

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 514.7

Синицын Дмитрий Олегович

**Применение методов интегральной геометрии
к задачам редукции гамильтоновых систем**

01.01.04 - геометрия и топология

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,

профессор Голо В.Л.

Москва 2011

Оглавление

1	Асимптотическая гамильтонова редукция для геодезических на деформированных сферах	15
1.1	Уравнения Лагранжа первого рода для геодезических	15
1.2	Асимптотическое описание геодезических на деформированных сферах	16
1.3	Угловой момент и связь с плюккеровыми координатами	17
1.4	Уравнения для углового момента	18
1.5	Усреднение уравнений для момента	20
1.6	Формулировка редукции в терминах интегральной геометрии	21
1.7	Гамильтонова структура редуцированной системы для углового момента	23
1.8	Ограничение системы на многообразии Грассмана $G(2, n)$ как на пуассоново подмногообразии $so(n)$	26
1.9	Связь траекторий момента в точной и редуцированной системах	28
2	Топология решений редуцированной системы для некоторых классов алгебраических поверхностей	30
2.1	Двумерные деформированные сферы	30
2.2	Полиномиальность редуцированного гамильтониана для полиномиальных деформаций двумерной сферы	33

2.3	Топологическая классификация редуцированных систем для двумерной сферы с деформацией четвертыми степенями координат	34
2.4	Трехмерные деформированные сферы	55
2.5	Ультрагиперболическое уравнение Йона на гамильтониан редуцированной системы	61
2.6	Деформации трехмерной сферы с осевой симметрией (поверхности вращения)	67
2.7	Многомерные эллипсоиды, близкие к сфере, и случай Шоттки-Манакова в уравнениях Эйлера на алгебре Ли $so(n)$	69
3	Редукция уравнений динамики двухспиновой системы в магнитном поле	71
3.1	Гамильтониан и уравнения динамики двухспиновой системы	71
3.2	Редукция системы по циклической переменной	73

Введение

Основная часть настоящей диссертации посвящена исследованию геодезических на деформированных сферах с помощью теории возмущений. В основе лежит идея о связи этой задачи с преобразованиями интегральной геометрии, в терминах которых производится асимптотическая гамильтонова редукция к системе меньшей размерности. Факты интегральной геометрии определяют свойства этой системы. Для содержательного класса полиномиальных деформаций двумерной сферы производится анализ топологии фазовых портретов редуцированной системы. В третьей главе рассматривается гамильтонова система, используемая для описания спиновых систем. С использованием симметрии системы производится ее редукция к системе меньшей размерности, допускающей более простое исследование.

Изучение геодезических линий на поверхностях восходит к исследованиям И. Бернулли и Л. Эйлера, посвященных нахождению кратчайших линий, [11]. В дальнейшем эта проблема изучалась в многочисленных работах геометров и механиков по нескольким направлениям исследования.

Обширный ряд работ посвящен нахождению решений уравнений геодезических для конкретных видов поверхностей. Один из первых нетривиальных результатов был получен в классической работе Якоби, который нашел точное решение для геодезических на эллипсоиде методами аналитической механики, [17]. Другими важными примерами являются поверхности вращения и метрики Лиувилля с интегралами первой и второй степени по импульсам, [8]. В работе В.Н. Колокольцова [26] были описаны все метрики на сфере и торе, геодезический поток которых имеет дополнительный квадратичный по скоростям интеграл, не зависящий от интеграла энергии. В ра-

боте А.В. Болсинова, В.В. Козлова, А.Т. Фоменко [27] с помощью принципа Мопертюи были найдены метрики на сфере, геодезические потоки которых возникают из интегрируемых случаев динамики твердого тела, среди которых имеются системы с интегралами степеней 3 и 4 по импульсам. Кроме того, в рамках этого, аналитического, направления были установлены изоморфизмы некоторых из известных интегрируемых гамильтоновых систем с точностью до замены переменных. В частности, было установлено, что задача о геодезических на $(n - 1)$ -мерном эллипсоиде эквивалентна случаю Клебша–Переломова для обобщения уравнений Кирхгофа на алгебре Ли $e(n)$, [28], [29], [31].

Другое направление исследований посвящено замкнутым геодезическим, [22]. Одной из первых работ в этом направлении была статья Пуанкаре [25], посвященная нахождению замкнутых геодезических на выпуклых поверхностях, гомеоморфных сфере. Развитие вариационного подхода к этим вопросам привело к оценкам числа замкнутых геодезических. Одним из важных результатов стала теорема Люстерника–Шнирельмана о существовании на поверхности, гомеоморфной сфере, трех замкнутых геодезических без самопересечений. Кроме того, были обнаружены классы римановых многообразий, на которых все геодезические являются замкнутыми без самопересечений. Их свойства исследуются в многочисленных работах, [23].

Большой интерес также привлекают вопросы о проявлениях хаотической динамики в системах, описывающих геодезические. В ряде исследований рассматриваются различные свойства нерегулярной динамики, такие как эргодичность, лиувиллева энтропия, топологическая энтропия и другие. Например, в работе G. Knieper, H. Weiss [32] доказано, что существует открытое и плотное в C^∞ -топологии множество метрик положительной кривизны на двумерной сфере, геодезический поток которых имеет положительную топологическую энтропию. V. Donnay в работе [33] построил пример метрики на сфере, имеющей эргодический геодезический поток. Монография Д.В. Аносова [24] посвящена свойствам геодезических потоков на замкну-

тых римановых многообразиях отрицательной кривизны, в том числе эргодичности.

Еще одно направление исследований возникло из применения к системам, задающим геодезические, топологических методов исследования гамильтоновых систем. Систематическая теория классификации гамильтоновых систем с точностью до естественных топологических изоморфизмов была развита А.Т. Фоменко. В работах [1]-[7] были построены инварианты интегрируемых систем с двумя степенями свободы с точностью до лиувиллевой эквивалентности, т.е. до гомеоморфизма фазовых пространств, переводящего слои лиувиллева слоения одной системы в слои другой. В результате применения этой теории была осуществлена топологическая классификация многочисленных интегрируемых гамильтоновых систем, в том числе геодезических потоков, [8], [9], [10]. Были обнаружены новые изоморфизмы гамильтоновых систем – в смысле топологической классификации. Например, было показано, что задача о геодезических на двумерном эллипсоиде топологически траекторно эквивалентна случаю Эйлера в динамике твердого тела, [9], [27].

Помимо интегрируемых случаев, представляет интерес также изучение систем, являющихся слабыми возмущениями известных точно решаемых задач. Это объясняется, с одной стороны, распространенностью таких ситуаций в приложениях, когда одни эффекты оказывают малое влияние на систему по сравнению с другими, и с другой стороны, дополнительными возможностями для исследования, имеющимися применительно к возмущениям решенных задач. Этот подход, основанный на теории возмущений, является классическим в аналитической механике, и применялся со времен Лагранжа и Лапласа, [20].

На современном этапе возникает возможность совместить стандартные методы теории возмущений с топологическим анализом гамильтоновых систем. Одним из первых шагов в этом направлении стала та самая работа Пуанкаре [25] о замкнутых геодезических на выпуклых поверхностях, го-

меоморфных сфере. В ней Пуанкаре рассматривает геодезические на поверхности, являющейся слабым возмущением другой поверхности с известными геодезическими – стандартной двумерной сферы. Комбинируя метод усреднения теории возмущений с топологическими соображениями, Пуанкаре получает следствия о числе замкнутых геодезических.

В настоящей работе мы следуем методу Пуанкаре и рассматриваем геодезические на поверхности, являющейся возмущением стандартной $(n - 1)$ -мерной сферы в n -мерном евклидовом пространстве и заданной уравнением:

$$\varphi \equiv x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1 + \varepsilon \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

С помощью стандартного метода усреднения строится асимптотическая редукция системы, описывающей геодезические на этой поверхности, к системе, имеющей меньшее число степеней свободы. Эта, редуцированная, система более проста для исследования и несет в себе информацию о решениях исходной системы для геодезических. Редуцированная система является гамильтоновой, и в ряде случаев интегрируема и допускает исследование методами теории топологической классификации гамильтоновых систем. Таким образом, с помощью асимптотической гамильтоновой редукции мы получаем возможность делать выводы о всей совокупности геодезических на поверхности, не обязательно замкнутых.

Проблема редукции изучалась в небесной механике главным образом в связи с задачей трех тел, [19]. В 20-м веке интерес к ней снова возрос в связи с киральной теорией поля. Важно, что киральная модель обычно основана на группе Ли симметрии \mathcal{G} , которая составляет структурную основу ее уравнений \mathcal{E} . Это обстоятельство было использовано Полмайером, который указал метод построения меньшей системы \mathcal{R} уравнений, следующих из \mathcal{E} и описывающих движение динамических переменных, являющихся инвариантами группы симметрии \mathcal{G} , [38]. Полмайер выполнил редукцию киральной модели n -поля, в которой полевая переменная принимает значения на двумерной сфере, к уравнению синус-Гордон. Таким образом, метод

Полмайера требует богатой симметрии задачи. В этом отношении широкое поле для применения редукции Полмайера представляют уравнения Леггетта спиновой динамики в сверхтекучем ${}^3\text{He}$, имеющие группу симметрии $SO(3) \times SU(2) \times U(1)$ (подробности см. в [39]). Редукция уравнений Леггетта особенно интересна тем, что она проливает свет на роль, играемую гамильтоновой структурой. Фактически Полмайер показал, что редукция тесно связана с алгеброй Пуассона задачи. Однако часто явная форма этой связи неочевидна. Для уравнений Леггетта редукция сводится к нахождению подалгебры пуассоновой алгебры, образованной скобками Пуассона исходных динамических переменных – спина и параметра порядка (см. [40]).

В задаче о геодезических на деформированных сферах редукция осуществляется с помощью интегрального преобразования, относящегося к интегральной геометрии, – лучевого преобразования. Оно сопоставляет функции на $(n - 1)$ -мерной сфере ее интегралы по всевозможным большим кругам этой сферы – ее сечениям двумерными плоскостями. В результате возникает функция на многообразии Грассмана $G(2, n)$. В настоящей работе доказывается теорема о том, что гамильтониан редуцированной системы пропорционален лучевому преобразованию, примененному к функции $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, задающей деформацию сферы (теорема 3). Алгебра Пуассона, на которой определяется редуцированная система, соответствует алгебре Ли $so(n)$ и вводится с помощью компонент многомерного углового момента, которые отождествляются с плюккеровыми координатами двумерных плоскостей, задающих большие круги.

Преобразования типа лучевого изучались в многочисленных работах по интегральной геометрии, начиная с исследований Минковского [45], Функа [46], Радона [47], Йона [48]. Примечательно, что работа Функа была связана как раз с проблемой геодезических, а именно посвящена задаче о поверхностях, на которых все геодезические замкнуты. Преобразование Функа–Минковского состоит в интегрировании функции на двумерной сфере по большим кругам, преобразование Радона – в интегрировании функции на

плоскости по прямым и, более общо, в n -мерном пространстве по гиперплоскостям. Лучевое преобразование Йона для функции в 3-мерном пространстве состоит в интегрировании по прямым в этом пространстве. В этих и последующих работах были исследованы свойства этих преобразований и их обобщений, и прежде всего, их образ и формулы обращения, [14], [15]. В дальнейшем И.М. Гельфандом и М.И. Граевым понятия и задачи интегральной геометрии были обобщены на случай однородных пространств и исследованы в связи с теорией представлений групп, [49], [50], [51]. Отметим, что методы интегральной геометрии были применены к гамильтоновым системам Э.Б. Винбергом в работе [52].

В настоящей работе используется аналог лучевого преобразования для функций на $(n - 1)$ -мерной сфере, [14], сопоставляющий функции на сфере ее интегралы по большим кругам. Благодаря применению результатов интегральной геометрии выводится условие, при котором функция на грасманиане является образом лучевого преобразования некоторой функции на сфере и, тем самым, является гамильтонианом редуцированной системы для системы геодезических на сфере с некоторой деформацией (теорема 11). Таким условием в случае сферы S^3 является ультрагиперболическое уравнение Йона, исследованное им в упомянутой работе [48] в связи с лучевым преобразованием. Таким образом, среди гамильтоновых систем на алгебре Ли-Пуассона $so(4)$ выделяется класс гамильтонианов, удовлетворяющих этому уравнению, которые задают усредненные системы для геодезических на деформированных сферах. Представляет интерес изучение этого класса и соответствующих следствий для геодезических в контексте многочисленных исследований по гамильтоновой динамике на алгебре $so(4)$, [30], и, в более общем случае, на алгебре $so(n)$. Одним из результатов в этом направлении является полученный в настоящей работе изоморфизм редуцированной системы для $(n - 1)$ -мерного эллипсоида, близкого к сфере, с интегрируемым случаем Манакова для уравнений Эйлера на алгебре Ли $so(n)$ (теорема 13).

Во второй главе в качестве примера, для которого редуцированная система допускает полное топологическое исследование, рассматривается содержательный класс алгебраических двумерных поверхностей четвертого порядка. Редуцированная система в этом случае является гамильтоновой системой с гамильтонианом четвертой степени на алгебре Ли $so(3)$. Для нее производится топологическая классификация слоения Лиувилля путем вычисления инвариантов А.Т. Фоменко в зависимости от параметров полинома, задающего деформацию сферы (теорема 10). При этом симметрия рассматриваемой деформации сферы влечет последствия для топологии лиувиллева слоения редуцированной системы.

Следует отметить, что значительный интерес представляет изучение геодезических на алгебраических поверхностях, см., например, работы В.В. Козлова [34], где доказывается неинтегрируемость задач о геодезических на определенных классах алгебраических поверхностей, и [35], где сформулированы общие нерешенные проблемы из этой области. Интерес к этой тематике связан, с одной стороны, с тем, что такие задачи возникают в приложениях; в частности, в работе Римана [36] обнаружена связь уравнений динамики жидкого эллипсоида при определенных условиях с геодезическими на кубической алгебраической поверхности:

$$xyz = const,$$

см. также [37]. С другой стороны, представляет интерес исследование связи свойств геодезических на алгебраических поверхностях со свойствами этих многообразий, изучаемыми алгебраической геометрией. В настоящей работе прослеживается связь свойств полинома, определяющего алгебраическую поверхность – деформированную сферу, с топологией слоения Лиувилля редуцированной системы.

Для деформированных трехмерных сфер, обладающих симметрией относительно вращений в некоторой двумерной плоскости, и система геодезических, и редуцированная система обладают дополнительным интегралом –

компонентой момента, соответствующей этой плоскости. Для редуцированной системы, ввиду ее меньшей размерности, этого интеграла достаточно для полной интегрируемости (теорема 12), в отличие от исходной системы для геодезических. Редуцированная система здесь является системой с двумя степенями свободы на алгебре Ли-Пуассона $so(4)$ с линейным интегралом и допускает топологическую классификацию в терминах инвариантов А.Т. Фоменко гамильтоновых систем. Представляет интерес изучение возможных ограничений на топологию этих систем, связанных как с наличием линейного интеграла, так и с ультрагиперболическим уравнением.

Третья глава посвящена исследованию гамильтоновой системы, описывающей динамику двух классических спинов в постоянном внешнем магнитном поле. Эта система используется для описания намагниченности в магнетиках, [53], [54]. Используя симметрию задачи, мы осуществляем ее редукцию к системе с двумя фазовыми переменными, которая допускает исследование с помощью построения фазового портрета.

В диссертации получены следующие основные результаты

1. Разработана методика применения преобразований интегральной геометрии для редукции уравнений геодезических на деформированных сферах.
2. С помощью данной методики решена задача определения топологии редуцированных систем для содержательного класса алгебраических поверхностей, близких к стандартной сфере.

Приведем краткий перечень результатов диссертации.

В главе 1 с помощью стандартного метода усреднения теории возмущений [20] строится асимптотическая гамильтонова редукция системы уравнений геодезических на деформированных сферах к системе меньшей размерности.

Лемма 1 главы 1 устанавливает, что усреднение функции на сфере по периоду точного решения уравнений геодезических на стандартной сфере равно с точностью до постоянного множителя лучевому преобразованию

этой функции, известному в интегральной геометрии [14].

Теорема 2 главы 1 утверждает, что применение стандартного метода усреднения теории возмущений [20] к задаче о геодезических на деформированной $(n - 1)$ -мерной сфере $\vec{x}^2 - 1 + \psi(\vec{x}) = 0$ приводит к динамической системе на многообразии Грассмана $G(2, n)$, имеющей в плюккеровых координатах вид:

$$\dot{l}_{ij} = -\frac{\varepsilon}{2\pi} (J \circ m_{ij} \psi) (\hat{l}), \quad (1)$$

Здесь $m_{ij} = x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$; J – лучевое преобразование.

Теорема 3 главы 1 устанавливает, что система (1.12) является гамильтоновой со скобками Пуассона, определяемыми алгеброй Ли $so(n)$ и гамильтонианом:

$$H(\hat{l}) = \frac{\varepsilon}{2\pi} J\psi. \quad (2)$$

Теорема 4 главы 1, следующая из теории КАМ [20], [21], утверждает, что для аналитических деформаций двумерной сферы, при выполнении условия невырожденности усредненной системы и достаточно малой деформации, траектории углового момента в системе уравнений геодезических на всем своем протяжении близки к траекториям усредненной системы.

Теорема 5 главы 1, следующая из теоремы Фату [20], утверждает, что для гладких деформаций $(n - 1)$ -мерной сферы различие значений момента в точной и усредненной системах имеет порядок ε в течение времени $1/\varepsilon$.

Теорема 6 главы 1, следующая из теории КАМ [20], [21], утверждает, что для аналитических деформаций $(n - 1)$ -мерной сферы, при которых усредненная система интегрируема и невырождена, при достаточно малой деформации, для большинства начальных условий значения переменных «действие» усредненной системы, вычисленные на решениях системы для геодезических, при любых t близки к их начальным значениям. «Большинство начальных условий» означает, что мера Лебега дополнения к этому множеству стремится к нулю вместе с возмущением.

В главе 2 рассматриваются конкретные примеры деформированных

сфер.

Утверждение 1 главы 2 состоит в том, что для двумерных деформированных сфер усредненная система есть интегрируемая гамильтонова система с одной степенью свободы, определенная на фазовом пространстве $\mathbb{R}P^2$.

В теореме 9 главы 2 устанавливается полиномиальность гамильтониана на редуцированной системы для полиномиальной деформации двумерной сферы.

В утверждении 2 главы 2 устанавливается вид гамильтониана усредненной системы для деформации сферы с помощью полинома 4-го порядка

$$\varphi(\vec{x}) \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 + \varepsilon \psi(\vec{x}) = 0, \quad \varepsilon \ll 1, \quad \psi(\vec{x}) = \varepsilon_1 x_1^4 + \varepsilon_2 x_2^4 + \varepsilon_3 x_3^4.$$

Теорема 10 главы 2 утверждает, что молекулы А.Т. Фоменко [1] для усредненной системы при этой деформации имеют вид указанных восьми молекул.

Теорема 11 главы 2 устанавливает, исходя из свойств лучевого преобразования, что гамильтониан усредненной системы для трехмерной деформированной сферы удовлетворяет ультрагиперболическому уравнению Йона:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial l_{12} \partial l_{34}} - \frac{\partial^2 H}{\partial l_{13} \partial l_{24}} + \frac{\partial^2 H}{\partial l_{14} \partial l_{23}} = 0. \quad (3)$$

Теорема 12 главы 2 утверждает, что для деформаций трехмерной сферы, имеющих осевую симметрию, усредненная система является интегрируемой гамильтоновой системой с двумя степенями свободы.

Теорема 13 главы 2 устанавливает, что для $(n - 1)$ -мерного эллипсоида, близкого к сфере, усредненная система является частным случаем интегрируемого случая Шоттки-Манакова для уравнений Эйлера на алгебре Ли $so(n)$.

В главе 3 рассматривается гамильтонова система двух классических спинов в магнитном поле, используя для описания намагниченности в магнетиках.

В теореме 14 главы 3, с использованием симметрии задачи, производит-

ся редукция этой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы к гамильтоновой системе с одной степенью свободы, допускающей исследование путем построения фазового портрета.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [55], [56], [57], [58], [59].

Автор благодарит профессора Войслава Любомировича Голо за научное руководство.

Автор глубоко признателен заведующему кафедрой дифференциальной геометрии и приложений академику РАН Анатолию Тимофеевичу Фоменко за внимание к этой работе и полезные дискуссии, позволившие существенно повысить качество работы.

Автор выражает благодарность профессору С.Ю. Доброхотову, доценту Е.А. Кудрявцевой, профессору А.И. Нейштадту, доценту А.А. Ошемкову, члену-корреспонденту РАН Д.В. Трещеву, профессору А.И. Шафаревичу за полезные дискуссии.

Автор признателен коллективу кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова за интерес к этой работе.

