МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 5

Солодов Николай Викторович

Бивариантные когомологии с симметриями

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель —
профессор, д. ф.-м. н.
Ю. П. Соловьев.

Москва – 2003

Содержание

Введение

Настоящая диссертация посвящена развитию теории бивариантных когомологий с симметриями пары унитальных алгебр над коммутативным кольцом. Наибольшее внимание уделено построению теории бивариантных диэдральных когомологий и конкретным вычислениям над кольцом целых чисел.

Актуальность. Гомологическая теория алгебр, возникшая первоначально как набор вычислительных средств в алгебраической топологии, теории групп и алгебр Ли, выделилась к концу 50-х годов в самостоятельный и быстрорастущий раздел математики. Ее становление связано с именами С. Маклейна, С. Эйленберга, Г. Хохшильда, А. Картана и многих других.

С помощью методов гомологической алгебры были получены многие важные результаты в алгебраической топологии, теории групп (применению гомологий в теории групп посвящена монография К. С. Брауна [15]), функциональном анализе (см., например, книгу А. Я. Хелемского [13], посвященную этому вопросу), алгебраической геометрии.

В начале 80-х годов в структуре гомологической теории алгебр произошли существенные изменения. Во многом это было связано с понятием циклических (ко)гомологий, которые стали центральным объектом в новом разделе, возникшем на стыке гомологической алгебры, K-теории и некоммутативной геометрии. Циклические (ко)гомологии были введены А. Конном в связи с обобщением теоремы об индексе эллиптического оператора [17] и, независимо, Б. Л. Цыганом для вычисления гомологий алгебр Ли [14]. Далее последовало бурное развитие "циклической" теории; было установлено, что циклические (ко)гомологии естественно возникают в связи с алгебраической K-теорией Вальдхаузена, S^1-эквивариантными гомологиями топологических пространств, псевдоизотопиями топологических пространств, инвариантами плоских кривых в теории особенностей и т.д.

Наиболее ясно значение циклических гомологий и связанных с ними конструкций проявляется в рамках общей "философии" некоммутативной геометрии, представленной А. Конном в работах [18], [17]. Ее основную идею можно сформулировать следующим образом.

Известно, что различные свойства пространств (топологических пространств, многообразий и т.д.) можно сформулировать эквивалентным образом на языке функций (непрерывных, гладких и т.д.) на этом пространстве. В этом смысле объект (пространство) задается коммутативной алгеброй функций на нем. В некоммутативной геометрии роль объекта играет алгебра (не обязательно коммутативная), уже не связанная напрямую с пространством и являющаяся аналогом алгебры функций. При этом циклические гомологии оказываются одним из важных элементов теории. Выражаясь неформально, можно сказать, что в некоммутативной геометрии циклические гомологии играют ту же роль, что и гомологии де Рама в коммутативной.

Бивариантные циклические когомологии были введены Дж. Джонсом и

Кр. Касселем для исследования отображений, задающих изоморфизм в циклических гомологиях (HC-эквивалентности) и для классификаций операций в циклических гомологиях. Их построение было отчасти мотивированно параллеллизмом с KK-теорией Каспарова.

Циклические бивариантные когомологии обобщают обычные циклические (ко)гомологии на случай пары алгебр A и B и являются важным техническим средством, используемом для построения изоморфизмов в циклических гомологиях и для построения отображений из K-теории (см. [30], [20], [41], [38]).

В работе Ж.-Л. Лодэ и Д. Квиллена [36] и, независимо, Б. Цыганом [14] был построен изоморфизм циклических гомологий и примитивной части гомологий алгебры Ли $gl(A)$

$$PrimH_*(gl(A)) \cong HC_{*-1}(A).$$

Таким образом, имея в виду известный изоморфизм

$$PrimH_*(GL(A)) \cong \bigoplus_{n\geq 1} K_n(A) \otimes \mathbb{Q},$$

циклические гомологии можно рассматривать как аддитивный аналог алгебраической K-теории (в работах Б. Фейгина и Б. Цыгана они так и называются "аддитивная K-теория"). Другой, сходный результат был получен Т. Гудвилли в работе [23]. Им был построен изоморфизм

$$K_n(A, I) \otimes \mathbb{Q} \cong HC_{n-1}(A, I) \otimes \mathbb{Q},$$

где I — нильпотентный идеал алгебры A.

Вычисление групп K_n алгебраической K-теории является одной из наиболее сложных задач, имеющих многочисленные приложения в алгебраической топологии, теории чисел и других разделах. Поэтому вычисления циклических гомологий кольца целых элементов квадратических расширений рациональных чисел

$$A_d = Z(\mathbb{Q}[\sqrt{d}]), \qquad A_D = Z(\mathbb{Q}[\sqrt{D}, \sqrt{-1}]),$$

где $d \in \mathbb{Z}$, а $D \in \mathbb{Z}[i]$, представляет особый интерес, как простейший случай колец с нетривиальными группами K-теории.

Постановка задачи. В простейшем случае, когда основное кольцо k содержит рациональные числа, циклические гомологии k-алгебры A можно определить как гомологии части комплекса Хохшильда (см. п. 1.1.1), инвариантной относительно циклических перестановок множителей в тензорных степенях $A^{\otimes n}$. Так вводятся циклические гомологии в работах Конна [16], [17]. При более общем подходе циклические гомологии определяются как гомологии бикомплекса $\mathcal{CC}(A)$ (см. ф-лу (1)) n-ая строка которого совпадает с резольвентой циклической группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-модуле $A^{\otimes n}$. Таким образом, циклические гомологии алгебры принципиально связаны с действием циклической группы, причем на каждой тензорной степени $A^{\otimes n}$ действует своя группа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Такая структура допускает обобщения в следующих направлениях.

Рассматривая симплициальные объекты с действием $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ в n-ой размерности, мы приходим к понятию циклического объекта в произвольной категории (см. п. 1.3.1), с которым связывают его циклические гомологии. С другой стороны, вместо циклических, можно рассматривать некоторые другие семейства групп (см. п. 1.3). В частности, так определяются диэдральные объекты, то есть симплициальные объекты с действием диэдральных групп D_n в n-ой размерности, кватернионные объекты, соответствующие семейству кватернионных групп Q_n и рефлексивные, соответствующие семейству $\{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$, действующему во всех размерностях операторами порядка 2. Аналогично циклическим, для диэдральных, кватернионных и рефлексивных объектов строятся соотвветственно диэдральные, кватернионные и рефлексивные гомологии.

Заметим, что если алгебра A снабжена инволюцией, на тензорных степенях $A^{\otimes n}$ можно ввести действие групп D_n, Q_n и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ введя оператор “отражения”

$$y_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} \overline{a}_0 \otimes \overline{a}_n \otimes \overline{a}_{n-1} \otimes \cdots \otimes \overline{a}_2 \otimes \overline{a}_1.$$

Для вычисления диэдральных, кватернионных и рефлексивных гомологий алгебры A используются комплексы, аналогичные циклическому $\mathcal{CC}(A)$ (см. ф-лу (1)), обозначаемые $\mathcal{CD}(A)$, $\mathcal{CQ}(A)$ и $\mathcal{CR}(A)$. Как и в циклическом комплексе, на n-ом уровне у них стоят резольвенты соответствующих групп (D_n, Q_n или $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) с коэффициентами в $A^{\otimes n}$.

Следующим важным этапом развития теории стало введение Дж. Джонсом и Кр. Касселем [29] бивариантных циклических когомологий пары алгебр (обозначение $HC^*(A, B)$). Основные их свойства были исследованы в работах [29], [30] и [31].

Как следует из названия, бивариантные циклические когомологии — ковариантный функтор по первому аргументу и контравариантный по второму. Они обобщают обычные циклические (ко)гомологии в том смысле, что имеют место изоморфизмы

$$HC^n(A, k) \cong HC^n(A) \qquad HC^n(A, k) \cong HC^-_{-n}(A),$$

где HC^- — отрицательные циклические гомологии — гомологическая теория, двойственная циклическим гомологиям, но лучше приспособленная для отображений из K-теории (см. [23]).

Исследование бивариантных циклических когомологий было продолжено в работах Й. Кунца и Д. Квиллена (см. [24]) в контексте так называемых прогомологий.

Другое направление развития теории было представлено в работах П. Гурролы [28]. Им были построены бивариантные кватернионные когомологии и исследованы их основные свойства.

Настоящая работа продолжает линию намеченную в [29], [30], [31], [28]. В ней предложена общая конструкция бивариантных когомологий (с симметриями) пары комплексов (с периодичностями) (см. п. 2.3). При этом циклические бивариантные когомологии Джонса и Касселя, кватернионные когомологии Гурролы, рефлексивные и диэдральные когомологии пары алгебр получаются в качестве частных случаев. В работе исследованы основные свойства различных типов когомологий с симметриями, их взаимосвязь и связь с алгебраической K-теорией.

Другая задача, решению которой посвящена вторая часть настоящей диссертации — явные вычисления различных типов (ко)гомологий алгебры целых элементов квадратических расширений рациональных чисел, а именно

$$A_d = Z(\mathbb{Q}[\sqrt{d}]), \qquad A_D = Z(\mathbb{Q}[\sqrt{D},\sqrt{-1}]),$$

где $d \in \mathbb{Z}$, а $D \in \mathbb{Z}[i]$. В работе явно вычислены циклические и периодические гомологии, периодические бивариантные когомологии алгебры A_d и циклические гомологии алгебры A_D. Вычисление циклических гомологий дедекиндовых областей проводилось также в работе Ларсена и Линденштрауса [33], однако, в виду общности решаемой задачи, авторы не получают ответа в явном виде. Кроме того, результаты, полученные в [33], для расширений степени n, не дают формул для n-кручения модуля циклических гомологий. В нашем случае $n = 2$, и, как видно из теорем 5.5 и 5.14, строение 2-составляющей нетривиально.

Обзор основных конструкций. Следуя Лодэ и Квиллену [36] определим циклические гомологии алгебры A над произвольным коммутативным кольцом k, как гомологии тотального комплекса $Tot\,\mathcal{CC}_{*,*}(A)$ ассоциированного с бикомплексом

$$\mathcal{CC}_{*,*}(A): \quad \begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' & & \\
A^{\otimes 3} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 3} & \xleftarrow{N} & A^{\otimes 3} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 3} & \xleftarrow{N} & \cdots \\
\downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' & & \\
A^{\otimes 2} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{N} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{N} & \cdots \\
\downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b & & \downarrow -b' & & \\
A & \xleftarrow{1-t} & A & \xleftarrow{N} & A & \xleftarrow{1-t} & A & \xleftarrow{N} & \cdots,
\end{array} \qquad (1)$$

где отображения b, b', t и N определены следующими формулами.

$$
\begin{aligned}
&b(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = b'(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) + (-1)^n a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1},\\
&b'(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n,\\
&t(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = (-1)^n a_n \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1},\\
&N = 1 + t + t^2 + ... + t^n.
\end{aligned}
$$

Если алгебра A унитальна (т.е. обладает единицей), то, как было установлено в [36], комплекс $Tot_* \mathcal{CC}(A)$ квазиизоморфен комплексу $Tot_* \mathcal{BC}(A)$, где

$$
\mathcal{BC}_{*,*}(A): \quad
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "b"] \\
A \otimes \overline{A}^{\otimes 3} \arrow[d, "b"] & A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A \otimes \overline{A} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] \\
A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} \arrow[d, "b"] & A \otimes \overline{A} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] & \\
A \otimes \overline{A} \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] & & \\
A & & &
\end{tikzcd}
\quad , \qquad (2)
$$

где $\overline{A} = A/k$, а

$$
B(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i 1 \otimes a_i \otimes a_{i+1} \cdots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1}.
$$

Первоначально, в работах А. Конна, циклические гомологии определялись как гомологии одномерного комплекса $\mathcal{C}^\lambda_*(A)$ (см. 1.2.4). При этом рассматривались алгебры над полем нулевой характеристики, и в этом случае комплексы $Tot_* \mathcal{CC}(A)$, $Tot_* \mathcal{BC}(A)$ и $\mathcal{C}^\lambda_*(A)$ оказываются квазиизоморфными (см. [36], [31]). Приведенное нами определение циклических гомологий при помощи бикомплекса (1) является наиболее общим и в настоящее время общепринятым.

В 1986-88 годах, в работах Р. Л. Красаускаса, С. В. Лапина и Ю. П. Соловьева [9] [10] [7] [8], для алгебры A с инволюцией $^{-}\colon A \to A$ были введены диэдральные гомологии $HD^\varepsilon_*(A)$ (где $\varepsilon = -1, 1$) как гомологии комплекса

$Tot_* \mathcal{CD}^\varepsilon(A)$. Ассоциированный с ним трикомплекс $\mathcal{CD}^\varepsilon(A)$ имеет вид

$$\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\big\downarrow{\scriptstyle 1-y} & & \big\downarrow{\scriptstyle -1-yt} & & \big\downarrow{\scriptstyle 1+y} & & \big\downarrow{\scriptstyle -1+yt} & & \\
(A^*, b) & \xleftarrow{1-t} & (A^*, -b') & \xleftarrow{N} & (A^*, b) & \xleftarrow{1-t} & (A^*, -b') & \xleftarrow{N} & \cdots \\
\big\downarrow{\scriptstyle 1+y} & & \big\downarrow{\scriptstyle -1+yt} & & \big\downarrow{\scriptstyle 1-y} & & \big\downarrow{\scriptstyle -1-yt} & & \\
(A^*, -b) & \xleftarrow{1-t} & (A^*, b') & \xleftarrow{N} & (A^*, -b) & \xleftarrow{1-t} & (A^*, b') & \xleftarrow{N} & \cdots \\
\big\downarrow{\scriptstyle 1-y} & & \big\downarrow{\scriptstyle -1-yt} & & \big\downarrow{\scriptstyle 1+y} & & \big\downarrow{\scriptstyle -1+yt} & & \\
(A^*, b) & \xleftarrow{1-t} & (A^*, -b') & \xleftarrow{N} & (A^*, b) & \xleftarrow{1-t} & (A^*, -b') & \xleftarrow{N} & \cdots,
\end{array}$$

где A^* обозначает градуированный модуль с i-ой компонентой $A^{\otimes i}$,

$$y_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} \varepsilon \overline{a}_0 \otimes \overline{a}_n \otimes \overline{a}_{n-1} \otimes \ldots \otimes \overline{a}_1,$$

а операторы b, b', N и t определялись выше.

Гомологии получающиеся при $\varepsilon = 1$ называются положительными, а при $\varepsilon = -1$ отрицательными диэдральными гомологиями.

В [10] авторами были исследованы основные свойства диэдральных гомологий, в том числе длинные точные последовательности, связь с эрмитовой K-теорией и т.д.

Построение диэдральных гомологий существенно использует инволютивную структуру алгебры. В простейшем случае, когда элемент 2 обратим в основном кольце, циклические гомологии распадаются в прямую сумму положительных и отрицательных диэдральных гомологий (теорема 3.1).

Следующим шагом разработки и обобщения конструкции циклических гомологий явились бивариантные циклические когомологии определяемые для пары алгебр A и B (обозначение $HC^*(A, B)$). Они были введены Дж. Джонсом и Кр. Касселем [29] как гомологии комплекса отображений вида

$$f : Tot\, \mathcal{BC}_{*,*}(A) \to Tot\, \mathcal{BC}_{*,*}(B)$$

удовлетворяющих дополнительным условиям, смысл которых состоит в сохранении периодичностей диаграмм бикомплекса $\mathcal{BC}_{*,*}$.

Бивариантным циклическим гомологиям посвящены работы Кр. Касселя [30], [31] (в них, в частности, построен бивариантный характер Чженя), Ф. Нусса [39], Й. Кунца и Д. Квиллена [20] и другие. П. Гуррола [28], распространил построения [30], [31] (в том числе и конструкцию бивариантного характера Чженя) на случай бивариантных кватернионных когомологий (см. п. 2.4).

Методика исследования. При доказательстве многих утверждений диссертации (предложения 1.1, теорем 1.3 и 1.4, теорем 3.1 и 3.4 и т.д.) существенно используется так называемая “лемма о возмущении” (теорема A.2), смысл которой состоит в следующем (обсуждение вариантов формулировки леммы и ее доказательство приводится в приложении A).

Пусть для комплексов (L, d^L) и (M, d^M) заданы морфизмы комплексов

$$f: \quad M \to L, \qquad \nabla: \quad L \to M$$

и гомотопия h комплекса (M, d^M), такие что

$$f\nabla = \mathrm{id}_L, \quad dh + hd = \nabla f - \mathrm{id}_M, \quad h\nabla = fh = hh = 0. \tag{3}$$

Набор данных (L, M, f, ∇, h) удовлетворяющий условиям (3) называется специальной деформационной ретракцией и обозначается символически

$$(L, d^L) \underset{\nabla}{\overset{f}{\leftrightarrows}} (M, d^M; h);$$

говорят также, что комплекс (M, d^M) стягивается к комплексу (L, d^L), или, если комплекс L — нулевой, говорят, что комплекс (M, d^M) стягиваем.

Пусть δ — возмущение дифференциала d, то есть такое отображение $\delta: M_* \to M_{*-1}$, что $\hat{d} = \delta + d$ снова является дифференциалом $(\delta + d)^2 = 0$, и пусть для любого $x \in M$ существует натуральное число n такое что $(h\delta)^n = 0$ (условие локальной нильпотентности). Тогда существуют операторы $\hat{d}_\infty$, $\hat{f}_\infty$, $\hat{\nabla}_\infty$, $\hat{h}_\infty$ (процедура их построения описана в п. A.2), такие что

$$(L, \hat{d}_\infty) \underset{\hat{\nabla}_\infty}{\overset{\hat{f}_\infty}{\leftrightarrows}} (M, \hat{d}; \hat{h}_\infty)$$

будет специальной деформационной ретракцией.

Основные результаты. Настоящая диссертация посвящена дальнейшему развитию “бивариантной” теории. Получены следующие основные результаты.

1. Систематически записаны деформационные ретракции между парами комплексов $\mathcal{CC}$ и $\mathcal{BC}$ ([31]), $\mathcal{CQ}$ и $\mathcal{BQ}$ ([28]) и построены деформационные ретракции между комплексами $\mathcal{CD}$ и $\mathcal{BD}$ (теорема 1.3).

2. Разработана теория комплексов с периодичностями (пп. 2.1, 2.2); в частности, получены точные последовательности выражающие взаимосвязи комплексов с периодичностями одного типа (теоремы 2.4, 2.5).

3. Определены бивариантные когомологии пар комплексов с с периодичностями одного типа (п.2.3); в частности, определены бивариантные диэдральные и рефлексивные когомологии для алгебр с инволюциями, над произвольным коммутативным кольцом (п.2.4).

4. Установлено, что бивариантные когомологии, соответствующие бикомплексам $\mathcal{CD}_{*,*,*}$ и $\mathcal{BD}_{*,*,*}$ будут изоморфны (теоремы 1.3 и 2.7), а при условии $1/2 \in k$ изоморфными будут бивариантные когомологии, соответствующие $\mathcal{BC}^+_{*,*}$ и $\mathcal{BQ}_{*,*}$ (теоремы 3.4 и 2.7).

5. При $1/2 \in k$ установлен изоморфизм
$$HD^*_+(A, B) \cong HC^*_+(A, B) \oplus HC^*_-(A, B) \cong HD^*_-(A, B) \cong HC(A, B)$$
(теорема 3.6).

6. Построены точные последовательности, связывающие различные типы когомологий с симметриями (теорема 3.9).

7. Построен бивариантный диэдральный характер Чженя, отображающий группой бивариантной эрмитовой K-теории ${}_\varepsilon K(A, B)$ (см. определение 4.2) в нулевую компоненту диэдральных бивариантных когомологий.

8. Явно вычислены циклические, циклические периодические гомологии и циклические бивариантные периодические когомологии кольца $Z(\mathbb{Q}[\sqrt{d}])$ и циклические гомологии $Z(\mathbb{Q}[\sqrt{D}, \sqrt{-1}])$, где $d \in \mathbb{Z}$, $D \in \mathbb{Z}[i]$.

Обзор содержания диссертации. Глава 1, имеющая вводный характер, посвящена построению основных примеров гомологических теорий с симметриями: циклических, диэдральных, кватернионных и рефлексивных гомологий. Используемые для определений комплексы приводятся к наиболее простому виду. Основной результат главы (теорема 1.3) — редукция диэдрального трикомплекса $\mathcal{CD}_{*,*,*}(A)$ к меньшему: $\mathcal{BD}_{*,*,*}(A)$.

В пунктах 1.1 и 1.2 обсуждаются различные подходы к определению гомологий Хохшильда и циклических гомологий: производные функторы, некоммутативные дифференциальные формы, простейшие геометрические интерпретации. В явном виде приводится деформационная ретракция комплекса $\mathcal{CC}(A)$ к $\mathcal{BC}(A)$. В пункте 1.3 циклические гомологии рассматриваются как частный случай гомологий с коэффициентами в скрещенной симплициальной группе. Здесь же вводятся диэдральные, кватернионные и рефлексивные гомологии алгебр.

В пунктах 1.4 и 1.5 введенные в п. 1.3 комплексы $\mathcal{CD}^{\pm}_{*,*,*}(A)$ и $\mathcal{CQ}_{*,*}(A)$, определяющие (соответственно) диэдральные и кватернионные гомологии алгебры A, заменяются эквивалентными и более удобными для вычислений комплексами $\mathcal{BD}^{\pm}_{*,*,*}(A)$ (см. п. 1.4) и $\mathcal{BQ}_{*,*}(A)$ (см. п. 1.5) (это составляет утверждение теорем 1.3 и 1.4).

В **главе 2** рассматривается общий случай комплексов с периодичностями, изучаются их основные свойства и вводятся бивариантные когомологии комплексов с периодичностями (бивариантные когомологии с симметриями).

Будем говорить, что комплекс $(\mathcal{C}_*, d)$ обладает периодичностью степени m, если задано эпиморфное отображение $P\colon \mathcal{C}_* \to \mathcal{C}_{*+m}$, изменяющее градуировку на m и коммутирующее с дифференциалом d (определение 2.1).

Комплексами с периодичностями являются, в частности, "циклические" комплексы: $\mathcal{CC}_{*,*}(A)$ и $\mathcal{BC}_{*,*}(A)$; "кватернионные" комплексы: $\mathcal{CQ}_{*,*}(A)$, $\mathcal{BQ}_{*,*}(A)$; "диэдральные" комплексы: $\mathcal{BD}_{*,*,*}(A)$, $\mathcal{CD}_{*,*,*}(A)$; "рефлексивный" комплекс:

$\mathcal{CR}_{*,*}(A)$, (см. п. 2.1). Например, периодичностью комплекса $\mathcal{BC}_{*,*}(A)$ является отображение S степени -2, состоящее в "вычеркивании" первого столбца (см. диаграмму (2)).

Деформационная ретракция называется совместимой с периодичностями, если задающие ее операторы коммутируют с операторами периодичностей. В предложениях 2.1, 2.2 и 2.3 доказывается, что деформационные ретракции между циклическими, кватернионными и диэдральными комплексами, построенные в пп. 1.2, 1.4 и 1.5 совместимы с соответствующими периодичностями.

В пункте 2.2 доказаны простейшие свойства комплексов с периодичностями, выраженные на языке точных последовательностей (теоремы 2.4, 2.5); как частные случаи получаются точная последовательность Конна вциклических гомологиях, точная последовательность в диэдральных гомологиях и некоторые другие точные последовательности.

Пункт 2.3 посвящен введению бивариантных когомологий для пары комплексов $L = (L_*, d^L)$ и $M = (M_*, d^M)$ с набором периодичностей $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_n\}$. По определению, это гомологии комплекса составленного из отображений комплекса L в комплекс M (отображения рассматриваются как морфизмы градуированных модулей) перестановочных с операторами периодичностей $\mathcal{P}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(L_*, M_*) = \{f : L_* \to M_* \mid fP_i = P_i f\}.$$

Здесь же (предложение 2.6 и теорема 2.7) доказывается, что так определенные бивариантные когомологии не меняются при замене комплексов на другие, стягиваемые к исходным, если соответствующие деформационные ретракции совместимы с периодичностями.

В пункте 2.4 общие конструкции п. 2.3 применяются к циклическим, диэдральным, кватернионным и рефлексивным комплексам, и, тем самым, мы получаем определения бивариантных циклических (обозначение $HC^*(A, B)$), диэдральных (обозначение $HD^*_\varepsilon(A, B)$, где $\varepsilon = 1, -1$), кватернионных (обозначение $HQ^*(A, B)$) и рефлексивных (обозначение $HR^*(A, B)$) когомологий пары алгебр A, B. В пункте 2.5 в бивариантных когомологиях с симметриями вводится произведение.

Глава 3 посвящена исследованию конструкций глав 1 и 2 в случае, когда элемент 2 основного кольца обратим. Построения значительно упрощаются. Так, гомологии Хохшильда распадаются в прямую сумму положительных и отрицательных рефлексивных гомологий (теорема 3.3) циклические гомологии распадаются в прямую сумму положительных и отрицательных диэдральных гомологий (теорема 3.1). Кватернионные гомологии стягиваются к положительным диэдральным (теорема 3.4), причем деформационная ретракция оказывается совместимой с "кватернионными" периодичностями, и, значит, соответствующие бивариантные когомологии изоморфны (следствие 3.5). Несколько иная ситуация складывается с бивариантными диэдральными когомологиями. Согласно основному результату главы 3 — теореме 3.6, при $1/2 \in k$, имеют место следующие изоморфизмы

$$HD^*_+(A,B) \cong HC^*(A,B) \cong HD^*_-(A,B).$$

Доказательство теоремы достаточно трудоемко, и ему посвящена большая часть главы 3. Оно состоит в рассмотрении всевозможных вариантов отображений $f : \mathcal{BD}^+_{*,*,*}(A) \to \mathcal{BD}^+_{*,*,*}(B)$ и выделении тех из них, которые вносят нетривиальный вклад в когомологии.

В пункте 3.2 отображения, перестановочные с периодичностями, описываются в виде бесконечных верхне-треугольных матриц. Пользуясь таким представлением, в теореме 3.9 и следствии 3.10 получены точные последовательности, связывающие различные бивариантные когомологии с симметриями.

В **главе 4** вводится характер Чженя отображающий бивариантную эрмитову K-теорию ${}_\varepsilon K(A,B)$ в нулевую компоненту бивариантных диэдральных когомологий.

В пункте 4.1 приводится построение бивариантной эрмитовой K-теории ${}_\varepsilon K(A,B)$ (см. [28]) для пары алгебр с инволюциями (ε — единица основного кольца k с условием $\varepsilon\bar{\varepsilon} = 1$).

Назовем ε-эрмитовым A-B-модулем A-B-бимодуль M (то есть M — левый A-модуль и правый B-модуль, причем правое и левое действия согласованы), снабженный невырожденной полуторолинейной формой h

$$h(y,x) = \varepsilon\overline{h(x,y)}.$$

Если существует другой ε-эрмитов k-B-модуль (M', h'), такой что

$$(M,h) \perp (M',h') = (B^{2n}, \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ \varepsilon 1_n & 0 \end{pmatrix})$$

для некоторого n, то (M,h) называется проективным ε-эрмитовым A-B-модулем. Проективные ε-эрмитовы A-B-модули образуют категорию ${}_\varepsilon\mathcal{H}Rep(A,B)$, группа Гротендика которой и называется бивариантной эрмитовой K-теорией

$${}_\varepsilon K(A,B) = K_0({}_\varepsilon\mathcal{H}Rep, \perp).$$

Значение бивариантного диэдрального характера Чженя

$$Dch : {}_\varepsilon K(A,B) \to HD^+_0(A,B),$$

на ε-эрмитовом $A-B$-модуле $(P,h) \in {}_\varepsilon\mathcal{H}Rep(A,B)$ определяется в п. 4.2 как когомологический класс композиции отображений

$$Tr^\natural \circ \mu^\natural \circ \lambda^\natural_P : \mathcal{BD}_{*,*,*}(A) \to \mathcal{BD}_{*,*,*}(B).$$

Отображение инволютивных алгебр

$$\lambda_P : A \to End_B P$$

задается левым модульным действием алгебры A.

Отображение μ строится как композиция

$$\mu : End_B P \xrightarrow{\phi \to \phi \oplus 0} End_B P \oplus End_B Q \xrightarrow{Ad\,u} \mathbf{M}_{2n}(B),$$

где

$$u : (P, h) \perp (Q, h') \cong (B^{2n}, \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ \varepsilon 1_n & 0 \end{pmatrix}),$$

изометрия, существование которой следует из определения ${}_{\varepsilon}\mathcal{H}Rep(A, B)$; $\mathbf{M}_{2n}(B)$ обозначает алгебру квадратных $2n \times 2n$ матриц над B, а отображение $Ad\,u$ действует на эндоморфизмах сопряжением с помощью u.

Отображение

$$Tr_r^n : \mathbf{M}_r(A)^{\otimes n} \to A^{\otimes n}$$

(обобщенный след) задается формулой

$$Tr_r^n(m_0 a_0 \otimes m_1 a_1 \otimes \dots \otimes m_n a_n) = Tr(m_0 \cdot m_1 \dots m_n) a_0 \otimes a_1 \dots \otimes a_n,$$

где $m_i \in \mathbf{M}_r(k),\ a_i \in A$.

Знак $\natural$ означает, что отображение заданное на уровне алгебр $A_1 \to A_2$ (как μ и λ) или на уровне столбцов $\mathcal{BD}_{*,*,*}$-комплексов $\mathcal{CH}_*(A_1) \to \mathcal{CH}_*(A_2)$ (как Tr) распространяется на весь $\mathcal{BD}_{*,*,*}$-комплекс

$$\mathcal{BD}_{*,*,*}(A_1) \to \mathcal{BD}_{*,*,*}(A_2).$$

Основным результатом главы 4 является теорема 4.2, утверждающая, что класс $Dch(P, h)$ в диэдральных бивариантных когомологиях не зависит от выбора отображения u и числа n, участвующих в определении отображения μ. Доказательство проводится в несколько этапов (предложение 4.3, следствие 4.4, предложение 4.5) и существенно использует следующую деформационную ретракцию, построенную Р. Маккарти [37]:

$$\mathcal{CH}_*(A) \underset{\iota_p^\natural}{\overset{Tr^\natural}{\leftrightarrows}} \mathcal{CH}_*(\mathbf{M}_r(A)); \Phi,$$

где $\iota_p : A \to \mathbf{M}_r(A)$ отображение ставящее в соответствие элементу $a \in A$ матрицу с единственным ненулевым элементом a на (p, p)-ом месте.

Глава 5 посвящена явному вычислению (ко)гомологий с симметриями различных типов (циклические, периодические и т. д.). В качестве основного примера рассматривается кольцо

$$A_d = Z(\mathbb{Q}[\sqrt{d}])$$

целых элементов квадратических расширений рациональных чисел, то есть кольцо корней уравнений

$$x^2 + px + q = 0,$$

вида $a\sqrt{d} + b$, где $p, q \in \mathbb{Z}$, а $a, b \in \mathbb{Q}$.

В пункте 5.1 в матричной форме вычисляются дифференциалы циклического комплекса $\mathcal{BC}(A_d)$. В предложениях 5.1 и 5.2 обосновывается алгоритм приведения матриц дифференциалов к диагональному виду и вычисляются соответствующие диагональные элементы. Результаты вычислений сформулированы в теореме 5.5, утверждающей, что циклические гомологии кольца A_d вычисляются по формулам

$$HC_{2n}(A_d|\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

$$HC_{2n+1}(A_d|Z) = \mathbb{Z}/g_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/g_n\mathbb{Z},$$

при $d = 4k + 1$,

$$HC_{2n+1}(A_d|\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/g_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/g_n\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n,$$

при $d = 4k + 3$ или $d = 4k + 2$, где $g_i = \frac{V_i}{V_{i-1}}$,

$$V_i = (d^k, d^{k-1}a_k, ..., d^{k-i}\prod_{j=1}^{i} a_{k-j+1}, ..., \prod_{j=1}^{k} a_j), \qquad a_i = 2i - 1.$$

Круглые скобки обозначают наибольший общий делитель.

В предложении 5.6 показано, что система базисов, в которых матрицы дифференциалов имеют диагональный вид (построенные в предложении 5.3) удовлетваряет условию Миттаг-Леффлера, и, как следствие, получаются явные формулы для вычисления периодических циклических гомологий (теорема 5.7).

Пункт 5.3 посвящен вычислению бивариантных периодических когомологий пары колец A_{d_1}, A_{d_2} (теорема 5.8). В доказательстве используются результаты п. 5.1.

В пунктах 5.4 и 5.5 вычисления, аналогичные приведенным в п. 5.1 проделываются для кольца $A_D = Z(\mathbb{Q}[\sqrt{D}, \sqrt{-1}])$, где $D \in \mathbb{Z}[i]$ — элемент кольца гауссовых чисел $\Gamma = \mathbb{Z}[i]$.

В пункте 5.4 в зависимости от D строится базис кольца A_D как Γ-модуля (теорема 5.12). В пункте 5.5 в матричном виде вычисляются дифференциалы циклического комплекса $\mathcal{BC}(A_D)$. Пусть $D = d_1 + id_2$. Результаты вычислений сформулированы в теореме 5.14, утверждающей, что циклические гомологии алгебры A_D задаются формулами

$$HC_{2n}(A_D|\Gamma) = \Gamma \oplus \Gamma,$$

$$HC_{2n-1}(A_D|\Gamma) = \Gamma/\overline{g}_1\Gamma \oplus \cdots \oplus \Gamma/\overline{g}_n\Gamma \oplus (\Gamma/2\Gamma)^n,$$

при $d_2 = 2k+1$,

$$HC_{2n-1}(A_D|\Gamma) = \Gamma/\overline{g}_1\Gamma \oplus \cdots \oplus \Gamma/\overline{g}_n\Gamma,$$

при $\{d_1, d_2\} = \{4k+1, 4l\}$,

$$\Gamma/\overline{g}_1\Gamma \oplus \cdots \oplus \Gamma/\overline{g}_n\Gamma \oplus (\Gamma/(i+1)\Gamma \oplus \Gamma/(i+1)\Gamma)^n,$$

при $\{d_1, d_2\} = \{2k+1, 4l+2\}$, где $\overline{g}_i = \frac{\overline{V}_i}{\overline{V}_{i-1}}$,

$$\overline{V}_i = (D^k, D^{k-1}a_k, ..., D^{k-i}\prod_{j=1}^{i} a_{k-j+1}, ..., \prod_{j=1}^{k} a_j), \qquad a_i = 2i-1.$$

Как и ранее, круглые скобки обозначают наибольший общий делитель.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались на семинаре "Алгебраическая топология"под руководством М. М. Постникова, Ю. П. Соловьёва, А. В. Чернавского, на семинаре "Геометрические методы"под руководством А. Т. Фоменко, на семинаре математического факультета университета Б. Паскаля (Клермон-Ферран, Франция).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в двух работах автора

1.*Солодов Н. В.* О циклических гомологиях некоторых колец алгебраических чисел// Вестник МГУ. Серия I. Математика, механика — 2000 г.— №6. — С. 56-59

2.*Солодов Н. В.* Бивариантные диэдральные когомологии// Вестник МГУ. Серия I. Математика, механика — 2003 г.— №2. — С. 54-58

Кроме того, по теме диссертации опубликован препринт

Solodov N. V. Cohomologies bivariantes de type cyclique//Prépublication de l'Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand (France), 2003.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Юрию Петровичу Соловьеву за постановку задачи и за неустанную и благожелательную поддержку на всех этапах работы над диссертацией.

