

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.
М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

НА ПРАВАХ РУКОПИСИ

СЛАВИНА НИНА СЕРГЕЕВНА

УДК 517.938.5+514.762

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ
ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ ТИПА КОВАЛЕВСКОЙ-ЯХЬИ

01.01.04 геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
академик А. Т. Фоменко

Москва 2013

Оглавление

Введение	13
1 Основные определения	14
1.1 Интегрируемые гамильтоновы системы на симплектических многообразиях	14
1.1.1 Понятие интегрируемой гамильтоновой системы	14
1.1.2 Теорема Лиувилля.	16
1.1.3 Отношения эквивалентности на множестве интегрируемых гамильтоновых систем.	17
1.2 Грубые топологические инварианты интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.	18
1.2.1 Фазовое пространство.	18
1.2.2 Изоэнергетические поверхности.	19
1.2.3 Бифуркационная диаграмма и бифуркационный комплекс.	21
1.2.4 Особые точки бифуркационных диаграмм.	22
1.2.5 Понятие 3-атома и построение грубой молекулы.	25
1.3 Инварианты Фоменко-Цишанга интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.	29
1.3.1 Матрицы склейки и допустимые системы координат.	29
1.3.2 Числовые метки.	31
1.3.3 Формула Топалова.	32
1.4 Интегрируемый случай Ковалевской и его обобщение на случай задачи о движении тяжёлого гиростата.	33

2 Интегрируемый случай Ковалевской-Яхьи.	36
2.1 Постановка задачи.	36
2.2 Бифуркационные диаграммы и разделяющее множество на плоскости $\mathbb{R}^2(g, \lambda)$	38
2.3 Семейства торов и их перестройки внутри восемнадцати камер. Боттовость интеграла на изоэнергетических поверхностях системы.	42
2.3.1 Семейства торов и их перестройки на границах камер 1, 1', 2, 2', 6, 6', 7 и 7' камер.	42
2.3.2 Теорема о боттовости.	46
2.3.3 Переход внутрь камер 1, 2, 2', 6, 6', 7, 7' с границ. Определение перестроек во всех камерах.	47
3 Топология слоения Лиувилля в окрестностях вырожденных одномерных орбит и невырожденных положений равновесия.	65
3.1 Классификация невырожденных положений равновесия.	65
3.2 Круговые молекулы вырожденных одномерных орбит.	77
4 Выбор базисных циклов в семействах торов и вычисление недостающих меток круговых молекул вырожденных одномерных орбит.	91
4.1 Построение допустимых систем координат.	91
4.2 Определение взаимного расположения базисных циклов.	95
4.3 Применение формулы Топалова и завершение доказательства теоремы 15.	102
5 Основные теоремы. Полный перечень инвариантов Фоменко-Цишанга для интегрируемого случая Ковалевской-Яхьи.	106
5.1 Вычисление изоэнергетических молекул.	106

5.2	Лиувиллева эквивалентность систем Ковалевской–Яхьи, Ковалевской, Ковалевской–Яхьи при $g = 0$, Жуковского, Горячева–Чаплыгина–Сретенского на некоторых соответствующих уровнях энергии.	111
5.3	Теорема о стабилизации топологического типа слоения Лиувилля для семейства систем Ковалевской–Яхьи на больших уровнях энергии H	113
	Литература	116

Введение

Актуальность темы

В диссертации описывается топологический тип систем типа Ковалевской–Яхьи. В работе активно применяются ранее предложенные методы вычисления инвариантов Фоменко–Цишанга (метод круговых молекул [1], формула Топалова [2]).

Первые работы по исследованию топологии фазового пространства интегрируемых систем, классификации особенностей, построению бифуркационных диаграмм и определению типов бифуркаций, вычислению локальных и глобальных инвариантов слоения Лиувилля, траекторных инвариантов принадлежат А. Т. Фоменко, Х. Цишангу [3], А. В. Болсинову [4], А. А. Ошемкову [5, 6, 7], В. С. Матвееву [8], М. П. Харламову [9, 10], П. И. Топалову [2], О. Е. Орёл [11], П. Е. Рябову [12, 13, 14, 15], П. В. Морозову [16, 17].

Вычисление инвариантов Фоменко (молекул без меток) для случая Ковалевской–Яхьи с произвольными g и λ было начато в работах И. Н. Гашененко, П. Е. Рябова и М. П. Харламова (см. [18, 19, 12]). Исчерпывающий ответ, дающий полное описание грубой топологии, приведён в работе П. Е. Рябова и М. П. Харламова [20]. Авторами доказано, что для 29 камер на плоскости (g, h) имеется девять групп эквивалентных молекул (без меток), содержащих 22 устойчивых графа и 6 неустойчивых по отношению к количеству критических окружностей на критических уровнях (см. [20], стр. 57).

В настоящей диссертации описывается топологический тип систем типа Ковалевской–Яхьи. Напомним, что интегрируемая система с двумя степенями свободы определяет слоение Лиувилля на каждой трёхмерной регулярной

изоэнергетической поверхности. Две интегрируемые системы называются лиувиллево эквивалентными, если существует диффеоморфизм, переводящий слоение Лиувилля одной системы в слоение Лиувилля другой системы. Если торы Лиувилля на всюду плотном множестве являются замыканиями нерезонансных траекторий (как в большинстве классических случаев интегрируемости), то Лиувилева эквивалентность систем означает, что сравниваемые системы имеют “одинаковые” замыкания решений на трёхмерных уровнях постоянной энергии (см. [21]). Топологический тип слоения Лиувилля полностью определяется инвариантом Фоменко–Цишанга, который является некоторым графом с числовыми метками (см. [22]). Поэтому классификация топологических типов систем Ковалевской–Яхьи сводится к подсчёту инвариантов Фоменко–Цишанга, что и выполнено в настоящей работе.

Цель диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. В случае задачи Ковалевской–Яхьи при всех некритических значениях параметров g, λ вычислить все инварианты Фоменко–Цишанга (с помощью построенных допустимых систем координат и определения взаимного расположения базисных циклов).
2. Среди найденных слоений найти слоения, которые эквивалентны ранее известным слоениям, возникшим в известных случаях интегрируемости твердого тела.
3. Обнаружить новые слоения, в том смысле, что они лиувиллево не эквивалентны никаким ранее обнаруженным слоениям, возникшим в известных случаях интегрируемости твердого тела.

Методы исследования

В работе используется теория топологического анализа интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, построенная А. Т. Фоменко,

Х. Цишангом, А. В. Болсиновым и другими. При проверке невырожденности положений равновесия используются методы линейной алгебры и классической дифференциальной геометрии с привлечением компьютерных пакетов символьных вычислений.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Вычислены все инварианты Фоменко–Цишанга в случае задачи Ковалевской–Яхьи при всех некритических значениях параметров g, λ . В результате получена полная лиувилева классификация всех систем типа Ковалевской–Яхьи.
2. Найдены слоения, которые эквивалентны ранее известным слоениям, возникшим в случаях интегрируемости Ковалевской, Ковалевской–Яхьи при $g = 0$, случае Жуковского, случае Горячева–Чаплыгина–Сретенского, что означает лиувиллеву эквивалентность вышеперечисленных систем системе Ковалевской–Яхьи на некоторых соответствующих уровнях энергии.
3. Обнаружены новые слоения, в том смысле, что они лиувиллево не эквивалентны никаким ранее обнаруженным слоениям, возникшим в известных случаях интегрируемости.
4. Доказано, что топологический тип слоения Лиувилля для семейства систем Ковалевской–Яхьи стабилизируется на больших уровнях энергии H , т. е. слоения на высоких уровнях энергии лиувиллево эквивалентны (инварианты Фоменко–Цишанга совпадают). При этом оказалось, что эта “высокоэнергетическая” система грубо лиувиллево эквивалентна известному ранее случаю интегрируемости Горячева–Чаплыгина–Сретенского на одном из уровней энергии. В то же время эти две системы тонко лиувиллево не эквивалентны.
5. Вычислены все круговые молекулы случая интегрируемости Ковалевской–Яхьи при всех некритических значениях параметров g, λ .
6. Доказана боттовость дополнительного интеграла на изоэнергетических поверхностях системы.

7. Получено доказательство невырожденности и дана классификация положений равновесия системы Ковалевской-Яхьи.

Теоретическая и практическая ценность

Полученные результаты могут быть использованы для установления изоморфизмов лиувиллевых слоений различных интегрируемых систем, при изучении возмущений исследованных систем, в том числе неинтегрируемых. Подробно описанная на конкретном примере техника вычисления глобальных топологических инвариантов может быть применена при классификации слоений других случаев интегрируемости.

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на геометрическом заседании семинара проф. Книппера (Бохумский университет, Германия, 2008), на семинаре “Современные геометрические методы” под руководством акад. А. Т. Фоменко и проф. А. С. Мищенко (мех-мат МГУ). Также результаты докладывались на Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2013”(Москва, 2013), Международной конференции “Современные проблемы математики, механики и их приложений”, посвящённая 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего (Москва, 2009), конференции “Александровские чтения” (Москва, 2011).

Публикации

По теме диссертации опубликованы 5 работ, список которых приведён в конце введения.

Структура и объём

Диссертация состоит из введения и пяти глав. Текст диссертации изложен на 119 страницах. Список литературы содержит 40 наименований.

Содержание работы

Во **введении** формулируется цель работы, кратко излагается её результаты и содержание, а также освещается место данных исследований в современной механике твёрдого тела.

В **первой главе** вводятся основные понятия и излагаются ключевые теоремы топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем. Описаны фазовое пространство и дифференциальные уравнения на алгебре Ли $e(3)^*$, возникающие в задаче о движении твёрдого тела. Также в первой главе излагаются результаты, полученные ранее для случая интегрируемости Ковалевской и его обобщения на случай задачи о движении тяжёлого твёрдого тела (случай Ковалевской-Яхьи).

Во **второй главе** рассматривается динамическая система Ковалевской-Яхьи, которая является гамильтоновой на совместных поверхностях уровня M_g^4 геометрического интеграла и интеграла площадей (где g — постоянная площадей). Гамильтониан и интеграл Ковалевской-Яхьи определяют слоение Лиувилля на каждой поверхности M_g^4 , топология которого существенно зависит от параметров g и λ (величина гиростатического момента). П. Е. Рябов и М. П. Харламов [12] построили кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(g, \lambda)$, разделяющие области с качественно различным видом бифуркационных диаграмм для отображения момента $M_g^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k)$, определяемого гамильтонианом и дополнительным интегралом. Оказалось, что таких областей (камер) 18.

Для случая интегрируемости Ковалевской-Яхьи доказана боттовость дополнительного интеграла на изоэнергетических поверхностях системы.

Теорема А. (*H. C. Славина [23]*) *В интегрируемом случае Ковалевской-Яхьи в прообразах всех гладких дуг бифуркационных диаграмм, за исключе-*

нием конечного числа точек на них, лежат боттовские перестройки торов Лиувилля.

С помощью этой теоремы, а также теорем 8, 9, доказанных М. П. Харламовым и П. Е. Рябовым, определены перестройки и семейства торов при всех некритических значениях параметров g, λ .

В третьей главе дано описание слоения Лиувилля в окрестностях вырожденных одномерных орбит и невырожденных положений равновесия волчка Ковалевской–Яхьи при всех некритических значениях параметров с полулокальной точки зрения, т.е. не в малой окрестности особой точки, а в окрестности особого слоя. Такое исследование особенностей системы — основной шаг на пути вычисления инвариантов Фоменко–Цишанга (инвариантов тонкой эквивалентности по Лиувиллю).

Теорема В. (*H. С. Славина [23]*) *В случае Ковалевской–Яхьи при небифуркационных значениях параметров g и λ все положения равновесия невырождены, причём в прообразе каждой точки пересечения бифуркационных кривых лежит ровно одна критическая точка ранга 0.*

Топология слоения Лиувилля в окрестности невырожденных положений равновесия описана в теореме 14 и вырожденных одномерных орбит — в теореме 15. Доказательство теоремы 15 будет продолжено в четвёртой главе, где недостающие метки будут определены по формулам Топалова. Круговые молекулы с метками приведены в таблицах 3.1, 3.2.

Чтобы применять формулы Топалова необходимо знать топологию “круговой” 3-поверхности Q , так как топологические инварианты Q (группы гомологий, фундаментальная группа) являются функциями от меток молекулы. В третьей главе в теореме 16 определён тип круговых многообразий, лежащих в прообразах окрестностей особых точек ранга один. Зная топологию Q , можно получить некоторые соотношения между числовыми метками молекулы, которые позволяют вычислить недостающие метки r, ε, n . Это и будет проделано в следующей главе.

В четвёртой главе на каждом из граничных торов построена пара базис-

ных циклов (λ, μ) , которые образуют допустимую систему координат на границе 3-атома. По правилу, которое устанавливает связь между r -метками на рёбрах молекулы и индексами пересечения соответствующих циклов, определено взаимное расположение базисных циклов во всех семи семействах торов.

В этой главе, с помощью формулы Топалова [2], завершено доказательство теоремы 15 о метках на рёбрах круговых молекул вырожденных одномерных орбит. Формула Топалова [2] связывает метки молекул с топологическим типом соответствующей поверхности. Она является одним из наиболее эффективных средств для вычисления инвариантов Фоменко-Цишанга. Конкретный вид формулы Топалова зависит от структуры молекулы и получается в соответствии с алгоритмом, приведённым в [2].

В пятой главе, с помощью построенных допустимых систем координат и определения взаимного расположения базисных циклов, вычислены все матрицы склеек изоэнергетических молекул, а по матрицам склеек вычислены все числовые метки.

Теорема С.(H. C. Славина [24]) Интегрируемая система Ковалевской-Яхьи в зависимости от значений гиростатического момента λ , интеграла площадей g и уровня энергии H распадается на 29 слоений Лиувилля, которые попарно лиувиллево неэквивалентны. Полный список инвариантов Фоменко-Цишанга для случая интегрируемости Ковалевской-Яхьи при небифуркационных значениях параметров g, λ , классифицирующий все эти 29 слоений, приведен в таблицах 5.1, 5.2, 5.3.

В результате мы вычислили все инварианты Фоменко-Цишанга. Таким образом полностью завершена тонкая лиувиллева классификация слоений семейства систем Ковалевской-Яхьи (имеется ввиду двухпараметрическое семейство на M_g^4 , зависящее от параметров g, λ). Это семейство содержит ровно 29 попарно лиувиллево неэквивалентных слоений.

Оказалось, что среди этих слоений есть слоения, которые эквивалентны ранее известным слоениям, возникшим в случаях интегрируемости Ковалевской, Ковалевской-Яхьи при $g = 0$, случае Жуковского, случае Горячева-

Чаплыгина Сретенского. Это означает, что вышеупомянутые системы лиувиллево эквивалентны системе Ковалевской-Яхьи на некоторых соответствующих уровнях энергии (теоремы 18, 19, 20). Среди 29 слоений обнаружены 11 новых слоений, в том смысле, что они лиувиллево не эквивалентны никаким ранее обнаруженным слоениям, возникшим в известных случаях интегрируемости твердого тела.

В теореме 21 доказано, что топологический тип слоения Лиувилля для семейства систем Ковалевской-Яхьи стабилизируется на больших уровнях энергии H . При этом оказалось, что эта “высокоэнергетическая” система грубо лиувиллево эквивалентна известному ранее случаю интегрируемости Горячева-Чаплыгина-Сретенского на одном из уровней энергии. В то же время эти две системы тонко лиувиллево не эквивалентны.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Анатолию Тимофеевичу Фоменко за постановку задач, за его неоценимую помощь и советы на всех этапах написания работы, а также за общее математическое образование и мировоззрение, которое у автора сформировалось при общении с ним.

Автор благодарен А. А. Ошемкову за постоянное внимание к работе, полезные обсуждения, ценные замечания и консультации.

М. П. Харламова автор благодарит за постоянный интерес с его стороны к этой теме, ряд высказанных им полезных замечаний к различным частям работы, которые в значительной мере помогли её улучшить.

Автор также благодарен всему коллективу кафедры дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета МГУ за поддержку и внимание.

Публикации автора по теме диссертации

1. Н. С. Логачёва, *Классификация невырожденных положений равновесия и вырожденных одномерных орбит интегрируемой системы Ковалевской–Яхьи*, Матем. сборник, 203:1 (2012), 31–60.
2. Н. С. Славина, *Классификация семейства систем Ковалевской–Яхьи с точностью до лиувиллевой эквивалентности*, Доклады Академии Наук, 452:3 (2013), 252–255.
3. Н. С. Славина, *Топологическая классификация систем Ковалевской–Яхьи*, Матем. сборник, в печати, объём 61 стр.
4. Н. С. Славина, *Топологическая классификация систем Ковалевской–Яхьи*, Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2013”, 2013, (тезисы).
5. П. П. Андреянов, К. Е. Душин, Н. С. Логачёва, *Топологический анализ случая Ковалевской–Яхьи в задаче о движении твёрдого тела*, Международная конференция “Современные проблемы математики, механики и их приложений”, посвящённая 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего (тезисы докладов), (2009), с. 277.

Глава 1

Основные определения

1.1 Интегрируемые гамильтоновы системы на симплектических многообразиях

1.1.1 Понятие интегрируемой гамильтоновой системы

Пусть (M^{2n}, ω) гладкое $2n$ -мерное симплектическое многообразие, на котором задана гладкая функция H . При помощи симплектической формы ω поднимем нижний индекс у ковекторного поля $\text{grad } H$. Полученное векторное поле $\text{sgrad } H$ на M^{2n} называется косым градиентом. Динамическая система $v = \text{sgrad } H$ называется гамильтоновой динамической системой с n степенями свободы, а функция H — её гамильтонианом.

Симплектическая структура ω определяет на многообразии M^{2n} скобку Пуассона $\{, \}$ гладких функций следующим каноническим образом:

$$\{f, g\} = \omega(\text{sgrad } f, \text{sgrad } g).$$

В локальных координатах (x^1, \dots, x^{2n}) при помощи скобки Пуассона гамильтонова динамическая система представляется в виде обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}^i = \{x^i, H\}, i = 1, \dots, 2n.$$

Определение 1. Гамильтонова система v на симплектическом многообразии M^{2n} называется вполне интегрируемой по Лиувиллю, если существует набор гладких функций f_1, \dots, f_n , таких что:

- 1) f_1, \dots, f_n - первые интегралы v . Это значит, что на всём многообразии $\{f_i, H\} = 0, i = 1, \dots, 2n$,
- 2) они функционально независимы на M^{2n} , то есть почти всюду на M^{2n} их градиенты линейно независимы,
- 3) $\{f_i, f_j\} = 0$ при любых i, j ,
- 4) векторные поля $\text{sgrad } f_i$ полны при любых i . Это значит, что естественный параметр на их интегральных траекториях определён на всей числовой прямой.

Для краткости вполне интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы часто называют просто *интегрируемыми*.

Определение 2. Слоением Лиувилля, отвечающим вполне интегрируемой системе, называется разбиение многообразия M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов f_1, \dots, f_n .

Утверждение 1. В случае интегрируемых систем потоки $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$ коммутируют.

Доказательство.

$$\{\text{sgrad } f_i, \text{sgrad } f_j\} = \text{sgrad } \{f_i, f_j\} = 0.$$

□

Итак, потоки $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$ коммутируют и являются полными (по определению 1). Это позволяет определить на многообразии M^{2n} действие абелевой группы \mathbb{R}^n , порождённое сдвигами вдоль векторных полей $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$. Это действие называется *действием Пуассона*.

1.1.2 Теорема Лиувилля.

Отображением момента в случае интегрируемой гамильтоновой системы на симплектическом многообразии M^{2n} называют следующее отображение:

$$f_1 \times f_2 \times \dots \times f_n : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Обозначим через T_ξ регулярную совместную поверхность уровня отображения момента:

$$T_\xi = \{x \in M^{2n} \mid f_i(x) = \xi_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Регулярность означает, что дифференциалы df_i линейно независимы на T_ξ .

Теорема 1. Пусть на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система $v = \text{sgrad } H$ и T_ξ - регулярная совместная поверхность уровня интегралов f_1, \dots, f_n . Тогда:

1) T_ξ - гладкое лагранжево подмногообразие, инвариантное относительно потоков $v = \text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$.

2) Если подмногообразие T_ξ компактно, то каждая компонента связности T_ξ диффеоморфна n -мерному тору T^n . Эти торы называются торами Лиувилля.

3) Слоение Лиувилля в некоторой окрестности U тора Лиувилля T_ξ тривиально, т.е. диффеоморфно прямому произведению тора T^n на диск D^n .

4) В окрестности $U = T^n \times D^n$ существует система координат $s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, называемых переменными действие-угол, со следующими свойствами:

a) s_1, \dots, s_n - координаты на диске D^n , $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ - стандартные угловые координаты на торе T^n , $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

б) $\omega = \sum d\varphi_i \wedge ds_i$.

в) Переменные действия s_i являются функциями от интегралов f_1, \dots, f_n .

г) В переменных действие-угол гамильтонов поток v выпрямляется на каждом торе Лиувилля из окрестности U , т.е. гамильтоновы уравнения принимают вид:

$$\dot{s}_i = 0, \dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \dots, s_n), i = 1, \dots, n.$$

Это означает, что на каждом торе поток v задаёт условно-периодическое движение, а траектории являются прямолинейными обмотками тора (рациональными или иррациональными).

Доказательство теоремы можно найти в [22, т. 1, гл. 1].

1.1.3 Отношения эквивалентности на множестве интегрируемых гамильтоновых систем.

В теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем традиционно рассматривают несколько основных типов их изоморфизмов.

Данная работа посвящена классификации семейства систем типа Ковалевской-Яхьи с точностью до отношения лиувиллевой эквивалентности.

Определение 3. Две интегрируемые гамильтоновы системы (M_1, v_1) и (M_2, v_2) называются лиувиллево эквивалентными, если существует диффеоморфизм $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$, переводящий слои Лиувилля одной системы в слои Лиувилля другой системы.

Если ослабить это отношение эквивалентности, то возникает понятие грубой лиувиллевой эквивалентности.

Определение 4. Две интегрируемые гамильтоновы системы (M_1, v_1) и (M_2, v_2) называются грубо лиувиллево эквивалентными, если существует гомеоморфизм между базами слоений Лиувилля, который локально (т.е. в окрестности каждой точки) поднимается до послойного гомеоморфизма слоений Лиувилля.

1.2 Грубые топологические инварианты интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.

1.2.1 Фазовое пространство.

Далее будем рассматривать интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы ($n = 2$).

Рассмотрим алгебру Ли $e(3)$ группы Ли $E(3)$ движений трехмерного евклидова пространства. На линейном сопряжённом пространстве $e(3)^*$ определена скобка Ли–Пуассона двух произвольных гладких функций f и g :

$$\{f, g\}(x) = x([d_x f, d_x g]),$$

где $x \in e(3)^*$, а $[,]$ — коммутатор в алгебре Ли $e(3)$.

В естественных координатах $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$ на линейном пространстве $e(3)^*$ эта скобка записывается следующим образом:

$$\{s_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk} s_k, \quad \{r_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk} r_k, \quad \{r_i, r_j\} = 0,$$

где ε_{ijk} — знак перестановки $(123) \rightarrow (ijk)$.

Матрица $\Omega_{(s,r)}$ скобки Ли–Пуассона выглядит так:

$$\Omega_{(s,r)} = \begin{pmatrix} 0 & s_3 & -s_2 & 0 & r_3 & -r_2 \\ -s_3 & 0 & s_1 & -r_3 & 0 & r_1 \\ s_2 & -s_1 & 0 & r_2 & -r_1 & 0 \\ 0 & r_3 & -r_2 & 0 & 0 & 0 \\ -r_3 & 0 & r_1 & 0 & 0 & 0 \\ r_2 & -r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть на $e(3)^*$ задана некоторая функция Гамильтона $H(s, r)$. Рассмотрим систему уравнений:

$$\dot{s}_i = \{s_i, H\}, \quad \dot{r}_i = \{r_i, H\}. \quad (1)$$

Функции $f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ и $f_2 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3$ лежат в ядре скобки Ли–Пуассона (функции Казимира) и поэтому являются первыми интегралами уравнений (1). Ограничение системы (1) на совместные четырехмерные

поверхности уровня функций f_1 и f_2

$$M_g^4 = \{f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, f_2 = s_1r_1 + s_2r_2 + s_3r_3 = g\}$$

представляет собой гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Поверхности M_g^4 являются неособыми гладкими симплектическими подмногообразиями в $e(3)^*$, диффеоморфными TS^2 , т.е. кокасательному расслоению сферы S^2 . Симплектическая структура на M_g^4 задается ограничением скобки Ли–Пуассона из объемлющего пространства $e(3)^*$. Система будет интегрируемой на поверхности M_g^4 , если на ней существует функционально независимая с H гладкая функция $K(s, r)$, такая что $\{H, K\} = 0$. Если такая функция существует глобально на всем $e(3)^*$, то на каждом M_g^4 возникает интегрируемая гамильтонова система с двумя степенями свободы. Параметр g имеет физический смысл постоянной площадей.

1.2.2 Изоэнергетические поверхности.

Определение 5. *Изоэнергетической поверхностью называется трёхмерное многообразие*

$$Q_h^3 = \{x \in M^4 \mid H(x) = h\}.$$

Для того, чтобы Q_h^3 являлось гладким компактным многообразием в M^4 , и векторное поле $v = \text{sgrad } H$ нигде на Q_h^3 не обращалось в ноль, будем рассматривать лишь те h , при которых выполнены следующие два условия:

- 1) Q_h^3 компактна,
- 2) $dH \neq 0$ всюду на Q_h^3 .

Определение 6. *Точку $x \in Q_h^3$ будем называть критической, если в ней линейно зависимы векторные поля $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ ($\text{sgrad } K = \lambda \text{sgrad } H$).*

Отметим, что особые совместные поверхности уровня отображения момента — это те поверхности, на которые попали критические точки, и теорема Лиувилля к ним не применима.

Утверждение 2. [22, т. 1, гл. 1] Функция $\tilde{K} = K|_{Q_h^3}$ не может иметь изолированных критических точек на неособой изоэнергетической поверхности Q_h^3 . Критические точки \tilde{K} организованы в критические траектории. Каждая критическая траектория проектируется отображением момента в одну точку на бифуркационной диаграмме. Параметр λ пропорциональности $sgrad K$ и $sgrad H$ постоянен вдоль критической траектории.

Так как критические точки на Q_h^3 не могут быть изолированными, то бесмысленно предполагать, что \tilde{K} является функцией Морса. Поэтому, в случае динамических систем существует естественный аналог этого понятия.

Определение 7. Функция \tilde{K} называется функцией Ботта на изоэнергетической поверхности Q_h^3 , если все её критические точки организованы в критические многообразия.

Это значит, что множество критических точек является несвязным объединением некоторых гладких подмногообразий, причём каждое из них невырождено в следующем смысле. Второй дифференциал $d^2\tilde{K}$ невырожден на подпространстве, трансверсальном к многообразию (в каждой точке). Другими словами, ограничение функции \tilde{K} на трансверсаль к подмногообразию является функцией Морса.

Утверждение 3. [22, т. 1, гл. 1] Связные критические подмногообразия интеграла \tilde{K} на Q_h^3 диффеоморфны либо окружности, либо тору, либо бутылке Клейна.

Это утверждение следует из двух условий:

- 1) каждая компонента связности множества критических точек в Q_h^3 является замкнутым подмногообразием размерности 1 или 2,
- 2) так как $v = sgrad H \neq 0$, то на этих подмногообразиях существует гладкое векторное поле, отличное от нуля в каждой точке.

Итак, критическими подмногообразиями могут служить только окружности, двумерные торы и бутылки Клейна. Поскольку при переходе к двулист-

ным накрытиям критические бутылки Клейна разворачиваются в критические торы, предполагается, что критических бутылок Клейна нет.

1.2.3 Бифуркационная диаграмма и бифуркационный комплекс.

Рассмотрим гладкое симплектическое многообразие M^{2n} и пусть $v = \text{sgrad } H$ — гамильтонова система на нём, интегрируемая по Лиувиллю.

Рассмотрим отображение момента $\mu : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемое формулой $\mu(x) = (H(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$. Так как система v интегрируема по Лиувиллю, то определено гладкое симплектическое действие абелевой группы \mathbb{R}^n , порожденное полями $\text{sgrad } f_i$. По теореме Лиувилля связные регулярные компактные орбиты этого действия диффеоморфны n -мерному тору T^n .

Определение 8. Слоение на многообразии M^{2n} , слоями которого являются связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов f_1, \dots, f_n , называется слоением Лиувилля.

Таким образом, слоение Лиувилля состоит из регулярных слоев (невырожденных орбит, т.е. торов Лиувилля) и сингулярных слоев (которые, вообще говоря, могут состоять из нескольких орбит).

Определение 9. Бифуркационным комплексом C^n данной интегрируемой системы называется топологическое пространство, точками которого являются слои соответствующего слоения Лиувилля.

Бифуркационный комплекс обладает следующим свойством.

Предложение 1. (А. Т. Фоменко [25, 26, 27]) Пусть интегрируемая гамильтонова система нерезонансна. Тогда бифуркационный комплекс C^n не зависит от выбора образующих группы \mathbb{R}^n . В частности, если гамильтониан H фиксирован, то C^n не зависит от выбора дополнительных интегралов f_2, \dots, f_n .

Итак, бифуркационный комплекс C^n совпадает с пространством компонент связности прообразов отображения момента μ и не зависит (в нерезонансном случае).

нанском случае) от выбора дополнительных интегралов. При этом отображение момента, вообще говоря, зависит от этого выбора.

Рассмотрим отображение момента μ при $n = 2$:

$$\mu = H \times K : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k) \quad (1.2.1)$$

Определение 10. Точка x из M^4 называется критической точкой отображения момента μ , если ранг $d\mu(x)$ меньше 2. Её образ $\mu(x)$ в $\mathbb{R}^2(h, k)$ называется критическим значением.

Определение 11. Образ всех критических точек при отображении момента называется бифуркационной диаграммой Σ .

Замечание 1. Бифуркационная диаграмма — это образ множества точек двумерного бифуркационного комплекса C^2 , соответствующих сингулярным слоям слоения Лиувилля, при проекции на плоскость $\mathbb{R}^2(h, k)$, заданной отображением момента.

Обычно бифуркационная диаграмма представляет собой набор гладких регулярных кривых, имеющих точки пересечения, касания и возврата. Возможны также и изолированные точки.

Следует отметить, что при отображении момента изоэнергетические поверхности переходят в семейство параллельных вертикальных прямых.

1.2.4 Особые точки бифуркационных диаграмм.

Особые точки бифуркационной диаграммы Σ — это точки пересечения, касания, излома регулярных дуг диаграммы или же изолированные точки, которые этим дугам вообще не принадлежат. Другими словами, это те точки, в которых Σ не является регулярной кривой (см. [22, т. 1, гл. 9]).

Рассмотрим ограничения гамильтониана H и интеграла K на M^4 , обозначив их \tilde{H} и \tilde{K} соответственно.

Определение 12. Точка $x \in M^4$ называется точкой ранга 0 (или положением равновесия), если $d\tilde{H}(x) = d\tilde{K}(x) = 0$.

