию 4.3.8,

$$\text{ssr}(X_i) \leq \sqrt{\frac{1 + n^2\varepsilon}{1 - n^2\varepsilon}} \text{ssr}(\mathbb{R}^n).$$

Так как подкоренное выражение стремится к 1 при $i \rightarrow \infty$, то $\inf_i \text{ssr}(X_i, \rho) \leq \text{ssr}(\mathbb{R}^n)$, но, по лемме 4.3.3, $\text{ssr}(M, \rho) \leq \inf_i \text{ssr}(X_i, \rho)$.

Доказательство окончено.

Заключение

Перечислим еще раз основные результаты работы и приведем возможные направления дальнейших исследований.

В диссертации минимальные заполнения и минимальные сети Штейнера рассмотрены в качестве оптимальных взвешенных графов с границей (оптимальных заполнений в классе заполнений и в классе сетей). Для сетей Штейнера на плоскости введено понятие планарных структур, объединяющее в себе топологию и взаимное расположение граничных вершин; оно помогает описанию бифуркационных диаграмм в третьей главе.

Во второй главе доказана дифференцируемость по направлениям веса минимального заполнения и минимального параметрического заполнения на связном полном римановом многообразии. Этот результат дополняет аналогичный факт о минимальных деревьях Штейнера [45]. Дифференцируемость по направлениям оптимальных графов с границей позволяет сделать вывод о стратификации плоскости при построении бифуркационных диаграмм в третьей главе, а также разработать специальную технику для вычисления суботношения Штейнера в четвертой главе.

В третьей главе описана теория бифуркаций оптимальных взвешенных соединяющих графов с границей. Показано, что одномерные страты на бифуркационных диаграммах минимальных заполнений могут не являться алгебраическими кривыми, в то время как на бифуркационных диаграммах минимальных сетей Штейнера все одномерные страты являются алгебраическими кривыми не выше 12 порядка.

Далее в третьей главе подробно рассмотрен случай четырех точек. Для всех четырехточечных конфигураций построены бифуркационные диаграммы как минимальных заполнений, так и минимальных сетей Штейнера. Оказалось, что

mf-кривые, на которых реализуется по два бинарных типа минимальных заполнений, являются ветвями гипербол, а smn-кривые, на которых реализуется по два типа минимальных сетей Штейнера, склеены из частей алгебраических кривых порядка не выше 8. Найдены все точки, для которых реализуются одновременно три типа оптимальных заполнений, в классе всех заполнений их одна или две, в классе сетей — не больше одной. Для сетей Штейнера в третьей главе построены не только бифуркации типов, но и бифуркации топологий фиксированного бинарного типа.

Четвертая глава посвящена взаимоотношению минимальных заполнений и минимальных сетей Штейнера. Показано, как расположены друг относительно друга mf- и smn-кривые для невыпуклых четырехточечных границ, а также бифуркационные диаграммы применяются для вычисления суботношения Штейнера степени 4 евклидовой плоскости. В последнем параграфе четвертой главы доказано, что суботношение Штейнера римановых многообразий не больше суботношения евклидового пространства той же размерности, таким образом, дана верхняя оценка на эту числовую характеристику для римановых многообразий.

Перечислим некоторые вопросы, которые хотелось бы решить в дальнейшем.

1. Есть ли более простая формула веса минимального заполнения конечного множества точек в евклидовом пространстве, хотя бы для размерности 2? Можно ли ограничить кратность мультиобходов в этом случае? Это помогло бы сделать вывод о более простом виде одномерных стратов на бифуркационных диаграммах минимальных заполнений.
2. Построить бифуркационные диаграммы минимальных заполнений и минимальных сетей Штейнера для произвольного числа граничных точек плоскости.
3. Построить бифуркационные диаграммы оптимальных соединяющих графов в других пространствах.
4. Найти или оценить суботношение Штейнера больших степеней в евклидовой плоскости и других пространствах.