1 Основные конструкции

1.1 Гомологии Хохшильда

1.1.1 Пусть A – унитальная алгебра над коммутативным кольцом k. Обозначим через $A^{\otimes n}$ n-ую тензорную степень A и через

$$(a_0, a_1, \cdots, a_n) = a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$$

мономиальный элемент $A^{\otimes n+1}$.

Определение 1.1 *Гомологиями Хохшильда $HH_*(A)$ алгебры A называются гомологии комплекса*

$$\mathcal{CH}_*(A): \quad A \xleftarrow{b} A^{\otimes 2} \xleftarrow{b} A^{\otimes 3} \xleftarrow{b} \ldots,$$

где $A^{\otimes n}$ обозначает n-тую тензорную степень алгебры A, а дифференциал задается формулой

$$b(a_0, a_1, \cdots, a_n) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (a_0, \cdots, a_{i-1}, a_i \cdot a_{i+1}, \cdots, a_n) + (-1)^n (a_n \cdot a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}).$$

Выделим в $\mathcal{CH}_*(A)$ подкомплекс $\mathcal{D}_*(A) = (D_n(A), b)$ порожденный мономами $a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ такими, что среди элементов $\{a_1, \cdots, a_n\}$ есть хотя бы один равный единице. Заметим, что $\mathcal{D}_*(A)$ стягиваем. В работе [21] показано, что $\mathcal{D}_*(A)$ стягиваем и построена стягивающая гомотопия h.

Таким образом, гомологии Хохшильда определяются эквивалентно исходя из комплекса

$$\overline{\mathcal{CH}}_*(A) = \mathcal{CH}_*(A)/\mathcal{D}_*(A): \quad A \xleftarrow{b} A \otimes \overline{A} \xleftarrow{b} A \otimes \overline{A}^{\otimes 2} \xleftarrow{b} \ldots,$$

где $\overline{A} = A/k$.

Рассмотрим некоторые другие способы определения гомологий Хохшильда.

1.1.2 Прежде всего, $HH_n(A) = \mathrm{Tor}_n^{A \otimes A^{op}}(A, A)$; при таком подходе комплекс $\mathcal{CH}_*(A)$ получается из бар-резольвенты

$$\mathrm{Bar}_*(A): \quad A \otimes A \xleftarrow{b'} A \otimes A \otimes A \xleftarrow{b'} A \otimes A \otimes A \otimes A \xleftarrow{b'} \ldots,$$

а $\overline{\mathcal{CH}}_*(A)$ из нормализованной бар-резольвенты

$$\overline{\mathrm{Bar}}_*(A): \quad A \otimes A \xleftarrow{b'} A \otimes \overline{A} \otimes A \xleftarrow{b'} A \otimes \overline{A} \otimes \overline{A} \otimes A \xleftarrow{b'} \ldots,$$

при помощи тензорного умножения на A, рассматриваемого как $A \otimes A^{op}$-модуль. Оператор b' отличается от определявшегося выше оператора b отсутствием последнего слагаемого: $b = b' + b_n$,

$$b'(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (a_0, \cdots, a_{i-1}, a_i \cdot a_{i+1}, \cdots, a_n),$$
$$b_n(a_0, a_1, \cdots, a_n) = (-1)^n (a_n \cdot a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}).$$

Рассмотрим аугментированные бар-резольвенты

$$\mathrm{Bar}^+_*(A)\colon \quad A \xleftarrow{b'} \mathrm{Bar}_*(A) \quad \text{и} \quad \overline{\mathrm{Bar}}^+_*(A)\colon \quad A \xleftarrow{b'} \overline{\mathrm{Bar}}_*(A).$$

Заметим, что стягивающей гомотопией для них является оператор s,

$$s(a_0, a_1, \cdots, a_n) = (1, a_0, a_1, \cdots, a_n).$$

Выполнение условия $sb' + b's = 1$ проверяется простым вычислением.

1.1.3 Рассмотрим градуированную алгебру некоммутативных дифференциальных форм над алгеброй A:

$$\Omega^*(A) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \Omega^i(A),$$

где $\Omega^0(A) = A$, A-бимодуль $\Omega^1(A)$ порожден символами вида da, где $a \in A$, причем выполнены следующие соотношения

$$d1 = 0, \tag{4}$$

$$d(ab) = da \cdot b + a \cdot db, \tag{5}$$

$$d(\alpha a + \beta b) = \alpha da + \beta db, \quad \alpha, \beta \in k, \quad a, b \in A; \tag{6}$$

Наконец

$$\Omega^n(A) = \Omega^1(A) \otimes_A \cdots \otimes_A \Omega^1(A).$$

Умножение в $\Omega^*(A)$ задается присоединением:

$$(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \cdot (\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_m) = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_m),$$

где ω_i, $\omega'_i \in \Omega^1(A)$. Используя соотношения (4)-(6) любой элемент $\Omega^*(A)$ можно переписать в виде линейной комбинации мономов $a_0\, da_1\, da_2 \ldots da_n$. Каждому такому моному можно однозначно сопоставить элемент $A \otimes \overline{A}^{\otimes n}$:

$$\tau\colon \quad a_0\, da_1\, da_2 \ldots da_n \longleftrightarrow (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

при этом левое модульное действие сохраняется и значит, $\Omega^n(A)$ изоморфен $A \otimes \overline{A}^{\otimes n}$ как левый A-модуль. Правое A-модульное действие на $\Omega^n(A)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} a_0\, da_1 \dots da_n \cdot a &= a_0\, da_1 \dots da_{n-1}\, d(a_n \cdot a) - a_0\, da_1 \dots da_{n-1} \cdot a_n\, da = \\ &= a_0\, da_1 \dots da_{n-1}\, d(a_n \cdot a) - a_0\, da_1 \dots d(a_{n-1} \cdot a_n)\, da + \dots \\ &\dots + (-1)^i a_0\, a_1 \dots da_{n-i-1}\, d(a_{n-i} \cdot a_{n-i+1})\, da_{n-i+2} \dots da_n\, da + \\ &+ (-1)^n a_0 \cdot a_1\, da_2 \dots da_n\, da. \end{aligned}$$

Алгебра дифференциальных форм $\Omega^*(A)$ снабжена обычным дифференциалом

$$d\colon \quad a_0\, da_1\, da_2 \dots da_n \to da_0\, da_1\, da_2 \dots da_n,$$

который переходит при изоморфизме τ в оператор

$$s\colon A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \to A \otimes \overline{A}^{\otimes n+1}$$

возникавший при других обстоятельствах в предыдущем пункте.

Предположим, что A — дополненная алгебра, то есть задан гомоморфизм

$$\lambda\colon \quad A \to k,$$

тогда отображение

$$\tilde{b}'\colon \quad a_0\, da_1\, da_2 \dots da_n \to da_0\, da_1\, da_2 \dots da_{n-1}(da_n - \lambda a_n)$$

задает уще один дифференциал алгебры $\Omega^*(A)$, соответствующий при отождествлении τ оператору

$$b'\colon \quad A \otimes \overline{A}^{\otimes n} \to A \otimes \overline{A}^{\otimes n-1}$$

(см. п.1.1.2). Как мы уже видели $b's + sb' = 1$. Отметим, что $\tilde{b}'$ и d (или, что то же самое, b' и s) двойственны друг к другу в том смысле, что d превращает a_0, стоящий на первом месте, в da_0, а $\tilde{b}'$ наоборот превращает da_n, стоящий на последнем в a_n. Более естественным по сравнению с b' в контексте некоммутативных дифференциальных форм оказывается оператор коммутации:

$$a_0\, da_1\, da_2 \dots da_n \to a_0\, da_1\, da_2 \dots da_{n-1} \cdot a_n - a_n \cdot a_0\, da_1\, da_2 \dots da_{n-1}.$$

Смысл его, по-прежнему, — вынесение последнего элемента (в данном случае a_n) из-под дифференциала, однако ставится он и на первое и на последнее место. Такая равноправность соответствует циклической записи формы:

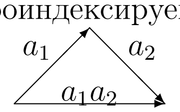
$$\begin{tikzcd}
& a_0 \arrow[r, dash] \arrow[dl, dash] & da_1 \arrow[dr, dash] & \\
da_5 \arrow[dr, dash] & & & da_2 \arrow[dl, dash] \\
& da_4 \arrow[r, dash] & da_3 &
\end{tikzcd}$$

.[1] Несложно видеть, что изоморфизм τ переводит оператор коммутации в граничный оператор комплекса Хохшильда b, и, таким образом, мы приходим к определению гомологий Хохшильда в терминах дифференциальных форм.

1.1.4 (Геометрическая интерпретация граничного оператора b.) Каждому элементу

$$(a_0, \ldots, a_n) \in A^{\otimes n+1}$$

поставим в соответствие n-мерный геометрический симплекс с вершинами $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ и ребрами (ребра считаются направленными) индексированными элементами алгебры A по следующему правилу: ребру $[0, 1]$ соответствует элемент a_0, ребру $[1, 2]$ соответствует a_1, и так далее, ребру $[n, 0]$ соответствует a_n. Если из трех ребер симплекса, образующих треугольник, два ребра уже проиндексированы элементами a_1 и a_2 соответственно, а третье является суммой (в векторном смысле) первого и второго, то третье ребро проиндексируем элементом $a_1 \cdot a_2$.



.2 При таком подходе взятию обычной геометрической границы будет соответствовать оператор b на индексах.

1.1.5 Опишем более формально симплициальную структуру комплекса Хохшильда $\mathcal{CH}_*(A)$.

Обозначим через Δ категорию, объектами которой являются наборы вида $\{1, 2, \ldots, k\} = [k]$, а морфизмами — невозрастающие отображения наборов $[n] \to [m]$. Симплициальным модулем (или более общо симплициальным объектом в категории $\mathcal{CAT}$) называется контравариантный функтор из категории Δ в категорию модулей (соответсвенно в категорию $\mathcal{CAT}$). Учитывая, что морфизмы в Δ порождаются операторами граней $\delta_i\colon [n-1] \to [n]$ (пропускающих i-й номер) и вырождений $\sigma_i\colon [n+1] \to [n]$ (отображающих два номера в i), уточним приведенное определение следующим образом. Симплициальным модулем называется набор модулей $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$ вместе с морфизмами модулей $d_i\colon M_i \to M_{i-1}$ и $s_i\colon M_i \to M_{i+1}$ связанными соотношениями

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i \quad i < j,$$

$$s_i s_j = s_{j+1} s_i \quad i \leq j,$$

$$d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i, & \text{при } i < j, \\ \mathrm{id}, & \text{при } i = j \text{ или } i = j+1, \\ s_j d_{i-1}, & \text{при } i > j+1 \end{cases}.$$

Примером симплициального модуля является набор $A \otimes A^{op}$-модулей $\{A^{\otimes n}\}_{n=1}^{\infty}$, для которых операторы граней и вырождений задаются следующими формулами:

$$d_i(a_0, \ldots, a_n) = (a_0, \ldots, a_i \cdot a_{i+1}, \ldots, a_n),$$

$$s_i(a_0, \ldots, a_n) = (a_0, \ldots, a_i, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

1.2 Циклические гомологии

1.2.1

Определение 1.2 *Циклическими гомологиями алгебры A (обозначение $HC_*(A)$) называются гомологии бикомплекса $\mathcal{CC}_{*,*}(A)$:*

$$
\mathcal{CC}_{*,*}(A): \quad
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "-b'"] & \vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "-b'"] & \\
A^{\otimes 3} \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l, "N"'] \\
A^{\otimes 2} \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l, "N"'] \\
A & A \arrow[l, "1-t"'] & A \arrow[l, "N"'] & A \arrow[l, "1-t"'] & \cdots, \arrow[l, "N"']
\end{tikzcd}
$$

где b и b' определяются также как и выше (см. пп.1.1.1, 1.1.2),

$$t(a_0, a_1, \cdots, a_n) = (-1)^n (a_n, a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}),$$

$$N = 1 + t + t^2 + ... + t^n.$$

Замечание. Здесь и далее под гомологиями би(три)комплексов понимаются гомологии ассоциированных с ними тотальных комплексов. Например,

$$HC_*(A) = H_*(Tot_* \mathcal{CC}(A)), \qquad \text{где} \quad Tot_n \mathcal{CC}(A) = \bigoplus_{i+j=n} \mathcal{CC}_{ij}(A).$$

Более того, встречающиеся в дальнейшем би(три)комплексы рассматриваются как специальная форма записи соответсвующих тотальных комплексов и, в большинстве случаев, они будут обозначаться одинаковыми символами.

Заметим, что четные столбцы бикомплекса $\mathcal{CC}_{*,*}(A)$ совпадают (с точностью до знака дифференциалов) с бар-резольвентой $\mathrm{Bar}_*^+(A)$ (см. п.1.1.2). Как отмечалось выше $\mathrm{Bar}_*^+(A)$ стягиваема со стягивающей гомотопией s. Опишем способ (см. также [31]) позволяющий избавиться от ацикличных компонент бикомплекса $\mathcal{CC}$ и перейти к меньшему бикомплексу, эквивалентному исходному.

Пусть $\mathcal{CC}''_{*,*}$ (соответствненно $\mathcal{CC}'_{*,*}$) бикомплекс состоящий из четных (соответствненно нечетных) столбцов бикомплекса $\mathcal{CC}_{*,*}(A)$ с нулевыми горизонтальными дифференциалами (нумерация строк и столбцов начинается с единицы). Воспользуемся предложением A.4 для комплекса

$$(\mathcal{CC}'_{*,*} \oplus \mathcal{CC}''_{*,*}, \begin{pmatrix} b & (1-t) \\ N & -b' \end{pmatrix}).$$

Получаем следующую специальную деформационную ретракцию

$$(\hat{\mathcal{BC}}(A), b, \hat{B}) \underset{I}{\overset{J}{\rightleftarrows}} (\mathcal{CC}(A); S), \tag{7}$$

где $\tilde{s} = -sb's$, модули $\hat{\mathcal{BC}}_{ij}(A) = A^{\otimes j-i+1}, \quad i, j \geq 0$,

$$\hat{B} = (1-t)\tilde{s}N, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{s} \end{pmatrix}, \qquad J = (1, \ -(1-t)\tilde{s}), \qquad I = \begin{pmatrix} 1 \\ -\tilde{s}N \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\hat{\mathcal{BC}}_{*,*}(A)$ содержит стягиваемый подкомплекс $\mathcal{DC}_{*,*}(A)$, порожденный наборами $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ содержащими единицу на i-ом месте, $i \neq 1$ (вырожденные наборы). Действительно, прямые вычисления показывают, что операторы b и $\hat{B}$ переводят вырожденные наборы в вырожденные и, значит, $\mathcal{DC}_{*,*}(A)$ является подкомплексом $\hat{\mathcal{BC}}_{*,*}(A)$. Обозначив $\hat{\mathcal{BC}}(A)/\mathcal{DC}(A)$ через $\mathcal{BC}(A)$, воспользуемся предложением A.5 применительно к комплексу

$$\hat{\mathcal{BC}}(A) = \mathcal{DC}(A) \oplus \mathcal{BC}(A)$$

и фильтрации по столбцам

$$F_n\hat{\mathcal{BC}}(A) = \{\hat{\mathcal{BC}}_{ij}(A)\}_{i \leq n}.$$

При этом роль d_1 и d_2 будут играть дифференциалы индуцированные ограничениями b на $\mathcal{BC}$ и $\mathcal{DC}$ соответственно, а α и δ — отображения, индуцированные ограничениями на $\mathcal{BC}$ и $\mathcal{DC}$ дифференциала B. Стягивающая гомотопия h^∞ для комплекса $(\mathcal{DC}, d_2)$ совпадает на каждом столбце с гомотопией h, используемой для нормализации комплекса Хохшильда (см. п. 1.1.1).

В результате получаем специальную деформационную ретракцию

$$(\mathcal{BC}_{*,*}(A), b, B) \underset{\nabla}{\overset{f}{\rightleftarrows}} (\hat{\mathcal{BC}}_{*,*}(A), b, \hat{B}; \hat{h}^\infty), \tag{8}$$

где f, ∇ и $\hat{h}^\infty$ получаются по формулам предложения A.5, а B индуцированно ограничением $\hat{B}$ на $\mathcal{BC}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} B = (1-t)\tilde{s}N|_{\mathcal{BC}} = (1-t)(-s+s^2b')N\big|_{\mathcal{BC}} = \\ = -\,sN + tsN + (1-t)s^2b'N\big|_{\mathcal{BC}} = -sN. \end{aligned}$$

Полученный бикомплекс (гомотопный исходному $\mathcal{CC}_{*,*}(A)$) выглядит следующим образом:

$$
\mathcal{BC}_{*,*}(A): \qquad
\begin{array}{ccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle b} \\
\overline{A}^{\otimes 4} & \xleftarrow{B} & \overline{A}^{\otimes 3} & \xleftarrow{B} & \overline{A}^{\otimes 2} & \xleftarrow{B} & A \\
\downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \\
\overline{A}^{\otimes 3} & \xleftarrow{B} & \overline{A}^{\otimes 2} & \xleftarrow{B} & A & & \\
\downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & & & \\
\overline{A}^{\otimes 2} & \xleftarrow{B} & A & & & & \\
\downarrow{\scriptstyle b} & & & & & & \\
A & & & & & &
\end{array}
,
$$

где $\overline{A}^{\otimes n} = A \otimes \overline{A}^{\otimes n-1}$. Итак, мы доказали следующее

Предложение 1.1 *Циклический бикомплекс $\mathcal{CC}_{*,*}(A)$ стягиваем к комплексу $\mathcal{BC}_{*,*}(A)$. Таким образом циклические гомологии алгебры A определяются эквивалентно как гомологии бикомплекса $\mathcal{BC}(A)$.*

Заметим, что столбцы циклического бикомплекса $\mathcal{CC}_{*,*}(A)$ повторяются с периодом 2, что позволяет определить оператор периодичности

$$S: \quad \mathcal{CC}_n(A) \to \mathcal{CC}_{n-2}(A),$$

состоящий в вычеркивании двух первых столбцов (более подробно см. п. 2.1.2). Рассмотрим следующую проективную систему

$$\ldots \xleftarrow{S} \mathcal{CC}_{n-2}(A) \xleftarrow{S} \mathcal{CC}_n(A) \xleftarrow{S} \mathcal{CC}_{n+2}(A) \xleftarrow{S} \ldots$$

Гомологии $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированного комплекса

$$\lim_{\leftarrow} \mathcal{CC}_{2n+2*}(A) \Longleftrightarrow \lim_{\leftarrow} \mathcal{CC}_{2n-1+2*}(A),$$

дифференциал в котором индуцирован дифференциалом комплекса $\mathcal{CC}$, называются периодическими (циклическими) гомологиями алгебры A, и обозначаются $HP(A)$ и $HP(A)$.

Рассмотрим некоторые другие подходы к определения циклических гомологий.

1.2.2 Как мы видели в (п.1.1.2) комплекс $\overline{\mathcal{CH}}_*(A)$ получается из аугментированной бар-резольвенты $\overline{\mathrm{Bar}}_*^+(A)$ заменой дифференциала b' на b, отличающихся на одно слагаемое b_n. В данной ситуации применима лемма о возмущении (теорема A.2): специальная деформационная ретракция имеет вид

$$0 \rightleftarrows (\overline{\mathrm{Bar}}(A), b'; s),$$

где s — стягивающая гомотопия, определенная в п. 1.1.2, а возмущением дифференциала b' будет b_n ("граничные условия" выполнены автоматически: $s^2 = 0$). В результате получаем, что по модулю I^n, то есть в данном случае по модулю t^{n+1} (более точно, см. формулировку леммы о возмущении в приложении A) комплекс $\overline{\mathcal{CH}}_*(A)$ стягиваем, со стягивающей гомотопией

$$\hat{s} = s - (-1)^{n+1} s b_{n+1} s + s b_{n+1} s b_{n+1} s - ... = s + s t_n + s t_n^2 + \ldots + s t_n^n = B.$$

1.2.3 Для некоммутативных дифференциальных форм (см. п.1.1.3) оператор B обобщает оператор s в том же смысле, что и b обобщает b'. Действие s можно описать следующим алгоритмом: используя A-линейность тензорного произведения и правило Лейбница (см. п.1.1.3) переносим все коэффициенты при дифференциалах на первое место и, затем, заносим под дифференциал, оставляя на первом месте единицу. Однако такая операция не является единственной возможной. Можно переносить коэффициенты на любое другое место, не обязательно на первое. Рассматривая сумму всех возможных вариантов получим циклический дифференциал B.

1.2.4 Заметим, что в строках комплекса $\mathcal{CC}(A)_{*,*}$ стоят резольвенты циклических групп; n-ой строке соответствует резольвента $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]$-модуле $A^{\otimes n}$, действие образующей на котором задается оператором t_n (очевидно $t_n^{n+1} = \mathrm{id}$).

Предположим, что основное кольцо k содержит рациональные числа. Тогда n-ая строка комплекса $\mathcal{CC}$ стягивается к тривиальному комплексу с модулем $A^{\otimes n+1}/(1-t)$ в нулевой размерности. Стягивающая гомотопия имеет вид (см. [34])

$$h' : \quad \mathcal{BC}_{2k-1,n} \to \mathcal{BC}_{2k,n}, \qquad h' = \frac{1}{n+1}\mathrm{id},$$

$$h'' : \quad \mathcal{BC}_{2k,n} \to \mathcal{BC}_{2k+1,n}, \qquad h'' = -\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} i t^i.$$

Таким образом $\mathcal{CC}(A)$ оказывается стянутым к комплексу Конна $\mathcal{C}_*^\lambda(A)$

$$\mathcal{CH}_0/\,Im(1-t) \xleftarrow{b} \mathcal{CH}_1/\,Im(1-t) \xleftarrow{b} \mathcal{CH}_2/\,Im(1-t) \xleftarrow{b} \cdots.$$

В своих работах А. Конн определял циклические гомологии исходя именно из комплекса $\mathcal{C}_*^\lambda(A)$.

1.3 Скрещенные симплициальные группы

1.3.1 Структура циклического бикомплекса $\mathcal{CC}_{*,*}$ допускает следующее обобщение.

Определение 1.3 *Скрещенной симплициальной группой называется набор групп $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ рассматриваемый вместе с малой категорией $\Delta\mathcal{G}$, объектами которой являются наборы $[n]$ (см. п.1.1.5); $\Delta\mathcal{G}$ содержит Δ как подкатегорию, и выполняются следующие условия:*

1. $Aut_{\Delta\mathcal{G}}[n] = G_n$,

2. *любой морфизм $\Delta\mathcal{G}$ однозначно записывается в виде композиции $\phi \cdot g$, где $\phi \in Hom_{\Delta}([m],[n])$, а $g \in Aut_{\Delta\mathcal{G}}[n] = G_n$.*

На содержательном уровне, скрещенные симплициальные группы — это группы действующие на симплициальных объектах, причем действие коммутирует (слева) с симплициальной структурой: для любых $g \in G_n$ и $\phi \in \mathrm{Hom}_{\Delta}([m],[n])$ существуют единственные $\phi^*(g) \in G_m$ и $g^*(\phi) \in \mathrm{Hom}_{\Delta}([m],[n])$ такие что $g \cdot \phi = \phi^*(g) \cdot g^*(\phi)$.

Наиболее простым примером скрещенных симплициальных групп являются симплициальные группы, то есть симплициальные объекты в категории групп. Для них $g \cdot \phi$ полагается равным $\phi \cdot \phi^*(g)$ т.е. $g^* = \mathrm{id}$.

Другой пример доставляет семейство циклических групп $\mathcal{C}_* = \{\mathbb{Z}_n\}_{n=1}^{\infty}$, ему соответствует категория $\Delta\mathcal{C}$ в которой к морфизмам Δ добавляются $\tau_n \colon [n] \to [n]$, причем выполнены соотношения

$$\tau_{n+1}\delta_i = \delta_{i-1}t_n, \quad i = 1..n, \quad \tau_{n+1}\delta_0 = \delta_n,$$

$$\tau_{n+1}\sigma_i = \sigma_{i-1}t_{n+2}, \quad i = 1..n, \quad \tau_{n+1}\sigma_0 = \sigma_n\tau_{n+2}^2,$$
$$\tau_{n+1}^{n+1} = id.$$

В работе [6] приводится следующая полная классификация скрещенных симплициальных групп.

Теорема 1.2 *Для любой скрещенной симплициальной группы G_* существует единственная с точностью до изоморфизма точная последовательность*

$$0 \longrightarrow G'_* \longrightarrow G_* \longrightarrow G''_* \longrightarrow 0,$$

где G'_* симплициальная группа, а G''_* одна из следующих семи "основных" скрещенных симплициальных групп $\{1\}$, $\mathcal{C}_*$, Σ_* (семейство симметрических груп), $\{\mathbb{Z}_2\}$, D_* (семейство диэдральных груп), $\mathbb{Z}_2 \times \Sigma_*$, $H_* = \mathbb{Z}_2^* \rtimes \Sigma_*$ (Σ_n действует на $\mathbb{Z}_2^n$ перестановками прямых сомножителей). $\square$

Таким образом, скрещенные симплициальные группы исчерпываются "основными"с точностью до симплициальных групп.

Каждой скрещенной симплициальной группе G_* можно сопоставить гомологии $\Delta\mathcal{G}^{op}$-модулей

$$\mathrm{HG}_n(M) = \mathrm{Tor}_n^{\Delta\mathcal{G}}(k, M).$$

Здесь M является $\Delta\mathcal{G}^{op}$-модулем, то есть функтором из $\Delta\mathcal{G}^{op}$ в категорию модулей. Например, $\{A^{\otimes n}\}_{n=1}^{\infty}$ — модуль над Σ_*, которая действует на тензорном произведении перестановками множителей.Семейство $\{A^{\otimes n}\}_{n=1}^{\infty}$ также является модулем над $\mathcal{C}_*$; действие определяется как частный случай предыдущего. Получающиеся с помощью $\mathcal{C}_*$ гомологии совпадают с циклическими, определявшимися выше.

Тем не менее, над остальными "основными" скрещенными симплициальными группами $\{A^{\otimes n}\}_{n=1}^{\infty}$, вообще говоря, модулем не является, то есть его симплициальная структура беднее чем у эталонного Δ^* (геометрический симплекс). Это наводит на мысль о следующей модификации.

1.3.2 Пусть A — алгебра с инволюцией, то есть задано линейное отображение $^{-}\colon A \to A$ для которого $\overline{\overline{a}} = a$ и $\overline{a \cdot b} = \overline{b}\overline{a}$ (коммутативную алгебру всегда можно считать наделенной тривиальной инволюцией $\overline{a} = a$). При этом $\{A^{\otimes n}\}_{n=1}^{\infty}$ становится модулем над всеми "основными" скрещенными симплициальными группами. В случае H_* действие i-го экземпляра $\mathbb{Z}_2$ задается инволюцией на i-ом сомножителе тензорного произведения. В остальных случаях $\mathbb{Z}_2$ действует на $A^{\otimes n}$ с помощью оператора"отражения"

$$r_n(a_0, \ldots, a_n) = (\overline{a}_n, \overline{a}_{n-1}, \ldots, \overline{a}_1, \overline{a}_0).$$

Из получающихся таким образом гомологических теорий наиболее полно изучены две: соответствующая $\{\mathbb{Z}_2\}$ (положительные и отрицательные рефлексивные гомологии: $HR_*^+(A)$ и $HR_*^-(A)$) и соответствующая D_* (положительные и отрицательные диэдральные гомологии $HD_*^+(A)$ и $HD_*^-(A)$). Ввиду их важности приведем соответствующие определения.

1.3.3

Определение 1.4 *[8] Положительными рефлексивными гомологиями алгебры A называются гомологии бикомплекса:*

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle -b} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle -b} & \\
\mathcal{CR}^+_{*,*}(A): & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{1-y} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{1+y} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{1-y} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{1+y} \cdots \\
 & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle -b} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle -b} & \\
 & A & \xleftarrow{1-y} & A & \xleftarrow{1+y} & A & \xleftarrow{1-y} & A & \xleftarrow{1+y} \cdots,
\end{array}$$

где

$$y_n(a_0,a_1,\ldots,a_n)=(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)}(\overline{a}_0,\overline{a}_n,\overline{a}_{n-1},\ldots,\overline{a}_1)=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}t_nr_n.$$

Обозначение $HR^+_*(A)$.

Отрицательные рефлексивные гомологии определяются исходя из бикомплекса $\mathcal{CR}^-_{*,*}(A)$, который получается из $\mathcal{CR}^+_{*,*}(A)$ заменой y_n на $-y_n$. Отметим, что по строкам $\mathcal{CR}^+$ и $\mathcal{CR}^-$ стоят резольвенты группы $\mathbb{Z}_2$. Комплексы $\mathcal{CR}^+$ и $\mathcal{CR}^-$ рассматриваются обычно не поотдельности, и тогда их объединяют в один комплекс

$$\mathcal{CR}_*(A)=\mathcal{CR}^+_*(A)\oplus\mathcal{CR}^-_*(A).$$

1.3.4 Диэдральные группы

$$D_n=<p,q\mid p^n=q^2=1,qpq^{-1}=p^{-1}>$$

не имеют, вообще говоря, периодической резольвенты;

Определение 1.5 *[8] Положительными диэдральными гомологиями алгебры A называются гомологии трикомплекса $\mathcal{CD}^+_{*,*,*}$:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\downarrow{\scriptstyle 1-y} & & \downarrow{\scriptstyle -1-yt} & & \downarrow{\scriptstyle 1+y} & & \downarrow{\scriptstyle -1+yt} & & \\
(A^*,b) & \xleftarrow{1-t} & (A^*,-b') & \xleftarrow{N} & (A^*,b) & \xleftarrow{1-t} & (A^*,-b') & \xleftarrow{N} & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle 1+y} & & \downarrow{\scriptstyle -1+yt} & & \downarrow{\scriptstyle 1-y} & & \downarrow{\scriptstyle -1-yt} & & \\
(A^*,-b) & \xleftarrow{1-t} & (A^*,b') & \xleftarrow{N} & (A^*,-b) & \xleftarrow{1-t} & (A^*,b') & \xleftarrow{N} & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle 1-y} & & \downarrow{\scriptstyle -1-yt} & & \downarrow{\scriptstyle 1+y} & & \downarrow{\scriptstyle -1+yt} & & \\
(A^*,b) & \xleftarrow{1-t} & (A^*,-b') & \xleftarrow{N} & (A^*,b) & \xleftarrow{1-t} & (A^*,-b') & \xleftarrow{N} & \cdots
\end{array}$$

Стандартное обозначение $HD^+_*(A)$.

Строки $\mathcal{CD}^+_{*,*,*}(A)$ — (с точностью до знака) обычные циклические комплексы $\mathcal{CC}_{*,*}(A)$, а операторы y и yt, определяющие вертикальные морфизмы задают "отражения"элементов $A^{\otimes n}$. Такая структура $\mathcal{CD}^+_{*,*,*}$ соответствует разложению D_n в полупрямое произведение $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. В слое $\mathcal{CD}^+_{*,*,*}(A)$ составленном из $A^{\otimes n}$ стоят резольвенты группы D_n с коэффициентами в $A^{\otimes n}$.

Аналогично $\mathcal{CD}^+(A)$ строится $\mathcal{CD}^-(A)$, гомологии которого равны отрицательным диэдральным гомологиям, получающийся, как и в случае рефлексивных гомологий, сменой знака при y. Как и рефлексивные, диэдральные комплексы часто объединяют в один

$$\mathcal{CD}_{*,*,*}(A)=\mathcal{CD}^+_{*,*,*}(A)\oplus\mathcal{CD}^-_{*,*,*}(A).$$

1.3.5 Иногда рассматривают также кватернионные гомологии, соответствующие скрещенной симплициальной группе $\{Q_*\}$,

$$Q_n =< p, q \mid p^n = q^2, qpq^{-1} = p^{-1} >,$$

которая получается из $\{D_*\}$ расширением с помощью $\{\mathbb{Z}_2\}$. В отличие от D_n обобщенные кватернионные группы Q_n допускают 4-периодическую резольвенту для любого $n \in \mathbb{N}$ [5, стр.309].

Рассмотрим следующий бикомплекс, обозначаемый $\mathcal{CQ}_{*,*}(A)$

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "-b'\oplus -b"] & \vdots \arrow[d, "b\oplus b'"] & \vdots \arrow[d, "-b'"] & \vdots \arrow[d, "b"] & \\
A^{\otimes 2} \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 2}\oplus A^{\otimes 2} \arrow[l, "\theta"'] \arrow[d, "-b'\oplus -b"] & A^{\otimes 2}\oplus A^{\otimes 2} \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[d, "b\oplus b'"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "\phi"'] \arrow[d, "-b'"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "N_Q"'] \arrow[d, "b"] & \cdots \arrow[l, "\theta"'] \\
A & A\oplus A \arrow[l, "\theta"'] & A\oplus A \arrow[l, "\sigma"'] & A \arrow[l, "\phi"'] & A \arrow[l, "N_Q"'] & \cdots . \arrow[l, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

Столбцы $\mathcal{CQ}(A)$ повторяются с периодом 4, первый столбец образован комплексом Хохшильда $\mathcal{CH}_*(A)$, четвертый — бар-резольвентой $\mathrm{Bar}^+(A)$, а второй и третий являются, с точностью до знаков дифференциалов, прямой суммой $\mathcal{CH}(A) \oplus \mathrm{Bar}^+(A)$. Горизонтальные дифференциалы задаются матрицами

$$\theta = (1-t, 1-y), \quad \sigma = \begin{pmatrix} N & 1+yt \\ -(1+y) & t-1 \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} 1-t \\ yt-1 \end{pmatrix}.$$

Наконец

$$N_Q(a) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{n} y^i t^j (a) = \sum_{g \in Q_n} g(a), \qquad a \in A^{\otimes n}.$$

Таким образом, по строкам комплекса $\mathcal{CQ}(A)$ стоят резольвенты кватернионных групп (см. [5]).

Определение 1.6 *[35] Кватернионными гомологиями алгебры A называются гомологии бикомплекса $\mathcal{CQ}_{*,*}(A)$. Обозначение $HQ_*(A)$.*

1.4 Диэдральный комплекс $\mathcal{BD}_{*,*,*}(A)$

Как и циклический бикомплекс $\mathcal{CC}_{*,*}(A)$, комплексы $\mathcal{CD}^{\pm}_{*,*,*}(A)$ и $\mathcal{CQ}_{*,*}(A)$ содержат стягиваемые столбцы $(\mathcal{CH}_*, b')$, избавившись от которых с помощью леммы о возмущении и процесса нормализации, подобному проведенному в п. 1.2.1 можно перейти к гораздо меньшим комплексам $\mathcal{BD}^{\pm}_{*,*,*}(A)$ и $\mathcal{BQ}_{*,*,*}(A)$. Проделаем это сначала для диэдрального случая.