При отображении момента положения равновесия переходят в точки пересечения бифуркационной диаграммы. В прообразах точек возврата и касания лежат одномерные вырожденные орбиты, поскольку бифуркационная диаграмма для невырожденной одномерной орбиты выглядит как дуга регулярной кривой (это следует из теоремы Элиассона; см. [22, 28]).

Пусть на (M^4, ω) задана система с гамильтонианом H и дополнительным интегралом K . Пусть точка $x \in M^4$ — точка ранга 0. Тогда на $T_x M$ корректно определены два симплектических оператора $A_H = \Omega^{-1} d^2 H$ и $A_K = \Omega^{-1} d^2 K$, порождающие в алгебре Ли $sp(4, \mathbb{R})$ некоторую коммутативную подалгебру $\mathfrak{h}(H, K)$.

Определение 13. Положение равновесия x называется невырожденным, если подалгебра $\mathfrak{h}(H, K)$ является картановской подалгеброй в алгебре Ли $sp(4, \mathbb{R})$.

Напомним, что коммутативная подалгебра в $sp(4, \mathbb{R})$ является картановской если и только если она двумерна и среди её элементов найдётся линейный оператор с попарно различными собственными значениями.

Таким образом, чтобы проверить невырожденность найденных положений равновесия, нужно проверить картановость подалгебры $\mathfrak{h}(H, K)$.

Для начала заметим, что операторы A_H и A_K совпадают с линеаризациями векторных полей $sgradH$ и $sgradK$ соответственно, что позволяет легко вычислять матрицы, которыми они задаются в локальных координатах. Действительно,

$$\frac{\partial(sgradH)^i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}(\omega^{ik} \frac{\partial H}{\partial x^k}) = \omega^{ik} \frac{\partial^2 H}{\partial x^j \partial x^k} = (\Omega^{-1} d^2 H)_j^i.$$

Итак, сначала нужно убедиться, что операторы A_H и A_K линейно независимы, и затем проверить, что некоторая линейная комбинация $\lambda A_H + \mu A_K$ имеет попарно различные собственные значения (такой элемент называется *регулярным элементом* алгебры Ли $sp(4, \mathbb{R})$).

Собственные значения операторов из $sp(4, \mathbb{R})$ разбиваются на пары вида $\lambda, -\lambda$. Невырожденные точки ранга ноль можно классифицировать по типу собственных значений регулярного элемента в подалгебре Картана $\mathfrak{h}(H, K)$:

- 1) центр-центр – чисто мнимые корни $\pm iA, \pm iB$;
- 2) центр-седло – два вещественных и два мнимых корня $\pm A, \pm iB$;
- 3) седло-седло – вещественные корни $\pm A, \pm B$;
- 4) фокус-фокус – чисто комплексные $A \pm iB, -A \pm iB$.

Невырожденные положения равновесия обладают многими замечательными свойствами. В частности их окрестности в M^4 представимы в виде почти прямого произведения 2-атомов (см. [22, т. 1, гл. 9]).

Напомним, как определяется структура почти прямого произведения в случае двух степеней свободы.

Пусть V_1 и V_2 – два атома со своими симплектическими структурами и функциями Морса f_1 и f_2 . Пусть на каждом атоме симплектически действует одна и та же конечная группа G , сохраняя функции f_1 и f_2 . Тогда на прямом произведении $V_1 \times V_2$ определена симплектическая структура, как сумма двух структур атомов. Определена также структура лиувиллева слоения, задаваемая парой коммутирующих функций f_1, f_2 . Определено действие группы G , задаваемое формулой $\varphi(g)(x_1, x_2) = (\varphi_1(g)(x_1), \varphi_2(g)(x_2))$, где φ_i – действие G на атоме V_i . Действие φ симплектическое и сохраняет структуру слоения Лиувилля. Можно рассмотреть фактор-многообразие $(V_1 \times V_2)/G$. Оно симплектическое, имеет естественную структуру слоения Лиувилля, и является 4-мерной окрестностью связного особого слоя.

Определение 14. *Описанная выше четырёхмерная особенность называется особенностью типа почти прямого произведения.*

Это, а также другие важные свойства невырожденных особенностей подробно обсуждаются в [22, т. 1, гл. 9].

1.2.5 Понятие 3-атома и построение грубой молекулы.

Изоэнергетическая поверхность Q^3 представляет собой однопараметрическое семейство совместных поверхностей уровня T_ξ интегралов системы H и K , параметризованное значением дополнительного интеграла K . Отождествляя каждую компоненту связности поверхности T_ξ с точкой, получим набор рёбер (некоторый граф) — базу слоения Лиувилля. Каждое регулярное семейство торов представляется однопараметрическим семейством, которое соответствует какому-то ребру графа. Согласно теореме Лиувилля, каждому ребру этого графа соответствует многообразие диффеоморфное прямому произведению $T^2 \times (0, 1)$, а вершинам соответствуют связные сингулярные слои.

Рассмотрим замкнутую трёхмерную окрестность особого слоя в Q^3 . Если фиксировать количество критических окружностей на сингулярном слое, то в боттовском случае с точностью до лиувиллевой эквивалентности существует лишь конечное число возможных бифуркаций (перестроек).

Определение 15. (A. T. Фоменко) Класс лиувиллевой эквивалентности замкнутой окрестности особого слоя слоения Лиувилля называется 3-атомом.

3-атом — это трёхмерное многообразие со структурой слоения Лиувилля, содержащее ровно один связный сингулярный слой. Граница состоит из конечного числа торов. Сложность атома равна количеству критических окружностей на сингулярном слое. В [22, т. 1, гл. 3] изложен алгоритм, позволяющий явно перечислить все 3-атомы данной сложности. 3-атомы обозначают латинскими буквами с индексами и звёздочками. Наиболее часто встречаются четыре атома сложности один, которые изображены на рис. 1.1.

2-атомом называется пара (P^2, K) , где P^2 — ориентированная связная компактная двумерная поверхность с краем, а K — связный граф в ней такой, что выполняются следующие условия:

- 1) Либо K состоит только из одной точки (изолированной вершины степени ноль), либо все вершины графа K имеют степень 4.
- 2) Каждая связная компонента множества $P^2 \setminus K$ гомеоморфна кольцу $\mathbb{S}^1 \times$

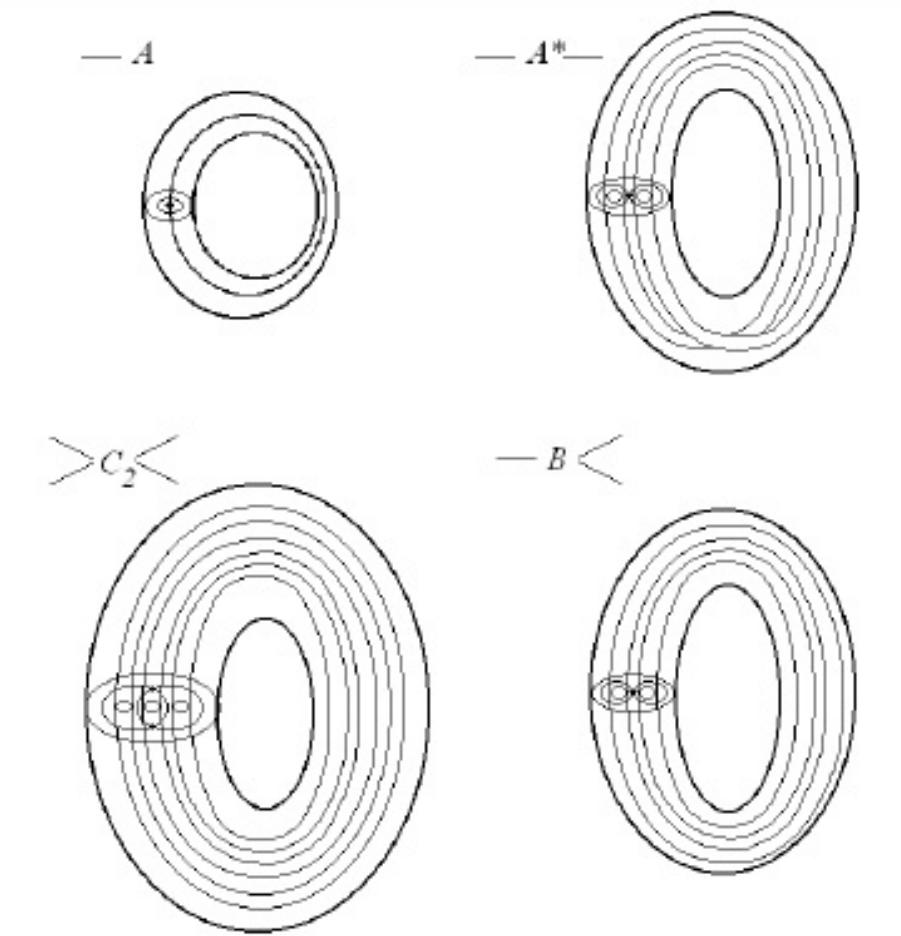


Рис. 1.1: Наиболее часто встречающиеся атомы

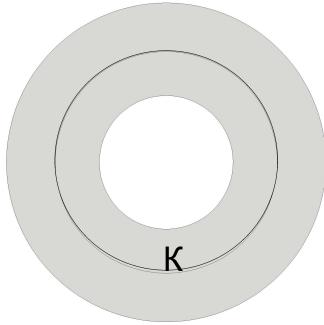


Рис. 1.2: Граф K

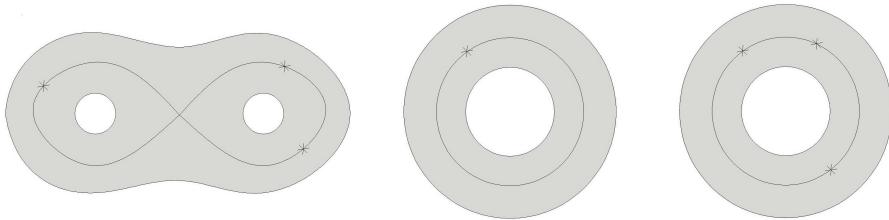


Рис. 1.3: Примеры атомов со звёздочками

$(0, 1]$, и множество этих колец можно разбить на два класса — положительные кольца и отрицательные кольца — так, чтобы к каждому ребру графа K примыкало ровно одно положительное кольцо и ровно одно отрицательное.

Атомы со звёздочками строятся следующим образом. В качестве поверхности P возьмём кольцо и объявим графом K любую его осевую окружность (см. рис. 1.2).

Отметим на некоторых рёбрах графа K произвольное число внутренних точек (не совпадающих с критическими точками функции). Объявим их новыми вершинами графа K и обозначим их звёздочками (вершины кратности 2). На рис. 1.3 см. примеры.

Определение 16. Атом (P^2, K) , у которого есть хотя бы одна вершина-звёздочка, называется атомом со звёздочками. Если таких вершин нет, то будем говорить об атоме без звёздочек.

Определение 17. Будем называть 2-атомом ориентированный атом (P^2, K) со звёздочками или без.

Рассмотрим 3-атом $U(L)$ со структурой расслоения Зейферта на нём. Обозначим через

$$\pi : U(L) \rightarrow P^2$$

его проекцию на двумерную базу P^2 с графом K , где в качестве K возьмём образ $\pi(L)$ особого слоя L при проекции π . Отметим на базе P^2 звёздочками те точки, в которые проектируются особые слои расслоения Зейферта (т.е. слои типа $(2,1)$). Напомним, что на базе P^2 каноническим образом вводится ориентация. На $U(L)$ ориентация фиксирована, а на слоях расслоения Зейферта она определяется гамильтоновым потоком $v = \text{sgrad } H$. В результате мы получим некоторый 2-атом (P^2, K) .

Теорема 2. (A. T. Фоменко [22, т. 1, гл. 3])

- 1) База расслоения Зейферта на 3-атоме $U(L)$ имеет естественную структуру 2-атома, описанную выше.
- 2) Проекция $\pi : (U(L), L) \rightarrow (P^2, K)$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между 3-атомами и 2-атомами.

Теорема 2 помогает свести классификацию 3-атомов к классификации 2-атомов.

Следующая теорема даёт описание слоения Лиувилля в трёхмерной инвариантной окрестности $U(L) \subset Q^3$ особого слоя L .

Теорема 3. (A. T. Фоменко [22, т. 1, гл. 3])

- 1) Трёхмерное многообразие $U(L)$ является многообразием Зейферта, особые слои которого (если они существуют) имеют один и тот же тип $(2, 1)$.
- 2) Эти особые слои являются в точности критическими окружностями интеграла K с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами.
- 3) Если особых слоёв у этого расслоения Зейферта нет, то многообразие $U(L)$ является прямым произведением $P(L) \times \mathbb{S}^1$, где $P(L)$ — двумерная ориентируемая поверхность с краем.

4) В общем случае структура расслоения Зейферта на $U(L)$ и структура слоения Лиувилля на $U(L)$ согласованы в том смысле, что каждый слой расслоения Зейферта (окруженность) лежит на каком-то слое слоения Лиувилля. В частности, интеграл K постоянен на слоях расслоения Зейферта.

Если каждой вершине графа, который отвечает слоению Лиувилля, сопоставить подходящий 3-атом, то получим грубую молекулу слоения Лиувилля. Такая молекула позволяет локально восстановить структуру слоения Лиувилля вблизи регулярных и сингулярных слоёв.

Теорема 4. (A. T. Фоменко [22, т. 1, гл. 3]) Две интегрируемые гамильтоновы системы (Q_1^3, v_1) и (Q_2^3, v_2) с боттовскими интегралами K_1 и K_2 грубо лиувиллево эквивалентны в том и только в том случае, когда их грубые молекулы совпадают.

1.3 Инварианты Фоменко-Цишанга интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.

1.3.1 Матрицы склейки и допустимые системы координат.

3-атомы описывают структуру слоения Лиувилля в окрестности особого слоя. Для того, чтобы восстановить структуру слоения глобально на всём Q^3 , нужно знать гомеоморфизмы, по которым склеены граничные торы 3-атомов. Для этого на каждом из пары склеиваемых торов выбирают базисные циклы (можно выбрать многими способами), тогда склеивающий гомеоморфизм задаётся целочисленной матрицей размера 2×2 с определителем ± 1 .

Итак, на каждом из граничных торов можно задать специальным образом (см. [22]) пару базисных циклов (λ, μ) , которые образуют *допустимую систему координат* на границе 3-атома.

Первый базисный цикл λ всегда определён однозначно. Различают два случая:

- 1) Если 3-атом седловой и имеет структуру тривиального \mathbb{S}^1 -расслоения над поверхностью (2-атом) P , то в качестве первого базисного цикла λ на каждом из граничных торов берём слой этого расслоения. Если 3-атом содержит седловые критические окружности с неориентируемыми сепаратрисными диаграммами и имеет поэтому нетривиальную структуру расслоения Зейферта, то в качестве первого базисного цикла λ на каждом из граничных торов берём слой расслоения Зейферта. При этом ориентация цикла λ однозначно задаётся гамильтоновым потоком.
- 2) Если 3-атом имеет тип A (является полноторием), то λ — это меридиан полнотория, т.е. цикл, сжимающийся в точку при подходе к критической эллиптической окружности (исчезающий цикл). Он определён с точностью до изотопии.

Цикл μ может определяться многими способами. Группа замен внутри класса допустимых систем координат имеет очень простую структуру ([22, т. 1, гл. 4]).

Выбор вторых базисных циклов допустимых систем координат зависит от типа атома. Различают три случая:

- 1) Если атом минимаксный (атом A), то за второй базисный цикл берут любой другой цикл, дополняющий первый до базиса. При этом ориентация второго базисного цикла фиксирована и задаётся гамильтоновым потоком.
- 2) Если атом седловой без звёздочек (атомы B, C_2, \dots), то требуют дополнительно, чтобы в совокупности вторые базисные циклы образовывали на 3-атоме глобальное сечение, над которым этот атом представим как тривиальное \mathbb{S}^1 -расслоение.
- 3) Если атом седловой со звёздочками (атом A^* и другие), то глобально-го сечения не существует. Но его можно построить, удалив из 3-атома малые окрестности-полнотория особых слоёв. Рассмотрим границу окрестности особого слоя, являющуюся тором. На ней однозначно определены циклы λ — слой расслоения и κ , стягивающийся в точку внутри полнотория. Второй цикл ориентируем так, чтобы пара (λ, κ) образовывала положительно ори-

ентированную пару, но это не базис, так как рассматриваемые циклы имеют две точки пересечения. Из соотношения $\lambda = \kappa - 2\mu$ определим цикл μ , дополняющий λ до базиса.

Чтобы устранить неопределённость в выборе ориентации вторых базисных циклов седловых атомов и первого базисного цикла минимаксного атома A , требуем согласованности ориентации базисов. Для этого сначала фиксируем ориентацию на изоэнергетической поверхности Q_h^3 . По направлению роста интеграла K границы всех 3-атомов этой поверхности делятся на положительные и отрицательные. Требуем, чтобы тройка $(\lambda, \mu, \text{grad } K)$ была положительно ориентирована в Q_h^3 , если тор относится к положительной границе атома, и отрицательно ориентирована в противном случае.

1.3.2 Числовые метки.

Группа замен координат в классе допустимых систем координат имеет несложную структуру. Инвариантами действия этой группы на множестве матриц склеек молекулы являются числовые метки r, ε и n .

Пусть на ребре e_i молекулы W стоит матрица склейки

$$C^i = \begin{pmatrix} c_{11}^i & c_{12}^i \\ c_{21}^i & c_{22}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}.$$

Определение 18. Числовой рациональной меткой r_i на ребре e_i молекулы W называется:

$$r_i = \begin{cases} \left\{ \frac{a_i}{b_i} \right\}, & \text{если } b_i \neq 0 \\ \infty, & \text{если } b_i = 0 \end{cases}$$

Определение 19. Числовой рациональной меткой ε_i на ребре e_i молекулы W называется:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \text{sign } b_i, & \text{если } b_i \neq 0 \\ \text{sign } a_i, & \text{если } b_i = 0 \end{cases}$$

Разрежем молекулу по всем конечным рёбрам, т. е. таким, где $r_i \neq \infty$. Семьями будем называть лишь те куски, которые не содержат атомов A .

Определение 20. *Метка n определяется для каждой семьи по формуле:*

$$n = \sum_{\text{вых.рёбра}} \left[\frac{a_i}{b_i} \right] + \sum_{\text{вход.рёбра}} \left[-\frac{d_i}{b_i} \right] + \sum_{\text{внутрёбра}} \left[-\frac{c_i}{a_i} \right].$$

Числовые метки имеют топологическую интерпретацию. Знаменатель метки $r_i \in \{\mathbb{Q} \cap [0, 1) \cup \infty\}$ на ребре e_i определяет беззнаковый индекс пересечения однозначно определённых базисных циклов бифуркаций, которые соединяются этим ребром. Метка $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ говорит о согласованности или несогласованности ориентаций критических окружностей двух бифуркаций, когда такое сравнение корректно определено. Метка $n \in \mathbb{Z}$ равна числу Эйлера расслоения Зейферта, образованного семьёй, которой она соответствует.

Определение 21. *Грубая молекула W , снабжённая метками r_i, ε_i и n_k , называется инвариантом Фоменко-Цишанга или меченой молекулой (тонким лиувилевым инвариантом).*

Теорема 5. (A. T. Фоменко, X. Цишанг [22, т. 1, гл. 4]) *Две интегрируемые гамильтоновы системы (v_1, Q_1^3) и (v_2, Q_2^3) лиувиллево эквивалентны в том и только в том случае, когда их меченные молекулы совпадают.*

1.3.3 Формула Топалова.

Формула Топалова [2] связывает метки молекул с топологическим типом соответствующей поверхности. Она является одним из наиболее эффективных средств для вычисления инвариантов Фоменко-Цишанга. Конкретный вид формулы Топалова зависит от структуры молекулы и получается в соответствии с алгоритмом, приведённым в [2]. Укажем ответ для простого, наиболее часто встречающегося случая.

Пусть некоторая молекула W^* не содержит семей из более чем одного атома и после стирания внутренних рёбер семей принимает вид дерева. Пусть

также все атомы W^* имеют род 0. (Атомы A, A^*, B, C_2 относятся к этой категории.) Тогда энергия молекулы $N(W^*)$, введённая П. И. Топаловым, определяется формулой:

$$N(W^*) = \begin{cases} 0, & \text{если } rkH_1(Q^3) > 0 \\ |TorH_1(Q^3)|, & \text{если } rkH_1(Q^3) = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $N(W^*)$ полностью определяется топологией многообразия.

Определим для каждой семьи число $\tilde{n} = n + \sum r_i + \frac{p}{2}$, где n – её n -метка, r_i – метки на её внешних рёбрах, а p – число звёздочек данной семьи (см. [22], [2]).

Укажем конкретный вид формулы Топалова для молекулы, которая состоит из одной семьи F с p звездочками, из которой исходят рёбра e_1, \dots, e_n вида $F \xrightarrow{e_i} A$:

$$N(W^*) = \pm 2^p b_1 \dots b_n \tilde{n}(F) \quad (1.3.1)$$

Здесь за b_i обозначен элемент c_{12}^i матрицы склейки C^i на ребре e_i . Предполагается, что все рёбра e_i конечны, то есть $b_i \neq 0$. Под количеством звёздочек семьи понимается суммарное количество особых слоёв соответствующего расслоения Зейферта. Стрелка на ребре указывает, допустимый базис какого атома мы получим, умножив базис второго атома на матрицу склейки.

1.4 Интегрируемый случай Ковалевской и его обобщение на случай задачи о движении тяжёлого гиростата.

В разное время исследованием классического случая Ковалевской занимались многие выдающиеся математики и физики-теоретики.

Важные результаты в исследовании топологии классического случая Ковалевской были получены в работах М. П. Харламова [29, 9] (см. также [10]),

где были построены бифуркационные диаграммы и вычислены перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента. Инварианты Фоменко (молекулы без меток) для классического случая Ковалевской были вычислены в работе А. А. Ошемкова [6] (см. также [5]). Более подробное изучение слоения Лиувилля для этого случая (в частности, вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга для изоэнергетических поверхностей и особых точек бифуркационной диаграммы) было проведено в работе А. В. Болсино-ва, П. Рихтера, А. Т. Фоменко [1].

Х. М. Яхья [30, 31] показал, что интеграл С. В. Ковалевской может быть обобщён на гиростат, распределение масс которого подчинено условиям Ковалевской, а гиростатический момент направлен по оси динамической симметрии.

Динамическая система типа Ковалевской–Яхьи является гамильтоновой на совместных поверхностях уровня M_g^4 геометрического интеграла и интеграла площадей (где g — постоянная площадей). Гамильтониан и интеграл Ковалевской–Яхьи определяют слоение Лиувилля на каждой поверхности M_g^4 , топология которого существенно зависит от параметров g и λ (величина гиростатического момента). П. Е. Рябов и М. П. Харламов [12] построили кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(g, \lambda)$, разделяющие области с качественно различным видом бифуркационных диаграмм для отображения момента $M_g^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k)$, определяемого гамильтонианом и интегралом. Оказалось, что таких областей 18. В более поздней работе [32] предложен новый взгляд на классификацию бифуркационных диаграмм. Авторами было построено разделяющее множество на плоскости “энергия-гиростатический момент”, с помощью которого можно классифицировать бифуркационные диаграммы на изоэнергетических уровнях. В совместной работе И. И. Харламовой, П. Е. Рябова [33] введено понятие электронного атласа, создана компьютерная система, которая удовлетворяет данному определению.

Вычисление инвариантов Фоменко (молекул без меток) для случая Ковалевской–Яхьи с произвольными g и λ было начато в работах И. Н. Гашененко,

П. Е. Рябова и М. П. Харламова (см. [18, 19, 12]). Исчерпывающий ответ, дающий полное описание грубой топологии, приведён в работе [20]. Авторами доказано, что для 29 камер на плоскости (g, h) имеется девять групп эквивалентных молекул (без меток), содержащих 22 устойчивых графа и 6 неустойчивых по отношению к количеству критических окружностей на критических уровнях (см. [20], стр. 57).

П. Е. Рябов в [34] нашёл критические точки ранга 0 и 1, а также указал способ определения их типа. В работе Н. С. Логачёвой (Славиной) [23] дано описание слоения Лиувилля в окрестностях вырожденных одномерных орбит и невырожденных положений равновесия волчка Ковалевской–Яхьи с полулокальной точки зрения, т.е. не в малой окрестности особой точки, а в окрестности особого слоя. В [23] доказывается боттовость (теорема 10 данной работы) дополнительного интеграла на изоэнергетической поверхности, и невырожденность положений равновесия (теоремы 12,13). Точки ранга ноль также были исследованы М. П. Харламовым в [35], где он ввел понятие классов эквивалентности относительно определяющих параметров на множестве равномерных вращений гиростата, указал разделяющие значения этих параметров и доказал, что таких классов 13, если рассматривать полный прообраз точки, отвечающей относительному равновесию.

П. В. Морозов в [36] исследовал слоение Лиувилля системы Ковалевской–Яхьи для случая $g = 0$, а именно вычислил инварианты Фоменко–Цишанга для соответствующих лиувиллевых слоений.

Глава 2

Интегрируемый случай Ковалевской-Яхьи.

2.1 Постановка задачи.

Случай интегрируемости Ковалевской-Яхьи является обобщением классического волчка Ковалевской на случай задачи о движении тяжелого гиростата. Гиростатом называется твёрдое тело, в котором закреплён маховик. Приведем конкретный вид уравнений и первых интегралов этой системы.

Рассмотрим уравнения Эйлера-Пуассона произвольного твердого тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести, в системе координат, оси которой направлены вдоль осей инерции тела:

$$\begin{cases} \mathbf{A}\dot{\omega} = (\mathbf{A}\omega + \boldsymbol{\lambda}) \times \omega - \mathbf{a} \times \nu, \\ \dot{\nu} = \nu \times \omega. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Здесь ω — вектор угловой скорости тела-носителя, ν — единичный вертикальный вектор, \mathbf{A} — диагональная матрица тензора инерции, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ — вектор, направленный из неподвижной точки к центру масс, длина которого равна произведению веса гиростата на расстояние от его центра масс до неподвижной точки, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — гиростатический момент.

В задаче Ковалевской-Яхьи на гиростат накладываются следующие условия: моменты инерции удовлетворяют соотношениям $A_1 = A_2 = 2A_3 = A$,

центр масс находится в экваториальной плоскости эллипсоида инерции ($a_3 = 0$), а гиростатический момент направлен вдоль оси динамической симметрии ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \lambda \neq 0$).

В этих условиях уравнения движения и интегралы будут зависеть от параметров A, a_1, a_2 , от которых можно избавиться при помощи известных замен (например, см. [37]).

В новых переменных гамильтониан и первые интегралы системы примут следующий вид:

$$H = \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 + \frac{\tilde{\omega}_3^2}{2} - \tilde{\nu}_1,$$

$$\Gamma = \tilde{\nu}_1^2 + \tilde{\nu}_2^2 + \tilde{\nu}_3^2, \quad G = \tilde{\omega}_1\tilde{\nu}_1 + \tilde{\omega}_2\tilde{\nu}_2 + \frac{(\tilde{\omega}_3 + \tilde{\lambda})\tilde{\nu}_3}{2}.$$

Х.М. Яхъя указал в [30, 31], что система обладает дополнительным интегралом K четвертой степени:

$$K = (\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\nu}_1)^2 + (2\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2 + \tilde{\nu}_2)^2 + 2\tilde{\lambda}(\tilde{\omega}_3 - \tilde{\lambda})(\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2) + 4\tilde{\lambda}\tilde{\omega}_1\tilde{\nu}_3.$$

Наряду с координатами (ω, ν) часто используются канонические координаты (s, r) на линейном сопряжённом пространстве $e(3)^*$, где $e(3)$ - алгебра Ли группы Ли $E(3)$ движений трехмерного евклидова пространства.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\dot{s}_i = \{s_i, H\}, \quad \dot{r}_i = \{r_i, H\}, \quad (2.1.2)$$

где $H(s, r)$ - некоторая функция Гамильтона, а $\{\cdot, \cdot\}$ - стандартно определённая на $e(3)^*$ скобка Ли-Пуассона двух произвольных гладких функций (см. [22]).

Функции

$$f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2, \quad f_2 = s_1r_1 + s_2r_2 + s_3r_3 \quad (2.1.3)$$

лежат в ядре скобки Ли-Пуассона (функции Казимира) и поэтому являются первыми интегралами уравнений (2.1.2). Ограничение системы (2.1.2) на совместные четырехмерные поверхности уровня функций f_1 и f_2

$$M_g^4 = \{f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, f_2 = s_1r_1 + s_2r_2 + s_3r_3 = g\},$$

представляет собой гамильтонову систему с двумя степенями свободы (параметр g имеет физический смысл постоянной площадей). Эта система будет интегрируемой на поверхности M_g^4 , если на ней существует функционально независимая с H гладкая функция $K(s, r)$, такая что $\{H, K\} = 0$.

Гамильтониан случая Ковалевской–Яхьи, дополнительные интегралы (функции Казимира) и дополнительный интеграл K в координатах (\tilde{s}, \tilde{r}) , связанных линейными заменами с координатами (s, r) , примут следующий вид:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\tilde{s}_1^2}{4} + \frac{\tilde{s}_2^2}{4} + \frac{(\tilde{s}_3 + \tilde{\lambda})^2}{2} - \tilde{r}_1, \\ f_1 &= \tilde{r}_1^2 + \tilde{r}_2^2 + \tilde{r}_3^2, f_2 = \tilde{s}_1 \tilde{r}_1 + \tilde{s}_2 \tilde{r}_2 + \tilde{s}_3 \tilde{r}_3, \\ K &= \left(\frac{\tilde{s}_1^2 - \tilde{s}_2^2}{4} + \tilde{r}_1\right)^2 + \left(\frac{\tilde{s}_1 \tilde{s}_2}{2} + \tilde{r}_2\right)^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{2}(\tilde{s}_3 + 2\tilde{\lambda})(\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2) - 2\tilde{\lambda}\tilde{r}_3\tilde{s}_1. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Уравнения движения 2.1.2 в новых координатах записываются в виде:

$$\dot{\tilde{s}}_1 = -\frac{\tilde{s}_2}{2}(\tilde{s}_3 + 2\tilde{\lambda}), \dot{\tilde{r}}_1 = \frac{\tilde{s}_2 \tilde{r}_3}{2} - \tilde{r}_2(\tilde{s}_3 + \tilde{\lambda}), \dot{\tilde{s}}_2 = \frac{\tilde{s}_1}{2}(\tilde{s}_3 + 2\tilde{\lambda}) + \tilde{r}_3, \dot{\tilde{r}}_2 = -\frac{\tilde{s}_1 \tilde{r}_3}{2} + \tilde{r}_1(\tilde{s}_3 + \tilde{\lambda}), \dot{\tilde{s}}_3 = \dots \quad (2.1.5)$$

Связь между системой, заданной в координатах (ω, ν) , и системой, заданной в координатах (s, r) , установлена в [6]:

$$\tilde{s}_1 = -2\tilde{\omega}_1, \quad \tilde{s}_2 = -2\tilde{\omega}_2, \quad \tilde{s}_3 = -\tilde{\omega}_3 - \tilde{\lambda}, \quad \tilde{r}_1 = \tilde{\nu}_1, \quad \tilde{r}_2 = \tilde{\nu}_2, \quad \tilde{r}_3 = \tilde{\nu}_3. \quad (2.1.6)$$

Всюду в дальнейшем мы будем использовать только координаты (\tilde{s}, \tilde{r}) и $(\tilde{\omega}, \tilde{\nu})$, и поэтому будем обозначать их через (s, r) и (ω, ν) соответственно.