Глава 1

Асимптотическая гамильтонова редукция для геодезических на деформированных сферах

1.1 Уравнения Лагранжа первого рода для геодезических

Мы рассматриваем $(n-1)$ -мерные гиперповерхности в n -мерном евклидовом пространстве, близкие к стандартной сфере и задаваемые уравнением вида:

$$\varphi \equiv x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1 + \varepsilon \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (1.1)$$

где ε – малый параметр и $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ – функция координат x_1, x_2, \dots, x_n . Проблема разрешения данной связи, вообще говоря, весьма сложна, и нахождение параметризации этой гиперповерхности в общем случае представляет большие трудности. Более результативный подход опирается на то, что задача эквивалентна свободному движению частицы, на которое наложена приведенная выше связь, [19]. Поэтому мы можем записать уравнения геодезических в форме уравнений Лагранжа первого рода:

$$\ddot{\vec{x}} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}}. \quad (1.2)$$

Множитель Лагранжа λ задается формулой:

$$\lambda = -\frac{\dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vec{x}^2} \cdot \dot{\vec{x}}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}}\right)^2} = -\frac{\dot{\vec{x}}^2 + \varepsilon \dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vec{x}^2} \cdot \dot{\vec{x}}}{\left(\vec{x} + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial \vec{x}}\right)^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \vec{x}^2}\right)_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (1.3)$$

При $\varepsilon = 0$ траектории системы (1.2) – геодезические на сфере, т.е. большие круги. Поэтому мы можем описать геодезические на гиперповерхности, т.е. деформированной сфере, с помощью теории возмущений. Для этого мы применяем стандартный метод усреднения, [18].

1.2 Асимптотическое описание геодезических на деформированных сферах

Наши рассуждения основаны на следующем наблюдении. Рассмотрим деформированную сферу \mathcal{D} , определяемую уравнением (1.1), и стандартную сферу \mathcal{S} , соответствующую случаю $\varepsilon = 0$. Поскольку $\varepsilon \ll 1$, то геодезическая на малых интервалах времени проходит вблизи большого круга – сечения поверхности \mathcal{D} двумерной плоскостью, проходящей через начало координат. С течением времени положение большого круга, приближающего текущий виток геодезической, медленно изменяется. Это изменение порождает траекторию на многообразии всех двумерных плоскостей, проходящих через начало координат, в n -мерном евклидовом пространстве. Это многообразие, называемое многообразием Грассмана $G(2, n)$, известно в геометрии с середины XIX века. Фактически наш подход следует идеям Ф. Клейна и Ю. Плюккера, [13], [14], которые предложили метод конструирования новых геометрических объектов из подмногообразий данного многообразия. С помощью усреднения строится динамическая система на грассманиане, траектории которой приближают траектории, получаемые из геодезических. С топологической точки зрения, мы рассматриваем переход от системы, определенной на топологической $(n - 1)$ -мерной сфере, к

системе на многообразии Грассмана $G(2, n)$. Переход иллюстрируется следующей диаграммой:

$$\begin{aligned} & \text{уравнения геодезических на деформированной сфере} \implies \\ & \implies \text{динамическая система на многообразии Грассмана} \end{aligned}$$

При этом фазовая размерность системы понижается с $2n - 2$ до $2n - 4$.

1.3 Угловой момент и связь с плюккеровыми координатами

Для осуществления изложенной схемы необходимо количественно описать движение текущего большого круга, приближающего данный виток геодезической спирали. Прежде всего, требуется выбрать способ задания положения этого круга числами – его координатами. Это означает введение координат на многообразии Грассмана. При этом существенно, что положение текущего большого круга определяется состоянием частицы, т.е. ее радиус-вектором \vec{x} и скоростью $\dot{\vec{x}}$, а именно текущий большой круг – это сечение сферы двумерной плоскостью, проходящей через центр сферы и содержащей эти два вектора. Рассмотрим в качестве координат этой плоскости (а значит и большого круга) следующий набор чисел:

$$l_{ij} = x_i \dot{x}_j - x_j \dot{x}_i, \quad i, j = 1 \dots n. \quad (1.4)$$

Это компоненты матрицы n -мерного углового момента, являющегося обобщением углового момента в трехмерном евклидовом пространстве. Последний чаще записывают в виде вектора \vec{L} , связанного с матрицей (1.4) соотношением $L_i = \varepsilon_{ijk} l_{jk}$. Очевидно, $l_{ji} = -l_{ij}$, т.е. l_{ij} образуют кососимметрическую матрицу. Важный факт состоит в том, что введенные величины (1.4) совпадают с так называемыми *плюккеровыми координатами* данной двумерной плоскости. Фактически по формулам (1.4) мы вычисляем эти координаты для текущего большого круга исходя из элементов траектории частицы. В случае, когда координаты постоянны $l_{ij} = \text{const}$, большой круг

покоится, и траектория все время остается вблизи одной и той же плоскости. Оказывается, что не все величины l_{ij} , $i < j$ независимы.

Теорема 1. [14, 15, 16] *Величины l_{ij} удовлетворяют следующим соотношениям Плюккера:*

$$l_{j[k_1 l_{k_2 k_3}]} \equiv \frac{1}{3}(l_{jk_1} l_{k_2 k_3} - l_{jk_2} l_{k_1 k_3} + l_{jk_3} l_{k_1 k_2}) = 0. \quad (1.5)$$

Кроме того, координаты (1.4) однородны, т.е. умножение всех координат на одно число приводит к той же плоскости. Поэтому можно ограничиться матрицами с единичной суммой квадратов элементов:

$$\sum_{i,j} l_{ij}^2 = 1. \quad (1.6)$$

Отождествляя после этого матрицы l_{ij} и $-l_{ij}$, получаем многообразие Грассмана $G(2, n)$ размерности $2n - 4$, [14].

Поскольку деформированная сфера близка к стандартной, то плоскость, определяющая текущий большой круг, движется медленно, и ее координаты (1.4), т.е. компоненты углового момента частицы, являются медленными переменными задачи в том смысле, что при обходе одного витка траектории их изменение мало. Далее мы описываем эту медленную динамику, используя метод усреднения.

1.4 Уравнения для углового момента

Используя уравнения Лагранжа первого рода (1.2), получаем следующие уравнения для компонент углового момента:

$$\dot{l}_{ij} = \varepsilon \lambda \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \psi(\vec{x}), \quad (1.7)$$

где $\psi(\vec{x})$ – функция, определяющая деформацию сферы, (1.1).

При $\varepsilon = 0$ имеем $\dot{l}_{ij} = 0$, что соответствует случаю стандартной сферы, когда большой круг покоится.

Заметим, что правая часть уравнений (1.7) получается из функции деформации сферы $\psi(\vec{x})$ с помощью применения следующего оператора:

$$m_{ij} = x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (1.8)$$

Данный оператор известен как компонента оператора углового момента в квантовой механике. Важным его свойством, используемым в дальнейшем, является следующее представление в виде оператора бесконечно малого поворота. Рассмотрим вращение в плоскости $x_i x_j$ на угол ϕ . Оно действует на векторы как умножение на известную ортогональную матрицу поворота $R_{ij}(\phi)$. Действие этого вращения на функции $f(\vec{x})$ определяется как:

$$R_{ij}(\phi) f(\vec{x}) = f(R_{ij}^{-1}(\phi) \vec{x}).$$

Тогда оператор m_{ij} – генератор этого вращения функций:

$$m_{ij} f(\vec{x}) = - \left(\frac{d}{d\phi} f(R_{ij}^{-1}(\phi) \vec{x}) \right) \Big|_{\phi=0}.$$

В уравнениях для момента (1.7) мы удерживаем только члены 1-го порядка по ε , т.е. рассматриваем 1-й порядок теории возмущений. Кроме того, для краткости далее мы предполагаем единицы измерения выбранными таким образом, что главная часть множителя Лагранжа (1.3) $\lambda_0 = -1$ (соответствует единичной скорости $\dot{\vec{x}}^2 = 1$, т.е. натуральной параметризации геодезической). С учетом этого уравнения для углового момента (1.7), с использованием введенного обозначения оператора (1.8), записываются в виде:

$$\dot{l}_{ij} = -\varepsilon m_{ij} \psi(\vec{x}), \quad (1.9)$$

Итак, мы получили уравнения (1.9), описывающие динамику компонент углового момента (1.4) частицы при ее движении по геодезической.

1.5 Усреднение уравнений для момента

Поскольку правые части уравнений (1.9) для компонент углового момента l_{ij} пропорциональны малому параметру ε , то движение большого круга является медленным по сравнению с движением частицы вдоль витка геодезической. Иными словами, l_{ij} – медленные переменные. Для невозмущенного случая стандартной сферы они являются интегралами движения. Поэтому мы можем применить стандартный метод усреднения, [18]. Правые части уравнений (1.9) содержат медленно меняющиеся компоненты, зависящие от положения текущего большого круга, приближающего данный виток геодезической, и быстрые осциллирующие члены, зависящие от положения частицы на витке. Принцип усреднения утверждает, что крупномасштабные изменения решения зависят только от медленных компонент, а быстро осциллирующие слагаемые приводят к малым колебаниям решения около кривой, определяемой медленной частью. Таким образом, для определения крупномасштабных изменений мы можем рассмотреть уравнения для момента (1.9) без осциллирующей части. Для этого необходимо усреднить их по периоду точного решения невозмущенной системы – равномерного движения по большому кругу:

$$\vec{x}_i(t) = \cos t \vec{e}_1(\hat{l}) + \sin t \vec{e}_2(\hat{l}), \quad (1.10)$$

где \hat{l} – это данная (постоянная) матрица углового момента, $\vec{e}_1(\hat{l}), \vec{e}_2(\hat{l})$ – векторы, образующие ортонормированный базис в двумерной плоскости, в которой происходит движение с данным угловым моментом (конкретный выбор векторов $\vec{e}_1(\hat{l}), \vec{e}_2(\hat{l})$ не влияет на результат усреднения).

Формула (1.10) определяет равномерное движение по большому кругу, аппроксимирующему текущий виток геодезической спирали. Среднее значение функции $f(\vec{x})$ по периоду этого решения выражается формулой:

$$\langle f(\vec{x}) \rangle_{\vec{x}_i(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\vec{x}_i(t)) dt. \quad (1.11)$$

Результат усреднения зависит только от матрицы углового момента \hat{l} . Тем самым усреднение уравнений (1.9) дает замкнутую систему уравнений для компонент углового момента l_{ij} :

$$\dot{l}_{ij} = -\varepsilon \langle m_{ij} \psi(\vec{x}) \rangle_{\vec{x}_i}, \quad (1.12)$$

где $\psi(\vec{x})$ – функция, определяющая деформацию сферы, (1.1), m_{ij} – оператор, определенный в (1.8), известный как оператор углового момента в квантовой механике. Напомним, что величины l_{ij} являются плюккеровыми координатами двумерной плоскости большого круга, аппроксимирующего текущий виток геодезической спирали. Поэтому фактически система (1.12) задана на многообразии Грассмана $G(2, n)$.

1.6 Формулировка редукции в терминах интегральной геометрии

Важное наблюдение состоит в том, что использованная процедура усреднения (1.11) имеет связь с преобразованиями, рассматриваемыми в *интегральной геометрии*, [14], [15]. Именно, оно эквивалентно так называемому *лучевому преобразованию* J , сопоставляющему функции $f(\vec{x})$ на стандартной сфере ее интегралы по всевозможным большим кругам. Функция-образ Jf лучевого преобразования определена на множестве больших кругов, или, эквивалентно, на множестве содержащих их двумерных плоскостей, проходящих через центр сферы, т.е. на многообразии Грассмана $G(2, n)$. Итак, лучевое преобразование задается формулой:

$$(Jf)(\hat{p}) = \int_0^{2\pi} f(\cos t \vec{e}_1(\hat{p}) + \sin t \vec{e}_2(\hat{p})) dt. \quad (1.13)$$

Здесь \hat{p} – матрица плюккеровых координат двумерной плоскости; $\vec{e}_1(\hat{p}), \vec{e}_2(\hat{p})$ – ортонормированный базис в этой плоскости. Рис. 1.1 иллюстрирует случай $n = 3$, т.е. случай двумерной сферы, в котором лучевое преобразование носит название преобразования Функа-Минковского, см.

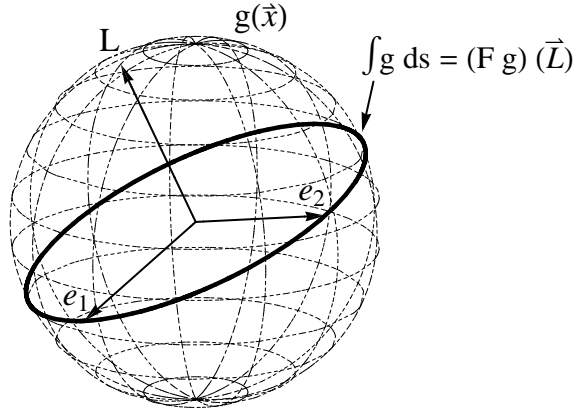


Рис. 1.1: Преобразование Функа-Минковского функции $g(\vec{x})$ на единичной сфере, взятое в точке \vec{L} , – это интеграл от g по большому кругу, перпендикулярному к \vec{L} .

[14].

Из сравнения формул (1.13) и (1.10), (1.11) получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *Усреднение (1.11) по геодезической на невозмущенной сфере выражается через лучевое преобразование по формуле:*

$$\langle f(\vec{x}) \rangle_{\vec{x}_i(t)} = \frac{1}{2\pi} (Jf)(\hat{l}).$$

Отсюда получаем следующий результат.

Теорема 2. *Усредненная система (1.12) для углового момента может быть записана в виде:*

$$\dot{l}_{ij} = -\frac{\varepsilon}{2\pi} (J \circ m_{ij} \psi)(\hat{l}), \quad (1.14)$$

Здесь $\psi(\vec{x})$ – функция, определяющая деформацию сферы, (1.1); m_{ij} – оператор, определенный в (1.8) (оператор углового момента в квантовой механике); J – лучевое преобразование, определенное в (1.13).

Полученные уравнения (1.14) описывают усредненную динамику углового момента частицы, движущейся по геодезической. При этом компоненты момента l_{ij} являются плюккеровыми координатами двумерной плоскости текущего большого круга, и, соответственно, система (1.14) задана на многообразии Грассмана $G(2, n)$. Тем самым осуществлена асимптотическая редукция исходной системы для геодезических с фазовой размерностью $2n-2$ к усредненной системе уравнений для момента, определенной на грассманиане $G(2, n)$ и имеющей фазовую размерность $2n-4$. Важный факт состоит в том, что редуцированная система имеет гамильтонову структуру, которая обсуждается в следующем разделе.

1.7 Гамильтонова структура редуцированной системы для углового момента

Гамильтонова формулировка усредненных уравнений для углового момента (1.14) требует задания скобок Пуассона между динамическими переменными l_{ij} и указания гамильтониана.

Скобки Пуассона для углового момента определяются алгеброй Ли $so(n)$ и имеют вид:

$$\{l_{ij}, l_{pq}\} = \delta_{ip}l_{jq} + \delta_{jp}l_{qi} + \delta_{iq}l_{pj} + \delta_{jq}l_{ip}. \quad (1.15)$$

Теорема 3. *Усредненная система (1.14) для углового момента является гамильтоновой со скобками Пуассона (1.15) и гамильтонианом:*

$$H(\hat{l}) = \frac{\varepsilon}{2\pi} J\psi, \quad (1.16)$$

который получается применением лучевого преобразования J , (1.13), к функции $\psi(\vec{x})$, определяющей деформацию сферы, (1.1).

Доказательство. Скобки Пуассона (1.15) обладают следующим свойством.

Вид скобок (1.15) совпадает с коммутатором в алгебре Ли $so(n)$ базисных кососимметрических матриц E_{ij} , определяемых формулой $(E_{ij})_{ab} =$

$-\delta_{ia}\delta_{jb} + \delta_{ib}\delta_{ja}$. Именно, их коммутатор имеет вид:

$$[E_{ij}, E_{pq}] = \delta_{ip}E_{jq} + \delta_{jp}E_{qi} + \delta_{iq}E_{pj} + \delta_{jq}E_{ip}. \quad (1.17)$$

Он может быть выражен через структурные константы $C_{ij,pq,ab}$ алгебры Ли $so(n)$:

$$[E_{ij}, E_{pq}] = C_{ij,pq,ab}E_{ab},$$

которые имеют вид:

$$C_{ij,pq,ab} = \frac{1}{2} [\delta_{ip} (\delta_{aj}\delta_{bq} - \delta_{aq}\delta_{bj}) + \delta_{jp} (\delta_{aq}\delta_{bi} - \delta_{ai}\delta_{bq}) + \\ + \delta_{iq} (\delta_{ap}\delta_{bj} - \delta_{aj}\delta_{bp}) + \delta_{jq} (\delta_{ai}\delta_{bp} - \delta_{ap}\delta_{bi})].$$

Прямым вычислением нетрудно проверить следующий факт, который будет использован в дальнейшем.

Лемма 2. *Структурные константы алгебры Ли $so(n)$ удовлетворяют соотношению:*

$$C_{ab,pq,ij} = -C_{ij,pq,ab}.$$

Кроме того, имеет место следующее *основное коммутационное соотношение для лучевого преобразования.*

Лемма 3. *Справедливо операторное тождество:*

$$J \circ t_{ij} = c_{ij} \circ J, \quad (1.18)$$

где J – лучевое преобразование, определенное в (1.13), t_{ij} – оператор, определенный в (1.8), c_{ij} – оператор, действующий на функцию от углового момента $f(\hat{l})$ как взятие ее скобки Пуассона с l_{ij} :

$$c_{ij} f(\hat{l}) = \left\{ f(\hat{l}), l_{ij} \right\}.$$

Для вывода соотношения (1.18) используем следующее свойство, опреде-

ляющее действие вращений на образ лучевого преобразования. Подставляя в определение лучевого преобразования (1.13) вместо $f(\vec{x})$ функцию, полученную из нее вращением $f(R_{ij}^{-1}(\phi)\vec{x})$, получаем:

$$(Jf(R_{ij}^{-1}(\phi)\vec{x}))(\hat{l}) = \int_0^{2\pi} f\left(R_{ij}^{-1}(\phi)\left(\cos t \vec{e}_1(\hat{l}) + \sin t \vec{e}_2(\hat{l})\right)\right) dt. \quad (1.19)$$

Если C – большой круг с плюккеровыми координатами \hat{l} , то правая часть (1.19) – это интеграл функции $f(\vec{x})$ по повернутому кругу C' , полученному из C применением вращения $R_{ij}^{-1}(\phi)$. Под действием этого вращения матрица плюккеровых координат сопрягается с помощью матрицы вращения $R_{ij}(\phi)$. Действительно, прямое вычисление координат круга C' дает (для краткости $R_{ij}(\phi)$ обозначено за R):

$$\begin{aligned} \hat{l}' &= x'p'^T - p'x'^T = R^{-1}x(R^{-1}p)^T - R^{-1}p(R^{-1}x)^T = \\ &= R^{-1}(xp^T - px^T)R = R^{-1}\hat{l}R. \end{aligned}$$

Итак, мы получили следующее утверждение.

Лемма 4. *Значение лучевого преобразования J от повернутой функции $R_{ij}(\phi)f$ на большом круге с матрицей координат \hat{l} равно значению преобразования от исходной функции f на круге с сопряженной матрицей координат $R_{ij}^{-1}(\phi)\hat{l}R_{ij}(\phi)$:*

$$((J \circ R_{ij}(\phi))f)(\hat{l}) = (Jf)(R_{ij}^{-1}(\phi)\hat{l}R_{ij}(\phi)). \quad (1.20)$$

Применяя к (1.20) производную по ϕ в точке $\phi = 0$, получаем, пользуясь леммой 2:

$$\begin{aligned} ((J \circ m_{ij})f)(\hat{l}) &= -\frac{d}{d\phi} ((J \circ R_{ij}(\phi))f)(\hat{l}) \Big|_{\phi=0} = \\ &= -\frac{d}{d\phi} (Jf)\left(R_{ij}^{-1}(\phi)\hat{l}R_{ij}(\phi)\right) \Big|_{\phi=0} = -\frac{1}{2} \frac{\partial(Jf)}{\partial l_{ab}} \frac{d}{d\phi} \left(R_{ij}^{-1}(\phi)\hat{l}R_{ij}(\phi)\right)_{ab} \Big|_{\phi=0} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{\partial(Jf)}{\partial l_{ab}} \left(\left. \frac{d}{d\phi} R_{ij}(\phi) \right|_{\phi=0} \hat{l} - \hat{l} \left. \frac{d}{d\phi} R_{ij}(\phi) \right|_{\phi=0} \right)_{ab} = -\frac{1}{2} \frac{\partial(Jf)}{\partial l_{ab}} [\hat{l}, E_{ij}]_{ab} = \\
&= \frac{1}{4} \frac{\partial(Jf)}{\partial l_{ab}} l_{pq} [E_{pq}, E_{ij}]_{ab} = \frac{1}{4} \frac{\partial(Jf)}{\partial l_{ab}} l_{pq} (C_{pq,ij,rs} E_{rs})_{ab} = \\
&= \frac{1}{4} \frac{\partial(Jf)}{\partial l_{ab}} l_{pq} C_{pq,ij,rs} (-\delta_{ra} \delta_{sb} + \delta_{rb} \delta_{sa}) = \frac{1}{4} \frac{\partial(Jf)}{\partial l_{ab}} l_{pq} (-C_{pq,ij,ab} + C_{pq,ij,ba}) = \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\partial(Jf)}{\partial l_{ab}} l_{pq} C_{pq,ij,ab} = \frac{1}{2} \frac{\partial(Jf)}{\partial l_{ab}} C_{ab,ij,pq} l_{pq} = \frac{1}{2} \frac{\partial(Jf)}{\partial l_{ab}} \{l_{ab}, l_{ij}\} = \{Jf, l_{ij}\}.
\end{aligned}$$

Итак, мы получили основное коммутационное соотношение (1.18), лемма 3 доказана.