1.4.1 В п. 1.2.1 нами была получена следующая специальная деформационная ретракция

$$\hat{\mathcal{B}\mathcal{C}}_{*,*}(A) \underset{I}{\overset{J}{\leftrightarrows}} \mathcal{C}\mathcal{C}_{*,*}(A); S. \tag{9}$$

Положим $\tilde{s} = sb's$. Операторам

$$I_n\colon \hat{\mathcal{B}\mathcal{C}}_n \to \mathcal{C}\mathcal{C}_n \qquad J_n\colon \mathcal{C}\mathcal{C}_n \to \hat{\mathcal{B}\mathcal{C}}_n \qquad \text{и} \qquad S_n\colon \mathcal{C}\mathcal{C}_n \to \mathcal{C}\mathcal{C}_{n+1}$$

соответствуют следующие матрицы. Матрица J_n с $[\frac{n+1}{2}]$ строками и $(n+1)$ столбцом

$$\begin{pmatrix}
1 & (t-1)\tilde{s} & & & & & & & & \\
& & 1 & (t-1)\tilde{s} & & & & & & \\
& & & & \cdots & \cdots & & & & \\
& & & & & & \cdots & \cdots & & \\
& & & & & & & & 1 & (t-1)\tilde{s})
\end{pmatrix}.$$

Матрица I_n с $(n+1)$ строкой и $[\frac{n+1}{2}]$ столбцами

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & \\
& -\tilde{s}N & & & & \\
& 1 & & & & \\
& & -\tilde{s}N & & & \\
& & 1 & & & \\
& & & \cdots & & \\
& & & \cdots & & \\
& & & & \cdots & \\
& & & & \cdots & \\
& & & & & -\tilde{s}N \\
& & & & & 1
\end{pmatrix}.$$

Матрица S_n с $(n+2)$ строками и $(n+1)$ столбцом.

$$\begin{pmatrix}
0 & & & & & \\
& \tilde{s} & & & & \\
& & 0 & & & \\
& & & \tilde{s} & & \\
& & & & \ddots & \\
& & & & & 0
\end{pmatrix}.$$

Дальнейшие рассуждения будем проводить для комплекса $\mathcal{CD}^{+}_{*,*,*}(A)$; соответствующие рассуждения для $\mathcal{CD}^{-}_{*,*,*}(A)$ совершенно аналогичны.

1.4.2 Трикомплекс $\mathcal{CD}^+_{*,*,*}(A)$ можно считать состоящим из $\mathcal{CC}_{*,*}$-слоев. Полагая дифференциалы, идущие из одного $\mathcal{CC}_{*,*}$-слоя в другой равными нулю получаем комплекс

$$\mathcal{CC}^\infty_{*,*} = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{CC}^i_{*,*},$$

для которого ретракция

$$\hat{\mathcal{BC}}^\infty_{*,*} \underset{I^\infty}{\overset{J^\infty}{\leftrightarrows}} \mathcal{CC}^\infty_{*,*}; S^\infty,$$

совпадающая на каждом слое с ретракцией (9), будет специальной деформационной ретракцией. Операторы

$$I^\infty_n : \hat{\mathcal{BC}}^\infty_n \to \mathcal{CC}^\infty_n \qquad J^\infty_n : \mathcal{CC}^\infty_n \to \hat{\mathcal{BC}}^\infty_n \qquad S^\infty_n : \mathcal{CC}^\infty_n \to \mathcal{CC}^\infty_{n+1}$$

можно записать в виде матриц

$$\begin{pmatrix} I_n & & & \\ & I_{n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} J_n & & & \\ & J_{n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S_n & & & \\ & S_{n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & S_0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно.

Рассматривая дифференциалы между $\mathcal{CC}$-слоями как возмущение

$$\Delta_n : \quad \mathcal{CD}^+_{n+1}(A) \to \mathcal{CD}^+_n(A)$$

задаваемое матрицей

$$\Delta_n : \quad \begin{pmatrix} 0 & \delta_n & & & \\ & & \delta_{n-1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \delta_0 \end{pmatrix},$$

где

$$\delta_{2n} = \operatorname{diag}\{1-y, yt-1, 1+y, -(yt+1), 1-y, \ldots\}$$
$$\delta_{2n-1} = \operatorname{diag}\{1+y, -(yt+1), 1-y, yt-1, 1+y, \ldots\}$$

4-периодичные диагональные матрицы размера $2n \times 2n$ и $(2n-1) \times (2n-1)$ соответственно. Выполнение "граничных условий" следует из выполнения соответствующих условий для ретракции (9).

Поскольку $S^\infty_n \Delta_n$ является квадратной верхнетреугольной матрицей, условие локольной нильпотентности — $(S^\infty_n \Delta_n)^m = 0$ для некоторого m — выполнено, и мы можем воспользоваться леммой о возмущении (теорема A.2).

Таким образом получаем специальную деформационную ретракцию

$$(\hat{\mathcal{BC}}^{\infty}_{*,*,*}(A), b+\hat{B}, \hat{\Delta}) \underset{\hat{I}^{\infty}}{\overset{\hat{J}^{\infty}}{\leftrightarrows}} \mathcal{CD}_{*,*,*}(A); \hat{S}^{\infty}.$$

Добавка к дифференциалу $\hat{\Delta}_n$ является блочной верхнетреугольной матрицей следующего вида

$$\begin{pmatrix} 0_{n+1}\, J_n\delta_n I_n & J_n\delta_n S_{n-1}\delta_{n-1}I_{n-1} & \cdots & & \\ & J_{n-1}\delta_{n-1}I_{n-1} & J_{n-1}\delta_{n-1}S_{n-2}\delta_{n-2}I_{n-2} & \cdots & \\ & & J_{n-2}\delta_{n-2}I_{n-2} & \cdots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_0\delta_0 I_0 \end{pmatrix}, \qquad (10)$$

где 0_{n+1} обозначает нулевую матрицу $[\frac{n+1}{2}] \times [\frac{n+1}{2}]$.

Блочная диагональ матрицы $\hat{\Delta}_n$ начинающаяся блоком 0_{n+1} состоит из нулевых блоков. Следующая диагональ, начинающаяся блоком $J_n\delta_n I_n$ будем называть “первой”.

1.4.3 Выделим в $\hat{\mathcal{BC}}^{\infty}_{*,*}(A)$ подмодуль $\mathcal{DC}^{\infty}$, состоящий из вырожденных элементов. Мы уже видели, что b и $\hat{B}$ переводят вырожденные наборы в вырожденные. Чтобы установить, что $\mathcal{DC}^{\infty}$ является подкомплексом $\hat{\mathcal{BC}}^{\infty}$ нам остается доказать, что $\hat{\Delta}$ переводит вырожденные элементы в вырожденные. Элемент любого блока матрицы (10) состоит из композиции операторов перестановок N, t, y и вырождений $\tilde{s}$. Каждый блок матрицы (10) является композицией блочных матриц начинающейся с $J_n\delta_n$. Значит любой элемент каждого ненулевого блока (10) является композицией вида

$$j \circ q \circ r, \qquad (11)$$

где j — элемент матрицы J_n, а q — элемент матрицы δ_n. Таким образом, для элементарных композиций (11) возможны следующие варианты

- Либо j является элементом четного столбца матрицы J_n (нумерация начинается с 1), и тогда композиция (11) начинается с $(1-t)\tilde{s}$, следовательно результат содержит как минимум две единицы и, значит, вырожден.

- Либо j является элементом нечетного столбца матрицы J_n, и при этом рассматривается блок первой диагонали. Тогда этот блок имее вид $J_m\delta_m I_m$. Следовательно композиция (11) в целом равна $(1 \pm y)$ и снова вырожденные наборы переходят в вырожденные, поскольку и 1 и y переставляя сомножители тензорного произведения оставляют первый из них на месте.

- Либо j является элементом нечетного столбца матрицы J_n, и при этом рассматривается блок диагонали выше чем первая. Тогда оператор S_m имеющий нулевые нечетные элементы следует в композиции (11) за δ. Значит композиция равна нулю.

Применяя как и в п. 1.2.1 предложение A.5, получаем дефформационную ретракцию следующего вида

$$(\mathcal{BD}^+_{*,*,*}(A), b+\hat{B}, \hat{\Delta}) \Longleftrightarrow (\hat{\mathcal{BC}}^{\infty}_{*,*,*}(A), b+\hat{B}, \hat{\Delta}; \hat{h}),$$

где $\mathcal{BD}^+_{*,*,*}(A)$ получен из $\hat{\mathcal{BC}}^{\infty}_{*,*,*}(A)$ факторизацией по “вырожденному” подкомплексу.

1.4.4 Возвращаясь к явному виду $\hat{\Delta}_n$ заметим, что в блочной записи (10) все диагонали кроме нижней после нормализации становятся нулевыми. Действительно, $J_n \delta_n S_{n-1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & (t-1)\tilde{s} & & & & \\ & & 1 & (t-1)\tilde{s}) & & \\ & & & & \dots & \dots \\ & & & & & \end{pmatrix} \delta_n \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \tilde{s} & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \tilde{s} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -(1-t)\tilde{s}(1 \pm y)\tilde{s} & 0 & & \\ & & 0 & -(1-t)\tilde{s}(1 \mp y)\tilde{s} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = 0,$$

так как при нормализации $\tilde{s}$ переходит в s, а $ys = syt$ и $s^2 = 0$.

Комбинация $J_n \delta_n S_{n-1}$ содержится во всех диагоналях начиная со второй. Первая состоит из блоков $J_n \delta_n I_n =$

$$J_n \cdot \begin{pmatrix} 1 \pm y & & & \\ & \mp yt - 1 & & \\ & & 1 \mp y & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -\tilde{s}N & & \\ & 1 & & \\ & & -\tilde{s}N & \\ & & 1 & \\ & & & \dots \\ & & & \dots \end{pmatrix}.$$

В результате получаем:

$$J_n \delta_n I_n = \begin{pmatrix} (1 \pm y) & (1-t)\tilde{s}(\mp yt - 1)\tilde{s}N & & \\ & (1 \mp y) & (1-t)\tilde{s}(\pm yt - 1)\tilde{s}N & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & (1 \pm y) & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1 \pm y) & & \\ & (1 \mp y) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Мы учли, что $\tilde{s}$ при нормализации переходит в s, и что композиция t, N, y, s, содержащая s два раза равна нулю.

Таким образом, учитывая предложение А.1, мы построили специальную деформационную ретракцию комплекса $\mathcal{CD}^+_{*,*,*}(A)$ к комплексу

$$(\mathcal{BC}_{*,*}, b, B) \xleftarrow{\tilde{\omega}^+} (\mathcal{BC}_{*,*}, -b, -B) \xleftarrow{\tilde{\omega}^-} (\mathcal{BC}_{*,*}, b, B) \xleftarrow{\tilde{\omega}^+} \cdots$$

Комплексы отличающиеся лишь знаком дифференциалов изоморфны (см. [4]); пользуясь этим, поменяем знаки дифференциалов в $(\mathcal{BC}, -b, -B)$-слоях на противоположные. При этом нужно будет изменить и знаки горизонтальных дифференциалов. Нами доказано следующее утверждение.

Теорема 1.3 *Комплекс $\mathcal{CD}^+_{*,*,*}(A)$ стягивается к комплексу*

$$\mathcal{BD}^+_{*,*,*}\colon \quad (\mathcal{BC}_{*,*}, b, B) \xleftarrow{\omega^+} (\mathcal{BC}_{*,*}, b, B) \xleftarrow{\omega^-} (\mathcal{BC}_{*,*}, b, B) \xleftarrow{\omega^+} \cdots,$$

и аналогично комплекс $\mathcal{CD}^-_{*,*,*}(A)$ стягивается к

$$\mathcal{BD}^-_{*,*,*}\colon \quad (\mathcal{BC}_{*,*}, b, B) \xleftarrow{\omega^-} (\mathcal{BC}_{*,*}, b, B) \xleftarrow{\omega^+} (\mathcal{BC}_{*,*}, b, B) \xleftarrow{\omega^-} \cdots,$$

где ω^+_{ij}, ω^-_{ij} : $\mathcal{BC}_{ij}(A) \to \mathcal{BC}_{ij}(A)$, $i \geq 0$, $j \geq 0$, записываются как

$$\omega^+_{i,j} = (-1)^{i+j}(1 - (-1)^i y) \quad \text{и} \quad \omega^-_{i,j} = (-1)^{i+j}(1 + (-1)^i y)$$

соответственно.$\square$

1.5 Кватернионный комплекс $\mathcal{BQ}_{*,*}(A)$

1.5.1 Прейдем теперь к кватернионному случаю. Рассмотрим следующий комплекс $\mathcal{Q}_{*,*}(A)$:

$$(A^{\otimes *}, b) \xleftarrow{\theta} (A^{\otimes *}, -b') \oplus (A^{\otimes *}, -b) \xleftarrow{\sigma} (A^{\otimes *}, b) \oplus (A^{\otimes *}, b') \xleftarrow{\phi} (A^{\otimes *}, -b'),$$

составляющий “период” комплекса $\mathcal{CQ}_{*,*}(A)$ (см. п. 1.3.5). По-другому его можно записать следующим образом

$$\mathcal{CH}_*(A) \oplus -\mathcal{CH}_*(A)[1] \oplus -\mathrm{Bar}_*(A)[1] \oplus \mathrm{Bar}_*(A)[2] \oplus \mathcal{CH}_*(A)[2] \oplus -\mathrm{Bar}_*(A)[3],$$

где $\mathcal{C}[n]_*$ обозначает n-кратную надстройку комплекса $\mathcal{C}_*$, то есть $\mathcal{C}[n]_k = \mathcal{C}_{k-n}$, а знак “$-$” перед комплексом означает смену знака дифференциала комплекса. Тогда дифференциал в $\mathcal{Q}_{*,*}(A)$ имеет вид

$$d_{\mathcal{Q}}\colon \quad \begin{pmatrix} b & 1-y & 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & t-1 & -1-y & 0 \\ 0 & 0 & -b' & 1+yt & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b' & 0 & yt-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 1-t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b' \end{pmatrix}$$

(обозначения те же, что и в п.1.3).

Обозначим диагональную часть $d_{\mathcal{Q}}$ через

$$d = diag\{b, -b, -b', b', b, b'\},$$

а оставшуюся через $\delta = d_{\mathcal{Q}} - d$. Применим лемму о возмущении к следующей специальной деформационной ретракции

$$(\mathcal{Q}'_{*,*}(A), b) \underset{\nabla}{\overset{f}{\leftrightarrows}} (\mathcal{Q}_{*,*}(A), d; S),$$

где

$$\mathcal{Q}' = \mathcal{CH}_*(A) \oplus -\mathcal{CH}_*(A)[1] \oplus \mathcal{CH}_*(A)[2],$$

а операторы S, f, ∇ задаются матрицами

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & -\tilde{s} & & & \\ & & & -\tilde{s} & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & -\tilde{s} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно. Как и ранее $\tilde{s} = sb's$

$$\mathcal{Q}' = \mathcal{CH}_*(A) \oplus -\mathcal{CH}_*(A)[1] \oplus \mathcal{CH}_*(A)[2].$$

В качестве возмущения рассмотрим δ; локальная нильпотентность следует из того, что матрица $S\delta$ будет верхнетреугольной. В результате получается специальная деформационная ретракция

$$(\mathcal{Q}'_{*,*}(A), b + \hat{\delta}) \underset{\hat{\nabla}}{\overset{\hat{f}}{\leftrightarrows}} (\mathcal{Q}_{*,*}(A), d_{\mathcal{Q}}; \hat{S}), \tag{12}$$

где $\hat{S}$ и $\hat{\nabla}$ записываются как матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{s} & \tilde{s}(1+yt)\tilde{s} & 0 & -\tilde{s}(1+yt)\tilde{s}(yt-1)\tilde{s} \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{s} & 0 & s(yt-1)\tilde{s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{s} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{s}N \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно. Операторы $\hat{f}$ и $\hat{\delta}$ записываются в виде матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & (1-t)\tilde{s} & (t-1)\tilde{s}(1+yt)\tilde{s} & 0 & 0 & (t-1)\tilde{s}(1+yt)\tilde{s}(yt-1)\tilde{s} \\ 0 & 1 & (t+1)\tilde{s} & 0 & 0 & (t-1)\tilde{s}(yt-1)\tilde{s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (t-1)\tilde{s} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-y & B \\ 0 & 0 & -(1+y) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно.

1.5.2 Рассматривая теперь бикомплекс

$$\mathcal{CQ}_{*,*}(A):\quad (\mathcal{Q}_{*,*}(A), d_{\mathcal{Q}}) \xleftarrow{N_{\mathcal{Q}}} (\mathcal{Q}_{*,*}(A), d_{\mathcal{Q}}) \xleftarrow{N_{\mathcal{Q}}} \cdots,$$

вновь применим лемму о возмущении к специальной деформационной ретракции

$$(\mathcal{Q}'^{\infty}_{*,*}(A), b+\hat{\delta}) \underset{\hat{\nabla}^{\infty}}{\overset{\hat{f}^{\infty}}{\rightleftarrows}} (\mathcal{Q}^{\infty}_{*,*}(A), d_{\mathcal{Q}}; \hat{S}^{\infty}),$$

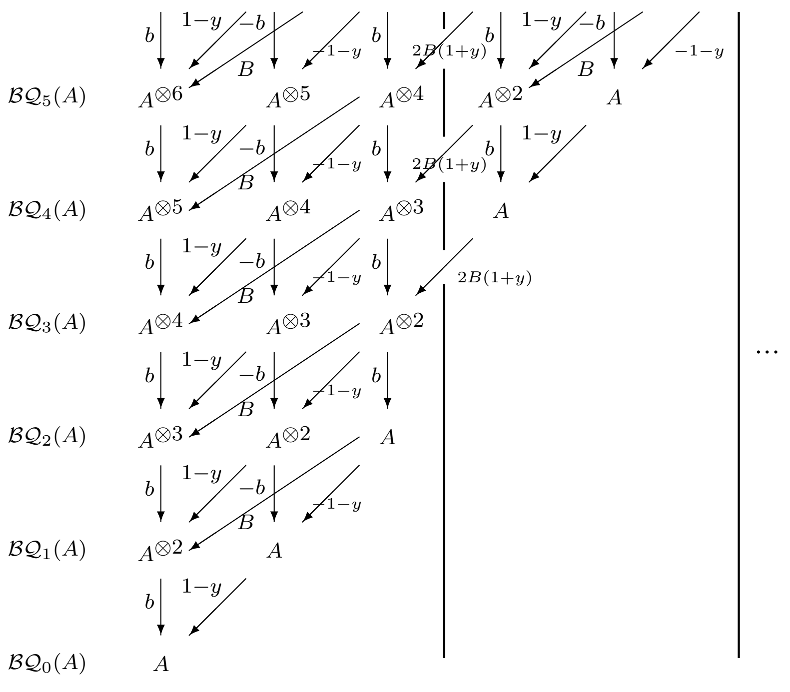
состоящей из бесконечного числа экземпляров (12), так что добавляя к дифференциалу $d_{\mathcal{Q}}$ комплекса $(\mathcal{Q}^{\infty}_{*,*}(A), d_{\mathcal{Q}})$ возмущение $N_{\mathcal{Q}}$ получим комплекс $\mathcal{CQ}_{*,*}(A)$ (этим же приемом мы пользовались и в п.1.4.2 при построении комплекса $\mathcal{CD}^{+}_{*,*,*}(A)$). Обоснование применимости леммы о возмущении в точности такое же как и в п. 1.4.2. В результате комплекс $\mathcal{CQ}_{*,*}(A)$ оказался стянутым к комплексу

$$(\mathcal{Q}'^{\infty}_{*,*}(A), b+\hat{\delta}+\hat{N}_{\mathcal{Q}}),$$

где

$$\hat{N}_{\mathcal{Q}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (1-t)\tilde{s}(1+y)\tilde{s}(yt-1)\tilde{s}N_{\mathcal{Q}} \\ 0 & 0 & (t-1)\tilde{s}(yt-1)\tilde{s}N_{\mathcal{Q}} \\ 0 & 0 & (t-1)\tilde{s}N_{\mathcal{Q}} \end{pmatrix}.$$

Из явного вида операторов b, $\hat{\delta}$ и $\hat{N}_{\mathcal{Q}}$ ясно, что вырожденные наборы они переводят в вырожденные (обоснование этого факта для b и компонент $\hat{\delta}$ и $\hat{N}_{\mathcal{Q}}$ проводилось в п.1.4.3), и, следовательно, вырожденные наборы образуют подкомплекс в $\mathcal{Q}'^{\infty}_{*,*}(A)$, по которому (используя предложение A.5) можно профакторизовать. Дифференциал при этом не изменяется. Полученный комплекс будем обозначать через $\mathcal{BQ}_{*,*}(A)$.



На приведенной диаграмме n-ая строка представляет собой модуль

$$\mathcal{BQ}_n(A) = \bigoplus_{i+j=n} \mathcal{BQ}_{i,j}(A).$$

Столбцы повторяются с периодом 3. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.4 *Комплекс $\mathcal{CQ}_{*,*}(A)$ стягивается к комплексу $\mathcal{BQ}_{*,*}(A)$.*

2 Бивариантные когомологии

При изучении гомологий с симметриями (циклические, диэдральные и т. д.) алгебры A, возникают комплексы с различными периодичностями : $\mathcal{CC}$, $\mathcal{BC}$, $\mathcal{BQ}$ и т. д. От морфизмов комплексов такого рода разумно потребовать сохранения их "геометрической структуры"(периодичности). Развивая эту идею, Дж. Джонс и Кр. Кассель в работе [29] определили бивариантные циклические когомологии как гомологии морфизмов S-комплексов, т.е. комплексов с периодичностями как у комплексов $\mathcal{CC}_{*,*}(A)$ и $\mathcal{BC}_{*,*}(A)$. В работе П. Гурролы [28] были введены бивариантные кватернионные гомологии. В настоящей работе мы определим бивариантные диэдральные гомологии и рассмотрим некоторые обобщения этих понятий для различных мультикомплексов.

2.1 Периодичности

2.1.1

Определение 2.1 *Будем говорить, что комплекс $(\mathcal{C}_*, d)$ обладает периодичностью степени m, если задано эпиморфное отображение $P : \mathcal{C}_* \to \mathcal{C}_{*+m}$, изменяющее градуировку на m и коммутирующее с дифференциалом.*

Пусть (X', d') и (X'', d'') — цепные комплексы снабженные наборами коммутирующий периодичностей

$$\mathcal{P}' = \{P'_1, ..., P'_k\},$$

определенных на комплексе X', и

$$\mathcal{P}'' = \{P''_1, ..., P''_k\},$$

определенных на комплексе X'', причем степени P'_i и P''_i равны m_i.

Определение 2.2 *Деформационная ретракция (см. приложение A)*

$$(X''_*, d'') \underset{\nabla}{\overset{f}{\leftrightarrows}} (X'_*, d'; h)$$

называется $\mathcal{P}'$-$\mathcal{P}''$-совместимой, если операторы f, ∇ и h коммутируют с периодичностями

$$fP'_i = P''_i f, \qquad \nabla P''_i = P'_i \nabla, \qquad hP'_i = P'_i h \quad \text{для всех } i,\ 1 \le i \le k.$$

2.1.2 Рассмотрим следующие примеры периодичностей, определенных на комплексах, построенных в главе 1.

На циклическом комплексе $\mathcal{BC}(A)$ определена периодичность степени -2 (см. п. 1.2.1)

$$S_{\mathcal{BC}}\colon\quad \mathcal{BC}_n(A)\longrightarrow\mathcal{BC}_{n-2}(A),$$

проектирующая

$$\mathcal{BC}_n(A)=\bigoplus\nolimits_{i=0}^{[n/2]}A\otimes\overline{A}^{\otimes n-2i}$$

на

$$\mathcal{BC}_{n-2}(A)=\bigoplus\nolimits_{i=1}^{[n/2]}A\otimes\overline{A}^{\otimes n-2i}.$$

На интуитивном уровне, S состоит в вычеркивании первого столбца бикомплекса $\mathcal{BC}$. Очевидно, что $S_{\mathcal{BC}}$ коммутирует с дифференциалом. Аналогично определяется оператор

$$S_{\mathcal{CC}}\colon\ \ \mathcal{CC}_n(A)\longrightarrow\mathcal{CC}_{n-2}(A),\qquad S_{\mathcal{CC}}\colon\ \ \bigoplus\nolimits_{i=1}^{n+1}A^{\otimes i}\to\bigoplus\nolimits_{i=1}^{n-1}A^{\otimes i},$$

состоящий в вычеркивании первых двух столбцов комплекса $\mathcal{CC}_{*,*}(A)$.

Предложение 2.1 *Деформационная ретракция комплекса $\mathcal{CC}$ к $\mathcal{BC}$, построенная в п. 1.2.1 является $S_{\mathcal{BC}}$-$S_{\mathcal{CC}}$-совместимой.*

В дальнейшем, для упрощения обозначений, вместо “$S_{\mathcal{BC}}$-$S_{\mathcal{CC}}$-совместимый” будем писать “S-совместимый”.

Доказательство. Из формул предложения А.1 следует, что композиция двух S-совместимых деформационных ретракций будет снова S-совместимой. Ретракция комплекса $\mathcal{CC}$ к $\mathcal{BC}$ является композицией ретракций (7) и (8), построенных в п. 1.2.1. Снабдим бикомплекс $\hat{\mathcal{BC}}$ периодичностью, аналогичной $S_{\mathcal{BC}}$.

S-совместимость ретракции (7) получается из матричного представления операторов I_n, J_n и S_n (см. п. 1.4.1). Рассмотрим, например, матрицу J_n. Действие $S_{\mathcal{CC}}$ на J_n справа ($J_n\circ S_{\mathcal{CC}}$) состоит в вычеркивании двух первых столбцов матрицы J_n. Действие $S_{\mathcal{BC}}$ на J_n слева ($S_{\mathcal{BC}}\circ J_n$) состоит в вычеркивании первой строки матрицы J_n. Учитывая явный вид матрицы J_n (см. п. 1.4.1) получаем

$$J_n\circ S_{\mathcal{CC}}=S_{\mathcal{BC}}\circ J_n.$$

Напомним (см. предложение А.5), что операторы f, ∇ и $\hat{h}^\infty$ ретракции (8) задаются матрицами

$$(1,0),\qquad \begin{pmatrix}0\\ \sum_{i=0}^\infty(h\delta)^i\gamma\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad\begin{pmatrix}0&0\\0&\sum_{i=0}^\infty h(\delta h)^i\end{pmatrix}$$

соответственно. Перестановочность f с S очевидна. Действие S на ∇ и $\hat{h}^\infty$ как справа, так и слева состоит в том, что последнее слагаемое в суммах

$$\sum_{i=0}^{\infty}(h\delta)^i\gamma \qquad \text{или} \qquad \sum_{i=0}^{\infty}h(\delta h)^i$$

становится нулевым. Таким образом, ретракция (8) также S-совместима. $\square$

2.1.3 Периодичности кватернионных комплексов $\mathcal{BQ}$ и $\mathcal{CQ}$

$$T_{\mathcal{BQ}}:\quad \mathcal{BQ}_n(A)\to\mathcal{BQ}_{n-4}(A),$$

$$T_{\mathcal{CQ}}:\quad \mathcal{CQ}_n(A)\to\mathcal{CQ}_{n-4}(A)$$

имеют степень -4 и строятся подобно циклическим. Они состоят в вычеркивании трех (соотв. четырех) первых столбцов образующих период бикомплексов.

$$T_{\mathcal{BQ}}:\quad \bigoplus_{i=0}^{[n/4]}(A^{\otimes n-4i+1}\oplus A^{\otimes n-4i}\oplus A^{\otimes n-4i-1})\to$$
$$\to\bigoplus_{i=1}^{[n/4]}(A^{\otimes n-4i+1}\oplus A^{\otimes n-4i}\oplus A^{\otimes n-4i-1}).$$

Предложение 2.2 *Деформационная ретракция комплекса $\mathcal{CQ}$ к $\mathcal{BQ}$, построенная в п. 1.5 является $T_{\mathcal{BQ}}$-$T_{\mathcal{CQ}}$-совместимой.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 2.1.

2.1.4 На рефлексивном комплексе $\mathcal{CR}=\mathcal{CR}^+\oplus\mathcal{CR}^-$ пределена периодичность степени -1

$$\Omega_{\mathcal{CR}}:\quad \mathcal{CR}_n^+(A)\oplus\mathcal{CR}_n^-(A)\to\mathcal{CR}_{n-1}^-(A)\oplus\mathcal{CR}_{n-1}^+(A),$$

вычеркивающая первые столбцы в $\mathcal{CR}^+$ и $\mathcal{CR}^-$. Оператор $\Omega_{\mathcal{CR}}$ отображает $\mathcal{CR}^+$ в $\mathcal{CR}^-$ и $\mathcal{CR}^-$ в $\mathcal{CR}^+$. Более явно, ограничения $\Omega_{\mathcal{CR}}$ на $\mathcal{CR}^+$ и на $\mathcal{CR}^-$ являются проекциями

$$\bigoplus_{i=1}^{n+1}A^{\otimes i}\to\bigoplus_{i=1}^{n}A^{\otimes i}$$

2.1.5 Периодичности "диэдрального" случая более разнообразны. Определим

$$S_{\mathcal{BD}}\colon \quad \mathcal{BD}_n^+(A) \oplus \mathcal{BD}_n^-(A) \to \mathcal{BD}_{n-2}^-(A) \oplus \mathcal{BD}_{n-2}^+(A)$$

таким образом, чтобы ограничение $S_{\mathcal{BD}}$ на каждый $\mathcal{BC}$-слой комплексов $\mathcal{BD}^+(A)$ и $\mathcal{BD}^-(A)$ совпадает с оператором $S_{\mathcal{BC}}$; при этом комплекс $\mathcal{BD}^+(A)$ отображается в $\mathcal{BD}^-(A)$, а $\mathcal{BD}^-(A)$ в $\mathcal{BD}^+(A)$.

Подобным образом, определяется и оператор

$$S_{\mathcal{CD}}\colon \quad \mathcal{CD}_n^+(A) \oplus \mathcal{CD}_n^-(A) \to \mathcal{CD}_{n-2}^-(A) \oplus \mathcal{CD}_{n-2}^+(A),$$

совпадающий на каждом $\mathcal{CC}$-слое с оператором $S_{\mathcal{CC}}$ и отображающий комплекс $\mathcal{CD}^+(A)$ в $\mathcal{CD}^-(A)$, а $\mathcal{CD}^-(A)$ в $\mathcal{CD}^+(A)$.

Операторы

$$\Omega_{\mathcal{BD}}\colon \quad \mathcal{BD}_n^+(A) \oplus \mathcal{BD}_n^-(A) \to \mathcal{BD}_{n-1}^-(A) \oplus \mathcal{BD}_{n-1}^+(A),$$

$$\Omega_{\mathcal{CD}}\colon \quad \mathcal{CD}_n^+(A) \oplus \mathcal{CD}_n^-(A) \to \mathcal{CD}_{n-1}^-(A) \oplus \mathcal{CD}_{n-1}^+(A),$$

соответствуют периодичности комплексов $\mathcal{BD}(A)$ и $\mathcal{CD}(A)$ в другом направлении. На каждом $\mathcal{CR}$-слое комплексов $\mathcal{BD}(A)$ и $\mathcal{CD}(A)$ они совпадают с "рефлексивными" периодичностями $\Omega_{\mathcal{CR}}$. Также как $S_{\mathcal{BC}}$ и $S_{\mathcal{CC}}$, операторы $\Omega_{\mathcal{BD}}$ и $\Omega_{\mathcal{CD}}$ отображают положительную часть в отрицательную и наоборот.

Поясним структуру периодичностей "диэдрального случая" на примере $n = 6$.

$$\begin{array}{lcr|lcl}
\mathcal{BD}_5^-(A) & \xleftarrow{\Omega_{\mathcal{BD}}} & \multicolumn{2}{c}{\mathcal{BD}_6^+(A)} & \xrightarrow{S_{\mathcal{BD}}} & \mathcal{BD}_4^-(A) \\
 & & \overline{A}^{\otimes 7} & \overline{A}^{\otimes 5}\,\overline{A}^{\otimes 3}\,\overline{A}^{\otimes 1} & & \overline{A}^{\otimes 5}\,\overline{A}^{\otimes 3}\,\overline{A}^{\otimes 1} \\
\cline{3-4}
\overline{A}^{\otimes 6}\,\overline{A}^{\otimes 4}\,\overline{A}^{\otimes 2} & & \overline{A}^{\otimes 6} & \overline{A}^{\otimes 4}\,\overline{A}^{\otimes 2} & & \overline{A}^{\otimes 4}\,\overline{A}^{\otimes 2} \\
\overline{A}^{\otimes 5}\,\overline{A}^{\otimes 3}\,\overline{A}^{\otimes 1} & & \overline{A}^{\otimes 5} & \overline{A}^{\otimes 3}\,\overline{A}^{\otimes 1} & \xrightarrow{S_{\mathcal{BD}}} & \overline{A}^{\otimes 3}\,\overline{A}^{\otimes 1} \\
\overline{A}^{\otimes 4}\,\overline{A}^{\otimes 2} & \xleftarrow{\Omega_{\mathcal{BD}}} & \overline{A}^{\otimes 4} & \overline{A}^{\otimes 2} & & \overline{A}^{\otimes 2} \\
\overline{A}^{\otimes 3}\,\overline{A}^{\otimes 1} & & \overline{A}^{\otimes 3} & \overline{A}^{\otimes 1} & & \overline{A}^{\otimes 1} \\
\overline{A}^{\otimes 2} & & \overline{A}^{\otimes 2} & & & \\
\overline{A}^{\otimes 1} & & \overline{A}^{\otimes 1} & , & &
\end{array}$$

где $\overline{A}^{\otimes 1} = A$ и $\overline{A}^{\otimes n} = A \otimes \overline{A}^{\otimes n-1}$.

Предложение 2.3 *Деформационная ретракция комплекса $\mathcal{CD}$ к $\mathcal{BD}$, построенная в п. 1.4 является $S_{\mathcal{BD}}\Omega_{\mathcal{BD}}$-$S_{\mathcal{CD}}\Omega_{\mathcal{CD}}$-совместимой.*

Доказательство. Как и в доказательстве предложения 2.1, ретракция раскладывается в композицию двух последовательных ретракций: комплекса $\mathcal{BD}(A)$ к $\hat{\mathcal{BC}}^{\infty}(A)$ и комплекса $\hat{\mathcal{BC}}^{\infty}(A)$ к $\mathcal{BD}(A)$ (см. п. 1.4).

Доказательство $S\Omega$-совместимости второй ретракции дословно повторяет вторую часть доказательства предложения 2.1. Чтобы проверить, что первая ретракция также $S\Omega$-совместима нужно показать, что $\hat{I}^\infty$, $\hat{J}^\infty$ и $\hat{S}^\infty$ (см. п. 1.4) коммутируют с периодичностями S и Ω. Докажем это для $\hat{S}_n^\infty$, для остальных операторов рассуждения аналогичны.