2.2 Бифуркационные диаграммы и разделяющее множество на плоскости $\mathbb{R}^2(g, \lambda)$

Рассмотрим отображение момента μ для нашей задачи:

$$\mu = H \times K : M_g^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k) \quad (2.2.1)$$

Определение 22. Точка x из M_g^4 называется критической точкой отображения момента μ , если ранг $d\mu(x)$ меньше 2. Её образ $\mu(x)$ в $\mathbb{R}^2(h, k)$ называется критическим значением.

Определение 23. Образ всех критических точек при отображении момента называется бифуркационной диаграммой Σ .

Обычно бифуркационная диаграмма представляет из себя набор регулярных кривых, имеющих точки пересечения, касания и возврата.

В случае Ковалевской–Яхьи бифуркационная диаграмма $\Sigma = \Sigma(g, \lambda)$ будет зависеть от параметров g, λ . В [19] указаны кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(g, \lambda)$, разделяющие области с различными типами бифуркационных диаграмм, а также найден явный вид бифуркационных кривых на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$.

Обозначим через $\Theta(g, \lambda)$ множество, которое состоит из тех значений $(g, \lambda) \in \mathbb{R}^2(g, \lambda)$, при переходе через которые меняется вид диаграммы $\Sigma(g, \lambda)$ (такие значения (g, λ) будем называть *бифуркационными*). Тогда это множество устроено следующим образом:

Теорема 6. (П. Е. Рябов [19]) Множество $\Theta(g, \lambda)$ является объединением кривых Γ_i ($i=1,2,3,4,5$), где

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(g, \lambda) \mid 1 - 4\lambda g = 0\}, \\ \Gamma_2 &= \left\{ \left(-2t^3, \sqrt{-\frac{4t^4 - 1}{4t^2}} \right) \middle| t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right] \right\}, \\ \Gamma_3 &= \left\{ \left(\sqrt{\frac{t^2 - 1}{4t}}, \sqrt{-t^3} \right) \middle| t \in [-1, 0) \right\}, \\ \Gamma_4 &= \left\{ \left(\sqrt{-\frac{(3t^2 - 1)^2}{4t^3}}, \sqrt{\frac{(t^2 - 1)^3}{t^3}} \right) \middle| t \in (-\infty, +\infty) \right\}, \\ \Gamma_5 &= \left\{ \left(\sqrt{\frac{(t^2 - 1)^3}{2t^3}}, \sqrt{-\frac{(3t^2 - 1)^2}{2t^3}} \right) \middle| t \in [-1, 0) \right\}. \end{aligned}$$

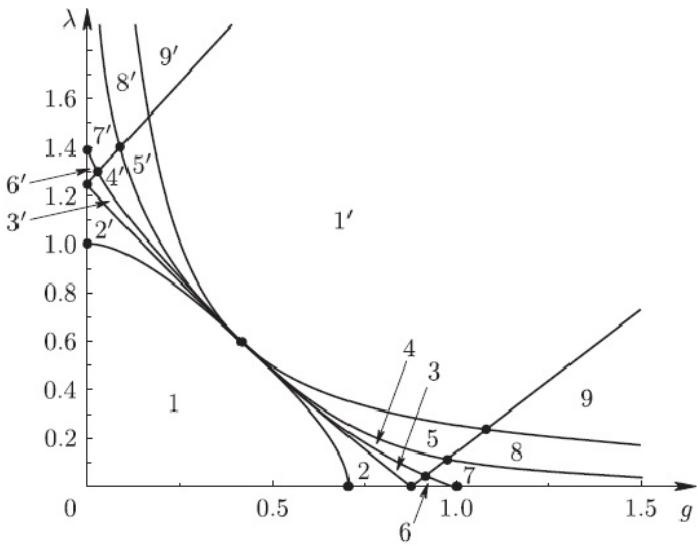


Рис. 2.1: Разделяющее множество

Замечание 2. П. Е. Рябов в [19] доказал, что при переходе через кривые Γ_i меняется тип бифуркационной диаграммы. Таким образом плоскость $\mathbb{R}^2(g, \lambda)$ разбивается на 18 камер (рис. 2.1). Более того, при изменении значений параметров g, λ строго внутри каждой камеры тип бифуркационной диаграммы не меняется, то есть внутри камер диаграммы гомеоморфны ([32, 33, 37]).

Теорема 7. (П. Е. Рябов [19]) Все критические значения отображения момента (2.2.1) в задаче Ковалевской–Яхьи принадлежат обединению кривых $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, т.е. $\Sigma \subset \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, где

$$\Sigma_1 : \begin{cases} k = 1, \\ h \geq -1 \end{cases} \cup \begin{cases} k = 1 + (h - \frac{\lambda^2}{2})^2, \\ h \geq \frac{\lambda^2}{2} \end{cases} \quad \text{при } g = 0 \text{ и}$$

$$\begin{cases} h = \omega_1^2 + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{g}{\omega_1}, \\ k = 1 + \omega_1^4 + 2g\omega_1 \end{cases} \quad \text{при } g \neq 0,$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} h = 2g^2 - \frac{\lambda^2}{2} - s + \frac{\lambda^2}{2s^2}, \\ k = -4\lambda^2 g^2 + (s + \lambda^2)^2 - \frac{\lambda^2(\lambda^2 + 2s^2)}{s^2} \end{cases} \quad \text{при } \lambda \neq 0 \text{ и} \quad \begin{cases} h \geq 0, \\ k = 0 \end{cases} \quad \text{при } \lambda = 0.$$

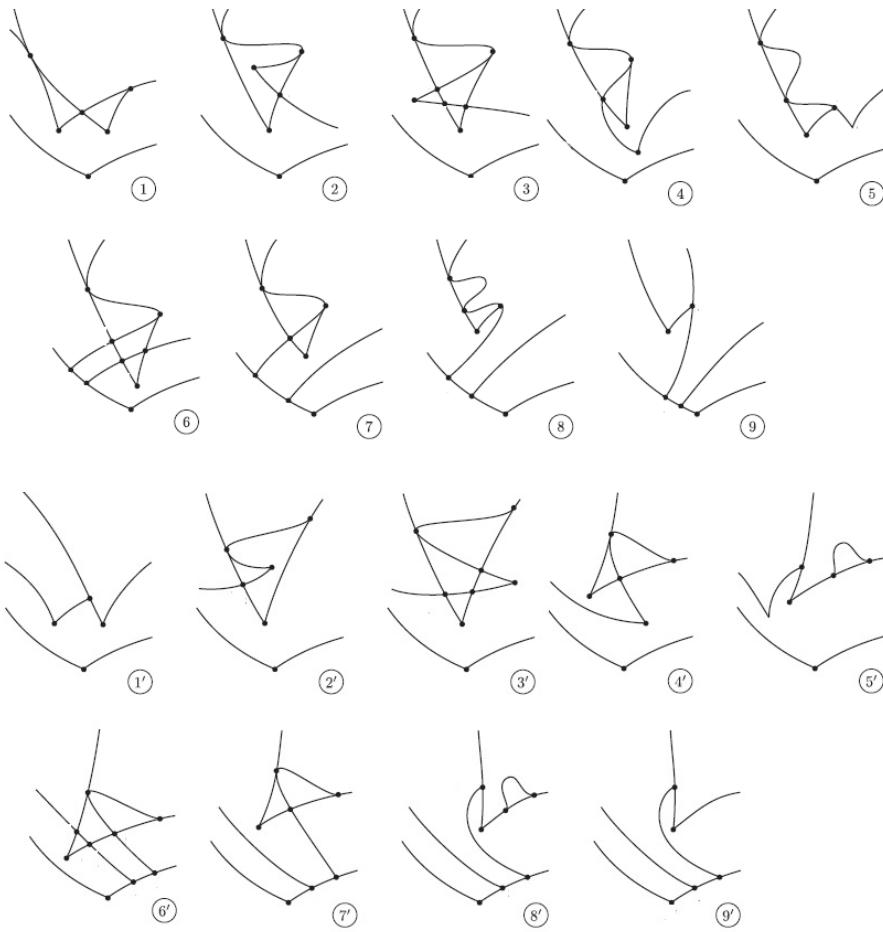


Рис. 2.2: 18 типов бифуркационных диаграмм

Рябов также показал, что включение, указанное в теореме 7, строгое, т.е. бифуркационная диаграмма Σ (в общем случае) не совпадает с $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Таким образом, при ненулевых значениях параметров g и λ следует различать 18 типов диаграмм (см. рис. 2.2).

Замечание 3. Для случая $\lambda = 0$ бифуркационные диаграммы и перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента были найдены в работах М. П. Харламова [29, 9]. Аналогичные результаты для $g = 0$ были получены П. Е. Рябовым [19]. Инварианты Фоменко–Цишанга для случаев $\lambda = 0$ и $g = 0$ были вычислены в работах А. В. Болсинова, П. Рухтера, А. Т. Фоменко [1] и П. В. Морозова [36] соответственно.

2.3 Семейства торов и их перестройки внутри восемнадцати камер. Боттовость интеграла на изоэнергетических поверхностях системы.

2.3.1 Семейства торов и их перестройки на границах камер 1, 1', 2, 2', 6, 6', 7 и 7' камер.

При движении вдоль оси g (при $\lambda = 0$), т.е. проходя по нижней границе камер 1, 2, 6 и 7 (см. рис. 2.1), получаем 4 типа бифуркационных диаграмм случая Ковалевской (см. рис. 2.3). При движении вдоль оси λ (при $g = 0$), т. е. проходя по левой боковой границе камер 1, 2', 6', 7', также получаем 4 типа бифуркационных диаграмм.

В следующих двух теоремах полностью описаны перестройки и семейства торов на границах камер 1, 2, 2', 6, 6', 7, 7'.

Теорема 8. (*М. П. Харламов, П. Е. Рябов [12]*) *При $g = 0$ в прообразах всех гладких дуг бифуркационных диаграмм лежат перестройки торов Лиувилля, которые описываются следующими 3-атомами:*

дуги бифуркационных диаграмм	тип 3-атома
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}$	A
$\alpha_3, \alpha_7, \alpha_8$	$2A$
δ_1, δ_2	A^*
$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_6$	B
β_4	$2B$
γ	C_2

Регулярные точки отображения момента на $\mathbb{R}^2(h, k)$ являются образами некоторого количества торов Лиувилля. Эти торы естественным образом группируются в семейства. Они обозначены римскими цифрами I – VII (см. рис. 2.4). Число торов в каждом семействе указано в следующей таблице:

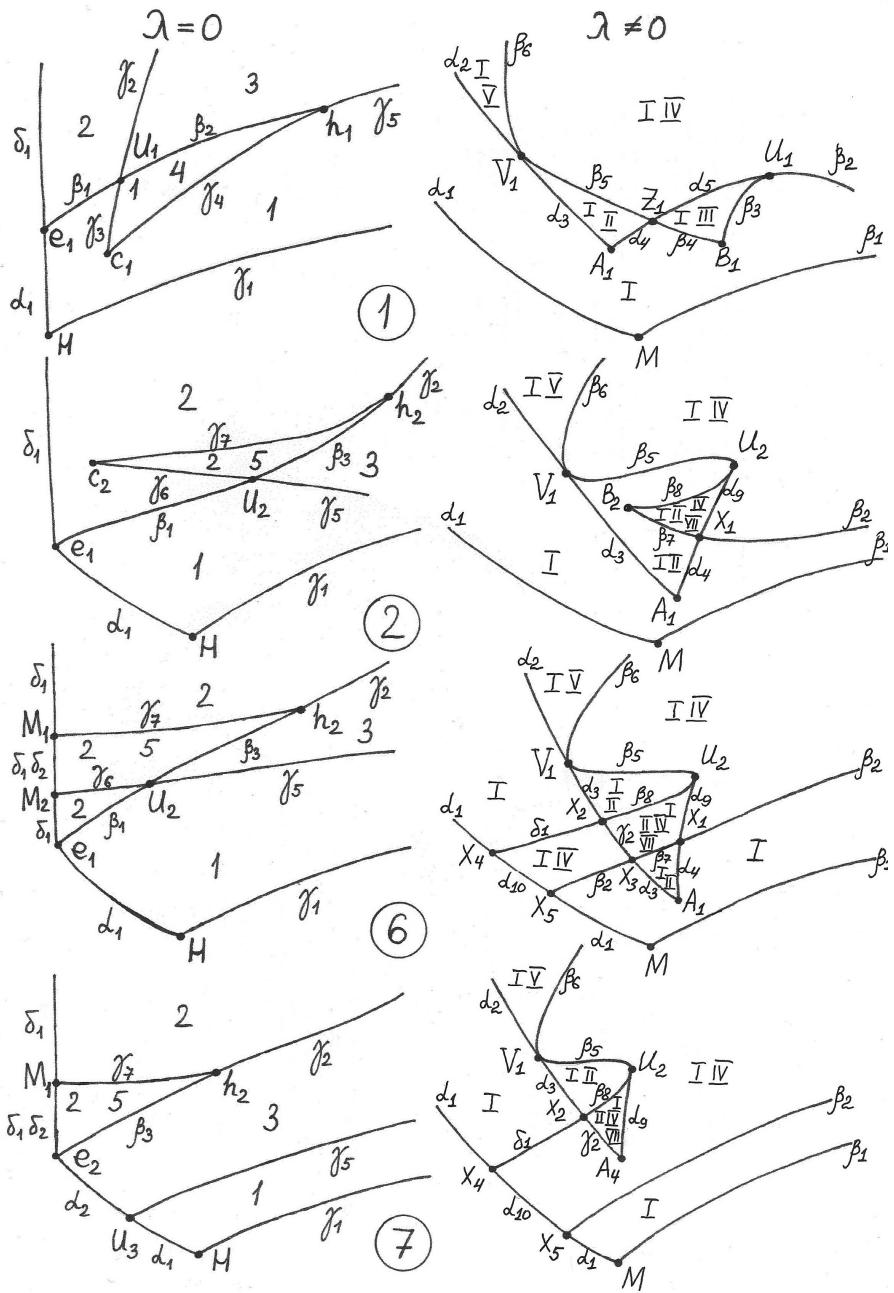


Рис. 2.3: Бифуркационные диаграммы случая Ковалевской и случая Ковалевской-Яхни внутри камер 1, 2, 6, 7

<i>семейство</i>	<i>число торов Лиувилля</i>
<i>I</i>	1
<i>II</i>	2
<i>III</i>	1
<i>IV</i>	1
<i>V</i>	1
<i>VI</i>	1
<i>VII</i>	2

Следующая теорема доказана М. П. Харламовым в [29, 9]. Здесь она приводится в обозначениях, взятых из [1].

Теорема 9. (*М. П. Харламов*) *При $\lambda = 0$ в прообразах всех гладких дуг бифуркационных диаграмм лежат боттовские перестройки торов Лиувилля, которые описываются следующими 3-атомами:*

<i>дуги бифуркационных диаграмм</i>	<i>тип 3-атома</i>
$\alpha_1, \gamma_1, \gamma_4$	<i>A</i>
$\delta_1, \delta_2, \alpha_2, \gamma_7$	<i>2A</i>
γ_2	<i>2A*</i>
$\beta_1, \gamma_3, \gamma_5$	<i>B</i>
β_3, γ_6	<i>2B</i>
β_2	<i>C₂</i>

Число торов Лиувилля в каждом семействе (1)-(5) (см. рис. 2.3) указано в следующей таблице:

<i>семейство</i>	<i>число торов Лиувилля</i>
(1)	1
(2)	2
(3)	2
(4)	1
(5)	2

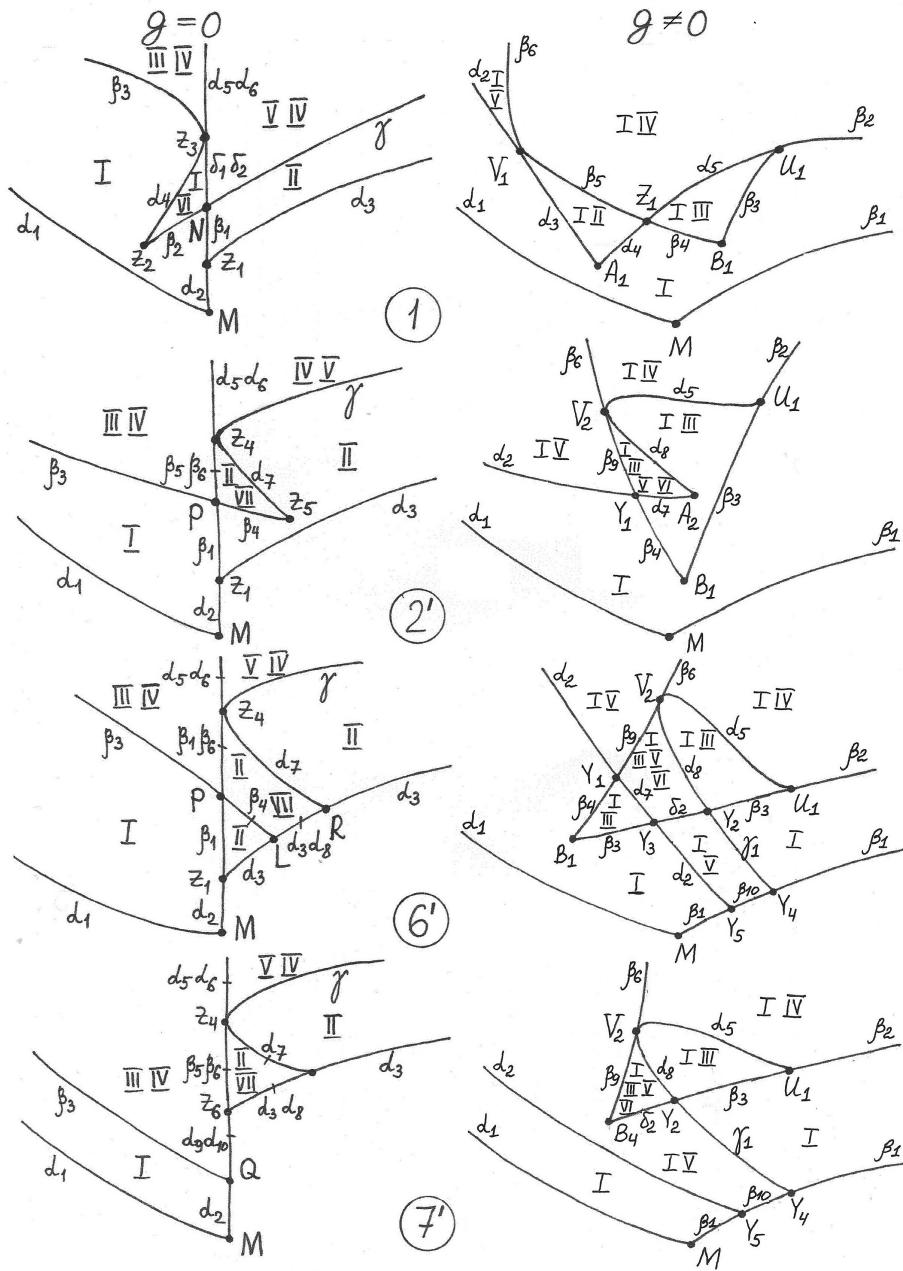


Рис. 2.4: Бифуркационные диаграммы случая Ковалевской-Яхьи при $g = 0$ и случая Ковалевской-Яхьи внутри камер 1, 2', 6', 7'

2.3.2 Теорема о боттовости.

Теорема 10. (*H. C. Славина [23]*) В интегрируемом случае Ковалевской–Яхъи в прообразах всех гладких дуг бифуркационных диаграмм, за исключением конечного числа точек на них, лежат боттовские перестройки торов Лиувилля.

Замечание 4. В интегрируемом случае Ковалевской–Яхъи боттовость явно не доказана. Но из невырожденности критических точек ранга ноль следует, что в окрестности этих точек лежат боттовские перестройки. Эта идея лежит в основе доказательства предыдущей теоремы.

Доказательство. Проверка боттовости сводится к проверке невырожденности гессиана d^2K . Дополнительный интеграл и функции, которые задают бифуркационные кривые Σ_i на плоскости $R^2(h, k)$, являются аналитическими. Определитель матрицы d^2K задаётся многочленом. Таким образом проверка невырожденности сводится к проверке того, что многочлен не равен нулю. Следует отметить, что на конце каждой дуги диаграммы лежит точка, прообраз которой содержит положение равновесия. Этот факт, а также утверждение о невырожденности положений равновесия (теорема 13) будут доказаны далее. Это означает, что в окрестности таких точек перестройки боттовские. Более того, боттовость должна сохраняться на участках, удалённых от положений равновесия за исключением, быть может, конечного числа точек на этих участках. Если предположить, что боттовость нарушается на каком-то участке (на целой дуге), то гессиан дополнительного интеграла, который задаётся многочленом, должен равняться нулю, чего не может быть, так как, если аналитическая функция равна нулю на отрезке, то она тождественный ноль. Получаем противоречие с тем, что положения равновесия невырождены. Теорема доказана. \square

Используя теоремы 8, 9, можно описать перестройки торов в камерах близких к осям. В предположении боттовости можно осуществить переход внутрь

камер 1, 2, 2', 6, 6', 7, 7' с границ, и таким образом перенести перестройки и семейства торов.

2.3.3 Переход внутрь камер 1, 2, 2', 6, 6', 7, 7' с границ. Определение перестроек во всех камерах.

В камерах 1, 1' - 9, 9' на рисунках 2.5-2.13 гладкие дуги бифуркационных диаграмм обозначены малыми греческими буквами с индексами.

Замечание 5. Внутрь камеры 1 можно попасть с нижней границы ($\lambda = 0$) и с левой боковой границы ($g = 0$) (см. рис. 2.3, 2.4). Так как на этих границах обозначения не согласованы, то возникнут разные обозначения для одних и тех же дуг диаграммы и семейств торов (см. теоремы 8, 9). Поэтому в [38] были введены единые обозначения во всех 18 камерах (т.е. дуги бифуркационных диаграмм, которые не перестраиваются при переходе из камеры в камеру, обозначены одинаково). Таблица 2.1 (взятая из [38]) приводит соответствие разных обозначений (возникших из теорем 8, 9 и общего случая) одних и тех же дуг бифуркационной диаграммы на границах камер и внутри них. С учётом теорем 8, 9, 11 в таблице указан тип перестройки на дугах бифуркационных диаграмм.

Теорема 11. (H. C. Славина) В случае Ковалевской-Яхъи в камерах 1, 1' - 9, 9' (см. рис. 2.5-2.13) в прообразе всех гладких дуг бифуркационных диаграмм лежат боттовские перестройки следующих типов:

дуги бифуркационных диаграмм	тип 3-атома
$\alpha_1, \beta_1, \alpha_3, \beta_3, \gamma_1, \delta_1$	A
$\beta_6, \alpha_8, \beta_8, \alpha_{10}, \beta_{10}, \gamma_2, \delta_2$	2A
β_5	$2A^*$
$\alpha_2, \beta_2, \alpha_4, \beta_4$	B
$\alpha_7, \beta_7, \alpha_9, \beta_9$	2B
α_5	C_2

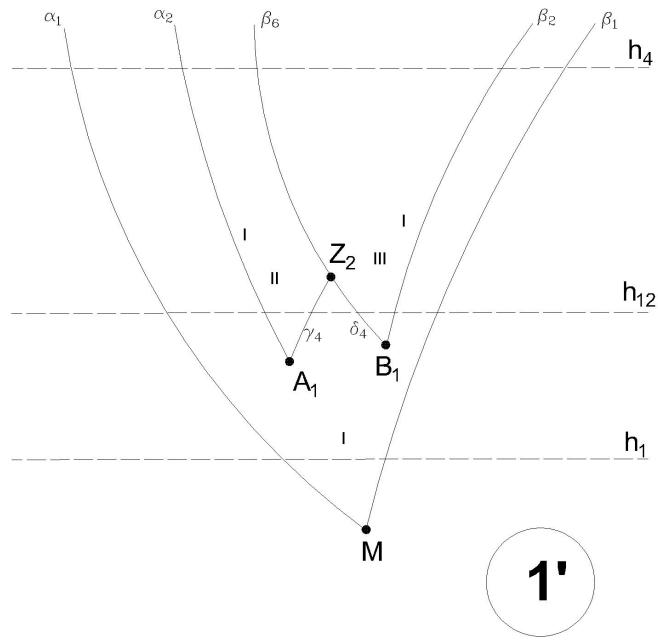
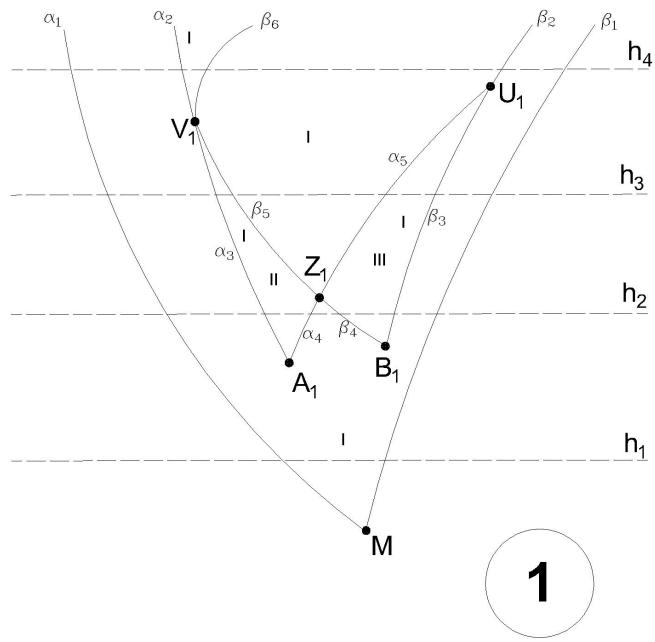


Рис. 2.5: Бифуркационные диаграммы в камерах 1, 1'

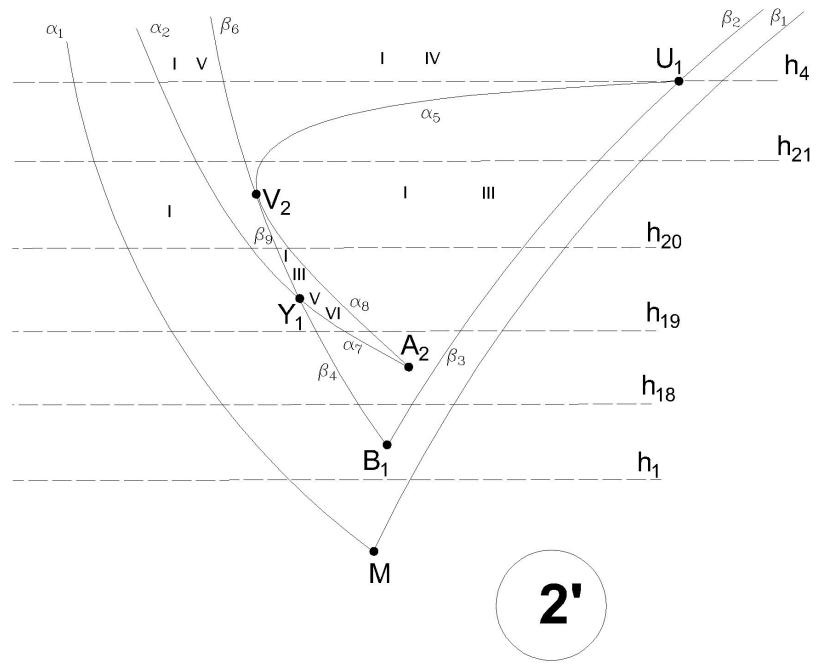
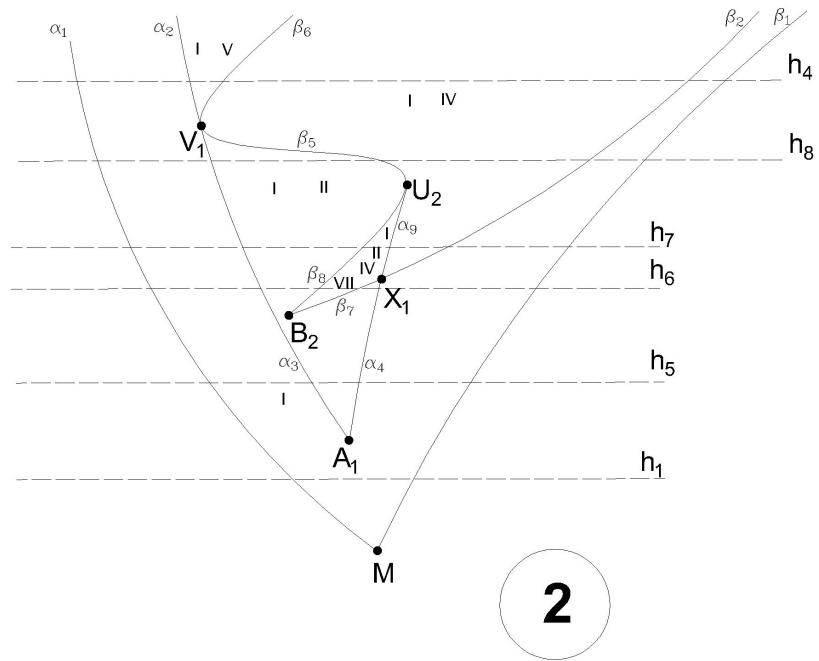


Рис. 2.6: Бифуркационные диаграммы в камерах 2, 2'