Теперь мы применяем соотношение (1.18) для преобразования правой части усредненных уравнений (1.14) для момента и получаем, что она выражается в виде скобки Пуассона:

$$\dot{l}_{ij} = \{l_{ij}, H(\hat{l})\}, \quad (1.21)$$

где гамильтониан есть лучевое преобразование от функции деформации:

$$H(\hat{l}) = \frac{\varepsilon}{2\pi} J\psi. \quad (1.22)$$

Теорема 3 доказана. □

1.8 Ограничение системы на многообразии Грассмана $G(2, n)$ как на пуассоново подмногообразии $so(n)$

Пространство $so(n)$ всех кососимметрических матриц l_{ij} имеет размерность $n(n-1)/2$. Скобка Ли-Пуассона (1.15) превращает его в пуассоново многообразие, на котором, вообще говоря, и определена система (1.21), (1.22). Однако, как было замечено выше, компоненты углового момента частицы (они же – плюккеровы координаты двумерной плоскости текущего большого круга) удовлетворяют соотношениям Плюккера (1.5). Поэтому интересующие нас траектории системы (1.21) должны полностью лежать

на многообразии, задаваемом этими соотношениями, – многообразии Грассмана $G(2, n)$ размерности $2n - 4$ (напомним, что l_{ij} – однородные координаты, и для однозначного соответствия с плоскостями нужно отождествить матрицы вида $\alpha \hat{l}, \alpha \in \mathbb{R}$).

Принадлежность траекторий многообразию $G(2, n)$ обеспечивается следующим общим фактом: это многообразие инвариантно относительно любой гамильтоновой системы со скобками (1.15). Это следует из того, что $G(2, n)$ – пуассоново подмногообразие в $so(n)$ со скобками (1.15). Последнее означает, что ограничение на $G(2, n)$ скобки Пуассона двух произвольных функций на $so(n)$ зависит только от значений этих функций на $G(2, n)$, [30]. Это, в свою очередь, следует из следующего свойства: скобки Пуассона левых частей соотношений Плюккера $l_{j[k_1} l_{k_2 k_3]}$, задающих $G(2, n)$, со всеми переменными l_{ij} равны либо нулю, либо $\pm l_{p[q_1} l_{q_2 q_3]}$ для некоторых p, q_1, q_2, q_3 . Поскольку на многообразии Грассмана $G(2, n)$ все эти полиномы равны нулю, то в силу вышесказанного они имеют на $G(2, n)$ нулевые скобки Пуассона со всеми переменными l_{ij} . Тем самым они являются интегралами движения для тех траекторий гамильтоновых систем, которые стартуют с $G(2, n)$, а значит эти траектории остаются на $G(2, n)$ на всем своем протяжении.

Итак, усредненная система (1.21) ограничивается на инвариантное пуассоново подмногообразие $G(2, n)$ размерности $2n - 4$ в пространстве переменных $l_{ij}, i < j$, имеющем размерность $n(n - 1)/2$.

С точки зрения матрицы l_{ij} принадлежность многообразию $G(2, n)$ эквивалентна разложимости в виде внешнего произведения двух векторов, или, что то же, тому, что матрица l_{ij} имеет ранг 2. В алгебре Ли $so(n)$ эти матрицы образуют орбиту коприсоединенного представления группы $SO(n)$, см. [30].

1.9 Связь траекторий момента в точной и редуцированной системах

Рассмотрим вопрос о связи решений точной системы уравнений геодезических и усредненной системы для углового момента.

В случае двумерных сфер применение КАМ-теории для систем с собственным вырождением, [20], [21], приводит к следующему утверждению.

Теорема 4. *Если для деформированной двумерной сферы*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 + \varepsilon \psi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

с аналитической функцией деформации $\psi(x_1, x_2, x_3)$ усредненная система удовлетворяет хотя бы в одной точке условию невырожденности

$$\frac{d^2 H}{dI^2} \neq 0 \tag{1.23}$$

(I – переменная «действие» усредненной системы) и ε достаточно мало, то, за исключением малых вместе с ε окрестностей конечного числа фазовых траекторий усредненной системы, на которых условие невырожденности нарушается, для всех остальных начальных точек траектории углового момента в системе геодезических на всем своем протяжении находятся в малой вместе с ε окрестности совместных линий уровня действия $|\vec{L}|$, сопряженного быстрой фазе, и гамильтониана $H(\vec{L})$ усредненной системы для момента, отвечающих их начальным значениям. В частности, условие (1.23) выполнено, если усредненная система имеет седловую стационарную точку.

Усредненные системы для двумерных деформированных сфер, рассмотренные в главе 2, имеют седловые точки и, следовательно, удовлетворяют условиям этой теоремы.

Для многомерных сфер общего вида теорема Фату для систем с одной быстрой фазой, [20], дает следующее утверждение о связи точной и усред-

ненной систем.

Теорема 5. *Для деформированной сферы*

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1 + \varepsilon \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

с гладкой функцией деформации $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ различные значения момента в точной и усредненной системах остается малым в течение времени $1/\varepsilon$:

$$|l_{ij}(t) - l_{ij}^{aver}(t)| < c\varepsilon, \quad \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{если } l_{ij}(0) = l_{ij}^{aver}(0).$$

Кроме того, для многомерных сфер, для которых усредненная система интегрируема, КАМ-теория для систем с собственным вырождением, [20], [21], приводит к следующему результату.

Теорема 6. *Пусть для деформированной сферы*

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1 + \varepsilon \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

с аналитической функцией деформации $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ усредненная система интегрируема и удовлетворяет условию невырожденности: определитель матрицы вторых производных усредненного гамильтониана по его переменным «действие» не обращается тождественно в нуль:

$$\left| \frac{d^2 H}{dI^2} \right| \neq 0.$$

Тогда при достаточно малом ε для большинства начальных условий значения действий усредненной системы на решениях системы для геодезических при любых t близки к их начальным значениям. «Большинство начальных условий» означает, что мера Лебега дополнения к этому множеству стремится к нулю вместе с возмущением.

Глава 2

Топология решений редуцированной системы для некоторых классов алгебраических поверхностей

На этапе исследования расположения геодезических на конкретных поверхностях ключевую роль играют топологические методы. В частности, для двумерных деформированных сфер с помощью построенной асимптотической редукции удастся осуществить полный топологический анализ редуцированной системы в терминах топологических инвариантов А.Т. Фоменко гамильтоновых систем, [8]. Далее излагается такой анализ для содержательного класса деформированных сфер, являющихся алгебраическими поверхностями 4-й степени. Для трехмерных деформированных сфер вращения редуцированная система оказывается интегрируемой системой с двумя степенями свободы и также допускает исследование методами теории топологической классификации интегрируемых систем. $(n - 1)$ -мерный эллипсоид порождает редуцированную систему, являющуюся частным случаем интегрируемой системы Манакова на алгебре Ли $so(n)$.

2.1 Двумерные деформированные сферы

Рассмотрим случай $n = 3$, т.е. случай двумерной деформированной сферы в трехмерном евклидовом пространстве. Угловой момент в трехмерном пространстве имеет три существенные компоненты: l_{12}, l_{13}, l_{23} . В этом случае удобно ввести, как это обычно и делают, вместо кососимметрической матрицы l_{ij} трехмерный вектор углового момента \vec{L} по формуле:

$L_i = \varepsilon_{ijk} l_{jk}$, что в явном виде выглядит как

$$\vec{L} = (L_1, L_2, L_3) = (l_{23}, -l_{13}, l_{12}).$$

Скобки Пуассона для компонент вектора момента имеют вид:

$$\{L_i, L_j\} = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} L_k. \quad (2.1)$$

Скобки (2.1) имеют одну функцию Казимира – квадрат момента $\vec{L}^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$. Фиксируя ее значение, получаем, что редуцированную систему можно ограничить на сферу $\vec{L}^2 = const$ (в дальнейшем предполагаем $\vec{L}^2 = 1$).

Гамильтониан $H(\vec{L})$ редуцированной системы, в соответствии с общей схемой (1.21), (1.22), получается из функции $\psi(\vec{x})$ с помощью лучевого преобразования, которое в случае двумерной сферы называют преобразованием Функа-Минковского. Отсюда следует, что гамильтониан – четная функция: $H(-\vec{L}) = H(\vec{L})$ (векторы \vec{L} и $-\vec{L}$ соответствуют одному и тому же ортогональному к ним большому кругу, по которому ведется усреднение).

Поэтому, отождествляя диаметрально противоположные точки сферы \vec{L} и $-\vec{L}$, получаем систему на проективной плоскости \mathbb{RP}^2 . Каждая ее точка есть прямая вида $\lambda \vec{L}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ в пространстве момента и однозначно соответствует ортогональному к ней большому кругу. Итак, редуцированная система определена на грассманиане $G(2, 3)$, гомеоморфном проективной плоскости.

По теореме Лиувилля, [8], получаем следующее утверждение.

Утверждение 1. *Для двумерных деформированных сфер в трехмерном пространстве редуцированная система есть интегрируемая гамильтонова система с одной степенью свободы, определенная на фазовом пространстве \mathbb{RP}^2 .*

Траекториями системы являются линии уровня гамильтониана $H =$

$const$ на \mathbb{RP}^2 . Топология слоения, порождаемого этой функцией, характеризуется инвариантами А.Т. Фоменко, называемыми молекулами, [8], с точностью до так называемой послойной эквивалентности.

Определение. [8] Функции Морса f и g на поверхностях X^2 и Y^2 называются *послойно эквивалентными*, если существует диффеоморфизм

$$\lambda : X^2 \rightarrow Y^2,$$

переводящий связные компоненты линий уровня функции f в связные компоненты линий уровня функции g .

Каждой функции Морса ставится в соответствие инвариант ее слоения, называемый молекулой и представляющий собой граф с метками. Вводится понятие одинаковых молекул, позволяющее сравнивать данные инварианты, построенные для различных функций.

Основным результатом является следующая теорема классификации функций Морса с точностью до послойной эквивалентности.

Теорема 7. [8] Пусть (X^2, f) и (Y^2, g) – две ориентированные поверхности с функциями Морса и W, W' – соответствующие им молекулы. Тогда пары (X^2, f) и (Y^2, g) послойно эквивалентны с сохранением ориентации в том и только в том случае, когда молекулы W и W' одинаковы.

Итак, классификация слоений, порождаемых функциями Морса, с точностью до послойной эквивалентности сводится к вычислению молекул этих функций. Тем самым для гамильтоновой системы с одной степенью свободы подсчет молекулы ее гамильтониана позволяет классифицировать эту систему с точностью до диффеоморфизма фазовых пространств, переводящего траектории в траектории.

2.2 Полиномиальность редуцированного гамильтониана для полиномиальных деформаций двумерной сферы

В теории преобразования Функа-Минковского (частный случай лучевого преобразования, относящийся к двумерной сфере), [14], доказывается следующий факт.

Теорема 8. [14] *Пространства \mathcal{H}_{2k} функций на сфере, являющихся ограничениями на нее однородных гармонических полиномов степени $2k$, являются собственными подпространствами преобразования Функа-Минковского: если $f \in \mathcal{H}_{2k}$, то*

$$Jf = \lambda_k f, \quad \text{где} \quad \lambda_k = 2\sqrt{\pi}(-1)^k \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n + 1)}.$$

Отсюда получаем следующее утверждение.

Теорема 9. *Если функция $\psi(x_1, x_2, x_3)$, задающая деформацию сферы, является четным полиномом, то соответствующий гамильтониан редуцированной системы $H(L_1, L_2, L_3)$ также является четным полиномом той же степени.*

Доказательство. Действительно, разлагая $\psi(x_1, x_2, x_3)$ по собственным подпространствам, имеем:

$$\psi = \sum_{i=0}^k \psi_i,$$

поэтому

$$H = \frac{\varepsilon}{2\pi} J\psi = \frac{\varepsilon}{2\pi} \sum_{i=0}^k \lambda_i \psi_i$$

– полином степени $2k$. □

2.3 Топологическая классификация редуцированных систем для двумерной сферы с деформацией четвертыми степенями координат

Топологическая классификация слоений Лиувилля систем с одной степенью свободы осуществляется следующим образом, [8]. В системах с одной степенью свободы аналогом отображения момента является сама функция-гамильтониан H . Образ множества критических точек на прямой значений гамильтониана есть бифуркационная диаграмма. Эти точки делят прямую на камеры. Прообраз любой точки внутри камеры – конечное число окружностей. При переходе из камеры в камеру число окружностей может изменяться, происходит бифуркация. Каждая связная компонента окрестности особого слоя гамильтониана имеет некоторый топологический тип с точностью до послойной эквивалентности. В теории топологической классификации гамильтоновых систем А.Т. Фоменко этот тип был назван *атомом*, [8]. Число критических точек в особом слое называется *сложностью* атома. Край окрестности особого слоя составляют граничные окружности, образующие два слоя, соответствующие значениям гамильтониана, чуть меньшему и чуть большему критического. При дальнейшем изменении уровня гамильтониана эти окружности изотопно смещаются, и, сопоставив каждой из них точку, мы получаем ребра, входящие в данный атом и выходящие из него (направление на ребрах выбирается в сторону возрастания значений гамильтониана). В итоге атомы, соединенные ребрами, образуют граф, называемый *молекулой* функции Морса H . Молекулы считаются одинаковыми, если существует гомеоморфизм одного графа на другой, переводящий ребра в ребра, атомы в соответствующие атомы и продолжаемый на сами атомы как окрестности особых слоев, [8]. Сформулированная выше теорема 7 утверждает, что две функции Морса на ориентированных поверхностях послойно эквивалентны с сохранением ориентации тогда и только тогда, когда их молекулы одинаковы.

Применим эту схему классификации к редуцированной системе для геодезических на деформированной сфере, представляющей собой алгебраическую поверхность следующего вида. Рассмотрим деформацию стандартной двумерной сферы в виде суммы четвертых степеней координат с различными коэффициентами:

$$\varphi(\vec{x}) \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 + \varepsilon \psi(\vec{x}) = 0, \quad \varepsilon \ll 1, \quad \psi(\vec{x}) = \varepsilon_1 x_1^4 + \varepsilon_2 x_2^4 + \varepsilon_3 x_3^4. \quad (2.2)$$

Утверждение 2. *Для возмущения сферы четвертыми степенями (2.2) гамильтониан редуцированной системы имеет вид:*

$$H = \frac{3}{8} \varepsilon [\varepsilon_1 (L_2^2 + L_3^2)^2 + \varepsilon_2 (L_1^2 + L_3^2)^2 + \varepsilon_3 (L_1^2 + L_2^2)^2]. \quad (2.3)$$

Утверждение получается прямым вычислением по формуле (1.22) для функции ψ вида (2.2).

Усредненный гамильтониан обладает следующей симметрией, которая будет многократно использоваться в дальнейших построениях.

Лемма 5. *Гамильтониан (2.3) симметричен относительно каждого из отражений:*

$$L_1 \rightarrow -L_1, \quad L_2 \rightarrow -L_2, \quad L_3 \rightarrow -L_3. \quad (2.4)$$

Замечание. Из этой симметрии следует, что слоение на всей сфере $\vec{L}^2 = 1$ может быть получено из его части, расположенной в первом октанте $L_1 \geq 0, L_2 \geq 0, L_3 \geq 0$, с помощью комбинаций отражений, указанных в лемме.

Перейдем к построению инвариантов А.Т. Фоменко в рассматриваемом случае, в результате чего гамильтонианы (2.3) будут классифицированы с точностью до послойной эквивалентности (в случае, когда они являются функциями Морса).

Определим критические точки гамильтониана (2.3) на сфере $\vec{L}^2 = 1$. Они совпадают со стационарными точками соответствующей гамильтоновой системы уравнений (точки, где градиент гамильтониана ортогонален к сфере, а значит, параллелен \vec{L}). В рассматриваемом случае уравнения (1.21) динамики редуцированной системы имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{L}_1 &= \frac{3\varepsilon}{2} L_2 L_3 [\varepsilon_2 (L_1^2 + L_3^2) - \varepsilon_3 (L_1^2 + L_2^2)], \\ \dot{L}_2 &= \frac{3\varepsilon}{2} L_1 L_3 [\varepsilon_3 (L_1^2 + L_2^2) - \varepsilon_1 (L_2^2 + L_3^2)], \\ \dot{L}_3 &= \frac{3\varepsilon}{2} L_1 L_2 [\varepsilon_1 (L_2^2 + L_3^2) - \varepsilon_2 (L_1^2 + L_3^2)].\end{aligned}\tag{2.5}$$

Лемма 6. *В зависимости от параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ система (2.5) на сфере $\vec{L}^2 = 1$ может иметь стационарные точки следующих трех видов:*

S1 Точки на координатных осях. Существуют при любых значениях параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Значения момента и гамильтониана в стационарных точках равны:

$$\begin{aligned}\text{a. } L_1 &= \pm 1, \quad L_2 = 0, \quad L_3 = 0, \quad H = E_{S1a} = \frac{3}{8} \varepsilon (\varepsilon_2 + \varepsilon_3); \\ \text{b. } L_1 &= 0, \quad L_2 = \pm 1, \quad L_3 = 0, \quad H = E_{S1b} = \frac{3}{8} \varepsilon (\varepsilon_3 + \varepsilon_1); \\ \text{c. } L_1 &= 0, \quad L_2 = 0, \quad L_3 = \pm 1, \quad H = E_{S1c} = \frac{3}{8} \varepsilon (\varepsilon_1 + \varepsilon_2);\end{aligned}$$

S2 Точки в координатных плоскостях. Существуют при условиях $\varepsilon_2 \varepsilon_3 > 0$, $\varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$, и $\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0$ соответственно. Значения момента и гамильтониана в стационарных точках равны (знаки независимы):

$$\begin{aligned}\text{a. } L_1 &= 0, \quad L_2 = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}}, \quad L_3 = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}}, \\ H &= E_{S2a} = \frac{3}{8} \varepsilon \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}; \\ \text{b. } L_2 &= 0, \quad L_3 = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_3 + \varepsilon_1}}, \quad L_1 = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3 + \varepsilon_1}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H = E_{S2b} &= \frac{3}{8} \varepsilon \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1}{\varepsilon_3 + \varepsilon_1}; \\
\text{с. } L_3 = 0, \quad L_1 &= \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}, \quad L_2 = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}, \\
H = E_{S2c} &= \frac{3}{8} \varepsilon \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2};
\end{aligned}$$

S3 Точки внутри октантов. Существуют, если выполнены все неравенства:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 &> 0 \\
\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1 &> 0 \\
-\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 &> 0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Значения момента и гамильтониана в стационарных точках равны (знаки независимы):

$$\begin{aligned}
L_1 &= \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1}}, \quad L_2 = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1}}, \\
L_3 &= \pm \sqrt{\frac{-\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1}}, \quad H = E_{S3} = \frac{3}{2} \varepsilon \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Все три компоненты вектора момента \vec{L} на сфере $\vec{L}^2 = 1$ не могут одновременно обратиться в ноль. Если некоторые две из них равны нулю, то правые части системы (2.5) обращаются в ноль. Это дает 6 стационарных точек типа S1, лежащих на пересечении координатных осей со сферой.

Рассмотрим случай, когда только одна из компонент вектора момента \vec{L} равна нулю, например $L_1 = 0$. Тогда правые части второго и третьего уравнений обращаются в ноль, а приравнивание к нулю правой части первого уравнения приводит к уравнению серии S2, а: $\varepsilon_3 L_2^2 - \varepsilon_2 L_3^2 = 0$. Каждая из серий S2a, S2b, S2c дает по 4 стационарных точки, отличающихся знаками двух ненулевых компонент момента.