Литература

- [1] Kruskal J. B. On the shortest spanning subtree of a graph and traveling salesman problem // Proc. Amer. Math. Soc. — 1956. — vol. 7. — P. 48–50.
- [2] Prim R. C. Shortest connecting networks and some generalizations // BSTJ. — 1957. — vol. 6. — P. 1389–1401.
- [3] Fermat P. Oeuvres // ed. H. Tannery, Paris. — 1891. — vol.1.
- [4] Bopp K. Über das kürzeste Verbindungssystem zwischen vier Punkten : Thesis. — Universität Göttingen. — 1879.
- [5] Gauss C.F, Schumacher H. C. Briefwechsel zwischen K. F. Gauss und H. C. Schumacher. — Altona, Esch. — 1860.
- [6] Brazil M., Graham R. L., Thomas D., Zachariasen M. On the history of the Euclidean Steiner tree problem // Archive for History of Exact Sciences. — 2014. — Vol. 68, № 3. — P. 327–354.
- [7] Gergonne J. D. Solutions purement géométriques des problèmes de minimis proposés aux pages 196, 232 et 292 de ce volume, et de divers autres problèmes analogues. // Annales de Mathématiques pures et appliquées. — 1811. — Vol. 1. — P. 375–384.
- [8] Melzak Z. A. On the problem of Steiner // Canad. Math. Bull. — 1961. — № 4 — P. 143–148.
- [9] Jarník V., Kössler O. O minimálních grafech, obsahujících n daných bodů // Časopis pro Pěstování Mat. a Fys. (Essen). — 1934. — Vol. 63. — P. 223–235.
- [10] Korte B., Nešetřil J. Vojtěch Jarník's work in combinatorial optimization // Discrete Mathematics. — 2001. — Vol. 235. — P. 1–17.
- [11] Курант. Р., Робинс. Г. Что такое математика? : Элементарный очерк идей и методов, 3-е изд., испр. и доп. — М. : МЦНМО. — 2001.
- [12] Гаркави А. Л., Шматков В. А. О точке Ламе и ее обобщениях в нормированном пространстве // Матем. сб. — 1974. — 95(137) : 2(10). — С. 272–293
- [13] Vesely L. A characterization of reflexivity in the terms of the existence of generalized centers // Extracta Mathematicae. — 1993. — 8 : 2–3. — P. 125–131.

- [14] Papini P. L. Two new examples of sets without medians and centers // Sociedad de Estadística e Investigación Operativa Top. — 2005. — 13 : 2. — P. 315–320.
- [15] Бородин П. А. Пример несуществования точки Штейнера в банаховом пространстве // Матем. заметки. — 2010. — 87 : 4. — С. 514–518.
- [16] Беднов Б. Б., Стрелкова Н. П. О существовании кратчайших сетей в банаховых пространствах // Матем. заметки. — 2013. — 94 :1. — С. 46–54.
- [17] Garey M. R., Graham R. L., Johnson D. S. Some NP-complete geometric problems // In Proceedings of the Eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. — 1976. — P. 10–22.
- [18] Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание : Пер. с англ. — М. : Издательский дом “Вильямс”. — 2005.
- [19] Edmonds J. Paths, trees and flowers // Canadian Journal of Mathematics. — 1965. — Vol. 17. — P. 449–467.
- [20] Cook S. The Complexity of theorem proving procedures // In Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing. — 1971. — P. 151–158.
- [21] Gromov M. Filling Riemannian manifolds // J. Diff. Geom. — 1983. — №18. — P. 1–147.
- [22] Иванов А. О., Тужилин А. А. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Матем. сб. — 2012. — 203 : 5. — С. 65–118.
- [23] Беднов Б. Б., Бородин П. А. Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Матем. сб. — 2014. — 205 : 4. — С. 3–20.
- [24] Бурушева Л. Ш. Банаховы пространства, в которых длина кратчайшей сети зависит только от попарных расстояний между точками // Матем. сб. — 2019. — 210 : 3. — С. 3–16.
- [25] Saitou. N., Nei M. The neighbour-joining method for reconstructing phylogenetic trees // Molecular Biology and Evolution: journal. — Oxford University Press. — Vol. 4, №. 4. — P. 406–425.
- [26] Gilbert E. N., Pollak H. O. Steiner minimal trees // SIAM J. Appl. Math. — 1968. — 16 : 1 — P. 1–29.
- [27] Du D. Z., Hwang F. K. A proof of Gilbert-Pollak’s conjecture on the Steiner ratio // Algorithmica. — 1992. — Vol. 7, № 1–2. — P. 121–135.
- [28] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. The Steiner ratio Gilbert–Pollak conjecture is still open // Algorithmica. — 2012. — Vol. 62, № 1–2. — P. 630–632.