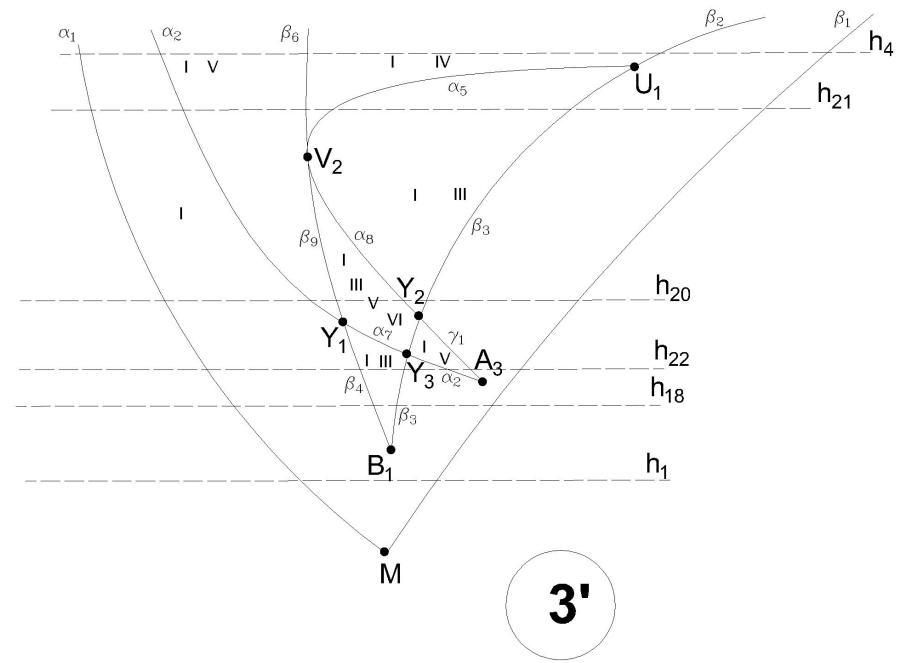
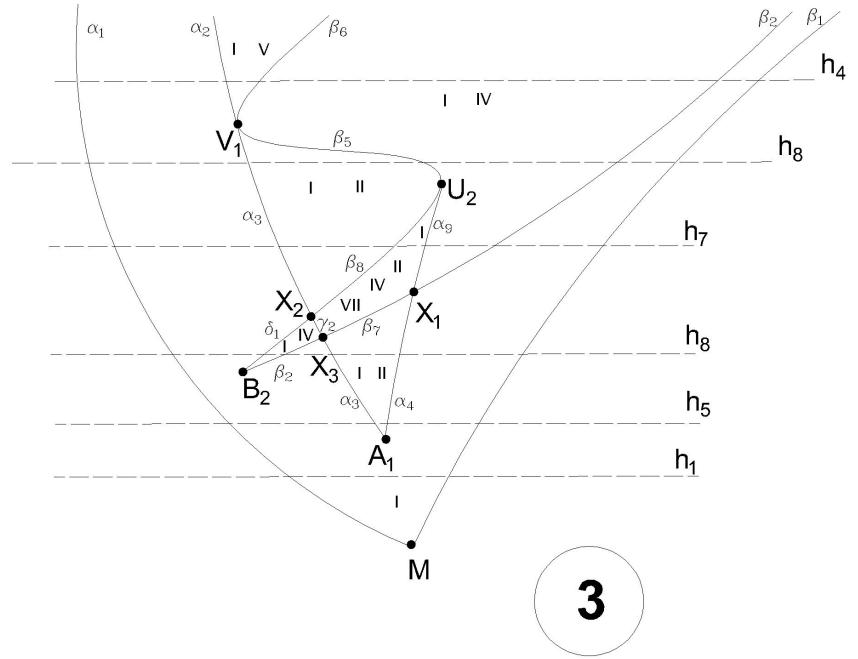


Рис. 2.7: Бифуркационные диаграммы в камерах 3, 3'

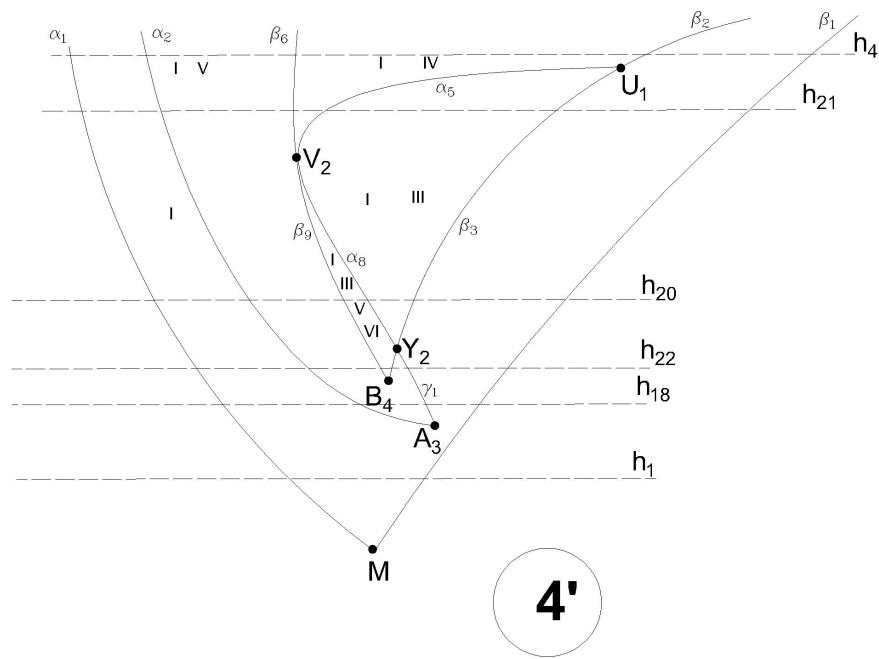
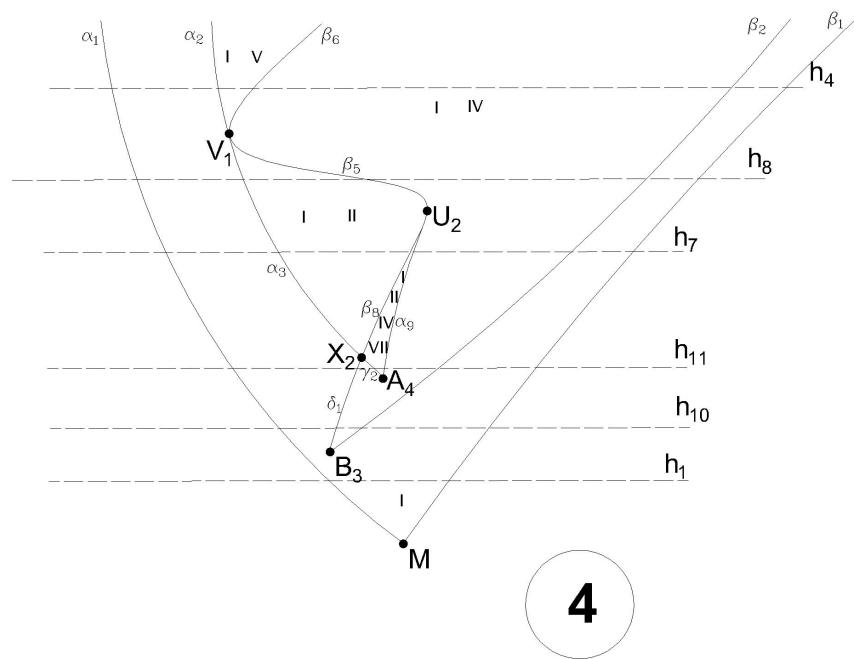


Рис. 2.8: Бифуркационные диаграммы в камерах 4, 4'

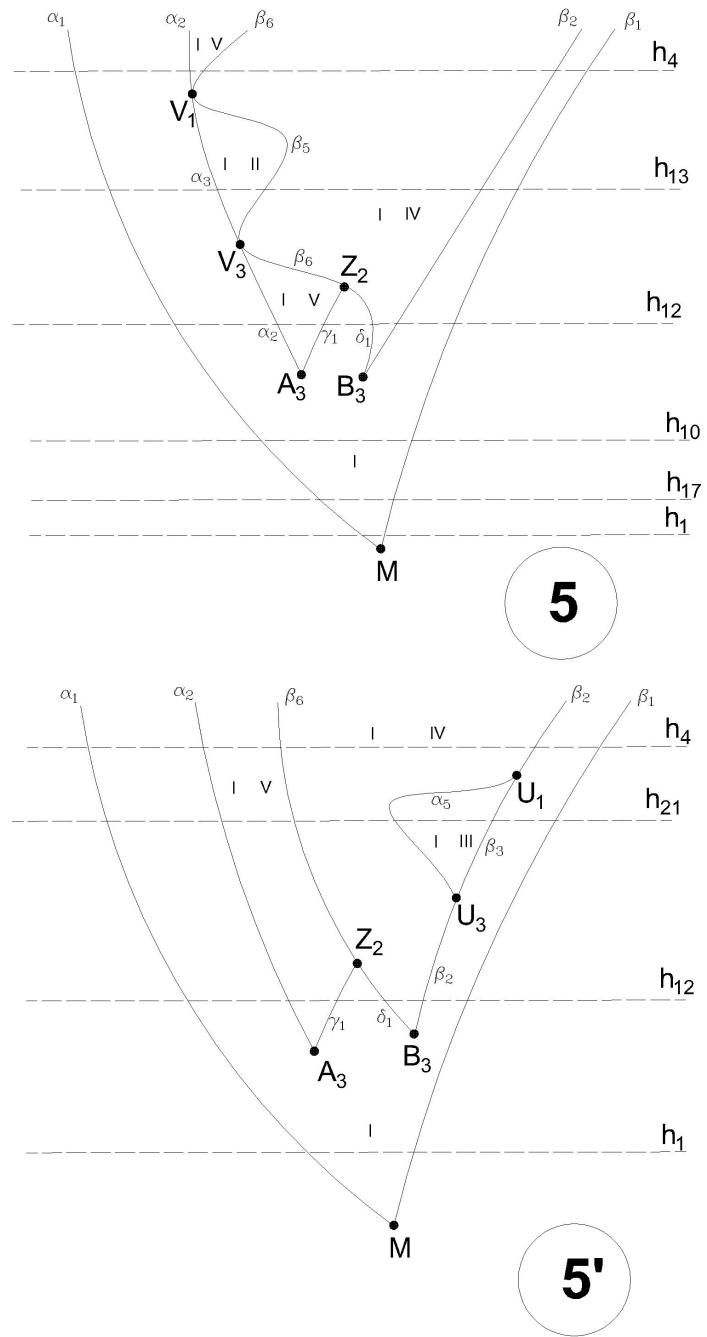
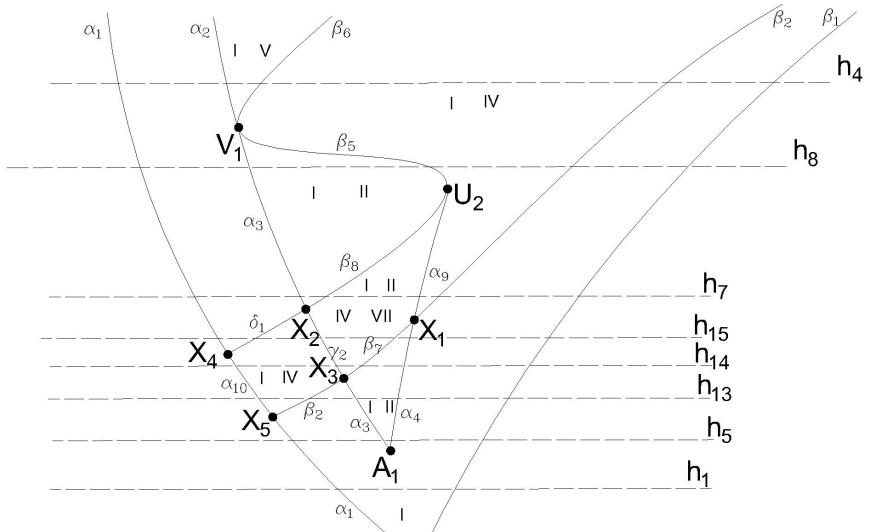
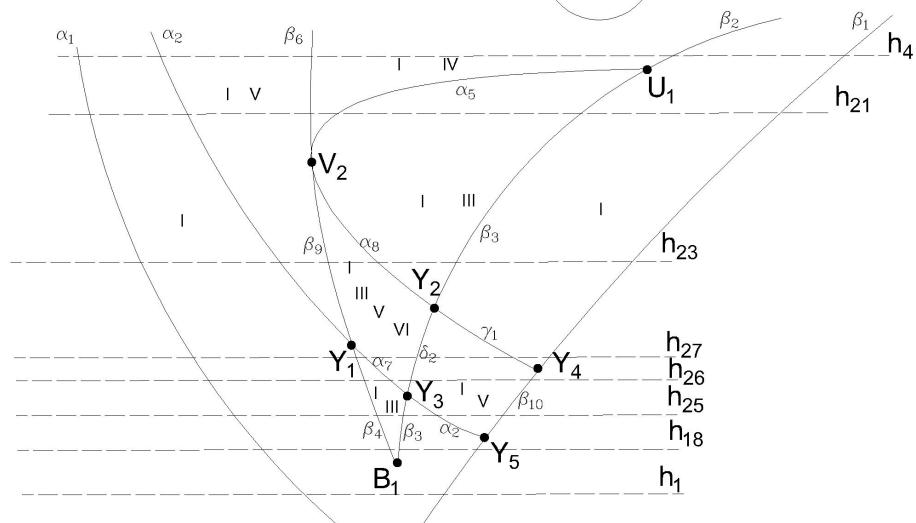


Рис. 2.9: Бифуркационные диаграммы в камерах 5, 5'



6



6'

Рис. 2.10: Бифуркационные диаграммы в камерах 6, 6'

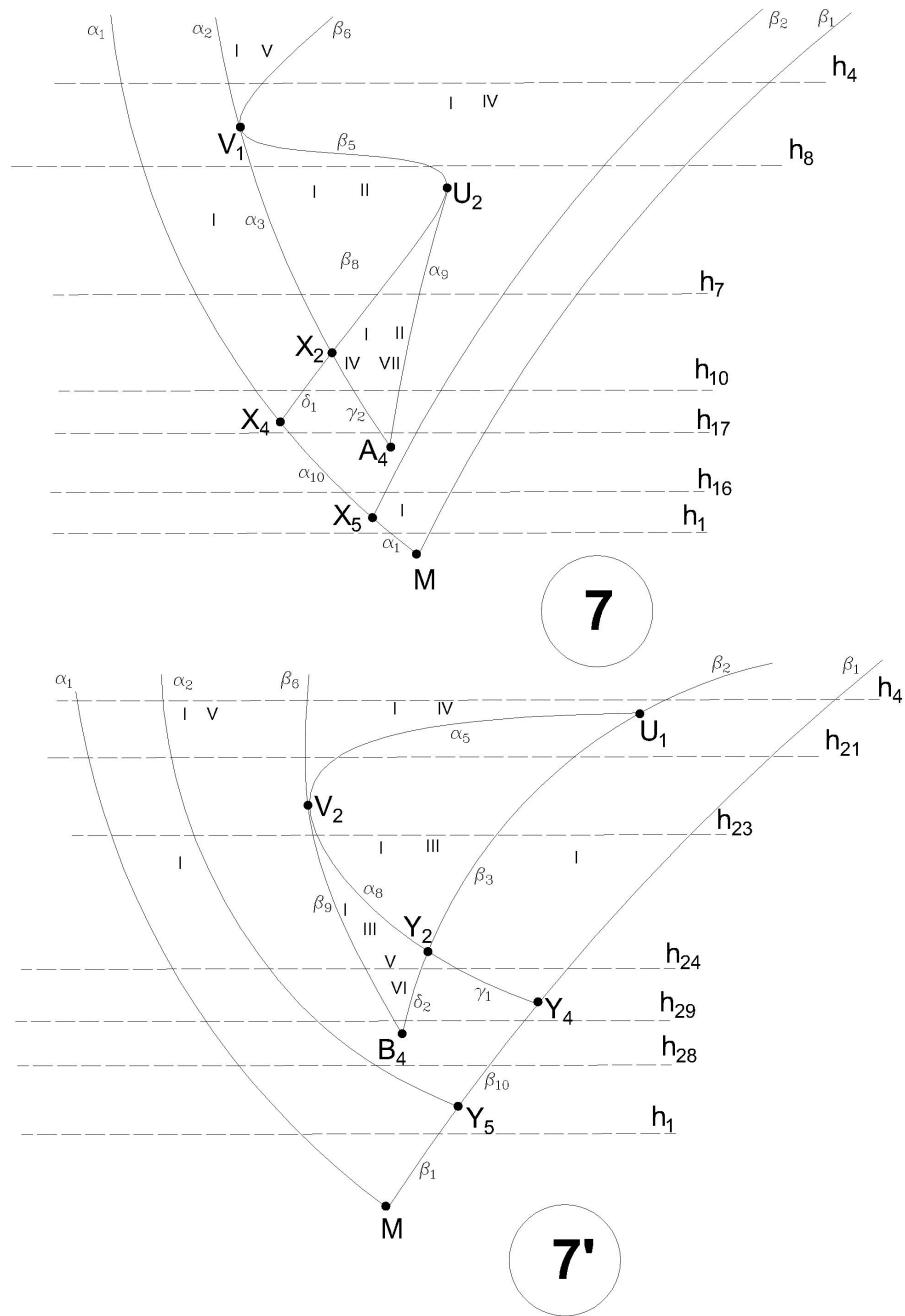


Рис. 2.11: Бифуркационные диаграммы в камерах 7, 7'

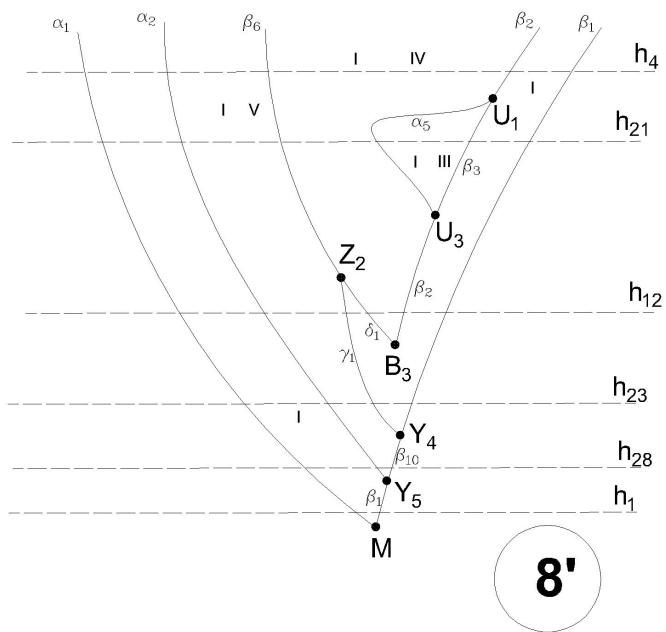
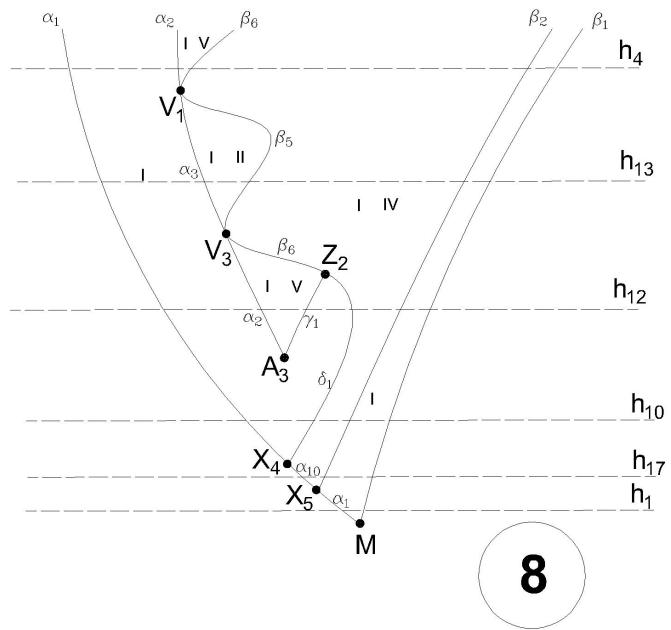


Рис. 2.12: Бифуркационные диаграммы в камерах 8, 8'

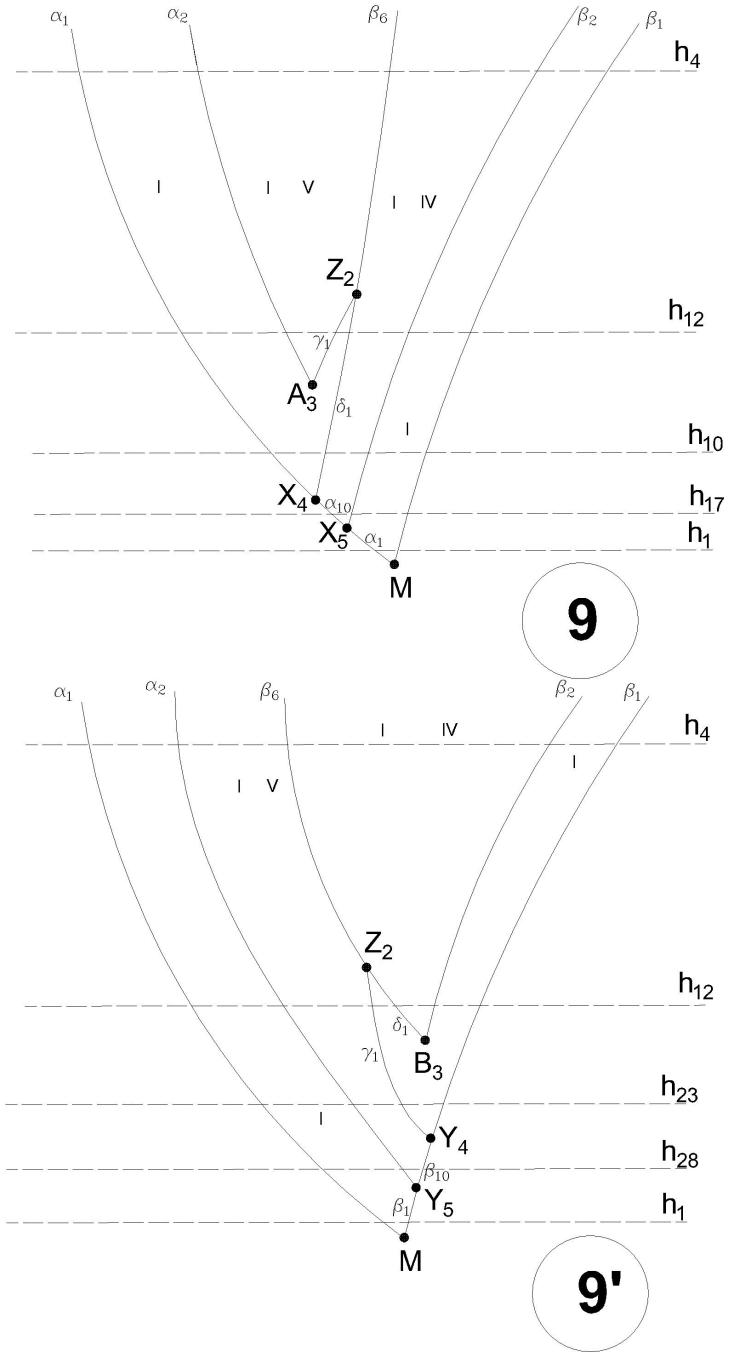


Рис. 2.13: Бифуркационные диаграммы в камерах 9, 9'

Таблица 2.1: Соответствие обозначений в случаях Ковалевской, Ковалевской-Яхьи и Ковалевской-Яхьи при $g = 0$

Случай $\lambda = 0$	Общий случай	Случай $g = 0$	Тип перестройки
α_1	α_1	α_1	A
γ_1	β_1	α_2	A
—	α_2	β_3	B
γ_5	β_2	—	B
—	α_3	α_4	A
γ_4	β_3	—	A
β_1	α_4	β_2	B
γ_3	β_4	β_1	B
β_2	α_5	γ	C_2
γ_2	β_5	δ_1, δ_2	$2A^*$
—	β_6	α_5, α_6	$2A$
—	α_7	β_4	$2B$
γ_6	β_7	—	$2B$
—	α_8	α_7	$2A$
γ_7	β_8	—	$2A$
β_3	α_9	—	$2B$
—	β_9	β_5, β_6	$2B$
α_2	α_{10}	—	$2A$
—	β_{10}	α_9, α_{10}	$2A$
$\delta_1\delta_2$	$\alpha_{10}\gamma_2$	—	$4A$
—	$\beta_{10}\delta_2$	α_3, α_8	$4A$
δ_1	$\alpha_1\alpha_3$	α_{11}, α_{12}	$2A$
$\gamma_1\gamma_4$	$\beta_1\beta_3$	α_3	$2A$
—	γ_1	—	A
—	δ_1	—	A
—	γ_2	—	$2A$
—	δ_2	—	$2A$

Доказательство. Заметим, что вертикальная левая граница камер $1, 2', 6', 7'$ соответствует случаю $g = 0$, а нижняя граница камер $1, 2, 6, 7$ соответствует случаю $\lambda = 0$. На границах известны перестройки и количество торов (теоремы 8, 9). В предположении боттовости можно осуществить переход, продолжая перестройки и семейства торов, с оси $g = 0$ (границы камер) внутрь камер $1, 2'$ и с оси $\lambda = 0$ (границы камер) внутрь камер $1, 2$ (см. рис. 2.4, рис. 2.3). В остальных камерах перестройки и семейства торов определяются путём перехода из соседних камер (см. рис. 2.1). Таким способом определяются перестройки на всех дугах бифуркационных диаграмм, кроме дуг $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ в камерах $1', 3, 3' - 9, 9'$. Соответствующие им перестройки будут определены в последующих главах (см. предложение 5). Здесь же приводится ответ для полноты.

Камеры $1, 2$ и $2'$

При переходе с вертикальной границы камер 1 и $2'$ внутрь дуги α_3 , которой соответствовала перестройка $2A$, распадается на две дуги с перестройками A . Обозначим эти дуги β_1 и β_3 . Точка z_1 переходит в точку возврата B_1 . Появляется новая точка касания U_1 , справа от которой отсекается часть кривой Σ_2 (см. [19]), а на кривой Σ_1 появляется новая перестройка. Обозначим дугу с новой перестройкой β_2 . При таком переходе остальная часть диаграммы не меняется, поэтому все перестройки переносятся.

При переходе с нижней границы камер 1 и 2 дуга δ_1 с перестройкой $2A$ распадается на две дуги α_1 и α_3 с перестройками A , точка e_1 переходит в точку возврата A_1 , и появляется новая точка касания V_1 . Перестройки входящих и выходящих из неё дуг известны в силу перехода с оси $g = 0$. Остальная часть диаграммы не меняется при данном переходе, поэтому остальные перестройки переносятся. Таким образом, становится известна перестройка на дуге β_2 (см. рис. 2.3).

Камера 3

При переходе из камеры 2 в камеру 3 “ключ” с точкой возврата B_2 пересекает дугу α_3 . Обозначим через X_2 и X_3 точки пересечения “ключа” с дугой

α_3 , а новую точку возврата - через B_3 . На дугах X_2X_3 , B_3X_2 возникают неизвестные перестройки. Обозначим эти дуги γ_2 и δ_1 соответственно. Дуга B_3X_3 - продолжение дуги β_2 , поэтому перестройка на этой дуге известна, и обозначение дуги сохранено. Остальные перестройки переносятся, так как другая часть бифуркационной диаграммы не меняется.

Камера 6

При переходе из камеры 3 в камеру 6 “ключ” с точкой возврата B_3 пересекает дугу α_1 . Обозначим через X_4 и X_5 точки пересечения “ключа” с дугой α_1 . На дуге X_4X_5 возникает неизвестная перестройка. Обозначим эту дугу α_{10} . Соответствующая ей перестройка будет определена ниже, в камере 7. Так как другая часть бифуркационной диаграммы не меняется, то другие перестройки автоматически переносятся.

Камера 7

При переходе из камеры 6 в камеру 7 точки X_1 и X_3 приближаются к точке A_1 , затем они исчезают, и возникает новая точка возврата A_4 . В результате этого перехода не возникает новых дуг с неизвестными перестройками.

Также в камеру 7 можно попасть с нижней границы ($\lambda = 0$). При таком переходе дуга δ_1 с перестройкой $2A$ распадается на дуги α_1 и α_3 с перестройками A . Точка e_2 переходит в точку возврата A_4 , возникают дуги δ_1 и γ_2 с неизвестными перестройками, появляется точка касания V_1 . Дуга α_2 переходит в дугу α_{10} , а значит дуге α_{10} соответствует перестройка $2A$.

Камера 8

При переходе из камеры 7 в камеру 8 точки X_2 и U_2 приближаются к точке A_4 , затем они исчезают, и возникают новая точка возврата A_3 , новая точка касания V_3 и новая точка пересечения Z_2 . Дуги V_3Z_2 и V_3A_3 - продолжение дуг β_6 и α_2 соответственно, поэтому перестройки на них известны, и обозначение дуг сохранено. Ещё одна неизвестная перестройка возникает на дуге A_3Z_2 . Обозначим эту дугу γ_1 . Остальные перестройки переносятся автоматически.

Камера 9

При переходе из камеры 8 в камеру 9 точки V_1 и V_3 приближаются друг к

другу, затем они исчезают, пропадают соединяющие их дуги β_5 и α_3 . Остальная часть бифуркационной диаграммы не меняется, поэтому переносим перестройки.

Камера 4

При переходе из камеры 3 в камеру 4 точки X_1 и X_3 приближаются к точке A_1 , затем они исчезают, и возникает новая точка возврата. Её нужно обозначить A_4 , как и возникшую в камере 7 точку возврата. Камера 4 граничит с камерой 7 (см. рис. 2.1), поэтому можно осуществить переход из одной камеры в другую. При таком переходе из камеры 7 в камеру 4 часть бифуркационной диаграммы, содержащая точку возврата A_4 , не меняется, поэтому обозначение точки переносится в камеру 4.

Камера 5

При переходе из камеры 4 в камеру 5 точки X_2 и U_2 приближаются к точке A_4 , затем они исчезают, и возникают новая точка возврата A_3 , новая точка касания V_3 и новая точка пересечения Z_2 . Дуги V_3Z_2 и V_3A_3 - продолжение дуг β_6 и α_2 соответственно, поэтому перестройки на них известны, и обозначение дуг сохранено. Обозначения новых точек взяты из камеры 8, так как она граничит с камерой 5 (см. рис. 2.1). При переходе из камеры 8 в камеру 5 часть бифуркационной диаграммы, которая содержит точки A_3, V_3, Z_2 , не меняется, поэтому все обозначения сохраняются.

Камера 1'

При переходе из камеры 5 в камеру 1' точки V_1 и V_3 приближаются друг к другу, затем они исчезают, пропадают соединяющие их дуги β_5 и α_3 . Остальная часть бифуркационной диаграммы не меняется, поэтому переносим перестройки.

Камера 3'

При переходе из камеры 2' в камеру 3' “ключ” с точкой возврата A_2 пересекает дугу β_3 . Обозначим через Y_2 и Y_3 точки пересечения ключа с дугой β_3 . Неизвестную перестройку на дуге Y_2Y_3 обозначим через δ_2 . Новую точку возврата нужно обозначить через A_3 , а неизвестную перестройку на дуге

$A_3Y_2 - \gamma_1$. Эти обозначения взяты из камеры 1', так как при последовательном переходе из камер $1' \rightarrow 5' \rightarrow 4' \rightarrow 3'$ (см. рис. 2.1) часть бифуркационной диаграммы, содержащая точку возврата A_3 и дугу γ_1 , не меняется.

Дуга A_3Y_3 - продолжение дуги α_2 , поэтому перестройка на этой дуге известна, и обозначение дуги сохранено. Остальные перестройки переносятся, так как другая часть бифуркационной диаграммы не меняется.

Камера 6'

При переходе из камеры 3' в камеру 6' "ключ" с точкой возврата A_3 пересекает дугу β_1 . Обозначим через Y_4 и Y_5 точки пересечения клюва с дугой β_1 . На дуге Y_4Y_5 возникает неизвестная перестройка. Обозначим эту дугу β_{10} . Соответствующая ей перестройка будет определена ниже, в камере 7'. Так как другая часть бифуркационной диаграммы не меняется, то другие перестройки автоматически переносятся.