Наконец, пусть ни одна из компонент вектора момента \vec{L} не равна нулю. Для нахождения таких стационарных точек необходимо приравнять нулю выражения в квадратных скобках в каждой из правых частей уравнений

(2.5). Отсюда получаем систему уравнений для точек типа S3. Вариация знаков компонент момента дает 8 стационарных точек этого типа.

Заметим для дальнейшего, что из системы неравенств (2.6) следует, что все ε_i имеют один знак.

□

Замечание. С помощью зеркальных симметрий (2.4) любая точка внутри каждой из серий S1a, S1b, S1c, S2a, S2b, S2c, S3 может быть переведена в любую другую точку этой же серии. Поэтому если одна из точек серии входит в атом определенного типа, то и все остальные точки этой серии тоже должны входить в атомы того же типа.

Критическая точка гамильтониана $H(\vec{L})$ на сфере $\vec{L}^2 = 1$ является невырожденной, если в этой точке невырождена матрица вторых производных гамильтониана по локальным координатам на сфере. Вычисление показывает, что указанные в лемме критические точки являются вырожденными при следующих условиях.

Лемма 7. *Критические точки S1, S2, S3 из леммы 6 являются вырожденными при следующих условиях соответственно:*

S1 a. $\varepsilon_2\varepsilon_3 = 0;$

b. $\varepsilon_3\varepsilon_1 = 0;$

c. $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0.$

S2 a. $\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 = 0;$

b. $\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_3\varepsilon_1 = 0;$

c. $-\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 = 0.$

S3 Если выполнено хотя бы одно из условий:

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 = 0;$$

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_3\varepsilon_1 = 0;$$

$$-\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 = 0.$$

(2.7)

Рассмотрим случай, когда все критические точки гамильтониана на сфере невырождены, и он является, следовательно, функцией Морса. По лемме 7 для этого достаточно выполнения условий:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i &\neq 0, \quad i = 1, 2, 3, \\
\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 &\neq 0, \\
\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_3\varepsilon_1 &\neq 0, \\
-\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 &\neq 0.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Невырожденные критические точки делятся на точки максимума, минимума и седловые точки в зависимости от сигнатуры второго дифференциала функции в этих точках. Подсчет приводит к следующим условиям для принадлежности найденных точек этим категориям.

Лемма 8. *Критические точки серий S1, S2, S3 из леммы 6 имеют следующие типы:*

- S1
- a. Максимум, если $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ оба положительны;
минимум, если $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ оба отрицательны;
седло, если $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ разных знаков;
 - b. Максимум, если $\varepsilon_3, \varepsilon_1$ оба положительны;
минимум, если $\varepsilon_3, \varepsilon_1$ оба отрицательны;
седло, если $\varepsilon_3, \varepsilon_1$ разных знаков;
 - c. Максимум, если $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ оба положительны;
минимум, если $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ оба отрицательны;
седло, если $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ разных знаков;
- S2
- a. Максимум, если $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ оба отрицательны и $\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 < 0$;
минимум, если $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ оба положительны и $\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 < 0$;
седло, если $\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 > 0$;
 - b. Максимум, если $\varepsilon_3, \varepsilon_1$ оба отрицательны и $\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_3\varepsilon_1 < 0$;
минимум, если $\varepsilon_3, \varepsilon_1$ оба положительны и $\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_3\varepsilon_1 < 0$;

седло, если $\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$;

с. Максимум, если $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ оба отрицательны и $-\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 < 0$;

минимум, если $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ оба положительны и $-\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 < 0$;

седло, если $-\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$;

S3 Максимум, если все ε_i отрицательны; минимум, если все ε_i положительны (напомним, что эта серия точек существует только если ε_i имеют один знак).

Тем самым для любого набора параметров поверхности ε_i , удовлетворяющего условию (2.8) невырожденности всех критических точек гамильтониана, с помощью лемм 6, 8 вычисляются все имеющиеся критические точки и определяются их типы.

Образы критических точек образуют бифуркационную диаграмму на прямой значений гамильтониана. В зависимости от параметров ε_i эта диаграмма принимает разный вид, и гамильтониан имеет различные молекулы. Разберем последовательно возникающие здесь топологически различные случаи, каждый из которых соответствует некоторой области в трехмерном пространстве параметров ε_i , $i = 1, 2, 3$. Поскольку гамильтониан однороден относительно этих параметров, то можно ограничиться векторами $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, лежащими на сфере $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = 1$. При этом наборам параметров $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ и $-(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ соответствуют гамильтонианы, отличающиеся только знаком, поэтому можно ограничиться полусферой, заданной условием $\varepsilon_3 \geq 0$, которую мы будем изображать в проекции на плоскость $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

I. Все параметры ε_i положительны: $\varepsilon_i > 0$, $i = 1, 2, 3$.

В этом случае существуют все критические точки типа **S2** (лемма 6), точки **S1** являются точками локального максимума гамильтониана (лемма 8), а точки **S3**, при условии, что они существуют, – точками локального минимума гамильтониана.

Внутри этого случая имеются следующие подслучаи.

I.1. Выполнены условия, при которых существуют критические точки $S3$ (лемма 6), а точки $S2$ являются седлами (лемма 8):

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 &> 0 \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1 &> 0 \\ -\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 &> 0\end{aligned}$$

Здесь возникают случаи в зависимости от совпадения некоторых из критических уровней энергии.

I.1.a. Все ε_i различны.

В этом случае все уровни энергии $E_{S2a}, E_{S2b}, E_{S2c}$ трех серий седловых точек различны. Допустим для определенности, что $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$. Тогда энергия локальных минимумов E_{S3} меньше всех седловых энергий, а последние имеют следующий порядок возрастания: $E_{S2a} < E_{S2b} < E_{S2c}$. При этом энергии локальных максимумов имеют следующий порядок возрастания: $E_{S1c} < E_{S1b} < E_{S1a}$ и две бóльшие из них находятся выше всех седловых уровней.

Для меньшего из локальных максимумов E_{S1c} есть две возможности: он может находиться либо выше всех седловых уровней, либо между верхними седловыми уровнями E_{S2b} и E_{S2c} .

I.1.a.i. $E_{S1c} > E_{S2c}$.

Рассмотрим часть слоения Лиувилля, расположенную в первом октанте $L_1 \geq 0, L_2 \geq 0, L_3 \geq 0$. На сфере эти условия высекают криволинейный треугольник. На рис. 2.1 вверху слева изображена проекция этого треугольника на плоскость $L_1 L_2$ вместе с критическими точками усредненного гамильтониана H . В этот треугольник попадает ровно по одной критической точке из серий $S1a, S1b, S1c, S2a, S2b, S2c, S3$, причем точки максимума $S1a, S1b, S1c$ – это вершины треугольника (точки на координатных осях), седловые точки $S2a, S2b, S2c$ лежат

на противоположных к соответствующим вершинам сторонах, точка минимума S_3 лежит внутри треугольника. Рядом с точками приведены числа в кругах, обозначающие порядковые номера (по возрастанию) значений гамильтониана в этих точках (точка с наименьшей энергией имеет номер 1, с наибольшей – номер 7).

Задача состоит в определении атомов, содержащих седловые точки. Для этого необходимо найти скелеты этих атомов, то есть графы, образуемые седлами и соединяющими их сепаратрисами. Итак, рассмотрим для каждого седла, как расположены его сепаратрисы. В силу симметрии в первый октант попадают ровно по две из четырех сепаратрис каждого седла.

Заметим, что на отрезках сторон треугольника, на которые их делят седловые точки, гамильтониан изменяется монотонно. Действительно, в противном случае он имел бы на них дополнительные критические точки, которые являлись бы одновременно его критическими точками на сфере (а такие точки все перечислены). Это следует из того, что, в силу симметрии, на стороне треугольника градиент гамильтониана может быть направлен только вдоль этой стороны. Действительно, из-за четности H по L_1 имеем $\frac{\partial H}{\partial L_1} = 0$ при $L_1 = 0$ и аналогично для L_2, L_3 . Поэтому если в точке на стороне треугольника компонента градиента вдоль этой стороны равна нулю, то в этой точке градиент целиком равен нулю.

Пользуясь монотонностью, находим на сторонах треугольника точки со значениями гамильтониана, равными седловым значениям (помечены на рис. 2.1 соответствующими числами в кругах). Рассмотрим седло S_{2a} . Все остальные седла, а также максимумы – вершины треугольника – имеют

бóльшие значения гамильтониана, поэтому из монотонности заключаем, что на всей границе треугольника нет точек с такой энергией. Поэтому сепаратрисы седла $S2a$ не выходят за пределы рассматриваемого криволинейного треугольника, а значит, могут только образовывать петлю, лежащую внутри треугольника. Внутри этой петли должен лежать хотя бы один локальный минимум гамильтониана. Но такой минимум единствен – это точка $S3$. Далее, обратимся к седлу $S2b$. Поскольку на стороне $S1b-S1c$ имеется две точки с такой же энергией, то для сепаратрис седла $S2b$ имеется две возможности: либо они образуют петлю внутри треугольника, либо каждая из них выходит в одну из точек на сторонах. Однако первый случай невозможен, так как тогда внутри петли должна была бы быть точка локального минимума, отличная от $S3$, а такой точки не существует. Итак, сепаратрисы выходят на границу треугольника в точках на стороне $S1b-S1c$. По таким же соображениям сепаратрисы седла $S2c$ попадают в ближайшие к нему точки с такой энергией на сторонах $S1b-S1c$ и $S1a-S1c$. Другие две точки с такой энергией соединены друг с другом регулярной линией уровня H .

Итак, части сепаратрис, лежащие в первом октанте, имеют изображенный на рис. 2.1 вид. Отражая эту часть слоения относительно координатных плоскостей, получим расположение сепаратрис на сфере, рис. 2.1, вверху справа. Каждая связная компонента графа сепаратрис образует скелет, по которому однозначно определяется соответствующий плоский атом, [8]. Области, ограниченные двумя граничными окружностями атомов, соответствуют ребрам, соединяющим эти атомы.

Обозначения для атомов малой сложности будем брать из

соответствующей таблицы в [8]. Один из атомов, содержащий седла серии $S2c$, имеет сложность 4. Он изображен на рис. 2.2. Обозначим его I .

Результат этих вычислений приведен на рис. 2.1 внизу. Слева показана бифуркационная диаграмма гамильтониана вместе с числом окружностей в прообразе для значений энергии из каждой камеры (цифры справа от оси). Справа изображена молекула, соответствующая лиувиллеву слоению в этом случае.

I.1.a.ii. $E_{S1c} < E_{S2c}$.

Случай аналогичен предыдущему. На рис. 2.3 слева изображена бифуркационная диаграмма гамильтониана в этом случае вместе с числом окружностей в прообразе для значений энергии из каждой камеры (цифры справа от оси). Единственное отличие состоит в том, что нижний уровень локальных максимумов E_{S1c} лежит ниже верхнего седлового уровня E_{S2c} . Молекула этого случая совпадает с предыдущей.

I.1.b. Меньшие два из параметров ε_i совпадают.

Допустим для определенности, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 < \varepsilon_3$. В этом случае два нижних седловых уровня совпадают: $E_{S2a} = E_{S2b}$. Энергия локальных минимумов E_{S3} меньше всех седловых энергий. Большие две энергии локальных максимумов совпадают: $E_{S1c} < E_{S1b} = E_{S1a}$. Они же находятся выше всех седловых уровней.

Для энергии меньшего из локальных максимумов E_{S1c} есть две возможности: она может находиться либо выше всех седловых уровней, либо между седловыми уровнями E_{S2b} и E_{S2c} .

I.1.b.i. $E_{S1c} > E_{S2c}$.

Как и ранее, рассмотрим часть слоения Лиувилля, расположенную в первом октанте, рис. 2.4 вверху слева.

Значение гамильтониана в седлах S_{2a} и S_{2b} ниже, чем на всей остальной границе криволинейного треугольника. Поэтому сепаратрисы этих седел остаются внутри него, и возможны два случая: 1) сепаратрисы каждого седла образуют петлю; 2) сепаратрисы идут из одного седла в другое. Но в первом случае в каждой петле должен был бы находиться свой локальный минимум, а таковой является только точка S_3 . Итак, сепаратрисы соединяют седла S_{2a} и S_{2b} , и между ними находится локальный минимум S_3 . Сепаратрисы седла S_{2c} , аналогично предыдущему случаю, попадают в ближайшие к нему точки с такой энергией на сторонах S_{1b} - S_{1c} и S_{1a} - S_{1c} . Другие две точки с такой энергией соединены друг с другом регулярной линией уровня гамильтониана.

С помощью отражений относительно координатных плоскостей получаем весь граф сепаратрис на сфере, рис. 2.4 вверху справа. Определяя по каждой его связной компоненте соответствующий плоский атом и соединяя ребрами атомы, ограничивающие одну и ту же область, получаем молекулу слоения. Результат приведен на рис. 2.4 внизу. Слева показана бифуркационная диаграмма гамильтониана в этом случае вместе с числом окружностей в прообразе для значений энергии из каждой камеры (цифры справа от оси). Справа изображена молекула, соответствующая слоению Лиувилля.

I.1.b.ii. $E_{S_{1c}} < E_{S_{2c}}$. Случай аналогичен предыдущему и иллюстрируется на рис. 2.5.

I.1.c. Большие два из параметров ε_i совпадают.

Допустим для определенности, что $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 = \varepsilon_3$. В этом случае два верхних седловых уровня совпадают: $E_{S_{2a}} < E_{S_{2b}} = E_{S_{2c}}$. Энергия локальных минимумов E_{S_3} меньше всех седловых энергий. Меньшие две энергии локальных максимумов совпадают:

$E_{S1c} = E_{S1b} < E_{S1a}$. Все энергии локальных максимумов находятся выше всех седловых уровней.

Первый октант показан рис. 2.6 вверху слева. Седло $S2a$ не имеет точек с такой же энергией на границе криволинейного треугольника, поэтому его сепаратрисы образуют петлю, которая должна содержать (единственный) локальный минимум $S3$.

Для седел $S2b$ и $S2c$ имеются две точки на стороне $S1b$ - $S1c$ с такой же энергией. Поэтому возможны 3 случая: 1) сепаратрисы обоих седел замыкаются на себя, а точки на стороне соединены регулярной линией уровня; 2) сепаратрисы одного из седел замыкаются на себя, а другого – попадают в точки на стороне; 3) сепаратрисы седел соединяют их друг с другом; 4) одна сепаратриса этих седел общая, а две другие попадают в точки на стороне. Однако в обоих случаях 1 и 2 требуется наличие отличного от $S3$ локального минимума в петле, а в случае 3 – в области между двумя сепаратрисами, а на самом деле локальный минимум единствен. Поэтому возможно только расположение сепаратрис 4, которое и изображено на рис. 2.6.

С помощью отражений относительно координатных плоскостей получаем весь граф сепаратрис на сфере, рис. 2.6 вверху справа. Определяя по каждой его связной компоненте соответствующий плоский атом и соединяя ребрами атомы, ограничивающие одну и ту же область, получаем молекулу слоения. Результат приведен на рис. 2.6 внизу. Слева показана бифуркационная диаграмма гамильтониана в этом случае вместе с числом окружностей в прообразе для значений энергии из каждой камеры (цифры справа от оси). Справа изображена молекула, соответствующая слоению Лиувилля.

На верхнем седловом уровне расположен атом сложности 8, изображенный на рис. 2.7, который обозначен буквой K .

I.1.d. Все параметры ε_i совпадают.

В этом случае совпадают все седловые уровни гамильтониана и все уровни его локальных максимумов.

Первый октант показан рис. 2.8 вверху слева. Все седла не имеют точек с такой же энергией на границе треугольника, кроме самих седел, а значит их сепаратрисы замыкаются на сами седла. Ни одно из седел не может иметь сепаратрисы, образующие петлю. Действительно, в таком случае внутри нее должен лежать локальный минимум. Но два оставшихся седла должны либо каждое замыкаться на себя, либо друг на друга. В обоих случаях есть либо петля, либо область между сепаратрисами, в которой должен лежать еще один локальный минимум, которого не существует. Итак, сепаратрисы каждого седла соединяют его с двумя другими седлами.

С помощью отражений относительно координатных плоскостей получаем весь граф сепаратрис на сфере, рис. 2.8 вверху справа. Определяя по каждой его связной компоненте соответствующий плоский атом и соединяя ребрами атомы, ограничивающие одну и ту же область, получаем молекулу слоения. Результат приведен на рис. 2.8 внизу. Слева показана бифуркационная диаграмма гамильтониана в этом случае вместе с числом окружностей в прообразе для значений энергии из каждой камеры (цифры справа от оси). Справа изображена молекула, соответствующая слоению Лиувилля.

На седловом уровне расположен атом сложности 12, изображенный на рис. 2.9, который обозначен буквой L . Это так называемый максимально симметричный атом, соответствующий кубу и октаэдру, [8].

I.2. Не выполнено одно из условий:

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$$

$$-\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$$

Пусть для определенности $\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 < 0$. В этом случае не существуют критические точки типа **S3** (лемма 6), точки **S2a** являются точками локального минимума (лемма 8), точки **S2b**, **S2c** являются седловыми, точки **S1** являются точками локального максимума гамильтониана.

Здесь также возникают случаи в зависимости от совпадения некоторых из критических уровней энергии. Из условий, задающих рассматриваемый случай, следует, что $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ и $\varepsilon_1 < \varepsilon_3$. Отсюда следует, что верхние две энергии E_{S1a} , E_{S1b} локальных максимумов находятся выше, чем обе седловые энергии E_{S2b} , E_{S2c} . Параметры ε_2 и ε_3 могут совпадать.

I.2.a $\varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$.

Пусть для определенности $\varepsilon_2 < \varepsilon_3$. В этом случае седловые уровни энергии связаны неравенством: $E_{S2b} < E_{S2c}$. Нижний из уровней энергии локальных максимумов E_{S1c} может находиться либо выше обоих седловых уровней, либо между ними.

I.2.a.i. $E_{S1c} > E_{S2c}$.

Первый октант показан рис. 2.10 вверху слева. Поскольку локальных минимумов внутри криволинейного треугольника нет, то сепаратрисы не могут образовывать петли, лежащие внутри треугольника. Поэтому сепаратрисы седел **S2b**, **S2c** соединяют их с точками на сторонах треугольника с такой же энергией, причем для седла **S2c** это должны быть те две точки, которые лежат по ту же сторону от сепаратрис седла **S2b** (рис. 2.10). Другие две соединены регулярной линией

уровня.

С помощью отражений относительно координатных плоскостей получаем весь граф сепаратрис на сфере, рис. 2.10 вверху справа. Определяя по каждой его связной компоненте соответствующий плоский атом и соединяя ребрами атомы, ограничивающие одну и ту же область, получаем молекулу слоения. Результат приведен на рис. 2.10 внизу. Слева показана бифуркационная диаграмма гамильтониана в этом случае вместе с числом окружностей в прообразе для значений энергии из каждой камеры (цифры справа от оси). Справа изображена молекула, соответствующая слоению Лиувилля.

I.2.a.ii. $E_{S1c} < E_{S2c}$.

Случай аналогичен предыдущему и иллюстрируется на рис. 2.11.

I.2.b $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$.

В этом случае седловые уровни энергии совпадают: $E_{S2b} = E_{S2c}$. Нижние два уровня локальных максимумов совпадают: $E_{S1b} = E_{S1c}$. Оба уровня локальных максимумов выше седлового уровня E_{S2b} .

Первый октант показан рис. 2.12 вверху слева. Снова из-за отсутствия локальных минимумов внутри криволинейного треугольника не может быть ни петель, ни областей, ограниченных двумя сепаратрисами. Поэтому одна сепаратриса соединяет седла, а другие две попадают в точки на стороне треугольника.

С помощью отражений относительно координатных плоскостей получаем весь граф сепаратрис на сфере, рис. 2.12 вверху справа. Определяя по каждой его связной компоненте соответствующий плоский атом и соединяя ребрами атомы, ограничивающие одну и ту же область, получаем молекулу слоения. Результат приведен на рис. 2.12 внизу. Слева показана бифуркацион-

ная диаграмма гамильтониана в этом случае вместе с числом окружностей в прообразе для значений энергии из каждой камеры (цифры справа от оси). Справа изображена молекула, соответствующая слоению Лиувилля.

II. Один из параметров ε_i отрицателен.

Пусть для определенности $\varepsilon_1 < 0$. В этом случае не существуют критические точки серии **S3**, а из точек серии **S2** существуют только точки **S2a** (лемма 6). Они являются локальными минимумами (лемма 8). Точки **S1a** являются локальными максимумами, **S1b, S1c** – седлами.

Здесь снова возникают подслучаи в зависимости от совпадения седловых уровней.

II.1 $\varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$.

Пусть для определенности $\varepsilon_2 < \varepsilon_3$. Тогда седловые уровни энергии связаны неравенством: $E_{S1c} < E_{S1b}$.