Оператор $\hat{S}_n^\infty$ задается матрицей

$$\begin{pmatrix} S_n & S_n\delta_n S_{n-1} & & & & \\ & S_{n-1} & S_{n-1}\delta_{n-1}S_{n-2} & & \cdots & \\ & & S_{n-2} & \cdots & & \cdots \\ & & & \cdots & & \\ & & & & \cdots & \\ & & & & \cdots & S_1\delta_1 S_0 \\ & & & & & S_0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

составленной из блоков

$$\mathrm{Bl}_{n,k} = S_n \prod_{i=0}^{k} (\delta_{n-i} S_{n-i-1}).$$

Перестановочность $\hat{S}^\infty$ с Ω означает, что вычеркивая первый столбец и первую строку в блочном представлении $\hat{S}_n^\infty$ мы приходим к матрицу $\hat{S}_{n-1}^\infty$, что очевидно. Перестановочность $\hat{S}^\infty$ с периодичностью S означает, что вычеркивая две первые строки и два первых столбца в каждом блоке матрицы $\hat{S}_n^\infty$ получаем матрицу $\hat{S}_{n-2}^\infty$. Действительно, из явного вида операторов S_i и δ_i следует, что вычеркивая две первые строки и два первых столбца в блоке $\mathrm{Bl}_{n,k}$ получаем блок $\mathrm{Bl}_{n-2,k}$. $\square$

2.2 Свойства комплексов с периодичностями

2.2.1 Рассмотрим некоторые простейшие свойства комплексов с периодичностями. Пусть в комплексе $(\mathcal{C}_*, d)$ задана периодичность P степени i. Из эпиморфности P следует точность диаграммы

$$0 \longrightarrow Ker\, P_* \longrightarrow \mathcal{C}_* \xrightarrow{P} \mathcal{C}[i]_* \longrightarrow 0 \tag{13}$$

из которой вытекает наличие длинной точной последовательности в гомологиях комплексов

$$\ldots \longrightarrow H_{n-i}(\mathcal{C}_*) \longrightarrow H_{n-1}(Ker\, P_*) \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{C}_*) \longrightarrow H_{n-i-1}(\mathcal{C}_*) \longrightarrow \ldots$$

обобщающей точную последовательность Конна в циклических гомологиях. Более общó:

Теорема 2.4 *Пусть в комплексе $(\mathcal{C}_*, d)$ заданы коммутирующие периодичности $P_1, P_2, \ldots, P_n$ степеней $i_1, i_2, \ldots, i_n$ соответственно. Рассмотрим n-мерную кубическую диаграмму по каждому из n направлений в которой будет идти последовательности вида (13). Каждая плоскость кубической диаграммы является квадратной диаграммой с точными строками и столбцами следующего вида.*

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Ker\, P_{1*} \cap Ker\, P_{2*} \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[d, "\iota_1"'] & Ker\, P_{1*} \arrow[r, "P_2"] \arrow[d, "\iota_1"'] & Ker\, P_1[i_2]_* \arrow[r] \arrow[d, "\iota_1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ker\, P_{2*} \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[d, "P_1"'] & \mathcal{C}_* \arrow[r, "P_2"] \arrow[d, "P_1"'] & \mathcal{C}[i_2]_* \arrow[r] \arrow[d, "P_1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ker\, P_2[i_1]_* \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[d] & \mathcal{C}[i_1]_* \arrow[r, "P_2"] \arrow[d] & \mathcal{C}[i_1 + i_2]_* \arrow[r] \arrow[d] & 0, \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
\tag{14}
$$

где ι_1 и ι_2 — включения.

Тогда n-мерная "короткая точная последовательность" (14) приводит к n-мерной же "длинной точной последовательности", плоскости которой имеют вид

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "P_1^*"'] & \vdots \arrow[d, "P_1^*"'] & \vdots \arrow[d, "P_1^*"'] & \\
{} \arrow[r, "\partial_2^*"] & H_{n-i_1+1}\, Ker\, P_2 \arrow[r, "\iota_2^*"] \arrow[d, "\partial_1^*"'] & H_{n-i_1+1}\mathcal{C} \arrow[r, "P_2^2"] \arrow[d, "\partial_1^*"'] & H_{n-i_1-i_2+1}\mathcal{C} \arrow[r, "\partial_2^*"] \arrow[d, "\partial_1^*"'] & {} \\
{} \arrow[r, "\partial_2^*"] & H_n\, Ker\, P_1 \cap Ker\, P_2 \arrow[r, "\iota_2^*"] \arrow[d, "\iota_1^*"'] & H_n\, Ker\, P_1 \arrow[r, "P_2^*"] \arrow[d, "\iota_1^*"'] & H_{n-i_2}\, Ker\, P_1 \arrow[r, "\partial_2^*"] \arrow[d, "\iota_1^*"'] & {} \\
{} \arrow[r, "\partial_2^*"] & H_n\, Ker\, P_2 \arrow[r, "\iota_2^*"] \arrow[d, "P_1^*"'] & H_n\mathcal{C} \arrow[r, "P_2^2"] \arrow[d, "P_1^*"'] & H_{n-i_2}\mathcal{C} \arrow[r, "\partial_2^*"] \arrow[d, "P_1^*"'] & {} \\
{} \arrow[r, "\partial_2^*"] & H_{n-i_1}\, Ker\, P_2 \arrow[r, "\iota_2^*"] \arrow[d, "\partial_1^*"'] & H_{n-i_1}\mathcal{C} \arrow[r, "P_2^2"] \arrow[d, "\partial_1^*"'] & H_{n-i_1-i_2}\mathcal{C} \arrow[r, "\partial_2^*"] \arrow[d, "\partial_1^*"'] & {} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
\tag{15}
$$

Диаграмма коммутативна, и все входящие в нее строки и столбцы точны.

Доказательство. Точность и коммутативность диаграммы (14) следует из эпиморфности и перестановочности между собой периодичностей.

Что касается диаграммы (15), точность строк и столбцов является стандартным следствием точности соответствующих строк и столбцов диаграммы (14).

Перестановочность операторов ι_k^* и P_k^* следует из перестановочности ι_k и P_k. Требуют проверки лишь коммутационные соотношения со связывающими гомоморфизмами.

Докажем, что если x – элемент $\mathcal{C}_*[i_1]$, причем $dx = 0$, то $P_2^*\partial_1^* x$ и $\partial_1^* P_2^* x$ являются представителями одного и того же гомологического класса в $H_*\mathcal{C}[i_1 + i_2]$. Условно ∂_1^* можно представлять как $\iota_1^{-1} d P_1^{-1}$. Учитывая это, рассмотрим циклы $z \in Z\mathcal{C}_*[i_1]$ и $P_2 z \in Z\mathcal{C}_*[i_1 + i_2]$. Пусть $P_1^{-1} z$ – прообраз z при сюръективном отображении P_1, тогда $P_2 P_1^{-1} z$ – прообраз элемента $P_2 z$. Еще раз используя перестановочность рассматриваемых отображений можно записать $P_2 d P_1^{-1} z = d P_2 P_1^{-1} z$. И, наконец, если $\iota_1^{-1} d P_1^{-1} z$ – прообраз $d P_1^{-1} z$ при отображении ι_1, то из перестановочности операторов следует, что $P_2 \iota_1^{-1} d P_1^{-1} z$ будет прообразом элемента $P_2 d P_1^{-1} z$, то есть

$$P_2 \partial_1 z = P_2 \iota_1^{-1} d P_1^{-1} z = \iota_1^{-1} P_2 d P_1^{-1} z = \iota_1^{-1} d P_2 P_1^{-1} z = \iota_1^{-1} d P_1^{-1} P_2 z = \partial_1 P_2 z.$$

Остальные соотношения доказываются аналогично.$\square$

2.2.2 Частными случаями доказанного утверждения являются следующие точные последовательности.

1. Точная последовательность Конна в циклических гомологиях

$$\cdots \longleftarrow HC_n(A) \longleftarrow HC_{n+2}(A) \longleftarrow HH_{n+2}(A) \longleftarrow HC_{n+1}(A) \longleftarrow \cdots$$

(рассматривается одна периодичность S).

2. Точная последовательность в рефлексивных гомологиях

$$\begin{aligned} \cdots \longleftarrow HH_n \oplus HH_n \longleftarrow HR_n^+ \oplus HR_n^- \longleftarrow \\ \longleftarrow HR_{n+1}^+ \oplus HR_{n+1}^- \longleftarrow HH_{n+1} \oplus HH_{n+1} \longleftarrow \cdots \end{aligned} \tag{16}$$

(периодичность Ω).

3. Точная последовательность в кватернионных гомологиях

$$\cdots \longleftarrow H_{n-1}\mathcal{Q}(A) \longleftarrow HQ_{n-4}(A) \longleftarrow HQ_n(A) \longleftarrow H_n\mathcal{Q}(A) \longleftarrow \cdots$$

(периодичность T), где $\mathcal{Q}_*$ – комплекс, вводившийся в (п. 1.5.1) при доказательстве стягиваемости $\mathcal{C}\mathcal{Q}_{*,*}$ к $\mathcal{B}\mathcal{Q}_{*,*}$.

4. Точная последовательность в диэдральных гомологиях

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\leftarrow & HH_n \oplus HH_n & \leftarrow & HR_n^+ \oplus HR_n^- & \leftarrow & HR_{n+1}^- \oplus HR_{n+1}^+ & \leftarrow & HH_{n+1} \oplus HH_{n+1} & \leftarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\leftarrow & HC_n \oplus HC_n & \leftarrow & HD_n^+ \oplus HD_n^- & \leftarrow & HD_{n+1}^- \oplus HD_{n+1}^+ & \leftarrow & HC_{n+1} \oplus HC_{n+1} & \leftarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\leftarrow & HC_{n-2} \oplus HC_{n-2} & \leftarrow & HD_{n-2}^+ \oplus HD_{n-2}^- & \leftarrow & HD_{n-1}^- \oplus HD_{n-1}^+ & \leftarrow & HC_{n-1} \oplus HC_{n-1} & \leftarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\leftarrow & HH_{n-1} \oplus HH_{n-1} & \leftarrow & HR_{n-1}^+ \oplus HR_{n-1}^- & \leftarrow & HR_n^- \oplus HR_n^+ & \leftarrow & HH_n \oplus HH_n & \leftarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow &
\end{array}
\tag{17}
$$

(периодичности S и Ω).

Замечание. Поскольку операторы периодичностей в рефлексивном и диэдральном случае переводят положительные компоненты в отрицательные и наоборот, и это свойство сохраняется и для отображений в гомологиях:

$$
\begin{array}{lll}
HD_n^+ \xrightarrow{S^*} HD_{n-2}^-, & HD_n^+ \xrightarrow{\Omega^*} HD_{n-1}^-, & HR_n^+ \xrightarrow{\Omega^*} HR_{n-1}^-, \\
HD_n^- \xrightarrow{S^*} HD_{n-2}^+, & HD_n^- \xrightarrow{\Omega^*} HD_{n-1}^+, & HR_n^- \xrightarrow{\Omega^*} HR_{n-1}^+,
\end{array}
$$

то диаграммы (16) и (17) распадаются в прямую сумму диаграмм, в которых положительные и отрицательные компоненты расположены в шахматном порядке.

Теорема 2.5 *Пусть в комплексе $(\mathcal{C}_*, d)$ заданы периодичности P_1 и P_2 степеней i_1 и i_2 соответственно. Тогда $P_1 \circ P_2$ также будет периодичностью (степени $i_1 + i_2$); диаграмма*

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Ker\, P_{1*} \arrow[r] \arrow[d, "id"] & Ker\, P_2 P_{1*} \arrow[r] \arrow[d] & Ker\, P_2[i_1]_* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ker\, P_{1*} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}_* \arrow[r, "P_1"] \arrow[d, "P_2 P_1"'] & \mathcal{C}[i_1]_* \arrow[r] \arrow[d, "P_2"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}[i_1 + i_2]_* \arrow[r, "id"] \arrow[d] & \mathcal{C}[i_1 + i_2]_* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
\tag{18}
$$

будет точна, и будет точна также соответствующая ей "длинная точная *последовательность"*

$$
\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
{} \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & H_{n+1-i_1-i_2}\mathcal{C} \arrow[r, "id"] \arrow[d] & H_{n+1-i_1-i_2}\mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
{} \arrow[r] & H_n\, Ker\, P_1 \arrow[r] \arrow[d, "id"] & H_n\, Ker\, P_2P_1 \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-i_1}\, Ker\, P_2 \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}\, Ker\, P_1 \arrow[r] \arrow[d, "id"] & {} \\
{} \arrow[r] & H_n\, Ker\, P_1 \arrow[r] \arrow[d] & H_n\mathcal{C} \arrow[r, "P_1^*"] \arrow[d, "(P_2P_1)^*"] & H_{n-i_1}\mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d, "P_2^*"'] & H_{n-1}\, Ker\, P_1 \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
{} \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-i_1-i_2}\mathcal{C} \arrow[r, "id"] \arrow[d] & H_{n-i_1-i_2}\mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
 & {} & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}, \tag{19}
$$

которую, учитывая отождествление экземпляров $H_n\mathcal{C}$ и $H_n\, Ker\, P_1$ можно записать в виде косы.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
{} \arrow[r] & H_{n-i+1}KerP_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & H_nKerP_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & HC_n \arrow[rr] \arrow[dr] & & HC_{n-i_1-i_2} \arrow[r] \arrow[dr] & {} \\
{} \arrow[ur] \arrow[dr] & & HC_{n-i_1+1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & H_nKerP_2P_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & HC_{n-i_1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {} \\
{} \arrow[r] & HC_{n+1} \arrow[rr] \arrow[ur] & & HC_{n-i_1-i_2+1} \arrow[rr] \arrow[ur] & & H_{n-i_1}KerP_2 \arrow[rr] \arrow[ur] & & H_{n+1}KerP_1 \arrow[r] \arrow[ur] & {}
\end{tikzcd}
$$

Доказательство. В "короткой точной последовательности" (18), точность верхней строки следует из 5-леммы. Точность и коммутативность остальных элементов диаграммы очевидна. Доказательство точности диаграммы (19) проводится так же как и для теоремы 2.4.□

Точные последовательности вида (19) получаются, в частности в диэдральных гомологиях для наборов периодичностей $\{S, S\}$, $\{\Omega, \Omega\}$ и $\{\Omega, S\}$.

2.3 Бивариантные когомологии

Рассмотрим теперь следующую общую ситуацию. Пусть на комплексе $(\mathcal{L}_*, d^L)$ задан набор периодичностей

$$\mathcal{P}^L = \{P_1^L, P_2^L, \ldots, P_n^L\},$$

а на комплексе $(\mathcal{M}_*, d^M)$ набор периодичностей

$$\mathcal{P}^M = \{P_1^M, P_2^M, \ldots, P_n^M\}$$

степеней $(m_1, \ldots, m_n)$. Морфизмы градуированных модулей $\mathcal{L}_*$ в $\mathcal{M}_*$ образуют дифференциально-градуированный модуль $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}_*, \mathcal{M}_*)$, элемент f которого имеет градуировку n если

$$f\colon \mathcal{L}_k \to \mathcal{M}_{k+n}.$$

Дифференциал в $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}_*, \mathcal{M}_*)$ записывается обычным образом:

$$d_{\mathrm{Hom}}(f) = d^M \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d^L.$$

Выделим в $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}_*, \mathcal{M}_*)$ подмодуль $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}^L-\mathcal{P}^M}(\mathcal{L}_*, \mathcal{M}_*)$, состоящий из $\mathcal{P}^L$-$\mathcal{P}^M$-перестановочных отображений. Поскольку P_i^L и P_i^M коммутируют с дифференциалами d^L и d^M, получаем, что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}^L-\mathcal{P}^M}(\mathcal{L}_*, \mathcal{M}_*)$ будет подкомплексом в $(\mathrm{Hom}(\mathcal{L}_*, \mathcal{M}_*), d_{Hom})$.

Определение 2.3 *Гомологии комплекса*

$$(Hom_{\mathcal{P}^L-\mathcal{P}^M}(\mathcal{L}_*, \mathcal{M}_*), d_{Hom})$$

будем называть бивариантными когомологиями пары комплексов $\mathcal{L}_*$, $\mathcal{M}_*$) с периодичностями $\mathcal{P}^L$, $\mathcal{P}^M$:

$$H^n_{\mathcal{P}^L-\mathcal{P}^M}(\mathcal{L}_*, \mathcal{M}_*) = H_{-n}(Hom_{\mathcal{P}^L-\mathcal{P}^M}(\mathcal{L}_*, \mathcal{M}_*))$$

Таким образом, бивариантными коциклами для когомологий с симметриями $H^n_{\mathcal{P}^L-\mathcal{P}^M}(\mathcal{L}_*, \mathcal{M}_*)$ являются гомоморфизмы модулей

$$f\colon \quad \mathcal{L}_* \to \mathcal{M}_*,$$

перестановочные с периодичностями $\mathcal{P}^L$, $\mathcal{P}^M$ и коммутирующие с дифференциалами d^L и d^M.

Бивариантными кограницами являются те из них, которые гомотопны нулю, то есть f — кограница, если существует $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}^L-\mathcal{P}^M}(\mathcal{L}_*, \mathcal{M}_*)$, такое что

$$f = d_{\mathrm{Hom}}(h) = d^M \circ h - (-1)^{|h|} h \circ d^L.$$

Следующее предложение обобщает результаты п. 8 [31].

Предложение 2.6 *Пусть на комплексах (X_*, d^X), $(X'_*, d^{X'})$, (Y_*, d^Y), $(Y'_*, d^{Y'})$ заданы наборы периодичностей $\mathcal{P}^X$, $\mathcal{P}^{X'}$, $\mathcal{P}^Y$, $\mathcal{P}^{Y'}$ соответственно, степени $(m_1, \ldots, m_n)$, и пусть деформационные ретракции*

$$(X'_*, d^{X'}) \underset{g_1}{\overset{f_1}{\rightleftarrows}} (X_*, d^X; h_X) \quad и \quad (Y'_*, d^{Y'}) \underset{g_2}{\overset{f_2}{\rightleftarrows}} (Y_*, d^Y; h_Y) \tag{20}$$

$\mathcal{P}^X$-$\mathcal{P}^{X'}$- и $\mathcal{P}^Y$-$\mathcal{P}^{Y'}$-совместимы.

Тогда

$$(Hom_{\mathcal{P}^{X'}-\mathcal{P}^Y}(X'_*, Y_*), d_{Hom}) \underset{g_1^*}{\overset{f_1^*}{\rightleftarrows}} (Hom_{\mathcal{P}^X-\mathcal{P}^Y}(X_*, Y_*), d_{Hom}; h_X^*), \tag{21}$$

$$(Hom_{\mathcal{P}^X-\mathcal{P}^{Y'}}(X_*, Y'_*), d_{Hom}) \underset{g_2^*}{\overset{f_2^*}{\rightleftarrows}} (Hom_{\mathcal{P}^X-\mathcal{P}^Y}(X_*, Y_*), d_{Hom}; h_Y^*) \tag{22}$$

являются деформационными ретракциями.

Если (20) — специальные деформационные ретракции, то (21) и (21) также специальные деформационные ретракции.

Отображения f_1^*, g_1^*, h_X^*, f_2^*, g_2^*, h_Y^* определяются следующим образом

$$\begin{aligned}
f_1^*\colon \kappa_1 \to (-1)^{|\kappa_1|\cdot|f_1|}\kappa_1 \circ f_1, &\qquad \kappa_1 \in Hom_{\mathcal{P}^{X'}-\mathcal{P}^Y}(X'_*, Y_*),\\
f_2^*\colon \kappa_2 \to f_2 \circ \kappa_2, &\qquad \kappa_2 \in Hom_{\mathcal{P}^{X}-\mathcal{P}^Y}(X_*, Y_*);\\
g_1^*\colon \kappa_1 \to (-1)^{|\kappa_1|\cdot|g_1|}\kappa_1 \circ g_1, &\qquad \kappa_1 \in Hom_{\mathcal{P}^{X}-\mathcal{P}^Y}(X_*, Y_*),\\
g_2^*\colon \kappa_2 \to g_2 \circ \kappa_2, &\qquad \kappa_2 \in Hom_{\mathcal{P}^{X}-\mathcal{P}^{Y'}}(X_*, Y'_*);\\
h_X^*\colon \kappa \to (-1)^{|\kappa|\cdot|h_X|}\kappa \circ h_X, &\\
h_Y^*\colon \kappa \to h_Y \circ \kappa, &\qquad \kappa \in Hom_{\mathcal{P}^{X}-\mathcal{P}^Y}(X_*, Y_*);
\end{aligned}$$

Доказательство. Перестановочность f_1, g_1, h_X и f_2, g_2, h_Y с периодичностями обеспечивает корректность отображений f_1^*, g_1^*, h_X^* и f_2^*, g_2^*, h_Y^*. Условия

$$h_X^* f_1^* = 0 \quad g_1^* h_X^* = 0 \quad h_X^* h_X^* = 0$$

$$f_2^* h_Y^* = 0 \quad h_Y^* g_2^* = 0 \quad h_Y^* h_Y^* = 0 \quad f_2^* g_2^* = \mathrm{id}$$

сразу следуют из соответствующих условий на f_1, g_1, h_X и f_2, g_2, h_Y. Из равенства $f_1 g_1 = \mathrm{id}$ следует, что $|f_1| = -|g_1|$. Значит,

$$g_1^* f_1^*(\kappa) = (-1)^{|\kappa|\cdot|f_1|}(-1)^{|\kappa|\cdot|f_1|\cdot|g_1|}\kappa f_1 g_1 = \kappa,$$

и аналогичное равенство справедливо для f_2 и g_2. Остается проверить соотношения

$$f_1^* g_1^* - \mathrm{id} = d(h_X^*) \quad \text{и} \quad g_2^* f_2^* - \mathrm{id} = d(h_Y^*).$$

Запишем

$$\begin{aligned}
d(h_X^*)(\kappa) &= (-1)^{|\kappa|} d(\kappa h_X) + h_X^* d(\kappa) = \\
&= (-1)^{|\kappa|} d\kappa h_X - (-1)^{|\kappa|+1}(-1)^{|\kappa|}\kappa h_X d + \\
&+ (-1)^{|\kappa|-1} d\kappa h_X - (-1)^{|\kappa|}(-1)^{|\kappa|-1}\kappa d h_X = \\
&= \kappa(h_X d + d h_X) = \kappa(f_1 g_1 - 1) = (g_1^* f_1^* - \mathrm{id})(\kappa).
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
d(h_Y^*)(\kappa) &= d(h_Y \kappa) + h_Y^* d(\kappa) = d h_Y \kappa - (-1)^{|\kappa|+1} h_Y \kappa d + \\
&+ h_Y d\kappa - (-1)^{|\kappa|} h_Y \kappa d = \\
&= (h_Y d + d h_Y)\kappa = (f_2 g_2 - 1)\kappa = (f_2^* g_2^* - \mathrm{id})(\kappa) \qquad \square
\end{aligned}$$

Теорема 2.7 *При выполнении условий предложения 2.6 имеет место следующий изоморфизм*

$$H^n_{\mathcal{P}^X-\mathcal{P}^Y}(X_*, Y_*) \cong H^n_{\mathcal{P}^{X'}-\mathcal{P}^{Y'}}(X'_*, Y'_*).$$

2.4 Основные определения

Рассмотрим основные частные случаи бивариантных когомологий с симметриями.

Определение 2.4 *[29] Бивариантными циклическими когомологиями пары алгебр A, B называются бивариантные когомологии пары комплексов $\mathcal{CC}(A)$, $\mathcal{CC}(B)$ с периодичностью $S_{\mathcal{CC}}$,*

$$HC^*(A,B) = H^*_{S_{\mathcal{CC}}}(\mathcal{CC}(A), \mathcal{CC}(B)).$$

Замечание. Как следствие предложения 2.1 и теоремы 2.7 получаем изоморфизм

$$HC^*(A,B) \cong H^*_{S_{\mathcal{BC}}}(\mathcal{BC}(A), \mathcal{BC}(B)).$$

Определение 2.5 *[28] Бивариантными кватернионными когомологиями пары алгебр A, B называются бивариантные когомологии пары комплексов $\mathcal{CQ}(A)$, $\mathcal{CQ}(B)$ с периодичностью $T_{\mathcal{CQ}}$,*

$$HQ^*(A,B) = H^*_{T_{\mathcal{CQ}}}(\mathcal{CQ}(A), \mathcal{CQ}(B)).$$

Замечание. Как следствие предложения 2.2 и теоремы 2.7 получаем изоморфизм

$$HQ^*(A,B) \cong H^*_{T_{\mathcal{BQ}}}(\mathcal{BQ}(A), \mathcal{BQ}(B)).$$

Определение 2.6 *Бивариантными диэдральными когомологиями пары алгебр A, B называются бивариантные когомологии пары комплексов $\mathcal{CD}(A)$, $\mathcal{CD}(B)$ с периодичностями $S_{\mathcal{CD}}$ и $\Omega_{\mathcal{CD}}$,*

$$HD^*(A,B) = H^*_{S_{\mathcal{CD}}\Omega_{\mathcal{CD}}}(\mathcal{CD}(A), \mathcal{CD}(B)).$$

Замечание. Как следствие предложения 2.3 и теоремы 2.7 получаем изоморфизм

$$HD^*(A,B) \cong H^*_{S_{\mathcal{CD}}\Omega_{\mathcal{CD}}}(\mathcal{BD}(A), \mathcal{BD}(B)).$$

Определение 2.7 *Бивариантными рефлексивными когомологиями пары алгебр A, B называются бивариантные когомологии пары комплексов $\mathcal{CR}(A)$, $\mathcal{CR}(B)$ с периодичностью $\Omega_{\mathcal{CR}}$,*

$$HR^*(A,B) = H^*_{\Omega_{\mathcal{CR}}}(\mathcal{CR}(A), \mathcal{CR}(B)).$$

Замечание. Каждый элемент

$$f \in \operatorname{Hom}_{S_{\mathcal{BD}},\Omega_{\mathcal{BD}}}(\mathcal{BD}_{*,*}(A), \mathcal{BD}_{*,*}(B))$$

состоит из четырех компонент

$$f_{++}\colon\ \mathcal{BD}^+_{*,*}(A) \to \mathcal{BD}^+_{*,*}(B), \qquad f_{+-}\colon\ \mathcal{BD}^+_{*,*}(A) \to \mathcal{BD}^-_{*,*}(B),$$

$$f_{--}\colon\ \mathcal{BD}^-_{*,*}(A) \to \mathcal{BD}^-_{*,*}(B), \qquad f_{-+}\colon\ \mathcal{BD}^-_{*,*}(A) \to \mathcal{BD}^+_{*,*}(B).$$

Отображения f с нулевыми компонентами f_{+-}, и f_{-+} образуют подкомплекс

$$\mathrm{Hom}^+_{S_{\mathcal{BD}},\Omega_{\mathcal{BD}}}(\mathcal{BD}_{*,*}(A), \mathcal{BD}_{*,*}(B))$$

в комплексе $S\Omega$-перестановочных отображений. Отображения с нулевыми компонентами f_{++}, и f_{--} образуют подкомплекс

$$\mathrm{Hom}^-_{S_{\mathcal{BD}},\Omega_{\mathcal{BD}}}(\mathcal{BD}_{*,*}(A), \mathcal{BD}_{*,*}(B)).$$

Таким образом, диэдральные когомологии уже на уровне гомоморфизмов модулей распадаются на два прямых слагаемых:

$$HD^n(A,B) = HD^n_+(A,B) \oplus HD^n_-(A,B),$$

где

$$HD^n_+(A,B) = H_{-n}(\mathrm{Hom}^+_{S_{\mathcal{BD}},\Omega_{\mathcal{BD}}}(\mathcal{BD}_{*,*}(A), \mathcal{BD}_{*,*}(B))),$$

а

$$HD^n_-(A,B) = H_{-n}(\mathrm{Hom}^-_{S_{\mathcal{BD}},\Omega_{\mathcal{BD}}}(\mathcal{BD}_{*,*}(A), \mathcal{BD}_{*,*}(B))).$$

Аналогичное разложение имеет место и в рефлексивных когомологиях:

$$HR^n(A,B) = HR^n_+(A,B) \oplus HR^n_-(A,B).$$

2.5 Произведение

В бивариантных когомологиях с симметриями можно определить операцию $\cup$, которая когомологическим классам с представителями ϕ_1 и ϕ_2 ставит в соответствие класс

$$[\phi_1] \cup [\phi_2] = [\phi_2 \circ \phi_1].$$

Независимость $[\phi_1]\cup[\phi_2]$ от выбора представителей ϕ_1 и ϕ_2 следует из простой выкладки:

$$(\phi_1 + d\psi) \circ \phi_2 = \phi_1 \circ \phi_2 + d\psi \circ \phi_2 - (-1)^{|\psi|}\psi \circ d\phi_2 = \phi_1 \circ \phi_2 + d(\psi \circ \phi_2),$$

ибо $d\phi_2 = 0$.

3 Случай $1/2 \in k$

3.1 Редукция комплексов

3.1.1 До сих пор на коммутативное кольцо k не накладывалось никаких специальных ограничений. Если предположить что число 2 обратимо в кольце k, приведенные выше конструкции значительно упрощаются.

Ввиду наличия двух взаимнодополняющих проекторов $p_1 = \frac{1}{2}(1-y)$ и $p_2 = \frac{1}{2}(1+y)$, причем $p_1 + p_1 = \mathrm{id}$, модули $A^{\otimes n}$ раскладываются в прямую сумму

$$A^{\otimes n} = Im(1-y) \oplus Im(1+y).$$

Далее, поскольку оператор $(1-y)$ коммутирует с дифференциалом комплекса Хохшильда и с дифференциалами циклического комплекса $\mathcal{BC}$, комплекс Хохшильда раскладывается в прямую сумму

$$(\mathcal{CH}_*(A), b) = (\mathcal{CH}_*^+(A), b) \oplus (\mathcal{CH}_*^-(A), b), \tag{23}$$

где

$$\mathcal{CH}_n^+(A) = Im(1+y)|_{A^{\otimes n+1}} \qquad \text{и} \qquad \mathcal{CH}_n^-(A) = Im(1-y)|_{A^{\otimes n+1}},$$

а комплекс $\mathcal{BC}(A)$ раскладывается в прямую сумму

$$\mathcal{BC}_{*,*}(A) = \mathcal{BC}_{*,*}^+(A) \oplus \mathcal{BC}_{*,*}^-(A),$$

где $\mathcal{BC}^+(A)$ и $\mathcal{BC}^-(A)$ записываются как

$$\begin{array}{ccccc}
\downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b \\
\mathcal{CH}_2^+ & \xleftarrow{B} & \mathcal{CH}_1^- & \xleftarrow{B} & \mathcal{CH}_0^+ \\
\downarrow b & & \downarrow b & & \\
\mathcal{CH}_1^+ & \xleftarrow{B} & \mathcal{CH}_0^- & & \\
\downarrow b & & & & \\
\mathcal{CH}_0^+ & & & &
\end{array}
\quad \text{и} \quad
\begin{array}{ccccc}
\downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b \\
\mathcal{CH}_2^- & \xleftarrow{B} & \mathcal{CH}_1^+ & \xleftarrow{B} & \mathcal{CH}_0^- \\
\downarrow b & & \downarrow b & & \\
\mathcal{CH}_1^- & \xleftarrow{B} & \mathcal{CH}_0^+ & & \\
\downarrow b & & & & \\
\mathcal{CH}_0^- & & & &
\end{array}$$

соответственно (см. [34]).

3.1.2 Бикомплексы $\mathcal{BC}_{*,*}^+(A)$ и $\mathcal{BC}_{*,*}^-(A)$ являются прямыми слогаемыми комплексов $\mathcal{BD}_{*,*,*}^+(A)$ и $\mathcal{BD}_{*,*,*}^-(A)$ соответственно. Более того, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1 *Комплексы $\mathcal{BD}_{*,*,*}^+(A)$ и $\mathcal{BD}_{*,*,*}^-(A)$ стягиваются к комплексам $\mathcal{BC}_{*,*}^+(A)$ и $\mathcal{BC}_{*,*}^-(A)$ соответственно.*

Для упрощения рассуждений введем следующие объекты.

Пусть $(\mathcal{R}_*^{n+}, d^+)$ и $(\mathcal{R}_*^{n-}, d^-)$, где $d_i^+ = 1-(-1)^i y$ и $d_i^- = 1+(-1)^i y$, комплексы следующего вида

$$\mathcal{R}^{n+}: \quad A^{\otimes n} \xleftarrow{1-y} A^{\otimes n} \xleftarrow{1+y} A^{\otimes n} \xleftarrow{1-y} \cdots,$$

$$\mathcal{R}^{n-}: \quad A^{\otimes n} \xleftarrow{1+y} A^{\otimes n} \xleftarrow{1-y} A^{\otimes n} \xleftarrow{1+y} \cdots.$$

Заметим, что $\mathcal{R}^{n+}$ et $\mathcal{R}^{n+}$ образуют строки комплексов $\mathcal{CD}(A)$ и $\mathcal{CR}(A)$.

Пусть $(\hat{\mathcal{R}}_*^{n+}, 0)$ и $(\hat{\mathcal{R}}_*^{n-}, 0)$ комплексы, такие что

$$\hat{\mathcal{R}}_0^{n+} = A^{\otimes n}/\,Im\,\tfrac{(1-y)}{2} \quad \text{и} \quad \hat{\mathcal{R}}_0^{n-} = A^{\otimes n}/\,Im\,\tfrac{(1+y)}{2}$$

и $\hat{\mathcal{R}}_i^{n+} = 0$, $\mathcal{R}_i^{n-} = 0$, для $i > 0$.

Простые выкладки доказывают следующее утверждение.

Лемма 3.2 *Имеет место следующая специальная деформационная ретракция.*

$$(\hat{\mathcal{R}}_*^{n+}, 0) \underset{i}{\overset{p}{\leftrightarrows}} (\mathcal{R}_*^{n+}, d^+; h^+) \qquad (\hat{\mathcal{R}}_*^{n-}, 0) \underset{i}{\overset{p}{\leftrightarrows}} (\mathcal{R}_*^{n-}, d^-; h^-), \tag{24}$$

где p и i обозначают очевидную проекцию и включение. Гомотопии задаются соотношениями

$$h_j^{\pm}\colon \mathcal{R}_j^{n\pm} \to \mathcal{R}_j^{n\pm} \qquad h_j^+ = \frac{1}{4}(1-(-1)^j y), \qquad h_j^- = \frac{1}{4}(1+(-1)^j y).$$

Замечание. Прямая сумма ретракций (24) представляет собой ретракцию комплекса $\mathcal{R}_*^{n+} \oplus \mathcal{R}_*^{n-}$ к тривиальному комплексу с единственной ненулевой составляющей в нулевой размерности $A^{\otimes n}$.

Доказательство (теоремы 3.1). Рассуждения быдем проводить для "положительного" комплекса $\mathcal{BD}^+_{*,*,*}(A)$, рассуждения для "отрицательного" комплекса аналогичны.