Камера 7'

При переходе из камеры 6' в камеру 7' точки Y_1 и Y_3 приближаются к точке B_1 , затем они исчезают, и возникает новая точка возврата B_4 . В результате этого перехода не возникает новых дуг с неизвестными перестройками.

Также в камеру 7' можно попасть с левой вертикальной границы ($g = 0$). При таком переходе дуга α_3 с перестройкой $2A$ распадается на дуги β_1 и β_3 с перестройками A . Точка z_6 переходит в точку возврата B_4 , возникают дуги γ_1 и δ_2 с неизвестными перестройками, появляется точка касания U_1 . Дуга α_9, α_{10} переходит в дугу β_{10} , а значит дуге β_{10} соответствует перестройка $2A$.

Камера 8'

При переходе из камеры 7' в камеру 8' точки Y_2 и V_2 приближаются к точке B_4 , затем они исчезают, и возникают новая точка возврата B_3 , новая точка касания U_3 и новая точка пересечения Z_2 . На дуге U_3Z_2 отсутствуют критические движения (см. [19]), поэтому она не является частью бифуркационной диаграммы. Дуга U_3B_3 - продолжение дуги β_2 , поэтому перестройка на ней известна, и обозначение дуги сохранено. Ещё одна неизвестная перестройка возникает на дуге B_3Z_2 . Обозначим эту дугу δ_1 . Остальные перестройки

переносятся автоматически.

Для новой точки пересечения взято обозначение Z_2 , которое возникло в камере 5. Дело в том, что в камеру 8 можно попасть из камеры 5, двигаясь последовательно через камеры 1', 9' (см. рис. 2.1). При таком движении часть бифуркационной диаграммы, содержащая точку Z_2 , не меняется, поэтому обозначение переносится. По аналогичным причинам новая дуга обозначена через δ_1 .

Камера 9'

При переходе из камеры 8' в камеру 9' точки U_1 и U_3 приближаются друг к другу, затем они исчезают, пропадают соединяющие их дуги α_5 и β_3 . Остальная часть бифуркационной диаграммы не меняется, поэтому переносим перестройки.

Камера 4'

При переходе из камеры 3' в камеру 4' точки Y_1 и Y_3 приближаются к точке B_1 , затем они исчезают, и возникает новая точка возврата. Её нужно обозначить B_4 , как и возникшую в камере 7' точку возврата. Камера 4' граничит с камерой 7' (см. рис. 2.1), поэтому можно осуществить переход из одной камеры в другую. При таком переходе из камеры 7' в камеру 4' часть бифуркационной диаграммы, содержащая точку возврата B_4 , не меняется, поэтому обозначение точки переносится в камеру 4'.

Камера 5'

При переходе из камеры 4' в камеру 5' точки Y_2 и V_2 приближаются к точке B_4 , затем они исчезают, и возникают новая точка возврата B_3 , новая точка касания U_3 и новая точка пересечения Z_2 . На дуге U_3Z_2 отсутствуют критические движения (см. [19]), поэтому она не является частью бифуркационной диаграммы. Дуга U_3B_3 - продолжение дуги β_2 , поэтому перестройка на ней известна, и обозначение дуги сохранено. Обозначения новых точек взяты из камеры 8', так как она граничит с камерой 5' (см. рис. 2.1). При переходе из камеры 8' в камеру 5' часть бифуркационной диаграммы, которая содержит точки B_3, U_3, Z_2 , не меняется, поэтому все обозначения сохраняются.

Теорема доказана. □

Замечание 6. В случае Ковалевской-Яхьи в камерах 1, 1' - 9, 9' (см. рис. 2.5-2.13) в прообразах регулярных точек отображения момента лежит некоторое число торов Лиувилля, которые группируются в семейства. Число торов в каждом семействе I-VII равно одному.

Данный результат взят из [38]. Для корректного определения семейств торов Лиувилля в общем случае, П. П. Андреянов построил круговые молекулы без меток точек $X_2, Y_2, X_3, Y_3, X_4, Y_4, A_3, B_3, A_4, B_4, Z_2$, при помощи пакета символьных вычислений Wolfram Mathematica 6.0, и ввел новое более мелкое разбиение торов на семейства. Идея доказательства следующая:

1. Сначала все торы разделим на семейства так, будто в прообразах дуг $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ нет ни одного тора Лиувилля. Тогда разбиение на семейства в общем случае будет таким же, как и в граничных случаях. В одном граничном случае, некоторые торы могут принадлежать разным компонентам связности, при этом те же торы могут принадлежать одной компоненте связности в другом граничном случае. Некоторые торы могут быть не представлены в одном граничном случае, но тогда обязательно будут присутствовать во втором. Комбинируя семейства для двух граничных случаев, мы получим новое, более мелкое разбиение. Обозначим эти семейства i (1 тор), ii (1 тор), iii (1 тор), iv (1 тор), v (1 тор), vi (1 тор), vii (2 тора), $viii$ (2 тора).

	$\lambda = 0$		$g = 0$
ii	\times	(2)	VI
i	(1)		I II
iii	(4)	\times	
iv	(3)	IV	
v		V	
vi	\times	III	
vii	\times	VII	
$viii$	(5)	\times	

2. Теперь посмотрим на круговые молекулы точек $X_2, Y_2, X_3, Y_3, X_4, Y_4, A_3$,

B_3, A_4, B_4, Z_2 . В прообразе дуг $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ есть торы Лиувилля, поэтому некоторые семейства могут отождествиться, или часть одного семейства отождествляется с другим семейством. В результате проверки этих круговых молекул оказалось, что семейства i, iv склеились, семейство v склеилось с половиной семейства $viii$, а семейство vi склеилось с половиной семейства vii . Введём новые обозначения $I = i = iv, II = ii, III = iii, IV = v, V = vi, V+VI = vii, IV + VII = viii$, мы получили корректное разбиение.

Глава 3

Топология слоения Лиувилля в окрестностях вырожденных одномерных орбит и невырожденных положений равновесия.

3.1 Классификация невырожденных положений равновесия.

Напомним, что $M_g^4 = \{f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, f_2 = s_1r_1 + s_2r_2 + s_3r_3 = g\}$, где f_1 и f_2 - функции, лежащие в ядре скобки Ли-Пуассона и являющиеся первыми интегралами уравнений (2.1.2).

Рассмотрим ограничения гамильтониана H и интеграла K на M_g^4 , обозначив их $H_{g\lambda}$ и $K_{g\lambda}$ соответственно.

Теорема 12. (*H. C. Славина [23]*) В случае Ковалевской-Яхъи все точки ранга ноль на фазовом пространстве системы имеют следующие координаты:

$$\omega_1 = \pm \sqrt{z^2 - 1} \frac{2gz - \lambda}{2z^2 - 1}, \omega_2 = 0, \omega_3 = \frac{2gz - \lambda}{2z^2 - 1}, \nu_1 = \pm \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{z}, \nu_2 = 0, \nu_3 = \frac{1}{z},$$

где z - любой действительный корень уравнения:

$$z(z^2 - 1) \frac{(2gz - \lambda)^2}{(2z^2 - 1)^2} - \lambda z(z^2 - 1) \frac{2gz - \lambda}{2z^2 - 1} \pm \sqrt{z^2 - 1} = 0. \quad (3.1.1)$$

Других критических точек у гамильтонианов $H(g, \lambda)$ на фазовом пространстве M_g^4 нет.

Доказательство. Координаты положений равновесия на фазовом пространстве системы будем искать из условия $\text{sgrad } H(x) = 0$, т.е. приравнивая к нулю правые части уравнений 2.1.5 и используя соотношения 2.1.6:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} (\omega_3 - \lambda)\omega_2 = 0, \\ (\omega_3 - \lambda)\omega_1 + \nu_3 = 0, \\ \nu_2 = 0, \\ \nu_2\omega_3 - \nu_3\omega_2 = 0, \\ \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3 = 0, \\ \nu_1\omega_2 - \nu_2\omega_1 = 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} (\omega_3 - \lambda)\omega_2 = 0, \\ (\omega_3 - \lambda)\omega_1 + \nu_3 = 0, \\ \nu_2 = 0, \\ \nu_3\omega_2 = 0, \\ \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3 = 0, \\ \nu_1\omega_2 = 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \nu_2 = 0, \\ \omega_2 = 0, \\ (\omega_3 - \lambda)\omega_1 + \nu_3 = 0, \\ \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3 = 0, \\ \nu_1^2 + \nu_3^2 = 1, \\ 2\omega_1\nu_1 + (\omega_3 + \lambda)\nu_3 = 2g. \end{array} \right. \end{aligned} \end{aligned} \quad (10)$$

Последний переход сделан в предположении $\nu_2 = \omega_2 = 0$. Если предположить, что $\omega_2 \neq 0$, то:

$$\begin{cases} (\omega_3 - \lambda)\omega_2 = 0, & \nu_2 = 0, \\ (\omega_3 - \lambda)\omega_1 + \nu_3 = 0, & \nu_3 = 0, \\ \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3 = 0, & \nu_1 = 0. \end{cases}$$

Этот вариант невозможен в силу соотношения $\Gamma = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$.

Если в (10) $\nu_3 = 0$, тогда:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} (\omega_3 - \lambda)\omega_1 = 0, \\ -\nu_1\omega_3 = 0, \\ \nu_1^2 = 1, \\ 2\omega_1\nu_1 = 2g, \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} (\omega_3 - \lambda)\omega_1 = 0, \\ \nu_1\omega_3 = 0, \\ \nu_1 = \pm 1, \\ 2\omega_1\nu_1 = 2g, \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} (\omega_3 - \lambda)\omega_1 = 0, \\ \omega_3 = 0, \\ \nu_1 = \pm 1, \\ \omega_1 = \pm g, \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \omega_3 - \lambda = 0, \\ \omega_3 = 0, \\ \nu_1 = \pm 1, \\ \omega_1 = \pm g, \end{array} \right. \end{aligned} \end{aligned} \end{aligned}$$

Таким образом, если $\nu_3 = 0$, то $\lambda = 0$. И положения равновесия имеют следующие координаты на M_g^4 :

$$\omega_1 = \pm g; \omega_2 = 0; \omega_3 = 0; \nu_1 = \pm 1; \nu_2 = 0; \nu_3 = 0.$$

Пусть теперь $\nu_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} (\omega_3 - \lambda)\omega_1 + \nu_3 = 0, |\cdot \nu_1| \\ \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3 = 0, |\cdot \omega_1| \\ \nu_1^2 + \nu_3^2 = 1, |\cdot \nu_3^2| \text{ (предполагая } \nu_3 \neq 0) \\ 2\omega_1\nu_1 + (\omega_3 + \lambda)\nu_3 = 2g. |\cdot \nu_3| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_3\omega_1\nu_1 - \lambda\omega_1\nu_1 + \nu_3\nu_1 = 0, \\ \nu_3\nu_1^2 - \nu_1\omega_3\omega_1 = 0, \\ \left(\frac{\nu_1}{\nu_3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\nu_3^2}, \\ 2\omega_1\frac{\nu_1}{\nu_3} + \omega_3 + \lambda = \frac{2g}{\nu_3}, \end{cases}$$

Сделаем замену переменных. Пусть $\frac{1}{\nu_3} = z, \frac{\nu_1}{\nu_3} = s$. Заметим, что $z \neq \pm 1$. Так как если $z = \pm 1 \Rightarrow \nu_3 = \pm 1$, и из третьего уравнения системы следовало бы, что $\nu_1 = 0$, а система имела бы вид:

$$\begin{cases} (\omega_3 - \lambda)\omega_1 \pm 1 = 0, & \omega_1 = 0, \\ (\omega_3 + \lambda) = \pm 2g, & \nu_3 = \pm 1, \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

(так как несовместны первые два уравнения системы)

Итак, вернёмся к замене. Сложим первые два уравнения системы. Получим:

$$\begin{cases} \nu_3\nu_1^2 - \lambda\omega_1\nu_1 + \nu_3\nu_1 = 0, |\cdot \nu_3^2| \\ \nu_3\omega_1 = \nu_1\omega_3, |\cdot \nu_3| \\ s^2 + 1 = z^2, \\ 2\omega_1s + \omega_3 + \lambda = 2gz, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\nu_1^2 - \lambda\omega_1sz + s = 0, \\ \omega_1 = s\omega_3, \\ s^2 + 1 = z^2, \\ 2\omega_1s + \omega_3 + \lambda = 2gz, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\nu_1^2 - \lambda\omega_1sz + s = 0, \\ \omega_1 = s\omega_3, \\ s^2 + 1 = z^2, \\ 2s^2\omega_3 + \omega_3 + \lambda = 2gz, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z\nu_1^2 - \lambda\omega_1sz + s = 0, \\ \omega_1 = s\omega_3, \\ s^2 + 1 = z^2, \\ \omega_3 = \frac{2gz - \lambda}{2s^2 + 1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\nu_1^2 - \lambda\omega_1sz + s = 0, \\ \omega_1 = s\frac{2gz - \lambda}{2s^2 + 1}, \\ s = \pm\sqrt{z^2 - 1}, \\ \omega_3 = \frac{2gz - \lambda}{2s^2 + 1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z\nu_1^2 - \lambda\omega_1sz + s = 0, \\ \omega_1 = \pm\sqrt{z^2 - 1}\frac{2gz - \lambda}{2z^2 - 1}, \\ s = \pm\sqrt{z^2 - 1}, \\ \omega_3 = \frac{2gz - \lambda}{2z^2 - 1}, \end{cases}$$

Подставим в первое уравнение системы $s(z)$ и $\omega_1(z)$:

$$z \frac{(2gz - \lambda)^2}{(2z^2 - 1)^2} - \lambda z \frac{2gz - \lambda}{2z^2 - 1} \pm \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} = 0.$$

Легко проверить, что для точек, найденных из условия $\text{sgrad } H = 0$, условие $\text{sgrad } K = 0$ также выполнено. Теорема доказана. \square

В случае Ковалевской–Яхьи, особыми точками бифуркационной диаграммы являются точки пересечения, касания и возврата, изолированных точек нет (см. [19]). Из результатов работы [19] также вытекает следующее утверждение.

Предложение 2. *При изменении значений параметров g, λ внутри каждой из 18 камер (см. рис. 2.1) количество особых точек не меняется. При переходе из одной камеры в другую их число может изменяться.*

При переходе из камеры в камеру изменяется тип бифуркационной диаграммы, поэтому может измениться и количество особых точек (см. рис. 2.2). Например, в камере 2 (см. рис. 2.6) две точки пересечения (M, X_1) , две точки возврата (A_1, B_2) и два касания (U_2, V_1) . А в камере 3 четыре точки пересечения (M, X_1, X_2, X_3) , две точки возврата (A_1, B_3) и два касания (V_1, U_2) .

Следующие два утверждения были проверены при помощи пакета символьных вычислений Wolfram Mathematica 6.0.

Предложение 3. *При фиксированных значениях параметров g, λ внутри каждой из 18 камер количество точек пересечения дуг диаграммы совпадает с количеством корней уравнения 3.1.1.*

Предложение 4. *В случае Ковалевской–Яхьи для каждого небифуркационного значения параметров (g, λ) все положения равновесия отображаются в особые точки бифуркационной диаграммы, а именно в точки трансверсального пересечения гладких дуг диаграммы. Причём разным положениям равновесия соответствуют разные точки пересечения, а количество положений равновесия совпадает с числом точек пересечения гладких дуг диаграммы.*

Теорема 13. (*H. C. Славина [23]*) В случае Ковалевской–Яхьи при небифуркационных значениях параметров g и λ все положения равновесия невырождены, причём в прообразе каждой точки пересечения бифуркационных кривых лежит ровно одна критическая точка ранга 0.

Доказательство. Будем вести доказательство теоремы в координатах (s, r) , так как в этих координатах скобка Ли–Пуассона записывается проще, чем в координатах (ω, ν) .

Покажем, что при $\lambda = 1, \mu = 0$ линейная комбинация будет иметь попарно различные собственные значения.

Рассмотрим линеаризацию векторного потока 2.1.2 на $e(3)^*$. Дифференцируя правые части уравнений 2.1.5, получаем матрицу оператора $2A_H$:

$$2A_H = \begin{pmatrix} 0 & -(s_3 + 2\lambda) & -s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 2\lambda + s_3 & 0 & s_1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & r_3 & -2r_2 & 0 & -2(s_3 + \lambda) & s_2 \\ -r_3 & 0 & 2r_1 & 2(s_3 + \lambda) & 0 & -s_1 \\ r_2 & -r_1 & 0 & -s_2 & s_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Отметим, что выше мы обозначали через A_H оператор линеаризации гамильтонова векторного поля в особой точке на симплектическом многообразии, т.е. для невырожденной скобки Пуассона. Аналогичным образом можно действовать и для вырожденной скобки Пуассона (в окрестности точки, где ранг скобки локально постоянен), учитывая, что все операторы линеаризации в этом случае будут иметь одно и то же ядро, размерность которого равна корангу скобки.

Рассматриваемая скобка Ли–Пуассона на $e(3)^*$ почти всюду имеет ранг 4, вследствие чего оператор линеаризации A_H гамильтонова векторного поля $sgrad H$ в особой точке всегда имеет два нулевых собственных значения.

В положении равновесия $r_2 = s_2 = 0$. Будем искать собственные значения матрицы $2A_H$.

$$2A_H - tE = \begin{pmatrix} -t & -(s_3 + 2\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\lambda + s_3 & -t & s_1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -t & 0 & -2 & 0 \\ 0 & r_3 & 0 & -t & -2(s_3 + \lambda) & 0 \\ -r_3 & 0 & 2r_1 & 2(s_3 + \lambda) & -t & -s_1 \\ 0 & -r_1 & 0 & 0 & s_1 & -t \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен имеет вид

$$\chi_{A_H}(t) = \det(2A_H - tE) = t^2[t^4 + (s_1^2 + 4(s_3 + \lambda)^2 + 6r_1 + (s_3 + 2\lambda)^2)t^2 + (s_1^2 + 4(s_3 + \lambda)^2 + 4r_1)(2r_1 + (s_3 + 2\lambda)^2)].$$

Пусть

$$a = s_1^2 + 4(s_3 + \lambda)^2 + 4r_1, \quad b = 2r_1 + (s_3 + 2\lambda)^2. \quad (3.1.2)$$

Тогда $\chi_{A_H}(t) = t^2[t^4 + (a + b)t^2 + ab]$. Два собственных значения нулевые, а четыре остальных имеют вид $\pm\sqrt{a}, \pm\sqrt{b}$.

Невырожденность особой точки ранга 0 эквивалентна тому, что $a \neq b$ и $ab \neq 0$. При этом возникают следующие возможности:

если $a < 0, b < 0$, то получим четыре действительных корня \Rightarrow тип точки "седло-седло";

если $ab < 0$, то возникает одна пара действительных и одна пара мнимых корней \Rightarrow тип точки "центр-седло";

если $a > 0, b > 0$, то получим 4 чисто мнимых корня \Rightarrow тип точки "центр-центр".

Для всех небифуркационных значений (g, λ) , т.е. для каждой из 18 камер проверка условий $a \neq b$ и $ab \neq 0$, а также определение знаков a и b могут быть выполнены с помощью компьютера (см. замечание 7, а также теорему ??).

Теперь проверим, что для небифуркационных значений (g, λ) в каждой точке ранга 0 операторы A_H и A_K линейно независимы. Из-за того, что интеграл K является сложным полиномом 4-степени сделать это не так легко. Поэтому будем вычислять лишь часть коэффициентов матрицы $A_K = (\text{grad } (\Omega \cdot \text{grad } K))^T$.

Рассмотрим положение равновесия x и вектор $v = (0, 1, 0, 0, 0, 0) \in T_x M^4$.

Под действием оператора A_H он перейдёт в вектор $(-2\lambda - s_3, 0, 0, r_3, 0, -r_1)$, а под действием оператора A_K в вектор с координатами $(*, 0, a_{32}, *, 0, *)$, где $a_{32}(x) = \frac{\partial(\operatorname{sgrad} K)^3}{\partial s_2}(x)$. Для доказательства независимости достаточно проверить, что $a_{32} \neq 0$.

$$dK = \begin{pmatrix} s_1^3 - \frac{s_1 s_2^2}{2} + 4r_1 s_1 + s_2 r_2 - \lambda s_1(s_3 + 2\lambda) - 2\lambda r_3 \\ s_2^3 - \frac{s_1^2 s_2}{2} - 4s_2 r_1 + s_1 r_2 - \lambda s_2(s_3 + 2\lambda) \\ \frac{\lambda}{2}(s_1^2 + s_2^2) \\ \frac{s_1^2 - s_2^2}{2} + 2r_1 \\ s_1 s_2 + 2r_2 \\ -2\lambda s_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{sgrad} K)^3 &= s_2(s_1^3 - \frac{s_1 s_2^2}{2} + 4r_1 s_1 + s_2 r_2 - \lambda s_1(s_3 + 2\lambda) - 2\lambda r_3) - s_1(s_2^3 - \frac{s_1^2 s_2}{2} - 4s_2 r_1 + s_1 r_2 - \lambda s_2(s_3 + 2\lambda)) + r_2(\frac{s_1^2 - s_2^2}{2} + 2r_1) - r_1(s_1 s_2 + 2r_2). \\ a_{32}(x) &= s_1^3 - \frac{s_1 s_2^2}{2} + 4r_1 s_1 + s_2 r_2 - \lambda s_1(s_3 + 2\lambda) - 2\lambda r_3 - s_1(-s_1^2 - 4r_1 + \frac{s_1^2}{2} - \lambda(s_3 + 2\lambda)) = 1,5s_1^3 + 7r_1 s_1 - 2\lambda r_3. \end{aligned}$$

В силу теоремы 6 бифуркационные диаграммы внутри каждой из 18 камер гомеоморфны, а значит мы можем взять такие значения параметров g и λ внутри каждой камеры, чтобы найденные координаты положений равновесия удовлетворяли соотношению $a_{32}(x) \neq 0$.

Теорема доказана. □

Замечание 7. В работе П. Е. Рябова [34] описаны критические точки ранга 0 и указан способ определения их типа. Однако, окончательной классификации в виде таблицы с полным описанием типов невырожденных особых точек ранга 0 и с представлением их окрестностей в виде почти прямого произведения в [34] получено не было. Поскольку знание топологии необходимо

димо для вычисления меток изоэнергетических молекул, то данная классификация была проведена нами до конца.

Теорема 14. (*H. C. Славина [23]*) В прообразе каждой из 13 точек пересечения дуг бифуркационных диаграмм, а именно точек $M, Z_1, Z_2, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5$ (см. рис. 2.5-2.13), лежит ровно по одной критической точке ранга ноль. Представление соответствующих 13 особенностей в виде почти прямого произведения указано в таблице:

точка	тип	n/n произведение
M	центр-центр	$A \times A$
Z_2	центр-центр	$A \times A$
X_2	центр-центр	$A \times A$
Y_2	центр-центр	$A \times A$
X_4	центр-центр	$A \times A$
Y_4	центр-центр	$A \times A$
X_3	центр-седло	$A \times B$
Y_3	центр-седло	$A \times B$
X_5	центр-седло	$A \times B$
Y_5	центр-седло	$A \times B$
Z_1	седло-седло	$(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$
X_1	седло-седло	$B \times B$
Y_1	седло-седло	$B \times B$

Доказательство. По теореме 9.3 (см. [22, т. 1, гл. 9]) особенность типа центр-центр имеет вид прямого произведения атома A на атом A . Точками такого типа являются точки : $M, Z_2, X_2, Y_2, X_4, Y_4$. Причём окрестность прообразов точек X_2 и Y_2 состоит из четырёх компонент связности, а окрестность прообразов точек X_4 и Y_4 — из двух, но лишь одна компонента связности содержит точку ранга ноль.

По теореме 9.2 (см. [22, т. 1, гл. 9]) любая особенность типа центр-седло ли-увиллево эквивалентна канонической особенности вида $A \times V$ для некоторого

подходящего седлового атома, который можно определить, построив круговую молекулу особенности. В случае Ковалевской–Яхьи точки X_3, Y_3, X_5, Y_5 являются невырожденными особенностями типа центр-седло. В качестве седлового атома V нужно взять атом B .

Теорема 9.6 из [22, т. 1, гл. 9], утверждает, что круговые молекулы особенности типа седло-седло с ровно одной особой точкой на слое, соответствуют одному из четырёх случаев, которые указаны в теореме 9.6 из [22, т. 1, гл. 9]. Чтобы определить какому именно случаю соответствует особенность, необходимо знать перестройки на дугах бифуркационных диаграмм, входящих в данную точку. В случае Ковалевской–Яхьи точки Z_1, X_1, Y_1 являются невырожденными особенностями типа седло-седло. Пользуясь теоремами 12, 13, заключаем, что окрестности точек X_1, Y_1 представимы в виде почти прямого произведения атомов B , а окрестность точки Z_1 представима в виде почти прямого произведения $(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$. Теорема доказана. \square

Замечание 8. *Зная тип особенности невырожденной точки ранга ноль, можно однозначно построить для этой точки круговую молекулу с метками (см. [22, т. 1, гл. 9]). В таблице 3.1 приведены круговые молекулы с r -метками для всех 13 точек из теоремы 14, где римскими цифрами обозначены соответствующие семейства торов. Рядом с перестройками греческими буквами с индексами обозначены дуги диаграмм, на которых данные перестройки происходят. Для точек X_1, Y_1 возникает две возможности расстановки семейств торов (второй вариант указан римскими цифрами в скобках). Далее в предложении 8 эта неопределённость будет устранена, а именно будет показано, что на самом деле вариант в скобках не реализуется. Круговые молекулы нужны нам для дальнейших вычислений, а именно для построения допустимых систем координат и для определения взаимного расположения базисных циклов в семействах торов.*

Замечание 9. *Круговые молекулы без меток точек $Z_2, X_2, Y_2, X_3, Y_3, X_4, Y_4$ были построены автором совместно с П.П. Андреяновым при помощи программы по визуализации перестроек торов, написанной на языке Wolfram*

Mathematica 6.0 по алгоритму из работы [19]. Прообраз этих точек состоит из нескольких компонент связности, одна из которых содержит невырожденное положение равновесия, а другие компоненты связности содержат точки ранга один или два. Круговые молекулы в таблице 3.1 указаны для тех компонент связности, которые содержат точки ранга ноль.

В работе М. П. Харламова [35] было введено понятие классов эквивалентности относительно определяющих параметров на множестве точек ранга ноль. Оказалось, что таких классов 13, если рассматривать полный прообраз точки, отвечающей относительному равновесию.

Предложение 5. В случае Ковалевской-Яхьи в камерах 1', 3, 3' - 9, 9' в прообразе гладких дуг $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ бифуркационных диаграмм (см. рис. 2.5-2.13) лежат боттовские перестройки следующих типов:

дуги бифуркационных диаграмм	тип 3-атома
γ_1, δ_1	A
γ_2, δ_2	$2A$

Доказательство. Из теоремы 14 известно, что точкам пересечения X_4, Y_4 бифуркационных кривых соответствуют невырожденные положения равновесия, окрестность которых представима в виде почти прямого произведения атомов $A \times A$. При переходе через дуги γ_1, δ_1 (см. рис. 2.10) появляются торы семейств V, IV соответственно (см. замечание 6). Из всего вышесказанного следует, что на дугах бифуркационных диаграмм γ_1, δ_1 происходят перестройки типа A .

Рассмотрим прообразы точек X_2, Y_2 . Каждый из них состоит из четырёх компонент связности, и лишь одна компонента связности содержит точку ранга ноль, окрестность которой представима в виде почти прямого произведения атомов $A \times A$ (теорема 14). Для наглядности покажем это на рисунке 3.1.

При переходе через дугу γ_2 рождаются 2 тора семейств II и VII, а при переходе через дугу δ_2 - 2 тора семейств III и VI (см. замечание 6). Из этого следует, что на дугах γ_2, δ_2 происходят перестройки типа $2A$.

Таблица 3.1: Круговые молекулы невырожденных положений равновесия

M	$A_{\alpha_1} \xrightarrow[r=0]{I} A_{\beta_1}$	Z_2	$A_{\gamma_1} \xrightarrow[r=0]{V} A_{\beta_6}$
X_2	$A_{\beta_8} \xrightarrow[r=0]{VII} A_{\gamma_2}$	Y_2	$A_{\alpha_8} \xrightarrow[r=0]{VI} A_{\delta_2}$
X_4	$A_{\delta_1} \xrightarrow[r=0]{IV} A_{\alpha_{10}}$	Y_4	$A_{\gamma_1} \xrightarrow[r=0]{V} A_{\beta_{10}}$
X_3	$A_{\gamma_2} \xrightarrow{\substack{II \\ VII}} B_{\beta_7} \xrightarrow{\substack{II \\ VI}} A_{\alpha_3}$ $A_{\gamma_2} \xrightarrow{\substack{III \\ VII}} B_{\alpha_7} \xrightarrow{\substack{III \\ VI}} A_{\delta_2}$ <p>Bce $r = \infty$</p>	Y_3	$A_{\beta_3} \xrightarrow{\substack{III \\ VI}} B_{\alpha_7} \xrightarrow{\substack{III \\ VI}} A_{\delta_2}$ <p>Bce $r = \infty$</p>
X_5	$A_{\alpha_{10}} \xrightarrow{\substack{I \\ IV}} B_{\beta_{2(7)}} \xrightarrow{\substack{I \\ V}} A_{\alpha_1}$ $A_{\alpha_{10}} \xrightarrow{\substack{I \\ IV}} B_{\alpha_{2(7)}} \xrightarrow{\substack{I \\ V}} A_{\beta_{10}}$ <p>Boe $r = \infty$</p>	Y_5	$A_{\beta_1} \xrightarrow{\substack{I \\ V}} B_{\alpha_{2(7)}} \xrightarrow{\substack{I \\ V}} A_{\beta_{10}}$ <p>Boe $r = \infty$</p>
X_1	<p>Bce $r = 0$</p>	Y_1	<p>Bce $r = 0$</p>
Z_1			

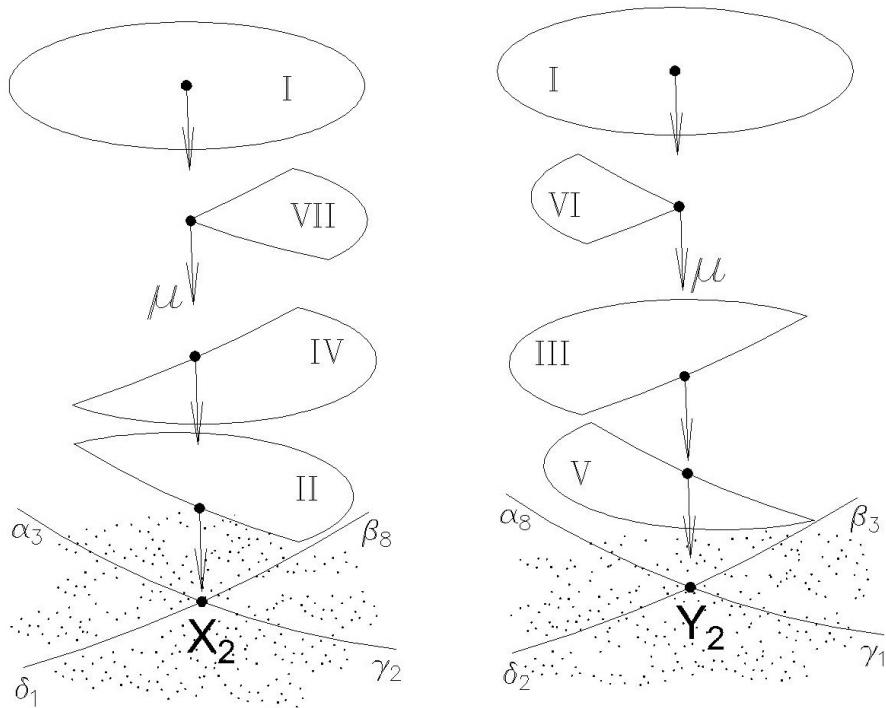


Рис. 3.1: Полный прообраз точек X_2, Y_2

Предложение 5 доказано.

