МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 513.944

КРЫСТЫНА ШВАН

ИНВАРИАНТЫ И ПОЛНЫЕ ИНВОЛЮТИВНЫЕ СЕМЕЙСТВА ПОЛИНОМОВ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБР ЛИ

01.01.04 – геометрия и топология

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, профессор А.Т.ФОМЕНКО

Москва – 1988

Содержание

стр.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время большое значение приобрела задача построения полного инволютивного набора функций. Эта задача имеет четыре наиболее важные постановки:

а) задача построения полного инволютивного семейства функций для алгебр Ли;

б) задача построения полного инволютивного семейства функций на одной отдельно взятой орбите коприсоединенного представления;

в) задача построения полного инволютивного семейства функций на заданном симплектическом многообразии;

г) построение топологических препятствий к существованию полного инволютивного семейства на данном симплектическом многообразии. Соответствующие постановки задач см. в обзоре [52] . Идеи, на которых основаны конструкции полных инволютивных семейств функций для алгебр Ли были выдвинуты и интенсивно развивались в течение последних пятнадцати лет. Во-первых, необходимо отметить введенное В.И.Арнольдом [2] представление геодезических потоков на группах Ли в терминах уравнения Эйлера, общий факт гамильтоновости и связь уравнений Эйлера с редукцией гамильтоновых систем, в современном варианте принадлежащий Т.Марсдену и В. Вейнстейну [82] . Во-вторых, отметим способ получения интегралов в инволюции на орбитах путем сдвига инвариантов алгебры Ли на ковектор общего положения. Этот прием впервые был использован С.В.Манаковым [26] для получения коммутирующих интегралов уравнения Эйлера n -мерного твердого тела, а в более общем случае предложен А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко [31] , [32] . В работе С.В. Манакова [26] уравнение Эйлера рассматривается как частный случай матричных аналогов стационарных уравнений Кортевега-де Фриза (уравнения Новикова, см. [19]). Рассмотрим известные в настоящее время семейства инволютивных функций для алгебр Ли. В работах А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко [31] , [32] , [36] построено полное инволютивное семейство функций для произвольной полупростой комплексной и вещественной полупростой алгебры. Были построены многочлены на алгебре Ли, образующие полное инволютивное семейство функций на орбитах общего положения. Дао Чонг Тхи [17] построил полное инволютивное семейство функции на полупростых сингулярных орбитах в полупростой алгебре Ли. Лакуны имевшихся в доказательстве Дао Чонг Тхи были окончательно устроены А.В.Браиловым [9] . Полными инволютивными семействами функций на полупрямых суммах алгебр Ли занимались многие авторы. Например, алгеброй Ли $E(n) = so(n) \oplus_{\rho} \mathbb{R}^n$, где ρ - представление минимальной размерности занимался В.В.Трофимов и А.Т.Фоменко [51] , [55] ; А.В. Брайлов и А.В.Болсинов изучали алгебру Ли $su(n) \oplus_{\rho} \mathbb{C}^n$ и алгебру $u(n) \oplus_{\rho} \mathbb{C}^n$, где ρ - представление минимальной размерности [10] , [11] , [7] , [8] ; Т.А.Певцова занималась такими алгебрами: $gl(2n) \oplus_{\mu} \mathbb{R}^N$, где $\mu = \Lambda^2 \rho$ - вторая внешняя степень представления ρ , $sl(2n) \oplus_{\mu} \mathbb{R}^N$, где $\mu = S^2 \rho$ - вторая симметрическая степень представления ρ , $sp(2n) \oplus_{\mu} \mathbb{R}^N$, где $\mu = \rho + \tau$, ρ - представление минимальной размерности во всех этих случаях, τ - одномерное тривиальное представление [39] , [40] . А.М.Переломов [41] и А.Г.Рейман [44] для алгебры $G = so(n) \oplus_{\rho} \mathbb{R}^n$, где ρ - представление минимальной размерности, построили полиномиальный набор функции в инволюции, которые являются интегралами n - мерного случая Клебша. Теорема, которая обобщает многие из перечисленных выше результатов, была получена А.В.Болсиновым; он рассмотрел абелевы расширения простых алгебр Ли по любому точному неприводимому представлению.

Такие расширения обладают полным коммутативным набором полиномов. Им же был получен эффективный критерий полноты семейства сдвигов инвариантов [7]. Полное инволютивное семейство функций на борелевских подалгебрах BG в простых алгебрах Ли построено в работах В.В.Трофимова [57], [58], [59], частный случай верхнетреугольных матриц рассмотрел А.А.Архангельский [4]. Разрешимой алгеброй верхнеугольных нильпотентных матриц занимался Ле Нгок Тьеуен [24]. В.В.Трофимов в работе [62] изучал серию алгебр Ли $\Omega_{m_1 \dots m_n}(G)$, получающихся "размножением" алгебр Ли G, уже обладающих на орбитах максимальными линейными коммутативными алгебрами полиномов, алгебры $\Omega_{m_1 \dots m_n}(G)$ также обладают полными коммутативными наборами полиномов. Далее алгоритм В.В.Трофимова был развит А.В.Браиловым [12]. Операция "размножения" сводится к тензорному умножению исходной алгебры Ли на коммутативную алгебру. Эти идеи были дополнены теоремой Ле Нгок Тьеуена [25] о тензорном умножении на алгебру Фробениуса. Полиномы, являющиеся интегралами аналога случая Лагранжа в n - мерном случае, получил А.В.Беляев [5] для алгебры $G = so(n) \oplus_{\rho} \mathbb{R}^n$, где ρ -представление минимальной размерности. Полные инволютивные семейства функций на одной отдельной орбите строились в работах А.Г.Реймана, М.А.Семенова-Тян-Шанского [44], [38]. Полное инволютивное семейство функций построено для большего класса алгебр Ли: нильпотентные вещественные алгебры Ли изучались в работе М.Верны [88].

Теперь перейдем к краткому изложению содержания диссертации. Начнем с постановки задачи. Пусть $\mathcal{G} = SL(2,\mathbb{R}) \propto_{\Phi_n} \mathbb{R}^{n+1}$ - группа Ли, $G = sl(2,\mathbb{R}) \oplus_{\varphi_n} \mathbb{R}^{n+1}$ отвечающая ей алгебра Ли, которая является полупрямой суммой алгебры Ли $sl(2,\mathbb{R})$ и пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ представления φ_n. Причем $\mathbb{R}^{n+1}$ рассматривается как коммутативная алгебра Ли. Представление $\varphi_n : sl(2,\mathbb{R}) \longrightarrow$

$\longrightarrow End(\mathbb{R}^{n+1})$ задано числовыми отметками $\overset{n}{o}$ на диаграмме простых корней алгебры Ли $sl(2,\mathbb{R})$. Пусть $C^{\infty}(G^*)$ - пространство гладких функций на G^* – пространстве дуальном к алгебре Ли G, и $Ad^*: \mathcal{G} \longrightarrow GL(G^*)$ – коприсоединенное представление группы Ли $\mathcal{G}$. Возникает первый вопрос о построении в явном виде инвариантов коприсоединенного представления группы Ли $\mathcal{G} = SL(2,\mathbb{R}) \underset{\Phi_n}{\ltimes} \mathbb{R}^{n+1}$ [28], т.е. функции f, постоянных на орбитах коприсоединенного представления, т.е. $f(Ad^*_g x) = f(x)$. Пусть функция $F \in C^{\infty}(G^*)$ постоянна на орбитах коприсоединенного представления группы Ли $\mathcal{G}$, отвечающей алгебре Ли G. Тогда F - первый интеграл уравнения Эйлера $\dot{x} = ad^*_{dF(x)}(x)$. Поток $\dot{x} = ad^*_{dF(x)}(x)$ течет по орбитам представления Ad^* и является гамильтоновым на этих орбитах [2]. Перейдем теперь к построению вполне интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем $\dot{x} = sgrad\, F$. Система $\dot{x} = sgrad\, F$ является вполне интегрируемой [2], [20], если существует такой набор функций $f_1, \dots, f_s$, что а) $\{f_i, f_j\} = 0$, $1 \leqslant i,j \leqslant s$, б) $s = \frac{1}{2}(\dim G + \operatorname{ind} G)$, в) $f_1, \dots, f_s$ - функционально независимы (почти всюду) на G^*. Тем самым возникает второй вопрос о построении в явном виде таких полных инволютивных семейств функции. Мы строим этот набор методом сдвига аргумента. Пусть F – любой инвариант алгебры Ли $G = sl(2,\mathbb{R}) \underset{\varphi_n}{\oplus} \mathbb{R}^{n+1}$, рассмотрим функцию $F(x+\lambda a)$, где $a \in G^*$ фиксированный ковектор. Разложим функцию $F(x+\lambda a)$ по степеням переменной λ, получим разложение вида $F(x+\lambda a) = \sum_k P_k(x,a)\lambda^k$. Полученные при этом полиномы $P_k(x,a)$ образуют коммутативный набор функций (интегралов) [31], [32].

Пусть M^4 – четырехмерное гладкое симплектическое многообразие, на котором дана гамильтонова система $v = sgrad\, H$, где H – гладкий гамильтониан. Эту систему можно ограничить на инвариантную трехмерную поверхность Q^3 постоянной энергии, т.е.

$Q = \{x \in M^4, H(x) = const\}$. Будем рассматривать некритические поверхности Q^3 , т.е. такие, на которых $grad\, H \neq 0$. Пусть система $v = sgrad\, H$ интегрируема по Лиувиллю, т.е. существует дополнительный интеграл f , независимый с H и $\{H, f\} = 0$. Ограничивая его на Q^3 , получаем гладкую функцию на Q^3 . Следуя А.Т.Фоменко назовем гладкий интеграл боттовским на Q^3 , если критические точки функции f на Q^3 образуют невырожденные критические подмногообразия [69] , [70] , [71] . Многообразие Q^3 расслоено на торы Лиувилля - поверхности уровня $f = const = C$. При изменении C торы Лиувилля подвергаются перестройкам. Полная теория таких перестроек построена А.Т.Фоменко. Их конкретный вид описан в [71] . В случае алгебры Ли $G = sl(2,R) \oplus_{\varphi_n} R^{n+1}$ орбиты коприсоединенного представления имеют размерность 4 тогда и только тогда, когда $n = 1, 2$. Возникает задача описания топологической структуры поверхности постоянной энергии и исследования боттовости дополнительного интеграла на этой поверхности.

Диссертация состоит из введения, четырех глав и приложения. Во введении определена цель исследования. Приведен краткий обзор работ, имеющих непосредственное отношение к теме диссертации. Кратко сформулируем основные результаты.

Глава I. Целью первой главы является напомнить необходимые сведения из теории групп Ли, алгебр Ли и их представлений; основные определения и теоремы о гамильтоновых системах и фундаментальные понятия из теории Морса, связанные с содержанием работы.

Глава II. Во второй главе сформулированы основные результаты об инвариантах коприсоединенного представления группы Ли $G = SL(2,R) \otimes_{\Phi_n} R^{n+1}$ в виде четырех теорем с доказательством. В первой теореме дано полное описание инвариантов коприсоединенного представления группы Ли $G = SL(2,R) \otimes_{\Phi_n} R^{n+1}$

для $1 \leq n \leq 6$; кроме того, в таблице I приведена дополнительная информация о размерности $\dim G$, $\dim \mathcal{O}$ и о степенях $\deg F_i$, $i = 1, \ldots, \operatorname{ind} G$, инвариантов F_i представления $Ad^*_{\mathfrak{g}}$.

ТЕОРЕМА I. Следующие функции F_k , $k = 1, \ldots, \operatorname{ind} G$ дают полный набор функционально независимых инвариантов коприсоединенного представления группы Ли $G = SL(2,R) \underset{\Phi_n}{\ltimes} R^{n+1}$ при

$n=1$, $F = x_{-1} y_0^2 - x_0 y_0 y_1 - x_1 y_1^2$;

$n=2$, $F_1 = x_0 y_1 + 2 x_1 y_2 - 2 x_{-1} y_0$,

$F_2 = 4 y_0 y_2 - y_1^2$;

$n=3$, $F = 4 y_0 y_2^3 + 27 y_0^2 y_3^2 + 4 y_1^3 y_3 - y_1^2 y_2^2 - 18 y_0 y_1 y_2 y_3$;

$n=4$, $F_1 = 72 y_0 y_2 y_4 + 9 y_1 y_2 y_3 - 27 y_0 y_3^2 - 2 y_2^3 - 27 y_1^2 y_4$,

$F_2 = y_2^2 + 12 y_0 y_4 - 3 y_1 y_4$;

$n=5$ и $n=6$ функции даны в приложении.

Таблица I.

n	$\dim G$	$\operatorname{ind} G$	$\dim \mathcal{O}$	$\deg F_i$
I	5	I	4	3
2	6	2	4	2,2
3	7	I	6	4
4	8	2	6	2,3
5	9	3	6	4,8,I2
6	I0	4	6	2,4,6,I0

Во второй теореме описана серия инвариантов квадратичных инвариантов представления $Ad^*_{\mathfrak{g}}$ для любого четного $n = 2, 4, \ldots$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть дана группа Ли $SL(2,R) \underset{\Phi_n}{\ltimes} R^{n+1}$. Тогда функция F вида $F = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}^{-1} y_i y_{n-i}$, где $y_0, \ldots, y_n$ — стандартные координаты пространства R^{n+1} , является инвариантом коприсоединенного представления этой группы для $n = 2p$, $p \in N$.

В третьей теореме описана серия инвариантов четвертой степени представления $Ad^*_{\mathfrak{g}}$ для любого n .

ТЕОРЕМА 3. Пусть дана группа Ли $SL(2,R)\otimes_{\Phi_m} R^{n+1}$. Тогда функция F вида

$$F = A_0 y_0^2 y_m^2 + \sum_{r=1,3,\dots} A_r \left(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(r-1)} 2 y_i y_{r-i} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(r-1)} 2 y_{m-i} y_{m+i-r}\right) +$$

$$+ \sum_{s=2,4,\dots} A_s \left(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(s-2)} 2 y_i y_{s-i} + y_{\frac{s}{2}}^2\right)\left(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(s-2)} 2 y_{m-i} y_{m+i-s} + y_{m-\frac{s}{2}}^2\right)$$

где $A_0 = 1$, $A_p = (-1)^p \binom{2m}{p}^{-1}$, $p = 1, \dots, m-1$, $A_m = (-1)^m \left[2\binom{2m}{m}\right]^{-1}$, $y_0, y_1, \dots, y_m$ – стандартные координаты в пространстве R^{n+1}, является инвариантом коприсоединенного представления этой группы для каждого n. Инварианты, описанные в теореме I, можно переписать в терминах классических результантов двух многочленов.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f(X) = y_0 X^n + y_1 X^{n-1} + \dots + y_n$, и $g(X) = n y_0 X^{n-1} + (n-1) y_1 X^{n-2} + \dots + y_{n-1}$, тогда функция F вида $F = \frac{1}{y_0} Res(f,g)$, где

$$Res(f,g) = \begin{vmatrix} y_0 & y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & y_0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & y_{n-1} & y_n \\ n y_0 & (n-1) y_1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 y_{n-2} & y_{n-1} \end{vmatrix}$$

является инвариантом коприсоединенного представления группы Ли $SL(2,R)\otimes_{\Phi_m} R^{n+1}$ степени $2n-2$ для $1 \leq n \leq 6$.

Глава III. Целью третьей главы является построение в явном виде полных инволютивных семейств функций на орбитах общего положения коприсоединенного представления группы $SL(2,R)\otimes_{\Phi_m} R^{n+1}$. Сформулирована теорема о полном инволютивном семействе функций на пространстве G^*, дуальном к алгебре Ли $G = sl(2,R) \oplus_{\varphi_m} R^{n+1}$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $G = sl(2,R) \oplus_{\varphi_m} R^{n+1}$ – алгебра Ли и $1 \leq n \leq 6$. Тогда для алгебры Ли $G = sl(2,R) \oplus_{\varphi_m} R^{n+1}$ на

G^* пространстве, дуальном к алгебре Ли G, построено в явном виде полное инволютивное семейство функций, состоящее из многочленов, полученных с помощью сдвига инвариантов коприсоединенного представления группы Ли $\mathcal{G} = SL(2,R) \otimes_{\Phi_m} R^{m+1}$.

Глава IУ. В четвертой главе диссертации решается задача топологической структуры поверхности постоянной энергии и боттовости построенных интегралов на четырехмерных орбитах группы Ли $\mathcal{G} = SL(2,R) \otimes_{\Phi_m} R^{m+1}$. В основной теореме дается ответ на этот вопрос.

<u>ТЕОРЕМА 6</u>. а) Пусть $G = sl(2,R) \oplus_{\varphi_m} R^2$, $\dot{x} = sgrad\, f_1(x)$, $x \in G$ - гамильтонова система на G^* с гамильтонианом $f_1(x)$. Тогда все орбиты представления $Ad^*_{\mathcal{G}}$ расслоены на изоэнергетические поверхности $Q^3 = \{ f_1(x) = const \}$, обладающие тем свойством, что для этих всех поверхностей Q^3 функция $f_2|_{Q^3}$ является боттовским интегралом потока $\dot{x}$. Более точно, функция $f_2|_{Q^3}$ на некомпактном многообразии Q^3 не имеет критических точек. Многообразие Q^3 в общем положении диффеоморфно тривиальному одномерному векторному расслоению над $R^2 \setminus \{0\}$.

б) Пусть $G = sl(2,R) \oplus_{\varphi_m} R^3$, $\dot{x} = sgrad\, f_1(x)$, $x \in G$ - гамильтонова система на G^* с гамильтонианом $f_1(x)$. Тогда все орбиты представления $Ad^*_{\mathcal{G}}$ расслоены на изоэнергетические поверхности $Q^3 = \{ f_1(x) = const \}$, обладающие тем свойством, что для всех этих поверхностей Q^3 функция $f_2|_{Q^3}$ является боттовским интегралом потока $\dot{x}$ для вектора сдвига общего положения (причем условие, описывающее общее положение, описано в явном виде). Более точно, функция f_2 на некомпактном многообразии Q^3 не имеет критических точек.

Многообразие Q^3 можно представить в виде $Q^3 = M^2 \times (0,1)$, где M^2 - одна из двумерных поверхностей:

а) цилиндр $M^2 \cong S^1 \times (0,1)$, б) плоскость $M^2 \cong R^2$,

в) два экземпляра плоскости $M^2 \cong S^0 \times R^2$.

Причем при изменении энергии возможна перестройка

(а) $\longrightarrow$ (б) $\longrightarrow$ (в) $\longrightarrow$ (а).

В Приложении приводится полный список инвариантов коприсоединенного представления группы $G = SL(2,\mathbb{R}) \otimes_{\Phi_m} \mathbb{R}^{m+1}$ для $1 \le m \le 6$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору А.Т.Фоменко за постановку задачи и за постоянное внимание, оказанное в течение всего времени аспирантуры.

ГЛАВА I

§ I. Необходимые сведения из теории групп Ли, алгебр Ли и их представлений

Здесь собраны основные понятия и факты из теории групп Ли и алгебр Ли, кроме того зафиксированы обозначения, используемые в дальнейшем. Подробности см., например, [15], [18], [20], [21], [22], [33], [42], [45], [47], [53], [64], [73], [79], [87].

Пусть G – гладкое многообразие, на котором задана структура группы. Тогда G называется группой Ли, если отображение $G \times G \longrightarrow G$, задаваемое формулой $(a,b) \longrightarrow ab^{-1}$, является гладким. Касательное пространство к группе Ли G в единице $T_e G$ имеет естественную структуру алгебры Ли.

Пусть некоторая группа G действует на многообразии X, т.е. задано такое гладкое отображение $f: G \times X \longrightarrow X$ (будем писать $f(g,x)=gx$, что $g_1(g_2x)=(g_1g_2)x$, где $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$ и $ex=x$, $x \in X$, e – единица группы G.

Однородным пространством называется многообразие X, на котором группа G действует транзитивно, т.е. любая точка $x \in X$ переводится в любую другую точку $y \in X$ преобразованиями из группы G, т.е. существует такой элемент $g \in G$, что $g(x)=y$. Множество точек вида gx, где $g \in G$, а x – фиксированная точка, называется орбитой точки $x \in X$. Орбита точки $x \in X$ является однородным пространством, а все множество X есть объединение орбит его точек. Множество H элементов $h \in G$ группы G, оставляющих точку $x \in X$ на месте, являются подгруппой группы G. Эта группа называется стационарной подгруппой точки x. Обозначим ее через H: $H = \{ h \in G \mid hx = x;\ x \in X \}$.

Внутренним автоморфизмом группы G называется изоморфное отображение $Int: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ группы $\mathcal{G}$ на саму же группу $\mathcal{G}$ по правилу: $Int(g) = hgh^{-1}$, где $g \in \mathcal{G}$, а h - некоторый фиксированный элемент группы $\mathcal{G}$. Отображение $Int: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$, $Int(h,g) = Int_h g$ является действием группы Ли $\mathcal{G}$ на себя с помощью автоморфизмов. Назовем его присоединенным действием группы Ли $\mathcal{G}$.

Алгебра Ли G называется простой, если в ней нет идеалов, отличных от $\{0\}$ и самой G, т.е. таких подпространств I, что $[I, G] \subset I$. Если алгебра Ли G группы Ли $\mathcal{G}$ проста, то $\mathcal{G}$ называется простой группой Ли. Алгебра Ли G называется полупростой, если $G = I_1 + \ldots + I_m$, где I_j - простые алгебры Ли, попарно коммутирующие, т.е. $[I_k, I_l] = 0$ при $k \neq l$ и сами некоммутативные. Группа $\mathcal{G}$ с полупростой алгеброй Ли называется полупростой группой.

Представлением группы $\mathcal{G}$ называется гомоморфизм $\rho: \mathcal{G} \to GL(L)$ группы $\mathcal{G}$ в некоторую группу матриц $GL(L)$, невырожденных линейных преобразований пространства L. Пространство L называется пространством представления, а его размерность называется размерностью представления, и обозначается символом $\dim \rho$. Представление ρ называется неприводимым, если в пространстве L представления ρ нет нетривиальных подпространств, инвариантных относительно всех матриц вида $\rho(g)$, $g \in \mathcal{G}$. Пусть задано представление $\rho: \mathcal{G} \longrightarrow GL(L)$ группы $\mathcal{G}$. Дифференциал $\rho_*: G \longrightarrow End(L)$ этого отображения в единице группы отображает алгебру Ли $G = T_e\mathcal{G}$ в пространство $End(L)$ всех линейных отображений $\alpha: L \longrightarrow L$. Отображение ρ_* задает представление алгебры Ли G (гомоморфизм алгебр Ли), т.е. выполнено соотношение $\rho_*[\xi, \eta] = [\rho_*\xi, \rho_*\eta]$ для любых векторов ξ, η из алгебры G. Представление $\rho: \mathcal{G} \longrightarrow$

$\longrightarrow GL(L)$ называется точным, если оно не имеет ядра, т.е. если $\rho(g)\neq 1$ при $g\neq 1$.

Пусть $\rho:\ \mathcal{G}\longrightarrow GL(L)$ – представление группы Ли $\mathcal{G}$ в пространстве L. Выберем в L базис $e_1,\dots,e_n$. Тогда каждый линейный оператор $\rho(g)$, $g\in\mathcal{G}$, задается матрицей $\rho(g)=\|\rho(g)_{ij}\|$ порядка $n\times n$. Поэтому представление ρ можно отождествить с гомоморфизмом $\rho:\mathcal{G}\longrightarrow GL(n)$ группы Ли $\mathcal{G}$ в группу Ли всех матриц порядка $n\times n$.

Присоединенным представлением группы $\mathcal{G}$ называется отображение группы $\mathcal{G}$ в группу автоморфизмов алгебры Ли G:
$Ad:\ \mathcal{G}\longrightarrow Aut(G)$.