- [29] Pollak H. O. Some remarks on the Steiner problem // J. Combin. Theor., Ser. A. — 1978. — Vol. 24, № 3. — P. 278–295.
- [30] Du D. Z., Hwang F. K., Yao E. N. The Steiner ratio conjecture is true for five points // J. Combin. Theory, Ser. A. — 1985. — Vol. 38. — P. 230–240.
- [31] Rubinstein J. H., Thomas D. A. The Steiner ratio conjecture for six points // J. Combin. Theory, Ser. A. — 1989. — Vol. 58. — P. 54–77.
- [32] De Wet P. O. Geometric Steiner minimal trees : Ph. D. Thesis. — Univ. of South Africa, Pretoria. — 2008.
- [33] Kirszenblat D. The Steiner ratio conjecture for eight points : M. Thesis. — Univ. Melbourne. — 2014.
- [34] Пахомова А. С. Оценки для суботношения Штейнера и отношения Штейнера–Громова // Вестн. Моск. ун-та., Сер. 1. Матем., мех. — 2014. — №1 — С. 17–25.
- [35] Иванов А. О., Тужилин А. А. Теория экстремальных сетей. — Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований. — 2003.
- [36] Cieslik D. The Steiner ratio of metric spaces — a report. — Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, Preprint-Reihe Mathematik. — 2010, № 9.
- [37] Овсянников З. Н. Суботношение Штейнера для пяти точек на плоскости и четырех точек в пространстве // Фунд. и прикл. матем. — 2013. — 18 : 2. — С. 167–179.
- [38] Du D. Z., Hwang F. K., Song G. D., Ting G. T. Steiner minimal trees on sets of four points // Discr. and Comp. Geometry. — 1987.— Vol. 2.— P. 401–414.
- [39] Ollerenshaw K. Minimal networks linking four points in a plane // Inst. Math. Appl. — 1978. — Vol. 15. — P. 208–211.
- [40] Weng J. F. Variational approach and Steiner minimal trees on four points // Discrete Mathematics. — 1994. — Vol. 132, № 1–3, P. 349–362.
- [41] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. — М. : Наука. — 1990.
- [42] Еремин А. Ю. Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства // Матем. сб. — 2013. — 204 : 9. — С. 51–72.
- [43] Simpson T. The Doctrine and Application of Fluxions. — London: printed for J. Nourse. — 1750.