□

Замечание 10. В работе [20] предъявлены формулы для показателей Морса-Ботта, откуда также могут быть определены перестройки на дугах $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$.

3.2 Круговые молекулы вырожденных одномерных орбит.

Теперь будем рассматривать на бифуркационной диаграмме точки возврата A_i, B_i ($i = 1, 2, 3, 4$) и касания U_j, V_j ($j = 1, 2, 3$). В прообразах этих точек лежат одномерные вырожденные орбиты, поскольку бифуркационная диаграмма для невырожденной одномерной орбиты выглядит как дуга гладкой кривой (это следует из теоремы Элиассона; см. [22, 28])

Для вычисления круговых молекул вырожденных одномерных орбит воспользуемся следующими двумя свойствами, доказанными П. В. Морозовым [36].

Предложение 6. (П. В. Морозов [36]) На рёбрах, соединяющих два седловых атома круговой молекулы вырожденной одномерной орбиты, r -метки равны ∞ . На рёбрах, соединяющих атом A с седловым, r -метки конечны. В обоих случаях метки ε равны $+1$.

Обозначим через $B-A$ ребро круговой молекулы вырожденной орбиты, которое соединяет бифуркацию B с бифуркацией A .

Предложение 7. (П. В. Морозов [36]) Пусть бифуркационная диаграмма представляет из себя кривую с точкой возврата v , причем 3-атомы, соответствующие двум дугам, примыкающим к точке v , имеют тип B и A . Тогда на ребрах круговой молекулы $B-A$ метки r равны 0.

Далее будем через $r[x-y]$ обозначать r -метку на ребре молекулы, которое соединяет атомы, соответствующие бифуркациям x и y . Напомним правило

сложения меток (см. [22, т. 2]): пусть для рёбер, относящихся к некоторому семейству торов, известны метки $r[x-y] = r_0$ и $r[y-z] = \infty$, тогда $r[x-z] = r_0$ в том же семействе.

Замечание 11. Напомним, что в случае Ковалевской-Яхви возникла необходимость ввести более мелкое разбиение торов на семейства (см. замечание 6), по сравнению с разбиением в классическом случае Ковалевской и в случае Ковалевской-Яхви при $g = 0$ (см. теоремы 8, 9). Приведём полное доказательство следующей теоремы, чтобы фиксировать новые семейства торов. Это необходимо для определения взаимного расположения базисных циклов в семействах торов, что будет проделано далее.

Теорема 15. (H.C. Славина) Круговые молекулы с r - и ε -метками для точек бифуркационной диаграммы A_i, B_i ($i=1, 2, 3, 4$), U_j, V_j ($j=1, 2, 3$), прообразы которых содержат вырожденные одномерные орбиты, приведены в таблице 3.2.

Предложение 8. Прообраз точек возврата A_1, B_1, A_3, B_3 и точек касания U_1, U_3 состоит из одной компоненты связности. Прообраз точек возврата A_2, B_2, A_4, B_4 и точек касания V_1, V_2, V_3, U_2 состоит из двух компонент связности. В таблице 3.2 указан полный прообраз всех вышеперечисленных вырожденных одномерных орбит.

Доказательство. Круговые молекулы точек возврата A_1, B_1, A_3, B_3 и точек касания U_1, U_3 можно построить очевидным образом, используя определения атомов A, B, C_2 и зная какие семейства торов перестраиваются в окрестностях этих точек. Оказалось, что круговые молекулы этих точек состоят из одной компоненты связности.

Рассмотрим точку A_2 . На рис. 3.2 указаны возможности построения круговой молекулы.

Первый вариант круговой молекулы состоит из двух компонент связности, а второй и третий - из одной.

Таблица 3.2: Круговые молекулы вырожденных одномерных орбит

A_1	$A_{\alpha_3} \xrightarrow[r=0]{II} B_{\alpha_4}$ Bce $\varepsilon = 1$	B_1	$A_{\beta_3} \xrightarrow[r=0]{III} B_{\beta_4}$ Bce $\varepsilon = 1$
A_2	$A_{\alpha_5} \xrightarrow[r=0]{V} B_{\alpha_7}$ I $A_{\alpha_8} \xrightarrow[r=0]{VI} B_{\alpha_7}$ III Bce $\varepsilon = 1$	B_2	$A_{\beta_8} \xrightarrow[r=0]{IV} B_{\beta_7}$ I $A_{\beta_8} \xrightarrow[r=0]{VII} B_{\beta_7}$ II Bce $\varepsilon = 1$
A_3	$A_{\gamma_1} \xrightarrow[r=0]{V} B_{\alpha_2}$ I Bce $\varepsilon = 1$	B_3	$A_{\delta_1} \xrightarrow[r=0]{IV} B_{\beta_2}$ I Bce $\varepsilon = 1$
A_4	$A_{\gamma_2} \xrightarrow[r=0]{VII} B_{\alpha_9}$ I $A_{\gamma_2} \xrightarrow[r=0]{II} B_{\alpha_9}$ IV Bce $\varepsilon = 1$	B_4	$A_{\delta_2} \xrightarrow[r=0]{III} B_{\beta_9}$ I $A_{\delta_2} \xrightarrow[r=0]{VI} B_{\beta_9}$ V Bce $\varepsilon = 1$
V_1	$A_{\alpha_3} \xrightarrow[r=0]{II} A_{\beta_5}^* \xrightarrow[r=1/2]{IV} A_{\beta_6}$ U $A_{\beta_6} \xrightarrow[r=1/2]{V} B_{\alpha_2}$ Bce $\varepsilon = 1$	V_3	$A_{\alpha_3} \xrightarrow[r=0]{II} A_{\beta_5}^* \xrightarrow[r=1/2]{IV} A_{\beta_6}$ U $A_{\beta_6} \xrightarrow[r=1/2]{V} B_{\alpha_2}$ Bce $\varepsilon = 1$
U_1	$A_{\beta_3} \xrightarrow[r=0]{III} C_{2\alpha_5}$ I B_{β_2} IV Bce $\varepsilon = 1$	U_3	$A_{\beta_3} \xrightarrow[r=0]{III} C_{2\alpha_5}$ I B_{β_2} IV Bce $\varepsilon = 1$
U_2	$A_{\beta_8} \xrightarrow[r=1/2]{IV} B_{\alpha_9}$ IV II $A_{\beta_8} \xrightarrow[r=1/2]{VII} B_{\alpha_9}$ I Bce $\varepsilon = 1$	V_2	$A_{\beta_6} \xrightarrow[r=0]{V} B_{\beta_9}$ VI A_{α_8} $A_{\beta_6} \xrightarrow[r=0]{IV} C_{2\alpha_5}$ I B_{β_9} III Bce $\varepsilon = 1$

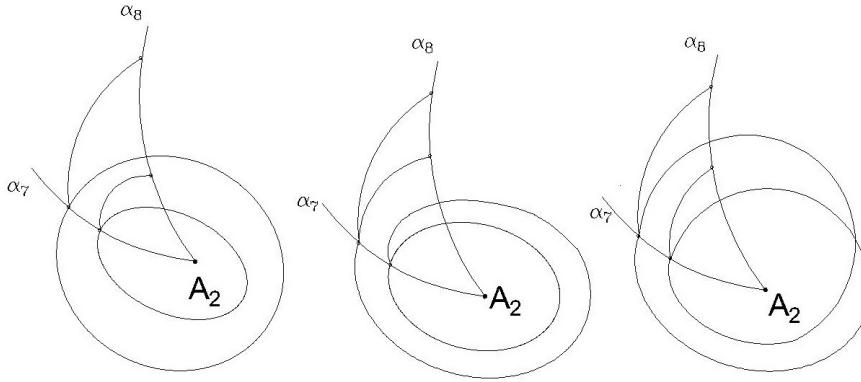


Рис. 3.2: Варианты круговых молекул для точки A_2

Дуге α_7 соответствует перестройка типа $2B$. Из круговой молекулы точки Y_1 , в прообразе которой лежит невырожденное положение равновесия типа седло-седло, следует, что торы семейств V и VI , родившиеся на дуге α_8 , при подходе к дуге α_7 не перестраиваются вместе в один тор, а относятся к разным атомам B . Поэтому второй вариант круговой молекулы, состоящий из одной компоненты связности невозможен. Третий вариант тоже невозможен, так как при подходе к дуге α_7 с перестройкой $2B$ справа торы семейств I, V сливаются в один тор семейства I , а торы семейств III, VI - в один тор семейства III .

Для точки B_2 проводим те же рассуждения, но при доказательстве используем информацию из круговой молекулы точки X_1 о перестройках торов семейств I, II, IV, VII на дуге β_7 .

Рассмотрим точки касания V_1, V_3 . Так как они являются точками касания дуги α_5 с дугой $\beta_2\beta_3$ бифуркационных кривых, и в их окрестностях испытывают перестройки торы из одних и тех же семейств (см. рис. 2.12), то круговые молекулы этих точек полностью совпадают. Поэтому проведём все рассуждения для точки V_1 . Круговую молекулу можно построить двумя способами (рис. 3.3).

Заметим, что первая круговая молекула состоит из двух компонент связности, а вторая - из одной. Дуге β_5 соответствует перестройка типа $2A^*$. Из

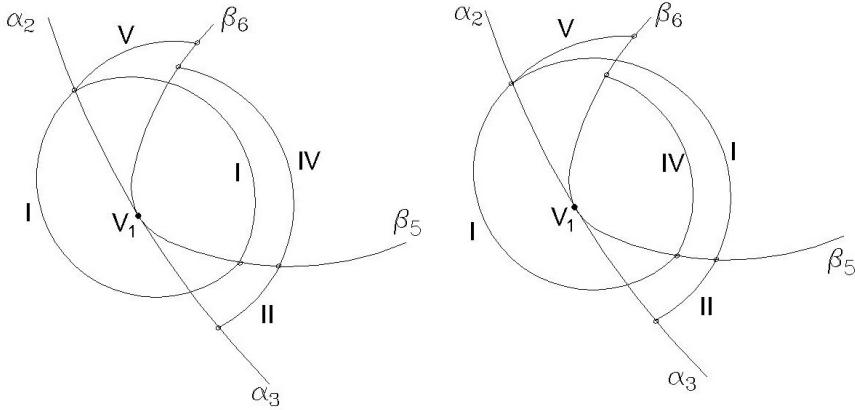


Рис. 3.3: Варианты круговых молекул для точки V_1

круговой молекулы точки Z_1 , в прообразе которой лежит невырожденное положение равновесия, следует, что при перестройке тора семейства II на дуге β_5 получается тор семейства IV , а при перестройке тора семейства I на дуге β_5 получается тор семейства I .

Поэтому для точки V_1 выбираем первую круговую молекулу.

Точки U_2, V_2 возникают в классическом случае Ковалевской и случае Ковалевской-Яхьи при $g = 0$. На рис. 3.4, 3.5 указаны варианты построения круговых молекул для этих точек.

В [1] и [36] явно не доказывается выбор первого варианта круговой молекулы для этих точек. Как сообщили мне авторы данных работ, круговые молекулы этих точек были построены с помощью компьютерного эксперимента. Будем использовать этот результат в данной работе.

Зная круговые молекулы точек U_2, V_2 , можно убрать неопределённость, возникшую при расстановке семейств торов в круговых молекулах точек X_1, Y_1 , неподходящий вариант расстановки семейств указан в скобках (см. рис. 3.6, а также таблицу 3.1).

При построении круговых молекул точек возврата A_4, B_4 возникают аналогичные возможности, что и при построении круговых молекул точек A_2, B_2 . При выборе подходящей круговой молекулы для точки B_4 пользуемся круговой молекулой точки Y_1 , рассматривая перестройки торов семейств I, III, V, VI

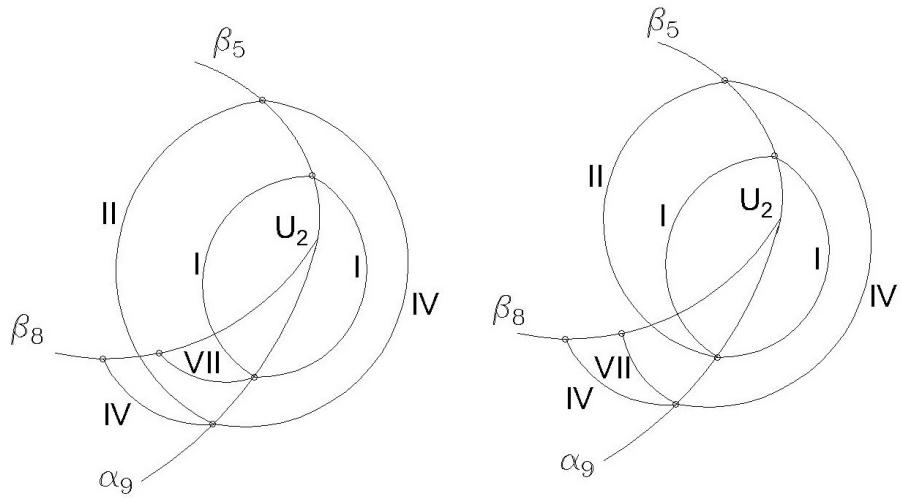


Рис. 3.4: Варианты круговых молекул для точки U_2

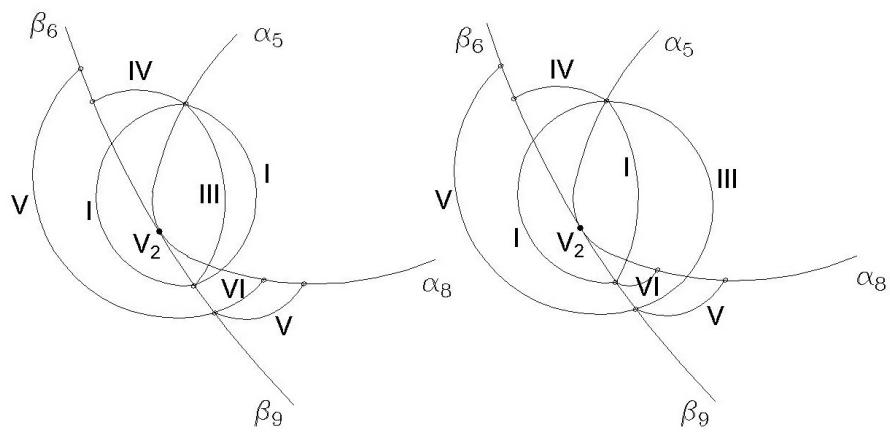


Рис. 3.5: Варианты круговых молекул для точки V_2

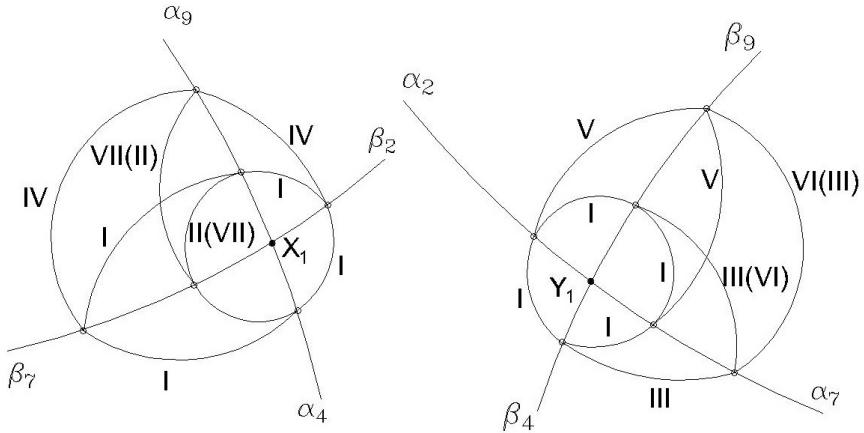


Рис. 3.6: Круговые молекулы для точек X_1, Y_1

на дуге β_9 . Для точки A_4 проводим те же рассуждения, но при доказательстве используем информацию из круговой молекулы точки X_1 о перестройках торов семейств I, II, IV, VII на дуге α_9 .

Предложение 8 доказано. □

Вернёмся к доказательству теоремы 15.

Для точек A_1, A_3, B_1, B_3 на ребре круговой молекулы $B - A$ метка $r = 0$ в силу предложения 7. Для точек A_2, B_2, A_4, B_4 , с учётом предложения 6, нам остаётся вычислить метки r на рёбрах, ведущих в атомы A .

Рассмотрим ребро круговой молекулы точки A_2 , относящееся к семейству VI. Оно соединяет бифуркции α_8 и α_7 . Из круговой молекулы точки Y_2 имеем $r[\alpha_8 - \delta_2] = 0$, точки $Y_3 - r[\delta_2 - \alpha_7] = \infty$. Следовательно, по правилу сложения меток $r[\alpha_8 - \alpha_7] = 0$. Теперь рассмотрим ребро круговой молекулы точки A_2 , относящееся к семейству V. Оно соединяет бифуркции α_8 и α_7 . Рассмотрим точку Y_2 (рис. 3.1), $r[\alpha_8 - \gamma_1] = \infty$, из круговой молекулы точки $Y_4 - r[\gamma_1 - \beta_{10}] = 0$, из круговой молекулы точки Y_5 имеем $r[\beta_{10} - \alpha_7] = \infty$. Следовательно, по правилу сложения меток $r[\alpha_8 - \alpha_7] = 0$.

Рассмотрим ребро круговой молекулы точки B_2 , относящееся к семейству VII. Оно соединяет бифуркции β_8 и β_7 . Из круговой молекулы точки X_2 имеем $r[\beta_8 - \gamma_2] = 0$, точки $X_3 - r[\gamma_2 - \beta_7] = \infty$. Следовательно, по правилу

сложения меток $r[\beta_8 - \beta_7] = 0$. Теперь рассмотрим ребро круговой молекулы точки B_2 , относящееся к семейству IV. Оно соединяет бифуркации β_8 и β_7 . Рассмотрим точку X_2 (рис. 3.1), $r[\beta_8 - \delta_1] = \infty$, из круговой молекулы точки X_4 - $r[\delta_1 - \alpha_{10}] = 0$, из круговой молекулы точки X_5 имеем $r[\alpha_{10} - \beta_7] = \infty$. Следовательно, по правилу сложения меток $r[\beta_8 - \beta_7] = 0$. Аналогично получаем:

- точка A_4 (рассматривая круговые молекулы точек X_1, X_3):
семейство VII: $r[\alpha_9 - \beta_7] = 0, r[\beta_7 - \gamma_2] = \infty \Rightarrow r[\alpha_9 - \gamma_2] = 0$,
семейство II: $r[\alpha_9 - \beta_7] = 0, r[\beta_7 - \gamma_2] = \infty \Rightarrow r[\alpha_9 - \gamma_2] = 0$.
- точка B_4 (рассматривая круговые молекулы точек Y_1, Y_3):
семейство VI: $r[\beta_9 - \alpha_7] = 0, r[\alpha_7 - \delta_2] = \infty \Rightarrow r[\beta_9 - \delta_2] = 0$,
семейство III: $r[\beta_9 - \alpha_7] = 0, r[\alpha_7 - \delta_2] = \infty \Rightarrow r[\beta_9 - \delta_2] = 0$.

Рассмотрим круговые молекулы точек U_j, V_j ($j=1,2,3$). С учётом предложения 7, на рёбрах, соединяющих два седловых атома, метки $r = \infty$. Недостающие метки в молекулах точек U_j, V_j ($j=1,2,3$) нельзя вычислить, пользуясь лишь правилом сложения меток. Поэтому доказательство теоремы будет продолжено в последующих главах, и недостающие метки будут определены по формулам Топалова.

Чтобы применять формулы Топалова необходимо знать топологию “круговой” 3-поверхности Q , так как топологические инварианты Q (группы гомологий, фундаментальная группа) являются функциями от меток молекулы. Как показал П. И. Топалов в [2] эти функции можно явно выписать во многих случаях. В реальных примерах многообразие Q обычно устроено несложно. Поэтому, зная топологию Q , можно получить некоторые соотношения между числовыми метками молекулы, которые позволят вычислить недостающие метки r, ε, n .

В следующей таблице приведены топологические типы круговых многообразий для основных 3-атомов:

3-атом	тип кругового многообразия
регулярная точка	\mathbb{T}^3
A	$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$
A^*	\mathbb{H}^3
B	$\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^2 + 2g)$
C_2	$\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^2 + 3g)$

Здесь $(\mathbb{S}^2 + Ng)$ - сфера с N ручками, \mathbb{H}^3 - расслоение Зейферта со слоем окружность и базой \mathbb{T}^2 с двумя особыми точками типа (2,1).

В следующей теореме определим топологические типы круговых многообразий Q_τ^3 всех вырожденных одномерных орбит в интегрируемом случае Ковалевской-Яхьи. Для точек $A_1, B_1, A_2, B_2, U_1, V_1, U_2, V_2$ типы круговых многообразий были определены ранее, так как эти точки возникали в классическом случае Ковалевской и в случае Ковалевской-Яхьи при $g = 0$. Так как в [1] для этих точек доказательство не приводится, приведём его здесь для полноты изложения.

Теорема 16. (*H.C. Славина*) *Круговые многообразия, лежащие в прообразе окрестностей особых точек A_i, B_i ($i=1,2,3, 4$), U_j, V_j ($j=1,2,3$), имеют следующие топологические типы:*

<i>точка</i>	<i>топологический тип кругового многообразия</i>
A_1	\mathbb{T}^3
B_1	\mathbb{T}^3
A_2	$2\mathbb{T}^3$
B_2	$2\mathbb{T}^3$
A_3	\mathbb{T}^3
B_3	\mathbb{T}^3
A_4	$2\mathbb{T}^3$
B_4	$2\mathbb{T}^3$
U_1	$\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^2 + 2g)$
U_2	$2\mathbb{H}^3$
U_3	$\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^2 + 2g)$
V_1	$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \cup \mathbb{H}^3$
V_2	$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \cup \mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^2 + 2g)$
V_3	$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \cup \mathbb{H}^3$

Доказательство. Рассмотрим точку A_1 . Бифуркационная диаграмма в окрестности этой точки изображена на рис. 3.7.

Возьмём контур ABC_0D_0 и произведём его деформацию в контур ABC_1D_1 . Звенья AC_0 , BD_0 испытывают гладкую изотопию, не встречая точек бифуркаций. Прообраз отрезка C_iD_i ($i=0,1$), определяется в M^4 уравнением $H = const$. Ещё мы знаем из теоремы 12, что в окрестности точки A_1 нет критических точек гамильтониана H . Поэтому топологический тип многообразия к прообразу контура не изменится при деформации. Итак, круговое многообразие рассматриваемой особенности точки A_1 , лежащее в прообразе контура ABC_0D_0 топологически является тором \mathbb{T}^3 , так как контур ABC_1D_1 определяет круговую молекулу регулярной точки бифуркационной диаграммы. Аналогично определяем, что круговые многообразия, соответствующие особым точкам B_1, A_3, B_3 , также являются торами \mathbb{T}^3 , а круговые многообразия, соответствующие особым точкам U_1, U_3 являются прямыми произведениями окружности на двумерную сферу с g ручками $\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^2 + 2g)$.

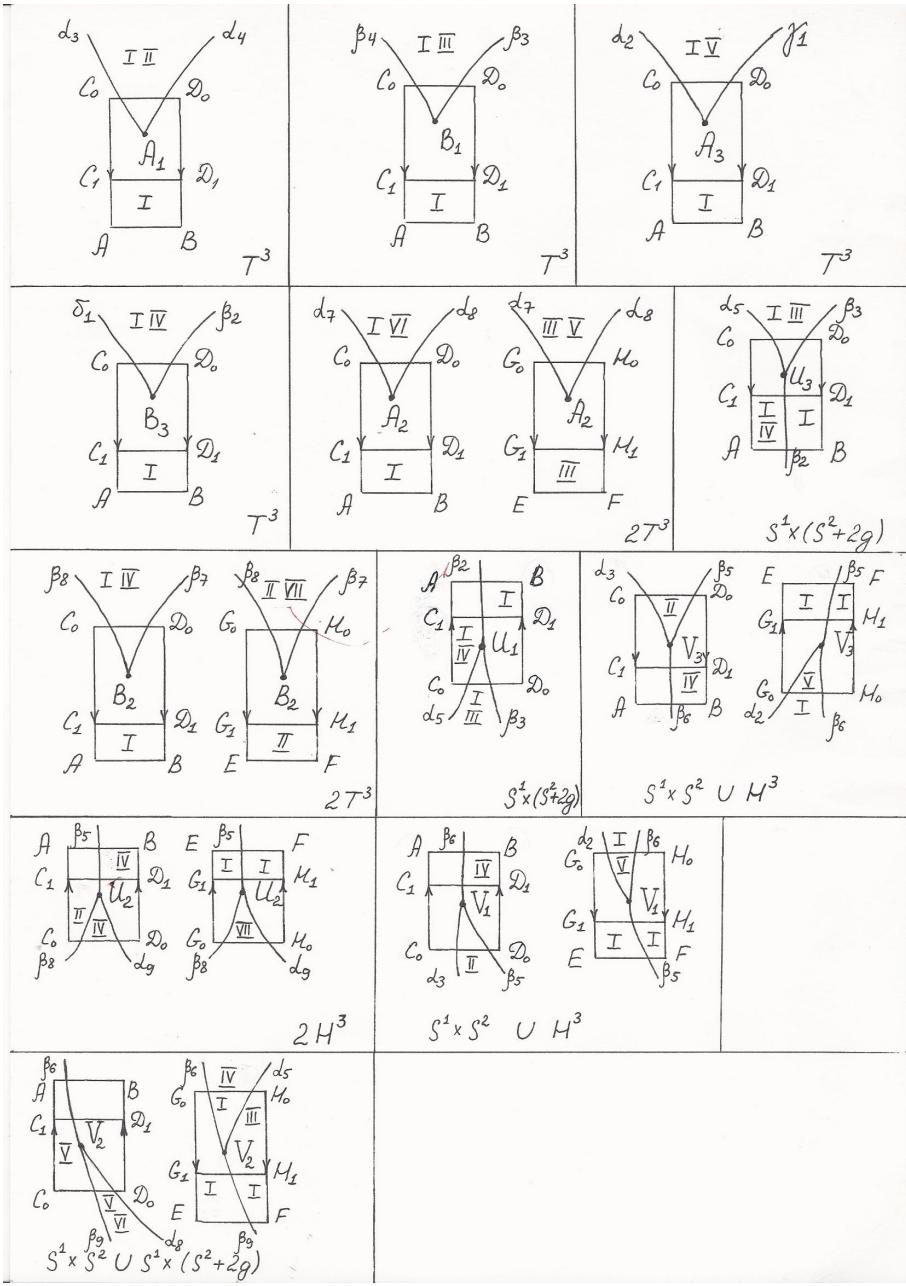


Рис. 3.7: Бифуркационные диаграммы в окрестностях вырожденных одномерных орбит

Теперь рассмотрим особую точку A_2 . Этой точке отвечают две несвязные особенности (предложение 8), которые отображением момента спроекированы в одну точку бифуркационной диаграммы. Этим объясняется наличие для неё двух круговых молекул. На рис. 3.7 изображены бифуркационные диаграммы в окрестности данной особенности. Произведём деформации контуров ABC_0D_0 и EFG_0H_0 в контуры ABC_1D_1 и EFG_1H_1 соответственно. При этом топологический тип многообразия в прообразе контура не изменится: прообразы отрезков C_iD_i ($i=0,1$) и G_iH_i ($i=0,1$) определяются в M_4^g уравнениями $H = const$, а из теоремы 12 известно, что критических точек гамильтониана H в окрестности A_2 нет. Остальные звенья контура испытывают гладкую изотопию, не встречая точек бифуркаций. Контуры ABC_1D_1 и EFG_1H_1 определяют круговые молекулы регулярных точек бифуркационных диаграмм. Значит, круговые многообразия рассматриваемых особенностей точки A_2 , лежащие в прообразах контуров ABC_0D_0 и EFG_0H_0 топологически является торами \mathbb{T}^3 . Аналогично определяем, что круговое многообразие, соответствующее особой точке B_2 , также является несвязным объединением двух торов \mathbb{T}^3 .

Рассмотрим бифуркационную диаграмму в окрестности точки U_2 (рис. 3.7). Этой точке отвечают две несвязные особенности (предложение 8). Рассмотрим контуры ABC_0D_0 и EFG_0H_0 и произведём их деформации в контуры ABC_1D_1 и EFG_1H_1 соответственно. Звенья AC_0, BD_0, EG_0, FH_0 испытывают гладкую изотопию, прообразы отрезков C_iD_i ($i=0,1$) и G_iH_i ($i=0,1$) определяются в M_4^g уравнениями $H = const$, и в окрестности U_2 критических точек гамильтониан H не имеет (см. теорему 12). Контуры ABC_1D_1 и EFG_1H_1 определяют круговые молекулы 3-атома A^* кривой β_5 . Значит, круговые многообразия рассматриваемых особенностей точки U_2 , лежащие в прообразах контуров ABC_0D_0 и EFG_0H_0 топологически является расслоениями Зейфера \mathbb{H}^3 со слоем окружность и базой \mathbb{T}^2 с двумя особыми точками типа $(2,1)$.

Заметим, что прообразы окрестностей особых точек V_1 и V_3 представлены

одинаковыми круговыми молекулами. Поэтому рассуждения для определения топологического типа круговых многообразий аналогичные. Проведём их для окрестности точки V_1 . Этой точке отвечают две несвязных особенности (предложение 8). На рис. 3.7 изображены бифуркационные диаграммы в окрестности данной точки. Произведём деформации контуров ABC_0D_0 и EFG_0H_0 в контуры ABC_1D_1 и EFG_1H_1 соответственно. При этом топологический тип многообразия в прообразе контура не изменится: прообразы отрезков C_iD_i ($i=0,1$) и G_iH_i ($i=0,1$) определяются в M_4^g уравнениями $H = const$, а из теоремы 12 известно, что критических точек гамильтониана H в окрестности V_1 нет. Остальные звенья контура испытывают гладкую изотопию, не встречая точек бифуркаций. Контур ABC_1D_1 определяет круговую молекулу неособой точки бифуркационной диаграммы, более точно — круговую молекулу 3-атома A кривой β_6 , контур EFG_1H_1 определяет круговую молекулу 3-атома A^* кривой β_5 . Значит, круговое многообразие рассматриваемой особой точки V_1 , лежащее в прообразе контура ABC_0D_0 топологически является прямым произведением окружности на двумерную сферу $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, а круговое многообразие, лежащее в прообразе контура EFG_0H_0 топологически является расслоениями Зейферта \mathbb{H}^3 со слоем окружность и базой \mathbb{T}^2 с двумя особыми точками типа (2,1).