Рассмотрим дуальное пространство к алгебре Ли G, т.е. пространство линейных форм. Обозначим его через G^*. Значение линейной формы ξ на векторе $x\in G$ обозначим через $\langle\xi,x\rangle$. Пусть $g\in\mathcal{G}$. Оператор Ad_g^*, определенный формулой $\langle Ad_g^*\xi,x\rangle=$ $=\langle\xi,\ Ad_g x\rangle$, где $x\in G$, $\xi\in G^*$, называется оператором, сопряженным с Ad_g. Таким образом, получаем коприсоединенное представление группы $\mathcal{G}$, т.е. гомоморфизм $Ad^*:\ \mathcal{G}\longrightarrow$ $\longrightarrow Aut(G^*)$ группы $\mathcal{G}$ в группу всех невырожденных линейных преобразований пространства G^*. Дифференциал $d_e Ad$ присоединенного представления Ad группы Ли $\mathcal{G}$ в единице $e\in\mathcal{G}$ является гомоморфизмом алгебры Ли G группы Ли $\mathcal{G}$ в алгебру Ли $End(G)$ всех линейных преобразований пространства G. Отображение $d_e Ad$ называется присоединенным представлением алгебры Ли G и обозначается $(d_e Ad)(\xi)=ad_\xi$. Имеет место равенство $ad_\xi(\eta)=$ $=[\xi,\eta]$, $\xi,\eta\in G$. Определим также преобразование $ad_Y^*:G^*\longrightarrow G^*$, сопряженное к преобразованию $ad_Y:G\longrightarrow G$. Здесь $\langle ad_Y^*\xi,x\rangle=\langle\xi,\ ad_Y x\rangle=\langle\xi,[Y,X]\rangle$, где $X,Y\in G$, $\xi\in G^*$. Представление $x\longrightarrow ad_x^*$ называется коприсоединенным представлением алгебры G . Оно является дифференциалом коприсоединенного представления группы Ли $\mathcal{G}$. Если группа Ли $\mathcal{G}$ односвязная, то существует взаимно-однозначное соответствие между представлениями группы Ли $\mathcal{G}$ и ее алгебры Ли G , в том же самом пространстве.

Всякую полупростую комплексную алгебру Ли как линейное пространство, можно представить в виде прямой суммы подпространств $H + B = G$, где H - максимальная коммутативная подалгебра алгебры G , т.е. $[h_1, h_2] = 0$, где $h_1, h_2 \in H$, B - дополнение к H в G , инвариантное относительно операторов $ad\, h$ и операторы ad_h, $h \in H$ полупросты.

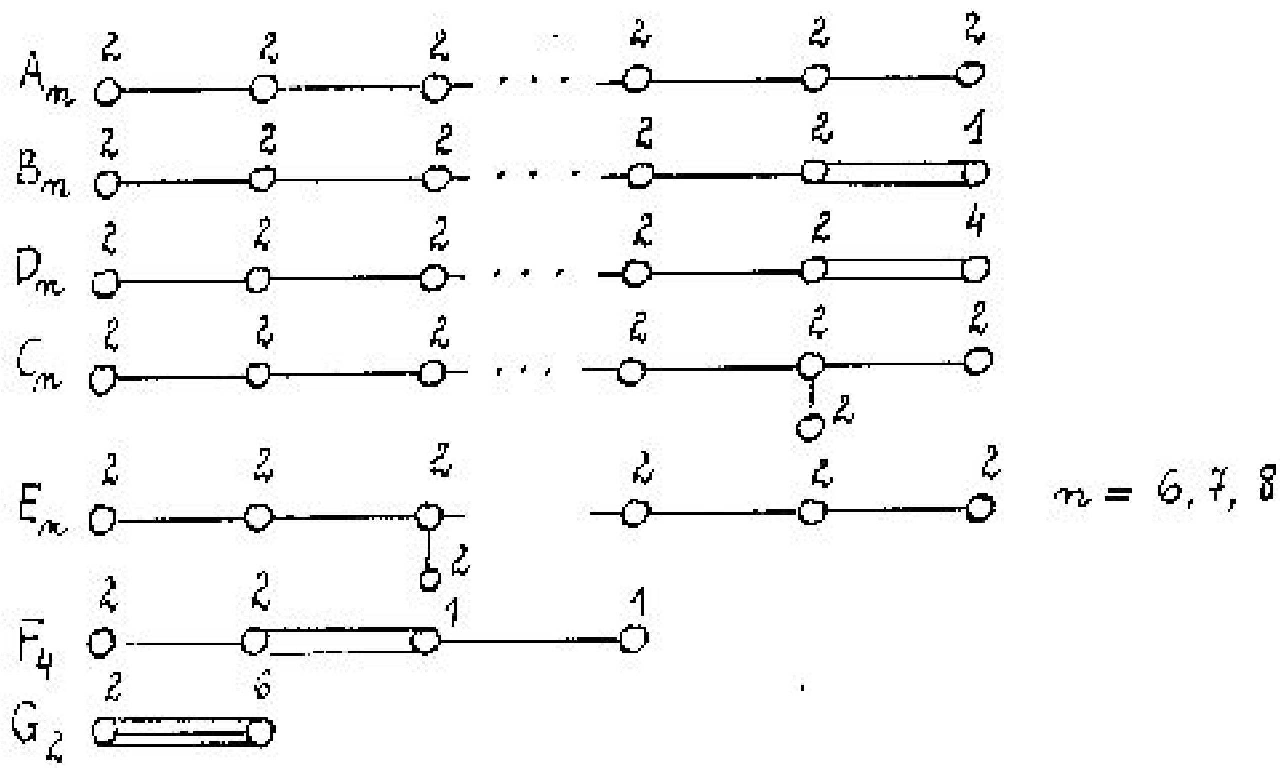
В пространстве B существует общий для всех операторов базис $e_\alpha : ad_h e_\alpha = [e_\alpha, h] = \lambda_\alpha(h) e_\alpha$, причем для каждого e_α существует такой элемент $h \in H$, что $\lambda_\alpha(h) \neq 0$. Функция $\lambda_\alpha(h)$ является линейной. Поскольку $\lambda_\alpha(h)$ для каждого h является собственным числом оператора ad_h , она называется корнем алгебры G относительно H . Векторы e_α называются корневыми, а алгебра H называется картановской подалгеброй алгебры Ли G .

Скалярным произведением Киллинга (a, b) , где $a, b \in G$, называется число $(a, b) = Sp\, ad_a\, ad_b$. Алгебра Ли G полупроста тогда и только тогда, когда ее произведение Киллинга невырождено (критерий Картана). Кроме того, ограничение скалярного произведения на картановскую подалгебру также невырождено, т.е. из того, что $(h, x) = 0$, $x \in H$ для всех $h \in H$ следует, что $x = 0$. Следовательно, функция $\lambda_\alpha(h)$ может быть записана в виде $\lambda_\alpha(h) = (\xi_\alpha, h)$, где $\xi_\alpha \in H$. Вектор ξ_α называется корнем алгебры H . Пусть H - подалгебра Картана в полупростой алгебре Ли G , H^* - сопряженное к H пространство. Введем в H^* лексикографический порядок относительно базиса $e^1, \ldots, e^m$ пространства H^*. Для векторов $\xi, \eta \in H^*$ с координатами ξ_i, η_i положим $\xi > \eta$, если $\xi_1 > \eta_1$ либо $\xi_1 = \eta_1$, но $\xi_2 > \eta_2$ и т.д. Корень $\alpha > 0$ называется простым, если его невозможно представить в виде суммы двух корней $\beta > 0$, $\gamma > 0$. Систему простых корней будем обозначать через Π. Ее значение раскрывает следующая

ТЕОРЕМА I.I. (См. [64]) Простая алгебра Ли G над полем $\mathbb{C}$ определяется с точностью до изоморфизма заданием системы корней в картановской подалгебре.

Из этого следует, что для задания простой алгебры достаточно задать систему Π. Каждую систему Π мы изобразим в виде следующей удобной схемы-графа. Каждый вектор из Π изобразим точкой на двумерной плоскости, рядом с которой укажем квадрат длины этого вектора (корня) в метрике Киллинга на подалгебре H. Укажем углы, образуемые этими векторами друг с другом. Оказывается, эти углы не могут быть произвольными, более того, имеется мало вариантов, а именно $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$. Причем следующее удобное соглашение, позволяющее наглядно изобразить всю эту информацию графически. Если два вектора образуют друг с другом угол $\pi/6$, то соединим соответствующие им точки тремя параллельными отрезками. Если угол между векторами равен $\pi/4$, то соединим точки двумя отрезками, если угол равен $\pi/3$, то изобразим лишь один отрезок, и, наконец, если векторы ортогональны, то соответствующие им точки соединять отрезками не будем.

Получившийся граф будем называть диаграммой корней (схемой корней). Имеется полная классификация комплексных простых алгебр Ли, их схемы простых корней перечислены в следующей таблице.



Всякое конечномерное комплексное представление полупростой алгебры Ли вполне приводимо, т.е. если φ_g - представление алгебры G в линейном пространстве L, то $L = \sum L_k$, причем ограничение представления φ_g на подпространство L_k является неприводимым. Пусть φ_G - неприводимое комплексное представление комплексной полупростой алгебры Ли G в пространстве L. Пусть H - картановская подалгебра алгебры G. Допустим, что ξ общий собственный вектор операторов φ_h, $h \in H$. Тогда $\varphi_h \xi = \lambda(h)\xi$. Вектор ξ называется весовым вектором, а функция $\lambda(h)$ - весом представления φ_G. Вес $\lambda(h)$ можно записать в виде $\lambda(h) = (h, \Lambda)$; вектор $\Lambda \in H$ также называется весом. Допустим, что среди весов представления φ_G существует максимальный относительно лексикографического порядка. Тогда такой вектор Λ_{max} называется старшим весом представления φ_G.

ТЕОРЕМА 1.2. (Э.Картан) (см. [45]). Любое неприводимое конечномерное представление полупростой алгебры Ли полностью определяется своим старшим весом.

Представления полупростых групп и алгебр Ли удобно задавать в терминах старшего веса и обозначать при помощи диаграммы простых корней. Старший вес неприводимого представления с помощью диаграммы Дынкина записывается в виде: $\overset{m_1}{\circ}\!-\!\!\!-\!\overset{m_2}{\circ}\cdots\!-\!\overset{m_{n-1}}{\circ}\!-\!\!\!-\!\overset{m_n}{\circ}$; $m_\alpha = \dfrac{(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$; где α – простой корень, числа m_α пишутся над соответствующим простым корнем, $m_\alpha \in Z$, $m_\alpha \geqslant 0$ и m_α называется числовой отметкой веса Λ .

Пусть A – полупростая алгебра Ли, φ – неприводимое представление алгебры Ли A в линейном пространстве L . Рассмотрим полупрямое произведение алгебры Ли A и линейного пространства L , т.е. прямую сумму $G = A \oplus L$ линейных пространств A и L с коммутатором $[(a_1, l_1), (a_2, l_2)] = ([a_1, a_2]$, $\varphi_{a_1}(l_2) - \varphi_{a_2}(l_1) + [l_1, l_2])$, где $a_1, a_2 \in A$, $\varphi_\alpha \in End(L)$.

В дальнейшем существенную роль будет играть следующая

<u>ТЕОРЕМА I.3</u>. (О.В.Мантуров) (см. [23]) Пусть φ – неприводимое представление алгебры Ли A в линейном пространстве L , а $G = A \underset{\varphi}{\oplus} L$ полупрямая сумма алгебры Ли A и пространства L по представлению φ . Если представление φ большой размерности, т.е. $\dim \varphi > \dim G$, то инварианты коприсоединенного представления алгебры Ли G будут совпадать с инвариантами коприсоединенного представления полупростой части алгебры Ли G .

Пусть G – конечномерная алгебра Ли. Аннулятором ковектора $f \in G^*$ называется пространство $Ann(f) = \{\xi \in G \mid ad^*_\xi f = 0\}$. Рангом ковектора $f \in G^*$ называется число $r(f) = \dim Ann(f)$. Число $r = \inf\limits_g \dim Ann(g)$ называется индексом алгебры Ли G и обозначается символом $ind\, G$. Вектор называется регулярным, если $r(f) = r$. Имеет место следующая важная теорема, доказательство которой можно найти, например, в книге [76] .

<u>ТЕОРЕМА I.4</u>. Если $f \in G^*$ – регулярный ковектор, то $Ann(f)$ – абелева подалгебра в алгебре Ли G .

Группа $\mathcal{G}$, действуя на G^* , расслаивает G^* на орбиты

$\mathcal{O} = \{ h \in G^* \mid h = Ad_g^* f,\ g \in \mathcal{G} \}$ коприсоединенного представления. Каждая из них - это гладкое подмногообразие в линейном пространстве G^*. Известно, что орбиты представления Ad^* являются симплектическими многообразиями относительно формы Кириллова. Эта форма Кириллова определяется так. Пусть $x \in \mathcal{O}$ - произвольная точка, $\xi_1, \xi_2 \in T_x \mathcal{O}$ - два произвольных касательных вектора к орбите $\mathcal{O}$. Каждый вектор ξ, касательный к орбите, представляется в виде $\xi = ad_Y^* x$, так как $T_x \mathcal{O} = ad_G^* x$. Поэтому существуют такие элементы $Y_1, Y_2 \in G$, что $\xi_i = ad_{Y_i}^* x$, $i = 1, 2$. Это представление неоднозначно, что не влияет на дальнейшую конструкцию. Определим значение формы $\omega_x(\xi_1, \xi_2)$ в точке $x \in \mathcal{O}$ на касательных векторах ξ_1, ξ_2 на орбите $\mathcal{O}$ так: $\omega_x(\xi_1, \xi_2) = \langle x, [Y_1, Y_2] \rangle$, где $x \in G^*$, $Y_1, Y_2 \in G$. Эта форма билинейна и ее значение не зависит от произвола в выборе представителей Y_1, Y_2; далее, форма ω кососимметрична и невырождена на орбитах, кроме того, она замкнута. (См. [64])

Пусть G - алгебра Ли, $\mathcal{G}$ - односвязная группа Ли, соответствующая алгебре Ли G. $e_1, \ldots, e_n$ - базис G; $e^1, \ldots, e^n$ - сопряженый базис пространства G^*, дуального к G, x^i - координаты в G, отвечающие базису e_i, а x_i - координаты в G^*, отвечающие базису e^i, $e^i(e_j) = \delta^i_j$ и $C^k_{ij} = [e_i, e_j]$ - структурный тензор алгебры G в базисе e_i. Определим дифференциальные операторы X_i $(i = 1, \ldots, n)$, действующие в пространстве $C^\infty(G^*)$ гладких функций на G^*: $X_i = C^k_{ij} x_k \frac{\partial}{\partial x_j}$. Пусть $C^\infty(G^*)$ - пространство гладких функций на G^* и $Ad: \mathcal{G} \to Gl(G)$ - присоединенное представление, $Ad^*: \mathcal{G} \longrightarrow Gl(G^*)$ - коприсоединенное представление $(Ad_g^* f)(x) = f(Ad^*_{g^{-1}} x)$, $f \in G^*$, $x \in G$. Функция $f \in C^\infty(G^*)$ называется инвариантом, если для любых $g \in \mathcal{G}$, $x \in G^*$, $f(Ad_g^* x) = f(x)$.

Предложение I.I (см. [57]). Функция $F \in C^\infty(G^*)$ является инвариантом тогда и только тогда, когда $X_i F = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Итак, чтобы найти инварианты, надо решить систему дифференциальных уравнений

$$C_{ij}^k x_k \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (I.I)$$

§ 2. Основные определения и теоремы о гамильтоновых системах

В этом параграфе напоминаются основные понятия и факты из симплектической геометрии, которые потребуются в дальнейшем, а также фиксируются обозначения; подробности см., например, [2], [20], [33], [43], [47], [49], [64], [79].

Гладкое четномерное многообразие M^{2n} называется симплектическим, если на нем задана внешняя дифференциальная форма $\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$ такая, что: I) эта форма невырождена, т.е. матрица ее коэффициентов $(\omega_{ij}(x))$ невырождена в каждой точке; 2) эта форма замкнута, т.е. $d\omega = 0$, где d - операция внешнего дифференцирования. Такая форма ω иногда называется симплектической структурой на многообразии M^{2n}. Пусть f - гладкая функция на многообразии M^{2n}. Кососимметрическим градиентом $\operatorname{sgrad} f$ функции f называется гладкое векторное поле на M^{2n}, однозначно определяемое из соотношения $\omega(v, \operatorname{sgrad} f) = v(f)$, где v пробегает множество всех гладких векторных полей на M^{2n}. Гладкое векторное поле v на симплектическом многообразии с формой ω называется гамильтоновым, если оно имеет вид $v = \operatorname{sgrad} H$, где H - некоторая гладкая функция на M^{2n}, называемая гамильтонианом. Гамильтоновы векторные поля также называют гамильтоновыми потоками.

Скобкой Пуассона двух гладких функций f и g на симплектическом многообразии M^{2n} называется гладкая функция $\{f, g\}$, определяемая формулой $\{f,g\} = \omega(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g)$. В явном виде через частные производные функций f и g, скобка Пуассона записывается так:

$$\{f,g\} = \sum_{i<j} \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

, где x_i - локальные координаты, а ω^{ij} - коэффициенты матрицы, обратной к матрице (ω_{ij}).

<u>Предложение 2.I</u>. (См., например, [49], [64].) Операция взятия скобки Пуассона $f, g \longrightarrow \{f,g\}$ удовлетворяет соотношениям: для любых f, g, h эта операция:

I) билинейна $\{\lambda f + \mu g, h\} = \lambda\{f,h\} + \mu\{g,h\}$.

2) кососимметрична $\{f,g\} = -\{g,f\}$

3) имеет место тождество Якоби

$$\{h,\{f,g\}\} + \{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} = 0.$$

Итак, пространство $F(M^{2n})$ всех гладких функций на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) является алгеброй Ли по отношению к скобке Пуассона $\{f,g\}$. Алгебра Ли $F(M^{2n})$ бесконечномерна. Построим естественное отображение α алгебры Ли $F(M^{2n})$ в алгебру Ли $V(M^{2n})$ всех гладких векторных полей на многообразии M^{2n}. Это отображение определим так: $\alpha(f) = \operatorname{sgrad} f$.

<u>ЛЕММА 2.I</u>. (См., например, [33], [64].) Отображение $\alpha: F(M^{2n}) \longrightarrow V(M^{2n})$ является гомоморфизмом алгебр Ли, т.е. $\alpha\{f,g\} = [\alpha(f), \alpha(g)]$. Это означает, что операция взятия скобки Пуассона переходит при отображении α в операцию взятия обычного коммутатора двух векторных полей $\alpha(f), \alpha(g)$.

Говорят, что две функции на симплектическом многообразии находятся в инволюции, если их скобка Пуассона равна нулю. Гладкая функция f на многообразии M^{2n} называется интегралом векторного поля v, если эта функция постоянна вдоль всех интегральных траекторий поля v. Если $v = \mathrm{sgrad}\, H$ – гамильтоново векторное поле и f – функция, коммутирующая (в смысле скобки Пуассона) с гамильтонианом этого поля, т.е. $\{f, H\} = 0$, то функция f является интегралом поля v. В частности, гамильтониан H всегда является интегралом поля v, так как $\{H, H\} = 0$ в силу косой симметрии скобки Пуассона.

Предложение 2.2. (см., например, [2], [64]) Если f и g – два интеграла гамильтонова векторного поля $v = \mathrm{sgrad}\, H$, то их скобка Пуассона $\{f, g\}$ также является интегралом этого поля.

Пусть G – конечномерная алгебра Ли, $\mathcal{G}$ – группа Ли, отвечающая G, G^* – сопряженное пространство к G и $Ad^*: \mathcal{G} \longrightarrow GL(G^*)$ – коприсоединенное представление группы Ли $\mathcal{G}$ на G^*. Тогда G^* расслаивается на орбиты

$$\mathcal{O}(f) = \{ h \in G^* \mid h = Ad_g^* f \} \quad g \in \mathcal{G}, \; f \in G^*.$$

Каждая из них – погруженное гладкое подмногообразие в G^*.

ТЕОРЕМА 2.1. (См., например, [2], [20]) Каждая орбита коприсоединенного представления произвольной группы Ли является симплектическим многообразием.

Пусть F – гладкая функция на орбите $\mathcal{O}(f)$ коприсоединенного представления Ad_g^* группы Ли $\mathcal{G}$. Тогда гамильтоновы векторные поля $v = \mathrm{sgrad}\, F$ на орбите $\mathcal{O}(f)$ относительно формы Кириллова на $\mathcal{O}(f)$ имеют вид $v = ad^*_{dF(x)}(x)$, $x \in G^*$. Если F – гладкая функция на пространстве G^*, то на каждой орбите возникает гамильтоново векторное поле $v = ad^*_{dF(x)}(x)$, $x \in G^*$, $F \in C^\infty(G^*)$. Отвечающую этому векторному полю систему дифференциальных уравнений $\dot{x} = ad^*_{dF(x)}(x)$ на G^* будем называть уравнениями Эйлера на пространстве G^*. Уравнения Эйлера на G^* обладают тем замечательным свойством, что соответствующее векторное поле касается всех орбит $\mathcal{O}(f)$ представления Ad_g^* и на каждой орбите эти уравнения гамильтоновы.

Отметим следующий простейший способ нахождения первых интегралов уравнений Эйлера. Пусть $e_1,\dots,e_n$ – базис алгебры Ли G, $e^1,\dots,e^n$ – дуальный базис в сопряженном пространстве G^*, $x = x_i e^i$, C_{ij}^k – структурный тензор алгебры Ли G в базисе $e_1,\dots,e_n$, т.е. $[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k$.

Предложение 2.3 (см. [2]). Пусть функция $F \in C^\infty(G^*)$ постоянна на орбитах коприсоединенного представления группы Ли $\mathcal{G}$, отвечающей алгебре Ли G. Тогда F – первый интеграл уравнений Эйлера $\dot{x} = ad^*_{dF(x)}(x)$. В координатах это утверждение можно записать так: если функция F удовлетворяет системе уравнений $C_{ij}^k x_k \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0$ $(i = 1,\dots,\dim G)$ в частных производных, то она является первым интегралом системы уравнений Эйлера.

Перейдем теперь к построению вполне интегрируемых гамильтоновых систем.

ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ 2.2 (см., например, [2] , [64]). (коммутативное интегрирование гамильтоновых систем). Пусть на симплектическом многообразии M^{2n} задан набор из n гладких функций $f_1,\dots,f_n$, находящихся в инволюции, т.е. $\{f_i, f_j\} \equiv 0$ при $1 \le i,j \le n$. Пусть M_ξ совместная поверхность уровня функций (f_i), т.е. $M_\xi = \{x \in M : f_i(x) = \xi_i, 1 \le i \le n\}$. Предположим, что на этой поверхности уровня все n функций $f_1,\dots,f_n$ функционально независимы (т.е. градиенты $grad\, f_i$, $1 \le i \le n$, линейно независимы во всех точках поверхности M_ξ). Тогда выполняются следующие утверждения:

I) поверхность M_ξ является гладким n - мерным подмногообразием, инвариантным относительно каждого векторного поля $v_i = sgrad\, f_i$, гамильтониан которого - функция f_i ;

2) если многообразие M_ξ связно и компактно, то оно диффеоморфно n - мерному тору T^n. В общем случае, если поля v_i - пол-

ные векторные поля, то связное неособое многообразие M_ξ (уже не обязательно компактное) является фактор-группой евклидова пространства R^n, по некоторой решетке ранга не превосходящего n ;

3) если поверхность уровня M_ξ компактна и связна (т.е. является тором), то в некоторой ее открытой окрестности можно ввести такие регулярные криволинейные координаты (называемые "действие - угол") $s_1, \dots, s_n$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, где $0 \leqslant \varphi_i < 2\pi$, что:
а) симплектическая структура ω в этих координатах записывается простейшим образом, т.е. $\omega = \sum_{i=1}^{n} ds_i \wedge d\varphi_i$, что эквивалентно тому, что функции $s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ удовлетворяют следующим соотношениям: $\{s_i, s_j\} = \{\varphi_i, \varphi_j\} = 0$, $\{s_i, \varphi_j\} = \delta_{ij}$,
б) функции $s_1, \dots, s_n$ являются координатами в направлении, трансверсальном тору T^n, и функционально выражаются через интегралы $f_1, \dots, f_n$, т.е. $s_i = s_i(f_1, \dots, f_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. в) Функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ являются координатами на торе $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$, где φ_i - угловая координата окружности S^1 с номером i, $0 \leqslant \varphi_i < 2\pi$; г) каждое векторное поле $v = \operatorname{sgrad} F$, где F - любая из функций $f_1, \dots, f_n$, будучи записана в координатах $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ на торе T^n, приобретает вид $\dot{\varphi}_i = q_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$, т.е. компоненты этого поля постоянны на торе, и интегральные траектории поля определяют условно-периодическое движение системы v, т.е. задают "прямолинейную обмотку" тора T^n. Здесь функции q_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, определены в некоторой окрестности тора, и на близких поверхностях уровня мы также имеем $\dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \dots, s_n)$. Таким образом, исходная система $v = \operatorname{sgrad} F$ записывается в окрестности тора T^n в координатах $s_1, \dots, \varphi_n$ в виде $\dot{s}_i = 0$, $\dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \dots, s_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Если нам задана конкретная система $v = \operatorname{sgrad} F$, где F -

некоторая функция на M, то мы будем говорить, что эта система вполне интегрируема (по Лиувиллю), если существует набор функций $f_1 = F, f_2, \ldots, f_m$, удовлетворяющих условиям этой теоремы. Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [2], [64].

В настоящее время имеются несколько эффективных методов построения функций в инволюции на орбитах коприсоединенного представления.

I. Метод сдвига аргумента. Впервые эта идея появилась для случая алгебры Ли $so(n)$ в работе С.В.Манакова (см. [26]), а потом была разработана А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко (см. [31], [32], [33],[35]).

2. Метод цепочек подалгебр. Эта конструкция в контексте геометрического квантования (построение поляризаций) впервые была описана в работе Верны (см.[88]), а в контексте интегрируемых систем в работах В.В.Трофимова (см. [57], [58]).

3. Метод тензорных расширений алгебр Ли. Этот метод был впервые предложен В.В.Трофимовым (см. [57], [58], [59]), а затем развит В.А.Браиловым (см. [12]) и Ле Нгок Тьеуеном (см. [25]).

4. Метод сжатия алгебры Ли. Эта идея появилась в работе С.П.Новикова (см. [18]), а потом была разработана А.В.Браиловым (см. [10]).

5. Метод сходных функций. Этот метод принадлежит А.В.Беляеву [5]

Полный обзор всех этих методов можно посмотреть, например, в [52][53]

Для построения вполне интегрируемых гамильтоновых систем на орбитах коприсоединенного представления будем использовать метод сдвига аргумента. Напомним этот метод.

Пусть $f(x)$ - функция, заданная на линейном пространстве V, а $a \in V$ - фиксированный вектор. На пространстве V построим семейство функций $f_\lambda(x) = f(x+\lambda a)$, где λ - произвольное число ($\lambda \in \mathbb{R}$, если V - линейное пространство над $\mathbb{R}$). Будем говорить, что функции $f_\lambda(x)$ получаются из $f(x)$ операцией сдвига аргумента. Если f_λ можно разложить по λ в ряд (например, $f(x)$ - полином), то $f_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f_{\lambda,n}(x)$ и операция сдвига порождает из функции $f(x)$ семейство функций $\{f_{\lambda,n}(x)\}$. В теории гамильтоновых систем сдвиг аргумента используется в силу следующей теоремы А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко.

<u>ТЕОРЕМА 2.3.</u>(см. [32]). Пусть F, H - две функции на пространстве G^*, дуальном к алгебре Ли G, постоянные на орбитах коприсоединенного представления (инварианты коприсоединенного представления группы Ли $\mathcal{G}$, отвечающей алгебре Ли G), $a \in G^*$ - фиксированный ковектор, $\lambda, \mu \in R$ - фиксированные произвольные числа. Тогда $F_\lambda(t) = F(t + \lambda a)$ и $H_\mu(t) = H(t + \mu a)$ находятся в инволюции на всех орбитах относительно стандартной симплектической структуры Кириллова.

Эта теорема дает инволютивный набор функций для достаточно широкого класса алгебр Ли, включающего полупростые алгебры Ли (см. 31| [32]).

§ 3. Фундаментальные понятия из теории Морса

В настоящем параграфе приводятся основные понятия и утверждения классической теории Морса, кроме того напоминаются некоторые теоремы из новой теории "типа Морса" интегрируемых гамильтоновых систем, построенной А.Т.Фоменко. Подробнее с этим можно познакомиться, например, в работах [30] , [64] , [69] , [71] .

Пусть f - гладкая функция на гладком многообразии M. Рассмотрим ковекторное поле $grad f$. Точка $x_0 \in M$ называется критической или стационарной для функции f, если $grad f(x_0) = 0$. В противном случае точка x_0 называется регулярной. Пусть $x_0 \in M$ - критическая точка, значение $f(x_0)$ функции f в этой точке x_0 называется критическим значением функции f. В критической точке x_0 определена матрица вторых частных производных функции , т.е. матрица гессиана f , а именно $d_2 f = \left(\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right)$.

Критическая точка x_0 для функции f называется невырожденной, если матрица $d^2 f$ невырождена в точке x_0 . Это определение не зависит от выбора локальной системы координат. Невырожденные критические точки являются изолированными.

Матрица $d^2 f$ определяет симметричную билинейную форму на касательной плоскости $T_{x_0} M$ к многообразию M в точке x_0 . Эту форму обозначим тем же символом $d^2 f$.

Индексом $ind_f x_0$ критической точки x_0 называется максимальная размерность линейного подпространства в плоскости $T_{x_0} M$, на котором форма $d^2 f$ отрицательно определена. Степенью вырождения критической точки x_0 называется размерность нулевого подпространства в $T_{x_0} M$, т.е. состоящего из всех таких векторов a ,для которых $d^2 f\ (a, b) = 0$ для любого вектора $b \in T_{x_0} M$. Другими словами, степень вырождения совпадает с числом нулевых собственных чисел формы $d^2 f$, а индекс - это число отрицательных собственных чисел. Точка x_0 является невырожденной в том и только в том случае, когда степень вырождения равна нулю.

Гладкая функция f на многообразии M называется функцией Морса, если все ее критические точки невырождены.

Гладкая функция f называется боттовской, если критические точки функции f образуют невырожденные критические подмногообразия.

<u>Предложение 3.I</u> (см. [30]). На любом гладком компактном многообразии существуют функции Морса. Функции Морса всюду плотны в пространстве всех гладких функций на многообразии. Каждая функция Морса имеет на компактном многообразии лишь конечное число критических точек, в частности, все они изолированы. В множестве всех функций Морса существует всюду плотное подмножество,

состоящее из таких функций f, что каждому критическому значению такой функции отвечает одна и только одна критическая точка на многообразии (значения функции в разных критических точках различны).

Определим теперь топологическую структуру поверхностей уровня функции в окрестности критических точек. Пусть f – гладкая функция на M. Введем обозначения: $f_a = f^{-1}(a)$ – поверхность уровня функции f, отвечающая значению a, т.е. $f_a = \{x \in M, f(x) = a\}$; $M_a = \{x \in M, f(x) \leqslant a\}$, т.е. M_a состоит из всех точек M, в которых значения f не превосходят a. Границей (краем) M_a является f_a. В случае, когда a – регулярное (т.е. не критическое) значение функции f, в силу теоремы о неявных функциях поверхность f_a является гладким подмногообразием в M размерности $n-1$, а M_a является гладким n-мерным многообразием с краем f_a.

<u>ЛЕММА 3.1.</u> (см. [64]). Пусть f – гладкая функция на компактном замкнутом многообразии M, и пусть отрезок $[a, b]$ (где $a < b$) не содержит критических значений функции f, т.е. в множестве $f^{-1}(a, b)$, лежащем в многообразии M, нет критических точек функции f. Тогда многообразия f_a и f_b диффеоморфны и, кроме того, диффеоморфны многообразия M_a и M_b. Многообразия M_a и M_b имеют края.

Ручкой размерности n и индекса λ называется прямое произведение двух дисков $H_\lambda^n = D^\lambda \times D^{n-\lambda}$. Диск D^λ размерности λ иногда называют осью ручки. Ручка H_λ^n является гладким многообразием с краем $\partial H_\lambda^n = \partial(D^\lambda \times D^{n-\lambda})$.

<u>ТЕОРЕМА 3.1</u> (см. [64]). Любое гладкое компактное связное замкнутое многообразие M^n диффеоморфно объединению некоторого конечного числа ручек $\{H_\lambda^n\}$, соответствующих критическим точкам

функции Морса на M^n. При этом каждой критической точке индекса λ отвечает в точности одна ручка H_λ^n.

Теперь перейдем к рассмотрению теории Морса гамильтоновых систем. Пусть M^4 - четырехмерное гладкое симплектическое многообразие, на котором дана гамильтонова система $v = \operatorname{grad} H$, где H -гладкий гамильтониан. Так как H - интеграл системы, то v можно ограничить на инвариантную трехмерную поверхность Q^3 постоянной энергии, т.е. $Q^3 = \{x \in M;\ H(x) = const\}$. Поскольку многообразие M^4 всегда ориентируемо, то и Q^3 ориентируемо. Будем рассматривать некритические (неособые) поверхности Q^3, т.е. такие, на которых $\operatorname{grad} H \neq 0$. Пусть система интегрируема по Лиувиллю, т.е. существует дополнительный интеграл f, независимый с H (почти всюду) и находящийся с ним в инволюции. Ограничивая его на Q^3, получаем гладкую функцию f. Назовем гладкий интеграл f боттовским на Q^3, если критические точки функции f на Q^3 образуют невырожденные критические подмногообразия. Критическое подмногообразие для f называется невырожденным, если гессиан $d^2 f$ невырожден на плоскостях, нормальных к подмногообразию. Рассмотрим критические невырожденные подмногообразия T интеграла f на Q^3. Сепаратрисная диаграмма $P(T)$ - это объединение интегральных траекторий поля $\operatorname{grad} f$, входящих или исходящих из T. Обозначим через $P_-(T)$ входящую сепаратрисную диаграмму, а через $P_+(T)$ исходящую сепаратрисную диаграмму. В окрестности многообразия T обе эти диаграммы являются двумерными гладкими многообразиями с общим краем T.

Назовем боттовский интеграл f на Q^3 ориентируемым, если все его критические подмногообразия ориентируемы. В противном случае интеграл f назовем неориентируемым. Поверхность Q^3 с боттовским интегралом f будем иногда называть интегральной поверхностью.

Пусть γ - замкнутая интегральная траектория системы v на Q^3 (т.е. периодическое решение). Скажем, что γ устойчива, если некоторая ее трубчатая окрестность целиком расслоена на концентрические двумерные торы, инвариантные относительно системы v и охватывающие γ, т.е. все интегральные траектории, близкие к γ, "укладываются" на инвариантные торы с общей осью γ. Система может быть интегрируемой, но не иметь при этом ни одного устойчивого периодического решения.

ТЕОРЕМА 3.2. (см. [71]) Пусть M^4 - гладкое симплектическое многообразие (компактное или некомпактное) и $v = \operatorname{sgrad} H$ гамильтоново поле на M^4. Предположим, что система интегрируема на какой-то одной неособой компактной трехмерной поверхности $Q^3 = \{H = \mathrm{const}\}$ при помощи боттовского интеграла f. Тогда число m устойчивых периодических решений v на Q^3 следующим образом оценивается снизу через топологические инварианты Q^3.

I) В том случае, когда интеграл f ориентируем на Q^3, мы имеем: а) $m \geqslant 2$, если группа гомологий $H_1(Q, Z)$ конечна; б) $m \geqslant 2$, если фундаментальная группа $\pi_1(Q) = Z$.

2) В том случае, когда интеграл f неориентируем на Q^3, мы имеем: а) $m + r \geqslant 2$, если группа $H_1(Q, Z)$ конечна; б) $m \geqslant 2$ если $H_1(Q, Z) = 0$ (при этом группа $\pi_1(Q)$ может быть бесконечна); в) $m \geqslant 1$, если группа $H_1(Q, Z)$ - конечная циклическая; г) $m \geqslant 1$, если $\pi_1(Q) = Z$, или если $\pi_1(Q)$ - конечная группа; д) $m \geqslant 2$, если группа $H_1(Q, Z)$ конечная циклическая и поверхность Q^3 не принадлежит небольшой серии многообразий вида $Q_0 = (S^1 \times D^2) + \circ A^3 + K^3$, описание которых будет дано ниже в явном виде. В обоих случаях I) и 2) интеграл f достигает локального минимума или максимума на каждом из этих устойчивых периодических решений системы (или на бутылках Клейна). Если группа $H_1(Q, Z)$ беско-

ночна, т.е. ранг $H_1 \geq 1$, а система v может вообще не иметь на Q устойчивых периодических решений.

Опишем теперь пять типов простейших многообразий – "элементарных кирпичей", из которых склеена каждая поверхность Q постоянной энергии интегрируемых систем.

Тип I. Полноторие $S^1 \times D^2$. Его край – тор T^2.

Тип 2. Произведение $T^2 \times D^1$ назовем цилиндром. Его край – два тора T^2.

Тип 3. Произведение $N^2 \times S^1$ назовем ориентированным седлом (или "штанами"), где N^2 двумерный диск с двумя дырками. Его край – три тора T^2.

Тип 4. Рассмотрим нетривиальное расслоение $A^3 \xrightarrow{N^2} S^1$ с базой S^1 и со слоем N^2. Над S^1 существует лишь два неэквивалентных расслоения с краями – торы и со слоем N^2. Это – $N^2 \times S^1$ (тип 3) и расслоение A^3; A^3 – это пространство ориентированного косого произведения $N^2 \tilde{\times} S^1$. Оно характеризуется тем, что после переноса слоя N^2 вдоль базы S^1 он возвращается на прежнее место с переменой местами дырок I и 2 диска. Малая окрестность базы S^1 гомеоморфна (в типе 4) двум листам Мёбиуса, пересекающимся по общей оси. Край $\partial A^3 = T^2 \cup T^2$. Назовем A^3 неориентируемым седлом. Пространство A^3 можно получить склейкой полнотория и штанов по некоторому диффеоморфизму тора, $A^3 = I + \underline{III} = (S^1 \times D^2) + (N^2 \times S^1)$.

Тип 5. Пусть K^2 – бутылка Клейна, а K^3 – пространство ориентированного косого произведения K^2 на отрезок, т.е. $K^3 = K^2 \tilde{\times} D^1$. Тогда $\partial K^3 = T^2$. Многообразие K^3 также не является топологически новым. Его можно представить в виде: $K^3 = I + \underline{IV} = (S^1 \times D^2) + A^3 = 2I + \underline{III} = 2(S^1 \times D^2) + (N^2 \times S^1)$.

<u>ТЕОРЕМА 3.3</u>. (Теорема топологической классификации трех-

мерных поверхностей постоянной энергии интегрируемых систем.)

Пусть M^4 - гладкое симплектическое многообразие (компактное или некомпактное) и $v = \mathrm{sgrad}\, H$ - гамильтонова система, интегрируемая по Лиувиллю на какой-то одной неособой компактной трехмерной поверхности постоянной энергии Q при помощи боттовского интеграла f. Пусть m - число устойчивых периодических решений системы v на Q (на которых интеграл f достигает строгого локального минимума или максимума); p - число двумерных критических торов интеграла f (минимумов или максимумов интеграла); q - число критических окружностей интеграла f (неустойчивых траекторий системы) с неориентируемой сепаратрисной диаграммой; r - число критических бутылок Клейна (минимумы или максимумы). Это полный список всех возможных критических подмногообразий интеграла f на Q. Тогда Q представляется в виде склейки (по некоторым диффеоморфизмам граничных торов) следующих "элементарных кирпичей":

$$Q = mI + p\,II + q\,III + s\,IV + r\,V = m(S^1 \times D^2) + p(T^2 \times D^1) + q(N^2 \times S^1) + sA^3 + rK^3$$

Если интеграл f - ориентируемый, то последнего слагаемого нет, т.е. $r = 0$.

<u>ТЕОРЕМА 3.4</u> ([71]). Пусть Q - компактная неособая поверхность постоянной энергии системы $v = \mathrm{sgrad}\, H$ на Q, имеющей боттовский интеграл. Тогда Q допускает следующее топологическое представление: $Q = m'I + p'II + q'III = m'(S^1 \times D^2) + p'(T^2 \times D^1) + q'(N^2 \times S^1)$, где m', p', q' - некоторые неотрицательные целые числа. Они связаны с числами из теоремы 3.3 так: $m' = m + s + 2r$, $p' = p$, $q' = q + s + r$.

Это разложение для Q назовем топологическим.

Дадим теперь полную классификацию всех перестроек торов

Лиувилля, возникающих при изменении значения интеграла f . Рассмотрим 5 типов перестройки тора T^2, отвечающие указанным выше многообразиям I,II,III,IV,V. Реализуем T^2 как одну из компонент края соответствующего многообразия. Тогда тор, увлекаемый изменением интеграла f , преобразуется в объединение торов, являющихся остальными компонентами края.

I) Тор T^2 стягивается на окружность и "исчезает" с поверхности уровня интеграла f ; $T^2 \longrightarrow S^1 \longrightarrow \emptyset$.

2) Два тора T^2 сливаются в один тор и "исчезают":
$2T^2 \longrightarrow T^2 \longrightarrow \emptyset$.

3) Тор T^2 распадается на два тора, которые "остаются" на поверхности уровня интеграла f ; $T^2 \longrightarrow 2T^2$.

4) Тор T^2 два раза наматывается на тор T^2 и остается на поверхности уровня интеграла f ; $T^2 \longrightarrow T^2$.

5) Тор T^2 превращается в бутылку Клейна (два раза накрывая ее) и "исчезает".

<u>ТЕОРЕМА 3.5.</u> ([7I]) (теорема классификации бифуркации двумерных торов Лиувилля).
Пусть f – боттовский интеграл на неособой поверхности Q^3. Тогда любая перестройка общего положения тора Лиувилля, возникающая при его проходе через критическую поверхность уровня интеграла f , является композицией перечисленных выше элементарных перестроек I-5. Из этих пяти перестроек независимы (с топологической точки зрения) лишь первые три. Перестройки 4,5 распадаются в композиции перестроек вида I и 3.

ГЛАВА II

ИНВАРИАНТЫ КОПРИСОЕДИНЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛУПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ $SL(2,\mathbb{R}) \underset{\Phi_n}{\ltimes} \mathbb{R}^{n+1}$

§ I. Свойства группы $SL(2,\mathbb{R}) \underset{\Phi_n}{\ltimes} \mathbb{R}^{n+1}$

Введем основные обозначения, связанные с полупрямым произведением $\mathcal{G} = SL(2,\mathbb{R}) \underset{\Phi_n}{\ltimes} \mathbb{R}^{n+1}$ группы Ли $SL(2,\mathbb{R})$ и пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Обозначим через $G = sl(2,\mathbb{R}) \underset{\varphi_n}{\oplus} \mathbb{R}^{n+1}$ алгебру Ли группы Ли $\mathcal{G}$.

Пусть I, M – две алгебры Ли над некоторым полем K, а $M \ni m \xrightarrow{\varphi} \varphi_m \in End(I)$ – гомоморфизм алгебры Ли M в алгебру Ли $End(I)$. Через $M \underset{\varphi}{\oplus} I$ обозначим полупрямую сумму алгебр Ли M и I, зависящего от φ. Полупрямая сумма алгебр Ли I и M, это декартовое произведение $M \times I$ с коммутатором:

$$[(m_1,i_1),(m_2,i_2)] = ([m_1,m_2], \varphi_{m_1}(i_2) - \varphi_{m_2}(i_1) + [i_1,i_2]),$$

где $m_1, m_2 \in M$, $\varphi_m \in End(I)$. Эта операция билинейная, кососимметричная и также выполняется тождество Якоби. В качестве M возьмем алгебру Ли $sl(2,\mathbb{R})$, а в качестве I возьмем $\mathbb{R}^{n+1}$, причем $\mathbb{R}^{n+1}$ рассматривается как коммутативная алгебра Ли. Итак,

$G = sl(2,\mathbb{R}) \underset{\varphi_n}{\oplus} \mathbb{R}^{n+1}$ является полупрямой суммой $sl(2,\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}^{n+1}$, где $\varphi_n : sl(2,\mathbb{R}) \longrightarrow End(\mathbb{R}^{n+1})$ – дифференциал представления Φ_n группы $SL(2,\mathbb{R})$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.

Напомним теперь определение представления φ_n. Обозначим через $\{e_{-1}, e_0, e_1\}$ – базис алгебры $sl(2,\mathbb{R})$ с таблицей умножения:

$$[e_{-1}, e_1] = -e_0, \quad [e_0, e_{-1}] = -2e_{-1}, \quad [e_0, e_1] = 2e_1$$

где $$e_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ – стандартный базис пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ представления φ_n, где $v_0 = (1,0,\ldots,0,0), \ldots, v_n = (0,0,\ldots,0,1)$.

Определим представление φ_n на образующих e_{-1}, e_0, e_1 алгебры Ли

$sl(2,\mathbb{R})$: $\varphi(e_{-1}) = E_{-1}$, $\varphi(e_0) = E_0$, $\varphi(e_1) = E_1$.

По определению линейные операторы E_{-1}, E_0, E_1 действуют на векторы пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ так: $E_i : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $i = -1, 0, 1$,

$$E_{-1} v_m = (m+1) v_{m+1}, \qquad E_0 v_m = (n-2m) v_m,$$
$$E_1 v_m = (n-m+1) v_{m-1}, \qquad v_{-1} = 0 = v_{n+1}.$$

Это представление задано числовыми отметками $\overset{n}{o}$ на диаграмме простых корней алгебры Ли $sl(2,\mathbb{R})$.

Тогда коммутатор в алгебре Ли $sl(2,\mathbb{R}) \underset{\varphi_m}{\oplus} \mathbb{R}^{n+1}$ принимает вид:

$$[(e_{k_1}, v_{i_1}), (e_{k_2}, v_{i_2})] = ([e_{k_1}, e_{k_2}], \varphi(e_{k_1}) v_{i_2} - \varphi(e_{k_2}) v_{i_1} + [v_{i_1}, v_{i_2}]) = ([e_{k_1}, e_{k_2}], E_{k_1} v_{i_2} - E_{k_2} v_{i_1}),$$

где $k_1, k_2 = -1, 0, 1$; а $i_1, i_2 = 0, 1, \dots, n$.