Первый октант показан рис. 2.13 вверху слева. По симметрии от каждой седловой точки **S1b, S1c** в первый октант попадает по одной сепаратрисе. Каждая из них приходит в точку с такой энергией на стороне треугольника.

С помощью отражений относительно координатных плоскостей получаем весь граф сепаратрис на сфере, рис. 2.13 вверху справа. Определяя по каждой его связной компоненте соответствующий плоский атом и соединяя ребрами атомы, ограничивающие одну и ту же область, получаем молекулу слоения. Результат приведен на рис. 2.13 внизу. Слева показана бифуркационная диаграмма гамильтониана в этом случае вместе с числом окружностей в прообразе для значений энергии из каждой камеры (цифры справа от оси). Справа изображена молекула, соответствующая слоению Лиувилля.

II.2 $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$.

Тогда седловые уровни энергии совпадают: $E_{S1c} = E_{S1b}$.

Первый октант показан рис. 2.14 вверху слева. Седла **S1b**, **S1c** не имеют на границе треугольника других точек с такой же энергией, поэтому они соединяются сепаратрисой друг с другом.

С помощью отражений относительно координатных плоскостей получаем весь граф сепаратрис на сфере, рис. 2.14 вверху справа. Определяя по каждой его связной компоненте соответствующий плоский атом и соединяя ребрами атомы, ограничивающие одну и ту же область, получаем молекулу слоения. Результат приведен на рис. 2.14 внизу. Слева показана бифуркационная диаграмма гамильтониана в этом случае вместе с числом окружностей в прообразе для значений энергии из каждой камеры (цифры справа от оси). Справа изображена молекула, соответствующая слоению Лиувилля.

В результате из разбора всех возможных здесь случаев получается следующая теорема.

Теорема 10. *Редуцированная система для алгебраической поверхности, заданной как деформация двумерной сферы четвертыми степенями (2.2), при условиях (2.8) невырожденности всех критических точек, характеризуется, в зависимости от параметров ε_i , одной из восьми молекул, изображенных на рис. 2.15.*

Как было отмечено выше, для изображения областей в трехмерном пространстве параметров ε_i , $i = 1, 2, 3$, соответствующим различным молекулам, достаточно, ввиду однородности гамильтониана по ε_i , ограничиться полусферой, заданной условием $\varepsilon_3 \geq 0$, которую мы будем изображать в проекции на плоскость $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

На рис. 2.16 изображены области на этой полусфере, соответствующие молекулам $W_1 - W_8$. Области, соответствующие молекулам W_1 и W_5 , разде-

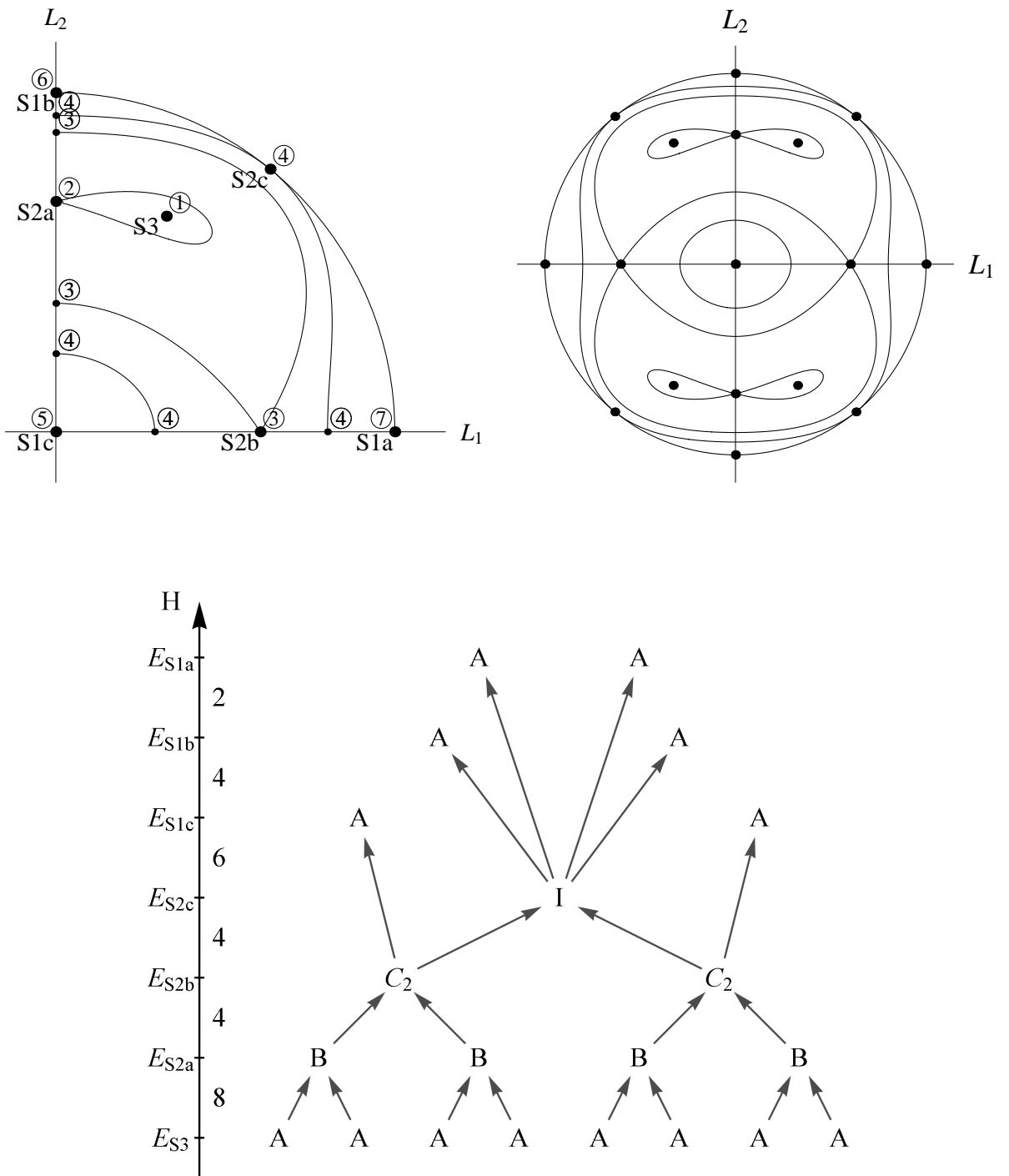


Рис. 2.1: Случай I.1.a.i. Вверху слева: часть графа сепаратрис слоения Лиувилля, расположенная в первом октанте. Вверху справа: граф сепаратрис слоения Лиувилля на сфере (показана полусфера $L_3 \geq 0$). Внизу слева: бифуркационная диаграмма и числа окружностей с данным значением гамильтониана. Внизу справа: молекула W_1 , соответствующая слоению Лиувилля.

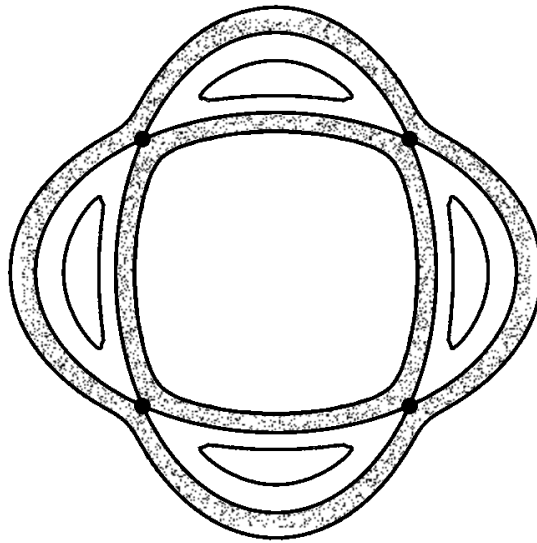


Рис. 2.2: Атом I сложности 4.

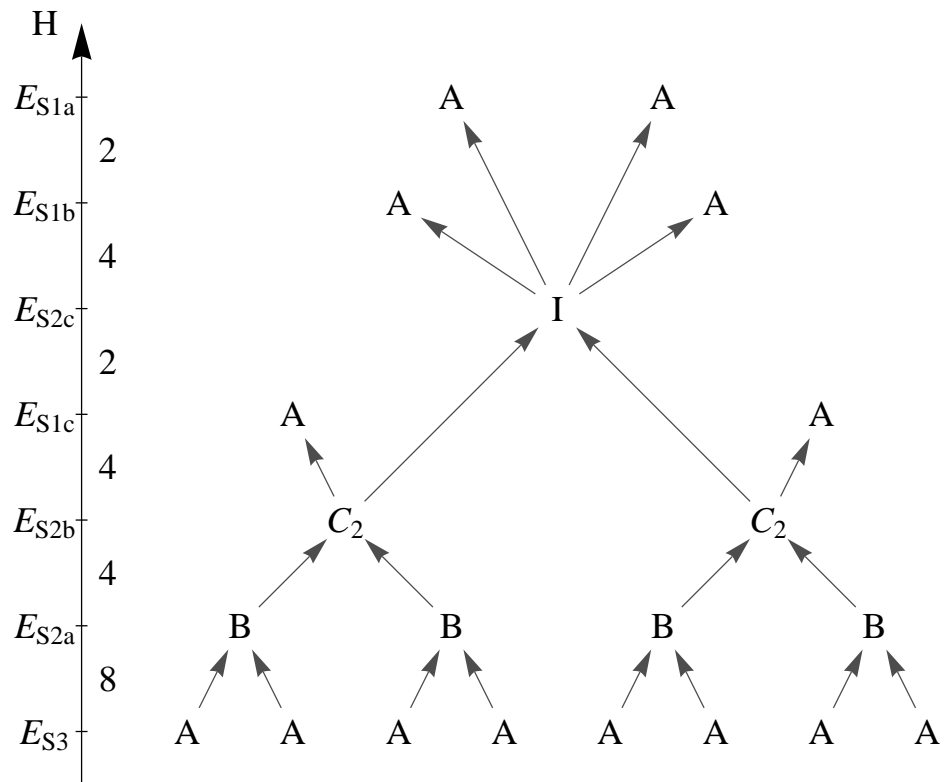


Рис. 2.3: Случай I.1.a.ii. Слева: бифуркационная диаграмма и числа окружностей с данным значением гамильтониана. Справа: молекула W_1 , соответствующая слоению Лиувилля.

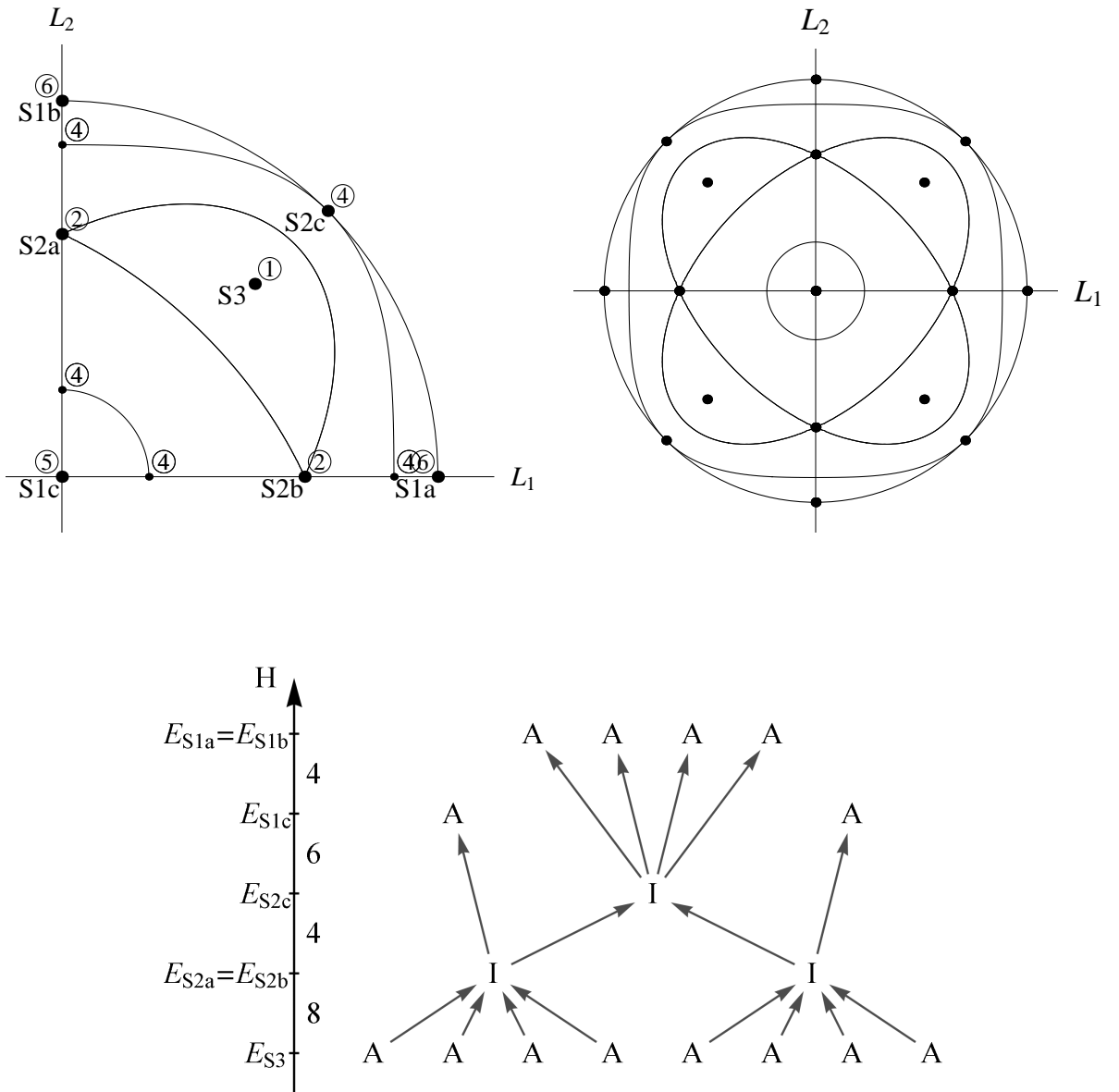


Рис. 2.4: Случай I.1.b.i. Вверху слева: часть графа сепаратрис слоения Лиувилля, расположенная в первом октанте. Вверху справа: граф сепаратрис слоения Лиувилля на сфере (показана полусфера $L_3 \geq 0$). Внизу слева: бифуркационная диаграмма и числа окружностей с данным значением гамильтониана. Внизу справа: молекула W_2 , соответствующая слоению Лиувилля.

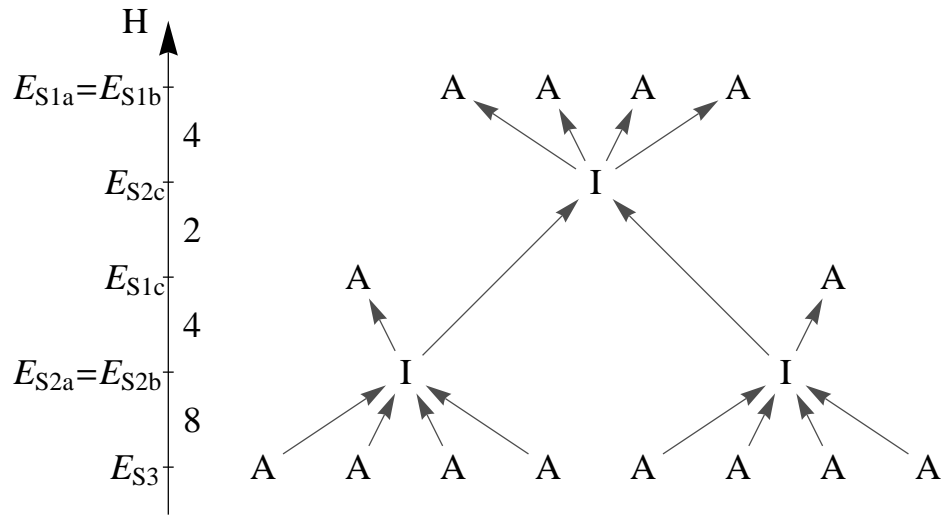


Рис. 2.5: Случай I.1.b.ii. Слева: бифуркационная диаграмма и числа окружностей с данным значением гамильтониана. Справа: молекула W_2 , соответствующая слоению Лиувилля.

ляются линиями, заданными однородными уравнениями второго порядка:

1. $\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 = 0$ (2.9)
2. $\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_3\varepsilon_1 = 0$
3. $-\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 = 0$

Итак, в случае двумерных деформированных сфер построенная асимптотическая гамильтонова редукция позволяет провести полный топологический анализ редуцированной системы посредством построения топологических инвариантов А.Т. Фоменко. В зависимости от параметров деформации происходят топологические перестройки слоений Лиувилля редуцированных систем.

2.4 Трехмерные деформированные сферы

Рассмотрим случай $n = 4$, т.е. геодезические на трехмерных деформированных сферах в четырехмерном евклидовом пространстве. Угловой момент в четырехмерном пространстве имеет шесть существенных компонент:

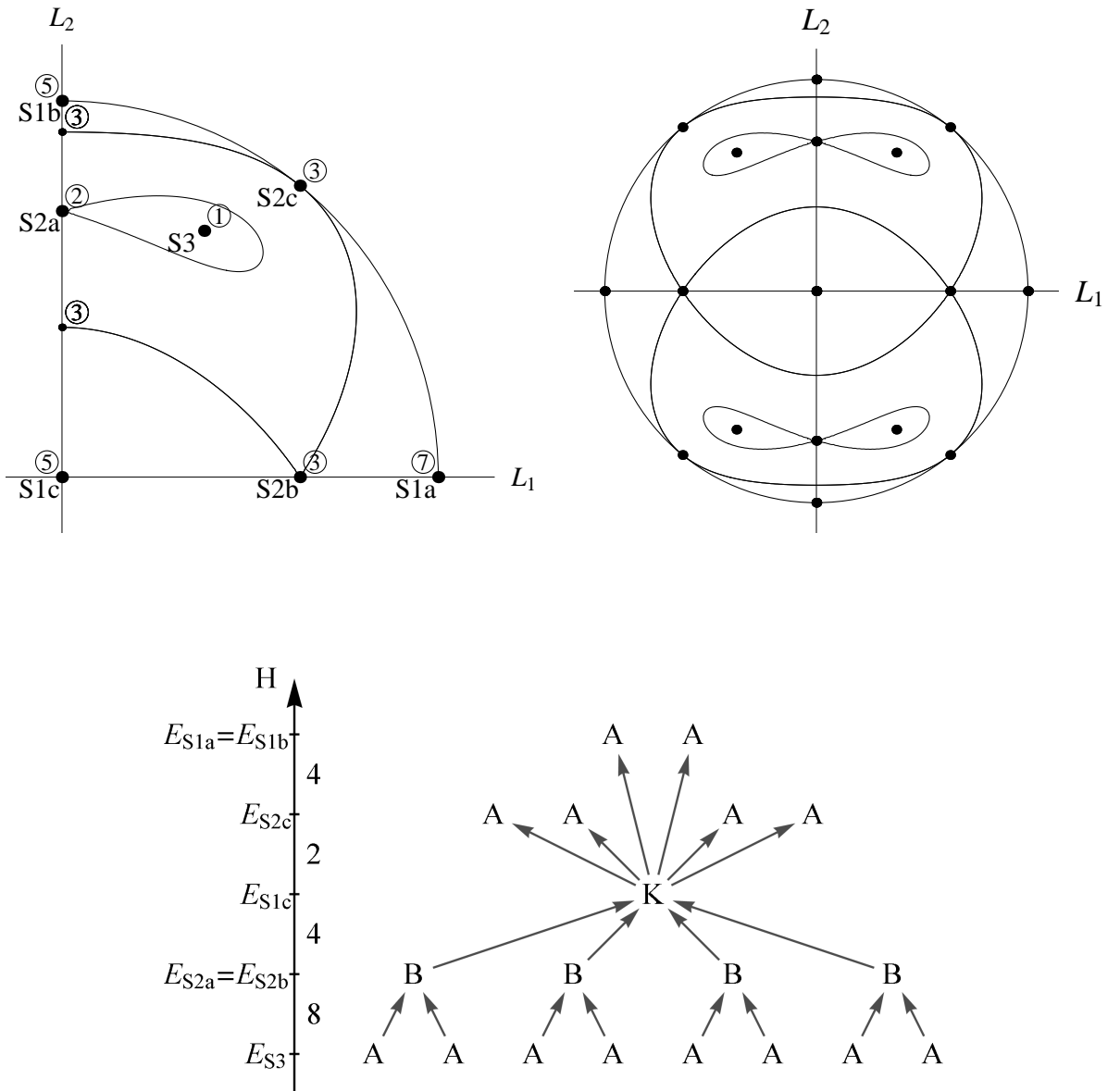


Рис. 2.6: Случай I.1.c. Вверху слева: часть графа сепаратрис слоения Лиувилля, расположенная в первом октанте. Вверху справа: граф сепаратрис слоения Лиувилля на сфере (показана полусфера $L_3 \geq 0$). Внизу слева: бифуркационная диаграмма и числа окружностей с данным значением гамильтониана. Внизу справа: молекула W_3 , соответствующая слоению Лиувилля.