Каждый $\mathcal{BC}$-слой $\mathcal{BD}^+_{*,*,*}(A)$ раскладывается в прямую сумму $\mathcal{BC}^+_{*,*}(A)$ и $\mathcal{BC}^-_{*,*}(A)$. Пусть

$$i: \quad \mathcal{BC}^+_{*,*}(A) \to \mathcal{BD}^+_{*,*,*}(A)$$

— включение, отображающее $\mathcal{BC}^+$ на соответствующее прямое слагаемое в первом $\mathcal{BC}$-слое $\mathcal{BD}^+$, и пусть

$$p: \quad \mathcal{BD}^+_{*,*,*}(A) \to \mathcal{BC}^+_{*,*}(A)$$

проекция, тождественная на $\mathcal{BC}^+$-слагаемом первого $\mathcal{BC}$-слоя и равная нулю на дополнении.

Положим

$$h: \quad \mathcal{BD}^+_{*,*,*}(A) \to \mathcal{BD}^+_{*,*,*}(A)$$

равной h^+ (см. лемму 3.2) на каждой $\mathcal{R}^{n+}$-строке $\mathcal{BD}^+$ и равной h^- на каждой $\mathcal{R}^{n+}$-строке $\mathcal{BD}^+$. Получаем специальную деформационную ретракцию

$$(\mathcal{BC}^+_{*,*}(A), b, B) \underset{i}{\overset{p}{\leftrightarrows}} (\mathcal{BD}^+_{*,*,*}(A), b, B, \omega^\pm; h).$$

Действительно, $p \circ i = \mathrm{id}_{\mathcal{BC}^+}$; "граничные условия" (см. приложение A) следуют из соответствующих условий ретракций (24). Остается проверить соотношение

$$(b + B + \omega^\pm)h + h(b + B + \omega^\pm) = \mathrm{id}_{\mathcal{BD}^+} - i \circ p. \tag{25}$$

Известно, что $b+B$ коммутирует с дифференциалом $\mathcal{BD}^+_{*,*,*}(A)$, который мы обозначали $\omega^\pm$ (см. 1.3). Следовательно, $b+B$ коммутирует и с h, поскольку h состоит из тех же (сточностью до множителя 1/4) отображений что и $\omega^\pm$. Таким образом, (25) записывается как

$$\omega^\pm h + h\omega^\pm = \mathrm{id}_{\mathcal{BD}^+} - i \circ p,$$

что является прямым следствием аналогичных соотношений для ретракций (24). $\square$

Аналогично доказывается

Теорема 3.3 *Пусть элемент 2 обратим в k, тогда комплекс $\mathcal{CR}^+(A)$ стягивается к комплексу $\mathcal{CH}^+(A)$, а комплекс $\mathcal{CR}^-(A)$ к $\mathcal{CH}^-(A)$.*

3.1.3 Следующая теорема является модификацией теоремы 2.5 [35].

Теорема 3.4 *Пусть элемент 2 обратим в k, тогда кватернионный комплекс $\mathcal{BQ}_{*,*}(A)$ стягивается к комплексу $\mathcal{BC}^+_{*,*}(A)$.*

Доказательство. Комплекс $\mathcal{BQ}_{*,*}(A)$ перепишем с помощью разложения (23) (см. п. 1.5) в виде бикомплекса с периодом

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{CH}^+_* \oplus \mathcal{CH}^-_* & \mathcal{CH}^+[1]_* \oplus \mathcal{CH}^-[1]_* \arrow[l, "1-y"'] & \mathcal{CH}^+[2]_* \oplus \mathcal{CH}^-[2]_* \arrow[l, "-1-y"'] \arrow[ll, bend right, "B"'] & \cdots \arrow[l, "2B(1+y)"']
\end{tikzcd}$$

Степень оператора B равна -2, а степень $\pm 1 - y$ равна -1, и, следовательно, приведенная диаграмма корректна.

Ограничение $1 - y$ на $\mathcal{CH}^-_*(A)$ и ограничение $1 + y$ на $\mathcal{CH}^+_*(A)$ состоят в умножении на 2. Значит подкомплексы

$$\mathcal{CH}^-_*(A) \xleftarrow{1-y} \mathcal{CH}^-_*(A)$$

и фактор-комплексы

$$\mathcal{CH}^+_*(A) \xleftarrow{-1-y} \mathcal{CH}^+_*(A)$$

$\mathcal{BQ}_{*,*}(A)$ стягиваемы. Применяя предложение A.4, получаем, что комплекс $\mathcal{BQ}(A)$ стягивается к комплексу

$$\mathcal{CH}^+_*(A) \xleftarrow{B} \mathcal{CH}^-[2]_*(A) \xleftarrow{2B(1+y)} \mathcal{CH}^+[4]_*(A) \xleftarrow{B} \cdots. \tag{26}$$

Поскольку ограничение оператора $2B(1+y)$ на $\mathcal{CH}_*^+(A)$ равно $4B$, комплекс (26) изоморфен $\mathcal{BC}^+(A)$. $\square$

Рассмотрим на комплексе $\mathcal{BC}^+$ периодичность $T_{\mathcal{BC}}$ степени -4, которая вычеркивает два первых столбца бикомплекса. Отображения, задающие ретракцию, построенную в теореме 3.4 действуют “локально”, то есть будучи ограничены на период комплекса $\mathcal{BQ}$ или $\mathcal{BC}^+$ не выводят за пределы периода. Следовательно, рассматриваемая ретракция является T-совместимой и мы приходим к следующему утверждению.

Следствие 3.5 *Пусть элемент* 2 *обратим в* k, *тогда имеет место следующий изоморфизм*

$$HQ^*(A,B) \cong H_T^*(\mathcal{BC}^+(A), \mathcal{BC}^+(B)).$$

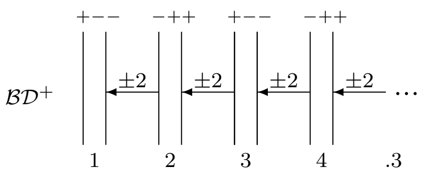
3.1.4 Вто же время, для диэдрального случая, гомотопия h, будучи перестановочна с периодичностью $S_{\mathcal{BD}}$, не коммутирует с оператором $\Omega_{\mathcal{BD}}$ (например, на первом $\mathcal{BC}$-слое $h\Omega_{\mathcal{BD}} = 0 \neq \Omega_{\mathcal{BD}}h$). Тем не менее верно следующее утверждение

Теорема 3.6 *Пусть* $1/2 \in k$, *тогда*

$$HD_+^*(A,B) \cong HC_+^*(A,B) \oplus HC_-^*(A,B) \cong HD_-^*(A,B).$$

Доказательство. Рассуждения будем проводить для $HD_+^*(A,B)$, для отрицательных гомологий рассмотрения полностью аналогичны.

Как уже отмечалось выше, обратимость 2 приводит к расщеплению комплекса $\mathcal{BC}_{*,*}(A)$ на $\mathcal{BC}^+_{*,*}(A) \oplus \mathcal{BC}^-_{*,*}(A)$, то есть каждый $\mathcal{BC}$-слой комплексов $\mathcal{BD}^+_{*,*,*}(A)$ и $\mathcal{BD}^-_{*,*,*}(A)$ будет состоять из двух слагаемых. Комплекс $\mathcal{BD}^+_{*,*,*}(A)$ приобретает при этом следующий вид, где вертикальные линии обозначают прямые $\mathcal{BC}^+$- и $\mathcal{BC}^-$-слагаемые $\mathcal{BC}$-слоев.



.3 Нас будут интересовать S-перестановочные (и, следовательно S^2-перестановочные, $S^2 : \mathcal{BD}^+ \to \mathcal{BD}^+$) отображения, которые, таким образом, будут инвариантны относительно сдвигов на два слоя. Это означает что компоненты отображений отличающиеся лишь сдвигом на два слоя будут совпадать. Компоненты таких отображений однозначно задаются типом прямых слагаемых слоев (обозначаемых на Рис.3 $+$, $-$, $++$ или $--$) из которых исходит отображение и в которых лежит его образ и также тем, на сколько изменяет отображение номер столбца.

Каждому отображению

$$(f^+, f^-) \in \mathrm{Hom}_S^+(\mathcal{BC}_{*,*}(A), \mathcal{BC}_{*,*}(B)),$$

где $f^+ \in \mathrm{Hom}(\mathcal{BC}^+_{*,*}(A), \mathcal{BC}^+_{*,*}(B))$ и $f^- \in \mathrm{Hom}(\mathcal{BC}^-_{*,*}(A), \mathcal{BC}^-_{*,*}(B))$, причем $Sf^+ = f^-S$, поставим в соответствие отображение

$$J\,:(f^+, f^-) \to (F^+, F^-) \in \mathrm{Hom}^+_{S,\Omega}(\mathcal{BD}_{*,*,*}(A), \mathcal{BD}_{*,*,*}(B)),$$

где $F^+ \in \mathrm{Hom}(\mathcal{BD}^+_{*,*}(A), \mathcal{BD}^+_{*,*}(B))$ и $F^- \in \mathrm{Hom}(\mathcal{BD}^-_{*,*}(A), \mathcal{BD}^-_{*,*}(B))$, которое переводит n-ый $\mathcal{BC}$-слой в n-ый $\mathcal{BC}$-слой, и ограничение которого на $\mathcal{BC}^+$-слагаемое совпадает с f^+, а ограничение на $\mathcal{BC}^-$-слагаемое с f^-. Ясно, что (F^+, F^-) действительно будет перестановочно с периодичностями S и Ω. Если (f^+, f^-) было циклом в $\mathrm{Hom}^+_S(\mathcal{BC}_*(A), \mathcal{BC}_*(A))$, то циклом будет также (F^+, F^-):

$$\begin{aligned} &d_{\mathcal{BD}}(F^+, F^-) \\ &\quad = (d_{\mathcal{BC}}(F^+) + \omega^\pm(F^+), d_{\mathcal{BC}}(F^-) + \omega^\mp(F^-)) = (\omega^\pm(F^+), \omega^\mp(F^-)) = 0, \end{aligned}$$

поскольку

$$\omega^\pm(F^+) = \omega^\pm_{n-|f|} f^\mp - (-1)^{|f|} f^\mp \omega^\pm_n,$$

а по построению, $\omega^\pm_n = (-1)^n(1 \pm y)$.

Таким образом, корректно определено отображение

$$J^* : HC^*_+(A, B) \to HD^*_+(A, B).$$

Докажем его инъективность. Для упрощения обозначений, будем записывать только положительные компоненты: f^+ и F^+; для отрицательных компонент предполагаются параллельные рассуждения.

Пусть $F = J(f)$ является границей, то есть существует

$$H \in \mathrm{Hom}^+_{S,\Omega}(\mathcal{BD}_*(A), \mathcal{BD}_*(B)),$$

такое что $F = d_{\mathcal{BD}}(H)$. Поскольку H перестановочно с Ω то H не может повышать номер $\mathcal{BC}$-слоев. (Действительно, если H отображает, скажем, n-ый $\mathcal{BC}$-слой в $(n+k)$-ый, то $H\Omega^{n+1} = 0$, в то время как $\Omega^{n+1}H \neq 0$.) Значит

$$F = d_{\mathcal{BD}}(H) = d_{\mathcal{BC}}(H) + \omega(H) = d_{\mathcal{BC}}(H),$$

поскольку $\omega(H)$ уменьшает номер слоя, а F сохраняет. Пусть h^+ – ограничение H на положительную часть первого слоя: $f^+ = d_{\mathcal{BC}} h^+ + h^+ d_{\mathcal{BC}}$. Учитывая Ω-перестановочность F и H, получаем аналогичную формулу для f^- и h^-, где h^- — ограничение H на отрицательную часть второго слоя. Действительно, применяя к комплексу $\mathcal{BD}^+_{*,*,*}$ оператор Ω, получим комплекс $\mathcal{BD}^-_{*,*,*}$ для которого верны все проведенные выше рассуждения с заменой $+$ на $-$ и $-$ на $+$. Перестановочность с Ω позволяет перенести эти выкладки обратно в $\mathcal{BD}^+_{*,*,*}$ во второй $\mathcal{BC}$-слой. Таким образом, $F = d_{\mathcal{BD}} J(h^+, h^-)$. Инъективность доказана.

Докажем простое техническое утверждение, которым мы будем пользоваться в дальнейшем.

Предложение 3.7 *Если* $d_{\mathcal{BC}}(g) = 0$, *то* $d_{\mathcal{BC}}(g\omega^{-1}) = d_{\mathcal{BC}}(\omega^{-1}g) = 0$. *Здесь* $g \in Hom^+_{S,\Omega}(\mathcal{BD}_*(A), \mathcal{BD}_*(B))$, *а* ω^{-1} *– отображение обратное к* $\omega^{\pm}$ *определенное на тех компонентах* $\mathcal{BC}$*-слоев на которых оно имеет смысл.*

Доказательство. Заметим, что $d_{\mathcal{BC}}(g) = d_{\mathcal{BC}}g - (-1)^{|g|}gd_{\mathcal{BC}}$. Следовательно

$$d_{\mathcal{BC}}(g\omega^{-1}) = d_{\mathcal{BC}}g\omega^{-1} - (-1)^{|g|+1}g\omega^{-1}d_{\mathcal{BC}} = (d_{\mathcal{BC}}g - (-1)^{|g|}gd_{\mathcal{BC}})\omega^{-1} = 0,$$
$$d_{\mathcal{BC}}(\omega^{-1}g) = d_{\mathcal{BC}}\omega^{-1}g - (-1)^{|g|+1}\omega^{-1}gd_{\mathcal{BC}} = -\omega^{-1}(d_{\mathcal{BC}}g - (-1)^{|g|}gd_{\mathcal{BC}}) = 0.$$

Мы воспользовались тем, что $d_{\mathcal{BC}}\omega^{-1} = -\omega^{-1}d_{\mathcal{BC}}$.□

Скажем, что $f \in \mathrm{Hom}^+_{S,\Omega}(\mathcal{BD}_*(A), \mathcal{BD}_*(B))$ имеет Ω-фильтрацию n, если n – максимальное уменьшение номера $\mathcal{BC}$-слоя под действием f. Число n всегда положительно, так как f коммутирует с Ω (подробные рассуждения приведены в доказательстве инъективности J).

Будем придерживаться следующей схемы доказательства теоремы.

1. Выделим в нулевой фильтрации $\mathrm{Hom}^+_{S,\Omega}(\mathcal{BD}_*(A), \mathcal{BD}_*(B))_0$ существенную часть (коциклы нулевой фильтрации, не являющиеся кограницами) и исключим ее из дальнейшего рассмотрения.

2. Докажем, что остальные коциклы нулевой фильтрации являются кограницами с точностью до отображений старших фильтраций.

3. Шаг индукции: докажем, что если отображения фильтрации меньшей n являются кограницами с точностью до отображений фильтрации n, то отображения фильтрации n являются кограницами с точностью до отображений старших фильтраций.

1) Наряду с коциклами, образами при отображении

$$J : \mathrm{Hom}^+_S(\mathcal{BC}_*(A), \mathcal{BC}_*(B)) \to \mathrm{Hom}^+_{S,\Omega}(\mathcal{BD}_*(A), \mathcal{BD}_*(B)),$$

в существенную часть нулевой фильтрации входят также отображения вида

$$g^+ : + \to --, \qquad g^- : - \to ++$$

(см. Рис. 3) (компоненты $++$ и – отображаются в ноль), задающие гомоморфизм

$$J' : \mathrm{Hom}^-_S(\mathcal{BC}_*(A), \mathcal{BC}_*(B)) \to \mathrm{Hom}^+_{S,\Omega}(\mathcal{BD}_*(A), \mathcal{BD}_*(B)).$$

При этом коциклы переходят в коциклы. Действительно, если $d_{\mathcal{BC}}g^+ = d_{\mathcal{BC}}g^- = 0$, то $d_{\mathcal{BD}}J(g^+, g^-) = \omega^{\pm}(J(g^+, g^-)) = 0$, поскольку

$$\omega^{\pm} \circ J'(g^+, g^-) = \omega^{\pm}\Big|_{--\cup++} = 0 \quad \text{и}$$

$$J'(g^+, g^-) \circ \omega^{\pm} = J'(g^+, g^-)\Big|_{--\cup++} = 0.$$

Если $J'(g^+, g^-)$ оказалось кограницей, то есть $J'(g^+, g^-) = d_{\mathcal{BD}}(H)$, то обозначая через h^+ и h^- компоненты H отображающие $+ \to --$ и $- \to ++$ соответственно, получим

$$J'(g^+, g^-) = d_{\mathcal{BD}}(J'(h^+, h^-)),$$

поскольку из структуры комплекса $\mathcal{BD}^+$ (см. Рис. 3) следует, что

$$d_{\mathcal{BD}}(H - J'(h^+, h^-)) = 0.$$

Таким образом, существенными компонентами оказались

$$(+ \to +, - \to -) \quad \text{и} \quad (+ \to --, - \to ++),$$

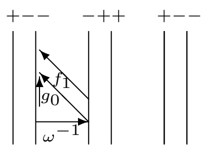
являющиеся прямыми слагаемыми в модуле $\mathrm{Hom}^+_{S,\Omega}(\mathcal{BD}_*(A), \mathcal{BD}_*(B))$. Легко видеть, что они будут также подкомплексами. Учитывая, что остальные компоненты $\mathrm{Hom}^+_{S,\Omega}(\mathcal{BD}_*(A), \mathcal{BD}_*(B))$ не дают вклада в бивариантные когомологии (этому факту посвящена оставшаяся часть доказательства), получаем, что соответствующие когомологии: ${}^+HC^*(A, B)$ и ${}^-HC^*(A, B)$ войдут в ${}^+HD^*(A, B)$ как прямые слагаемые.

2) а) Рассмотрим отображение

$$g_0 : -- \to -- \in \mathrm{Hom}^+_{S,\Omega}(\mathcal{BD}_*(A), \mathcal{BD}_*(B))_0$$

равное нулю на остальных компонентах. Для того чтобы g_0 вошло в состав $\mathcal{BD}$-коцикла необходимо чтобы $d_{\mathcal{BC}} g_0 - (-1)^{|g|} g_0 d_{\mathcal{BC}} = 0$, и чтобы существовало $f \in \mathrm{Hom}^+_{S,\Omega}(\mathcal{BD}_*(A), \mathcal{BD}_*(B))$ фильтрации большей нуля, такое что $d_{\mathcal{BD}}(f + g) = 0$. Из структуры комплекса $\mathcal{BD}$ ясно, что $f = f_1 + f'$, где $f_1 : - \to --$ отображение фильтрации 1 равное нулю на остальных компонентах (только такие отображения имеют кограницами отображения $-- \to --$ фильтрации 0), а f' — отображение фильтрации 2 или больше, которые на данном этапе нас не интересуют.

(Здесь и далее мы будем изображать отображения одного комплекса в другой на одной схеме).



.4 Поскольку никакая другая компонента коцикла $f + g$, кроме $f_1 + g$ не имеет кограницей отображения $- \to --$ первой фильтрации или $-- \to --$ нулевой фильтрации

$$(-1)^{|g|}\omega^{\pm} + d_{\mathcal{BC}} f_1 - (-1)|f| f d_{\mathcal{BC}} = 0.$$

Пусть $\tilde{f} = (-1)^{|f|} f \omega^{-1}$, тогда

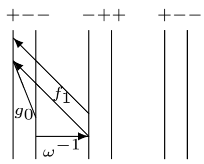
$$d_{\mathcal{BD}}\tilde{f} = \omega^{\pm}(\tilde{f}) + d_{\mathcal{BC}}(\tilde{f}) = \tag{27}$$
$$\omega^{\pm}\tilde{f} - (-1)^{|\tilde{f}|}\tilde{f}\omega^{\pm} + (-1)^{|f|}(d_{\mathcal{BC}} f \omega^{-1} - (-1)^{|f|+1} f \omega^{-1} d_{\mathcal{BC}})$$

Воспользовавшись тем, что $d_{\mathcal{BC}}\omega = -\omega d_{\mathcal{BC}}$ и, следовательно $d_{\mathcal{BC}}\omega^{-1} = -\omega^{-1}d_{\mathcal{BC}}$, равенствами $|g| = |f|$ (следствие условия коцикла) и $|\tilde{f}| = |f|+1$, и тем, что $\omega^{\pm}\tilde{f} = \omega^{\pm}\Big|_{--} = 0$, выражение (27) можно переписать в виде

$$-(-1)^{|f|+1}d\omega^{-1}\omega + (-1)^{|f|}(d_{\mathcal{BC}}f - (-1)^{|f|}fd_{\mathcal{BC}})\omega^{-1} = g + f$$

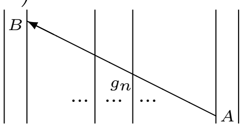
и, таким образом, $g+f$ является кограницей и отображение $-- \to --$нулевой фильтрации в когомологии не входит.

б) Пусть $g_0 : -- \to +$ или $g_0 : ++ \to -$ (для определенности рассмотрим первый случай). Необходимым условием вхождения g_0 в коцикл является наличие $f : - \to +$, такого что $g\omega^{\pm} + d_{\mathcal{BC}}f - (-1)^{|f|}f(d_{\mathcal{BC}} = 0$ (ибо только такие отображения имеют компонентами кограницы отображения $- \to +$ первой фильтрации) и равенство $d_{\mathcal{BC}}(g_0) = 0$.



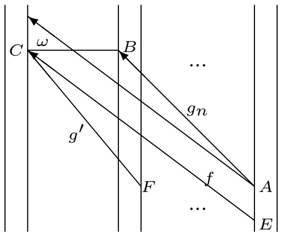
.5 Положим $\tilde{f} = (-1)^{|f|}f\omega^{-1}$ (как и выше $|f| = |g|$), тогда $d_{\mathcal{BD}}\tilde{f} = g + f + (-1)^{|f|}\omega f\omega^{-1}$. Таким образом, из коцикла содержащего g_0 в качестве слагаемого всегда можно вычесть кограницу $d_{\mathcal{BD}}\tilde{f}$. При этом g_0 исчезнет, а изменения произойдут лишь в фильтрациях начиная с первой.

3) Пусть отображения фильтрации меньше n, входящии в коциклы уже ликвидированы с помощью добавления соответствующих кограниц. Пусть g_n — отображение из n-ой фильтрации из $\mathrm{Hom}^{+}_{S,\Omega}(\mathcal{BD}_*(A), \mathcal{BD}_*(B))$. Возможно четыре случая.

а)


.6 Пусть g_n идет из B в A, как показано на рисунке. Тогда $d_{\mathcal{BC}}(g_n) = 0$, ибо из B в A могут идти только дифференциалы отображений фильтраций n и $n+1$, но последние отсутствуют по предположению.

Пусть $f_n = \omega^{-1}g_n$, тогда по предложению (3.7) $d_{\mathcal{BC}}(f_n) = 0$ и, следовательно, $d_{\mathcal{BD}}(f_n) = \omega\omega^{-1}g_n = g_n$, то есть g_n представляется в виде кограницы.

б)


.7 Пусть g_n выбрано как показано на рисунке 7. Тогда $d_{\mathcal{BC}}(g_n) = 0$ и, если g_n входит в состав коцикла, в коцикл входит также отображение f из E в C и (если $n = 1$) отображение g'_n из F в C, причем

$d_{\mathcal{BC}}(g'_n) = 0$ и, в любом случае,

$$\omega g_n - (-1)^{|g|} g' \omega + d_{\mathcal{BC}}(f) = 0. \tag{28}$$

Положим $h = (-1)^{|g|} g_n \omega^{-1}$. Тогда

$$d_{\mathcal{BD}}(h) = (-1)^{|g|} d_{\mathcal{BC}}(g_n \omega^{-1}) + (-1)^{|g|} \omega g_n \omega^{-1} - (-1)^{|g|}(-1)^{|g|+1} g_n.$$

Первое слагаемое равно нулю по предложению (3.7). Подставим во второе слагаемое выражение для ωg_n из (28). Получим

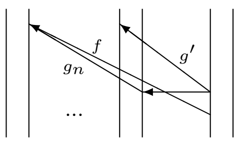
$$\begin{aligned}
&g_n + (-1)^{|g|+|g'|} g' \omega \omega^{-1} + (-1)^{|g|} d_{\mathcal{BC}}(f) \omega^{-1} = \\
&\quad = g_n + g' + (-1)^{|g|+1}(d_{\mathcal{BC}} f \omega^{-1} - (-1)^{|h|+1} f \omega^{-1} d_{\mathcal{BC}}) = \\
&\quad = g_n + g' + (-1)^{|g|+1}(d_{\mathcal{BC}}(f \omega^{-1}) - (-1)^{|f|+1} f \omega^{-1} \omega) = \\
&\quad g_n + g' + f + (-1)^{|g|+1} d_{\mathcal{BD}}(f \omega^{-1})
\end{aligned}$$

и, таким образом, вычитая из исходного коцикла кограницу

$$d_{\mathcal{BD}}(h + (-1)^{|g|} f \omega^{-1}),$$

составляющие фильтрации n исчезают.

в)



.8 Как и в предыдущем случае, $d_{\mathcal{BC}}(g_n) = 0$ является необходимым условием для вхождения g_n в коцикл. Необходимо также наличие отображения f и (если $n = 1$) отображения g', таких что

$$-(-1)^{|g|} g_n \omega + \omega g' + d_{\mathcal{BC}}(f) = 0 \tag{29}$$

Положим $h = \omega^{-1} g_n \omega$. Тогда

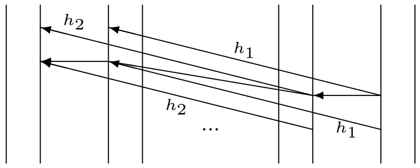
$$d_{\mathcal{BD}}(h) = g_n + d_{\mathcal{BC}}(\omega^{-1} g_n) - (-1)^{|g|+1} \omega^{-1} g_n \omega.$$

Замечая, что второе слагаемое равно нулю по предложению (3.7) и подставляя выражение для $g_n \omega$ из (29) получим

$$d_{\mathcal{BD}}(h) = g_n + \omega^{-1} \omega g' + \omega^{-1} d_{\mathcal{BC}}(f) = g_n + g' + h - d_{\mathcal{BD}}(\omega^{-1} f).$$

Значит, при вычитании из исходного коцикла кограницы $d_{\mathcal{BD}}(h + \omega^{-1} f)$ слагаемые фильтрации n исчезнут.

г)



.9 Как и выше, $d_{\mathcal{BC}}(g_n) = 0$. Другим необходимым условием вхождения g_n в коцикл является наличие таких отображений h_1 и h_2, что

$$d_{\mathcal{BC}}(h_1) - (-1)^{|g|} g_n \omega = 0 \quad \text{и} \quad d_{\mathcal{BC}}(h_2) + \omega g_n = 0.$$

Положим $f = (-1)^{|g|} h_1 \omega^{-1}$. Тогда

$$d_{\mathcal{BD}}(f) = d_{\mathcal{BC}}(f) + \omega f - (-1)^{|f|} f \omega = g_n + (-1)^{|g|} \omega h_1 \omega^{-1} + h_1.$$

Вычитая кограницу $d_{\mathcal{BD}}(f)$ из исходного коцикла получим, что g_n исчезнет, а изменения произойдут лишь в старших фильтрациях. Теорема доказана.$\square$

Следствие 3.8 *Пусть элемент* 2 *обратим в* k, *тогда имеет место следующий изоморфизм*

$$HD^*(A, B) \cong HC^*(A, B) \oplus HC^*(A, B).$$

Ввиду доказанного утверждения, в дальнейшем, мы сосредоточим наше внимание на комплексах $\mathcal{BC}^+_{*,*}(A)$ и $\mathcal{BC}^-_{*,*}(A)$ и бивариантных когомологиях им соответствующих $HC^*_+(A, B)$ и $HC^*_-(A, B)$ соответственно.

3.2 Матричная форма записи гомоморфизмов

Исследуем явный вид гомомофизмов введенных нами выше комплексов.

3.2.1 Каждый элемент $f \in \mathrm{Hom}_S(\mathcal{BC}(A), \mathcal{BC}(B))$ представляет собой гомоморфизм градуированных k-модулей

$$f: \quad Tot\, \mathcal{BC}_{*,*}(A) \to Tot\, \mathcal{BC}_{*,*}(B)$$

Разложению в прямую сумму модулей

$$Tot_n\, \mathcal{BC}(A) = \bigoplus_{i=0}^{[n/2]} A \otimes \overline{A}^{\otimes n-2i} \qquad \text{и} \qquad Tot_n\, \mathcal{BC}(A) = \bigoplus_{i=0}^{[n/2]} B \otimes \overline{B}^{\otimes n-2i}$$

соответствует представление f в виде компонент

$$A \otimes \overline{A}^{\otimes i} \to B \otimes \overline{B}^{\otimes j}.$$

Из условия перестановочности гомоморфизмов с периодичностью S следует, что все составляющие f отображающие $A \otimes \overline{A}^{\otimes i}$ в $B \otimes \overline{B}^{\otimes j}$ при фиксированных i и j равны. Действительно, поскольку S вычеркивает первый столбец бикомплекса $\mathcal{BC}$, все такие составляющие равны одной фиксированной составляющей

$$F_{ij}: \quad A\otimes\overline{A}^{\otimes i}\to B\otimes\overline{B}^{\otimes j}$$

f для которой $A\otimes\overline{A}^{\otimes i}$ находится в первом столбце бикомплекса $\mathcal{BC}(A)$. Отсюда видно также, что $F_{ij}=0$ при $i+n>j$, где n — степень f.

Следовательно, каждый S-перестановочный гомоморфизм f может быть представлен в виде бесконечной треугольной матрицы $(F_{ij})_{i=0,\,j=0}^{\infty}$ с ненулевыми элементами в шахматном порядке. Например, гомоморфизму степени -2 соответствует матрица

$$F=\begin{matrix} F_{00} & & F_{20} & & & & \\ & F_{11} & & F_{31} & & & \\ F_{02} & & F_{22} & & F_{42} & & \\ & F_{13} & & F_{33} & & F_{53} & \\ F_{04} & & F_{24} & & F_{44} & & F_{64} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{matrix}. \tag{30}$$

Композиции двух гомоморфизмов соответствует произведение матриц

$$F\circ G_{ij}=\sum_k F_{ik}G_{kj}.$$

Дифференциал записывается в матричной форме следующим образом

$$dF_{ij}=bF_{i,j+1}+B_{i,j-1}-(-1)^{|f|}F_{i+1,j}B-(-1)^{|f|}F_{i-1,j}b.$$

Вматричной форме отображение S состоит во включении множества матриц таких что $F_{ij}=0$, при $i-j>n$ в матрицы для которых $F_{ij}=0$, при $i-j>n+1$. Гомологии прямого предела индуктивной системы

$$\ldots\xrightarrow{S}\mathrm{Hom}^*_S(\mathcal{BC}_*(A),\mathcal{BC}_*(B))\xrightarrow{S}\mathrm{Hom}^{*+2}_S(\mathcal{BC}_*(A),\mathcal{BC}_*(B))\xrightarrow{S}\ldots$$

называются бивариантными периодическими (циклическими) когомологиями (см. [29]), обозначение $HP^*(A,B)$.

3.2.2 Тчно также как $Hom_{S\Omega}(\mathcal{BD}(A),\mathcal{BD}(B))$ и $Hom_{\Omega}(\mathcal{CR}(A),\mathcal{CR}(B))$ (см. п.2.4) комплекс

$$Hom_S(\mathcal{BC}^+(A)\oplus\mathcal{BC}^-(A),\mathcal{BC}^+(B)\oplus\mathcal{BC}^-(B))=Hom_S(\mathcal{BC}(A),\mathcal{BC}(B))$$

раскладывается в прямую сумму своих положительных и отрицательных частей. Каждый положительный S-перестановочный гомоморфизм f может быть представлен в виде пары матриц вида (30): F^{++}, F^{--} и каждый отрицательный гомоморфизм в виде F^{+-}, F^{-+}. Например, матрицы F^{++} и F^{--}

$$
\begin{array}{ccccccc}
F_{00}^{+-} & & F_{20}^{--} & & & & \\
& F_{11}^{-+} & & F_{31}^{++} & & & \\
F_{02}^{++} & & F_{22}^{-+} & & F_{42}^{++} & & \\
& F_{13}^{--} & & F_{33}^{+-} & & F_{53}^{--} & \\
F_{04}^{+-} & & F_{24}^{--} & & F_{44}^{+-} & & F_{64}^{--} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
F_{00}^{-+} & & F_{20}^{++} & & & & \\
& F_{11}^{+-} & & F_{31}^{--} & & & \\
F_{02}^{--} & & F_{22}^{+-} & & F_{42}^{--} & & \\
& F_{13}^{++} & & F_{33}^{-+} & & F_{53}^{++} & \\
F_{04}^{-+} & & F_{24}^{++} & & F_{44}^{-+} & & F_{64}^{++} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots,
\end{array}
\tag{31}
$$

где

$$
F_{ij}^{+-} : \mathcal{CH}_i^+ \to \mathcal{CH}_j^-, \qquad F_{ij}^{++} : \mathcal{CH}_i^+ \to \mathcal{CH}_j^+,
$$
$$
F_{ij}^{--} : \mathcal{CH}_i^- \to \mathcal{CH}_j^-, \qquad F_{ij}^{-+} : \mathcal{CH}_i^- \to \mathcal{CH}_j^+
$$

соответствуют положительному гомоморфизму степени -2.

Дифференциалы и композиции гомоморфизмов записываются также как и в циклическом случае.

Заметим, что периодичность S отображает $\mathcal{BC}^+$ на $\mathcal{BC}^-$ и наоборот. Значит отрицательная часть S-перестановочного гомоморфизма f $f^{--} : \mathcal{BC}^- \to \mathcal{BC}^-$ однозначно восстанавливается по его положительной части $f^{++} : \mathcal{BC}^+ \to \mathcal{BC}^+$.

3.2.3 Рассмотрим гомоморфизмы "кватернионного" случая

$$
f \in \mathrm{Hom}_T(\mathcal{BQ}_{*,*}(A), \mathcal{BQ}_{*,*}(B)) \cong \mathrm{Hom}_T(\mathcal{BC}^+_{*,*}(A), \mathcal{BC}^+_{*,*}(B)).
$$

В отличие от п. 3.2.2 ненулевые гомоморфизмы, перестановочные с периодичностями, могут отображать элементы $2k+1$-го столбца в $2k+2$-ой (эти столбцы находятся в одном периоде оператора T). Значит каждый T-перестановочный представляется матрицами (31) с "дополнительной диагональю" $(F^{+-}_{i-n+2,i})_{i=0}^{\infty}$, где n степень гомоморфизма.