Таблица умножения алгебры Ли $G = sl(2,\mathbb{R}) \underset{\varphi_n}{\oplus} \mathbb{R}^{n+1}$ в базисе $e_{-1}, e_0, e_1, v_0, v_1, \dots, v_n$ имеет вид:

	e_{-1}	e_0	e_1	v_0	v_1	...	v_{n-1}	v_n
e_{-1}	0	$2e_{-1}$	$-e_0$	v_1	$2v_2$	...	$n v_n$	0
e_0	$-2e_{-1}$	0	$2e_1$	$n v_0$	$(n-2)v_1$	...	$(-n+2)v_{n-1}$	$-n v_n$
e_1	e_0	$-2e_1$	0	0	$n v_0$	...	$2v_1$	v_0
v_0	$-v_1$	$-n v_0$	0	0	0	...	0	0
v_1	$-2v_2$	$-(n-2)v_1$	$-n v_0$	0	0	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
v_{n-1}	$-n v_n$	$-(n-2)v_{n-1}$	$-2v_1$	0	0	...	0	0
v_n	0	$n v_n$	$-v_0$	0	0	...	0	0

§ 2. Основные теоремы об инвариантах коприсоединенного представления группы Ли $SL(2,\mathbb{R}) \otimes_{\Phi_n} \mathbb{R}^{n+1}$

Сформулируем основные результаты этой главы в виде четырех основных теорем, в которых даем явный вид инвариантов коприсоединенного представления группы Ли $SL(2,\mathbb{R}) \otimes_{\Phi_n} \mathbb{R}^{n+1}$. В первой теореме дано полное описание инвариантов коприсоединенного представления группы Ли $G = SL(2,\mathbb{R}) \otimes_{\Phi_n} \mathbb{R}^{n+1}$ для $1 \leq n \leq 6$, кроме того, в таблице I приведена дополнительная информация о размерности $\dim G$ алгебры Ли G группы Ли G, о размерности $\dim O$ орбиты общего положения представления Ad_g^*, об индексе $ind\, G$ алгебры Ли G, о степенях $\deg F_i$, $i = 1, \dots, ind\, G$, инвариантов F_i представления Ad_g^*.

ТЕОРЕМА 2.I. Следующие функции F_k, $k = 1, \dots, ind\, G$, дают полный набор функционально независимых инвариантов коприсоединенного представления группы Ли $SL(2,\mathbb{R}) \otimes_{\Phi_n} \mathbb{R}^{n+1}$:

при $n=1$, $F = x_{-1} y_0^2 - x_0 y_0 y_1 - x_1 y_1^2$;

$n=2$, $F_1 = x_0 y_1 + 2 x_1 y_2 - 2 x_{-1} y_0$,

$F_2 = 4 y_0 y_2 - y_1^2$;

$n=3$, $F = 4 y_0 y_2^3 + 27 y_0^2 y_3^2 + 4 y_1^3 y_3 - y_1^2 y_2^2 - 18 y_0 y_1 y_2 y_3$;

$n=4$, $F_1 = 72 y_0 y_2 y_4 + 9 y_1 y_2 y_3 - 27 y_0 y_3^2 - 2 y_2^3 - 27 y_1^2 y_4$,

$F_2 = y_2^2 + 12 y_0 y_4 - 3 y_1 y_3$;

$n=5$ и $n=6$ функции даны в приложении.

Таблица I

n	$\dim G$	$ind\, G$	$\dim O$	$\deg F_i$
I	5	I	4	3
2	6	2	4	2,2
3	7	I	6	4
4	8	2	6	2,3
5	9	3	6	4,8,I2
6	IO	4	6	2,4,6,IO

Во второй теореме описана серия квадратичных инвариантов представления Ad_g^* для любого четного $n = 2, 4, 6, \ldots$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть дана группа Ли $SL(2,\mathbb{R}) \otimes_{\varnothing_n} \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда функция F вида

$$F = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} y_i y_{n-i} \tag{2.I}$$

где $y_0, \ldots, y_n$ – стандартные координаты пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, является инвариантом коприсоединенного представления этой группы для $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$.

В третьей теореме описана серия инвариантов четвертой степени представления Ad_g^* для любого n.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть дана группа Ли $SL(2,\mathbb{R}) \otimes_{\varnothing_n} \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда функция F вида

$$\begin{aligned} F = A_0 y_0^2 y_n^2 &+ \sum_{r=1,3,\ldots} A_r \left(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(r-1)} 2 y_i y_{r-i} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(r-1)} 2 y_{n-i} y_{n+i-r} \right) + \\ &+ \sum_{s=2,4,\ldots} A_s \left(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(s-2)} 2 y_i y_{s-i} + y_{\frac{s}{2}}^2 \right) \left(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(s-2)} 2 y_{n-i} y_{n+i-s} + y_{n-\frac{s}{2}}^2 \right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

с коэффициентами $A_0 = 1$, $A_p = (-1)^p \binom{2n}{p}^{-1}$, $p = 1, \ldots, n-1$, $A_n = (-1)^n \left[2 \binom{2n}{n} \right]^{-1}$, где $y_0, \ldots, y_n$ – стандартные координаты в пространство $\mathbb{R}^{n+1}$, является инвариантом коприсоединенного представления этой группы для любого n.

Инварианты, описанные в теореме I, можно переписать в терминах классических результантов двух многочленов. Более точно, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $f(X) = y_0 X^n + y_1 X^{n-1} + \ldots + y_n$, и $g(X) = n y_0 X^{n-1} + (n-1) y_1 X^{n-2} + \ldots + y_{n-1}$, тогда функция F вида $F = \frac{1}{y_0} Res(f, g)$, где

$$
\operatorname{Res}(f,g)=\begin{vmatrix}
y_0 & y_1 & \dots & 0 & 0\\
0 & y_0 & \dots & 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & \dots & y_{n-1} & y_n\\
ny_0 & (n-1)y_1 & \dots & 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot\\
\cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot\\
0 & 0 & \dots & 2y_{n-2} & y_{n-1}
\end{vmatrix}
$$

является инвариантом коприсоединенного представления группы Ли $SL(2,\mathbb{R})\otimes_{\Phi_n}\mathbb{R}^{n+1}$ степени $2n-2$ для $1\leqslant n\leqslant 6$. Доказательство этой теоремы получается непосредственным сравнением явного вида инвариантов, описанных в теореме I, и результантов, указанных в теореме 4.

§ 3. Вычисление инвариантов

3.I. Система дифференциальных уравнений для инвариантов.

Для доказательства теоремы (2.I) достаточно указать в явном виде общее решение системы дифференциальных уравнений (I.I) для соответствующего n. Эти решения, как вытекает из главы I § I являются инвариантами коприсоединенного представления Ad^*_g. Обозначим через $\{e_{-1},e_0,e_1,v_0,v_1,\dots,v_n\}$ – базис алгебры Ли $G=$ $=sl(2,\mathbb{R})\oplus_{\varphi_n}\mathbb{R}^{n+1}$, а через $\{e^{-1},e^0,e^1,v^0,\dots,v^n\}$ соответствующий сопряженный базис в G^*. Пусть $\{x_{-1},x_0,x_1,y_0,\dots,y_n\}$ – координаты в G^*, отвечающие базису $\{e^{-1},e^0,e^1,v^0,\dots,v^n\}$.

<u>Предложение 3.I.I</u>. Дифференциальные операторы X_k, $k=-1,0,1$, Y_j, $j=0,\dots,n$, действующие в пространстве $C^\infty(G^*)$ гладких функций на G^*, имеют вид:

$$X_{-1}=\sum_{i=0}^{1}(-1)^i(2-i)x_i\frac{\partial}{\partial x_{i+1}}+\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)y_{i+1}\frac{\partial}{\partial y_i},$$

$$X_0=\sum_{i=1}^{2}2(-1)^i x_{2i-2}\frac{\partial}{\partial x_{2i-2}}+\sum_{i=0}^{n}(n-2i)y_i\frac{\partial}{\partial y_i},$$

$$X_1 = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} x_i \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} + \sum_{i=1}^{n} (n+1-i) y_{i-1} \frac{\partial}{\partial y_i},$$

$$Y_j = -(j+1) y_{j+1} \frac{\partial}{\partial x_{-1}} - (n-kj)\frac{\partial}{\partial x_0} - (n-j+1) y_{j-1} \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad (3.I.I)$$

$j = 0,\dots,n$; здесь оператор X_k отвечает базисному вектору x_k, $k=-1,0,1$, а Y_j – вектору y_j, $j=0,1,\dots,n$. Доказательство вытекает из вычисления структурного тензора C_{ij}^{k}, представленного в § I главы II, в данном базисе $\{e_{-1}, e_0, e_1, \dots v_n\}$ алгебры Ли G.

Из теоремы О.В.Мантурова (гл. I § I) вытекает, что при достаточно решить следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (i+1) y_{i+1} \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0,$$
$$\sum_{i=0}^{n} (n-ki) y_i \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0, \qquad (3.I.2)$$
$$\sum_{i=1}^{n} (n+1-i) y_{i-1} \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0$$

описывающую инварианты коприсоединенного представления. Методы решений таких систем см., например, в [43], [48], [93].
Нам потребуется также следующая теорема О.В.Мантурова (см. [28]).

<u>ТЕОРЕМА 3.I.I</u>. Пусть $G = sl(2,\mathbb{R}) \oplus_{\varphi_n} \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда имеет место равенство $\operatorname{ind} G = n-k$, где n – числовая отметка представления φ на схеме простых корней алгебры Ли $sl(2,\mathbb{R})$.
Напомним еще, что функции $f_1,\dots,f_m$ функционально независимы на поверхности M, когда их градиенты $\operatorname{grad} f_i$, $1 \le i \le m$, линейно независимы во всех точках этой поверхности $\operatorname{grad} f_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$.

3.2. Решение системы в случае $n=1$.

При $n=1$ размерность алгебры Ли $G = sl(2,\mathbb{R}) \oplus_{\varphi_n} \mathbb{R}^{n+1}$ равна пяти. Базис алгебры Ли G мы уже обозначили через $\{e_{-1}, e_0, e_1, v_0, v_1\}$, а через $\{x_{-1}, x_0, x_1, y_0, y_1\}$ были обозначены координаты в G^*, соответствующие сопряженному базису $\{e^{-1}, e^{0}, e^{1}, v^{0}, v^{1}\}$.

Дифференциальные операторы X_i, $i=-1,0,1$; Y_j, $j=0,1$, определенные выше, при $n=1$ принимают вид:

$$X_{-1} = 2x_{-1}\frac{\partial}{\partial x_0} - x_0\frac{\partial}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial}{\partial y_0},$$

$$X_0 = -2x_{-1}\frac{\partial}{\partial x_{-1}} + 2x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + y_0\frac{\partial}{\partial y_0} - y_1\frac{\partial}{\partial y_1},$$

$$X_1 = x_0\frac{\partial}{\partial x_{-1}} - 2x_1\frac{\partial}{\partial x_0} + y_0\frac{\partial}{\partial y_1},$$

$$Y_0 = -y_1\frac{\partial}{\partial x_{-1}} - y_0\frac{\partial}{\partial x_0},$$

$$Y_1 = y_1\frac{\partial}{\partial x_0} - y_0\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Чтобы найти инварианты, надо решить систему дифференциальных уравнений

$$X_{-1}F = X_0F = X_1F = Y_0F = Y_1F = 0 \qquad (3.2.1)$$

в частных производных. Эту систему дифференциальных уравнений решаем методом характеристик. Начинаем решать систему (3.2.1) с уравнения $Y_1F=0$; т.е. $y_1\frac{\partial F}{\partial x_0} - y_0\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$. Это уравнение эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений: $\frac{dx_{-1}}{0} = \frac{dx_0}{y_1} = \frac{dx_1}{-y_0} = \frac{dy_0}{0} = \frac{dy_1}{0}$. Эта система, очевидно, имеет четыре первых интеграла $x_{-1}=A_1$, $y_0=A_2$, $y_1=A_3$, $x_0y_0+y_1x_1=A_4$, где $A_1, A_2, A_3, A_4 = const$. Отсюда следует, что общее решение уравнения $Y_1F=0$ имеет вид: $F(x_{-1}, x_0, x_1, y_0, y_1) = F_1(x_{-1}, y_0, y_1, x_0y_0+y_1x_1)$. Решаем теперь уравнение $Y_0F=0$, т.е. $y_1\frac{\partial F}{\partial x_{-1}} + y_0\frac{\partial F}{\partial x_0} = 0$. Перейдем к переменным $v_1=x_{-1}$, $v_2=y_0$, $v_3=y_1$, $v_4=x_0y_0+y_1x_1$. Получим $v_3\frac{\partial F_1}{\partial v_1} + v_2^2\frac{\partial F_1}{\partial v_4} = 0$, а это уравнение в частных производных эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений: $\frac{dv_1}{v_3} = \frac{dv_2}{0} = \frac{dv_3}{0} = \frac{dv_4}{v_2^2}$. Эта система имеет три первых интеграла $v_2=B_1$, $v_3=B_2$, $v_1v_2^2 - v_3v_4 = B_3$, где $B_1, B_2, B_3 = const$. Из этого следует, что общее решение уравнения $Y_0F=0$ имеет вид: $F(x_{-1}, x_0, x_1, y_0, y_1) =$
$= F_2(v_2, v_3, v_1v_2^2 - v_3v_4) = F_2(y_0, y_1, x_{-1}y_0^2 - x_0y_0y_1 - x_1y_1^2)$

В уравнении $X_1F=0$, т.е. $x_0\frac{\partial F}{\partial x_{-1}} - 2x_1\frac{\partial F}{\partial x_0} + y_0\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0$

перейдем к новым переменным $w_1 = y_0$, $w_2 = y_1$, $w_3 = x_{-1}y_0^2 - x_0 y_0 y_1 - x_1 y_1^2$. Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем $w_1 \frac{\partial F_2}{\partial w_2} = 0$. Отсюда видно, что функция F_2 не зависит от переменной w_2. Итак, общее решение уравнения $X_1 F = 0$ имеет вид $F(x_{-1},\dots,y_1) = F_3(w_1, w_3) = F_3(y_0, x_{-1}y_0^2 - x_0 y_0 y_1 - x_1 y_1^2)$. Рассмотрим теперь уравнение $X_0 F = 0$, т.е.

$$-2x_{-1}\frac{\partial F}{\partial x_{-1}} + 2x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + y_0 \frac{\partial F}{\partial y_0} - y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} = 0 .$$

Перейдем к новым переменным $u_1 = y_0$, $u_2 = x_{-1}y_0^2 - x_0 y_0 y_1 - x_1 y_1^2$, получим $\frac{\partial F_3}{\partial u_1} = 0$. Следовательно, функция F_3 не зависит от u_1. Тогда общее решение уравнения $X_0 F = 0$ есть $F(x_{-1}, x_0, x_1, y_0 y_1) = F_4(u_2) = F_4(x_{-1}y_0^2 - y_0 x_0 y_1 - x_1 y_1^2)$.

Осталось последнее уравнение $X_{-1}F = 0$, т.е.

$$2x_{-1}\frac{\partial F}{\partial x_0} - x_0 \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial F}{\partial y_0} = 0 .$$

Подставим функцию F_4 в это уравнение. Получим $2x_{-1}(-y_0 y_1) - x_0(-y_1^2) + y_1(2x_{-1}y_0 - x_0 y_1) = 0$. Таким образом, общее решение системы дифференциальных уравнений (3.2.5) есть функция $F(x_{-1}, x_0, x_1, y_0 y_1) = H(x_{-1}y_0^2 - x_0 y_0 y_1 - x_1 y_1^2)$, где $H(t)$ – произвольная гладкая функция. Итак, имеется один базисный инвариант $x_{-1}y_0^2 - x_0 y_0 y_1 - x_1 y_1^2$ коприсоединенного представления алгебры Ли $G = sl(2,\mathbb{R}) \oplus_{\varphi_n} \mathbb{R}^2$. Любой другой инвариант функционально выражается через базисный. В случае $n=1$ теорема полностью доказана.

3.2. Решение системы в случае $n=2$.

При $n=2$ алгебра Ли $G = sl(2,\mathbb{R}) \oplus_{\varphi_n} \mathbb{R}^3$ имеет размерность $\dim G = 6$. Обозначим через $\{e_{-1}, e_0, e_1, v_0, v_1, v_2\}$ базис в G, а через $\{x_{-1}, x_0, x_1, y_0, y_1, y_2\}$ – координаты в G^*. В этом случае дифференциальные операторы X_i, $i=-1,0,1$, Y_j, $j=0,1,2$, принимают вид:

$$X_{-1} = 2x_{-1}\frac{\partial}{\partial x_0} - x_0\frac{\partial}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial}{\partial y_0} + 2y_2\frac{\partial}{\partial y_1},$$

$$X_0 = -2x_{-1}\frac{\partial}{\partial x_{-1}} + 2x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + 2y_0 - 2y_2\frac{\partial}{\partial y_2},$$

$$X_1 = x_0\frac{\partial}{\partial x_{-1}} - 2x_1\frac{\partial}{\partial x_0} + 2y_0\frac{\partial}{\partial y_1} + y_1\frac{\partial}{\partial y_2},$$

$$Y_0 = -y_1\frac{\partial}{\partial x_{-1}} - 2y_0\frac{\partial}{\partial x_0},$$

$$Y_1 = -2y_2\frac{\partial}{\partial x_{-1}} - 2y_0\frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$Y_2 = 2y_2\frac{\partial}{\partial x_0} - y_1\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Мы знаем, что функция F инвариант тогда и только тогда, когда

$$X_{-1}F = X_0F = X_1F = Y_0F = Y_1F = Y_2F = 0 \qquad (3.2.1)$$

Решаем эту систему дифференциальных уравнений в частных производных методом характеристик. Начинаем решать нашу систему с уравнения $Y_2F=0$, т.е. $2y_2\frac{\partial F}{\partial x_0} - y_1\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$. Переходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_{-1}}{0} = \frac{dx_0}{2y_2} = \frac{dx_1}{-y_1} = \frac{dy_0}{0} = \frac{dy_1}{0} = \frac{dy_2}{0}.$$

Интегрируя эту систему, получаем пять ее первых интегралов:

$x_{-1}=A_1$, $y_0=A_2$, $y_1=A_3$, $y_2=A_4$, $x_0y_1+2x_1y_2=A_5$, где $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5=const$. Итак, общее решение уравнения $Y_2F=0$ есть $F(x_{-1},\dots,y_2)=F_1(x_{-1},y_0,y_1,y_2,x_0y_1+2x_1y_2)$. Решаем теперь уравнение $Y_1F=0$, т.е. $y_2\frac{\partial F}{\partial x_{-1}} + y_0\frac{\partial F}{\partial x_1}=0$. Сделаем замену переменных $u_1=x_{-1}$, $u_2=y_0$, $u_3=y_1$, $u_4=y_2$, $u_5=x_0y_1+2x_1y_2$. Применяя правило дифференцирования сложной функции, получим уравнение $u_4\frac{\partial F_1}{\partial u_1} + 2u_2u_4\frac{\partial F_1}{\partial u_5}=0$, которое эквивалентно следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{du_1}{u_4} = \frac{du_2}{0} = \frac{du_3}{0} = \frac{du_4}{0} = \frac{du_5}{2u_2u_4}.$$

Интегрируя эту систему получим четыре первых интеграла $u_2=B_1$, $u_3=B_2$, $u_4=B_3$, $u_4u_5-2u_1u_2u_4=B_4$, где $B_1, B_2, B_3, B_4=const$. Из этого следует, что общее решение уравнения $Y_1F=0$ имеет вид

$$F(x_{-1},\dots,y_2)= F_2(y_0, y_1, y_2, x_0y_1y_2-2x_1y_2^2-2x_{-1}y_0y_2).$$

Решаем уравнение $Y_0 F = 0$, т.е. $y_1 \frac{\partial F}{\partial x_{-1}} + 2y_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} = 0$. Сделаем замену переменных $v_1 = y_0$, $v_2 = y_1$, $v_3 = y_2$, $v_4 = x_0 y_1 y_2 + 2x_1 y_2^2 - 2x_{-1} y_0 y_2$. Получим равенство $(-2y_0 y_1 + 2y_0 y_1)\frac{\partial F_2}{\partial v_4} = 0$; отсюда $\frac{\partial F_2}{\partial v_4} \equiv 0$. Итак, $F(x_{-1}, \ldots, y_2) = F_2(y_0, y_1, y_2, x_0 y_1 + 2x_1 y_2 - 2x_{-1} y_0)$.

Рассмотрим теперь уравнение $X_{-1} F = 0$, т.е. $2x_{-1} \frac{\partial F}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial F}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial F}{\partial y_0} + 2y_2 \frac{\partial F}{\partial y_1} = 0$. Перейдем к новым переменным $a_1 = y_0$, $a_2 = y_1$, $a_3 = y_2$, $a_4 = x_0 y_1 + 2x_1 y_2 - 2x_{-1} y_0$. Получим уравнение $a_2 \frac{\partial F_2}{\partial a_1} + 2a_3 \frac{\partial F_2}{\partial a_2} = 0$, которое эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений: $\frac{da_1}{a_2} = \frac{da_2}{2a_3} = \frac{da_3}{0} = \frac{da_4}{0}$. Последняя система имеет три первых интеграла $a_3 = C_1$, $a_4 = C_2$, $4a_1 a_3 - a_2^2 = C_3$, где $C_1, C_2, C_3 = const$. Общее решение уравнения $X_{-1} F = 0$ имеет вид $F(x_{-1}, \ldots, y_2) = F_3(a_3, a_4, 4a_1 a_3 - a_2^2) = F_3(y_2, x_0 y_1 + 2x_1 y_2 - 2x_{-1} y_0, 4y_0 y_2 - y_1^2)$.

Рассмотрим теперь уравнение $X_0 F = 0$.

Сделаем замену переменных $b_1 = y_2$, $b_2 = x_0 y_1 + 2x_1 y_2 - 2x_{-1} y_0$, $b_3 = 4y_0 y_2 - y_1^2$. Получим равенство $-2b_1 \frac{\partial F_3}{\partial b_1} = 0$. Следовательно, функция F_3 не зависит от переменной b_1. Итак, $F(x_{-1}, \ldots, y_2) = F_4(x_0 y_1 + 2x_1 y_2 - 2x_{-1} y_0, 4y_0 y_2 - y_1^2)$.

Осталось последнее уравнение $X_1 F = 0$. Перейдем к новым переменным $C_1 = x_0 y_1 + 2x_1 y_2 - 2x_{-1} y_0$, $C_2 = 4y_0 y_2 - y_1^2$. Получим $\frac{\partial F_4}{\partial c_1} \cdot 0 + \frac{\partial F_4}{\partial c_2} \cdot 0 = 0$; $0 = 0$. Общее решение системы дифференциальных уравнений (3.2.1) имеет вид

$$F(x_{-1}, \ldots, y_2) = H(x_0 y_1 - 2x_1 y_1 - 2x_{-1} y_0, 4y_0 y_2 - y_1^2)$$

где H – произвольная гладкая функция. Итак, имеется два базисных инварианта $F_1 = x_0 y_1 - 2x_1 y_1 - 2x_{-1} y_0$, $F_2 = 4y_0 y_2 - y_1^2$ коприсоединенного представления алгебры Ли $sl(2,\mathbb{R}) \oplus_{\varphi_n} \mathbb{R}^{n+1}$. Любой другой инвариант функционально выражается через базисные. Для доказательства теоремы осталось проверить, что функции F_1, F_2

функционально независимы, т.е. градиенты $\mathrm{grad}\,F_1$, $\mathrm{grad}\,F_2$ линейно независимы. Поскольку $\mathrm{grad}\,F = \left\{\frac{\partial F}{\partial x_{-1}}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial y_2}\right\}$, то для F_1 и F_2 получим

$$\mathrm{grad}\,F_1 = \{-2y_0,\ y_1,\ 2y_2,\ -2x_{-1},\ x_0,\ 2x_1\}$$

$$\mathrm{grad}\,F_2 = \{0,\ 0,\ 0,\ 4y_2,\ -2y_1,\ 4y_0\}.$$

В нашем случае градиенты $\mathrm{grad}\,F_1$ и $\mathrm{grad}\,F_2$ линейно независимы, так как определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & 2x_1 \\ -2y_1 & 4y_0 \end{vmatrix} = 4(x_0y_0 + x_1y_1) \neq 0$$

не равен нулю. Из этого следует, что функции F_1 и F_2 функционально независимы. В случае $n=2$ теорема полностью доказана.

3.3. Решение системы в случае $n=3$

При $n=3$ размерность алгебры Ли $G = sl(2,\mathbb{R}) \oplus_{\varphi_n} \mathbb{R}^4$ равна семи.