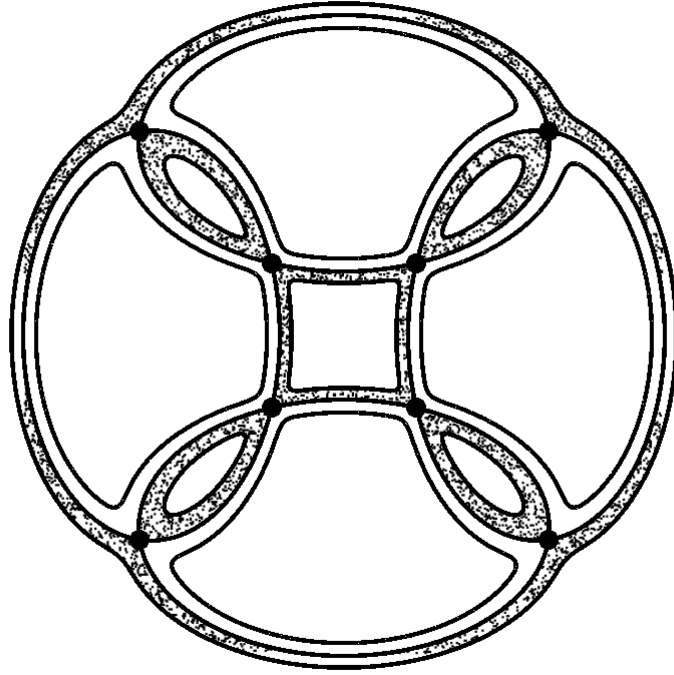


Рис. 2.7: Атом K сложности 8.

$l_{12}, l_{13}, l_{14}, l_{23}, l_{24}, l_{34}$. Они связаны одним соотношением Плюккера:

$$C \equiv l_{12}l_{34} - l_{13}l_{24} + l_{14}l_{23} = 0. \quad (2.10)$$

Алгебра Пуассона углового момента имеет две функции Казимира: приведенную выше левую часть C соотношения Плюккера, а также сумму квадратов компонент момента: $l^2 = \sum_{ij} l_{ij}^2$. Зафиксировав $C = 0$ и $l^2 = 1$, а также отождествляя точки, отличающиеся заменой знака у всех l_{ij} , получаем четырехмерное многообразие Грассмана $G(2, 4)$ в качестве фазового пространства (следовательно, имеется две степени свободы).

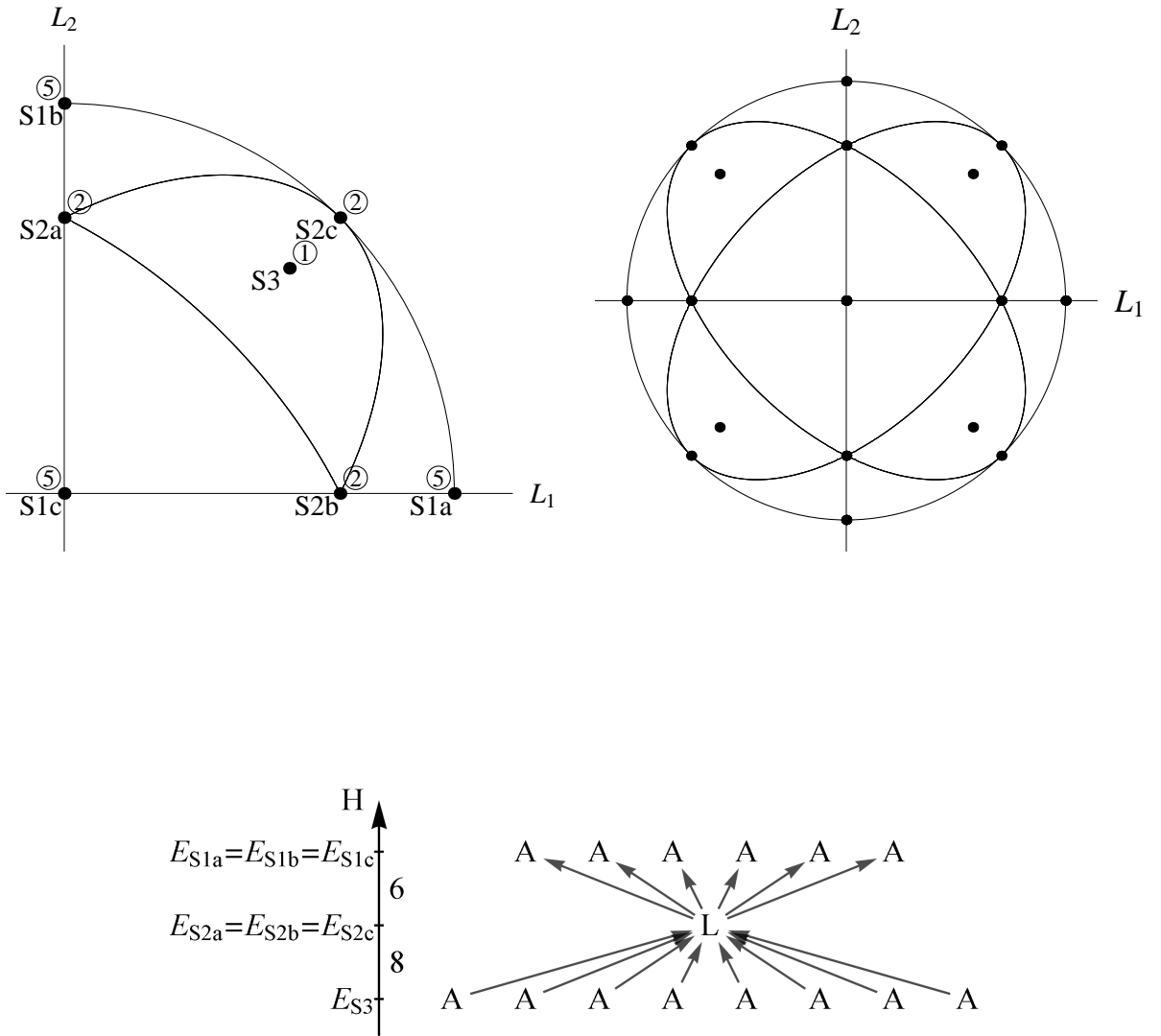


Рис. 2.8: Случай I.1.d. Вверху слева: часть графа сепаратрис слоения Лиувилля, расположенная в первом октанте. Вверху справа: граф сепаратрис слоения Лиувилля на сфере (показана полусфера $L_3 \geq 0$). Внизу слева: бифуркационная диаграмма и числа окружностей с данным значением гамильтониана. Внизу справа: молекула W_4 , соответствующая слоению Лиувилля.

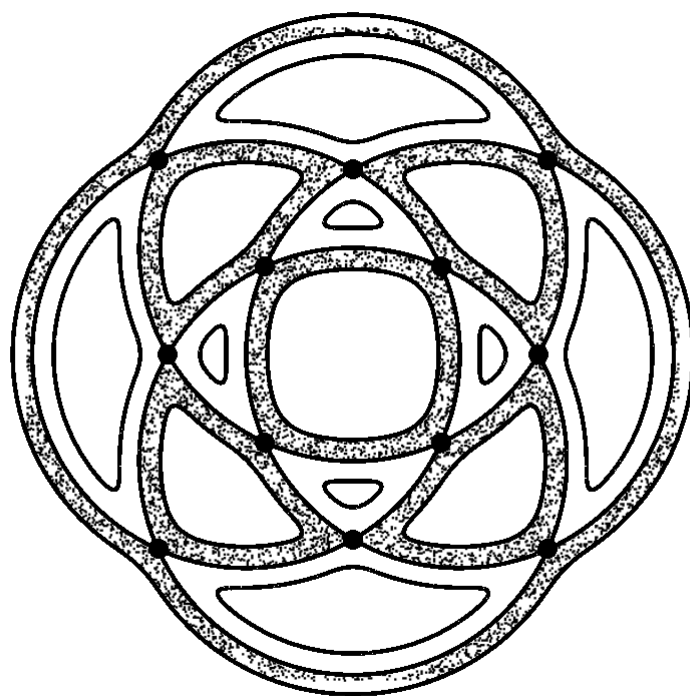


Рис. 2.9: Атом L сложности 12 – максимально симметричный атом, соответствующий кубу и октаэдру.

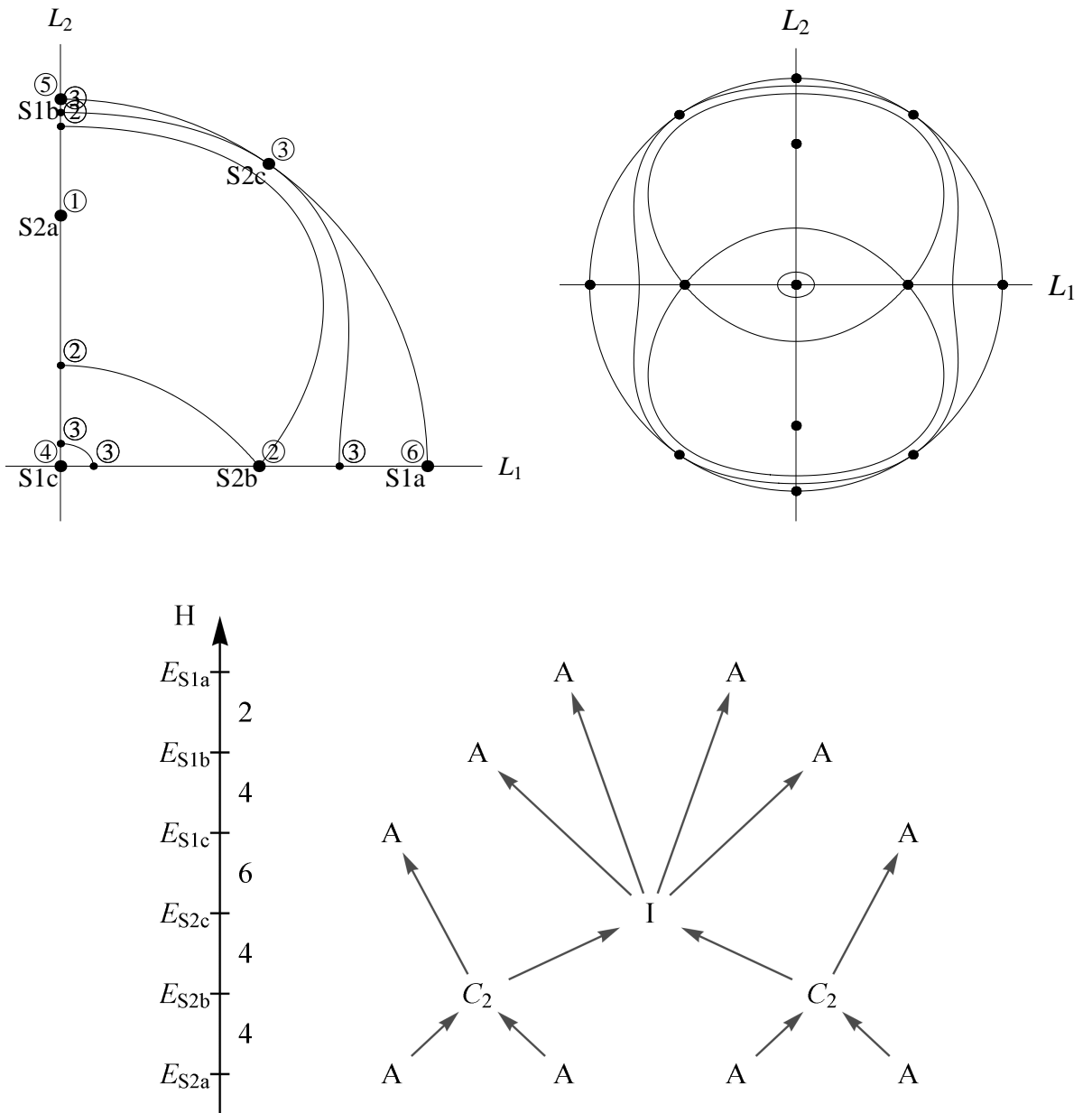


Рис. 2.10: Случай I.2.a.i. Вверху слева: часть графа сепаратрис слоения Лиувилля, расположенная в первом октанте. Вверху справа: граф сепаратрис слоения Лиувилля на сфере (показана полусфера $L_3 \geq 0$). Внизу слева: бифуркационная диаграмма и числа окружностей с данным значением гамильтониана. Внизу справа: молекула W_5 , соответствующая слоению Лиувилля.

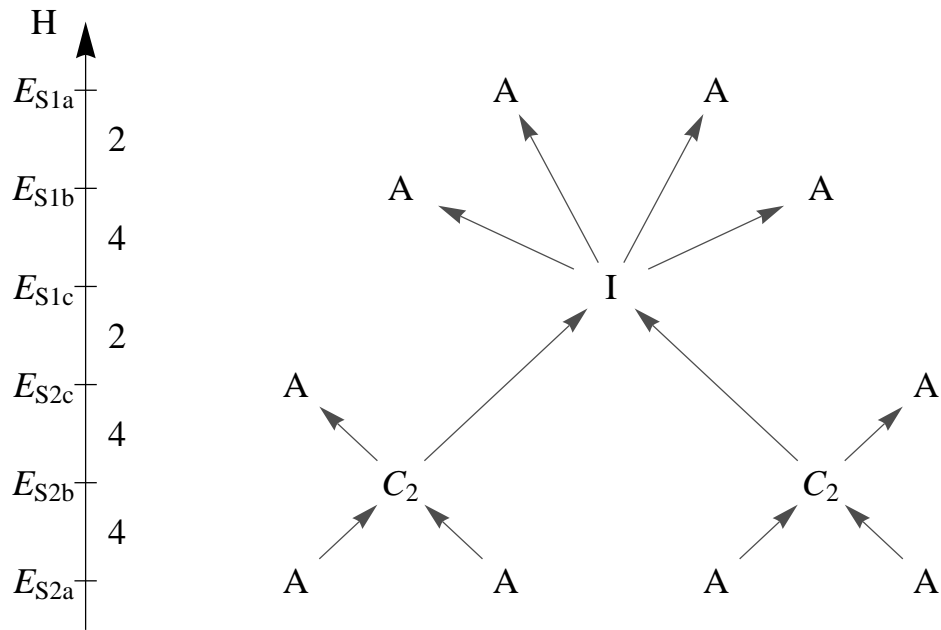


Рис. 2.11: Случай I.2.a.ii. Слева: бифуркационная диаграмма и числа окружностей с данным значением гамильтониана. Справа: молекула W_5 , соответствующая слоению Лиувилля.

2.5 Ультрагиперболическое уравнение Йона на гамильтониан редуцированной системы

Тот факт, что гамильтониан редуцированной системы получается с помощью лучевого преобразования по формуле (1.22), приводит к следующему важному свойству.

Теорема 11. *Гамильтониан редуцированной системы для трехмерной деформированной сферы удовлетворяет следующему ультрагиперболическому уравнению Йона:*

$$\frac{\partial^2 H}{\partial l_{12} \partial l_{34}} - \frac{\partial^2 H}{\partial l_{13} \partial l_{24}} + \frac{\partial^2 H}{\partial l_{14} \partial l_{23}} = 0. \quad (2.11)$$

Действительно, как доказывается в интегральной геометрии, это в точности то условие, которое задает образ лучевого преобразования среди функций на грассманиане $G(2, 4)$, выраженных в плюккеровых координатах, [14].

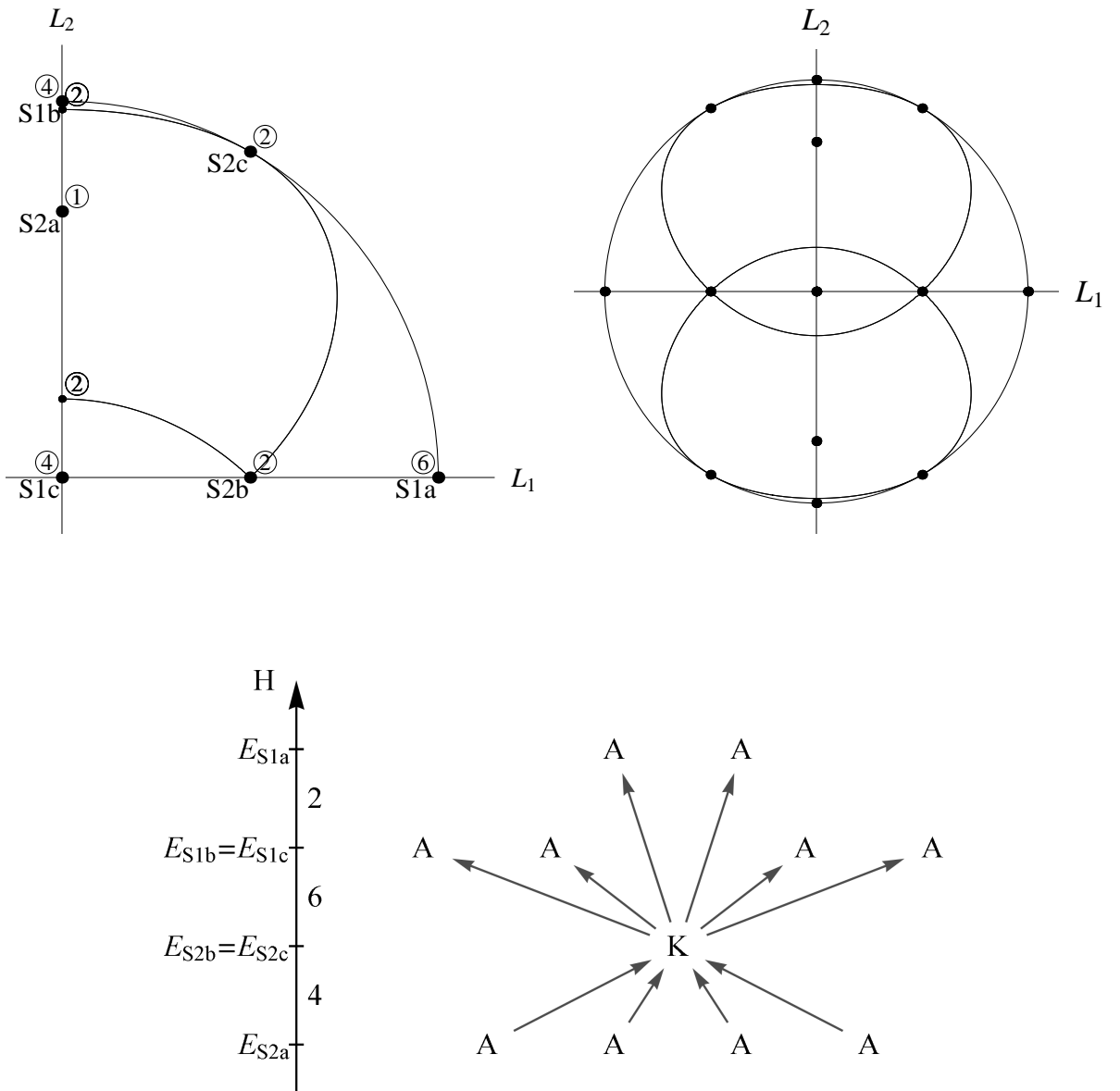


Рис. 2.12: Случай I.2.b. Вверху слева: часть графа сепаратрис слояния Лиувилля, расположенная в первом октанте. Вверху справа: граф сепаратрис слояния Лиувилля на сфере (показана полусфера $L_3 \geq 0$). Внизу слева: бифуркационная диаграмма и числа окружностей с данным значением гамильтониана. Внизу справа: молекула W_6 , соответствующая слоению Лиувилля.