Осталось рассмотреть особую точку V_2 . Бифуркационная диаграмма в окрестности точки этой точки изображена на рис. 3.7. Точке V_2 отвечают две несвязных особенности. Поэтому для прообраза точки V_2 построены две круговые молекулы. Рассмотрим контуры ABC_0D_0 и EFG_0H_0 и произведём их деформации в контуры ABC_1D_1 и EFG_1H_1 . Звенья AC_0, BD_0, EG_0, FH_0 испытывают гладкую изотопию, прообразы отрезков C_iD_i ($i=0,1$) и G_iH_i ($i=0,1$) определяются в M_4^g уравнениями $H = const$, и в окрестности V_2 гамильтониан H не имеет критических точек (см. теорему 12). Контур ABC_1D_1 определяет круговую молекулу 3-атома A кривой β_6 , контур EFG_1H_1 определяет круговую молекулу 3-атома B кривой β_9 . Значит, круговое многообразие рассматриваемой особой точки V_2 , лежащее в прообразе контура ABC_0D_0 топо-

логически является прямым произведением окружности на двумерную сферу $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, а круговое многообразие, лежащее в прообразе контура EFG_0H_0 — прямыми произведениями окружности на двумерную сферу с g ручками $\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^2 + 2g)$.

Теорема 16 доказана. □

Глава 4

Выбор базисных циклов в семействах торов и вычисление недостающих меток круговых молекул вырожденных одномерных орбит.

4.1 Построение допустимых систем координат.

Допустимые системы координат на седловых атомах выберем исходя из представления в виде почти прямого произведения точек X_1, Y_1, Z_1 типа седло-седло. Такая процедура проделана в [1] для классического случая Ковалевской, где особенности типа седло-седло в точности такие же.

Рассмотрим точку Z_1 . Она имеет тип почти прямого произведения $(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$. Используя результаты [1], получаем:

$$\begin{aligned} (\lambda_{\beta_5}, \frac{\lambda_{\beta_5} + \lambda_{\alpha_4}}{2}) &\xrightarrow{(I)} A_{\beta_5}^* \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\beta_5}, -\lambda_{\alpha_5}), \\ (\lambda_{\beta_5}, \frac{\lambda_{\beta_5} + \lambda_{\alpha_4}}{2}) &\xrightarrow{(II)} A_{\beta_5}^* \xrightarrow{(IV)} (\lambda_{\beta_5}, -\lambda_{\alpha_5}), \\ (\lambda_{\alpha_5}, -\lambda_{\beta_5}) &\xrightarrow{(I)} C_{2_{\alpha_5}} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_4}) \\ (\lambda_{\alpha_5}, -\lambda_{\beta_5}) &\xrightarrow{(IV)} C_{2_{\alpha_5}} \xrightarrow{(III)} (\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_4}), \\ (\lambda_{\alpha_4}, -\frac{\lambda_{\alpha_4} + \lambda_{\beta_5}}{2}) &\xrightarrow{(I)} B_{\alpha_4} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\alpha_4} + \lambda_{\beta_4}), \\ (\lambda_{\alpha_4}, -\frac{\lambda_{\alpha_4} + \lambda_{\beta_5}}{2}) &\xrightarrow{(II)} B_{\alpha_4} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\alpha_4} + \lambda_{\beta_4}), \end{aligned}$$

$$(\lambda_{\beta_4}, \lambda_{\alpha_4}) \xrightarrow{(I)} B_{\beta_4} \xrightarrow{(III)} (\lambda_{\beta_4}, -\lambda_{\alpha_5}).$$

Стрелки на рёбрах указывают направление возрастания интеграла K . Римские цифры над рёбрами показывают номера семейств торов Лиувилля, а индексы у циклов λ и обозначений атомов соответствуют дуге бифуркационной диаграммы.

Рассмотрим особую точку X_1 . Ей соответствует особенность типа седло-седло, которая может быть представлена как прямое произведение двух седловых бифуркаций $B \times B$.

$$\begin{aligned} & (\lambda_{\beta_7}, -\lambda_{\alpha_9}) \xrightarrow{(I)} B_{\beta_7} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\beta_7}, \lambda_{\alpha_4}), \\ & (\lambda_{\beta_7}, -\lambda_{\alpha_9}) \xrightarrow{(IV)} B_{\beta_7} \xrightarrow{(II)} (\lambda_{\beta_7}, \lambda_{\alpha_4}), \\ & (\lambda_{\beta_7}, -\lambda_{\alpha_9}) \xrightarrow{(VII)} B_{\beta_7} \xrightarrow{(II)} (\lambda_{\beta_7}, \lambda_{\alpha_4}), \\ & (\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_7}) \xrightarrow{(I)} B_{\alpha_4} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_4}, -\lambda_{\beta_2}), \\ & (\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_7}) \xrightarrow{(II)} B_{\alpha_4} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_4}, -\lambda_{\beta_2}), \\ & (\lambda_{\beta_2}, -\lambda_{\alpha_9}) \xrightarrow{(I)} B_{\beta_2} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\alpha_4}), \\ & (\lambda_{\beta_2}, -\lambda_{\alpha_9}) \xrightarrow{(IV)} B_{\beta_2} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\alpha_4}), \\ & (\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7}) \xrightarrow{(I)} B_{\alpha_9} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_9}, -\lambda_{\beta_2}), \\ & (\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7}) \xrightarrow{(VII)} B_{\alpha_9} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_9}, -\lambda_{\beta_2}), \\ & (\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7}) \xrightarrow{(II)} B_{\alpha_9} \xrightarrow{(IV)} (\lambda_{\alpha_9}, -\lambda_{\beta_2}), \\ & (\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7}) \xrightarrow{(IV)} B_{\alpha_9} \xrightarrow{(IV)} (\lambda_{\alpha_9}, -\lambda_{\beta_2}). \end{aligned}$$

Рассмотрим особую точку Y_1 с представлением $B \times B$, аналогично получаем:

$$\begin{aligned} & (\lambda_{\beta_4}, -\lambda_{\alpha_2}) \xrightarrow{(I)} B_{\beta_4} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\beta_4}, \lambda_{\alpha_7}) \\ & \quad \xrightarrow{(III)} (\lambda_{\beta_4}, \lambda_{\alpha_7}), \\ & (\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_4}) \xrightarrow{(I)} B_{\alpha_2} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_2}, -\lambda_{\beta_9}) \\ & \quad \xrightarrow{(V)} (\lambda_{\alpha_2}, -\lambda_{\beta_9}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\beta_4}) &\xrightarrow{(I)} B_{\alpha_7} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_7}, -\lambda_{\beta_9}) \\
&\xrightarrow{(V)} (\lambda_{\alpha_7}, -\lambda_{\beta_9}), \\
(\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\beta_4}) &\xrightarrow{(III)} B_{\alpha_7} \xrightarrow{(III)} (\lambda_{\alpha_7}, -\lambda_{\beta_9}) \\
&\xrightarrow{(VI)} (\lambda_{\alpha_7}, -\lambda_{\beta_9}), \\
(\lambda_{\beta_9}, -\lambda_{\alpha_2}) &\xrightarrow{(I)} B_{\beta_9} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\beta_9}, \lambda_{\alpha_7}) \\
&\xrightarrow{(III)} (\lambda_{\beta_9}, \lambda_{\alpha_7}), \\
(\lambda_{\beta_9}, -\lambda_{\alpha_2}) &\xrightarrow{(V)} B_{\beta_9} \xrightarrow{(V)} (\lambda_{\beta_9}, \lambda_{\alpha_7}) \\
&\xrightarrow{(VI)} (\lambda_{\beta_9}, \lambda_{\alpha_7}).
\end{aligned}$$

Заметим, что для атомов B_{α_4} и B_{β_4} получены две различные допустимые системы координат. Далее будут использованы вторые системы координат, возникшие из точек X_1 и Y_1 соответственно.

Итак, пока определены допустимые системы координат, относящиеся к десяти гиперболическим бифуркациям $\alpha_2, \beta_2, \alpha_4, \beta_4, \alpha_5, \beta_5, \alpha_7, \beta_7, \alpha_9, \beta_9$.

Осталось построить допустимые системы координат, относящиеся к бифуркациям $\alpha_1, \beta_1, \alpha_3, \beta_3, \beta_6, \alpha_8, \beta_8, \alpha_{10}, \beta_{10}, \gamma_1, \delta_1, \gamma_2, \delta_2$, которые имеют эллиптический тип A .

На ребре круговой молекулы точки A_1 , соответствующем семейству II, $r[\alpha_3-\alpha_4] = 0$. Следовательно, циклы λ_{α_3} и λ_{α_4} имеют индекс пересечения 1 и образуют базис. Второй цикл имеет ориентацию, заданную гамильтоновым потоком, поэтому базис является допустимым для рассматриваемого атома A_{α_3} . Рассуждая аналогично, получаем допустимые базисы для остальных бифуркаций. Исключением являются атом A_{β_6} . Для него нельзя указать второй базисный цикл, так как пока не известны соответствующие r -метки круговых молекул.

$$A_{\alpha_3} \xrightarrow{(II)} (\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\alpha_4}).$$

Из круговой молекулы точки B_1 :

$$(\lambda_{\beta_3}, \lambda_{\beta_4}) \xrightarrow{(III)} A_{\beta_3}.$$

Из круговой молекулы точки A_2 :

$$(\lambda_{\alpha_8}, \lambda_{\alpha_7}) \xrightarrow{(VI)} A_{\alpha_8},$$

$$(\lambda_{\alpha_8}, \lambda_{\alpha_7}) \xrightarrow{(V)} A_{\alpha_8},$$

Из круговой молекулы точки B_2 :

$$A_{\beta_8} \xrightarrow{(IV)} (\lambda_{\beta_8}, \lambda_{\beta_7}),$$

$$A_{\beta_8} \xrightarrow{(VII)} (\lambda_{\beta_8}, \lambda_{\beta_7}).$$

Из круговой молекулы точки A_3 :

$$(\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\alpha_2}) \xrightarrow{(V)} A_{\gamma_1}.$$

Из круговой молекулы точки B_3 :

$$A_{\delta_1} \xrightarrow{(IV)} (\lambda_{\delta_1}, \lambda_{\beta_2}).$$

Из круговой молекулы точки A_4 :

$$A_{\gamma_2} \xrightarrow{(II)} (\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\alpha_9}),$$

$$A_{\gamma_2} \xrightarrow{(VII)} (\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\alpha_9}).$$

Из круговой молекулы точки B_4 :

$$(\lambda_{\delta_2}, \lambda_{\beta_9}) \xrightarrow{(III)} A_{\delta_2},$$

$$(\lambda_{\delta_2}, \lambda_{\beta_9}) \xrightarrow{(VI)} A_{\delta_2}.$$

Из круговых молекул точек S_0, e_1 , которые возникают в случае $g = 0$, $\lambda = 0$ (см. [1], а также рис. 2.3-2.4) в единых обозначениях (см. таблицу 2.1):

$$(\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\beta_4}) \xrightarrow{(I)} A_{\beta_1},$$

$$A_{\alpha_1} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_4}).$$

Из круговой молекулы точки e_2 , которая возникает в случае $\lambda = 0$ (см. [1], а также рис. 2.3) в единых обозначениях (см. таблицу 2.1):

$$A_{\alpha_{10}} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\alpha_9}),$$

$$A_{\alpha_{10}} \xrightarrow{(IV)} (\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\alpha_9}).$$

Из круговой молекулы точки z_6 , которая возникает в случае $g = 0$ (см. [36], а также рис. 2.4) в единых обозначениях (см. таблицу 2.1):

$$(\lambda_{\beta_{10}}, \lambda_{\beta_9}) \xrightarrow{(I)} A_{\beta_{10}},$$

$$(\lambda_{\beta_{10}}, \lambda_{\beta_9}) \xrightarrow{(V)} A_{\beta_{10}}.$$

4.2 Определение взаимного расположения базисных циклов.

Рассмотрим ребро молекулы и два цикла λ^+ и λ^- , которые являются однозначно определёнными базисными циклами на атомах, соединённых данным ребром. Правило, устанавливающее связь между r -метками на рёбрах молекулы и индексами пересечения соответствующих циклов, формулируется следующим образом:

- 1) если $r = 0$, то λ^+ и λ^- имеют индекс пересечения 1;
- 2) если $r = \infty$, то λ^+ и λ^- имеют индекс пересечения 0, т.е. гомологичны;
- 3) если $r = \frac{1}{2}$, то λ^+ и λ^- имеют индекс пересечения 2.

Будем анализировать каждое семейство по отдельности.

Семейство I

Бифуркации, относящиеся к этому семейству, - это $A_{\beta_5}^*, C_{2\alpha_5}, B_{\alpha_4}, B_{\beta_4}, B_{\beta_7}, B_{\beta_2}, B_{\alpha_9}, B_{\alpha_2}, B_{\alpha_7}, B_{\beta_9}, A_{\alpha_1}, A_{\beta_1}, 2A_{\alpha_{10}}, 2A_{\beta_{10}}$.

Особые точки, относящиеся к этому семейству, - это $M, Z_1, X_1, X_5, Y_1, Y_5, A_1, B_1, V_1, U_1, B_2, U_2, A_2, V_2, A_4, B_4, A_3, B_3, V_3, U_3$.

Информация, которую можно извлечь из круговых молекул, такова:

точка	пара циклов	индекс пересечения
M	$\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\beta_1}$	1
Z_1	$\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_5}$	2
Z_1	$\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_5}$	1
Z_1	$\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_4}$	1
Z_1	$\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_4}$	1
X_1	$\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_7}$	1
X_1	$\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_2}$	1
X_1	$\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_2}$	1
X_1	$\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7}$	1
X_5	$\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\beta_2}$	0
X_5	$\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\beta_7}$	0
X_5	$\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\beta_2}$	0
Y_1	$\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_9}$	1
Y_1	$\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\beta_9}$	1
Y_1	$\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\beta_4}$	1
Y_1	$\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_4}$	1
Y_5	$\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\alpha_2}$	0
Y_5	$\lambda_{\beta_{10}}, \lambda_{\alpha_2}$	0
Y_5	$\lambda_{\beta_{10}}, \lambda_{\alpha_7}$	0
V_1	$\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_5}$	0
U_1	$\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_2}$	0
U_2	$\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_5}$	0
V_2	$\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_9}$	0

Базисы на положительных и отрицательных границах 3-атомов должны иметь разную ориентацию. Это значит, что если две бифуркции расположены обе слева (или обе справа) по отношению к области I, то ориентации соответствующих допустимых систем координат совпадают. Таким образом базисы

$(\lambda_{\beta_5}, \frac{\lambda_{\beta_5} + \lambda_{\alpha_4}}{2}), (\lambda_{\alpha_5}, -\lambda_{\beta_5}), (\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_7}), (\lambda_{\beta_2}, -\lambda_{\alpha_9}), (\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7}), (\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_4}),$
 $(\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\beta_4}), (\lambda_{\beta_9}, -\lambda_{\alpha_2}), (\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\beta_4})$ имеют одну ориентацию, а базисы
 $(\lambda_{\beta_5}, -\lambda_{\alpha_5}), (\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_4}), (\lambda_{\beta_7}, \lambda_{\alpha_4}), (\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\alpha_4}), (\lambda_{\alpha_9}, -\lambda_{\beta_2}), (\lambda_{\beta_4}, \lambda_{\alpha_7}),$
 $(\lambda_{\alpha_2}, -\lambda_{\beta_9}), (\lambda_{\beta_9}, \lambda_{\alpha_7}), (\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_4})$ им противоположную.

Перечисленные выше условия позволяют однозначно определить взаимное расположение всех циклов, относящихся к семейству I . Результат показан на рис. 4.1. Циклы λ показаны здесь как элементы целочисленной решетки Γ , отвечающей тору Лиувилля. Сам тор рассматривается как факторпространство \mathbb{R}^2/Γ .

Семейство II

Бифуркации, относящиеся к этому семейству, - это $A_{\beta_5}^*, B_{\alpha_4}, B_{\beta_7}, B_{\alpha_4},$
 $B_{\alpha_9}, A_{\alpha_3}, A_{\gamma_2}$.

Особые точки, относящиеся к этому семейству, - это $Z_1, X_1, X_3, A_1, V_1,$
 B_2, U_2, A_4, V_3 .

Из круговых молекул можно извлечь следующую информацию:

точка	пара циклов	индекс пересечения
Z_1	$\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_5}$	2
X_1	$\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_7}$	1
X_1	$\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7}$	1
X_3	$\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\beta_7}$	0
X_3	$\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\beta_7}$	0
A_1	$\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\alpha_4}$	1
U_2	$\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_5}$	0
A_4	$\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\gamma_2}$	1

В этом семействе ориентации базисов $(\lambda_{\beta_5}, \frac{\lambda_{\beta_5} + \lambda_{\alpha_4}}{2}), (\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7}), (\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_7})$ совпадают и противоположны ориентации базисов $(\lambda_{\beta_7}, \lambda_{\alpha_4}), (\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\alpha_4}), (\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\alpha_9})$. Результат показан на рис. 4.1.

Семейство III

Бифуркации, относящиеся к этому семейству, - это $C_{2\alpha_5}, B_{\beta_4}, B_{\beta_9}, A_{\beta_3}, A_{\delta_2}$.

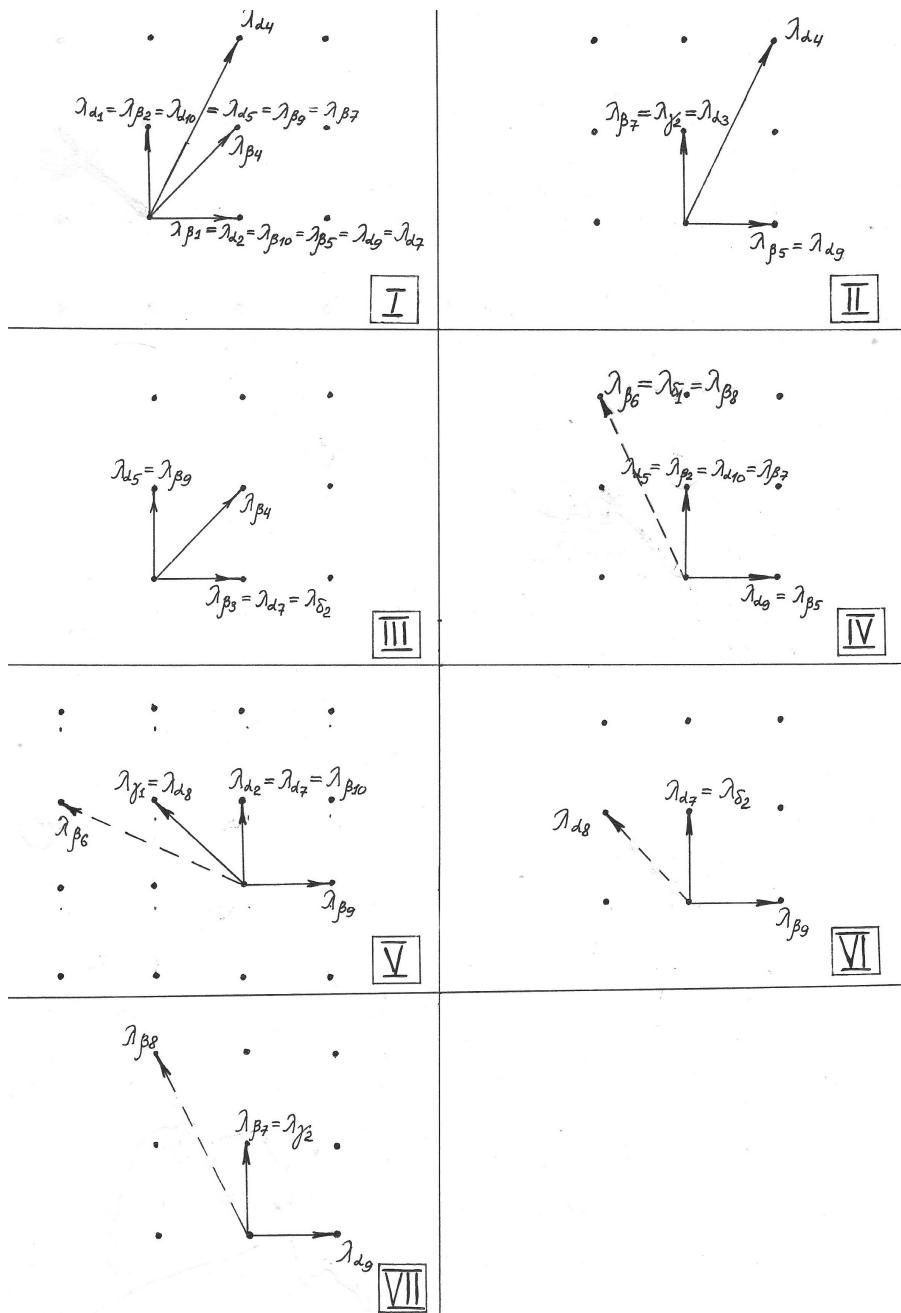


Рис. 4.1: Взаимное расположение базисных циклов в семействах торов

Особые точки, относящиеся к этому семейству, - это $Z_1, Y_1, Y_3, B_1, U_1, A_2, V_2, B_4, U_3$.

Информация, которую можно извлечь из соответствующих круговых молекул, такова.

точка	пара циклов	индекс пересечения
Z_1	$\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_4}$	1
Y_1	$\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\beta_9}$	1
Y_1	$\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\beta_4}$	1
Y_3	$\lambda_{\beta_3}, \lambda_{\alpha_7}$	0
Y_3	$\lambda_{\delta_2}, \lambda_{\alpha_7}$	0
B_1	$\lambda_{\beta_3}, \lambda_{\beta_4}$	1
V_2	$\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_9}$	0
B_4	$\lambda_{\delta_2}, \lambda_{\beta_9}$	1

В этом семействе базисы $(\lambda_{\beta_3}, \lambda_{\beta_4}), (\lambda_{\delta_2}, \lambda_{\beta_9})$ имеют одинаковую ориентацию, а ориентация базисов $(\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_4}), (\lambda_{\beta_4}, \lambda_{\alpha_7}), (\lambda_{\beta_9}, \lambda_{\alpha_7})$ ей противоположна. Результат показан на рис. 4.1.

Семейство IV

Бифуркации, относящиеся к этому семейству, - это $A_{\beta_5}^*, C_{2\alpha_5}, B_{\beta_7}, B_{\beta_2}, B_{\alpha_9}, A_{\beta_8}, A_{\delta_1}, A_{\beta_6}, 2A_{\alpha_{10}}$.

Особые точки, относящиеся к этому семейству, - это $Z_1, Z_2, X_1, X_4, X_5, V_1, U_1, B_2, U_2, V_2, A_4, B_3, V_3, U_3$.

Из круговых молекул можно извлечь следующую информацию:

точка	пара циклов	индекс пересечения
Z_1	$\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_5}$	1
Z_2	$\lambda_{\delta_1}, \lambda_{\beta_6}$	0
X_1	$\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_2}$	1
X_1	$\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7}$	1
X_4	$\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\delta_1}$	1
X_5	$\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\beta_2}$	0
X_5	$\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\beta_7}$	0
U_1	$\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_2}$	0
B_2	$\lambda_{\beta_8}, \lambda_{\beta_7}$	1
U_2	$\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_5}$	0
B_3	$\lambda_{\delta_1}, \lambda_{\beta_2}$	1

Так как на дуге γ_2 тор из семейства IV не испытывает перестройки (см. X_2 на рис. 3.1), то $r[\delta_1 - \beta_8] = \infty$, а значит λ_{δ_1} и λ_{β_8} имеют индекс пересечения 0. Также из круговой молекулы точки Z_2 следует, что $r[\delta_1 - \beta_6] = \infty$, а значит λ_{δ_1} и λ_{β_6} имеют индекс пересечения 0.

Ориентация базисов $(\lambda_{\alpha_5}, -\lambda_{\beta_5}), (\lambda_{\beta_7}, -\lambda_{\alpha_9}), (\lambda_{\beta_2}, -\lambda_{\alpha_9})$ противоположна ориентации базисов $(\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\alpha_9}), (\lambda_{\beta_8}, \lambda_{\beta_7}), (\lambda_{\delta_1}, \lambda_{\beta_2})$.

Результат показан на рис. 4.1.

Семейство V

Бифуркации, относящиеся к этому семейству, - это $B_{\alpha_2}, B_{\alpha_7}, B_{\beta_9}, A_{\alpha_8}, A_{\gamma_1}, A_{\beta_6}, 2A_{\beta_{10}}$.

Особые точки, относящиеся к этому семейству, - это $Y_1, Y_4, Y_5, Z_2, V_1, A_2, V_2, B_4, A_3, V_3$.

Информация, которую можно извлечь из соответствующих круговых молекул, такова.

точка	пара циклов	индекс пересечения
Y_1	$\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_9}$	1
Y_1	$\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\beta_9}$	1
Y_4	$\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\beta_{10}}$	1
Y_5	$\lambda_{\beta_{10}}, \lambda_{\alpha_2}$	0
Y_5	$\lambda_{\beta_{10}}, \lambda_{\alpha_7}$	0
Z_2	$\lambda_{\beta_6}, \lambda_{\gamma_1}$	1
A_2	$\lambda_{\alpha_8}, \lambda_{\alpha_7}$	1
A_3	$\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\alpha_2}$	1

Так как на дуге δ_2 тор из семейства V не испытывает перестройки (см. Y_2 на рис. 3.1), то $r[\gamma_1 - \alpha_8] = \infty$, а значит λ_{γ_1} и λ_{α_8} имеют индекс пересечения 0.

Ориентация базисов $(\lambda_{\alpha_8}, \lambda_{\alpha_7}), (\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\alpha_2})$ противоположна ориентации базисов $(\lambda_{\alpha_2}, -\lambda_{\beta_9}), (\lambda_{\beta_9}, \lambda_{\alpha_7})$.

Результат показан на рис. 4.1.

Семейство VI

Бифуркции, относящиеся к этому семейству, - это $B_{\beta_9}, A_{\alpha_8}, A_{\delta_2}$.

Особые точки, относящиеся к этому семейству, - это $Y_1, Y_2, Y_3, A_2, V_2, B_4$.

Из круговых молекул можно извлечь следующую информацию:

точка	пара циклов	индекс пересечения
Y_1	$\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\beta_9}$	1
Y_2	$\lambda_{\alpha_8}, \lambda_{\delta_2}$	1
Y_3	$\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\delta_2}$	0
A_2	$\lambda_{\alpha_8}, \lambda_{\alpha_7}$	1
B_4	$\lambda_{\delta_2}, \lambda_{\beta_9}$	1

Ориентация базиса $(\lambda_{\beta_9}, \lambda_{\alpha_7})$ противоположна ориентации базисов $(\lambda_{\alpha_8}, \lambda_{\alpha_7}), (\lambda_{\delta_2}, \lambda_{\beta_9})$.

Результат показан на рис. 4.1.

Семейство VII

Бифуркации, относящиеся к этому семейству, - это $B_{\beta_7}, B_{\alpha_9}, A_{\beta_8}, A_{\gamma_2}$.

Особые точки, относящиеся к этому семейству, - это $X_1, X_2, X_3, B_2, U_2, A_4$.

Информация, которую можно извлечь из соответствующих круговых молекул, такова:

точка	пара циклов	индекс пересечения
X_1	$\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7}$	1
Y_2	$\lambda_{\beta_8}, \lambda_{\gamma_2}$	1
Y_3	$\lambda_{\beta_7}, \lambda_{\gamma_2}$	0
B_2	$\lambda_{\beta_8}, \lambda_{\beta_7}$	1
A_4	$\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\alpha_9}$	1

Ориентация базиса $(\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7})$ противоположна ориентации базисов $(\lambda_{\beta_8}, \lambda_{\beta_7})$, $(\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\alpha_9})$.

Результат показан на рис. 4.1.

Замечание 12. На рисунке 4.1 положение циклов λ_{β_6} в семействах IV, V, λ_{α_8} в семействе VI и λ_{β_8} в семействе VII указано пунктиром. Это связано с тем, что пока неизвестны некоторые г-метки на рёбрах круговых молекул точек U_2, V_2 . Далее эти метки будут найдены при завершении доказательства теоремы 15, что позволит однозначно определить положение этих циклов в указанных семействах. На рисунке 4.1 приведён ответ для полноты изложения.

4.3 Применение формулы Топалова и завершение доказательства теоремы 15.

В этом параграфе будет завершено доказательство теоремы 15 о метках на рёбрах круговых молекул вырожденных одномерных орбит, а также будет выбран второй базисный цикл для атома A_{β_6} .

Замечание 13. Недостающие метки круговых молекул точек V_1, U_1, V_2, U_2

можно выписать и без применения формул Топалова, так как они появляются в классическом случае Ковалевской и в случае Ковалевской-Яхъи при $g = 0$. В работе [1] приведён ответ, но не указан способ нахождения этих меток. Нам для вычисления изоэнергетических молекул осталось только выбрать второй базисный цикл для атома A_{β_6} , а также определить положение циклов $\lambda_{\alpha_8}, \lambda_{\beta_8}$ в семействах торов VI, VII соответственно. Это можно сделать, зная r -метки круговой молекулы точки V_1 . Поэтому приведём для полноты изложения доказательство нахождения всех недостающих меток круговых молекул точек $V_1, U_1, V_2, U_2, V_3, U_3$, откуда будет получено соотношение на допустимые системы координат, определяющее положение цикла λ_{β_6} в семействах IV, V, и выбран второй базисный цикл для атома A_{β_6} .

Итак, вернёмся к доказательству теоремы 15.

Применим формулу Топалова (1.3.1) для подсчёта недостающих r -меток.

- точка V_1

Рассмотрим круговую молекулу точки V_1 , имеющую вид $A - A^* - A$ (таблица 3.2). Находим матрицу склейки на ребре, относящемся к семейству II:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\beta_5} \\ \frac{\lambda_{\beta_5} + \lambda_{\alpha_4}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_3} \\ \lambda_{\alpha_4} \end{pmatrix}$$

Значит, метка r равна нулю. Вторую матрицу склейки определим из уравнения Топалова. Топологический тип многообразия - $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, поэтому $H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$, а значит $N(W^*) = 0$. В силу предложения 1 имеем $\varepsilon = +1$, а следовательно в матрице склейки $b > 0$.

$\tilde{n} = n + \sum r_i + p/2 = [a/b] - 1 + \{a/b\} + 1/2 = a/b - 1/2$, где через $[x]$ и $\{x\}$ обозначены целая и дробная части числа x .