Дифференциальные операторы X_i, $i=-1,0,1$; Y_j, $j=0,1,2,3$ принимают вид:

$$X_{-1} = 2x_{-1}\frac{\partial}{\partial x_0} - x_0\frac{\partial}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial}{\partial y_0} + 2y_2\frac{\partial}{\partial y_1} + 3y_3\frac{\partial}{\partial y_2},$$

$$X_0 = -2x_{-1}\frac{\partial}{\partial x_{-1}} + 2x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + 3y_0\frac{\partial}{\partial y_0} + y_1\frac{\partial}{\partial y_1} - y_2\frac{\partial}{\partial y_2} - 3y_3\frac{\partial}{\partial y_3},$$

$$X_1 = x_0\frac{\partial}{\partial x_{-1}} - 2x_1\frac{\partial}{\partial x_0} + 3y_0\frac{\partial}{\partial y_1} + 2y_1\frac{\partial}{\partial y_2} + y_2\frac{\partial}{\partial y_3},$$

$$Y_0 = -y_1\frac{\partial}{\partial x_{-1}} - 3y_0\frac{\partial}{\partial x_0},$$

$$Y_1 = -2y_2\frac{\partial}{\partial x_{-1}} - y_1\frac{\partial}{\partial x_0} - 3y_0\frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$Y_2 = -3y_3\frac{\partial}{\partial x_{-1}} + y_2\frac{\partial}{\partial x_0} - 2y_1\frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$Y_3 = 3y_3\frac{\partial}{\partial x_0} - y_2\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Решая систему дифференциальных уравнений

$$X_{-1}F = X_0F = X_1F = Y_0F = Y_1F = Y_2F = Y_3F = 0 \qquad (3.3.1)$$

в частных производных получим функцию F, которая является инвариантом коприсоединенного представления. Далее используем метод характеристик.

Начинаем решать систему (3.3.1) с уравнения $Y_0 F = 0$, т.е. $y_1 \frac{\partial F}{\partial x_{-1}} + 3y_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} = 0$. Это уравнение эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_{-1}}{y_1} = \frac{dx_0}{3y_0} = \frac{dx_1}{0} = \frac{dy_0}{0} = \frac{dy_1}{0} = \frac{dy_2}{0} = \frac{dy_3}{0}.$$

Эта система, очевидно, имеет шесть первых интеграла $x_1 = A_1$, $y_0 = A_2$, $y_1 = A_3$, $y_2 = A_4$, $y_3 = A_5$, $3x_{-1}y_0 - x_0 y_1 = A_6$, где $A_1, \ldots, A_6 = const$. Отсюда следует, что общее решение уравнения $Y_0 F = 0$ имеет вид

$$F(x_{-1}, \ldots, y_3) = F_1(3x_{-1}y_0 - x_0 y_1; x_1, y_0, y_1, y_2, y_3).$$

Теперь решаем уравнение $Y_3 F = 0$, т.е. $3y_3 \frac{\partial F}{\partial x_0} - y_2 \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$. Перейдем к новым переменным $v_1 = 3x_{-1}y_0 - x_0 y_1$, $v_2 = x_1$, $v_3 = y_0$, $v_4 = y_1$, $v_5 = y_2$, $v_6 = y_3$. Получим $-3v_4 v_6 \frac{\partial F_1}{\partial v_1} - v_5 \frac{\partial F_1}{\partial v_2} = 0$.

Это уравнение в частных производных эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dv_1}{3v_4 v_6} = \frac{dv_2}{v_5} = \frac{dv_3}{0} = \frac{dv_4}{0} = \frac{dv_5}{0} = \frac{dv_6}{0}.$$

Эта система имеет пять первых интеграла $v_3 = B_1$, $v_4 = B_2$, $v_5 = B_3$, $v_6 = B_4$, $3v_2 v_4 v_6 - v_1 v_5 = B_5$, где $B_i = const$, $i = 1, \ldots, 5$.

Отсюда следует, что общее решение уравнения $Y_3 F = 0$ имеет вид: $F(x_{-1}, \ldots y_3) = F_2(3x_1 y_1 y_3 - 3x_{-1} y_0 y_2 + x_0 y_1 y_2; x_1, y_1, y_2, y_3)$.

В уравнении $Y_1 F = 0$, т.е. $2y_2 \frac{\partial F}{\partial x_{-1}} + y_1 \frac{\partial F}{\partial x_0} + 3y_0 \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$ переходим к переменным $u_1 = 3x_1 y_1 y_3 - 3x_{-1} y_0 y_2 + x_0 y_1 y_2$, $u_2 = y_0$, $u_3 = y_1$, $u_4 = y_2$, $u_5 = y_3$.

Получим $(-6y_2^2 y_0 + y_1^2 y_2 + 9y_0 y_1 y_3)\frac{\partial F_2}{\partial u_1} = 0$. Из вышесказанного видно, что $\frac{\partial F_2}{\partial u_1} = 0$, т.е. функция F_2 не зависит от переменной u_1. Следовательно, функция F_2 зависит только от переменных y_0, y_1, y_2, y_3, т.е.

$$F(x_{-1}, x_0, x_1, y_1, y_2, y_3) = F_2(y_0, y_1, y_2, y_3).$$

Замечание. То, что функция F зависит только от координат y_0, y_1, y_2, y_3 для $n \geqslant 3$, следует также из теоремы I.3 О.В.Мантурова (глава I § I). Итак, задача вычисления инвариантов коприсоединенного представления группы $SL(2,\mathbb{R}) \otimes_{\varphi_n} \mathbb{R}^{n+1}$ сводится к задаче нахождения инвариантов представления φ_n. Отсюда видно, что для нахождения инвариантов коприсоединенного представления в случае $n=3$ надо решить систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} &1)\ y_1 \frac{\partial F}{\partial y_0} + 2y_2 \frac{\partial F}{\partial y_1} + 3y_3 \frac{\partial F}{\partial y_2} = 0, \\ &2)\ 3y_0 \frac{\partial F}{\partial y_0} + y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} - y_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} - 3y_3 \frac{\partial F}{\partial y_3} = 0, \\ &3)\ 3y_0 \frac{\partial F}{\partial y_1} + 2y_1 \frac{\partial F}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial F}{\partial y_3} = 0. \end{aligned} \qquad (3.3.2)$$

Решение системы (3.3.2) начинаем с уравнения I), т.е.

$$y_1 \frac{\partial F}{\partial y_0} + 2y_2 \frac{\partial F}{\partial y_1} + 3y_3 \frac{\partial F}{\partial y_2} = 0.$$

Переходим к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений: $\frac{dy_0}{y_1} = \frac{dy_1}{2y_2} = \frac{dy_2}{3y_3} = \frac{dy_3}{0}$,

Эта система, очевидно, имеет три первых интеграла $y_3 = A_1$, $3y_1y_3 - y_2^2 = A_2$, $27y_0y_3^2 - 9y_1y_2y_3 + 2y_2^3 = A_3$, где $A_1, A_2, A_3 = const$.

Видно, что общее решение этого уравнения I) имеет вид

$$F(y_0, y_1, y_2, y_3) = F_1(27y_0y_3^2 - 9y_1y_2y_3 + 2y_2^3,\ 3y_1y_3 - y_2^2,\ y_3)$$

Теперь решаем уравнение 2), т.е. $3y_0 \frac{\partial F}{\partial y_0} + y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} - y_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} - 3y_3 \frac{\partial F}{\partial y_3} = 0$. Перейдем к новым переменным $a_1 = 27y_0y_3^2 - 9y_1y_2y_3 + 2y_2^3$; $a_2 = 3y_1y_3 - y_2^2$, $a_3 = y_3$. Получим уравнение $-3a_1 \frac{\partial F_1}{\partial a_1} - 2a_2 \frac{\partial F_1}{\partial a_1} - 3a_3 \frac{\partial F_1}{\partial a_3} = 0$. Переходим к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{da_1}{3a_1} = \frac{da_2}{2a_2} = \frac{da_3}{3a_3}$. Решая эту систему, получим два первых интеграла $\frac{a_1}{a_3} = B_1$, $a_2^3 \cdot a_3^{-2} = B_2$, где $B_1, B_2 = const$. Итак, общее решение уравнения 2) принимает вид $F(y_0, \ldots, y_3) = F_3(a_1 \cdot a_3^{-1}, a_2^3 \cdot a_3^{-2})$, где $a_1 = 27y_0y_3^2 - 9y_1y_2y_3 + 2y_2^3$, $a_2 = 3y_1y_3 - y_2^2$, $a_3 = y_3$.

Осталось решить последнее уравнение 3), т.е. $3y_0 \frac{\partial F}{\partial y_1} + 2y_1 \frac{\partial F}{\partial y_2} + y_2 \frac{\partial F}{\partial y_3} = 0$. Перейдем к новым переменным $b_1 = a_1 \cdot a_3^{-1}$, $b_2 = a_2^3 \cdot a_3^{-2}$ и применяя правило дифференцирования сложной функции, получим $2\frac{\partial H}{\partial b_1} - b_1 \frac{\partial H}{\partial b_2} = 0$, а это уравнение эквивалентно следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{db_1}{2} = \frac{db_2}{-b_1}$. Эта система имеет один первый интеграл $b_1^2 + 4b_2 = const$. Переходим к переменным y_0, y_1, y_2, y_3, получим: $b_1^2 + 4b_2 = a_1^2 \cdot a_3^{-2} + 4a_2^3 \cdot a_3^{-2} = 4y_0 y_2^3 + 27 y_0^2 y_3^2 + 4y_1^3 y_3 - y_1^2 y_2^2 - 18 y_0 y_1 y_2 y_3$

Итак, общее решение системы дифференциальных уравнений (3.3.2) есть функция $F(y_0, y_1, y_2, y_3) = H(4y_0y_2^3 + 27y_0^2y_3^2 + 4y_1^3y_3 - y_1^2y_2^2 - 18y_0y_1y_2y_3)$, где $H(t)$ – произвольная гладкая функция.

Таким образом, имеется один базисный инвариант $F = 4y_0y_2^3 + 27y_0^2y_3^2 + 4y_1^3y_3 - y_1^2y_2^2 - 18y_0y_1y_2y_3$ коприсоединенного представления алгебры Ли $G = sl(2,R) \oplus_{\varphi_n} R^{n+1}$. Любой другой инвариант функционально выражается через базисный. В случае $n = 3$ теорема полностью доказана.

3.4. Решение системы в случае $n = 4$.

При $n = 4$ размерность алгебры Ли $G = sl(2,R) \oplus_{\varphi_n} R^5$ равна восьми.

Согласно теореме О.В.Мантурова задача нахождения инвариантов коприсоединенного представления сводится к решению следующих уравнений в частных производных

$$\begin{aligned}
&1)\ y_1 \frac{\partial F}{\partial y_0} + 2y_0 \frac{\partial F}{\partial y_1} + 3y_3 \frac{\partial F}{\partial y_2} + 4y_4 \frac{\partial F}{\partial y_3} = 0, \\
&2)\ 4y_0 \frac{\partial F}{\partial y_0} + 2y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} - 2y_3 \frac{\partial F}{\partial y_3} - 4y_4 \frac{\partial F}{\partial y_4} = 0, \qquad (3.4.1) \\
&3)\ 4y_0 \frac{\partial F}{\partial y_1} + 3y_1 \frac{\partial F}{\partial y_2} + 2y_2 \frac{\partial F}{\partial y_3} + y_3 \frac{\partial F}{\partial y_4} = 0.
\end{aligned}$$

Эту систему дифференциальных уравнений (3.4.I) также решаем методом характеристик. Начинаем с уравнения I).

Переходим к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений: $\frac{dy_0}{y_1} = \frac{dy_1}{2y_2} = \frac{dy_2}{3y_3} = \frac{dy_3}{4y_4} = \frac{dy_4}{0}$.

Получаем четыре первых интеграла $y_4 = A_1$, $8y_2y_4 - 3y_3^2 = A_2$, $16y_1y_4^2 - 8y_2y_3y_4 + 2y_3^3 = A_3$, $256y_0y_4^3 - 64y_1y_3y_4^2 + 16y_2y_3^2y_4 - 3y_3^4 = A_4$, где $A_1, A_2, A_3, A_4 = const$.

Введем новые переменные: $v_1 = y_4$, $v_2 = 8y_2y_4 - 3y_3^2$,

$v_3 = 16y_1y_4^2 - 8y_2y_3y_4 + 2y_3^3$,

$v_4 = 256y_0y_4^3 - 64y_1y_3y_4^2 + 16y_2y_3^2y_4 - 3y_3^4$.

Удобнее вместо первого интеграла v_4 взять v_4' интеграл, который функционально зависит от остальных интегралов, вследствие чего, вместо функции v_4 степени четыре, получаем функцию v_4' степени два, т.е.

$$v_4' = \frac{3v_4 + v_2^2}{64v_1^2} = 12y_0y_4 - 3y_1y_3 + y_2^2 .$$

Итак, общее решение уравнения I) принимает вид

$F(y_0,\dots,y_4) = F_1(16y_1y_4^2 - 8y_2y_3y_4 + 2y_3^3,\ 12y_0y_4 - 3y_1y_3 + y_2^2,\ 8y_2y_4 - 3y_3^2,\ y_4)$.

Теперь рассмотрим уравнение 2), переходя к новым переменным v_1, v_2, v_3, v_4' получим

$$\frac{dv_1}{3v_1} = \frac{dv_2}{0} = \frac{dv_3}{2v_3} = \frac{dv_4'}{2v_4} .$$

Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет три первых интеграла, а именно $B_1 = v_1$, $v_3 \cdot v_4'^{-1} = B_2$, $v_1^2 \cdot v_4'^{-3} = B_3$, где $B_1, B_2, B_3 = const$. Отсюда следует, что общее решение уравнения 2) имеет вид $F(y_0,\dots,y_4) = F_2(v_1^2 \cdot v_4'^{-3},\ v_3 \cdot v_4'^{-1},\ v_2)$

Осталось последнее уравнение 3), переходя к новым переменным $z_1 = v_1^2 \cdot v_4'^{-3}$, $z_2 = v_3 \cdot v_4'^{-1}$, $z_3 = v_2$, где $v_1 = 16y_1y_4^2 - 8y_2y_3y_4 + 2y_3^3$, $v_2 = 12y_0y_4 - 3y_1y_3 + y_2^2$, $v_3 = 8y_2y_4 - 3y_3^2$, $v_4 = y_4$ и применяя правило дифференцирования сложной функции, получим: $\frac{dz_1}{4(16z_3 - z_2^2)} = \frac{dz_2}{9} = \frac{dz_3}{0}$. А эта система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет два первых интеграла $\frac{1}{16}(27z_1+4z_2^3-192z_2z_3)=C_1$, $z_3=C_2$, где $C_1, C_2=const$.

Переходим к переменным y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, получим

$$C_1 = 72y_0y_2y_4+9y_1y_2y_3-27y_0y_3^2-2y_2^3-27y_1^2y_4,$$

$$C_2 = y_2^2+12y_0y_4-3y_1y_3.$$

Итак, общее решение системы дифференциальных уравнений (3.4.I) имеет вид $F(y_0,y_1,y_2,y_3,y_4) = H(72y_0y_4y_2+9y_1y_2y_3-27y_0y_3^2-2y_2^3-27y_1^2y_4,\ y_2^2+12y_0y_4-3y_1y_3)$

где $H(t)$ – произвольная гладкая функция.

Таким образом, имеются два базисные инварианта $F_2=y_2^2+12y_0y_4-3y_1y_3$, $F_1=72y_0y_2y_4+9y_1y_2y_3-27y_0y_3^2-2y_2^3-27y_1^2y_4$ коприсоединенного представления алгебры Ли $G=sl(2,\mathbb{R})\underset{\varphi_4}{\oplus}\mathbb{R}^5$. Любой другой инвариант функционально выражается через базисные. Для доказательства теоремы осталось проверить, что функции F_1, F_2 функционально независимы, т.е. их градиенты линейно независимы.

Итак,

$$\operatorname{grad} F_1 = \{72y_2y_4-27y_3^2,\ 9y_2y_3-54y_1y_4,\ 72y_0y_4+9y_1y_3-6y_2^2,$$
$$9y_1y_2-54y_0y_3,\ 72y_0y_2-27y_1^2\},$$

$$\operatorname{grad} F_2 = \{12y_4,\ -3y_3,\ 2y_2,\ -3y_1,\ 12y_0\}.$$

В нашем случае градиенты функции F_1 и F_2 линейно независимы, так как определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_0} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_0} & \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 72y_2y_4-27y_3^2 & 9y_2y_3-54y_1y_4 \\ 12y_4 & -3y_3 \end{vmatrix} =$$

$$= 324(y_3^3-4y_2y_3y_4+8y_1y_4^2)\neq 0$$

не равен нулю. Из этого следует, что функции F_1 и F_2 функционально независимы. В случае $n=4$ теорема полностью доказана.

3.5. Решение системы в случае $n=5$.

В случае $n=5$ алгебра Ли $G = sl(2,\mathbb{R}) \oplus_{\varphi_n} \mathbb{R}^6$ имеет размерность девять $\dim G = 9$.

Снова, чтобы найти инварианты, в силу теоремы О.В.Мантурова, надо решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & y_1 \frac{\partial F}{\partial y_0} + 2y_2 \frac{\partial F}{\partial y_1} + 3y_3 \frac{\partial F}{\partial y_2} + 4y_4 \frac{\partial F}{\partial y_3} + 5y_5 \frac{\partial F}{\partial y_4} = 0 \qquad (1) \\ & 5y_0 \frac{\partial F}{\partial y_0} + 3y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} - y_3 \frac{\partial F}{\partial y_3} - 3y_4 \frac{\partial F}{\partial y_4} - 5y_5 \frac{\partial F}{\partial y_5} = 0 \qquad (2) \\ & 5y_0 \frac{\partial F}{\partial y_1} + 4y_1 \frac{\partial F}{\partial y_2} + 3y_2 \frac{\partial F}{\partial y_3} + 2y_3 \frac{\partial F}{\partial y_4} + y_4 \frac{\partial F}{\partial y_5} = 0 \qquad (3) \end{aligned} \tag{3.5.I}$$

в частных производных. Начинаем с уравнения (I). Решаем его методом характеристик, переходим к системе

$$\frac{dy_0}{y_1} = \frac{dy_1}{2y_2} = \frac{dy_2}{3y_3} = \frac{dy_3}{4y_4} = \frac{dy_4}{5y_5} = \frac{dy_5}{0} \tag{4}$$

обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решая эту систему получаем следующие первые интегралы:

$v_1(y_0,\ldots,y_5) = y_5$; $v_2(y_0,\ldots,y_5) = 5y_3y_5 - 2y_4^2$;

$v_3(y_0,\ldots,y_5) = 25y_2y_5^2 - 15y_3y_4y_5 + 4y_4^3$; $v_4(y_0,\ldots,y_5) =$

$= 125y_1y_5^3 - 50y_2y_4y_5^2 + 15y_3y_4^2y_5 - 3y_4^4$; $v_5(y_0,\ldots,y_5) =$

$= 3125y_0y_5^4 - 625y_1y_4y_5^3 + 125y_2y_4^2y_5^2 - 25y_3y_4^3y_5 + 4y_4^5$.

Удобно вместо первого интеграла v_4 степени четыре, взять интеграл v_4' степени два, т.е.

$$v_4' = \frac{4v_4 + 3v_2^2}{25v_1^2} = 20y_1y_5 - 8y_2y_4 + 3y_3^2 ,$$

а вместо v_5 степени пять взять новый интеграл v_5' степени три, т.е. $v_5' = \dfrac{2v_5 + v_2v_3}{25v_1^2} = 250y_0y_5^2 - 50y_1y_4y_5 + 8y_2y_4^2 + 5y_2y_3y_4 + 3y_3^2y_4$.

Новые первые интегралы v_4' , v_5' функционально зависят от остальных. Итак, общим решением уравнения (I) есть функция:

$$F = H(250y_0y_5^2 - 50y_1y_4y_5 + 8y_2y_4^2 + 5y_2y_3y_5 - 3y_3^2y_4,\ 25y_2y_5^2 - 15y_3y_4y_5 + 4y_4^3,\ 20y_1y_5 - 8y_2y_4 + 3y_3^2,\ 5y_3y_5 - 2y_4^2,\ y_5)$$

где H - произвольная гладкая функция.

Переходим теперь к решению уравнения (2), т.е.

$$5y_0\frac{\partial F}{\partial y_0}+3y_1\frac{\partial F}{\partial y_1}+y_2\frac{\partial F}{\partial y_2}-y_3\frac{\partial F}{\partial y_3}-3y_4\frac{\partial F}{\partial y_4}-5y_5\frac{\partial F}{\partial y_5}=0.$$

Перейдем к новым переменным $v_1,\dots,v_5$, получим уравнение

$$5v_1\frac{\partial H}{\partial v_1}+9v_2\frac{\partial H}{\partial v_2}+4v_3\frac{\partial H}{\partial v_3}+6v_4\frac{\partial H}{\partial v_4}+5v_5\frac{\partial H}{\partial v_5}=0$$

которое эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dv_1}{5v_1}=\frac{dv_2}{9v_2}=\frac{dv_3}{4v_3}=\frac{dv_4}{6v_4}=\frac{dv_5}{5v_5}. \qquad (5)$$

Найдем полную систему функционально независимых первых интегралов системы (5), Решая эту систему получаем следующие первые интегралы: $z_1=v_1\cdot v_5^{-1}$, $z_2=v_2\cdot v_5^{-\frac{9}{5}}$, $z_3=v_3\cdot v_5^{-\frac{4}{5}}$, $z_4=v_4\cdot v_5^{-\frac{6}{5}}$.

Отсюда вытекает, что общее решение уравнения (2) имеет вид

$$F=H\left(v_1\cdot v_5^{-1},\ v_2\cdot v_5^{-\frac{9}{5}},\ v_3\cdot v_5^{-\frac{4}{5}},\ v_4\cdot v_5^{-\frac{6}{5}}\right)=H(z_1,z_2,z_3,z_4)$$

где H – произвольная гладкая функция.

Рассмотрим теперь последнее уравнение (3), т.е.

$$5y_0\frac{\partial F}{\partial y_1}+4y_1\frac{\partial F}{\partial y_2}+3y_2\frac{\partial F}{\partial y_3}+2y_3\frac{\partial F}{\partial y_4}+y_4\frac{\partial F}{\partial y_5}=0.$$

Перейдем в этом уравнении к новым переменным z_1,z_2,z_3,z_4. Последовательно применяя правило дифференцирования сложной функции получим уравнение

$$(5z_2^2+6z_4^3-100z_3z_4)\frac{\partial H}{\partial z_1}+(625z_3-225z_4^2)\frac{\partial H}{\partial z_2}+50z_1\frac{\partial H}{\partial z_3}+75z_2\frac{\partial H}{\partial z_4}=0 \qquad (6)$$

которое эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_1}{5z_2^2+6z_4^3-100z_4z_3}=\frac{dz_2}{625z_3-225z_4^2}=\frac{dz_3}{50z_1}=\frac{dz_4}{75z_2}=\frac{dt}{t}.$$

Полную систему функционально независимых первых интегралов этой системы будем искать методом неопределенных коэффициентов. Ищем первый интеграл в виде многочлена степени 4, $H=a_1z_1^2+a_2z_1z_2z_4+a_3z_3^2z_4+a_4z_3z_2^2+a_5z_3z_4^3+a_6z_2^2z_4^2+a_7z_4^5$.

Подставляя эту функцию в (6), найдем коэффициенты a_i, $i=1,\dots,7$. Окончательно получим первый интеграл $H = 25z_1^2 + 50z_3^2z_4 - 3z_2^2z_3 - 6z_3z_4^3$ степени 4 от исходных координат $y_0,\dots,y_5$. Выражая H через $v_1,\dots,v_5$, а потом через $y_0,\dots,y_5$, получим явный вид $F_1 = 625y_0^2y_5^2 + 9y_1^2y_4^2 - 2y_2^2y_3^2 - 250y_0y_1y_4y_5 + 25y_0y_2y_3y_5 - 19y_1y_2y_3y_4 + 40y_1^2y_3y_5 + 40y_0y_2y_4^2 - 15y_1y_2^2y_5 - 15y_0y_3^2y_4 + 6y_1y_3^3 + 6y_2^3y_4$ интеграла H через исходное переменное $x_1, y_0,\dots,y_5$ (фактически, H зависит только от $y_0,\dots,y_5$ (см. теорему О.В.Мантурова глава I § I)).