3.3 Точные последовательности

Теорема 3.9 *Пусть элемент 2 обратим в k, тогда следующие последовательности являются точными*

$$
\begin{aligned}
0 \to Hom_S[-2](\mathcal{BC}(A), \mathcal{BC}(B)) &\xrightarrow{S} \\
\xrightarrow{S} Hom_S(\mathcal{BC}(A), \mathcal{BC}(B)) &\longrightarrow Hom(\mathcal{CH}(A), \mathcal{CH}(B)) \to 0
\end{aligned}
\tag{32}
$$

(см. [30]),

$$
\begin{aligned}
0 \to Hom_S^+[-2](\mathcal{BC}^+(A) \oplus \mathcal{BC}^-(A), \mathcal{BC}^+(B) \oplus \mathcal{BC}^-(B)) &\xrightarrow{S} \\
\xrightarrow{S} Hom_S^-(\mathcal{BC}^+(A) \oplus \mathcal{BC}^-(A), \mathcal{BC}^+(B) \oplus \mathcal{BC}^-(B)) &\longrightarrow \\
\longrightarrow Hom(\mathcal{CH}^+(A), \mathcal{CH}^+(B)) \oplus Hom(\mathcal{CH}^+(A), \mathcal{CH}^-(B)) &\to 0,
\end{aligned}
\tag{33}
$$

$$0 \to Hom_S^+(\mathcal{BC}^+(A) \oplus \mathcal{BC}^-(A), \mathcal{BC}^+(B) \oplus \mathcal{BC}^-(B)) \xrightarrow{W} \tag{34}$$
$$\xrightarrow{W} Hom_T(\mathcal{BC}^+(A), \mathcal{BC}^+(B)) \longrightarrow Hom[-2](\mathcal{CH}^+(A), \mathcal{CH}^+(B)) \to 0.$$

Доказательство. Как уже отмечалось в п. 3.2.1 отображение S состоит во включении треугольных матриц, таких что $F_{ij} = 0$, при $i - j > n - 1$, в треугольные матрицы, такие что $F_{ij} = 0$ при $i - j > n$. Компоненты F_{ij} для которых $i - j = n$ и определяют гомоморфизм комплекса Хохшильда.

Отображение W состоит в естественном включении пар матриц в пары матриц с "дополнительной диагональю". В образе W элементы "дополнительной диагонали" равны нулю. Таким образом, элементы этой диагонали и определяют гомоморфизм комплекса Хохшильда.

Из матричного представления гомоморфизмов следует, что S и W являются морфизмами комплексов, и что последовательности (32), (33) и (34) точны. $\square$

Замечание. Если в последовательности (33) заменить Hom_S^+ на Hom_S^- и наоборот, то получаемая последовательность также точна.

Обозначим

$$HH^n_{++}(A, B) = H_{-n}(\mathrm{Hom}(\mathcal{CH}^+(A), \mathcal{CH}^+(B))),$$

$$HH^n_{+-}(A, B) = H_{-n}(\mathrm{Hom}(\mathcal{CH}^+(A), \mathcal{CH}^-(B))).$$

Следствие 3.10 *Коротким точным последовательностям теоремы 3.9 соответствуют следующие длинные точные последовательности.*

$$\cdots \to HC^{n-2}(A, B) \to HC^n(A, B) \to HH^n(A, B) \to HC^{n-1} \to HC^{n+1} \to \cdots$$

$$\cdots \to HC_+^{n-2}(A, B) \to HC_-^n(A, B) \to$$
$$\to HH^n_{++}(A, B) \oplus HH^n_{+-}(A, B) \to HC_+^{n-1} \to HC_-^{n+1} \to \cdots$$

$$\cdots \to HC_+^n(A, B) \to HQ^n(A, B) \to HH^n_{++}(A, B) \to$$
$$\to HC_+^{n+1}(A, B) \to HQ^{n+1}(A, B) \to \cdots.$$

Замечание. Не требуя обратимости 2, теми же методами что и выше можно доказать точность последовательности

$$\cdots \to HD_-^{n-2}(A, B) \to HD_+^n(A, B) \to HR_+^n(A, B) \to$$
$$\to HD_-^{n-1}(A, B) \to HD_+^{n+1}(A, B) \to \cdots,$$

обобщающей последовательность (33).

4 Эрмитов бивариантный характер Чженя

4.1 Биваринтная эрмитова K-теория

Пусть A, B — алгебры с инволюциями над коммутативным кольцом k; M — $A-B$ бимодуль (то есть левый A-модуль и правый B-модуль, причем правое и левое действия согласованны). Через ^{op} обозначим M со следующей модульной структурой: $b \cdot m \cdot a = \overline{a}m\overline{b}$.

Пусть $h : M^{op} \otimes M \to B$ гомоморфизм B-бимодулей такой, что $h(y, x) = \overline{\varepsilon h(x, y)}$, где ε-единица кольца k с условием $\varepsilon\overline{\varepsilon} = 1$. Предположим, ччто $\hat{h} : M \to M^*$,

$$\hat{h}(x)(y) = h(x, y)$$

изоморфизм $A - B$-бимодулей (здесь $M^* = (\mathrm{Hom}_B(M, B))^{op}$).

Определение 4.1 *Пусть M — правый проективный B-модуль конечного типа. Пара (M, h) удовлетваряющая сфрмулированным выше условиям называется ε-эрмитовым $A - B$-модулем. Изометрией таких модулей называется изоморфизм $A - B$-бимодулей $f : (M, h) \to M', h'$, такой что*

$$h'(f(m_1), f(m_2)) = h(m_1, m_2). \tag{35}$$

Для любых двух ε-эрмитовых $A - B$-модулей (M_1, h_1), (M_2, h_2) определена их отрогональная сумма

$$(M_1, h_1) \perp (M_2, h_2) = (M_1 \oplus M_2, h_1 \perp h_2),$$

также являющаяся ε-эрмитовым $A - B$-модулем. Здесь $h_1 \perp h_2(m_1 \oplus m_2) = h_1(m_1) + h_2(m_2)$.

Обозначим через ${}_\varepsilon\mathcal{H}Rep(A, B)$ категорию, объектами которой являются рассматриваемые с точностью до изометрии ε-эрмитовы $A - B$-модули (P, h) для которых существуют ε-эрмитов $k - B$-модуль (Q, h'), такой что $(P, h) \perp (Q, h')$ и

$$(H(B^n), h_B) = (B^{2n}, \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ \varepsilon\mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix}), \tag{36}$$

где $\mathbf{1}_n$ обозначает единичную квадратную матрицу размера $n \times n$, изометричны как $k - B$-модули для некоторого n. Морфизмами категории ${}_\varepsilon\mathcal{H}Rep(A, B)$ являются гомоморфизмы $A - B$-модулей, согласованные с соответствующими билинейными формами в смысле (35); ортогональная сумма снабжаем ее структурой категории с произведением.

Замечание. Если 2 обратимо в кольце k, то для любого ε-эрмитова $A - B$-модуль (P, h) существует дополнительный ему модуль (Q, h').

Определение 4.2 *Группой бивариантной эрмитовой K-теории алгебр A и B назовем группу Гротендика $K_0({}_\varepsilon\mathcal{H}Rep, \perp)$. Будем обозначать ее через ${}_\varepsilon K(A, B)$.*

Замечание. При $A = k$, группа ${}_\varepsilon K(A, B)$ отождествляется с обычной группой эрмитовой K-теории ${}_\varepsilon K(B)$ (см., например, [11]).

4.2 Характер Чженя

Обозначим через Δ^h инволюцию в алгебре $End_B P$, где (P, h) — ε-эрмитов $A - B$-модуль,

$$\Delta^h : \phi \to \phi^h, \qquad \phi, \phi^h \in End_B P,$$

заданную условием

$$h(\phi^h(x), y) = h(x, \phi(y))$$

для любых x, y. Существование ϕ^h следует из условия невырожденности h.

Предложение 4.1 *Пусть $(P, h) \in_\varepsilon \mathcal{H}Rep(A, B)$. Это означает, что существует $(Q, h') \in_\varepsilon \mathcal{H}Rep(k, B)$ и изометрия*

$$u : (P, h) \perp (Q, h') \cong (H(B^n), h_B)$$

для некоторого натурального числа n (см. (36)). Тогда отображение

$$\mu : (End_B P, \Delta^h) \xrightarrow{\phi \to \phi \oplus 0} (End_B P \oplus End_B Q, \Delta^{h \perp h'}) \xrightarrow{Ad\, u} (\mathbf{M}_{2n}(B), \Delta^{h_B}),$$

где $\mathbf{M}_{2n}(B)$ обозначает алгебру квадратных $2n \times 2n$ матриц над B, а отображение $Ad\, u$ действует на эндоморфизмах сопряжением с помощью u, будет гомоморфизмом алгебр с инволюциями.

Доказательство. Согласованность с инволюциями отображения $\phi \to \phi \oplus 0$ следует из определения ортогональной суммы, а для отображения $Ad\, u$ из равенств

$$\begin{aligned} &h_B(u\phi^{h\perp h'}u^{-1}(x), y) = \\ &\quad = h_B(u\phi^{h\perp h'}u^{-1}(x), uu^{-1}(y)) = h \perp h'(\phi^{h\perp h'}u^{-1}(x), u^{-1}(y)) = \\ &\qquad = h \perp h'(u^{-1}(x), \phi u^{-1}(y)) = h_B(x, u\phi u^{-1}(y)). \end{aligned}$$

□

Для любого (P, h) из ${}_\varepsilon\mathcal{H}Rep(A, B)$ левое модульное действие алгебры A определяет морфизм

$$\lambda_P : A \to End_B P.$$

Поскольку h является A-линейной,

$$\lambda_P : (A, {}^-) \to (End_B P, \Delta^h)$$

— гомоморфизм инволютивных алгебр.

Определение 4.3 *Обобщенным следом называется отображение*

$$Tr_r^n : \mathbf{M}_r(A)^{\otimes n} \to A^{\otimes n}$$

задаваемое формулой

$$Tr_r^n(m_0 a_0 \otimes m_1 a_1 \otimes \cdots \otimes m_n a_n) = Tr(m_0 \cdot m_1 \dots m_n) a_0 \otimes a_1 \cdots \otimes a_n,$$

где $m_i \in \mathbf{M}_r(k),\ a_i \in A.$

Из соотношения

$$Tr_{2r}^n(\Delta^{h_B}(\phi)) = Tr_{2r}^n(\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_r \\ \varepsilon \mathbf{1}_r & 0 \end{pmatrix} \phi \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \mathbf{1}_r \\ \mathbf{1}_r & 0 \end{pmatrix}) = Tr_{2r}^n(\phi)$$

для $\phi \in \mathbf{M}_{2r}(k)$ видно, что отображение Tr будет перестановочно с инволюциями.

Определение 4.4 *Пусть* $(P, h) \in_\varepsilon \mathcal{H}Rep(A, B)$*. Диэдральным бивариантным характером Чженя* $Dch(P, h)$ *назовем класс в диэдральных бивариантных когомологиях соответствующий следующему коциклу нулевой размерности:*

$$Tr^\natural \circ \mu^\natural \circ \lambda_P^\natural.$$

Встречающиеся в формуле отображения были определены выше, а знак $\natural$ *означает, что рассматриваются отображения комплексов*

$$\mathcal{BD}_{*,*,*}(A) \to \mathcal{BD}_{*,*,*}(B)$$

индуцированное исходным отображением на уровне алгебр ($\mu^\natural$ *и* $\lambda_P^\natural$*) или на уровне* $\mathcal{CH}$*-столбцов (*$Tr^\natural$*).*

Теорема 4.2 *Класс* $Dch(P, h)$ *в диэдральных бивариантных когомологиях не зависит от выбора отображения и и числа* n*, участвующих в определении отображения* μ*.*

Доказательство проведем в несколько этапов.

Предложение 4.3 *Пусть* $\iota_p : A \to \mathbf{M}_r(A)$ *оторбражение ставящее в соответствие элементу* $a \in A$ *матрицу с единственным ненилевым элементом* a *на* (p, p)*-ом месте, тогда*

$$[Tr^\natural] \cup [\iota_p^\natural] = [id^\natural] \qquad [\iota_p^\natural] \cup [Tr^\natural] = [id^\natural]$$

(операция $\cup$ *определялась в п. (2.5).*

Доказательство. Очевидно, что $Tr^\natural \circ \iota_p^\natural = \mathrm{id}^\natural$ и, значит, первое равенство доказано.

В работе Р. Маккарти [37] построено отображение $\Phi : \mathbf{M}_r(A)^{n+1} \to \mathbf{M}_r(A)^{n+2}$; в явном виде, для случая $p = 1$, т.е. $\iota_p = \iota_1$,

$$\Phi = \sum_{w=0}^{n} (-1)^{w+1} \Phi_w,$$

где

$$\Phi_w(m^0, m^1, ..., m^n) = \sum (\begin{pmatrix} m^0_{1j_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m^0_{rj_1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, V(m^1_{j_1j_2}), V(m^2_{j_2j_3}), ...$$
$$..., V(m^w_{j_wj_{w+1}}), \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, m^{w+1}, ..., m^n).$$

Через $V(a)$ мы обозначаем матрицу с единственной ненулевой компонентой на $(1,1)$-ом месте, $m^k \in \mathbf{M}_r(A)$, а m^k_{ts} — ts-ая компонента матрицы m^k. Несложно проверить, что

$$b\Phi + \Phi b = \iota_p^\natural Tr^\natural - \mathrm{id}.$$

Следуя общему правилу, описанному в п. (A.1), перейдем от Φ к специальной деформационной ретракции Φ':

$$\mathcal{CH}_*(A) \underset{\iota_p^\natural}{\overset{Tr^\natural}{\leftrightarrows}} \mathcal{CH}_*(\mathbf{M}_r(A)); \Phi'.$$

Пусть $(\mathcal{BD}^0_{*,*,*}(A), b, 0, 0)$ комплекс полученный из $(\mathcal{BD}^0_{*,*,*}(A), b, B, \omega^\pm)$ обнулением двух дифференциалов. Пусть отображения Φ^0, ι_p^0 и Tr^0 действуют на каждом $\mathcal{CH}$-столбце как Φ', $\iota_p^\natural$ и $Tr^\natural$ соответственно. Рассматривая $B + \omega^\pm$ как возмущение специальной деформационной ретракции

$$\mathcal{BD}^0_{*,*,*}(A) \underset{\iota_p^0}{\overset{Tr^0}{\leftrightarrows}} \mathcal{BD}^0_{*,*,*}(\mathbf{M}_r(A)); \Phi^0$$

и воспользовавшись теоремой (A.2), получим специальную деформационную ретракцию

$$(\mathcal{BD}_{*,*,*}(A), \hat{d}) \underset{\hat{\iota}_p}{\overset{\hat{Tr}}{\leftrightarrows}} (\mathcal{BD}_{*,*,*}(\mathbf{M}_r(A)), \hat{d}; \hat{\Phi}). \tag{37}$$

Заметим, что $B + \omega^\pm$ коммутирует с ι_p^0 и Tr^0 (последние отображения действуют на уровне алгебр, тогда как первое лишь переставляет сомножители в тензорном произведении). Откуда, и из того, что $\Phi^0 \iota_p^0 = Tr^0 \Phi^0 = 0$ следует, что

$$\begin{aligned} &\hat{\iota}_p = \iota_p^0 - \Phi^0(B + \omega^\pm)\iota_p^0 + ... = \iota_p^0, \\ &\hat{Tr} = Tr^0 - Tr^0(B + \omega^\pm)\Phi^0 + ... = Tr^0, \\ &\hat{d} = b + Tr^0((B + \omega^\pm) - (B + \omega^\pm)\Phi^0(B + \omega^\pm) + ...)\iota_p^0 = b + B + \omega^\pm. \end{aligned}$$

И, таким образом, $\iota_p^\natural \circ Tr^\natural$ гомотопно тождественному отображению комплекса $\mathcal{BD}_{*,*,*}(\mathbf{M}_r(A))$.

Операторы, использующиеся в специальной деформационной ретракции (37), будут перестановочны с периодичностями BD-комплексов. Это не является очевидным лишь для оператора

$$\hat{\Phi} = \Phi^0 - \Phi^0(B + \omega^\pm)\Phi^0 + ...$$

Однако по самому построению, $\hat{\Phi}$ состоит из всевозможных ненулевых композиций Φ^0 с дифференциалами, действующими в том же направлении, что и периодичности ("к краю"комплекса $\mathcal{BD}_{*,*,*}$). Таким образом, $\hat{\Phi}$ также коммутирует с периодичностями. $\square$

Следствие 4.4 *Для любых p и q, $[\iota_p^\natural] = [\iota_q^\natural]$ в бивариантных диэдральных когомологиях.*

Предложение 4.5 *Пусть u элемент A, такой что $\overline{u} = u^{-1}$. Тогда $[Ad_u^\natural] = [id^\natural]$ в бивариантных диэдральных когомологиях.*

Доказательство. Пусть алгебра $\mathbf{M}_2(A)$ снабжена инволюцией, действующей как инволюция на компонентах и транспонирующей матрицу в целом. Поскольку $\overline{u} = u^{-1}$, то $Ad_u(\overline{a}) = \overline{Ad_u(a)}$ в A, и, если

$$U = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то $Ad_U(\overline{m}) = \overline{Ad_U(m)}$ в $\mathbf{M}_2(A)$. Таким образом,

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\iota_1} & \mathbf{M}_2(A) & \xleftarrow{\iota_2} & A \\ \big\downarrow{\scriptstyle Ad_u} & & \big\downarrow{\scriptstyle Ad_U} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ A & \xrightarrow{\iota_1} & \mathbf{M}_2(A) & \xleftarrow{\iota_2} & A \end{array}$$

является коммутативной диаграммой гомоморфизмов алгебр с инволюциями. Откуда,

$$[Ad_u^\natural] \cup [\iota_1^\natural] = [\iota_1^\natural] \cup [Ad_U^\natural] = [\iota_2^\natural] \cup [Ad_U^\natural][\mathrm{id}^\natural] \cup [\iota_2^\natural]. \tag{38}$$

Во втором равенстве мы воспользовались следствием (4.4). Умножая равенство (38) справа на $[Tr^\natural]$ получаем требуемое соотношение. $\square$

Для завершения доказательства теоремы нам надлежит установить независимость определения диэдрального характера Чженя от выбора дополнительного модуля Q. Пусть существуют такие различные (Q_1, h') и $(Q_2, h'') \in_\varepsilon \mathcal{H}Rep(k, B)$, что

$$(P, h) \perp (Q_1, h') \cong (H_m, h_B) \qquad (P, h) \perp (Q_2, h'') \cong (H_n, h_B).$$

Пусть
$$\alpha : P \perp Q_1 \perp H_n \to P \perp Q_2 \perp H_m$$
изометрия, причем $\alpha|_P = \mathrm{id}$. Поскольку
$$\phi \oplus 0_{Q_1} \oplus 0_{H_n} = \alpha^{-1}(\phi \oplus 0_{Q_2} \oplus 0_{H_m})\alpha,$$
и при добавлении (при определении отображения μ слагаемых вида 0_{H_m} когомологический класс очевидно не меняется применение утверждения (4.5) заканчивает доказательство теоремы. $\square$

5 Вычисления

5.1 Циклические гомологии A_d

5.1.1 Пусть A_d алгебра корней уравнений вида

$$x^2 + px + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{Z}$$

имеющих форму $a\sqrt{d}+b$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, а d целое число свободное от квадратов.

Если $\alpha \in A_d$ рационально: $\alpha = \frac{m_1}{n_1}$ и

$$F(x) = x^2 + Px + Q \quad F(\alpha) = 0$$

тогда $\alpha\prime$, второй корень $F(x)$, также рационален: $\alpha\prime = \frac{m_2}{n_2}$. Предположим[1] $(m_1, n_1) = (m_2, n_2) = 1$. Получаем:

$$\begin{cases} \frac{m_1}{n_1}\frac{m_2}{n_2} = Q \\ \\ \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = -P \end{cases}$$

значит, $m_2^2 = Pm_2n_2 - n_2^2 Q$ и, следовательно, $n_2 = 1$. Откуда получаем что $n_1 = 1$ и $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Пусть теперь $\alpha = a\sqrt{d}+b$ и $a \neq 0$. По определению, число α принадлежит A_d если коэффициенты многочлена

$$x^2 - 2bx + b^2 - a^2 d$$

целые. Действительно, существование другого многочлена той же формы, с корнем α означало бы $\alpha \in \mathbb{Q}$, поскольку разность также имеет α своим корнем. Итак,

$$\alpha \in A_d \iff \begin{cases} 2b \in \mathbb{Z} \\ b^2 - a^2 d \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} a, b \in \mathbb{Z}, d = 4k+2, 4k+3 \\ \begin{cases} a = a'/2, b = b'/2, a', b' \in \mathbb{Z}, \\ b' \equiv a'(\mathrm{mod} 2), d = 4k+1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Откуда получаем, что A_d свободный $\mathbb{Z}$-модуль с образующими 1 и ω:

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{d} & \text{, если } d = 4k+2 \text{ или } d = 4k+3 \\ \frac{\sqrt{d}+1}{2} & \text{, если } d = 4k+1 \end{cases}$$

[1] (a, b) обозначает наибольший общий делитель чисел a и b.

5.1.2 Для подсчета циклических гомологий A_d воспользуемся нормализованным бикомплексом $\mathcal{BC}(A_d)$ (см. теорему 1.1).

Каждый элемент $A_d \otimes \overline{A}_d^n$ однозначно записывается в виде $(a_0, \overbrace{\omega, ..., \omega}^{n})$, и несложно показать, что

$$b(a_0, \overbrace{\omega, ..., \omega}^{n}) = \begin{cases} (2a_0\omega - a_0, \overbrace{\omega, ..., \omega}^{n-1}) & \text{, если } d = 4k+1 \text{ и } n = 2l; \\ (2a_0\omega, \overbrace{\omega, ..., \omega}^{n-1}) & \text{, если } d = 4k+2 \text{ или} \\ & \quad d = 4k+3 \text{ и } n = 2l; \\ 0 & \text{, если } n = 2l+1. \end{cases}$$

Считая $a_0 = a\omega + b$, запишем

$$b(a_0, \omega, ..., \omega) = \begin{cases} (\omega(2b+a) + (\frac{d-1}{2}a - b), \omega, ..., \omega) & \text{, если } d = 4k+1 \text{ и} \\ & \quad n = 2l; \\ (2b\omega + 2ad, \omega, ..., \omega) & \text{, если } d = 4n+2 \text{ или} \\ & \quad 4k+3 \text{ и } n = 2l; \\ 0 & \text{, если } n = 2l+1; \end{cases}$$

$$B(a_0, \overbrace{\omega, ..., \omega}^{n}) = \begin{cases} (a(n+1), \overbrace{\omega, ..., \omega}^{n+1}) & \text{, если } n = 2l; \\ 0 & \text{, если } n = 2l+1. \end{cases}$$

Откуда видим, что дифференциал в нечетных размерностях тотального комплекса равен нулю:

$$Tot_{2n+1}\mathcal{BC}_* \xrightarrow{B+b=0} Tot_{2n}\mathcal{BC}_*.$$

В четных же размерностях дифференциал

$$Tot_{2n}\mathcal{BC}_* \xrightarrow{B+b} Tot_{2n-1}\mathcal{BC}_*$$

задается матрицей, точный вид которой мы укажем в зависимости от d.

5.1.3 Случай $d \neq 4k+1$. Тогда матрица дифференциала запишется как

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & & & & & & & & & & & \\ 2d & 0 & 2n-1 & & & & & & & & & & & \\ & & 0 & 2 & 0 & & & & & & & & & \\ & & 2d & 0 & 2n-3 & & & & & & & & & \\ & & & & 0 & 2 & 0 & & & & & & & \\ & & & & & \dots & \dots & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & \dots & \dots & & & & & & \\ & & & & & & & 2d & 0 & 3 & & & & \\ & & & & & & & & & 0 & 2 & 0 & & \\ & & & & & & & & & 2d & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что в нечетных строках могут быть получены любые наборы четных чисел. Поскольку ядро следующего дифференциала совпадает со всем модулем, каждая нечетная строка добавляет в гомологии алгебры прямое слагаемое $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ в размерности $2n-1$, и эту строку, вместе с соответствующим столбцом можно исключить. Получаем матрицу:

$$\begin{pmatrix}
2d & 2n-1 & & & & & & \\
& 2d & 2n-3 & & & & & \\
& & \dots & \dots & & & & \\
& & & \dots & \dots & & & \\
& & & & 2d & 3 & & \\
& & & & & 2d & 1 & 0
\end{pmatrix} \tag{39}$$

Теперь ясно, что ядром рассматриваемого дифференциала является $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. И что

$$HC_{2n}(A_d) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$

поскольку образ предыдущего дифференциала есть ноль.

5.1.4 Случай $d = 4n+1$.

Матрица дифференциала запишется в виде:

$$\begin{pmatrix}
1 & 2 & & & & & & & & & & & \\
\frac{d-1}{2} & -1 & 2n-1 & & & & & & & & & & \\
& 0 & 1 & 2 & & & & & & & & & \\
& & \frac{d-1}{2} & -1 & 2n-3 & & & & & & & & \\
& & & 0 & 1 & 2 & & & & & & & \\
& & & & & \dots & \dots & & & & & & \\
& & & & & & \dots & \dots & & & & & \\
& & & & & & 0 & 1 & 2 & & & & \\
& & & & & & & \frac{d-1}{2} & -1 & 3 & & & \\
& & & & & & & & 0 & 1 & 2 & & \\
& & & & & & & & & \frac{d-1}{2} & -1 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

Элементарные преобразования матрицы вида $col_1 := col_1 + \alpha\cdot col_2$ или $row_1 := row_1 + \beta\cdot row_2$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ отвечают преобразованиям базиса в Tot_{2n+1} или в Tot_{2n} соответственно. Применяя их получим:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & & & & & & & & & \\
\frac{d-1}{2} & -d & 2n-1 & -2(2n-1) & & & & & & & \\
& & 1 & 0 & & & & & & & \\
& & \frac{d-1}{2} & -d & 2n-3 & -2(2n-3) & & & & & \\
& & & & \dots & \dots & & & & & \\
& & & & & 1 & 0 & & & & \\
& & & & & \frac{d-1}{2} & -d & 3 & -6 & & \\
& & & & & & & 1 & 0 & & \\
& & & & & & & \frac{d-1}{2} & -d & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

Далее,

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & & & & & & & & & & & \\
0 & -d & 0 & -2(2n-1) & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & 0 & -d & 0 & -2(2n-3) & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & & & & & & & \\
 & & & & & \dots & \dots & & & & & & \\
 & & & & & & \dots & \dots & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & 0 & & & & \\
 & & & & & & & 0 & -d & 0 & -6 & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 0 & & \\
 & & & & & & & & & 0 & -d & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

где, как и в случае $d \neq 4n+1$ можно исключить строки и столбцы, содержащие лишь единицы. (Гомологии при этом остаются теми же.)

$$
\begin{pmatrix}
d & 2(2n-1) & & & & & & \\
 & d & 2(2n-3) & & & & & \\
 & & \dots & \dots & & & & \\
 & & & \dots & \dots & & & \\
 & & & & d & 6 & & \\
 & & & & & d & 2 & 0
\end{pmatrix}
\tag{40}
$$

Как и в конце пункта 5.1.3:

$$
HC_{2n}(A_d) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}
$$

5.1.5 Таким образом оба случая привели к матрице одного вида

$$
\Phi_n : \quad
\begin{pmatrix}
d' & a_1 & & & & & \\
 & d' & a_2 & & & & \\
 & & d' & a_3 & & & \\
 & & & \dots & \dots & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & \dots & \dots \\
 & & & & & d' & a_n
\end{pmatrix}
\tag{41}
$$

(в случае $d \neq 4n+1$, $d' = 2d$ и $a_i = 2i - 1$; если же $d = 4n+1$ то, $d' = d$ и $a_i = 2(2i-1)$) и нам остается подсчитать коядро отображения

$$
\Phi : \quad \mathbb{Z}^{n+1} \to \mathbb{Z}^n
$$

задаваемого матрицей (41).

Предложение 5.1 *Любой ненулевой k-минор Min_k матрицы (41) имеет вид*
$$Min_k = a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_m} \cdot {d'}^{k-m}. \tag{42}$$

Доказательство. Каждый k-минор Min_k определяется выбором k различных столбцов и k строк матрицы (41), пересечение которых дает квадратную $k \times k$-матрицу M_k определителем которой и является Min_k. Для обоснования формулы (42) достаточно показать, что любая такая матрица M_k, имеющая ненулевой определитель, состоит из блоков Bl_i стоящих на диагонали

$$M_k = \begin{pmatrix} \mathrm{Bl}_1 & & & \\ & \mathrm{Bl}_2 & & \\ & & \mathrm{Bl}_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

причем каждый такой блок является верхнетреугольной или нижнетреугольной матрицей с ненулевыми элементами (равными с необходимостью d или a_i) на диагонали .

Будем рассуждать по индукции по количеству строк исходной матрицы (41). Если количество строк $n = 2$, то утверждение очевидно. Пусть в матрице (41) n_0 строк. Если среди выбранных строк соответствующих минору Min_k нет последней (n_0-ой) строки, то утверждение следует из предположения индукции. Если среди выбранных строк содержится n_0-ая, но не содержится $(n_0 - 1)$-ая, то возможны два варианта.

1. Выбраны (n_0+1)-ый и n_0-ой столбцы, и тогда минор Min_k равен нулю.

2. Выбраны либо (n_0+1)-ый, либо n_0-ой столбец, и тогда к получающейся по индукции блочной матрице M_{k-1} добавляется один диагональный элемент.

Если среди выбранных строк содержится и n_0-ая и $(n_0 - 1)$-ая, то возможны следующие варианты.

1. Выбраны (n_0+1)-ый и n_0-ой столбцы. Тогда элемент получающийся на пересечении n_0-го столбца и (n_0-1)-ой строки лежит на диагонали M_{k-1} и, по индукции, входит в нижнетреугольный блок (в верхнетреугольный блок он входить не может). Добавление n_0-ой строки и $n_0 + 1$-го столбца добавляет еще один диагональный элемент и один элемент под диагональю матрицы M_k.

2. Выбраны $(n_0 - 1)$-ый и n_0-ой столбцы. Тогда элемент получающийся на пересечении (n_0-1)-го столбца и (n_0-1)-ой строки лежит на диагонали M_{k-1} и, по индукции, входит в верхнетреугольный блок. Добавление n_0-ой строки и n_0-го столбца добавляет еще один диагональный элемент и один элемент над диагональю матрицы M_k.

3. Выбраны n_0-ой столбец и не выбран ни (n_0-1)-ый, ни (n_0+1)-ый, тогда минор Min_k равен нулю.

4. Выбраны (n_0+1)-ый столбец и не выбран n_0-ой, тогда к получающейся по индукции блочной матрице добавляется один диагональный элемент. $\square$

Пусть

$$d = \prod_{i=1}^{p} d_i$$

разложение числа d на простые множители. Все d_i входят в разложение однократно, поскольку d свободно от квадратов.

Для каждого простого d_j делящего d рассмотрим матрицу вида (41) в которой $d' = d_j$, а $a_i = 2i-1$.

Предложение 5.2 *Пусть d_j простой делитель d. Коядро $\mathbb{Z}^{n+1}/Im\,\Phi_n$ имеет те же d_j-компоненты кручения что и $\mathbb{Z}^{n+1}/Im\,\Phi_n^{d_j}$. Свободные компоненты ($\mathbb{Z}$-слагаемые), $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-компоненты и компоненты кручения соответствующие простым числам не делящим d отсутствуют в коядре Φ_n.*

Доказательство. Отсутствие $\mathbb{Z}$-компонент коядра следует из линейной независимости строк матрицы Φ_n.

По теореме Смита (см. [12]), с помощью элементарных преобразований строк и столбцов, матрицу Φ_n можно привести к диагональному виду, причем ненулевые элементы диагональной матрицы равны

$$I_1, \quad I_2/I_1, \quad I_3/I_2, \quad \dots,$$

где I_k обозначает наибольший общий делитель k-миноров матрицы Φ_n. Поскольку множители d входят в выражение для миноров матрицы Φ_n мультипликативно (предложение 5.1), при подсчете d_j компонент, множитель d можно заменить всюду в выражении для Φ_n на d_j. При этом множители, взаимнопростые с d_j не имеют значения и мы можем перейти от Φ_n к $\Phi_n^{d_j}$.

Среди ненулевых k-миноров Φ_n всегда имеются d^k и $\prod_{i=1}^{k} a_i$ и значит как в случае d делящегося на 2 (тогда a_i нечетны), так и при d нечетном, множитель 2 отсутствует в наибольших общих делителях миноров, а значит отсутствуют и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-компоненты коядра Φ_n и компоненты соответствующие множителям, взаимнопростым с d. $\square$

Итак, для подсчета коядра Φ_n достаточно привести к диагональному виду матрицы $\Phi_n^{d_j}$ для каждого простого $d_j \neq 2$, делящего d.

Для упрощения записи предположим временно что d простое число.

Предложение 5.3 *Элементарными преобразованиями строк и столбов матрицу Φ_n^d можно привести к диагональному виду*

$$diag\{g_1, g_2, \ldots, g_n\},$$

где

$$g_i = \frac{V_i}{V_{i-1}}, \tag{43}$$

$$V_i = (d^k, d^{k-1}a_k, ..., d^{k-i}\prod_{j=1}^{i} a_{k-j+1}, ..., \prod_{j=1}^{k} a_j), \qquad a_i = 2i-1. \tag{44}$$

Доказательство. Пересечение двух первых строк и двух столбцов матрицы Φ_n^d имеет вид

$$\begin{matrix} d & a_1 \\ 0 & d \end{matrix}. \tag{45}$$

Положим $s_1 = d$, $g_1 = (s_1, a_1)$. Элементарными преобразованиями столбцов (45) преобразуется в

$$\begin{matrix} g_1 & 0 \\ P(s_1, a_1)d & \frac{s_1 d}{(s_1, a_1)} \end{matrix},$$

где $P(s_1, a_1)$ равно, с точностью до знака, знаменателю предпоследней подходящей дроби для s_1/a_1. Положим

$$s_2 = \frac{s_1 d}{(s_1, a_1)}, \qquad g_2 = (s_2, a_2).$$

Если s_1 взаимнопросто с a_1, то в первой строке стоит единица и, вычитая из второй строки первую умноженную на $P(s_1, a_1)d$ получаем, что лишь диагональные элементы не равны нулю и мы можем добавить еще одну строку и столбец.