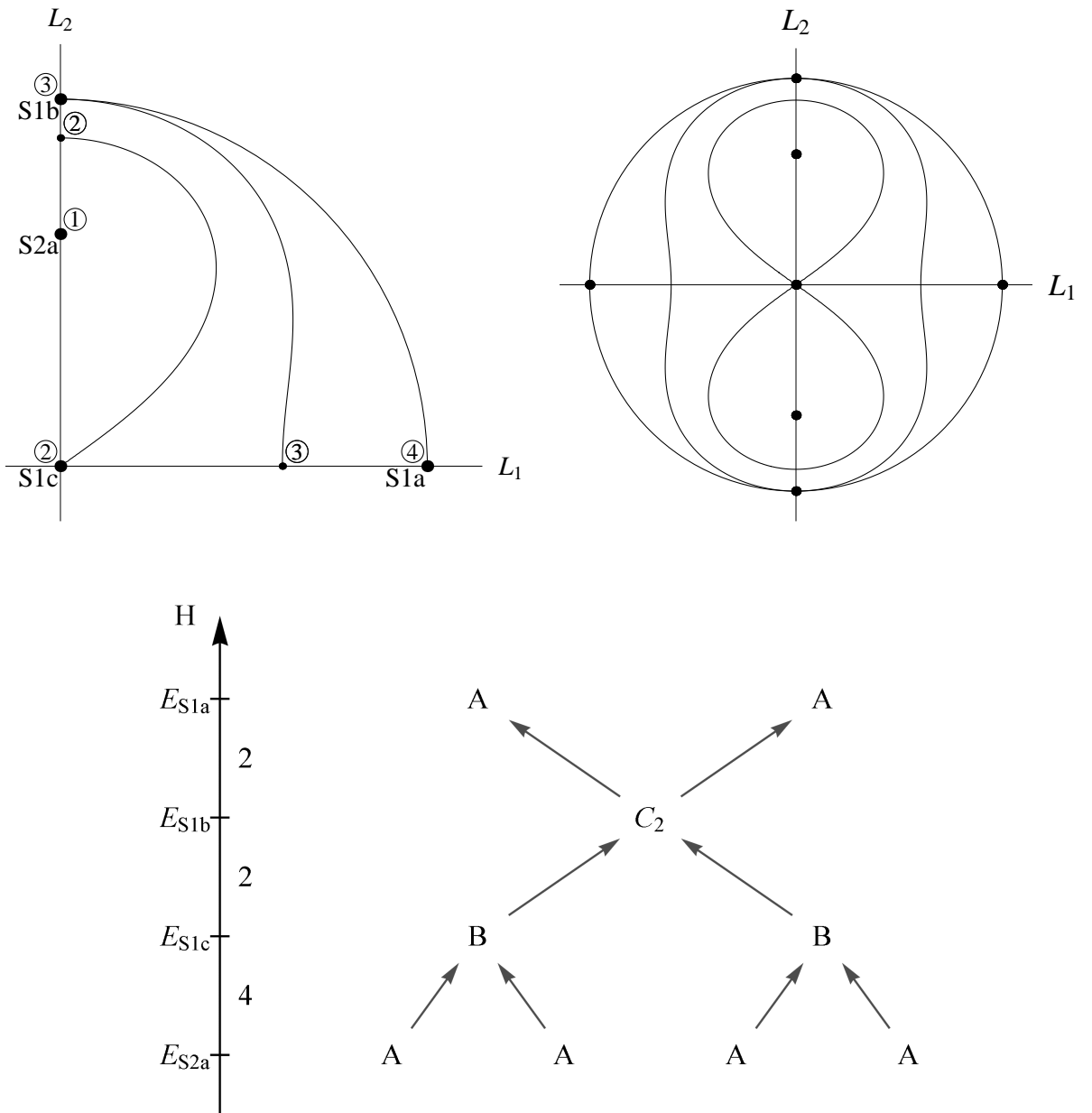


Рис. 2.13: Случай II.1. Вверху слева: часть графа сепаратрис слоения Лиувилля, расположенная в первом октанте. Вверху справа: граф сепаратрис слоения Лиувилля на сфере (показана полусфера $L_3 \geq 0$). Внизу слева: бифуркационная диаграмма и числа окружностей с данным значением гамильтониана. Внизу справа: молекула W_7 , соответствующая слоению Лиувилля.

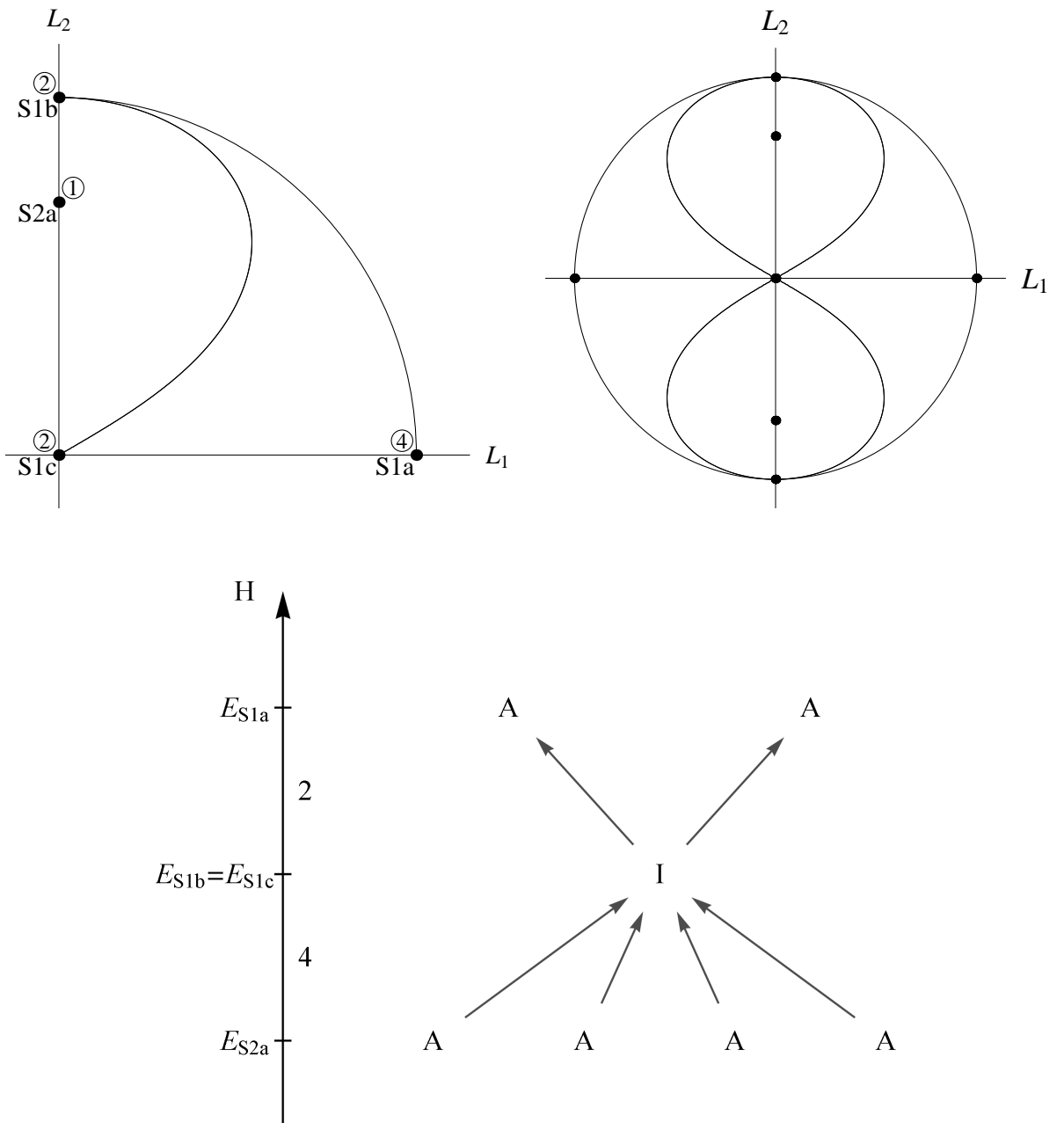


Рис. 2.14: Случай II.2. Вверху слева: часть графа сепаратрис слоения Лиувилля, расположенная в первом октанте. Вверху справа: граф сепаратрис слоения Лиувилля на сфере (показана полусфера $L_3 \geq 0$). Внизу слева: бифуркационная диаграмма и числа окружностей с данным значением гамильтониана. Внизу справа: молекула W_8 , соответствующая слоению Лиувилля.

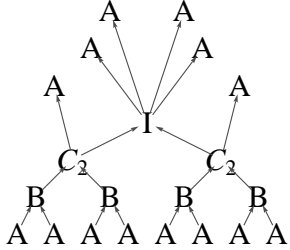
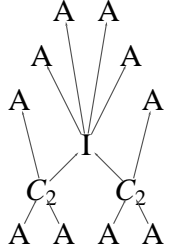
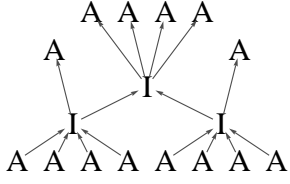
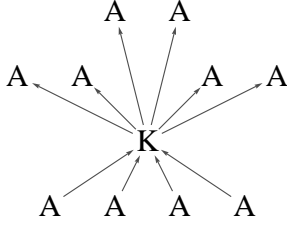
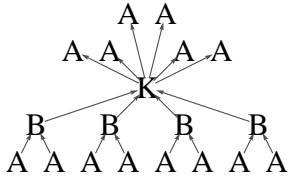
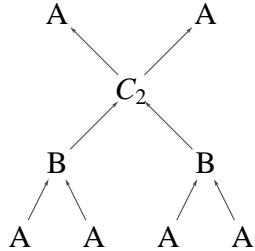
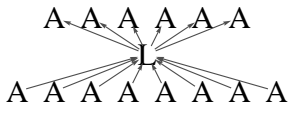
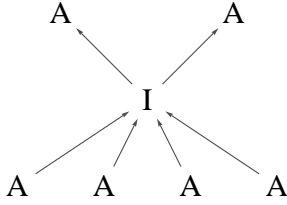
<p>Молекула W_1</p> <p>ε_i одного знака, различны, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$ $\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$ $-\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$</p>		<p>Молекула W_5</p> <p>ε_i одного знака, различны, неверно одно из условий: $\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$ $\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$ $-\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$</p>	
<p>Молекула W_2</p> <p>ε_i одного знака, меньшие 2 по модулю из ε_i совпадают, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$ $\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$ $-\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$</p>		<p>Молекула W_6</p> <p>ε_i одного знака, два из них совпадают, неверно одно из условий: $\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$ $\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$ $-\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$</p>	
<p>Молекула W_3</p> <p>ε_i одного знака, большие 2 по модулю из ε_i совпадают, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$ $\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$ $-\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 > 0$</p>		<p>Молекула W_7</p> <p>два из ε_i одного знака и различны, оставшееся другого знака</p>	
<p>Молекула W_4</p> <p>все ε_i совпадают</p>		<p>Молекула W_8</p> <p>два из ε_i совпадают, оставшееся другого знака</p>	

Рис. 2.15: Молекулы $W_1 - W_8$ и соответствующие условия на параметры ε_i

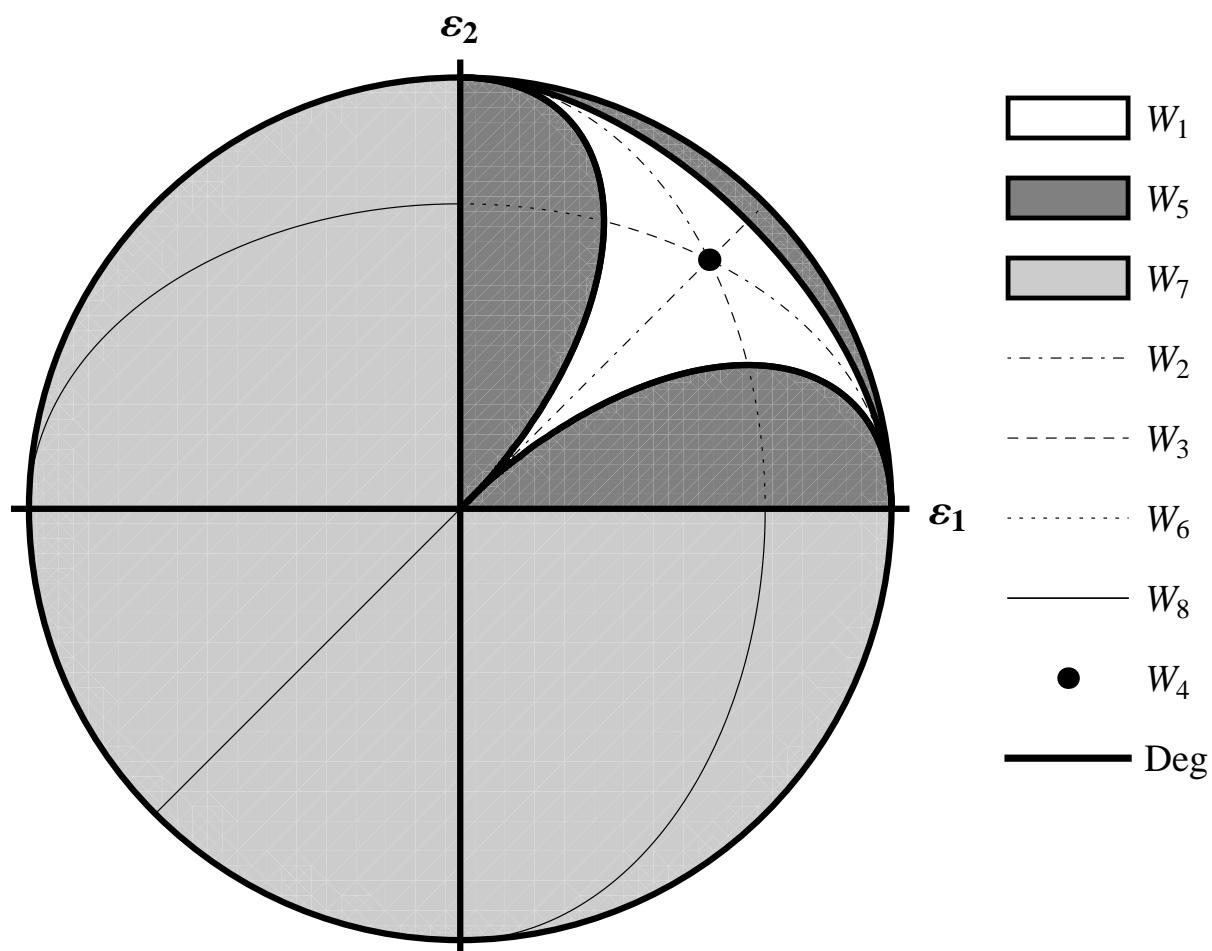


Рис. 2.16: Области в пространстве параметров ε_i , соответствующие молекулам $W_1 - W_8$ (показана полусфера $\varepsilon_3 \geq 0$ в проекции на плоскость $\varepsilon_1, \varepsilon_2$). Линии, разделяющие области молекул W_1 и W_5 , задаются уравнениями (2.9). Тонкие линии, отвечающие молекулам W_2, W_3, W_6, W_8 , задаются равенством пар параметров ε_i . Толстые линии, помеченные Deg , соответствуют гамильтонианам с вырожденными критическими точками (не функции Морса).

2.6 Деформации трехмерной сферы с осевой симметрией (поверхности вращения)

Поскольку для трехмерной деформированной сферы редуцированная система имеет две степени свободы, то для ее интегрируемости требуется один дополнительный первый интеграл, помимо гамильтониана. Рассмотрим случай осевой симметрии, когда функция деформации имеет вид:

$$\psi(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3^2 + x_4^2). \quad (2.12)$$

Соответствующая деформированная сфера является поверхностью вращения: повороты в плоскости x_3x_4 переводят ее в себя. Из этой симметрии следует точное сохранение компоненты углового момента l_{34} при движении частицы по любой геодезической. Действительно, ее производная для деформации вида (2.12) равна

$$\dot{l}_{34} = -\varepsilon m_{34} \psi(\vec{x}) \equiv 0.$$

Это же свойство переносится и на редуцированную систему, поскольку правая часть усредненного уравнения (1.12) для l_{34} есть усреднение от величины $m_{34}\psi(\vec{x})$, которая в случае осесимметричной функции ψ вида (2.12) тождественно равна нулю. Тем самым получаем следующее утверждение.

Теорема 12. *Редуцированная система для трехмерной сферы с осесимметричной деформацией (2.12) является интегрируемой системой с двумя степенями свободы с дополнительным интегралом l_{34} .*

По теореме Лиувилля получаем, что динамика редуцированной системы состоит в условно-периодическом движении по двумерным торам, являющимся совместными поверхностями уровня интегралов движения, т.е. задаваемым уравнениями: $C = 0$, $l^2 = 1$, $H = c_1$, $l_{34} = c_2$ для различных c_1, c_2 .

Рассмотрим пример деформации, аналогичный исследованному двумер-

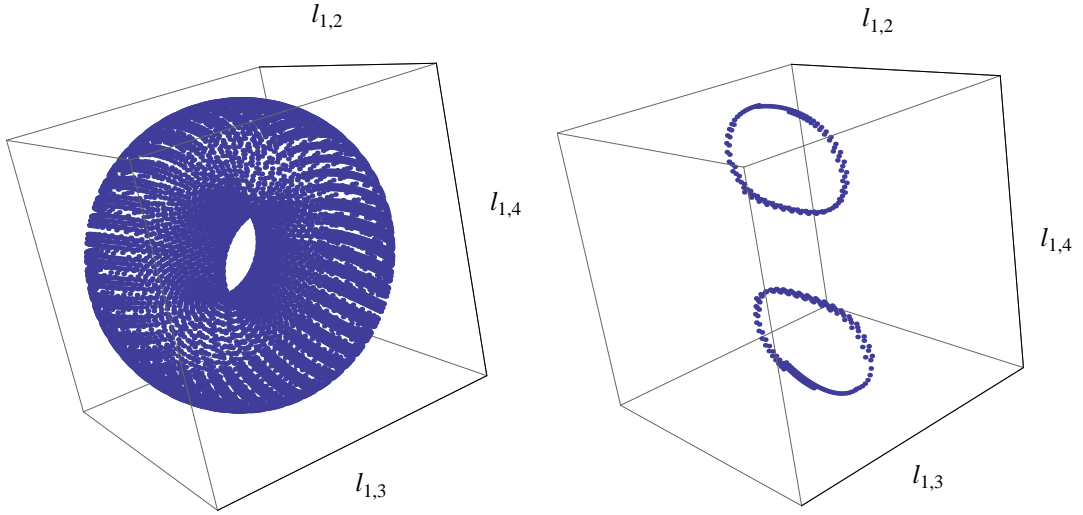


Рис. 2.17: Траектория редуцированной системы для трехмерной сферы с деформацией вида: $\psi(\vec{x}) = \varepsilon_1 x_1^4 + \varepsilon_2 x_2^4$ (слева) и сечение этой траектории плоскостью (справа). Поверхность инвариантна относительно вращений в плоскости x_3x_4 , следовательно, имеется дополнительный интеграл l_{34} и редуцированная система интегрируема. В соответствии с теоремой Лиувилля траектория заматает двумерный тор.

ному случаю, в виде суммы четвертых степеней координат:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &\equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1 + \varepsilon \psi(\vec{x}) = 0, \quad \varepsilon \ll 1, \\ \psi(\vec{x}) &= \varepsilon_1 x_1^4 + \varepsilon_2 x_2^4 + \varepsilon_3 x_3^4 + \varepsilon_4 x_4^4. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Условие осевой симметрии выделяет класс поверхностей, для которых $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$. Гамильтониан редуцированной системы, рассчитанный по общей схеме (1.21), (1.22), для рассматриваемого возмущения четвертыми степенями (2.13) имеет вид:

$$\begin{aligned} H &= \frac{3}{8} \varepsilon \left[\varepsilon_1 (l_{12}^2 + l_{13}^2 + l_{14}^2)^2 + \varepsilon_2 (l_{12}^2 + l_{23}^2 + l_{24}^2)^2 \right] + \\ &+ \frac{3}{8} \varepsilon \left[\varepsilon_3 (l_{13}^2 + l_{23}^2 + l_{34}^2)^2 + \varepsilon_4 (l_{14}^2 + l_{24}^2 + l_{34}^2)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

На рис. 2.17 изображена одна из траекторий редуцированной системы в случае осевой симметрии. Она заматает двумерный тор, задаваемый условиями $C = 0$, $l^2 = 1$, $H = c_1$, $l_{34} = c_2$.

В общем случае деформации четвертыми степенями (2.13), когда все коэффициенты ε_i отличны от нуля, моделирование редуцированной систе-

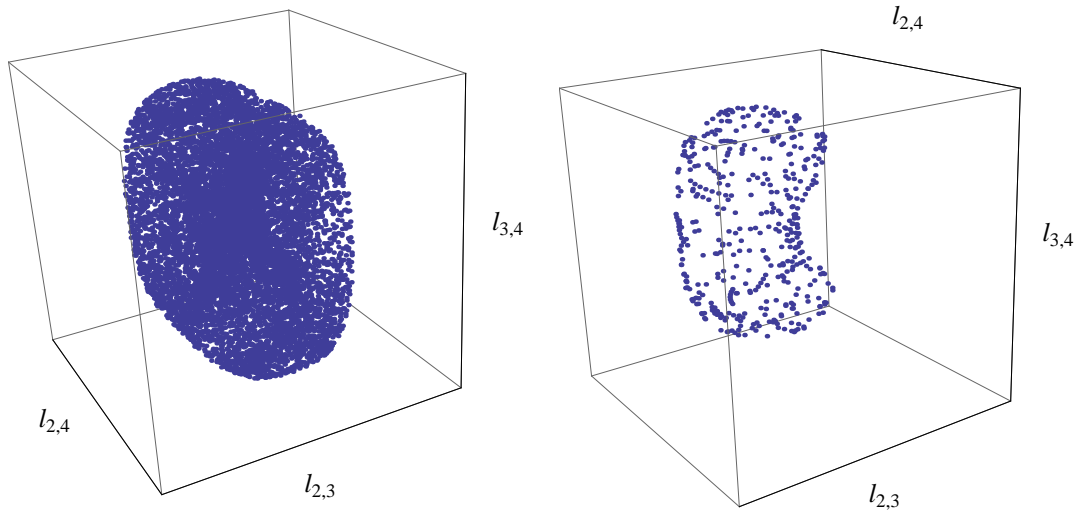


Рис. 2.18: Траектория редуцированной системы для трехмерной сферы с деформацией вида: $\psi(\vec{x}) = \varepsilon_1 x_1^4 + \varepsilon_2 x_2^4 + \varepsilon_3 x_3^4 + \varepsilon_4 x_4^4$ (слева) и сечение этой траектории плоскостью (справа). Траектория замечает область в трехмерном изоэнергетическом многообразии.