По формуле Топалова получим

$$b(a/b - 1/2) = 0 \Rightarrow 2a = b \Rightarrow a = 1, b = 2 \Rightarrow r = 1/2.$$

Заметим, что мы получили соотношение на допустимые системы координат, определяющее положение цикла λ_{β_6} в семействе IV:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\beta_6} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k & 2k-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_5} \\ -\lambda_{\alpha_5} \end{pmatrix}, k \in \mathbb{Z}.$$

Вторая строка матрицы задает множество для выбора второго элемента допустимой системы координат для β_6 . Для определенности зафиксируем вариант, соответствующий $k = 0$.

$$A_{\beta_6} \xrightarrow{(IV)} (\lambda_{\beta_6}, \lambda_{\alpha_5}).$$

Рассмотрим ребро круговой молекулы точки V_1 , соединяющее бифуркации A_{β_6} и B_{α_2} (таблица 3.2). Топологический тип многообразия - \mathbb{H}^3 , поэтому $N(W^*) = 0$. В матрице склейки $b > 0$, так как $\varepsilon = +1$ по предложению 1.

$$\tilde{n} = n + \sum r_i + p/2 = [a/b] + \{a/b\} + 1/2 = a/b + 1/2,$$

По формуле Топалова получим

$$b(a/b + 1/2) = 0 \Rightarrow 2a = -b \Rightarrow a = -1, b = 2 \Rightarrow r = 1/2.$$

Таким образом получаем соотношение на допустимые системы координат, определяющее положение цикла λ_{β_6} в семействе V:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\beta_6} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ k & 2k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_2} \\ \lambda_{\beta_9} \end{pmatrix}, k \in \mathbb{Z}.$$

Зафиксируем вариант при $k = 0$.

$$(\lambda_{\beta_6}, \lambda_{\beta_9}) \xrightarrow{(V)} A_{\beta_6}.$$

- точка U_1

Рассмотрим ребро круговой молекулы точки U_1 с неизвестной конечной меткой r (таблица 3.2). Матрица склейки на ребре, относящемся к семейству III:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_5} \\ -\lambda_{\beta_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_{\beta_3} \\ \lambda_{\beta_4} \end{pmatrix} \Rightarrow r = 0.$$

- точки V_3, U_3

Круговые молекулы точек V_3 и U_3 полностью совпадают с круговыми молекулами точек V_1 и U_1 (ребра молекул соединяют те же бифуркации и относятся к таким же семействам торов). Поэтому r метки соответственно равны.

Теперь мы знаем положение цикла λ_{β_6} и второй цикл, дополняющий его до базиса. Поэтому далее все неизвестные метки можно посчитать без применения формулы Топалова.

- точка V_2

Посчитаем матрицу склейки на ребре круговой молекулы точки V_2 , которое соединяет бифуркции A_{β_6} и B_{β_9} и относится к семейству V.

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\beta_9} \\ -\lambda_{\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_{\beta_6} \\ \lambda_{\beta_9} \end{pmatrix} \Rightarrow r = 0.$$

Рассмотрим ребро, соединяющее бифуркции A_{α_8} и B_{β_9} , относящееся к семейству V.

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_8} \\ \lambda_{\alpha_7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_9} \\ \lambda_{\alpha_7} \end{pmatrix} \Rightarrow r = 0.$$

Теперь рассмотрим ребро, соединяющее бифуркции A_{α_8} и B_{β_9} , относящееся к семейству VI.

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_8} \\ \lambda_{\alpha_7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_9} \\ \lambda_{\alpha_7} \end{pmatrix} \Rightarrow r = 0.$$

Теперь рассмотрим ребро, соединяющее бифуркции A_{β_6} и $C_{2\alpha_5}$, относящееся к семейству IV.

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_5} \\ -\lambda_{\beta_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_6} \\ \lambda_{\alpha_5} \end{pmatrix} \Rightarrow r = 0.$$

- точка U_2

Найдём матрицу склейки на ребре, соединяющем бифуркции A_{β_8} и B_{α_9} , относящемся к семейству IV.

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_9} \\ \lambda_{\beta_7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_8} \\ \lambda_{\beta_7} \end{pmatrix} \Rightarrow r = \frac{1}{2}.$$

Посчитаем матрицу склейки на ребре, соединяющем бифуркции A_{β_8} и B_{α_9} , относящемся к семейству VII.

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_9} \\ \lambda_{\beta_7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_8} \\ \lambda_{\beta_7} \end{pmatrix} \Rightarrow r = \frac{1}{2}.$$

Итак, подсчёт меток на рёбрах круговых молекул вырожденных одномерных орбит завершён. Теорема 15 полностью доказана.

Глава 5

Основные теоремы. Полный перечень инвариантов Фоменко-Цишанга для интегрируемого случая Ковалевской-Яхьи.

5.1 Вычисление изоэнергетических молекул.

Теперь мы можем вычислить все изоэнергетические молекулы в интегрируемом случае Ковалевской-Яхьи.

Напомним, что кривая τ без самопересечений в плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$ называется допустимой, если она пересекает бифуркационную диаграмму Σ трансверсально и не проходит через особые точки Σ .

Полный прообраз $Q_\tau = \mu^{-1}(\tau)$ кривой τ в M^4 - это трехмерное гладкое многообразие со структурой лиувиллева слоения, все особенности которого являются боттовскими. На Q_τ возникает инвариант этого слоения - меченая молекула $W^*(\tau)$, которая не меняется при гладкой изотопии τ в классе допустимых кривых. В качестве кривой можно τ рассмотреть окружность малого радиуса с центром в некоторой изолированной особой точке бифуркационной диаграммы Σ . Такая молекула $W^*(\tau)$ называется круговой молекулой особой точки. В [1] описан алгоритм, как склеить из кусочков круговых молекул особых точек бифуркационной диаграммы меченую молекулу W^* для любой

допустимой кривой на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$. Однако, исторически выделены кривые $\tau = \{H = h_0\}$, где H - это гамильтониан или интеграл энергии. На рисунках 5-13 такие кривые обозначены большими латинскими буквами.

Итак, после завершения вычислений круговых молекул, выбора допустимых систем координат и определения взаимного расположения базисных циклов, процедура вычисления изоэнергетических молекул осуществляется по алгоритму, описанному в [1]. С помощью построенных допустимых систем координат и взаимного расположения базисных циклов были вычислены все матрицы склеек изоэнергетических молекул. Результат приведён в таблицах 5.1, 5.2, 5.3. По матрицам склеек были вычислены числовые метки. Итоговые результаты сформулированы в следующих теоремах.

Теорема 17. (H.C. Славина [24]) *Интегрируемая система Ковалевской-Яхьи в зависимости от значений гиростатического момента λ , интеграла площадей g и уровня энергии H распадается на 29 слоений Лиувилля, которые попарно лиувиллево неэквивалентны. Полный список инвариантов Фоменко-Цишанга для случая интегрируемости Ковалевской-Яхьи при небифуркационных значениях параметров g, λ , классифицирующий все эти 29 слоений, приведен в таблицах 5.1, 5.2, 5.3.*

Доказательство. В предыдущих главах были построены допустимые системы координат и определено взаимное расположение базисных циклов. Применяя алгоритм, описанный в [1], были вычислены все матрицы склеек на рёбрах 29 изоэнергетических молекул.

Для примера рассмотрим на рис. 5.1 изоэнергетическую молекулу, возникшую на уровне энергии h_{21} (см. камеру 5' рис. 2.9).

Построим матрицы склеек для каждого из 6 рёбер данной изоэнергетической молекулы. Каждое ребро обозначено римской цифрой, которая показывает к какому семейству торов данное ребро относится. Зная базисные циклы на всех дугах бифуркационных диаграмм, извлекаем всю необходимую информацию из рис. 4.1, а именно:

Таблица 5.1: Изоэнергетические молекулы

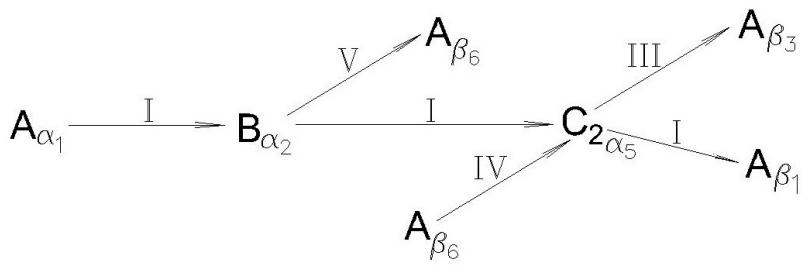
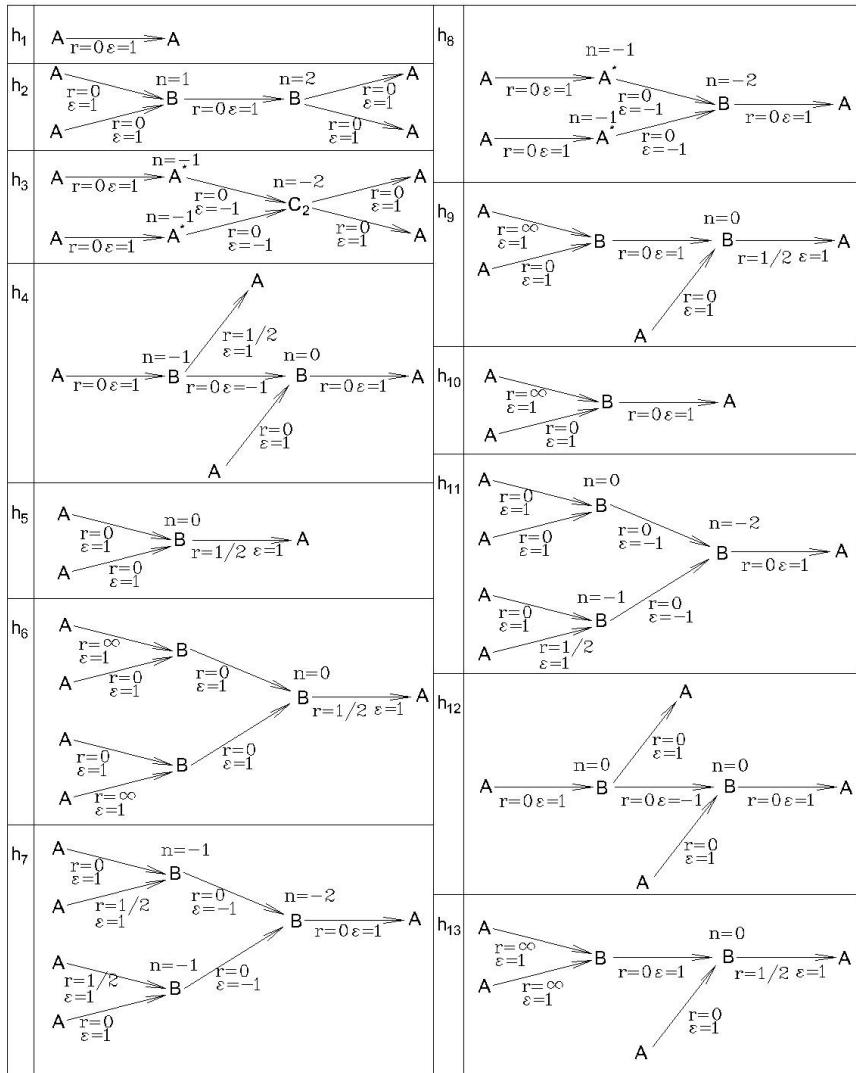


Рис. 5.1: Изоэнергетическая молекула h_{21}

Таблица 5.2: Изоэнергетические молекулы (продолжение)

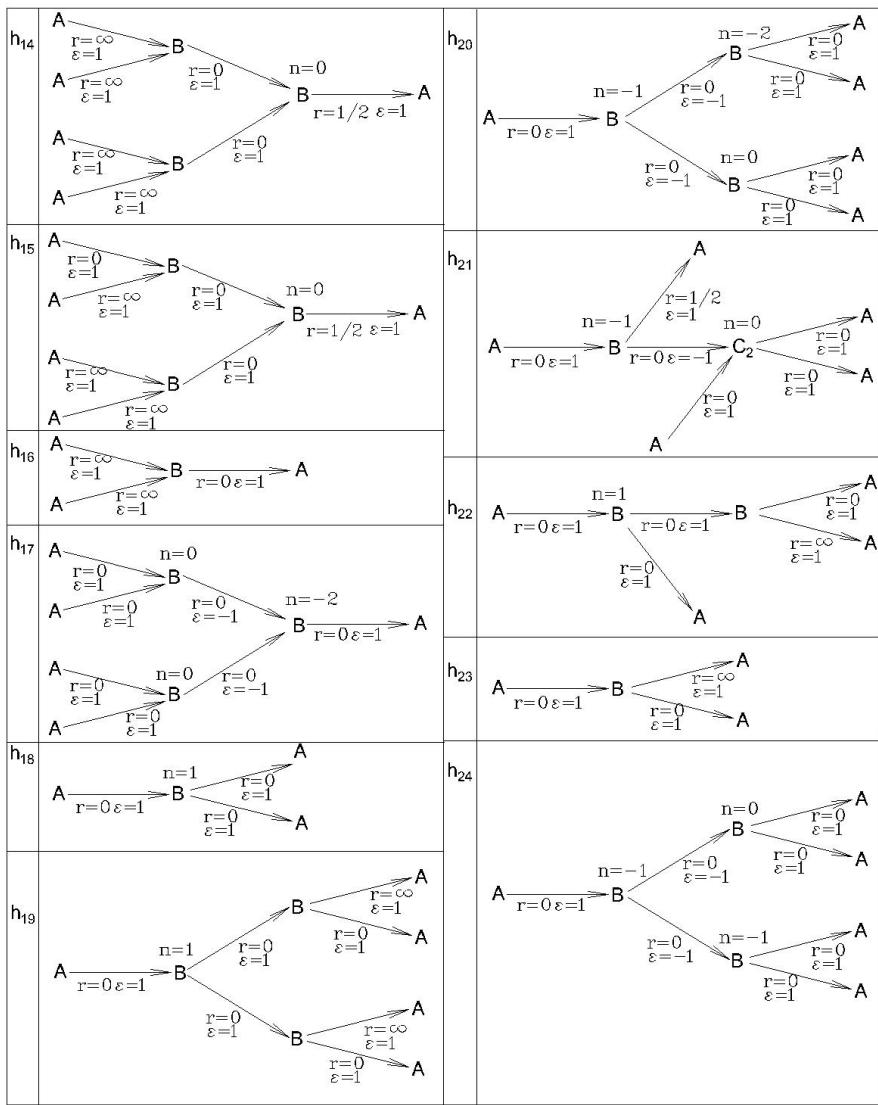


Таблица 5.3: Изоэнергетические молекулы (продолжение)

h_{25}		h_{28}	
h_{26}		h_{29}	
h_{27}			

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_2} \\ \lambda_{\beta_4} \end{pmatrix} &= C_{\alpha_2, \alpha_1} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_1} \\ \lambda_{\alpha_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_1} \\ \lambda_{\alpha_4} \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_6} \\ \lambda_{\beta_9} \end{pmatrix} &= C_{\beta_6, \alpha_2} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_2} \\ -\lambda_{\beta_9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_2} \\ -\lambda_{\beta_9} \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_5} \\ -\lambda_{\beta_5} \end{pmatrix} &= C_{\alpha_5, \alpha_2} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_2} \\ -\lambda_{\beta_9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_2} \\ -\lambda_{\beta_9} \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_5} \\ -\lambda_{\beta_5} \end{pmatrix} &= C_{\alpha_5, \beta_6} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_6} \\ \lambda_{\alpha_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_6} \\ \lambda_{\alpha_5} \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_3} \\ \lambda_{\beta_4} \end{pmatrix} &= C_{\beta_3, \alpha_5} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_5} \\ \lambda_{\beta_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_5} \\ \lambda_{\beta_4} \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_1} \\ \lambda_{\beta_4} \end{pmatrix} &= C_{\beta_1, \alpha_5} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_5} \\ \lambda_{\beta_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_5} \\ \lambda_{\beta_4} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления проделаны для всех возможных 29 слоений Лиувилля, по матрицам склеек посчитаны все r, ε и n метки. Результат представлен в таблицах 5.1, 5.2, 5.3. Оказывается, что все перечисленные меченные молекулы попарно неизоморфны \Rightarrow по теореме Фоменко–Цишанга соответствующие слоения Лиувилля не эквивалентны.

Теорема доказана. □

Тем самым полностью завершена тонкая лиувиллева классификация слоений семейства систем Ковалевской-Яхьи (имеется ввиду двухпараметрическое семейство на M_g^4 , зависящее от параметров g, λ). Проводя сравнительную характеристику, оказывается, что среди этих слоений есть слоения, которые эквивалентны ранее известным слоениям, возникшим в других случаях интегрируемости твердого тела. Лиувиллева эквивалентность слоений означает лиувиллеву эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем на каких-то уровнях энергии. Из лиувиллевой эквивалентности гамильтоновых систем следует, что замыкания интегральных траекторий обоих систем на множестве полной меры совпадают (см. [40]). Далее будем формулировать теоремы в терминах лиувиллевой эквивалентности гамильтоновых систем.

5.2 Лиувиллева эквивалентность систем Ковалевской–Яхьи, Ковалевской, Ковалевской–Яхьи при $g = 0$, Жуковского, Горячева-Чаплыгина-Сретенского на некоторых соответствующих уровнях энергии.

При доказательстве следующих трёх теорем были использованы результаты, полученные в данной работе (таблицы 5.1, 5.2, 5.3), в работах [1], [36], а также таблицы 5.1-5.11 из [22, т. 2].

Теорема 18. *Интегрируемые системы типа Ковалевской–Яхьи на следующих 10 уровнях энергии $h_1, h_2, h_3, h_5, h_6, h_7, h_8, h_{14}, h_{16}, h_{17}$ (соответственные слоения Лиувилля заданы мечеными молекулами в таблицах 5.1, 5.2) лиувиллево эквивалентны интегрируемым системам типа Ковалевской на 10 уровнях энергии $A, C, D, B, J, H, E, I, F, G$ соответственно. Последние 10 молекул и их обозначения взяты из [1].*

Теорема 19. *(H.C. Славина [24]) Интегрируемые системы типа Ковалевской–Яхьи на следующих 10 уровнях энергии $h_1, h_2, h_3, h_{18}, h_{19}, h_{20}, h_{21}, h_{26}, h_{28}, h_{29}$*

(соответственные слоения Лиувилля заданы мечеными молекулами в таблицах 5.1, 5.2, 5.3) лиувиллево эквивалентны серии интегрируемых систем Ковалевской–Яхьи при $g = 0$ на 10 уровнях энергии $A, C, D, B, F, G, E, H, J, I$ соответственно. Последние 10 молекул и их обозначения взяты из [36].

Следующая таблица приводит соответствие эквивалентных слоений в случае Ковалевской–Яхьи, в случае Ковалевской ($\lambda = 0$), в случае Ковалевской–Яхьи при $g = 0$.

Случай Ковалевской	Случай Ковалевской–Яхьи	Случай Ковалевской–Яхьи при $g = 0$
A	h_1	A
C	h_2	C
D	h_3	D
B	h_5	—
J	h_6	—
H	h_7	—
E	h_8	—
I	h_{14}	—
F	h_{16}	—
G	h_{17}	—
—	h_{18}	B
—	h_{19}	F
—	h_{20}	G
—	h_{21}	E
—	h_{26}	H
—	h_{28}	J
—	h_{29}	I

Теорема 20. (H.C. Славина [24]) Интегрируемые системы типа Ковалевской–Яхьи на следующих 3 уровнях энергии h_1, h_{23}, h_{28} (соответственные слоения

Лиувилля заданы мечеными молекулами в таблицах 5.1, 5.2, 5.3) лиувиллево эквивалентны интегрируемым системам случая Жуковского на 3 уровнях энергии 7, 9, 2 соответственно; на 2 уровнях энергии h_1 и h_{28} лиувиллево эквивалентны интегрируемым системам случая Горячева-Чаплыгина-Сретенского на 2 уровнях энергии 1 и 4 соответственно. Молекулы, возникшие в случаях интегрируемости Жуковского и Горячева-Чаплыгина-Сретенского, и их обозначения взяты из таблиц 5.4, 5.6 [22, т. 2].

5.3 Теорема о стабилизации топологического типа сложения Лиувилля для семейства систем Ковалевской-Яхьи на больших уровнях энергии H .

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$ двухпараметрическое семейство бифуркационных диаграмм $\sum(g, \lambda)$ (см. рис. 2.2). Было обнаружено, что в области значений $H \geq H_0$ части диаграмм, попавшие в полуплоскость $\{h \geq H_0\}$ гомеоморфны. Обозначим через $\sum_{g, \lambda}^{H_0} = \sum(g, \lambda) \cap \{h \geq H_0\}$ часть бифуркационной диаграммы, попавшей в полуплоскость $\{h \geq H_0\}$. В дальнейшем мы будем рассматривать большие значения энергии H , поэтому назовём множество $\sum_{g, \lambda}^{H_0}$ “высоко” энергетической бифуркационной диаграммой. Тогда верна теорема.

Теорема 21. (*H.C. Славина [24]*) *Существует конечное значение энергии $H = H_0$ такое, что при всех значениях H больших H_0 “высоко” энергетические бифуркационные диаграммы на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$ случая Ковалевской-Яхьи изоморфны друг другу при любых ненулевых значениях параметров g, λ в следующем смысле: существует диффеоморфизм полуплоскостей, совмещающий эти “высоко” энергетические бифуркационные диаграммы (см. рис. 2.2). При больших значениях энергии H семейство систем Ковалевской-Яхьи лиувиллево эквивалентно одной системе на уровне h_4 , иными словами, топологический тип интегрируемой системы стабилизируется на больших уровнях энергии H .*

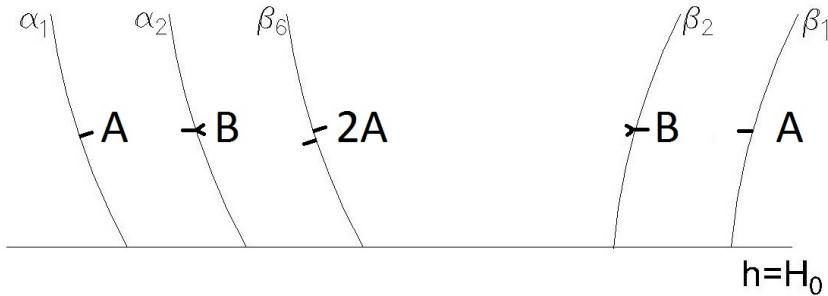


Рис. 5.2: “Высоко” энергетическая бифуркационная диаграмма

Замечание 14. В случае интегрируемости Ковалевской–Яхьи молекула на уровне h_4 встречается в каждой из 18 камер при значениях энергии $H \geq H_0$. Эта “высоко” энергетическая молекула оказывается грубо лиувиллево эквивалентна молекуле, обнаруженнной ранее в интегрируемой системе Горячева–Чаплыгина–Сретенского (см. меченую молекулу 7 из таблицы 5.6 [22, т. 2]). Однако, эти системы лиувиллево не эквивалентны, так как числовые метки различны. Таким образом, это “высоко” энергетическое сложение Лиувилля оказывается новым, в том смысле, что оно не встречается в других интегрируемых системах, исследованных ранее.

Доказательство. Рассмотрим на рис. 2.2 бифуркационные диаграммы случая Ковалевской–Яхьи. Все они на полу平面 $\{h \geq H_0\}$ изоморфны одной диаграмме с перестройками атомов, указанными на рисунке 5.2.

Это значит, что если сравнивать любые две изоэнергетические молекулы на больших уровнях энергии при различных значениях параметров g, λ , то ребра этих молекул, соединяющие соответственные бифуркции, относятся к одноименным дугам бифуркационных диаграмм и соответствуют одинаковым семействам торов. Поэтому молекулы и метки полностью совпадают. Соответствующая “общая” меченая молекула при $H = H_0$ имеет вид, указанный на рис. 5.3.

Теорема доказана. □

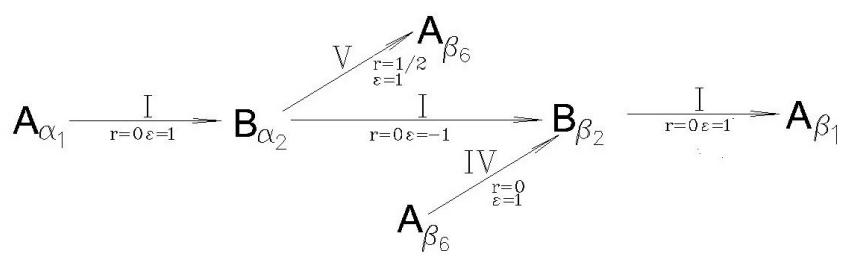


Рис. 5.3: “Высоко” энергетическое слоение

Литература

- [1] А. В. Болсинов , П. Рихтер, А. Т. Фоменко, *Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской*, Матем. сборник, 191:2 (2000), 3–42.
- [2] П. И. Топалов, *Вычисление тонкого инварианта Фоменко-Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела*, Матем. сборник, 187:3 (1996), 143–160.
- [3] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, *Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*, Изв. АН СССР, сер. матем., 53:3 (1990), 546–575.
- [4] А. В. Болсинов, *Гладкая траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*, Матем. сборник, 186:1 (1995), 3–28.
- [5] A. A. Oshemkov, *Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations*, Topological classification of integrable Hamiltonian systems, AMS, Providence, RI, 1991, 67–146.
- [6] А. А. Ошемков, *Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела*, Труды Семинара по векторному и тензорному анализу, 25:2 (1993), 23–109.
- [7] А. А. Ошемков, *Описание изоэнергетических поверхностей интегрируемых систем с двумя степенями свободы*, Труды Семинара по векторному и тензорному анализу, 23 (1999), 122–132.
- [8] В. С. Матвеев, *Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа седло-седло и фокус-фокус*, Матем. сборник, 187:4 (1996), 29–58.
- [9] М. П. Харламов, *Топологический анализ классических интегрируемых систем в динамике твердого тела*, Доклады АН СССР, 273:6 (1983), 1322–1325.

- [10] М. П. Харламов, *Топологический анализ интегрируемых задач динамики твёрдого тела*, Ленинградский ун-т, 1988.
- [11] О. Е. Орёл, *Функции вращения для интегрируемых задач, сводящихся к уравнениям Абеля. Траекторная классификация систем Горячева-Чаплыгина*, Матем. сборник, 186:2 (1995), 105–128.
- [12] П. Е. Рябов, М. П. Харламов, *Бифуркации первых интегралов в случае Ковалевской–Яхъи*, Регулярная и хаотическая динамика, 2:2 (1997), 25–40.
- [13] O. E. Orel, P. E. Ryabov, *Bifurcation sets in a problem on motion of a rigid body in fluid and in the generalization of this problem*, Regular and Chaotic Dynamic, 3:2 (1998), 82–91.
- [14] P. E. Ryabov, *Bifurcation sets in an integrable problem on motion of a rigid body in fluid*, Regular and Chaotic Dynamic, 4:4 (1999), 59–76.
- [15] П. Е. Рябов, *Бифуркации первых интегралов в случае Соколова*, Теоретическая и математическая физика, 134:2 (2003), 207–226.
- [16] П. В. Морозов, *Лиувиллевы классификация интегрируемых систем случая Клебша*, Матем. сборник, 193:10 (2002), 113–138.
- [17] П. В. Морозов, *Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа*, Матем. сборник, 195:3 (2004), 69–114.
- [18] И. Н. Гашененко, *Интегральные многообразия и топологические инварианты одного случая движения гиростата*, Механика твердого тела, 29 (1997), 1–7.
- [19] П. Е. Рябов, *Бифуркационное множество задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Ковалевской–Яхъи*, Дисс. канд. физ.-мат. наук, Москва, МГУ, 1997.
- [20] М. П. Харламов, П. Е. Рябов, *Диаграммы Смейла-Фоменко и грубые инварианты случая Ковалевской–Яхъи*, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 4 (2011), 40–59.
- [21] Нгуен Тьен Зунг, А. Т. Фоменко, *Топологическая классификация интегрируемых невырожденных гамильтонианов на изоэнергетической трехмерной сфере*, Успехи математических наук, 45:6(276) (1990), 91–111.
- [22] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы*, УдГУ, 1999.

- [23] Н. С. Логачёва, *Классификация невырожденных положений равновесия и вырожденных одномерных орбит интегрируемой системы Ковалевской–Яхъи*, Матем. сборник, 203:1 (2012), 31–60.
- [24] Н. С. Славина, *Классификация семейства систем Ковалевской–Яхъи с точностью до лиувиллевой эквивалентности*, Доклады Академии Наук, 452:3 (2013), 252–255.
- [25] A. T. Fomenko, *The theory of invariants of multidimensional integrable Hamiltonian systems*, Advances in Soviet Mathematics. American Math. Soc, 6 (1991), 1–27.
- [26] А. Т. Фоменко, *Топологические инварианты гамильтоновых систем интегрируемых по Лиувиллю*, Функциональный анализ и его приложения, 4(22) (1988), 38–51.
- [27] A. T. Fomenko, A. Yu. Konyaev *New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems*, Topology and its Applications, 159 (2012), 1964–1975.
- [28] А. А. Ошемков, *Классификация гиперболических особенностей ранга нуль интегрируемых гамильтоновых систем*, Матем. сборник, 201:8 (2010), 63–102.
- [29] М. П. Харламов, *Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской*, Прикладная математика и механика, 47:6 (1983), 922–930.
- [30] Н. М. Yehia, *New integrable cases in dynamics of rigid bodies*, Mech. Res. Com., 13:3 (1986), 169–172.
- [31] Х. М. Яхъя, *Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата*, Вестник МГУ сер. матем., механ., 4 (1987), 88–90.
- [32] М. П. Харламов, И. И. Харламова, Е. Г. Шведов, *Бифуркационные диаграммы на изоэнергетических уровнях гиростата Ковалевской–Яхъя*, Механика твёрдого тела, 40 (2010), 77–90.
- [33] И. И. Харламова, П. Е. Рябов, *Электронный атлас бифуркационных диаграмм гиростата Ковалевской–Яхъи*, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2 (2011), 147–162.
- [34] П. Е. Рябов, *Аналитическая классификация особенностей интегрируемого случая Ковалевской–Яхъя*, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 4 (2010), 25–30.
- [35] М. П. Харламов, *Аналитическая классификация равномерных вращений гиростата Ковалевской–Яхъя*, Механика твердого тела, 42 (2012), 46–60.

- [36] П. В. Морозов, *Вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга в интегрируемом случае Ковалевской–Яхьи*, Матем. сборник, 198:8 (2007), 59–82.
- [37] П. П. Андреянов, К. Е. Душин, *Бифуркационные множества в задаче Ковалевской–Яхьи*, Матем. сборник, 203:4 (2012), 3–46.
- [38] П. П. Андреянов, *Лиувиллевы классификация интегрируемого случая Ковалевской–Яхьи задачи о движении твердого тела*, дипл. работа, 2010.
- [39] Е. А. Кудрявцева, И. М. Никонов, А. Т. Фоменко, *Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия*, Математический Сборник, 199:9 (2008), 3–96.
- [40] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Размерность пространства интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*, Труды Математического Института им. В.А.Стеклова, 216 (1997), 45–69.