Продолжаем действовать таким образом до тех пор, пока не встретится элемент a_{i_1} не взаимнопростой с d, а значит и с

$$s_{i_1} = \frac{s_{i_1-1}d}{(s_{i_1-1}, a_{i_1-1})}.$$

Положим $g_{i_1} = d^{w_1} = (s_{i_1}, a_{i_1})$. Получаем

$$\begin{matrix} g_{i_1} & 0 & 0 \\ P(s_{i_1}, a_{i_1})d & \frac{s_{i_1} d}{(s_{i_1}, a_{i_1})} & a_{i_1+1} \\ 0 & 0 & d \end{matrix}.$$

Откуда элементарными преобразованиями столбцов получаем

$$\begin{matrix} g_{i_1} & 0 & 0 \\ P(s_{i_1}, a_{i_1})d & g_{i_1+1} & 0 \\ 0 & P(s_{i_1+1}, a_{i_1+1})d & s_{i_1+2} \end{matrix}.$$

Поскольку a_i являются последовательными нечетными числами, a_{i_1+1} взаимнопрсто с d и таким образом $g_{i_1+1} = 1$, и вычитая из третьей строки вторую получим

$$\begin{matrix} g_{i_1} & 0 & 0 \\ 0 & g_{i_1+1} & 0 \\ P(s_{i_1}, a_{i_1})P(s_{i_1+1}, a_{i_1+1})d^2 & 0 & s_{i_1+2} \end{matrix} . \tag{46}$$

Если $(a_{i_1+2}, d) = 1$, то поступим как и с a_{i_1+1}, при этом g_{i_1+2} и s_{i_1+3} вычисляются по тем же формулам, а второй ненулевой элемент первого столбца опускается еще на одну строчку вниз и становится равным

$$P(s_{i_1}, a_{i_1})P(s_{i_1+1}, a_{i_1+1})P(s_{i_1+2}, a_{i_1+2})d^3.$$

Пусть a_{i_2} — первое после a_{i_1} нечетное число делящееся на d. Если $i_2 - i_1 \geq w_1$, то второй ненулевой элемент первого столбца (46) будет содержать множитель d^{w_1}, и элементарными преобразованиями строк его можно будет уничтожить. Если же $i_2 - i_1 < w_1$, то с a_{i_2} проделаем ту же процедуру что и с a_{i_1}. Положим w_2 равно степени d в (s_{i_2}, a_{i_2}). Если $w_2 < i_3 - i_2$, то при вычитании строк (уничтожающем ненулевой внедиагональный элемент под g_{i_2}) ненулевой внедиагональный элемент под g_{i_1} опустится на w_2 компонент вниз и теперь этот элемент будет содержать множитель $d^{i_2 - i_1}$. Если следующие a_j будут взаимнопросты с d, будем действовать как и ранее. Внедиагональный элемент под g_{i_1} будет опускаться и степень множителя в нем увеличиваться пока не достигнет w_1 и тогда, вычитанием строк, этот элемент можно будет уничтожить.

Пусть кратность вхождения множителя d в a_{j_1} равна k и пусть a_{j_2} следующее после a_{j_1} нечетное число делящееся на d^k. Для того чтобы описанный выше процесс приводил к диагонализации матрицы, достаточно чтобы число $j_2 - j_1$ было не меньше чем сумма степеней, с которыми множитель d входит в a_i, где $a_{j_1} \leq a_i < a_{j_2}$ (обозначим такую сумму через σ). В этой ситуации, внедиагональный элемент возникающий из-за наличия общего делителя $d^w = (s_{j_1}, a_{j_1})$, где $w < k$, исчезнет до j_2-ой строки. Если же a_{j_1} является первым нечетным числом делящимся на d^k, то внедиагональный элемент исчезнет уже потому, что $a_n = 1$.

Легко видеть, что

$$\sigma = \sum_{i=1}^{k-1} i(d^{k-i} - d^{k-i-1}) + k - 1 = \sum_{i=1}^{k-1} d^i = \frac{d^k - d}{d - 1} < d^k = j_2 - j_1.$$

Формулы (43), (44) для вычисления g_i следуют из рекуррентных соотношений

$$s_i = \frac{s_{i-1} d}{(s_{i-1}, a_{i-1})}, \qquad g_i = (s_i, a_i). \qquad \square$$

Следствие 5.4 *Коядро отображения Φ задаваемого матрицами Φ_n изоморфно следующей группе:*

$$G = \mathbb{Z}_{g_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{g_n},$$

где g_i вычисляется по формулам теоремы 5.3.

Таким образом доказана

Теорема 5.5 *Пусть d целое число, свободное от квадратов и $n \in \mathbb{N}$. Циклические гомологии кольца A_d вычисляются по формулам*

$$HC_{2n}(A_d|\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

$$HC_{2n+1}(A_d|\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/g_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/g_n\mathbb{Z},$$

при $d = 4k + 1$,

$$HC_{2n+1}(A_d|\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/g_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/g_n\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n,$$

при $d = 4k + 3$ или $d = 4k + 2$, где

$$g_i = \frac{V_i}{V_{i-1}},$$

$$V_i = (d^k, d^{k-1}a_k, ..., d^{k-i}\prod_{j=1}^{i} a_{k-j+1}, ..., \prod_{j=1}^{k} a_j), \qquad a_i = 2i - 1.$$

Круглые скобки обозначают наибольший общий делитель.

5.2 Периодические гомологии A_d

Предложение 5.6 *Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ базис в $\mathbb{Z}^n$, а $\{f_i\}_{i=1}^{n+1}$ базис в $\mathbb{Z}^{n+1}$, такие что матрица Φ_n^d имеет вид (41), и пусть $\{e'_i\}_{i=1}^{n}$ и $\{f'_i\}_{i=1}^{n+1}$ базисы, полученные в предложении 5.3) в которых Φ_n^d имеет диагональный вид. Обозначим через K число*

$$K = \frac{(d-1)}{(d-2)}[\log_d(2n+1)] - 1$$

(квадратные скобки обозначают целую часть), через e''_i проекцию e'_i на подпространство порожденное векторами

$$< e_{n-r}, \ldots, e_n >$$

и через f''_i проекцию f'_i на подпространство порожденное векторами

$$< f_{n-r}, \ldots, f_{n+1} > .$$

Если $r > K$, то e''_i выражаются через $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ и f''_i через $\{f_i\}_{i=1}^{n+1}$ по формулам, не зависящим от n.

Доказательство. Базисы $\{e'_i\}_{i=1}^n$ и $\{f'_i\}_{i=1}^{n+1}$ для различных n получаются в результате одинаковых процедур последовательной диагонализации. Несовпадение векторов e''_i и f''_i для различных n может быть вызвано лишь следующим “краевым эффектом”. С увеличением номера i кратность множителя d в s_i (см. выше) увеличивается, но если номер i небольшой, то кратность d в s_i может оказаться меньше кратности d в a_i. Оценим, начиная с какого номера r такой эффект будет невозможен. Это так, когда $\deg_d(a_1, \ldots, a_r)$, сумма кратностей d в $a_1, \ldots, a_r$ будет меньше r.

Будем предполагать, что $d \neq 2$, ибо иначе a_i не делятся на d и рассуждения тривиальны. Исходная матрица Φ_n^d имеет n строк и, значит, максимальная кратность множителя d в a_i не превосходит $L = [\log_d(2n+1)]$, где квадратные скобки обозначают целую часть. Обозначим через l число $[\log_d(r)]$.

Таким образом

$$\begin{aligned}\deg_d(a_1, \ldots, a_r) &\leq L + \sum_{k=1}^{l} k([\frac{r-1}{d^k}] - [\frac{r-1}{d^{k+1}}]) = \\ &= L + \sum_{k=1}^{l} [\frac{r-1}{d^k}] \leq L + \sum_{k=1}^{l} \frac{r-1}{d^k} = L + (r-1)\frac{(d^l-1)}{(d-1)d^l} = \\ &= L + \frac{(r-1)}{(d-1)} - \frac{(r-1)}{(d-1)d^l} \leq L + \frac{(r-1)}{(d-1)} - \frac{(r-1)}{(d-1)r} \leq L + \frac{(r-1)}{(d-1)}.\end{aligned}$$

Для выполнения условия

$$\deg_d(a_1, \ldots, a_r) \leq r$$

достаточно чтобы

$$L + \frac{(r-1)}{(d-1)} \leq r,$$

что равносильно

$$r \geq \frac{d-1}{d-2}L - 1. \quad \square$$

Пусть как и ранее $a_i = 2i-1$ последовательные нечетные числа. Положим

$$g_i^\infty = \lim_{k\to\infty}(d^k, a_i). \tag{47}$$

Теорема 5.7 *Периодические гомологии алгебры A_d вычисляются по формулам*

$$HP(A_d|\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Если $d = 4k+1$, то

$$HP(A_d|\mathbb{Z}) \cong \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}/g_i^\infty\mathbb{Z}.$$

Если $d = 4k+3$ или $d = 4k+2$, то

$$HP(A_d|\mathbb{Z}) \cong \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}/g_i^{\infty}\mathbb{Z} \oplus \prod_{j=1}^{\infty} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Доказательство. Предложение 5.6 показывает, что проективная система

$$\ldots \longleftarrow (\mathbb{Z}^{n-1} \xleftarrow{\Phi_{n-1}} \mathbb{Z}^n) \longleftarrow (\mathbb{Z}^n \xleftarrow{\Phi_{n+1}} \mathbb{Z}^{n+1}) \longleftarrow \ldots$$

задаваемая проекцией на дополнение к первому вектору базиса удовлетворяет условию Миттаг-Леффлера. Следовательно (см. предложение 5.1.9 [34])

$$HP_n(A_d) = \lim_{\leftarrow} HC_{n+2*},$$

откуда вытекает утверждение теоремы.□

5.3 Бивариантные периодические когомологии A_d

Будем придерживаться обозначений, введенных в предыдущем пункте.

Пусть $A = A_{d_1}$, $B = A_{d_2}$ алгебры целых квадратических чисел, введенные в п.5.1.1, причем d_1 и d_2 целые числа, свободные от квадратов. Подсчитаем периодические бивариантные (циклические) когомологии $HP(A_{d_1}, A_{d_2})$ (см. п. 3.2.1).

Периодические когомологии получаются как гомологии прямой предела комплексов S-перестановочных гомоморфизмов. Модули

$$\mathcal{BC}_* = \bigoplus_{i+j=n} \mathcal{BC}_{ij}$$

, а значит и гомоморфизмы $\mathrm{Hom}(\mathcal{BC}_*(A), \mathcal{BC}_*(B))$ раскладываются в прямую сумму, совместимую с переходом к прямому пределу. Таким образом, при подсчете периодических бивариантных когомологий нам достаточно рассматривать отображения

$$\mathcal{BC}_n(A) \to \mathcal{BC}_m(B)$$

сохраняющиеся при переходе к прямому пределу.

Как мы видели в п. 5.1.2, дифференциал в нечетных размерностях комплекса $\mathcal{BC}_*$ равен нулю. Следовательно, бивариантные когомологии будут составлены из трех следующих компонент.

1. Отображения
$$f_1 : \mathcal{BC}_{2k+1}(A) \to \mathcal{BC}_{2k-2m}(B),$$
дифференциал от которых равен нулю, то есть
$$(B+b)f_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad f_1(B+b) = 0.$$
Само f_1 не может быть ничьей границей.

2. Отображения
$$f_2 : \mathcal{BC}_{2k}(A) \to \mathcal{BC}_{2k-2m-1}(B),$$
не являющиеся границами (циклами они будут автоматически), то есть отображения f_2 надо сфакторизовать по множеству отображений вида $(B+b)f_2' + f_2''(B+b)$, где
$$f_2' : \mathcal{BC}_{2k}(A) \to \mathcal{BC}_{2k-2m}(B), \qquad f_2'' : \mathcal{BC}_{2k-1}(A) \to \mathcal{BC}_{2k-2m-1}(B).$$

3. Отображения $f_3' + f_3''$, где
$$f_3' : \mathcal{BC}_{2k}(A) \to \mathcal{BC}_{2k-2m}(B), \qquad f_3'' : \mathcal{BC}_{2k-1}(A) \to \mathcal{BC}_{2k-2m-1}(B),$$
не являющиеся границами и такие что $(B+b)f_3' + f_3''(B+b) = 0$.

Первая компонента не дает вклада в когомологии, поскольку составляющие отображений $\mathbb{Z}$-линейны и должны равняться нулю на образе дифференциала, но коядро дифференциала не содержит $\mathbb{Z}$-компонент (рассуждаем как и в доказательстве предложения 5.2) и, значит, соответствующие отображения тождественно нулевые.

Вклад в когомологии второй и третей компонент суть коядра отображений свободных $\mathbb{Z}$-модулей. Для второй компоненты это отображение из множества пар $\{f_2', f_2''\}$ в множество $\{f_2\}$. Для третей из множества $\{f\}$ в множество пар
$$\{f_2', f_2'' \mid (B+b)f_3' + f_3''(B+b) = 0\}.$$
Поскольку $\mathcal{BC}_m(A)$ канонически раскладывается в прямую сумму свободных конечно-порожденных $\mathbb{Z}$-модулей, вышеописанные свободные модули также распадаются в прямую сумму конечно-порожденных свободных модулей.

Заметим, что для подсчета d_i-компонент кручения коядра, где d_i — простое число, делящее d, можно с самого начала полагать $d = d_i$. Это следует из того, что локализация по идеалу (d_i) — точный функтор (см. [1]) и, значит, все равно, сначала локализовать, а потом считать коядро отображения, или сначала подсчитать коядро, а потом локлизовать (последний вариант очевидно дает d_i-компоненту кручения). Для простоты записи предположим временно, что d простое число. Воспользовавшись предложением 5.3, приведем матрицы дифференциалов к диагональному виду. Поскольку отображения сохраняются при переходе к прямому пределу, и поскольку каждое отображение раскладывается в прямую сумму своих копонент, то выбирая достаточно большой номер m, для каждой компоненты можно считать, что отображения f_i действуют в подпространствах $\mathcal{BC}_m$, свободных от "краевых эффектов" (см. предложение 5.6), то есть соответствующие базисы будут S-совместимыми.

Таким образом, при $d_1 = 4n+1$ или $d_2 = 4n+1$ вклад второй компоненты в кручение m-ых когомологий будет

$$\bigoplus_{m=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}/(g'_i, g''_{i+m})\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{m=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}/(g'_{i+m}, g''_i)\mathbb{Z},$$

где

$$g'_i = \lim_{k\to\infty}(d_1^k, a_i) \qquad g'_i = \lim_{k\to\infty}(d_2^k, a_i)$$

(ср. (47)). Действительно, каждая компонента отображения f^{ij}, переводящая базисный вектор f''_i в e''_j (см. предложение 5.6) добавляет в когомологии прямой множитель $\mathbb{Z}/(g'_i, g''_j)\mathbb{Z}$. Кроме того, компоненты заданные на ядре дифференциала добавляют счетное число экземпляров $\mathbb{Z}$.

Если же $d_1 \neq 4n+1$ и $d_2 \neq 4n+1$, то в когомологии добавляется еще прямое произведение счетного числа экземпляров $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Вклад третей компоненты в когомологии будет нулевым, поскольку после приведения к диагональному виду дифференциалов, их ограничения на базисные вектора будут состоять в умножении на целые числа. Таким образом, условие цикла приобретает вид

$$\alpha f'_3 - (-1)^n f''_3\beta = 0,$$

и легко видеть, что существует f_3, такое что $\alpha f_3 = f''_3$ и $(-1)^n\beta f_3 = f'_3$, и значит $f'_3 + f''_3$ будет кограницей.

Итак, нами доказано следующее утверждение

Теорема 5.8 *Бивариантные периодические когомологии $HP(A_{d_1}, A_{d_2})$ пары алгебр A_{d_1} и A_{d_2}, где d_1 и d_2 — целые числа, свободные от квадратов равны нулю. Кручение $HP(A_{d_1}, A_{d_2})$ при $d_1 = 4n+1$ или $d_2 = 4n+1$ равно*

$$\bigoplus_{m=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}/(g'_i, g''_{i+m})\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{m=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}/(g'_{i+m}, g''_i)\mathbb{Z},$$

и при $d_1 \neq 4n+1$ и $d_2 \neq 4n+1$ равно

$$\bigoplus_{m=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}/(g'_i, g''_{i+m})\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{m=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{Z}/(g'_{i+m}, g''_i)\mathbb{Z} \oplus \prod_{j=1}^{\infty}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

5.4 Кольцо $Z(Q[\sqrt{D}, \sqrt{-1}])$

5.4.1

Определение 5.1 *Гауссовыми числами называются комплексные числа вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{Z}$.*

Некоторые свойства гауссовых чисел (будем обозначать их через $\Gamma = \mathbb{Z}[i]$) приведены в приложении В.

Пусть $D \in \Gamma$ свободно от квадратов.

Определение 5.2 *Целыми квадратическими гауссовыми числами будем называть комплексные числа вида $A + B \cdot \sqrt{D}$, где $A, B \in \mathbb{Q}[i]$, являющиеся корнями многочленов вида $X^2 + PX + Q$, где $P, Q \in \Gamma$. Будем обозначать их через A_D.*

Поскольку представление числа $Y \in A_D$ в форме $Y = A + B \cdot \sqrt{D}$ единственно, с точностью до умножения на единицу, каждому целому квадратическому Y можно поставить в соответствие его сопряженное: $\bar{Y} = A - B\sqrt{D}$, которое является вторым корнем того же минимального многочлена

$$F = (X - A)^2 - B^2 D$$

По определению целого числа, коэффициенты $F(X)$ должны быть целыми:

$$\begin{cases} a_1^2 - a_2^2 - (b_1^2 - b_2^2)d_1 + 2b_1b_2d_2 \in \mathbb{Z} \\ 2a_1a_2 - (b_1^2 - b_2^2)d_2 - 2b_1b_2d_1 \in \mathbb{Z} \\ 2a_1 \in \mathbb{Z}, \quad 2a_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$A = a_1 + ia_2$, $B = b_1 + ib_2$, $D = d_1 + id_2$. Или

$$\begin{cases} (b_1^2 - b_2^2)d_1 - 2b_1b_2d_2 = m \\ (b_1^2 - b_2^2)d_2 + 2b_1b_2d_1 = n \\ a_1 = k/2, \quad a_2 = l/2 \end{cases} \tag{48}$$

и m, n зависят от a_1, a_2 следующим образом [2]:

a_1	a_2	m	n	n^2+m^2
$(2k+1)/2$	k	$(4k+1)/4$	k	$(8k+1)/16$
k	$(2k+1)/2)$	$(4k-1)/4$	k	$(8k+1)/16$
$(2k+1)/2$	$(2k+1)/2$	k	$(2k+1)/2$	$(4k+1)/4$
k	k	k	k	k

[2]Здесь и далее, символ k используется для обозначения произвольного целого числа. Например, $(m, n) \sim (\frac{4k+1}{4}, k)$ следует понимать так: существуют m' и $n' \in \mathbb{Z}$ такие что $m = \frac{4m'+1}{4}$ и $n = n'$.

Из (48) получаем:

$$|b_1| = \sqrt{\frac{\sqrt{(d_1^2+d_2^2)(m^2+n^2)} + (d_1m+d_2n)}{2(d_1^2+d_2^2)}} \tag{49}$$

$$|b_2| = \sqrt{\frac{\sqrt{(d_1^2+d_2^2)(m^2+n^2)} - (d_1m+d_2n)}{2(d_1^2+d_2^2)}} \tag{50}$$

5.4.2 Дискриминанты.

Ясно, что A_D — модуль над $\mathbb{Z}$ или над Γ. Ясно также,что его размерность над Γ равна двум, а над $\mathbb{Z}$— четырем.

В этой главе будет явно построен Γ-базис $\{\omega_1, \omega_2\}$ для A_D и, тогда очевидно $\{\omega_1, i\omega_1, \omega_2, i\omega_2\}$ будет $\mathbb{Z}$-базисом рассматриваемого модуля.

Определение 5.3 *: Пусть $X \in A_D$, тогда положим*

$$Tr(X) := X + \bar{X}$$

где $\bar{X}$ сопряженное к X в смысле A_D.

Определение 5.4 *: Дискриминантом пары (X_1, X_2), где $X_1, X_2 \in A_D$ назовем число:*

$$discr(X_1, X_2) = \det \begin{pmatrix} Tr(X_1^2) & Tr(X_1X_2) \\ Tr(X_1X_2) & Tr(X_2^2) \end{pmatrix}$$

Как коэффициент минимального многочлена $Tr(X)$ является гауссовым числом, а значит и $discr(X_1, X_2) \in \Gamma$.

Заметим, что:

$$\begin{pmatrix} Tr(X_1^2) & Tr(X_1X_2) \\ Tr(X_1X_2) & Tr(X_2^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & \bar{X}_1 \\ X_2 & \bar{X}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ \bar{X}_1 & \bar{X}_2 \end{pmatrix}$$

И мы получаем эквивалентное определение дискриминанта:

$$discr(X_1, X_2) = \det{}^2 \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ \bar{X}_1 & \bar{X}_2 \end{pmatrix}$$

Пусть теперь (X_1, X_2) базис A_D, а (Y_1, Y_2) пара Γ-линейно независимых целых чисел, тогда

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \quad \text{где } \alpha_{ij} \in \Gamma$$

Далее:

$$\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ \bar{Y}_1 & \bar{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ \bar{X}_1 & \bar{X}_2 \end{pmatrix} A^t$$

$$\Rightarrow discr(Y_1, Y_2) = \det{}^2 \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ \bar{X}_1 & \bar{X}_2 \end{pmatrix} \det{}^2(A) = discr(X_1, X_2) \det{}^2(A)$$

Таким образом, доказано следующее предложение:

Предложение 5.9 *Дискриминантом пары линейно независимых целых квадратических чисел является гауссово число, отличающееся от дискриминанта базиса на полный квадрат:*

$$discr(Y_1, Y_2) = \alpha^2 \cdot discr(X_1, X_2)$$

если (X_1, X_2) *базис,а* $\alpha \in \Gamma$.

Следствие 5.10 *Если дискриминант пары* (Y_1, Y_2), $Y_1, Y_2 \in A_D$ *свободен от квадратов то* (Y_1, Y_2) *можно принять за базис модуля целых квадратических чисел.*

5.4.3 Построение базиса A_D.

В конце п. 5.4.1 мы получили, что для элементов A_D, выражения (49) и (50) должны быть рациональны:

$$\frac{q_1}{q_2} = \sqrt{\frac{\sqrt{\mu\delta} \pm (d_1 m + d_2 n)}{2\delta}} \in \mathbb{Q} \qquad (51)$$

$$\delta = d_1^2 + d_2^2, \quad \mu = m^2 + n^2 \quad D = d_1 + id_2$$

Заметим, что поскольку D свободно от квадратов, из предложения В.7 следует, что q_2 равно либо 2 либо 1. Действительно, если $p^2 | \delta$ (p простое рациональное), то $p|d_1$ и $p|d_2$, и q_1, q_2 можно разделить на p. Максимально возможная степень двойки в знаменателе — три : множитель 2^3 может появиться когда $\mu = \frac{8k+1}{16}$, но после извлечения корня в q_2 может войти только первая степень 2.

Наши построения будем осуществлять в зависимости от остатков от деления d_1 и d_2 на 4.

5.4.4 Случай $(d_1, d_2) = (4n \pm 1, 4n \pm 1)$.

Тогда, $d_1^2 + d_2^2 = \delta \sim 4n + 2$. Если

$$(a_1, a_2) \sim (\frac{2k+1}{2}, k), \ \ (k, \frac{2k+1}{2}) \text{ или } (\frac{2k+1}{2}, \frac{2k+1}{2})$$

Тогда $\mu \sim \frac{8k+1}{16}$ или $\mu \sim \frac{4k+1}{4}$ и корень $\sqrt{\mu\delta}$ не извлекается в $\mathbb{Q}$. Что означает, что a_1 и a_2 целые и чтобы, $\sqrt{\mu\delta}$ все же извлекся, пара (n, m) должна иметь форму $(2k+1, 2k+1)$ или $(2k, 2k)$. При этом выражение (51) принимает вид

$$\frac{q_1}{q_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot \sqrt{...} \pm 2(...)}{2 \cdot 2 \cdot (2k+1)}} \in \mathbb{Q}$$

и, следовательно, $q_2 = 1$. Итак, для каждого $\nu = A + B \cdot\sqrt{D}$, $\nu \in A_D$ имеем $A, B \in \Gamma$ и

$$\{1,\sqrt{D}\}$$

можно принять в качестве базиса.

5.4.5 Случай $(d_1, d_2) \sim (2n, 2n + 1)$. Тогда $\delta \sim 4k + 1$.

Если $\mu \sim \frac{8k+1}{16}$, то

$$\frac{q_1}{q_2} \sim \sqrt{\frac{\frac{1}{4}(4k+1) \pm (2k\frac{(4k\pm1)}{4} + k(2k+1))}{2(4k+1)}} \sim \sqrt{\frac{2k+1}{8(4k+1)}}$$

и корень не извлекается в $\mathbb{Q}$.

Аналогично, при $\mu \sim \frac{4k+1}{4}$

$$\frac{q_1}{q_2} \sim \sqrt{\frac{\frac{1}{4}(4k+1) \pm (2k \cdot k + (2k+1)\frac{(2n+1)}{2})}{2(4k+1)}}$$

Ясно, что числитель дроби под корнем — целое число, и значит двойка в знаменателе должна сократиться. Получаем, как и в предыдущем случае, $q_2 = 1$, так что

$$\{1,\sqrt{D}\}$$

является базисом.

5.4.6 Случай $d = (2k+1, 4k)$. В двух следующих случаях, мы явно предъявляем пару целых квадратических чисел, которые будут являться базисом, поскольку дискриминант, равный δ свободен от квадратов.

d_1	d_2	базис	A_D
$4k+1$	$4k$	1	$1/2 + \sqrt{D}/2$
$4k-1$	$4k$	1	$i/2 + \sqrt{D}/2$

Нам остается проверить, что числа составляющие базис действительно принадлежат A_D. В самом деле, коэффициенты их минимальных многочленов целые:

$$(X - 1/2)^2 - \frac{1}{4}D = X^2 - X + \frac{1}{4} - \frac{4n+1+4ik}{4} \sim X^2 - X - n - ik$$
$$(X - i/2)^2 - \frac{1}{4}D = X^2 - iX - \frac{1}{4} - \frac{4n-1+4ik}{4} \sim X^2 - iX - n - ik$$

5.4.7 Случай $(d_1, d_2) \sim (2n+1, 4n+2)$.

Покажем, что базисом является

$$(X_1, X_2) = (1, \frac{i+1}{2} + \frac{i+1}{2}\sqrt{D})$$

Имеем:

$$(X - \frac{i+1}{2})^2 - (\frac{i+1}{2})^2 D =$$
$$= X^2 - (i+1)X + \frac{i}{2} - \frac{i}{2}(2n+1+i(4n+2)) \sim X^2 - (i+1)X + k$$

и значит $X_2 \in A_D$ В то же время, $discr(X_1, X_2) = 2iD$ не свободен от квадратов: $(1+i)^2 | 2iD$. Докажем следующее предложение:

Предложение 5.11 *Пусть $D = d_1 + id_2$, $d_1 \sim 2n+1$, $d_2 \sim 4n+2$ и*

$$Y_1 = A_1 + B_1 \cdot \sqrt{D} \qquad Y_2 = A_2 + B_2 \cdot \sqrt{D} \in A_D$$

некоторые линейно независимые числа.

Тогда $discr(Y_1, Y_2)$ делится на $2iD$. Как следствие получаем, что (X_1, X_2) базис A_D.

Доказательство: Достаточно доказать что

$$|discr(Y_1, Y_2)| > |D|$$

Во-первых, если $(a_1, a_2) \sim (k, \frac{2k+1}{2})$ или $(\frac{2k+1}{2}, k)$, то

$$\mu \sim \frac{(8k+1)}{16} \quad \text{и} \quad \sqrt{\mu\delta} \sim \sqrt{\frac{(8k+1)}{16}(8k+5)}$$

и для того чтобы $\sqrt{\mu\delta}$ было рационально, μ должно записываться в виде $\frac{8k+5}{16}s^2$, где $s \sim 2k+1$, поскольку δ свободно от квадратов[3]. Легко видеть, что $s^2 \sim (8n+1)$, и, следовательно, получаем противоречие, поскольку $8n+1$ не может принимать вида $(8n+5)s^2$.

Таким образом, либо $(a_1, a_1) \sim (k, k)$, либо $(a_1, a_1) \sim (\frac{(2k+1)}{2}, \frac{(2k+1)}{2})$. И, в любом случае, $b_1, b_2 \sim k/2$.

Во-вторых, первое равенство системы (48) можно переписать следующим образом:

$$\left(\frac{b'^2_1 + b'^2_2}{4}\right) d_1 - \frac{b'_1 b'_2}{2} d_2 \in \mathbb{Z},$$
$$\text{где} \quad b_i = \frac{b'_i}{2}, \quad b' \in \mathbb{Z}$$

[3]Как и ранее, если $p^2 | \delta$, то из предложения B.7 следует, что d_1 и d_2 можно разделить на p, что эквивалентно сокращению дроби (51).

В этом выражении второе слагаемое — целое число, и поскольку d_1 нечетно, ${b'}_1 \equiv {b'}_2 \pmod 2$. Кроме того, вследствие второго уравнения системы (48)

$$(\frac{{b'}_1^2+{b'}_2^2}{4})d_2 + \frac{{b'}_1{b'}_2}{2}d_1 \sim \begin{cases} k & \text{, если } (a_1,a_2) \sim (k,k) \\ \frac{(2k+1)}{2} & \text{, если } (a_1,a_1) \sim (\frac{(2k+1)}{2}, \frac{(2k+1)}{2}) \end{cases}$$

следовательно, ${b'}_1$ и ${b'}_2$ нечетны тогда и только тогда, когда $(a_1,a_1) \sim (\frac{(2k+1)}{2}, \frac{(2k+1)}{2})$.

В-третьих, имеем

$$discr(Y_1,Y_2) = D(2B_1A_2 - 2B_2A_1)^2$$

Если A_i, $B_i \in \Gamma$, то очевидно $2D$ делит $discr(Y_1,Y_2)$. Если же $B_1 \sim A_1 \sim (\frac{(2k+1)}{2}, \frac{(2k+1)}{2})$ и $B_2 \sim A_2 \sim (k,k)$ или наоборот, то

$$2(B_1A_2 - B_2A_1) = \frac{2}{2}(C_1A_2 - C_2A_1)$$

$C_i \in \Gamma$. Поскольку

$$ReC_i \equiv ImC_i \pmod 2$$

то 2 делит $|C|^2$ и $|C|^2$. Следовательно,

$$(1+i)|C_i \quad \text{et} \quad D(1+i)^2|discr(Y_1,Y_2)$$

Что и требовалось доказать.
В-четвертых, если $B_i \sim A_i \sim (\frac{(2k+1)}{2}, \frac{(2k+1)}{2})$, при $i=1$ или 2, то, как и ранее,

$$discr(A_1+B_1\sqrt{D}, A_2+B_2\sqrt{D}) = D(2B_1A_2-2B_2A_1)^2 = \frac{1}{4}D(C_1C_2-C_3C_4)^2 \quad (52)$$

где $C_i \in \Gamma$ и ImC_i, ReC_i нечетны. Несложно проверить, что

$$(2k-1,2k-1) \sim \begin{cases} (i-1)(2k-1,2k) \\ (i-1)(2k,2k-1) \end{cases}$$

в зависимости от остатка деления на[4] 4. И каждое C_i фигурирующее в (52) можно заменить на $(i-1)C'_i$.

Далее,

$$(2k-1,2k)(2k-2,2k) \sim (2k,2k-2)(2k,2k-1) \sim (2k-1,2k)$$
$$(2k-1,2k)(2k,2k-1) \sim (2k,2k-1)$$

[4]Действительно,

$$\frac{(2k-1,2k-1)}{i-1} = -\frac{1}{2}((2n-1)-(2k-1),(2n-1)+(2k-1))$$

Таким образом,

$$discr(Y_1, Y_2) = \frac{(1-i)^2}{2}[...]$$

где

$$[...] \sim \begin{cases} (2n, 2n-1) - (2n, 2n-1) \\ (2n-1, 2n) - (2n, 2n-1) \\ (2n-1, 2n) - (2n-1, 2n) \end{cases}$$

В любом случае, ясно, что $|[...]| > 1$, тогда учитывая $|\frac{(i-1)^2}{2}| = 1$ получаем искомое утверждение.

Теорема 5.12 *(ср. [3]) Пусть $D = d_1 + id_2 \in \Gamma$ свободно от квадратов. Тогда числа 1 и ω составляют базис Γ-модуля A_D, причем ω может быть выбрана следующим образом:*

d_1	d_2		ω	ω^2
k	$2k+1$	1	$\sqrt{D}$	D
$4k+1$	$4k$	1	$1/2 + \sqrt{D}/2$	$\omega_2 + \frac{D-1}{4}$
$4k-1$	$4k$	1	$i/2 + \sqrt{D}/2$	$i\omega_2 + \frac{D+1}{4}$
$2k+1$	$4k+2$	1	$\frac{i+1}{2} + \frac{i+1}{2}\sqrt{D}$	$(1+i)\omega_2 + i\frac{D-1}{2}$

5.5 Циклические гомологии кольца $Z(Q[\sqrt{D},\sqrt{-1}])$

5.5.1 Вычисление гомологий ведется по той же схеме что и в действительном случае, и мы ограничимся краткими комментариями.

Как и в п.5.1, воспользуемся нормализованным бикомплексом $\mathcal{BC}(A_D)$ (см. теорему 1.1). Элементы $A_D \otimes \overline{A}_D^n$ записываются единственным образом в виде $(a_0, \overbrace{\omega, ..., \omega}^{n})$.

$$b(a\omega + b, \overbrace{\omega, ..., \omega}^{n}) = \begin{cases} (2a\omega^2 + 2b\omega - \xi(a\omega + b), \overbrace{\omega, ..., \omega}^{n-1}) & \text{, если } n = 2k \\ 0 & \text{, если } n = 2l + 1 \end{cases}$$

где ξ обозначает коэффициент с которым ω входит в ω^2.

$$B(a\omega + b, \overbrace{\omega, ..., \omega}^{n}) = \begin{cases} (a(n+1), \overbrace{\omega, ..., \omega}^{n+1}) & \text{, если } n = 2l \\ 0 & \text{, если } n = 2l + 1 \end{cases}$$

В нечетной размерности дифференциал тотального комплекса равен нулю.

5.5.2 Случай $(d_1, d_2) \sim (k, 2k+1)$ Как и ранее $d_1 + id_2 = D$ и в качестве базиса выбираем $\{1, \sqrt{D}\}$. В четной размерности:

$$b(a\omega + b, \omega, ..., \omega) = (2b\omega + 2aD, \omega, ..., \omega)$$

Матрица дифференциала

$$Tot_{2n}\mathcal{BC}_* \longrightarrow Tot_{2n-1}\mathcal{BC}_*$$

записывается следующим образом:

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & 2 & 0 & & & & & & & & & & \\
2D & 0 & 2n-1 & & & & & & & & & & \\
 & & 0 & 2 & 0 & & & & & & & & \\
 & & 2D & 0 & 2n-3 & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 2 & 0 & & & & & & \\
 & & & & & ... & ... & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & ... & ... & & & & & \\
 & & & & & & & 2D & 0 & 3 & & & \\
 & & & & & & & & & 0 & 2 & 0 & \\
 & & & & & & & & & 2D & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)$$

Как и в п. 5.1, вычеркнем строки и столбцы, содержащие лишь 2. В гомологиях каждое такое вычеркивание добавляет прямое слагаемое $\Gamma/2\Gamma$. Далее, можно заменить $2D$ на D поскольку предложение, аналогичное предложению 5.2 может быть доказано и для комплексного случая (доказательство повторяет рассуждение приведенное в п. 5.1 с небольшими изменениями для комплексного случая, см. далее), а $2k-1$ очевидно не делится на 2. Получаем:

$$\begin{pmatrix} D & 2n-1 & & & & & & & \\ & D & 2n-3 & & & & & & \\ & & \dots & \dots & & & & & \\ & & & \dots & \dots & & & & \\ & & & & D & 3 & & & \\ & & & & & D & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{53}$$

И, значит, гомологии в четных размерностях изоморфны $\Gamma \oplus \Gamma$.