мы показывает, что имеются условия, когда траектория замечает область в трехмерном многообразии, задаваемом постоянством энергии, рис. 2.18.

2.7 Многомерные эллипсоиды, близкие к сфере, и случай Шоттки-Манакова в уравнениях Эйлера на алгебре Ли $so(n)$

Рассмотрим случай $(n - 1)$ -мерного эллипсоида, близкого к сфере, что соответствует квадратичной функции деформации $\psi(\vec{x})$:

$$\varphi \equiv x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1 + \varepsilon (\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2) = 0. \quad (2.15)$$

В этом случае оказывается, что редукция приводит к известной системе Шоттки-Манакова:

Теорема 13. *Редуцированная система для $(n - 1)$ -мерного эллипсоида (2.15) имеет гамильтониан*

$$H = \frac{1}{2} \varepsilon \sum_{i < j} (\alpha_i + \alpha_j) l_{ij}^2 \quad (2.16)$$

и является частным случаем многомерного интегрируемого случая

Шоттки-Манакова в уравнениях Эйлера на алгебре Ли $so(n)$ [41], [42]:

$$H = \sum_{i < j} \frac{a_i - a_j}{b_i - b_j} l_{ij}^2 \quad (2.17)$$

при $a_i = \varepsilon \alpha_i^2$, $b_i = 2\alpha_i$.

Тем самым устанавливается изоморфизм системы первого приближения для задачи о геодезических на $(n - 1)$ -мерном эллипсоиде, близком к сфере, с системой Шоттки-Манакова на алгебре $so(n)$.

Здесь представляет интерес следующее замечание. Выше упоминался результат В.В. Козлова, А.В. Борисова, И.С. Мамаева, А.М. Переломова об эквивалентности задачи о геодезических на $(n - 1)$ -мерном эллипсоиде случаю Клебша-Переломова для уравнений Кирхгофа на алгебре Ли $e(n)$. С другой стороны, имеется результат А.И. Бобенко [43] и А.В. Болсинова [44] об эквивалентности случая Клебша-Переломова на $e(n)$ случаю Шоттки-Манакова на $so(n + 1)$ (см. также [30]). Из комбинации этих двух фактов следует, что задача о геодезических на $(n - 1)$ -мерном эллипсоиде эквивалентна случаю Шоттки-Манакова на $so(n + 1)$. В нашей же конструкции мы получаем *асимптотическую* связь задачи о геодезических на $(n - 1)$ -мерном эллипсоиде, близком к сфере, с системой Шоттки-Манакова *меньшей размерности* – на алгебре $so(n)$.

Глава 3

Редукция уравнений динамики двухспиновой системы в магнитном поле

В данной главе рассматривается задача гамильтоновой механики, возникающая при описании динамики спиновых систем в магнетиках. Аналогично предыдущим задачам в этой системе, используя ее структуру, а именно симметрию, мы производим редукцию этой задачи к системе меньшей размерности, которая допускает исследование более простыми средствами.

3.1 Гамильтониан и уравнения динамики двухспиновой системы

Динамика намагниченности макроскопических систем, как правило, описывается с помощью классических спиновых переменных. В частности, такого рода системы применяются для изучения динамики намагниченности в ферромагнетиках, а также намагниченности подрешеток кристаллов антиферромагнетиков, [53], [54]. В этих задачах достаточно подробно изучены линейные приближения вблизи положений равновесия, на основе которых строится теория спиновых волн в соответствующих средах, [54]. В то же время вдали от равновесия эти системы могут проявлять весьма содержательную нелинейную динамику, изучение которой представляет интерес при исследовании влияния внешнего воздействия на намагниченность этих систем, в том числе магнитного резонанса.

Мы рассматриваем динамику гамильтоновой системы, состоящей из двух

классических спинов — трехмерных векторов \vec{S}^I и \vec{S}^{II} . Динамика задается скобками Пуассона

$$\{S_i^I, S_j^I\} = \varepsilon_{ijk} S_k^I, \quad \{S_i^{II}, S_j^{II}\} = \varepsilon_{ijk} S_k^{II}, \quad \{S_i^I, S_j^{II}\} = 0$$

(здесь индексы принимают значения 1, 2, 3, ε_{ijk} — символ Леви-Чивиты, подразумевается суммирование по повторяющимся индексам) и гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \gamma_1 \vec{H} \cdot \vec{S}^I + \gamma_2 \vec{H} \cdot \vec{S}^{II} + J \vec{S}^I \cdot \vec{S}^{II}, \quad (3.1)$$

где γ_1, γ_2 — гиромагнитные отношения, \vec{H} — постоянное магнитное поле, J — параметр величины взаимодействия. Первые два члена представляют собой зеемановскую энергию спина в магнитном поле. Третье слагаемое соответствует так называемому обменному взаимодействию. Соответствующие уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{S}}^I &= \gamma_1 \vec{H} \times \vec{S}^I + J \vec{S}^{II} \times \vec{S}^I, \\ \dot{\vec{S}}^{II} &= \gamma_2 \vec{H} \times \vec{S}^{II} + J \vec{S}^I \times \vec{S}^{II}. \end{aligned}$$

В системе имеется две функции Казимира $(\vec{S}^I)^2$ и $(\vec{S}^{II})^2$, скобки Пуассона которых со всеми переменными равны нулю. Каждая из них является интегралом движения. Кроме того, легко убедиться, что функция

$$K = \vec{H} \cdot (\vec{S}^I + \vec{S}^{II}) \quad (3.2)$$

также является первым интегралом системы. Это можно заключить, учитывая симметрию задачи: имеется одно выделенное направление, заданное вектором \vec{H} ; поэтому система инвариантна относительно вращений вокруг этого направления. Отсюда следует сохранение соответствующей компоненты полного спина, то есть его проекции на направление поля. Вместе с гамильтонианом эта функция дает пару интегралов в инволюции, поэтому данная система является интегрируемой.

3.2 Редукция системы по циклической переменной

Воспользуемся наличием интеграла (3.2) для сведения данной задачи к более простой системе. Стандартная процедура редукции в гамильтоновых системах (понижение порядка по Раусу) предполагает, что задача должна быть сформулирована в канонических переменных (координаты и импульсы), и одна из координат не должна входить в гамильтониан. В этих условиях соответствующий ей импульс является интегралом движения, и можно рассмотреть динамику системы при фиксированном его значении. Тем самым мы приходим к системе, в которой меньше на одну координату и один импульс, чем в исходной задаче. Для реализации этой схемы введем в нашей задаче канонические переменные. Таковыми будут цилиндрические координаты x_i, p_i в пространстве каждого спина:

$$\begin{aligned} S_1^I &= \sqrt{(S^I)^2 - p_1^2} \cos x_1, & S_2^I &= \sqrt{(S^I)^2 - p_1^2} \sin x_1, & S_3^I &= p_1, \\ S_1^{II} &= \sqrt{(S^{II})^2 - p_2^2} \cos x_2, & S_2^{II} &= \sqrt{(S^{II})^2 - p_2^2} \sin x_2, & S_3^{II} &= p_2. \end{aligned}$$

В этих переменных гамильтониан (3.1) записывается в виде:

$$\mathcal{H} = \gamma_1 H p_1 + \gamma_2 H p_2 + J \sqrt{(S^I)^2 - (p_1)^2} \sqrt{(S^{II})^2 - (p_2)^2} \cos(x_2 - x_1) + J p_1 p_2$$

(здесь S^I и S^{II} играют роль параметров). В соответствии с обсуждавшейся выше симметрией задачи относительно вращений вокруг поля \vec{H} (вокруг третьей оси) углы x_1 и x_2 вошли в гамильтониан в виде разности $x_2 - x_1$. Осуществим каноническую замену:

$$\begin{aligned} u &= x_2 - x_1, & v &= x_2 + x_1, \\ p_u &= \frac{1}{2}(p_2 - p_1), & p_v &= \frac{1}{2}(p_2 + p_1), \end{aligned} \tag{3.3}$$

Теорема 14. *В канонических переменных (3.3) гамильтониан (3.1) запи-*

сывается в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \gamma_1 H(p_v - p_u) + \gamma_2 H(p_v + p_u) + \\ & + J \sqrt{(S^I)^2 - (p_v - p_u)^2} \sqrt{(S^{II})^2 - (p_v + p_u)^2} \cos u + J(p_v - p_u)(p_v + p_u). \end{aligned} \quad (3.4)$$

В нем переменная v является циклической, $p_v = \text{const}$. При фиксировании значения p_v гамильтониан (3.4) задает систему с одной степенью свободы в фазовых переменных u, p_u .

Ввиду малой размерности, полученная система значительно проще исходной, поэтому осуществленная редукция позволяет существенно упростить исследование траекторий движения в рассматриваемой задаче. В частности, система (3.4) допускает исследование методом построения фазового портрета. Типичный результат показан на рис. 3.1. Значения $u = -\pi$ и π отождествляются, так как изменение $u = \varphi_2 - \varphi_1$ на 2π соответствует аналогичному изменению одного из углов, каждый из которых определен по модулю 2π . На рисунке видны стационарные точки (центры) со значениями $u = 0, \pi$.

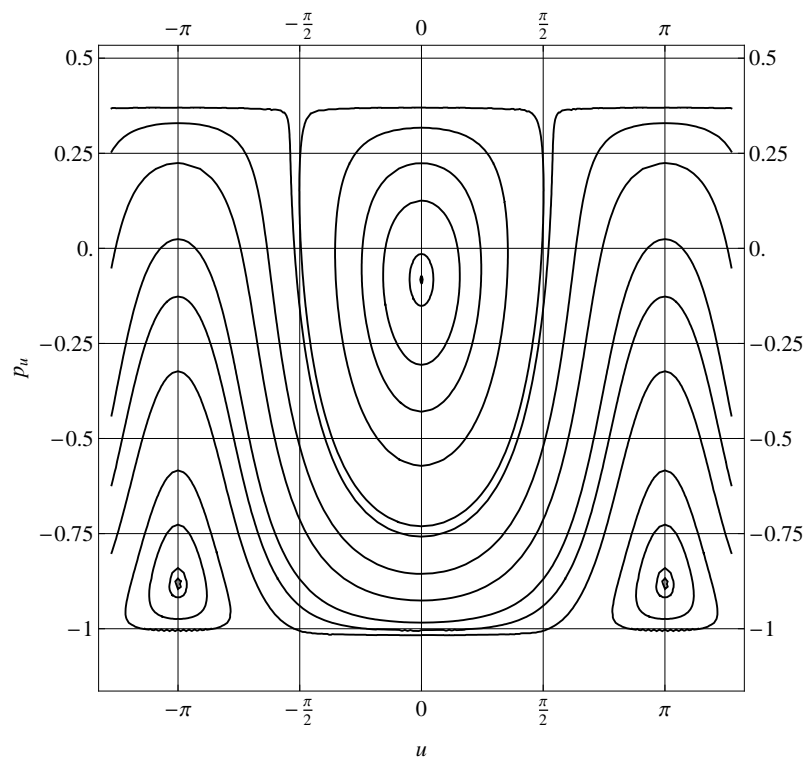


Рис. 3.1: Фазовый портрет редуцированной системы.

Литература

- [1] Фоменко А.Т., Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем, Доклады АН СССР, 1986, т.287, No.5, с.1071-1075.
- [2] Фоменко А.Т., Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости, Известия АН СССР. Серия матем. 1986, т.50, No.6, с.1276-1307.
- [3] Фоменко А.Т., Цишанг Х., О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике, Доклады АН СССР, 1987, т.294, No.2, с.283-287.
- [4] Фоменко А.Т., Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю, Функц. анализ и его приложения. 1988, т.22, вып.4, с.38-51.
- [5] Фоменко А.Т., Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем, Успехи математических наук, 1989, т.44, вып.1 (265), с.145-173.
- [6] Фоменко А.Т., Цишанг Х., Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, Известия АН СССР. 1990, т.54, No.3, с.546-575.
- [7] Фоменко А.Т., Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях, Функц. анализ и его приложения. 1991, т.25, вып.4, с.23-35.

- [8] А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация, тт. 1, 2. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999, 444 с. и 448 с.
- [9] А.В.Болсинов, А.Т.Фоменко, Геодезический поток эллипсоида траекторно эквивалентен интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела, Доклады РАН, 1994, т.339, No.3, с.293-296.
- [10] А.В.Болсинов, А.Т.Фоменко, Геометрия и топология интегрируемых геодезических потоков на поверхностях (Монография), Москва, УРСС, 1999. В серии «Библиотека R&C Dynamics. Регулярная и хаотическая динамика», т. 2.
- [11] D. J. Struik, Lectures on Classical Differential Geometry, Addison-Wesley, Cambridge Mass., 1950.
- [12] B. Dubrovin, S. Novikov, A. Fomenko, Modern Geometry. Methods and Applications. Springer-Verlag, Part 1, 1984; Part 2, 1985; Part 3, 1990.
- [13] F. Klein, Vorlesungen über höhere Geometrie, Berlin, Springer (1926).
- [14] Гельфанд И.М., Гиндикин С.Г., Граев М.И., Избранные задачи интегральной геометрии, Добросвет, М. 2000.
- [15] S. Helgason, The Radon Transform, Second edition, Birkhauser Boston, 1999.
- [16] P. Griffiths, J. Harris, Principles of algebraic geometry, Wiley Classics Library, New York: John Wiley & Sons (1994).
- [17] C.G.J. Jacoby, Vorlesungen über Dynamik, Reiner, Berlin (1884).
- [18] H. Poincaré, Les methodes nouvelles de la mécanique céleste, Gauthier-Villars, Paris (1899).
- [19] E.T. Whittaker, A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, Ch. XIII, Cambridge University Press, Cambridge (1917).

- [20] В.И. Арнольд, В.В. Козлов, А.И. Нейштадт, Математические аспекты классической и небесной механики, изд. 2, УРСС, М., 2009.
- [21] В.И. Арнольд, Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике, УМН, 1963, т. 18, вып. 6 (114), стр. 91–192.
- [22] В. Клингенберг, Лекции о замкнутых геодезических, М.: Мир, 1982.
- [23] А. Бессе, Многообразия с замкнутыми геодезическими, М.: Мир, 1981.
- [24] Д.В. Аносов, Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, Тр. МИАН СССР, 90, ред. И. Г. Петровский, 1967.
- [25] H. Poincaré, Sur les lignes geodesique des surfaces convexes, Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), 237-274.
- [26] Колокольцов В.Н., Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом, Известия АН СССР. Сер. матем. 1982, т. 46, № 5, с. 994-1010.
- [27] А.В. Болсинов, В.В. Козлов, А.Т. Фоменко, Принцип Мопертюи и геодезические потоки на сфере, возникающие из интегрируемых случаев динамики твердого тела, УМН, 1995, 50:3(303), 3–32.
- [28] V.V. Kozlov, Two integrable problems of classical mechanics, Vestnik MGU, Ser. math. mech., 1981, N4, P. 80-83.
- [29] A.V. Borisov, I.S. Mamaev, Nonlinear Poisson brackets and isomorphisms in dynamics, Reg. Chaot. Dynam., V 2, N 3/4, 1997, P. 72-89.
- [30] Борисов А.В., Мамаев И.С., Современные методы теории интегрируемых систем, Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [31] A.M. Perelomov, A note on geodesics on ellipsoid, Reg. Chaot. Dynam., V 5, N 1, 2000, P. 89-94.

- [32] G. Knieper, H. Weiss, C^∞ Genericity of Positive Topological Entropy for Geodesic Flows on S^2 .
- [33] V. Donnay, Geodesic flow on the two-sphere, Part I: positive measure entropy, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 8 (1989) 531–553.
- [34] В. В. Козлов, Топология вещественных алгебраических кривых и интегрируемость геодезических потоков на алгебраических поверхностях, *Функц. анализ и его прил.*, 2008, т. 42, вып. 2, стр. 23–27.
- [35] V.V. Kozlov, Several problems on dynamical systems and mechanics, *Nonlinearity*, 21, (2008), T149–T155.
- [36] Б. Риман, О движении жидкого однородного эллипсоида, в кн.: *Сочинения*, ОГИЗ, М., Л., 1948, 339–366.
- [37] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, А. А. Килин, Гамильтонова динамика жидких и газовых самогравитирующих эллипсоидов, *Нелинейная динам.*, 2008, т. 4, № 4, стр. 363–407.
- [38] K. Pohlmeier, *Comm.Math.Phys.* **46**, 207 (1976).
- [39] J.A. Leggett, *Rev. Mod. Phys.* 47,331 (1975).
- [40] V.L. Golo, *Lett. Math, Phys.* **5**, 155 (1981).
- [41] F. Schottky, Über das analytische Problem der Rotation eines starren Körpers in Raume von vier Dimensionen, *Sitzungsber. Konig. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 1891, Bd. XIII, S. 227-232.
- [42] С.В. Манаков, Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела, *Функц. анализ и его прил.*, 1976, т. 10, вып. 4, стр. 93–94.
- [43] A.I. Bobenko, Euler equations on the algebras $e(3)$ and $so(4)$. Isomorphism of the integrable cases, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 20 (1986), 64–66.

- [44] A.V. Bolsinov, Compatible Poisson brackets on Lie algebras and the completeness of families of functions in involution, *Math. USSR-Izv.*, 38:1 (1992), 69-90.
- [45] Г. Минковский, О телах постоянной ширины, *Матем. сб.*, 1905, т. 25, № 3, стр. 505–508.
- [46] P.G. Funk, Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien, *Mathematische Annalen*, Band 74, 1913, p. 278-300.
- [47] J. Radon, Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Berichte über die Verhandlungen der Sächsische Akademie der Wissenschaften*, (69): 262–277, 1917.
- [48] F. John, The ultrahyperbolic differential equation with four independent variables, *Duke Mathematical Journal* 4 (2): 300–322 (1938).
- [49] И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии, I, *Труды Моск. матем. об-ва* 8 (1959), 321–390.
- [50] И.М. Гельфанд, Интегральная геометрия и ее связь с теорией представлений, *УМН*, 1960, т. 15, вып. 2(92), стр. 155–164.
- [51] Н.Я. Виленкин, И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений / *Обобщенные функции*.— Вып. 5.— М.: Физматгиз, 1962.
- [52] E. V. Vinberg, Equivariant symplectic geometry of cotangent bundles, *Mosc. Math. J.*, 2001, V 1, N 2, pp. 287-299.
- [53] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Статистическая физика, часть 2*, Физматлит, Москва (2002).
- [54] Е.С. Боровик, В.В. Еременко, А.С. Мильнер, *Лекции по магнетизму*, Физматлит, Москва (2005).

- [55] Д.О. Сеницын, Асимптотическая гамильтонова редукция для геодезических на деформированных сферах и преобразование Функа–Минковского, Матем. заметки, т. 90, вып. 3, стр. 474–477 (2011).
- [56] V. Golo, D. Sinitsyn, Asymptotic Hamiltonian Reduction for the Dynamics of a Particle on a Surface, Physics of Particles and Nuclei Letters, Vol. 5, No. 3, pp. 278-281 (2008).
- [57] В.Л. Голо, Д.О. Сеницын, Гамильтонова двухспиновая система, Сборник научных трудов «Современные проблемы математики и механики», Т.1 «Геометрия и топология» под редакцией А.Т. Фоменко, М.: Изд-во Московского университета, 2008.
- [58] В.Л.Голо, Д.О.Сеницын, Визуализация геодезических на слабо деформированной сфере, Математика. Компьютер. Образование: Сборник научных трудов. Том 2 / Под ред. Г.Ю.Ризниченко. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2005, стр. 606.
- [59] Д.О. Сеницын, Асимптотическая гамильтонова редукция для геодезических на деформированных сферах в терминах интегральной геометрии, депонирована в ВИНТИ РАН, 17.10.2011, №453-В2011, 1-77.