Для нахождения остальных первых интегралов вернемся к исходной системе дифференциальных уравнений (3.5.I). Эта система обладает некоторыми симметриями, которые, фактически, являются отражением симметрий системы весов данного представления относительно группы Вейля. Потому естественно искать первые интегралы в классе многочленов, инвариантных относительно группы Вейля, т.е. в классе симметрических многочленов от координат $y_0,\dots,y_5$, относительно этого действия. Для описания интегралов полезно каждой переменной y_0, y_1, y_2 приписать вес ω: $\omega(y_0)=5$, $\omega(y_1)=3$, $\omega(y_2)=1$ и $\omega(f\cdot g)=\omega(f)+\omega(g)$ для любых двух многочленов f, g от переменных y_0, y_1, y_2. Выпишем все мономы, которые содержатся в многочленах вида $X_1 y_2^i$, $i=1,2,3,\dots,9$, в виде таблицы № I. В этой таблице для всех мономов указаны их веса. Таблица находится в Приложении.

Используя таблицу I функцию F_2 будем искать в виде многочлена, состоящего из следующих одночленов:

$A_1\ y_0^4y_5^4$	$A_5\ y_0^3y_2y_3y_5^3$	$A_9\ y_0^2y_1^2y_4^2y_5^2$
$A_2\ y_0^3y_3^2y_4y_5^2$	$A_6\ y_0^3y_2y_4^2y_5^2$	$A_{10}\ y_0^2y_1^2y_3y_5^3$
$A_3\ y_0^3y_3y_4^3y_5$	$A_7\ y_0^3y_1y_4y_5^3$	$A_{11}\ y_0^2y_3^4y_4^2$
$A_4 = y_0^3y_4^5$	$A_8\ y_0^2y_1y_2^2y_5^3$	$A_{12}\ y_0^2y_3^5y_5$

$A_{13}\ y_0^2 y_2 y_3^2 y_4^3$

$A_{14}\ y_0^2 y_2 y_3^3 y_4 y_5$

$A_{15}\ y_0^2 y_2^2 y_4^4$

$A_{16}\ y_0^2 y_2^2 y_3^2 y_5^2$

$A_{17}\ y_0^2 y_2^2 y_3 y_4^2 y_5$

$A_{18}\ y_0^2 y_1 y_3 y_4^4$

$A_{19}\ y_0^2 y_1 y_3^3 y_5^2$

$A_{20}\ y_0^2 y_2^3 y_4 y_5^2$

$A_{21}\ y_0^2 y_1 y_3^2 y_4^2 y_5$

$A_{22}\ y_0^2 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5^2$

$A_{23}\ y_0^2 y_1 y_2 y_4^3 y_5$

$A_{24}\ y_0 y_1^3 y_2 y_5^3$

$A_{25}\ y_0 y_2 y_3^6$

$A_{26}\ y_0 y_2^2 y_3^4 y_4$

$A_{27}\ y_0 y_2^3 y_3^2 y_4^2$

$A_{28}\ y_0 y_2^3 y_3^3 y_5$

$A_{29}\ y_0 y_1 y_3^5 y_4$

$A_{30}\ y_0 y_2^4 y_4^3$

$A_{31}\ y_0 y_1 y_2 y_3^3 y_4^2$

$A_{32}\ y_0 y_1 y_2 y_3^4 y_5$

$A_{33}\ y_0 y_2^4 y_3 y_4 y_5$

$A_{34}\ y_0 y_2^5 y_5^2$

$A_{35}\ y_0 y_1 y_2^2 y_3^4 y_4 y_5$

$A_{36}\ y_0 y_1 y_2^2 y_3 y_4^3$

$A_{37}\ y_0 y_1 y_2^3 y_3 y_5^2$

$A_{38}\ y_0 y_1^2 y_3^2 y_4^3$

$A_{39}\ y_0 y_1^2 y_3^3 y_4 y_5$

$A_{40}\ y_0 y_1^2 y_2 y_4^4$

$A_{41}\ y_0 y_1 y_2^3 y_4^2 y_5$

$A_{42}\ y_0 y_1^2 y_2 y_3 y_4^2 y_5$

$A_{43}\ y_0 y_1^2 y_2 y_3^2 y_5^2$

$A_{44}\ y_0 y_1^2 y_2^2 y_4 y_5^2$

$A_{45}\ y_0 y_1^3 y_4^3 y_5$

$A_{46}\ y_0 y_1^3 y_3 y_4 y_5^2$

$A_{47}\ y_1^5 y_5^3$

$A_{48}\ y_1^4 y_4^4$

$A_{49}\ y_1^4 y_3^2 y_5^2$

$A_{50}\ y_1^4 y_3 y_4^2 y_5$

$A_{51}\ y_1^4 y_2 y_4 y_5^2$

$A_{52}\ y_1^3 y_2^2 y_4^2 y_5$

$A_{53}\ y_1^3 y_2^2 y_3 y_5^2$

$A_{54}\ y_1^3 y_2 y_3^2 y_4 y_5$

$A_{55}\ y_1^3 y_2 y_3 y_4^3$

$A_{56}\ y_1^3 y_3^4 y_5$

$A_{57}\ y_1^3 y_3^3 y_4^2$

$A_{58}\ y_1^2 y_2^4 y_5^2$

$A_{59}\ y_1^2 y_2^3 y_3 y_4 y_5$

$A_{60}\ y_1^2 y_2^2 y_3^3 y_5$

$A_{61}\ y_1^2 y_2^2 y_3^3 y_5$

$A_{62}\ y_1^2 y_2^2 y_3^2 y_4^2$

$A_{63}\ y_1^2 y_2 y_3^4 y_4$

$A_{64}\ y_1^2 y_3^6$

$A_{65}\ y_1 y_2^3 y_3^3 y_4$

$A_{66}\ y_1 y_2^2 y_3^5$

$A_{67}\ y_1 y_2^4 y_3 y_4^2$

$A_{68}\ y_1 y_2^4 y_3^2 y_5$

$A_{69}\ y_1 y_2^5 y_4 y_5$

$A_{70}\ y_2^6 y_4^2$

$A_{71}\ y_2^6 y_3 y_5$

$A_{72}\ y_2^5 y_3^2 y_4$

$A_{73}\ y_2^4 y_3^4$.

Рассмотрим преобразование S координат

которое индуцируется группой Вейля на системе весов данного представления. Тогда коэффициенты в многочлене F_2 , стоящие при мономах, симметрических относительно преобразования S равны, т.е.

$$A_2=A_8,\quad A_{14}=A_{37},\quad A_{25}=A_7,\quad A_{38}=A_{52},$$
$$A_3=A_{24},\quad A_{15}=A_{49},\quad A_{26}=A_{68},\quad A_{39}=A_{40},$$
$$A_4=A_{47},\quad A_{17}=A_{43},\quad A_{27}=A_{61},\quad A_{41}=A_{50},$$
$$A_6=A_{10},\quad A_{18}=A_{51},\quad A_{29}=A_{69},\quad A_{57}=A_{60},$$
$$A_{11}=A_{58},\quad A_{19}=A_{40},\quad A_{30}=A_{56},\quad A_{63}=A_{67},$$
$$A_{12}=A_{34},\quad A_{21}=A_{44},\quad A_{31}=A_{59},\quad A_{64}=A_{70},$$
$$A_{13}=A_{53},\quad A_{23}=A_{46},\quad A_{32}=A_{33},\quad A_{66}=A_{72}.$$

Подставляя теперь функцию F_2 в уравнение (I) из системы (3.5.I) получим систему линейных алгебраических уравнений на коэффициенты A_i, $i=1,\dots,73$. Решая ее, найдем коэффициенты функции F_2. Таким путем мы получили инвариант F_2. Аналогично получается третий инвариант F_3 двенадцатой степени (десятой степени инвариант не существует - все коэффициенты обращаются в ноль).

Функции F_3 и F_2 принимают очень громоздкий вид и поэтому представлены в Приложении. Итак, общее решение системы дифференциальных уравнений (3.5.I), описывающей инварианты коприсоединенного представления для G, имеет вид $F(y_0,\dots y_5)=H(F_1,F_2,F_3)$ где F_1,F_2,F_3 - описанные выше инварианты, а H произвольная гладкая функция. Для доказательства теоремы осталось проверить, что функции F функционально независимы, так как в силу теоремы О.В.Мантурова $\operatorname{ind} G = n-2 = 5-2=3$ и мы в явном виде предъявили три базисных инварианта.

Для доказательства функциональной независимости функции F_1,F_2,F_3 достаточно показать линейную независимость их градиентов хотя бы в одной точке. Пусть $P_0(y_0^\circ,\dots,y_5^\circ)=(0,0,1,1,1,1)$. Тогда $\operatorname{grad} F_1|_{P_0}=[25,-14,7,-2,3,0]$,

$$\operatorname{grad} F_2|_{P_0}=\left[4,-\tfrac{16}{5},\tfrac{29}{5},-\tfrac{8}{5},\tfrac{12}{25},0\right]$$

$$\operatorname{grad} F_3|_{P_0}=[555,-61,-7,-23,-47,-25].$$

Простые вычисления показывают, что $\left|\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right| = 24080$, где $i = 1,2,3$; $j = 0,1,2$.

определитель не равен нулю, т.е. векторы $\operatorname{grad} F_1|_{P_0}$, $\operatorname{grad} F_2|_{P_0}$, $\operatorname{grad} F_3|_{P_0}$ линейно независимы. Отсюда вытекает, что функции F_i функционально независимы. В случае $n=5$ теорема полностью доказана.

3.6. Решение системы в случае $n=6$.

В случае $n=6$ алгебра Ли $G = sl(2,\mathbb{R}) \oplus_{\varphi_n} \mathbb{R}^7$ имеет размерность $\dim G = 10$.

Для того, чтобы найти инварианты алгебры Ли G , достаточно решить следующую систему дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&y_1 \frac{\partial F}{\partial y_0} + 2y_2 \frac{\partial F}{\partial y_1} + 3y_3 \frac{\partial F}{\partial y_2} + 4y_4 \frac{\partial F}{\partial y_3} + 5y_5 \frac{\partial F}{\partial y_4} + 6y_6 \frac{\partial F}{\partial y_5} = 0 \quad (1)\\
&6y_0 \frac{\partial F}{\partial y_1} + 5y_1 \frac{\partial F}{\partial y_2} + 4y_2 \frac{\partial F}{\partial y_3} + 3y_3 \frac{\partial F}{\partial y_4} + 2y_4 \frac{\partial F}{\partial y_5} + y_5 \frac{\partial F}{\partial y_6} = 0 \quad (2)\\
&6y_0 \frac{\partial F}{\partial y_0} + 4y_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + 2y_2 \frac{\partial F}{\partial y_2} - 2y_4 \frac{\partial F}{\partial y_4} - 4y_5 \frac{\partial F}{\partial y_5} - 6y_6 \frac{\partial F}{\partial y_0} = 0 \quad (3)
\end{aligned}
\qquad (3.6.I)
$$

Решим со методом характеристик. Первое уравнение эквивалентно системе

$$
\frac{dy_0}{y_1} = \frac{dy_1}{2y_2} = \frac{dy_2}{3y_3} = \frac{dy_3}{4y_4} = \frac{dy_4}{5y_5} = \frac{dy_5}{6y_6} = \frac{dy_6}{0}, \qquad (4)
$$

обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решая эту систему получим шесть ее первых интегралов:

$$
\begin{aligned}
v_1(y_0,\dots,y_6) &= y_6 = C_1 = \mathrm{const},\\
v_2(y_0,\dots,y_6) &= 12y_4y_6 - 5y_5^2 = C_2 = \mathrm{const},\\
v_3(y_0,\dots,y_6) &= 27y_3y_6^2 - 18y_4y_5y_6 + 5y_5^3 = C_3 = \mathrm{const},\\
v_4(y_0,\dots,y_6) &= 144y_2y_6^3 - 72y_3y_5y_6^2 + 24y_4y_5^2y_6 - 5y_5^4 = C_4 = \mathrm{const},\\
v_5(y_0,\dots,y_6) &= 32y_6^4y_1 - 108y_2y_5y_6^3 + 27y_3y_5^2y_6^2 - 6y_4y_5^3y_6 +\\
&\quad + y_5^5 = C_5 = \mathrm{const},\\
v_6(y_0,\dots,y_6) &= 46656y_0y_6^5 - 7776y_1y_5y_6^4 + 1296y_2y_5^2y_6^3\\
&\quad - 216y_3y_5^3y_6^2 + 36y_4y_5^4y_6 - 5y_5^6 = C_6 =\\
&\quad = \mathrm{const}.
\end{aligned}
$$

Итак, общее решение уравнения (I) есть функция $F(y_0, y_1, \dots, y_6) = H(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$, где H – произвольная гладкая функция. В уравнении (2) перейдем к новым переменным $v_1, \dots, v_6$. Простые вычисления показывают, что уравнение (2) в переменных v_i имеет вид:

$$3v_1\frac{\partial H}{\partial v_1} + 4v_2\frac{\partial H}{\partial v_2} + 6v_3\frac{\partial H}{\partial v_3} + 8v_4\frac{\partial H}{\partial v_4} + 10v_5\frac{\partial H}{\partial v_5} + 12v_6\frac{\partial H}{\partial v_6} = 0.$$

Это уравнение в частных производных эквивалентно системе

$$\frac{dv_1}{3v_1} = \frac{dv_2}{4v_2} = \frac{dv_3}{6v_3} = \frac{dv_4}{8v_4} = \frac{dv_5}{10v_5} = \frac{dv_6}{12v_6}$$

обыкновенных дифференциальных уравнений, которая имеет пять первых интегралов $z_1(y_0, \dots, y_6) = v_2 \cdot v_1^{-4/3} = A_1$, $z_2(y_0, \dots, y_6) = v_3 \cdot v_1^{-2} = A_2$, $z_3(y_0, \dots, y_6) = v_4 \cdot v_1^{-8/3} = A_3$, $z_4(y_0, \dots, y_6) = v_5 \cdot v_1^{-10/3} = A_4$, $z_5(y_0, \dots, y_6) = v_6 \cdot v_1^{-4} = A_5$,

где $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 = const$.

Итак, общее решение уравнения (2) имеет вид

$$F(y_0, \dots, y_6) = H(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5).$$

В уравнении (3) перейдем к новым переменным $z_1, \dots, z_5$. Простые вычисления показывают, что в переменных z уравнение (3) имеет вид

$$90z_2\frac{\partial H}{\partial z_1} + (54z_3 - 18z_1^2)\frac{\partial H}{\partial z_2} + (160z_4 - 32z_1z_2)\frac{\partial H}{\partial z_3} + (32z_5 - 9z_1z_3)\frac{\partial H}{\partial z_4} - 288z_1z_4\frac{\partial H}{\partial z_5} = 0. \qquad (4)$$

Оно эквивалентно системе

$$\frac{dz_1}{96z_2} = \frac{dz_2}{54z_3 - 18z_1^2} = \frac{dz_3}{160z_4 - 32z_1z_2} = \frac{dz_4}{32z_5 - 9z_1z_3} = \frac{dz_5}{-288z_1z_4} = \frac{dt}{t} \qquad (5)$$

обыкновенных дифференциальных уравнений.

Система (5) имеет четыре функционально независимых первых интеграла. Для их явного вычисления воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Первые интегралы системы (5) будем искать в виде многочленов четных степеней от координат $y_0, \ldots, y_6$ с неопределенным коэффициентом. После подстановки их в систему (3.6.I) и решая получившуюся систему линейных алгебраических уравнений найдем следующие инварианты:

$$F_1 = 120 y_0 y_6 - 20 y_1 y_5 + 8 y_2 y_4 - 3 y_3^2,$$

$$F_2 = 27780 y_0^2 y_6^2 - 9260 y_0 y_1 y_5 y_6 + 2024 y_0 y_2 y_4 y_6 + 700 y_0 y_4 y_5^2 + 700 y_1^2 y_4 y_6 + 480 y_1^2 y_5^2 - 444 y_0 y_3^2 y_6 - 420 y_0 y_3 y_4 y_5 - 420 y_1 y_2 y_3 y_6 - 524 y_1 y_2 y_4 y_5 + 112 y_0 y_4^3 + 284 y_1 y_3^2 y_5 - 28 y_1 y_3 y_4^2 + 112 y_2^3 y_6 - 28 y_2^2 y_3 y_6 + 116 y_2^2 y_4^2 - 80 y_2 y_3^2 y_4 + 15 y_3^4.$$

Инварианты F_3 и F_4 в силу их громоздкости в явном виде выписаны в Приложении. Итак, общее решение системы дифференциальных уравнений (6.I), описывающей инварианты коприсоединенного представления, имеет вид $F(y_0, \ldots, y_6) = H(F_1, F_2, F_3, F_4)$, где H – произвольная гладкая функция. Для доказательства теоремы осталось проверить, что базисные инварианты F_1, F_2, F_3, F_4 функционально независимы. Это утверждение вытекает из того, что в точке $P_0(0,0,1,1,1,1,1)$

$$\operatorname{grad} F_1|_{P_0} = [60, -10, 4, -3, 4, 0, 0],$$

$$\operatorname{grad} F_2|_{P_0} = [-188, 64, -20, 15, 0, 0, 0],$$

$$\operatorname{grad} F_3|_{P_0} = [-4760, -700, 24, -3, 0, 0, 0],$$

$$\operatorname{grad} F_4|_{P_0} = [-2782, 1472, 1121, -62, 0, 0, 0].$$

Считаем определитель: $\left| \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right| = -336723$, где $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 0, 1, 2, 3$.

Отсюда видно, что функции F_1, F_2, F_3, F_4 функционально независимы (их градиенты в точке P_0 линейно независимы).

Итак, в случае $n = 6$ теорема доказана.

§ 4. Доказательство общих теорем о строении инвариантов коприсоединенного представления группы Ли

4.I. Доказательство теоремы 2.

Доказательство теоремы 2.2 сводится к проверке того, что функция $F=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}^{-1}y_i y_{n-i}$, где $n=2p$, $p\in N$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (3.I.2) в частных производных. Для этого сначала вычислим производную $\frac{\partial F}{\partial y_s}$ от функции F. Итак,

$$\frac{\partial F}{\partial y_s}=\frac{\partial}{\partial y_s}\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{\binom{n}{i}}y_i y_{n-i}\right]=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{\binom{n}{i}}\left[\delta_s^i y_{n-i}+y_i\delta_s^{n-i}\right]$$

$$=\frac{(-1)^s}{\binom{n}{s}}y_{n-s}+\frac{(-1)^{n-s}}{\binom{n}{n-s}}y_{n-s}=\frac{2(-1)^s}{\binom{n}{s}}y_{n-s}.$$

Подставляем теперь эту производную в первое уравнение из системы дифференциальных уравнений (3.I.2), т.е. в уравнение $\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)y_{i+1}\frac{\partial F}{\partial y_i}=0$. Вычисления показывают, что

$$\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)y_{i+1}\frac{2(-1)^i}{\binom{n}{i}}y_{n-i}=2\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i(i+1)}{\binom{n}{i}}y_{i+1}y_{n-i}=$$

$$=2\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)}\left[\frac{(-1)^i(i+1)}{\binom{n}{i}}+\frac{(-1)^{n-1+i}(n-i)}{\binom{n}{n-1-i}}\right]y_{i+1}y_{n-i}=$$

$$=2\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)}\left[\frac{(1+i)!\,(n-i)!}{n!}-\frac{(1+i)!\,(n-i)}{n!}\right]y_{i+1}y_{n-i}=0.$$

Итак, видно, что функция F вида (2.I) удовлетворяет первому уравнению системы (3.I.2). Проверяем теперь второе уравнение системы (3.I.2), т.е. уравнение $\sum_{i=0}^{n}(n-2i)y_i\frac{\partial F}{\partial y_i}=0$

$$\sum_{i=0}^{n}(n-2i)\frac{2(-1)^i}{\binom{n}{i}}y_{n-i}y_i=2\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i(n-2i)}{\binom{n}{i}}y_i y_{n-i}=$$

$$=2\sum_{i=0}^{n/2}\left[\frac{(-1)^i(n-2i)}{\binom{n}{i}}+\frac{(-1)^{n-i}(n-2(n-i))}{\binom{n}{n-i}}\right]y_i y_{n-i}=$$

$$= 2\sum_{i=0}^{n/2} \frac{(n-2i)}{\binom{n}{i}} \left[(-1)^{i} - (-1)^{n-i} \right] y_i y_{n-i} = 0$$

Итак, видно, что функция F вида (2.I) удовлетворяет второму уравнению системы (3.I.2). Осталось проверить третье уравнение системы дифференциальных уравнений (3.I.2), т.е. уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} (n+1-i) y_{i-1} \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 .$$

Подставляя производную $\frac{\partial F}{\partial y_s}$ функции F в это уравнение, получим

$$\sum_{i=1}^{n} (n+1-i) \frac{2(-1)^i}{\binom{n}{i}} y_{n-i} y_{i-1} = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i (n+1-i)}{\binom{n}{i}} y_{n-i} y_{i-1} =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n/2} \left[\frac{(-1)^i (n+1-i)}{\binom{n}{i}} + \frac{(-1)^{n-i+1}\, i}{\binom{n}{n-i+1}} \right] y_{n-i} y_{i-1} =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n/2} \left[\frac{(n+1-i)\, i!}{n!} - \frac{i!\,(n-i+1)!}{n!} \right] y_{n-i} y_{i-1} = 0.$$

Отсюда следует, что функция $F = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}^{-1} y_i y_{n-i}$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (3.I.2), а это значит, что функция F – инвариант коприсоединенного представления группы Ли $G = SL(2,R) \otimes_{\Phi_n} R^{n+1}$. Теорема полностью доказана.

<u>Замечание</u>. Функция вида $F_1 = \binom{n}{n/2} \cdot F$ является многочленом с целыми коэффициентами, где функция F вида (2.I).

4.2. Доказательство теоремы 2.3.