5.5.3 Случай $(d_1, d_2) \sim (4k+1, 4k)$. Тогда базисом является $\{1, \frac{1+\sqrt{D}}{2}\}$. В четных размерностях:

$$b(a\omega + b, \omega, ..., \omega) = ((a+2b)\omega + a\frac{D-1}{2} - b, \omega, ..., \omega)$$

И дифференциал задается матрицей :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & & & & & & & & & & \\ \frac{D-1}{2} & -1 & 2n-1 & & & & & & & & & & \\ & 0 & 1 & 2 & & & & & & & & & \\ & & \frac{D-1}{2} & -1 & 2n-3 & & & & & & & & \\ & & & 0 & 1 & 2 & & & & & & & \\ & & & & & \dots & \dots & & & & & & \\ & & & & & & \dots & \dots & & & & & \\ & & & & & & 0 & 1 & 2 & & & & \\ & & & & & & & \frac{D-1}{2} & -1 & 3 & & & \\ & & & & & & & & 0 & 1 & 2 & & \\ & & & & & & & & & \frac{D-1}{2} & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

которая преобразуется к виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & & & & & & & \\ 0 & -D & 0 & -2(2n-1) & & & & & & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & & & & & & \\ & & 0 & -D & 0 & -2(2n-3) & & & & & & & \\ & & & & 1 & 0 & & & & & & & \\ & & & & & \dots & \dots & & & & & & \\ & & & & & & \dots & \dots & & & & & \\ & & & & & & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & & & & 0 & -D & 0 & -6 & & \\ & & & & & & & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & & & & & 0 & -D & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычеркивая столбцы и строки содержащие лишь единицу (гомологии при этом не изменяются) заменим $2(2k-1)$ на $(2k-1)$ (в рассматриваемом случае $|D|^2$ не делится на 2 и, следовательно, $(D, 2(2k+1)) = (D, 2k+1)$). И мы опять получаем матрицу (53).

5.5.4 Случай $(d_1, d_2) \sim (4k-1, 4k)$.

Тогда базисом будет $\{1, \frac{i+\sqrt{D}}{2}\}$. В четных размерностях

$$b(a\omega + b, \omega, ..., \omega) = ((ai + 2b)\omega + a\frac{D+1}{2} - bi, \omega, ..., \omega)$$

и аналогичные вычисления приводят к тому же результату, что и в предыдущем случае.

5.5.5 Случай $(d_1, d_2) \sim (2n+1, 4n+2)$.

Базисом является $\{1, \frac{i+1}{2} + \frac{i+1}{2}\sqrt{D}\}$. В четных размерностях :

$$b(a\omega + b, \omega, ..., \omega) = (a(i+1)\omega + 2b\omega + ai(D-1) - b(i+1), \omega, ..., \omega)$$

Матрица дифференциала:

$$\begin{pmatrix}
i+1 & 2 & & & & & & \\
i(D-1) & -1-i & 2n-1 & & & & & \\
 & 0 & i+1 & 2 & & & & \\
 & & i(D-1) & -1-i & 2n-3 & & & \\
 & & & 0 & i+1 & 2 & & \\
 & & & ... & ... & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & ... & ... & & \\
 & & & & 0 & i+1 & 2 & \\
 & & & & & i(D-1) & -1-i & 1 \quad 0
\end{pmatrix}$$

Произведя обычное преобразование и вычеркивая строки содержащие лишь $i+1$ с соответствующими столбцами (что добавляет в гомологии прямое слагаемое $\Gamma/i+1\Gamma$), получаем матрицу :

$$\begin{pmatrix}
-(i+1)D & (i-1)(2n-1) & & & \\
 & -(i+1)D & (i-1)(2n-3) & & \\
 & & -(i+1)D & (i-1)(2n-5) & \\
 & & & ... & ...
\end{pmatrix}$$

Теперь можно поделить строки на $i+1$, добавляя в гомологии еще одно прямое[5] слагаемое $\Gamma/i+1\Gamma$. Действительно, единственным эффектом множителя $(i+1)$ является то, что каждая компонента элементов образа делится на $i+1$. Итак, мы снова получаем матрицу (53).

[5] $\Gamma/i+1\Gamma$ входит в гомологии как прямое слагаемое, поскольку $(2k-1)$ не делится на $i+1$

5.5.6 Утверждения, аналогичные предложению 5.3 и предложению 5.6 имеют место и для гауссовых чмсел. Элементарные свойства Γ (см. приложение B) позволяют нам практически дословно перенести доказательства предложений 5.3 и 5.6 на случай гауссовых чисел. Соответствующие оценки сохраняются поскольку нечетное число m делится на простое $\gamma \in \Gamma$ в смысле гауссовых чисел тогда и только тогда, когда m делится на простое целое число $|\gamma|$ в смысле целых чисел.

Предложение 5.13 *Пусть функция Φ задается матрицей (53). Тогда ядро Φ изоморфно*

$$\Gamma/\overline{g}_1\Gamma \oplus \cdots \oplus \Gamma/\overline{g}_n\Gamma$$

где

$$\overline{g}_i = \frac{\overline{V}_i}{\overline{V}_{i-1}},$$

$$\overline{V}_i = (D^k, D^{k-1}a_k, ..., D^{k-i}\prod_{j=1}^{i} a_{k-j+1}, ..., \prod_{j=1}^{k} a_j).$$

Как следствие, получаем:

Теорема 5.14 *Пусть $D = d_1 + id_2$ гауссово число, свободное от квадратов; $n \in \mathbb{N}$. Циклические гомологии кольца A_D задаются формулами*

$$HC_{2n}(A_D|\Gamma) = \Gamma \oplus \Gamma,$$

$$HC_{2n-1}(A_D|\Gamma) = \Gamma/\overline{g}_1\Gamma \oplus \cdots \oplus \Gamma/\overline{g}_n\Gamma \oplus (\Gamma/2\Gamma)^n,$$

при $d_2 = 2k+1$,

$$HC_{2n-1}(A_D|\Gamma) = \Gamma/\overline{g}_1\Gamma \oplus \cdots \oplus \Gamma/\overline{g}_n\Gamma,$$

при $\{d_1, d_2\} = \{4k+1, 4l\}$,

$$HC_{2n-1}(A_D|\Gamma) = \Gamma/\overline{g}_1\Gamma \oplus \cdots \oplus \Gamma/\overline{g}_n\Gamma \oplus (\Gamma/(i+1)\Gamma \oplus \Gamma/(i+1)\Gamma)^n,$$

при $\{d_1, d_2\} = \{2k+1, 4l+2\}$, где

$$\overline{g}_i = \frac{\overline{V}_i}{\overline{V}_{i-1}},$$

$$\overline{V}_i = (D^k, D^{k-1}a_k, ..., D^{k-i}\prod_{j=1}^{i} a_{k-j+1}, ..., \prod_{j=1}^{k} a_j), \qquad a_i = 2i-1.$$

Как и ранее, круглые скобки обозначают наибольший общий делитель.

Замечание: Хотя

$$\Gamma_2 \cong \Gamma_{i+1} \oplus \Gamma_{i+1} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

как $\mathbb{Z}$-модули, как Γ-модули они не изоморфны.

A Приложение: Лемма о возмущении

Лемма о возмущении впервые была рассмотрена в работе Р. Брауна [15]. Широкую известность получила после работ В. К. А. М. Гугенхейма, Л. Ламбе, и Дж. Сташеффа [25], [26], [27].

A.1 Деформационные ретракции

Определение A.1 *Деформационной ретракцией дифференциально-градуированного модуля (комплекса) $M = (M_*, d)$ к модулю $L = (L_*, d^L)$ (говорят также, что M стягивается к L) называется набор морфизмов комплексов f, ∇ и гомотопии h комплекса M*

$$L \underset{\nabla}{\overset{f}{\leftrightarrows}} M; h,$$

причем выполнены следующие условия

$$f \circ \nabla = id_L, \qquad d(h) = dh + hd = \nabla \circ f - id_M.$$

Деформационная ретракция называется специальной если выполнены дополнительные условия (так называемые “граничные условия”) $h\nabla = 0$, $fh = 0$, $hh = 0$. Любую деформационную ретракцию можно без потери общности считать специальной. Действительно, для выполнения первого условия достаточно заменить h на $hd(h)$, для выполнения второго h достаточно заменить на $d(h)h$ и для выполнения третьего достаточно заменить h на hdh; при этом остальные условия на операторы остаются выполнеными.

Предложение A.1 *Пусть*

$$(A', d') \underset{g_1}{\overset{f_1}{\leftrightarrows}} (A, d; h_1) \quad \text{и} \quad (A'', d'') \underset{g_2}{\overset{f_2}{\leftrightarrows}} (A', d'; h_2)$$

— специальные деформационные ретракции. Тогда существует специальная деформационная ретракция

$$(A'', d'') \underset{g}{\overset{f}{\leftrightarrows}} (A, d; h).$$

Другими словами, композиция специальных деформационных ретракций — специальная деформационная ретракция.

Доказательство. Положим $f = f_2 f_1$ и $g = g_1 g_2$, тогда $fg = f_2 f_1 g_1 g_2 = \mathrm{id}_{A''}$;

$$\begin{aligned} gf &= g_1 g_2 f_2 f_1 = g_1(d' h_2 + h_2 d' + 1) f_1 = \\ &= g_1 d' h_2 f_1 + g_1 h_2 d' f_1 + g_1 f_1 = d g_1 h_2 f_1 + g_1 h_2 f_1 d + dh_1 + h_d + 1 = \\ &= d(g_1 h_2 f_1 + h_1) + (g_1 h_2 f_1 + h_1) d. \end{aligned}$$

Положим $h = g_1 h_2 f_1 + h_1$, тогда $gf - 1 = hd + dh$, и нам остается лишь проверка выполнения "граничных условий":

$$
\begin{aligned}
&hh = (g_1h_2f_1 + h_1)(g_1h_2f_1 + h_1) = \\
&\quad = h_1h_1 + h_1g_1h_2f_1 + g_1h_2f_1h_1 + g_1h_2f_1g_1h_2f_1 = g_1h_2h_2f_1 = 0.
\end{aligned}
$$

Наконец, $fh = f_2f_1(g_1h_2f_1 + h_1) = 0$ и $hg = (g_1h_2f_1 + h_1)g_1g_2$. $\square$

A.2 Возмущение

Пусть $M = (M_*, d)$ — дифференциально-градуированный модуль и пусть $\delta\colon M \to M$ отображение степени -1, причем $\hat{d} = d + \delta$ по-прежнему дифференциал комплекса M ("возмущенный дифференциал") т.е $\hat{d}^2 = 0$. Введем следующую естественную убывающую фильтрацию. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра некоммутативных многочленов от h, δ и d с фильтрацией по степеням δ

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^0 \supset \mathcal{A}^1 \supset \mathcal{A}^2 \supset \dots$$

Идеалы в $End(M)$, $\mathrm{Hom}(M, L)$, $\mathrm{Hom}(L, M)$ порожденные образом $\mathcal{A}^n$ при отображениях

$$\mathcal{A} \ni \kappa \to \kappa \in End(M),$$

$$\kappa \to f \cdot \kappa \in \mathrm{Hom}(M, L),$$

$$\kappa \to \kappa \cdot \nabla \in \mathrm{Hom}(M, L),$$

допуская некоторую вольность будем обозначать одним символом I^n так что

$$End(M) = I^0 \supset I^1 \supset I^2 \supset \dots$$

и аналогично для $\mathrm{Hom}(M, L)$ и $\mathrm{Hom}(L, M)$.

Введем следующие обозначения

$$\hat{\delta}_n = \delta - \delta h \delta + \delta h \delta h \delta - \dots \quad \text{(всего } n \text{ слагаемых)}$$

$$\hat{h}_n = h - h\delta h + h\delta h\delta h - \dots \quad \text{(всего } n \text{ слагаемых)}$$

$$\hat{f}_n = f - f\delta h + f\delta h\delta h - \dots \quad \text{(всего } n \text{ слагаемых)}$$

$$\hat{\nabla}_n = \nabla - h\delta\nabla + h\delta h\delta\nabla - \dots \quad \text{(всего } n \text{ слагаемых)}$$

$$\hat{d}^L_n = d^L + f\hat{\delta}_n\nabla$$

Теорема A.2 (Лемма о возмущении) *[15],[27]*

a)Пусть

$$L \underset{\nabla}{\overset{f}{\leftrightarrows}} M; h,$$

специальная деформационная ретракция M к L, δ — возмущение дифференциала d. Тогда, пользуясь введенными выше обозначениями,

$$f_n\hat{d} - \hat{d}_n^L f_n = 0 \pmod{I^n}, \qquad \hat{d}\nabla_n - \nabla_n \hat{d}_n^L = 0 \pmod{I^n},$$

$$d_n^L d_n^L = 0 \pmod{I^n}, \qquad \hat{d}_n(\hat{h}_n) = \hat{d}_n\hat{h}_n + \hat{h}_n\hat{d}_n - \hat{\nabla}_n\hat{f}_n + id_L = 0 \pmod{I^n},$$

$$\hat{f}_n\hat{\nabla}_n - id_L = \hat{f}_n\hat{h}_n = \hat{h}_n\hat{\nabla}_n = \hat{h}_n\hat{h}_n = 0.$$

По-другому говоря,

$$(L, \hat{d}_n^L) \underset{\hat{\nabla}_n}{\overset{\hat{f}_n}{\leftrightarrows}} (M, \hat{d}; h_n)$$

является специальной деформационной ретракцией по модулю I^n.

б) Если для любого $x \in M$ существует натуральное число n такое что $(h\delta)^n = 0$ (или, эквивалентно, для любого $x \in M$ существует натуральное m такое что $(\delta h)^m = 0$), то корректно определен оператор $\hat{d}_\infty^L$ принимающий на элементе x значение $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{d}_n^L(x)$ и операторы $\hat{f}_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{f}_n(x)$, $\hat{\nabla}_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{\nabla}_n(x)$ и $\hat{h}_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{h}_n(x)$, причем

$$(L, \hat{d}_\infty^L) \underset{\hat{\nabla}_\infty}{\overset{\hat{f}_\infty}{\leftrightarrows}} (M, \hat{d}; h_\infty)$$

является специальной деформационной ретракцией.

Доказательству предпошлем следующую простую лемму, сводящую стягивание одного модуля к другому к стягиванию подмодулей.

Лемма А.3 *Пусть $(\mathcal{C}_*, d)$ дифференциально-градуированный модуль, $h : \mathcal{C}_* \to \mathcal{C}_*$ отображение степени -1, причем $h^2 = 0$ и $hdh = h$. Тогда $D = hd + dh = d(h)$ — проектор и $(\mathcal{C}_*, d) = (Ker\, D, d) \oplus (Im\, D, d)$, причем комплекс $(Im\, D, d)$ входящий в прямую сумму ацикличен. Эквивалентно,*

$$(Ker\, D, d) \underset{1}{\overset{1-D}{\leftrightarrows}} \mathcal{C}_*; h$$

является специальной деформационной ретракцией.

Доказательство.

$$D^2 = (hd + dh)(hd + dh) = hdhd + hd^2h + dh^2d + dhdh = D.$$

Далее,

$$d(dh + hd) = dhd = (hd + dh)d,$$

и, следовательно, операторы D и $D - 1$ являются морфизмами комплексов и дополнительными проекторами. $\square$

Доказательство леммы о возмущении. Пункт а) теоремы А.2 является частным случаем пункта б).

б) Введенные выше операторы h, d, ∇, f, δ, $\hat{f}$, $\hat{\delta}$

$$hh = 0, \qquad hdh = h(\nabla f - \mathrm{id} - hd) = h, \qquad \hat{h}\hat{h} = 0,$$

$$\hat{h}\hat{d}\hat{h} = \hat{h}(d+\delta)\hat{h} = (h - h\delta h + h\delta h\delta h - \ldots)(d+\delta)(h - h\delta h + h\delta h\delta h - \ldots),$$

учитывая, что $hdh = h$ получаем

$$\hat{h}\hat{d}\hat{h} = \hat{h}(1 - \delta h + \delta h\delta h - \ldots) + \hat{h}(\delta h - \delta h\delta h + \ldots) = \hat{h}.$$

Таким образом, к наборам $(M, d), h$ и $(M, \hat{d}), \hat{h}$ применима лемма А.3. При этом получаются специальные деформационные ретракции

$$Ker\, d(h) \underset{1}{\overset{\pi}{\leftrightarrows}} M; h \quad \text{и} \quad Ker\, \hat{d}(\hat{h}) \underset{1}{\overset{\hat{\pi}}{\leftrightarrows}} M; \hat{h},$$

где $\pi = 1 - d(h) = \nabla f$, а $\hat{\pi} = 1 - \hat{d}(\hat{h})$.

Докажем несколько вспомогательных тождеств

$$hh = h\hat{h} = \hat{h}h = \hat{h}\hat{h} = 0,$$

$$\pi h = \nabla f h = 0, \qquad\qquad h\pi = h\nabla f = 0;$$

$$\hat{\pi}h = (1 - dh - hd)h = 0 = h(1 - dh - hd) = h\hat{\pi},$$

$$\hat{\pi}\hat{h} = (1 - \hat{d}\hat{h} - \hat{h}\hat{d})\hat{h} = 0 = \hat{h}(1 - \hat{d}\hat{h} - \hat{h}\hat{d}) = \hat{h}\hat{\pi};$$

В двух последних тождествах мы воспользовалось тем, что $hdh = h$ и $\hat{h}\hat{d}\hat{h} = \hat{h}$. Далее

$$\pi\hat{\pi}\pi = \pi(1 - \hat{d}\hat{h} - \hat{h}\hat{d})\pi = \pi$$

по предыдущему, и аналогично $\hat{\pi}\pi\hat{\pi} = \hat{\pi}$ и, таким образом, π и $\hat{\pi}$ оказываются взаимнообратными изоморфизмами модулей $Im\,\pi$ и $Im\,\hat{\pi}$. Хотя, вообще говоря, они не являются морфизмами комплексов. Ввиду того, что $Im\,\pi$ изоморфен (как комплекс) комплексу (L, d^L) (ибо $\pi = \nabla f$, и значит π коммутирует с дифференциалами) и наличия изоморфизма между $Im\,\pi$ и $Im\,\hat{\pi}$, мы можем снабдить L новым дифференциалом, взятым из $Im\,\hat{\pi}$:

$$L \underset{\nabla}{\overset{f}{\leftrightarrows}} Im\,\pi \underset{\hat{\pi}}{\overset{\pi}{\leftrightarrows}} Im\,\hat{\pi}.$$

Руководствуясь приведенной диаграммой определим

$$\nabla' = \hat{\pi}\nabla, \qquad f' = f\pi\hat{\pi}, \qquad d'^L = f\pi\hat{d}\hat{\pi}\nabla.$$

При этом (L, d'^L) будет изоморфен $(Im\,\hat{\pi}, \hat{d})$. Для завершения доказательства леммы нам остается проверить, что $\nabla' = \nabla$, $f' = f$ и $d'^L = \hat{d}^L$. Действительно,

$$\begin{aligned}\nabla' &= \hat{\pi}\nabla = (1 - \hat{d}\hat{h} - \hat{h}\hat{d})\nabla = \\ &= \nabla - \hat{h}\hat{d}\nabla - \hat{d}\hat{h}\nabla = \nabla - \hat{h}\hat{d}\nabla = \hat{\nabla} - \hat{h}d\nabla = \hat{\nabla} - \hat{h}\nabla d^L = \hat{\nabla}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f' &= f\pi\hat{\pi} = f(1 - dh - hd)\hat{\pi} = \\
&= (f - fdh)\hat{\pi} = (f - d^L fh)\hat{\pi} = f\hat{\pi} = f(1 - \hat{d}\hat{h} - \hat{h}\hat{d}) = \\
&= f - f\delta\hat{h} - fd\hat{h} = f - f\delta\hat{h} - d^L f\hat{h} = f - f\delta\hat{h} = \hat{f}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d'^L &= f\pi(d+\delta)\hat{\pi}\nabla = (\text{как и в предыдущей выкладке}) = \\
&= f(d+\delta)\hat{\pi}\nabla = f(d+\delta)\hat{\nabla} = d^L f\hat{\nabla} + f\delta\hat{\nabla} = \\
&= d^L f\nabla + f\delta\hat{\nabla} = d^L + f(\delta - \delta h\delta + \delta h\delta h\delta)\nabla = d'^L
\end{aligned}
$$

Теорема доказана. □

Рассмотрим следующие частные случаи леммы о возмущении.

Предложение А.4 *(ср. лемма 2.1.6 [34]) Пусть комплекс (X_*, D) распадается как k-модуль в прямую сумму X'_* и X''_*:*

$$
(X_*, D) = (X'_* \oplus X''_*, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}),
$$

Причем $\delta^2 = 0$. Пусть h — стягивающая гомотопия для комплекса (X''_*, δ), тогда

$$
(X'_*, \alpha - \beta h'\gamma) \overset{f}{\underset{g}{\rightleftarrows}} (X_*, D; h'),
$$

где $h' = h\delta h$, а отображения f и g заданы матрицами

$$
f = (1,\ -\beta h') \qquad g = \begin{pmatrix} 1 \\ -h'\gamma \end{pmatrix}.
$$

Замечание. Гомотопию h' можно переписать в виде $h' = h - h^2\delta$.

Пусть как и в предложении А.4 $X_* = X'_* \oplus X''_*$. Предположим, что комплекс X_* снабжен возрастающей, ограниченной снизу фильтрацией F_*X, то есть

$$
0 = F_0X \subset F_1X \subset \ldots \qquad \text{и} \qquad \bigcup_n F_nX = X.
$$

Предположим далее, что дифференциал D комплекса X_* представляется в матричной форме как

$$
D = \begin{pmatrix} d_1 + \alpha & 0 \\ \gamma & d_2 + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}
$$

(как следствие (X''_*, D) — подкомплекс), причем первое слагаемое сохраняет фильтрацию

$$
\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} :\ F_nX \to F_nX,
$$

а второе уменьшает

$$
\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} :\ F_nX \to F_{n-1}X. \tag{54}
$$

Следующий частный случай леммы о возмущении представляет собой модификацию леммы 1.3 [32].

Предложение А.5 *Сохраняя введенные обозначения, предположим дополнительно, что $d_1^2 = d_2^2 = 0$ (то есть что (X'_*, d_1) и (X''_*, d_2) — цепные комплексы), и что (X''_*, d_2) стягиваем со стягивающей гомотопией h. Тогда*

$$(X'_*, d_1 + \alpha) \underset{\nabla}{\overset{f}{\leftrightarrows}} (X_*, D; \hat{h})$$

является специальной деформационной ретракцией. Морфизмы f, ∇ и гомотопия $\hat{h}$ задаются матрицами

$$(1,\ 0), \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{\infty} (h\delta)^i \gamma \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{\infty} h(\delta h)^i \end{pmatrix}$$

соответственно.

Замечание. Условие (54) можно заменить на более слабое: δ уменьшает фильтрацию, то есть

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} : \ F_n\mathcal{C} \to F_{n-1}\mathcal{C}.$$

B Приложение: Гауссовы числа

Определение B.1 *: Гауссовыми числами называют множество целых комплексных чисел:* $\Gamma = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$*, являющееся кольцом относительно обычных операций сложения и умножения.*

Четыре гауссова числа: $\{1, -1, i, -i\}$ являются единицами, т.е. делят все элементы Γ.

Элемент $\gamma \in \Gamma$ делящийся только на единицу и на самого себя называется простым.

Теорема B.1 *Любая пара ненулевых гауссовых чисел* a, b *имеет ровно* 4 *наибольших общих делителя:* $\{z, -z, iz, -iz\}$*. Их обозначают через* (a, b)*.*

Теорема B.2 *Гауссовы числа* a, b *взаимно просты тогда и только тогда, когда существуют*

$$u, v \in \Gamma : au + bv = 1$$

Теорема B.3 *Если* $a, b, c \in \Gamma$, a , b *взаимно просты и* b *делит* ac*, то* b *делит* c*.*

Теорема B.4 *Число* $\gamma \in \Gamma$ *является простым лишь в следующих трех случаях:*

1. $\gamma = 1 + i$

2. $\gamma = a + bi$ *причем* $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = p$*, где* p *целое простое вида* $4n + 1$.

3. $\gamma = p$*, где* p *целое простое вида* $4n - 1$.

Теорема B.5 *Каждый элемент* $\gamma \in \Gamma$ *раскладывается на простые множители, причем, такое разложение единственно с точностью до порядка множителей и умножения на единицу.*

Теорема B.6 *Пусть* p *– целое простое число. Тогда* p *имеет вид* $4n + 1$ *в том и только том случае если существуют* $a, b \in \mathbb{N}$ *такие что* $a^2 + b^2 = p$*.*

Доказательство этих стандартных утверждений можно найти, например, в [40].

Модуль гауссова числа понимается в смысле комплексных чисел: $|z|^2 = a^2 + b^2$.

Предложение B.7 *Если* $d = a + bi$*,* $d \in \Gamma$ *свободно от квадратов (среди делителей нет квадратов нееденииц) и* $|d|$ *делится на* p*, простое целое, то* $p|a$ *и* $p|b$*.*

Доказательство: Если $p = 4n - 1$ и $p|(a+bi)(a-bi)$ то поскольку p просто, p делит один из двух множителей, а следовательно и другой (т.к. они являются сопряженными и их делители также сопряжены, но $\bar{p} = p$). Откуда $p|a$ и $p|b$.

Если $p = 4n + 1$ и $p \mid |d|$, то по теореме B.6 существуют p_1 и p_2 такие что $p = (p_1 + p_2 i)(p_1 - p_2 i)$ и $(p_1 + p_2 i)^2 (p_1 - p_2 i)^2$ делит $|d|^2 = (a + bi)(a - bi)$. Следовательно, по теореме B.5 либо $(p_1 + p_2 i)(p_1 - p_2 i) = p|(a + bi)$ и, как и ранее $p|(a - bi)$ и $p|a$, $p|b$, либо $(p_1 - ip_2)^2$ делит один нз двух множителей, и мы приходим к противоречию с тем что $a + bi$ (а следовательно и $a - bi$) свободны от квадратов.

Остается рассмотреть случай $p = 2$:

$$2^2|(a + bi)(a - bi) \Rightarrow i^2(1 - i)^4|(a + bi)(a - bi)$$

и значит d не может быть свободно от квадратов.

Предложение доказано.

Предложение B.8 *Пусть* $\gamma = a + bi \in \Gamma$, *тогда* Z*-модуль* $\Gamma_\gamma = \Gamma/\gamma\Gamma$ *изоморфен* $\mathbb{Z}_{k(a^2+b^2)} \oplus \mathbb{Z}_k$ *где* $k = (a, b)$.

Доказательство: Геометрически Γ_γ можно представить в виде множества точек с целыми координатами внутри квадрата, построенного на векторах (a, b) и $(-b, a)$.

Если $\gamma = j \in \mathbb{Z}$, то $\Gamma_\gamma \cong \mathbb{Z}_j \oplus \mathbb{Z}_j$ (обе координаты можно разделить с остатком j). Иначе, легко подсчитать, что порядок Γ_γ равен $k^2(a^2 + b^2)$.

Пусть гомоморфизм

$$\phi : \Gamma_\gamma \to \mathbb{Z}_k$$

такой что $\phi(g_1 + ig_2) = \overline{g_2}\,(\mathrm{mod} k)$ (здесь $\overline{g_2}$ обозначает класс вычетов по модулю k). Корректность определения очевидна:

$$\phi(g_1 + ig_2 + \gamma(c + id)) \equiv \phi(g_1 + ig_2) \pmod k$$

Несложно видеть, что ядро

$$Ker(\phi) = \{\overline{g_1 + ig_2} \in \Gamma_\gamma \mid k \text{ делит } g_2\}$$

является циклической подгруппой Γ_γ порожденной единицей. Действительно, если $g_1 + ig_2 k \in \Gamma_\gamma$ и $ua + vb = 1$, то

$$g_2 ub - g_2 va + g_1 \sim g_2 ub - g_2 va + g_1 + i(a + ib)ug_2 + (a + ib)vg_2 = \\ = g_1 + i(au + bv)g_2 = g_1 + ig_2 k$$

Порядок $Ker(\phi)$ равен $k(a^2 + b^2) = \frac{k^2(a^2+b^2)}{k}$.

Долее, каждый элемент Γ_γ записывается как линейная комбинация 1 и i; мы видели, что порядок 1 есть $k(a^2 + b^2)$; аналогично можно показать, что и i имеет тот же порядок. Значит порядок каждого элемента $g \in \Gamma_\gamma$ делится на $k(a^2 + b^2)$. Одну подгруппу этого порядка ($Ker(\phi)$) мы уже предъявили, кроме того $\Gamma_\gamma/Ker(\phi) \cong \mathbb{Z}_k$. Откуда и следует требуемый результат.

Список литературы

[1] *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру.—М.: Мир, 1972.—160 с.

[2] *Браун К. С.* Когомологии групп.— М.: Наука, 1987.— 384с.

[3] *Гильберт Д.* Избранные труды, Т. 1.— М.: Факториал, 1998.— 575 с.

[4] *Горинов А. Г.* О когомологиях двойных комплексов // Вестник Моск. Ун-та. Сер. 1, матем., мех.— 1997.— № 5.— С. 54-56

[5] *Картан А., Эйленберг С.* Гомологическая алгебра.— М.: Издательство иностранной литературы, 1960.— 510 с.

[6] *Красаускас Р.Л.* Некоторые топологические приложения диэдральных гомологий. Диссертация ... канд. физ.-мат. наук / МГУ им. М. В. Ломоносова. Мех.-мат. факультет. М., 1987.— 89 л.

[7] *Красаускас Р. Л., Лапин С. В., Соловьев Ю. П.* Диэдральные гомологии и когомологии // Вестник Моск. Ун-та. Сер. 1, матем., мех.— 1987.— № 4.— С. 28-32

[8] *Красаускас Р. Л., Лапин С. В., Соловьев Ю. П.,* Диэдральные гомологии и когомологии, основные понятия и конструкции // Матем. Сб.— 1987.— 133, № 1.— С. 25-48

[9] *Красаускас Р. Л., Соловьев Ю. П.* Диэдральные гомологии и эрмитова K-теория топологических прострснств // Успехи Матем. Наук— 1986.— 41, № 2.— С. 195-196.

[10] *Красаускас Р. Л., Соловьев Ю. П.* Рациональная эрмитова K-теория и диэдральные гомологии // Изв. АН СССР. Сер. матем.— 1988.— 52, № 5.— С. 935-969.

[11] *Мищенко А. С.* Эрмитова K-теория. Теория характеристических классов, методы функционального анализа // Успехи математических наук— т. XXXI, вып. 2(188).— С. 69-134.

[12] *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры.—М.: Наука, 1996.— 302 с.

[13] *Хелемский А. Я.* Гомология в банаховых и топологических алгебрах— М.: Изд-во МГУ, 1986.— 287 с.

[14] *Цыган Б. Л.* Гомологии матричных алгебр Ли над кольцами и гомологии Хохшильда // Успехи матем. наук— 1983.— 38, № 2.— С. 217-218.

[15] *Brown J. E. H.* Twisted Eilenberg-Zilber theory // Celebrazioni Archimedee del secolo XX, Simposio di Topologia— 1967.— C. 34-37.

[16] *Connes A.* Cohomolohie cyclique et foncteur Ext^n // C. R. Acad. Sci. Paris, Série 1— 1983.— 296.— C. 953-958.

[17] *Connes A.* Non-commutative differetial geometry // Publ. Math. IHES— 1985.— 62.— C. 41-144.

[18] *Connes A.* Noncommutative geometry— San Diego: Academic press, 1994.— 661 c.

[19] *Cuntz J., Quillen D.* Cyclic homology and nonsingularity // J. Amer. Math. Soc.— 1995.— 8, № 2.— C. 67-98.

[20] *Cuntz J., Quillen D.* Excision in bivariant cyclic cohomology // Invent. Math.— 1997.— 127, № 1.— C. 67-98.

[21] *Eilenberg S., MacLane S.* Cohomology theory in abstract groups I— Ann. of Math.— 1947.— 48, № 1.— C. 51-78.

[22] *Fiedorowicz Z., Loday J.-L.* Crossed simplicial groups and their associated homology // Trans. Amer. Math. Soc.— 1991.— 326, № 1.— C. 57–87

[23] *Goodwillie T. G.* Relative algebraic K-theory and cyclic homology // Annals of Math.— 1986.— 124. № 2.— C. 347-402

[24] *Gronbaek Chr.* Bivariant periodic cyclic homology.— Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 1999— 110 c.

[25] *Gugenheim V. K. A. M.* On a chain-complex of a fibration // Illinois J. Math.— 1972.— 16, № 3.— C. 398–414.

[26] *Gugenheim V. K. A. M., Lambe L.* Perturbation theory in differential homological algebra I // Illinois J. Math.— 1989.— 33, № 4.— C. 566–582.

[27] *Gugenheim V. K. A. M., Lambe L., Stasheff J. D.* Perturbation theory in differential homological algebra II // Illinois J. Math.— 1991.— 35, № 3.— C. 357–373.

[28] *Gurrola P.* Cohomologie quaternionique bivariante et caractere de Chern hermitien // Communication in Algebra— 1994.— 22, № 6.— C. 2039-2055

[29] *Jones J. D. S., Kassel Chr.* Bivariant Cyclic theory // K-theory— 1989.— 3, № 4.— C. 339-365

[30] *Kassel Chr.* Caractère de Chern bivariant // K-Theory— 1989.— 3, № 4.— C. 367–400

[31] *Kassel Chr.* Homologie cyclique, caractère de Chern et lemme de perturbation // J. Reine Angew. Math.— 1990.— 408.— C. 159–180

[32] *Lambre Th.* Quelque exemples de lemmes de première perturbation en homologie cyclique // Commun. in Algebra— 1995.— 23, № 2.— C.525–541.

[33] *Larsen M., Lindenstrauss A.* Cyclic Homology of Dedekind Domains// K-Theory.— 1992.— 6, № 4. — C. 301-334

[34] *Loday J.-L.* Cyclic homology— Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 301— Berlin: Springer-Verlag, 1992.— 455 c.

[35] *Loday J.-L.* Homologies diédrale et quaternionique // Adv. in Math.— 1987.— 66, № 2.— C. 119–148.

[36] *Loday J.-L., Quillen D.* Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices // Comment. Math. Helv.— 1984.— 59, № 4.— C. 569–591

[37] *McCarthy R.* Morita equivalence and cyclic homology // C. R. Acad. Sci. Paris, Série 1— 1988.— t. 307.— C. 211-215.

[38] *Nistor V.* A bivariant Chern-Connes character // Ann. of Math.— 1993.— 138, № 3.— C. 555-590.

[39] *Nuss Ph.* Décomposition de la cohomologie cyclique bivariante des algèbres commutatives // Math. Scand.— 1992.— 70, № 1.— C. 5-26.

[40] *Sierpiński W.* Elementary theory of numbers— Amsterdam: North-Holland, 1988.— 513 c.

[41] *Zekri R.* Thom element and bivariant cyclic cohomology // K-theory— 1992.— 6, № 4.— C. 335-346.