- [44] Hwang F. K., Richards D. S., Winter P. The Steiner Tree Problem // *Annals of Discrete Mathematics*. — 1992. — 53.
- [45] Иванов А. О., Тужилин А. А. Дифференциальное исчисление на пространстве минимальных деревьев Штейнера в римановых многообразиях // *Матем. сб.* — 2001. — 192 : 6. — С. 31–50.
- [46] Мищенко В. А. Оценки отношения Штейнера–Громова римановых многообразий // *Фунд. и прикл. матем.* — 2013. — 18 : 2. — С. 119–124.
- [47] Voronoi G. F. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie de formes quadratiques // *J. Reine Angew. Math.* — 1908. — 134. — P. 198–287.
- [48] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Dual linear programming problem and one-dimensional Gromov minimal fillings of finite metric spaces // *arXiv* : 1904.10216v1. — 2019.
- [49] Yiu P. Introduction to the Geometry of the Triangle // *Florida Atlantic University Lecture Notes*. — 2001.
- [50] Kimberling C. Encyclopedia of Triangle Centers. — <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>.
- [51] Акоюн А. В. Геометрия в картинках. — М. : МЦНМО. — 2011.
- [52] Hajja M., Yff P. The isoperimetric point and the point(s) of equal detour in a triangle // *Journal of Geometry*. — 2007. — Vol. 87, №. 1–2. — P. 76–82.
- [53] Иванов А. О., Тужилин А. А., Цислик Д. Отношение Штейнера для многообразий // *Матем. заметки*. — 2003. — 74, №3. — С. 387–395.
- [54] Тужилин А. А. Классификация локально минимальных плоских сетей с выпуклыми границами : Дис. ... доктора физ.-мат. наук. — М.: МГУ. — 1997.
- [55] Rubinstein J. H., Thomas D. A. A variational approach to the Steiner network problem // *Annals of Operations Research*. — 1991. — Vol. 33. — P. 481–499.
- [56] Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. : Пер. с англ. — М. : “Мир”. — 1981.
- [57] Илютко Д. П. Разветвленные экстремали функционала λ -нормированной длины // *Матем. сб.* — 2006. — 197 : 5. — С. 75–98.
- [58] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. — Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований. — 2004.
- [59] Карпунин Г. А. Аналог теории Морса для плоских линейных сетей и обобщенная проблема Штейнера // *Матем. сб.* — 2000. — 191 : 5. — С. 64–90.

**Работы автора в рецензируемых научных изданиях,
рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ
по специальности**

- [60] Степанова Е. И. *Дифференцирование по направлениям веса минимального заполнения на римановом многообразии* // Вестн. Моск. Ун-та., Сер. 1, Математика. Механика. — 2015. — 70 : 1. — С. 15–20.

Англ. пер.: Stepanova E. I. *Directional derivative of the weight of a minimal filling in Riemannian manifolds* // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2015. — 70. — P. 14–18.

<https://doi.org/10.3103/S0027132215010039>

Журнал индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS, импактфактор 0,249.

- [61] Степанова Е. И. *Бифуркации минимальных деревьев Штейнера и минимальных заполнений для невыпуклых четырехточечных границ и суботношение Штейнера евклидовой плоскости* // Вестн. Моск. Ун-та., Сер. 1, Математика. Механика. — 2016 — 71 : 2. — С. 48–51.

Англ. пер.: Stepanova E. I. *Bifurcations of Steiner minimal trees and minimal fillings for non-convex four-point boundaries and Steiner subratio for the Euclidean plane* // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2016. — 71. — P. 79–81.

<https://doi.org/10.3103/S0027132216020078>

Журнал индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS, импактфактор 0,249.

- [62] Степанова Е. И. *Бифуркации топологий деревьев Штейнера на плоскости* // Фунд. и прикл. матем. — 2016. — 21 : 6. — С. 183–204.

Англ. пер.: Stepanova E. I. *Bifurcations of Steiner tree topologies in the plane* // J. Math. Sci. — 2020. — 248. — P. 788–802.

<https://doi.org/10.1007/s10958-020-04913-y>

Журнал индексируется Scopus, РИНЦ, RSCI WoS, импактфактор 0,198.

- [63] Степанова Е. И. *Бифуркации бинарных типов минимальных сетей Штейнера на плоскости* // Фунд. и прикл. матем. — 2019. — 22:6. — С. 227–252.

Журнал индексируется РИНЦ, RSCI WoS, импактфактор 0,198.

- [64] Степанова Е. И. *Бифуркации минимальных заполнений для четырех точек евклидовой плоскости* // Фунд. и прикл. матем. — 2019. — 22:6. — С. 253–261.

Журнал индексируется РИНЦ, RSCI WoS, импактфактор 0,198.