Доказательство теоремы 2.3 сводится к проверке того, что функция F вида (2.2) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (3.I.2) в частных производных. Пусть n – нечетно, тогда функция F принимает вид:

$$F = A_0 y_0^2 y_n^2 + \sum_{r=1,3,\dots,n-2} A_r \left(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(r-1)} 2 y_i y_{r-i} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(r-1)} 2 y_{n-i} y_{n+i-r} \right)$$

$$+ \sum_{s=2,4,\dots,n-1} A_s \left(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(s-2)} 2 y_i y_{s-i} + y_{\frac{s}{2}}^2 \right) \left(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(s-2)} 2 y_{n-i} y_{n+i-s} + y_{n-\frac{s}{2}}^2 \right) +$$

$$+ A_n \Big(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} 2 y_i y_{n-i} \Big)^2 .$$

Считаем нужные производные, получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial y_0} = 2A_0 y_0 y_n^2 + 4A_1 y_1 y_{n-1} y_n + 2A_2 y_2 \big(2y_{n-2} y_n + y_{n-1}^2 \big) +$$

$$+ \sum_{r=3,\dots,n-2} A_r \Big(2y_r \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(r-1)} 2 y_{n-i} y_{n+i-r} \Big) + \sum_{s=4,\dots,n-1} A_s \Big\{ 2y_s \Big(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(s-2)} 2 y_{n-i} y_{n+i-s}$$

$$+ y_{n-\frac{s}{2}}^2 \Big) + 2y_{2n-s} \Big(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(s-2)} 2 y_i y_{s-i} + y_{\frac{s}{2}}^2 \Big) \Big\} + 4A_n y_n \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} 2 y_i y_{n-i} ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = 4A_1 y_0 y_{n-1} y_n + 2A_2 y_1 \big(2y_n y_{n-2} + y_{n-1}^2 \big) + \sum_{r=3,\dots,n-2} A_r$$

$$\Big\{ 2y_{r-1} \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(r-1)} 2 y_{n-i} y_{n+i-r} + 2 y_{2n-1-r} \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(r-1)} 2 y_i y_{r-i} \Big\} + \sum_{s=4,\dots,n-1} A_s$$

$$\Big\{ 2y_{s-1} \Big(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(s-2)} 2 y_{n-i} y_{n+i-s} + y_{n-\frac{s}{2}}^2 \Big) + 2 y_{2n-s-1} \Big(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(s-2)} 2 y_i y_{s-i} +$$

$$+ y_{\frac{s}{2}}^2 \Big) \Big\} + 4A_n y_{n-1} \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} 2 y_i y_{n-i} ,$$

$$p \neq 0, 1, n-1, n .$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_p} = 2A_2 \underset{p=2}{y_0} \big(2y_n y_{n-2} + y_{n-1}^2 \big) + 2A_2 \underset{p=n-2}{y_n} \big(2y_0 y_2 + y_1^2 \big) +$$

$$+ \sum_{r=3,\dots,n-2} A_r \Big\{ 2y_{r-p} \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(r-1)} 2 y_{n-i} y_{n+i-r} + 2 y_{2n-p-r} \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(r-1)} 2 y_i y_{r-i} \Big\}$$

$$+ \sum_{s=4,\dots,n-1} A_s \Big\{ \Big(2y_{s-p} + 2y_{\frac{s}{2}} \frac{\partial y_{\frac{s}{2}}}{\partial y_p} \Big) \Big(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(s-2)} 2 y_{n-i} y_{n+i-s} + y_{n-\frac{s}{2}}^2 \Big) +$$

$$+ \Big(2y_{2n-p-s} + 2y_{n-\frac{s}{2}} \frac{\partial y_{n-\frac{s}{2}}}{\partial y_p} \Big) \Big(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(s-2)} 2 y_i y_{s-i} + y_{\frac{s}{2}}^2 \Big) \Big\} +$$

$$+ 4A_n y_{n-p} \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} 2 y_i y_{n-i} ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_{n-1}} = 4A_1 y_0 y_1 y_n + 2y_{n-1} A_2 \big(2y_0 y_2 + y_1^2 \big) + \sum_{r=3,\dots,n-2} A_r$$

$$\Big\{ 2y_{r-n+1} \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(r-1)} 2 y_{n-i} y_{n+i-r} + 2 y_{n+1-r} \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(r-1)} 2 y_i y_{r-i} \Big\} +$$

$$+ \sum_{s=4,\dots,n-1} A_s \Big\{ 2y_{s-n+1} \Big(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(s-2)} 2 y_{n-i} y_{n+i-s} + y_{n-\frac{s}{2}}^2 \Big) +$$

$$+ 2y_{n+1-s}\left(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(s-2)} 2y_i y_{s-i} + y_{\frac{s}{2}}^2\right) + 4y_1 A_n \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} 2y_i y_{n-i},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_n} = 2A_0 y_0^2 y_n + 4A_1 y_0 y_1 y_{n-1} + 2y_{n-2} A_2 (2y_0y_2 + y_1^2) +$$

$$+\sum_{r=3,5,\dots,n-2} A_r \left\{2y_{n-r}\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(r-1)} 2y_i y_{r-i}\right\} + \sum_{s=4,\dots,n-1} A_s \left[2y_{n-s}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(s-2)} 2y_i y_{s-i} + y_{\frac{s}{2}}^2\right)\right] + 4y_0 A_n \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} 2y_i y_{n-i}.$$

Подставляем теперь эти производные, например, во второе уравнение из системы дифференциальных уравнений (3.I.2), т.е. в уравнение $\sum_{i=0}^{n}(n-2i)\,y_i\,\frac{\partial F}{\partial y_i} = 0$.

Простые вычисления показывают, что

$$A_0\left(2n y_0^2 y_n^2 - 2n y_0^2 y_n^2\right) = 0,$$

$$A_1\left(y_0 y_1 y_{n-1} y_n\right)\left[4n + 4(n-2) + 4(-n+2) - 4n\right] = 0,$$

$$A_2\left[2n y_0 y_2 (2y_{n-2}y_n + y_{n-1}^2) + 2(n-2)y_1^2(2y_{n-2}y_n + y_{n-1}^2)\right.$$

$$+ 2(n-4)y_0y_2(2y_n y_{n-2} + y_{n-1}^2) + 2(-n+4)y_{n-2}y_n(2y_0y_2 + y_1^2)$$

$$\left. + 2(-n+2)y_{n-1}^2(2y_0y_2 + y_1^2) + 2(-n)y_n y_{n-2}(2y_0y_2 + y_1^2)\right] =$$

$$= A_2\cdot 2(n-2)(2y_0y_2 + y_1^2)(2y_{n-2}y_n + y_{n-1}^2 - 2y_n y_{n-2} - y_{n-1}^2) = 0.$$

$$A_r\left[\sum_i 2y_{m-i}y_{n+i-r}\sum_i 2(n-2i)y_i y_{r-i} + \sum_i 2y_i y_{r-i}\right.$$

$$\left.\cdot\sum_i 2(-n+2i)y_{n-i}y_{n+i-r}\right] = A_r\left\{\sum_i y_{m-i}y_{n+i-r}\right.$$

$$\left.\cdot\sum_i y_i y_{r-i}\left[2(n-2i) + 2(-n+2i)\right]\right\} = 0,$$

$$A_s\left\{\left(\sum_i 2y_{n-i}y_{n+i-s} + y_{n-\frac{s}{2}}^2\right)\cdot\sum_i 2(n-2i)y_i y_{s-i} +\right.$$

$$\left.+\left(\sum_i 2y_i y_{s-i} + y_{\frac{s}{2}}^2\right)\left(\sum_i 2(-n+2i)y_{n+i}y_{n+i-s}\right)\right\} =$$

$$= A_3 \left\{ \sum_i 2 y_{n-i} y_{n+i-5} + \sum_i 2(n-2i) y_i y_{5-i} + y_{n-\frac{5}{2}}^2 \sum_i 2(n-2i) \cdot \right.$$

$$\cdot y_i y_{5-i} + \sum_i 2 y_i y_{5-i} + \sum_i 2(-n+2i) y_{n+i} y_{n+i-5} + y_{\frac{5}{2}}^2 \cdot \sum_i 2 \cdot$$

$$\cdot (-n+2i) y_{n+i} y_{n+i-5} = 0, \quad A_n \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} 2 y_i y_{n-i} \left[4n\, y_0 y_n + \right.$$

$$+ 4(n-2) y_1 y_{n-1} + 4 \sum_p (n-2p) y_p y_{n-p} + 4(-n+2) y_1 y_{n-1}$$

$$\left. - 4n\, y_0 y_n \right] = 0 .$$

Отсюда следует, что уравнение исполнено.

Подставляем теперь эти производные в уравнение

$$\sum_{i=0}^{n-1} (i+1) y_{i+1} \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0$$

Вычисления показывают, что: (будем делать дальше для $n=5$ в силу громоздкости вычислений)

$$y_0 y_1 y_5^2 (2A_0 + 20A_1 + 20A_4 + 48A_5) + y_1^2 y_4 y_5 (4A_1 + 18A_2 + 20A_4 +$$

$$+ 48A_5) + y_1 y_2 y_3 y_5 (12A_2 + 38A_3 + 35A_4 + 48A_5) + y_1 y_2 y_4^2 (6A_2 +$$

$$+ 16A_4 + 16A_5) + y_1 y_3^2 y_4 (16A_3 + 38A_4 + 24A_5) + y_1 y_2 y_4^2 \cdot$$

$$(16A_3 + 4A_4 + 32A_5) + y_0 y_2 y_4 y_5 (8A_1 + 36A_2 + 16A_3 + 45A_4 +$$

$$+ 48A_5) + y_2^3 y_5 (8A_3 + 14A_4) + y_2^2 y_3 y_4 (8A_3 + 34A_4 + 48A_5) +$$

$$+ y_2 y_3^3 (10A_4 + 24A_5) + y_0 y_3^2 y_5 (12A_2 + 32A_3 + 10A_4 + 24A_5) +$$

$$+ y_0 y_3 y_4^2 (6A_2 + 32A_3 + 28A_4) = 0$$

где $A_0 = 1,$

$A_1 = -\frac{1}{10},$

$A_2 = \frac{1}{45},$

$A_3 = -\frac{1}{120},$

$A_4 = \frac{1}{210},$

$A_5 = -\frac{1}{504}.$

Например : $2A_0 + 20A_1 + 20A_4 + 48A_5 = 2 - 20 \cdot \frac{1}{10}$
$+ 20\left(\frac{1}{210}\right) - 48\left(\frac{1}{504}\right) = 0 .$

Итак, видно, что функция F вида (2.2) удовлетворяет уравнению системы (3.1.2). Осталось проверить третье уравнение системы (3.1.2), т.е. уравнение $\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\,Y_{i-1}\frac{\partial F}{\partial Y_i}=0$. Подставляя производные функции F в это уравнение получим: $(n=5)$.

$$5Y_0\frac{\partial F}{\partial Y_1}+4Y_1\frac{\partial F}{\partial Y_2}+3Y_2\frac{\partial F}{\partial Y_3}+2Y_3\frac{\partial F}{\partial Y_4}+Y_4\frac{\partial F}{\partial Y_5}=0$$

$$20A_1Y_0^2Y_4Y_5+10Y_0Y_1A_2(2Y_3Y_5+Y_4^2)+10Y_0Y_5A_3(2Y_2Y_5+2Y_3Y_4)+$$
$$+10Y_0Y_3A_4(2Y_1Y_5+2Y_2Y_4+Y_3^2)+10Y_0Y_5A_4(2Y_0Y_4+2Y_1Y_3+Y_2^2)$$
$$+20Y_0Y_4A_5(2Y_0Y_5+2Y_1Y_4+2Y_2Y_3)+8Y_0Y_1A_2(2Y_3Y_5+Y_4^2)+$$
$$+8Y_1^2A_3(2Y_3Y_5+2Y_3Y_4)+8Y_1Y_5A_3(2Y_0Y_3+2Y_1Y_2)+8Y_1Y_2A_4\cdot$$
$$\cdot(2Y_1Y_5+2Y_2Y_4+Y_3^2)+8Y_1Y_4A_4(2Y_0Y_4+2Y_1Y_3+Y_2^2)+16Y_1Y_3A_5\cdot$$
$$\cdot(2Y_0Y_5+2Y_1Y_4+2Y_2Y_3)+6Y_2Y_5A_2(2Y_0Y_2+Y_1^2)+$$
$$+6Y_0Y\,A_3(2Y_2Y_5+2Y_3Y_4)+6Y\,Y_4A_3(2Y_0Y_3+2Y_1Y_2)+$$
$$+6Y_1Y_2A_4(2Y_1Y_5+2Y_2Y_4+Y_3^2)+6Y_2Y_3(2Y_0Y_4+2Y_1Y_3$$
$$+Y_2^2)+34Y_2^2A_5(2Y_0Y_5+2Y_1Y_4+2Y_2Y_3)+8A_1Y_0Y_1Y_3Y_5$$
$$+4Y_3Y_4A_2(2Y_0Y_2+Y_1^2)+4Y_3^2A_3(2Y_0Y_3+2Y_1Y_3)+2\cdot2Y_3Y_0\cdot$$
$$\cdot A_4(2Y_1Y_5+2Y_2Y_4+Y_3^2)+4Y_2Y_3A_4(2Y_0Y_4+2Y_1Y_3+$$
$$+Y_2^2)+24Y_1Y_3A_5(2Y_0Y_5+2Y_1Y_4+2Y_2Y_3)+$$
$$+2A_0Y_0^2Y_4Y_5+4A_1Y_0Y_1Y_4^2+2Y_3Y_4A_2(2Y_0Y_2+Y_1^2)+$$
$$+2Y_2Y_4A_3(2Y_0Y_3+2Y_1Y_2)+2Y_1Y_4A_4(2Y_0Y_4+2Y_1Y_3+$$
$$+Y_2^2)+4Y_0Y_4A_5(2Y_0Y_5+2Y_1Y_4+2Y_2Y_3)=0.$$

Отсюда следует, что функция F вида (2.2) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (3.I.2), а это значит, что функция F — инвариант коприсоединенного представления группы Ли $\mathcal{G}_{n} = SL(2,\mathbb{R}) \otimes_{\Phi_n} \mathbb{R}^{n+1}$. Теорема доказана.

Для n — четного доказывается аналогично.

ГЛАВА III

ПОЛНЫЕ ИНВОЛЮТИВНЫЕ СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ НА ОРБИТАХ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ КОПРИСОЕДИНЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $SL(2,R) \otimes_{\varphi_n} R^{n+1}$

§ 1. Основная теорема о полной интегрируемости уравнения Эйлера на $(sl(2,R) \oplus_{\varphi_n} R^{n+1})^*$

1.1. Постановка задачи построения полного инволютивного семейства функций.

Выделим здесь наиболее важные постановки указанной задачи.

1) Задача построения полного инволютивного набора функций на алгебрах Ли. Пусть G – алгебра Ли, G^* – дуальное к G пространство, K – некоторый класс функций на G^*, замкнутый относительно скобки Пуассона, т.е. K – подалгебра Ли в $C^\infty(G^*)$ (например, в качестве K можно взять все гладкие функции на G^*).

Требуется построить такой набор функций $f_1, \dots, f_s$ из класса K, что а) $\{f_i, f_j\} = 0$, $1 \leqslant i,j \leqslant s$; б) $s = \frac{1}{2}(\dim G + \operatorname{ind} G)$; в) $f_1, \dots, f_s$ функционально независимы почти всюду на G^*.

2) Задача построения полного инволютивного семейства функций на одной отдельно взятой орбите коприсоединенного представления.

3) Задача построения полного инволютивного семейства функций на заданном симплектическом многообразии.

При решении указанных задач наибольшая трудность лежит в доказательство полноты (т.е. в доказательстве функциональной независимости) построенного набора функций. Как правило, инволютивные наборы функции можно строить по общим методикам (см. глава I § 2). Для проверки независимости предъявленного набора в каждом конкретном случае надо изобретать специальные методы.

А.В.Болсиновым в работе [7] была доказана

ТЕОРЕМА 3.I.I. Пусть G - простая алгебра Ли (комплексная или вещественная), $\varphi : G \longrightarrow End(V)$ - неприводимое представление. Пусть $L = G \underset{\varphi}{+} V$ - полупрямая сумма алгебры Ли G и пространства V по представлению φ. Тогда на L^* существует полное инволютивное семейство, состоящее из многочленов.

I.2. Формулировка основной теоремы.

Сформулируем теорему о полном инволютивном семействе функции на пространстве G^*, дуальном к алгебре Ли $sl(2,\mathbb{R}) \oplus_{\varphi_n} \mathbb{R}^{n+1}$.

ТЕОРЕМА 3.I.2. Пусть $G = sl(2,\mathbb{R}) \oplus_{\varphi_n} \mathbb{R}^{n+1}$ - алгебра Ли и $1 \leq n \leq 6$. Тогда для алгебры Ли G на дуальном пространстве к алгебре Ли G построено в явном виде полное инволютивное семейство функций, состоящее из многочленов, полученных с помощью сдвига инвариантов коприсоединенного представления группы Ли $\mathcal{G} = SL(2,\mathbb{R}) \otimes_{\Phi_n} \mathbb{R}^{n+1}$.

§ 2. Построение полных наборов функций в инволюции

2.1. Метод сдвига аргумента.

В доказательстве теоремы 3.I.2 представим в явном виде полные коммутативные наборы функций на орбитах общего положения. При построении этих полных инволютивных семейств интегралов гамильтоновых систем можно использовать многие методы (см. гл. I § 2). Мы будем применять метод сдвига аргумента, описанный выше (см. глава I § 2). Итак, чтобы построить интегралы гамильтоновых систем, достаточно знать инварианты алгебры Ли G, т.е. множество функции постоянных на орбитах общего положения. Пусть F - любой инвариант алгебры Ли G, будем сдвигать аргумент функции $F(x)$, т.е. рассмотрим функцию $F(x+\lambda a)$, где $a \in G^*$ - фиксированный ковектор. Отсюда получим инволютивное семейство функции.

Полнота инволютивного семейства на G^* означает, что из него можно выбрать $\frac{1}{2}(\dim G + \operatorname{ind} G)$ функционально независимых функций. Полнота в нашем случае вытекает из теоремы 3.I.I.

Пусть $F(x) = F(x_{-1}, x_0, x_1, y_0, \dots, y_n)$, а

$F(x+\lambda a) = F(x_{-1}+\lambda a_{-1}, x_0+\lambda a_0, x_1+\lambda a_1, y_0+\lambda b_0, \dots, y_n+\lambda b_n)$.

Так как в наших случаях функции F являются полиномами, то мы можем разложить функцию $F(x+\lambda a)$ по степеням переменной λ, что дает нам разложение вида $F(x+\lambda a) = \sum_k P_k(x,a)\lambda^k$. Получены при этом полиномы $P_k(x,a)$ образуют коммутативные наборы функций (интегралов).

2.2. Случай $n = 1$.

При $n=1$, алгебра Ли $G = sl(2,\mathbb{R}) \oplus_{\varphi_n} \mathbb{R}^2$ имеет один базисный инвариант: $F_{G} = x_{-1}y_0^2 - x_0 y_0 y_1 - x_1 y_1^2$. Строим функцию $F(x+\lambda a) = F(x_{-1}+\lambda a_{-1}, x_0+\lambda a_0, x_1+\lambda a_1, y_0+\lambda b_0, y_1+\lambda b_1)$.

Раскладываем ее по степеням переменной λ. Получим разложение вида: $F_{\lambda a} = \lambda^3 P_3 + \lambda^2 P_2 + \lambda P_1 + P_0$, где $P_0 = F(x)$;

$P_3 = const$, $P_1 = 2b_0 x_{-1} y_0 + a_{-1} y_0^2 - b_1 x_0 y_0 - b_0 x_0 y_1 - a_0 y_0 y_1 - 2b_1 x_1 y_1 - a_1 y_1^2$, $P_2 = b_0^2 x_{-1} - b_1 b_0 x_0 - b_1^2 x_1 + y_0(2a_{-1}b_0 - a_0 b_1) + y_1(-a_0 b_0 - 2a_1 b_1)$.

Надо проверить, что функции P_0, P_1, P_2 функционально независимы. Для этого достаточно показать линейную независимость их градиентов. Напомним, что градиент считается по формуле

$$\operatorname{grad} P_i = \left\{ \frac{\partial P_i}{\partial x_{-1}}, \frac{\partial P_i}{\partial x_0}, \frac{\partial P_i}{\partial x_1}, \frac{\partial P_i}{\partial y_0}, \frac{\partial P_i}{\partial y_1} \right\}, \quad i = 0,1,2.$$

Итак:

$$\operatorname{grad} P_0 = \{ y_0^2, -y_0 y_1, -y_1^2, 2x_{-1}y_0 - x_0 y_1, -x_0 y_0 - 2x_1 y_1 \},$$

$$\operatorname{grad} P_1 = \{ 2b_0 y_0, -y_1 b_0 - b_1 y_0, -2y_1 b_1, 2b_0 x_{-1} + 2a_{-1} y_0 - a_0 y_1 - b_1 x_0, -a_0 y_0 - b_0 x_0 - 2a_1 y_1 - 2b_1 x_1 \},$$

$$\operatorname{grad} P_2 = \{ b_0^2, -b_1 b_0, -b_1^2, 2a_{-1} b_0 - a_0 b_1, -a_0 b_0 - 2a_1 b_1 \}.$$

Градиенты этих функций P_0, P_1, P_2 линейно независимы, так как определитель $\left| \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \right| = (b_1 y_0 - b_0 y_1)^3 \neq 0$, $i = 0,1,2$, $j = -1,0,1$. не равен нулю. Из этого следует, что функции P_0, P_1, P_2 функционально независимы. Для доказательства теоремы осталось проверить равенство $\frac{1}{2}(\dim G + \operatorname{ind} G) = s$, где s – число функций функционально независимо. Индекс $\operatorname{ind} G$ был выписан в теореме 2.I. Поэтому $\frac{1}{2}(\dim G + \operatorname{ind} G) = \frac{1}{2}(5+1) = 3$. Следовательно, в случае $n=1$ теорема 3.I.2 полностью доказана.

2.3. Случай $n=2$.

При $n=2$ алгебра Ли $G = sl(2,\mathbb{R}) \oplus_{\varphi_n} \mathbb{R}^3$ имеет два базисных инварианта

$$F_1 = 2x_{-1} y_0 - x_0 y_1 - 2x_1 y_2 , \qquad F_2 = y_1^2 - 4 y_0 y_2 .$$

Строим функцию $F(x+\lambda a) = F(x_{-1} + \lambda a_{-1}, \ldots, y_2 + \lambda b_2)$. Раскладываем ее по степеням переменной λ. Для функции F_1 получим разложение вида $F_1(x+\lambda a) = \lambda^2 P_2 + \lambda P_1 + P_0$, где $P_0 = F_1(x)$,

$$P_2 = \mathrm{const}, \qquad P_1 = 2b_1 y_1 - 4b_2 y_0 - 4b_0 y_2 .$$

Для функции F_2 получим разложение вида $F_2(x+\lambda a) = \lambda^2 Q_2 + \lambda Q_1 + \lambda_0$

где $Q_0 = F_2(x)$, $Q_2 = \mathrm{const}$,

$$Q_1 = 2a_{-1} y_0 + 2b_0 x_{-1} - a_0 y_1 - b_1 x_0 - 2a_1 y_2 - 2b_2 x_1 .$$

Надо показать, что функции P_0, P_1, Q_0, Q_1 функционально независимы, т.е. достаточно показать линейную независимость их градиентов. Итак:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} P_0 &= \{0,\ 0,\ 0,\ -4y_2,\ 2y_1,\ -4y_0\},\\
\operatorname{grad} P_1 &= \{0,\ 0,\ 0,\ -4b_2,\ 2b_1,\ -4b_0\},\\
\operatorname{grad} Q_0 &= \{2y_0,\ -y_1,\ -2y_2,\ 2x_{-1},\ -x_0,\ -2x_1\},\\
\operatorname{grad} Q_1 &= \{2b_0,\ -b_1,\ -2b_2,\ 2a_{-1},\ -a_0,\ -2a_1\}.
\end{aligned}$$

Градиенты этих функций Q_0, Q_1, P_0, P_1 линейно независимы, поскольку определитель $\left| \frac{\partial (Q_i, P_j)}{\partial x_l\, \partial y_k} \right| = -16 b_1 y_1 (b_1 y_2 - b_2 y_1)^2 \neq 0$

$i,j,l,k = 0,1$.

не равен нулю. Из этого следует, что функции P_0, P_1, Q_0, Q_1 функционально независимы. Для доказательства теоремы осталось еще проверить равенство $\frac{1}{2}(\dim G + \operatorname{ind} G) = s$, где s – число функций функционально независимых.

Поскольку размерность алгебры Ли $G = sl(2,\mathbb{R}) \oplus_{\varphi_n} \mathbb{R}^3$ равняется шести и индекс алгебры Ли G, как вытекает из таблицы I, равняется 2, то $\frac{1}{2}(\dim G + \operatorname{ind} G) = \frac{1}{2}(6+2) = 4$. Выше мы получили 4 функции P_0, P_1, Q_0, Q_1 функционально независимы. Итак, в случае $n=2$ теорема полностью доказана.

2.4. Случай $n=3$.

При $n=3$ алгебра Ли $G = sl(2,\mathbb{R}) \oplus_{\varphi_n} \mathbb{R}^4$ имеет один базисный инвариант: $F = 4y_0y_2^3 + 27y_0^2y_3^2 + 4y_1^3y_3 - y_1^2y_2^2 - 18y_0y_1y_2y_3$. Строим функцию $F(x+\lambda a) = F(x_{-1}+\lambda a_{-1}, \ldots, y_3 + \lambda b_3)$. Раскладываем ее по степеням переменной λ. Получим разложение вида: $F(x+\lambda a) = \lambda^4 P_4 + \lambda^3 P_3 + \lambda^2 P_2 + \lambda P_1 + P_0$, где

$$P_0 = F(x), \quad P_4 = \mathrm{const},$$

$$P_1 = 12b_2y_0y_2^2 + 4b_0y_2^3 + 12b_1y_1^2y_3 + 4b_3y_1^3 + 54b_3y_0^2y_3 + 54b_0y_0y_3^2 - 2b_2y_1^2y_2 - 2b_1y_1y_2^2 - 18b_3y_0y_1y_2 - 18b_2y_0y_1y_3 - 18b_1y_0y_2y_3 - 18b_0y_1y_2y_3,$$

$$P_2 = 27b_3^2y_0^2 - 18b_2b_3y_0y_1 + y_0y_2(12b_2^2 - 18b_1b_3) + y_0y_3(108b_0b_3 - 18b_1b_2) + y_1^2(12b_1b_3 - b_2^2) + y_1y_2(-4b_1b_2 - 18b_0b_3) + y_1y_3\cdot(12b_1^2 - 18b_0b_2) + y_2^2(12b_0b_2 - b_1^2) - 18b_0b_1y_2y_3 + 27b_0^2y_3^2,$$

$$P_3 = y_0(4b_2^3 + 54b_0b_3^2 - 18b_1b_2b_3) + y_1(12b_1^2b_3 - 2b_1b_2^2 - 18b_0b_2b_3) + y_2(12b_0b_2^2 - 2b_1^2b_2 - 18b_0b_1b_3) + y_3(54b_0^2b_3 + 4b_1^3 - 18b_0b_1b_2).$$

Надо проверить, что функции P_0, P_1, P_2, P_3 функционально независимы. Для этого достаточно показать линейную независимость их градиентов:

$$\operatorname{grad} P_0 = \{ 2y_2^3 + 27y_0y_3^2 - 9y_1y_2y_3,\ 6y_1^2y_3 - y_1y_2^2 - 9y_0y_2y_3,\ 6y_0y_2^2 - y_1^2y_2 - 9y_0y_1y_3,\ 27y_0^2y_3 + 2y_1^3 - 9y_0y_1y_2 \},$$

$$\operatorname{grad} P_1 = \{ 6b_2y_2^2 + 27b_0y_3^2 - 9b_3y_1y_2 - 9b_2y_1y_3 - 9b_1y_2y_3,\ 12b_1y_1y_3 + 6b_3y_1^2 - 2b_2y_1y_2 - b_1y_2^2 - 9b_3y_0y_2 - 9b_2y_0y_3 - 9b_0y_2y_3,\ 12b_2y_0y_2 + 6b_0y_2^2 - b_2y_1^2 - 2b_1y_1y_2 - 9b_3y_0y_1 - 9b_1y_0y_3 - 9b_0y_1y_3,\ 6b_1y_1^2 + 27b_3y_0^2 + 54b_0y_0y_3 - 9b_2y_0y_1 - 9b_1y_0y_2 - 9b_0y_1y_2 \},$$

$$\operatorname{grad} P_2 = \{ 27b_3^2y_0 - 9b_2b_3y_1 + y_2(6b_2^2 - 9b_1b_3) + y_3(54b_0b_3 - 9b_1b_2),\ -9b_2b_3y_0 + y_1(12b_1b_3 - b_2^2) + y_2(-2b_1b_2 - 9b_0b_3) + y_3(6b_1^2 - 9b_0b_2),\ y_0(6b_2^2 - 9b_1b_3) + y_1(-2b_1b_2 - 9b_0b_3) + y_2(12b_0b_2 - b_1^2) - 9b_0b_1y_3,\ y_0(54b_0b_3 - 9b_1b_2) + y_1(6b_1^2 - 9b_0b_2) - 9b_0b_1y_2 + 27b_0^2y_3 \},$$

$$\operatorname{grad} P_3 = \{ 2b_2^3 + 27b_0b_3^2 - 9b_1b_2b_3,\ 6b_1^2b_3 - b_1b_2^2 - 9b_0b_2b_3,\ 6b_0b_2^2 - b_1^2b_2 - 9b_0b_1b_3,\ 27b_0^2b_3 + 2b_1^3 - 9b_0b_1b_2 \}.$$

Градиенты этих функций P_0, P_1, P_2, P_3 линейно независимы, так как определитель $\left| \frac{\partial P_i}{\partial y_j} \right|$

$$\left| \frac{\partial P_i}{\partial y_j} \right| \quad \text{для} \quad i = 0,1,2,3;\ j = 0,1,2,3,$$

в точке $P_0(y_0^0, y_1^0, y_2^0, y_3^0) = (0,0,1,1)$ и для $b = (b_0, b_1, b_2, b_3) = (1,1,1,1)$ равны 256. Из этого следует, что функции P_0, P_1, P_2, P_3 функционально независимы. Для доказательства теоремы осталось еще проверить равенство $\frac{1}{2}(\dim G + \operatorname{ind} G) = s$, s – число функций функционально независимых. Итак, $\frac{1}{2}(\dim G + \operatorname{ind} G) = \frac{1}{2}(7+1) = 4$. Отсюда видно, что в случае $n = 3$ теорема полностью доказана.

2.5. Случай $n = 4$

При $n = 4$ алгебра Ли $G = sl(2, \mathbb{R}) \oplus_{\varphi_4} \mathbb{R}^5$ имеет два базисных инварианта $F_1 = 12y_0y_4 - 3y_1y_3 + y_2^2$,

$F_2 = 72y_0y_2y_4 - 27y_0y_3^2 + 9y_1y_2y_3 - 27y_1^2y_4 - 2y_2^3$

Строим функцию $F(y+\lambda b) = F(y_0+\lambda b_0, \ldots, y_4+\lambda b_4)$. Раскладываем ее по степеням переменной λ. Для функции F_1 получим разложение вида: $F_1(y+\lambda b) = \lambda^2 P_2 + \lambda P_1 + P_0$, где $P_0 = F_1(y)$, $P_2 = const$, $P_1 = 12b_4y_0 + 3b_3y_1 + 2b_2y_2 - 3b_1y_3 + 12b_0y_4$.

Для функции F_2 получим разложение вида: $F_2(y+\lambda b) = \lambda^3 Q_3 + \lambda^2 Q_2 + \lambda Q_1 + Q_0$, где $Q_0 = F_2(y)$, $Q_3 = const$,

$$Q_1 = 72b_4y_0y_2 - 54b_3y_0y_3 + 72b_2y_0y_4 + 9b_3y_1y_2 + 9b_2y_1y_3 - 54b_1y_1y_4 - 27b_4y_1^2 - 6b_2y_2^2 + 9b_1y_2y_3 + 72b_0y_2y_4 - 27b_0y_3^2,$$

$$Q_2 = y_0(72b_2b_4 - 27b_3^2) + y_1(9b_2b_3 - 54b_1b_4) + y_2(72b_0b_4 + 9b_1b_3 - 6b_2^2) + y_3(9b_1b_2 - 54b_0b_3) + y_4$$

Надо проверить, что функции P_0, P_1, Q_0, Q_1, Q_2 функционально независимы. Для этого достаточно показать линейную независимость их градиентов. Итак,

$$\mathrm{grad}\, P_0 = \{12y_4, -3y_3, 2y_2, -3y_1, 12y_0\},$$

$$\mathrm{grad}\, P_1 = \{12b_4, -3b_3, 2b_2, -3b_1, 12b_0\},$$

$$\mathrm{grad}\, Q_0 = \{72y_2y_4 - 27y_3^2, 9y_2y_3 - 54y_1y_4, 72y_0y_4 + 9y_1y_3 - 6y_2^2, -54y_0y_3 + 9y_1y_2, 72y_0y_2 - 27y_1^2\},$$

$$\mathrm{grad}\, Q_1 = \{72b_4y_2 - 54b_3y_3 + 72b_2y_4, 9b_3y_2 + 9b_2y_3 - 54b_1y_4 - 54b_4y_1, 72b_4y_0 + 9b_3y_1 - 12b_2y_2 + 9b_1y_3 + 72b_0y_4, -54b_3y_0 + 9b_2y_1 + 9b_1y_2 - 54b_0y_3, 72b_2y_0 - 54b_1y_1 + 72b_0y_2\},$$

$$\mathrm{grad}\, Q_2 = \{72b_2b_4 - 27b_3^2, 9b_2b_3 - 54b_1b_4, 72b_0b_4 + 9b_1b_3 - 6b_2^2, 9b_1b_2 - 54b_0b_3, 72b_0b_2 - 27b_1^2\}.$$

Градиенты этих функций P_0, P_1, Q_0, Q_1, Q_2 линейно независимы, так как их определитель в точке $P_0 = P_0(y_0^0, y_1^0, y_2^0, y_3^0, y_4^0) = (0, 0, 1, 1, 1)$ и для $b = (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4) = (1, 1, 1, 1, 1)$ не равны нулю. ($\det\left(\frac{\partial(P,Q)}{\partial y_i}\right) = 12\,105\,045$)

Из этого следует, что функции P_0, P_1, Q_0, Q_1, Q_2 функционально независимы. Справедливо тоже равенство $\frac{1}{2}(\dim G + \operatorname{ind} G) = \frac{1}{2}(8+2) = 5$. Отсюда следует, что теорема в случае $n=4$ доказана.

2.6. Случай $n=5$.

При $n=5$ алгебра Ли $G = sl(2,\mathbb{R}) \oplus_{\varphi_m} \mathbb{R}^6$ имеет три базисных инварианта, F_1 – степени четыре, F_2 – степени восемь и F_3 – степени двенадцать. Строим функцию $F(y+\lambda b) = F(y_0+\lambda b_0, \ldots, y_5+\lambda b_5)$ для функции F_1, F_2, F_3. Раскладываем ее по степеням переменной λ, получим разложение вида:

$$F_1(y+\lambda b) = \sum_{i=0}^{4} P_i \lambda^i \quad \text{, где } P_0 = F_1(y),\ P_4 = const,$$

$$F_2(y+\lambda b) = \sum_{i=0}^{8} Q_i \lambda^i \quad \text{, где } Q_0 = F_2(y),\ Q_8 = const,$$

$$F_3(y+\lambda b) = \sum_{i=0}^{12} R_i \lambda^i \quad \text{, где } R_0 = F_3(y),\ R_{12} = const.$$

Имеем двадцать четыре функции $\{P_i, Q_j, R_k\}$, $i = 0,1,2,3$, $j = 0,\ldots,7$, $k = 0,\ldots,11$. Укажем $\frac{1}{2}(\dim G + \operatorname{ind} G) = \frac{1}{2}(9+3) = 6$ функции $h_1, \ldots, h_6$, которые функционально независимы на G^*. Положим:

$$h_1(y,b) = F_1(y), \qquad h_2(y,b) = F_2(y),$$
$$h_3(y,b) = F_3(y), \qquad h_4(y,b) = P_1(y,b),$$
$$h_5(y,b) = Q_1(y,b), \qquad h_6(y,b) = R_1(y,b).$$

Простые вычисления показывают, что в точке $P_0(y_0^0, \ldots, y_5^0) = (0,0,1,1,1,1)$ при $b = (b_0, \ldots, b_5) = (1,1,1,1,1,1)$ имеем

$$\operatorname{grad} h_1|_{P_0} = [25, -14, 7, -2, 3, 0.],$$

$$\operatorname{grad} h_2|_{P_0} = [4, -\frac{16}{5}, \frac{48}{5}, -\frac{8}{5}, \frac{12}{25}, 0],$$

$$\operatorname{grad} h_3|_{P_0} = [555, -61, -7, -23, -47, -25],$$

$$\operatorname{grad} h_4|_{P_0} = [575, -118, 29, 9, 32, 5].$$

$$\operatorname{grad} h_5|_{P_0} = \left[\frac{1466}{5}, -\frac{1862}{25}, \frac{526}{25}, -\frac{739}{25}, \frac{484}{25}, \frac{58}{5} \right],$$

$$\operatorname{grad} h_6|_{P_0} = \left[\frac{971}{8}, -\frac{622}{25}, -\frac{196}{25}, -\frac{253}{50}, \frac{517}{50}, -\frac{11}{4} \right]$$

$$\frac{\partial(h_1,\dots,h_6)}{\partial(y_0,\dots,y_5)} = -\frac{107101456}{125}$$

Следовательно, функции $h_1,\dots,h_6$ – функционально независимы, что доказывает теорему при $n=5$.

2.7. Случай $n=6$.

При $n=6$ алгебра Ли $G = sl(2,\mathbb{R}) \oplus_{\varphi_n} \mathbb{R}^7$ имеет четыре базисных инварианта: F_1, F_2, F_3, F_4. Они все приведены в Приложении. Строим функцию $F(y+\lambda b) = F(y_0+\lambda b_0, \dots, y_6+\lambda b_6)$ для функции F_1, F_2, F_3, F_4. Раскладываем ее по степеням переменной λ, получая разложение вида:

$$F_1(y+\lambda b) = \sum_{k=0}^{4} \lambda^k P_k(y,b),$$

$$F_2(y+\lambda b) = \sum_{k=0}^{4} \lambda^k Q_k(y,b),$$

$$F_3(y+\lambda b) = \sum_{k=0}^{6} \lambda^k R_k(y,b),$$

$$F_4(y+\lambda b) = \sum_{k=0}^{10} \lambda^k S_k(y,b).$$

Из этих двадцати двух функций $\{P_i, Q_j, R_k, S_l\}$ $i=0,1$; $j=0,1,2,3$; $k=0,1,\dots,6$; $l=0,\dots,9$ укажем $\frac{1}{2}(\dim G + \operatorname{ind} G) = \frac{1}{2}(10+4) = 7$ функции $s_1,\dots,s_7$, которые функционально независимы на G^*. Положим

$$s_1(y,b) = F_1(y), \quad s_2(y,b) = F_2(y), \quad s_3(y,b) = F_3(y),$$
$$s_4(y,b) = F_4(y), \quad s_5(y,b) = P_1(y,b), \quad s_6(y,b) = Q_1(y,b),$$
$$s_7(y,b) = R_1(y,b).$$

Считаем их градиенты $\operatorname{grad} s_i$, $i=1,\dots,7$, имеем

$$\operatorname{grad} s_1|_{P_0} = [60, -10, 4, -3, 4, 0, 0],$$

$$\operatorname{grad} s_2|_{P_0} = [-188, 64, 20, 15, 0, 0, 0],$$

$$\operatorname{grad} s_3|_{P_0} = [-4760, -900, 24, -3, 0, 0, 0],$$

$$\operatorname{grad} s_4 |_{P_0} = [-2782,\ 1472,\ 1121,\ -62,\ 0,\ 0,\ 0]\ ,$$

$$\operatorname{grad} s_5 |_{P_0} = [60,\ -10,\ 4,\ -3,\ 4,\ -10,\ 60]\ .$$

$$\operatorname{grad} s_6 |_{P_0} = [13054,\ -2241,\ 762,\ -393,\ 454,\ -165,\ 353]\ ,$$

$$\operatorname{grad} s_7 |_{P_0} = \left[\frac{15612}{5},\ -\frac{59754}{5},\ \frac{12212}{25},\ -\frac{413}{5},\ \frac{12454}{5},\ \frac{7385}{5},\ -\frac{1512}{5}\right].$$

В точке $P_0(y_0^0, \ldots, y_6^0) = (0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$ и при $b = (b_0, \ldots, b_6) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ имеет место равенство $\frac{\partial(s_1, \ldots, s_7)}{\partial(y_0, \ldots, y_6)} = -\frac{87912864}{125}$, следовательно, функции $s_1, \ldots, s_7$ — функционально независимы, что доказывает нашу теорему в случае $n = 6$.

ГЛАВА IУ

БОТТОВОСТЬ ВТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ НА ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ОРБИТАХ ГРУППЫ ЛИ

§ I. Основная теорема о боттовости интегралов

Из главы II следует, что четырехмерные орбиты для $G = sl(2,\mathbb{R}) \oplus_{\varphi_m} \mathbb{R}^{n+1}$ имеются только в двух случаях $n = 1, 2$. В главе III в явном виде показаны полные инволютивные семейства функций. Обозначим его $\{F_i, f_1, f_2\}$, $i = 1, \ldots, \operatorname{ind} G$, где F_i - инварианты, а f_1, f_2 - функции непостоянные на орбите. Явный вид F_i, f_1, f_2, см. в теореме 3.I.2 главы III. В следующей основной теореме исследуется вопрос о топологической структуре поверхности постоянной энергии и о боттовости построенных интегралов.

<u>ТЕОРЕМА 4.I.I</u>. а) Пусть $G = sl(2,\mathbb{R}) \oplus_{\varphi_m} \mathbb{R}^2$, $\dot{x} = \operatorname{sgrad} f_1(x)$, $x \in G$ - гамильтонова система на G^* с гамильтонианом $f_1(x)$. Тогда все орбиты представления Ad_G^* расслоены на изоэнергетические поверхности $Q^3 = \{f_1(x) = const\}$, обладающие тем свойством, что для всех этих поверхностей Q^3 функция $f_2|_{Q^3}$ являются боттовским интегралом потока $\dot{x}$. Более точно, функция f_2 на некомпактном многообразии Q^3 не имеет критических точек. Многообразие Q^3 в общем положении диффеоморфно тривиальному одномерному векторному расслоению над $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

б) Пусть $G = sl(2,\mathbb{R}) \oplus_{\varphi_m} \mathbb{R}^3$, $\dot{x} = \operatorname{sgrad} f_1(x)$, $x \in G$ - гамильтонова система на G^* с гамильтонианом $f_1(x)$. Тогда все орбиты представления Ad_G^* расслоены на изоэнергетические поверхности $Q^3 = \{f_1(x) = const\}$, обладающие тем свойством, что для всех этих поверхностей Q^3 функция $f_2|_{Q^3}$ является боттовским интегралом потока $\dot{x}$ для вектора сдвига общего положения (причем условие, описывающее общее положение, описано в явном виде). Более точно, функция f_2 на некомпактном многообразии Q^3 не имеет критических точек. Многообразие Q^3 можно представить в виде $Q^3 = M^2 \times (0,1)$, где M^2 – одна из двумерных поверхностей: а) цилиндр $M^2 \cong S^1 \times (0,1)$, б) плоскость $M^2 \cong \mathbb{R}^2$, в) два экземпляра плоскости $M^2 \cong S^0 \times \mathbb{R}^2$. Причем при изменении энергии возможна перестройка

$$а \longrightarrow б \longrightarrow в \longrightarrow а$$

§ 2. Доказательство основной теоремы

2.1. Случай $n=1$

Докажем боттовости интегралов для $n=1$. Орбита M^4 задана уравнением

$$F = x_{-1} y_0^2 - x_0 y_0 y_1 - x_1 y_1^2 = C_1 \qquad (4.2.1)$$

в пятимерном пространстве $G^* \cong \mathbb{R}^5$ с координатами: $x_{-1}, x_0, x_1, y_0, y_1$. Это многообразие очевидно некомпактное, так как оно неограничено. Фиксируем y_0, y_1, тогда для нахождения x_{-1}, x_0, x_1 имеем уравнение $Ax_{-1} + Bx_0 + Dx_1 = C_1$. Отсюда $x_{-1} = \frac{C_1 - Bx_0 - Dx_1}{A}$, $A \neq 0$. Трехмерная поверхность Q^3 постоянной энергии в M^4 задается уравнением $H = b_0 x_{-1} y_0 + a_{-1} y_0^2 - a_0 y_0 y_1 - b_0 x_0 y_1$

$$- b_1 x_0 y_0 - a_1 y_1^2 - 2 b_1 x_1 y_1 = C_2 . \qquad (4.2.2)$$

Существует дополнительный интеграл

$$f = b_0^2 x_{-1} - b_0 b_1 x_0 - b_1^2 x_1 + y_0 (2a_1 b_0 - a_0 b_1) + y_1 (-a_0 b_0 - 2 a_1 b_1) \quad (4.2.3)$$

независимый (почти всюду) с H и находящийся с H в инволюции, т.е. $\{f, H\} = 0$.

Исследуем поверхности уравнения инварианта F, т.е. $F = x_{-1} y_0^2 - x_0 y_0 y_1 - x_1 y_1^2 = C_1$. Отсюда получаем

$$x_{-1} = \frac{C_1 + x_0 y_0 y_1 + x_1 y_1^2}{y_0^2}, \qquad y_0 \neq 0 \qquad (4.2.4)$$

Подставляя эту зависимость в уравнение (4.2.2), т.е. $H = C_2$, получаем

$$x_0 = \frac{c_2 y_0 - 2b_0 c_1 - 2b_0 x_1 y_1^2 - a_{-1} y_0^3 - a_0 y_0^2 y_1 + a_1 y_0 y_1^2 + 2b_1 x_1 y_0 y_1}{y_0 (b_0 y_1 - b_1 y_0)} \tag{4.2.5}$$

для $y_0 \neq 0$, $y_1 \neq \frac{b_1}{b_0} y_0$.

Подставляя теперь соотношение (4.2.5) в (4.2.4) имеем

$$x_{-1} = \frac{1}{y_0^2 (b_0 y_1 - b_1 y_0)} \big(-c_1 b_0 y_1 - c_1 b_1 y_0 + c_2 y_0 y_1 - b_0 x_1 y_1^3 - a_{-1} y_0^3 y_1 - a_0 y_0^2 y_1^2 + a_1 y_0 y_1^3 + b_1 x_1 y_0 y_1^2 \big). \tag{4.2.6}$$

Итак, на поверхности Q^3 постоянной энергии имеем

$x_{-1} = x_{-1}(x_1, y_0, y_1)$; $x_0 = x_0(x_1, y_0, y_1)$; $x_1 = x_1$, $y_0 = y_0$, $y_1 = y_1$;

причем все зависимости выписаны явно.

Второй интеграл f задан формулой (4.2.3). Рассмотрим ограничение $f|_{Q^3}$. Получаем

$$f|_{Q^3} = \frac{1}{y_0^2 (b_0 y_1 - b_1 y_0)} \big[-c_1 b_0^3 y_1 + b_0^2 b_1 c_1 y_0 + c_2 b_0^2 y_0 y_1 - c_2 b_0 b_1 y_0^2 - b_0^3 x_1 y_1^3 + 3 b_0^2 b_1 x_1 y_0 y_1^2 - 3 b_0 b_1^2 x_1 y_0^2 y_1 + b_1^3 x_1 y_0^3 + y_0^3 y_1 (a_{-1} b_0^2 + a_0 b_0 b_1 + 2a_1 b_1^2) + a_1 b_0^2 y_0 y_1^3 + y_0^4 (-a_{-1} b_0 b_1 + a_0 b_1^2) + y_0^2 y_1^2 (-3a_1 b_0 b_1 - a_0 b_0^2) \big].$$

Считаем теперь производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial y_0}$, $\frac{\partial f}{\partial y_1}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{y_0^2 (b_0 y_1 - b_1 y_0)} \big(-b_0^3 y_1^3 + 3 b_0^2 b_1 y_0 y_1^2 - 3 b_0 b_1^2 y_0^2 y_1 + b_1^3 y_0^3 \big) = -\frac{1}{y_0^2} (b_0 y_1 - b_1 y_0)^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_0} = \frac{1}{2 y_0^2 y_1 (b_0 y_1 - b_1 y_0)^2} \big[-2c_1 b_0^3 b_1 y_1^2 - b_0^4 x_0 y_1^4 + 2b_0^3 b_1 x_0 y_0 y_1^3 - c_2 b_0^3 y_1^3 + y_0^2 y_1^3 (3a_{-1} b_0^3 + 7a_1 b_0 b_1^2 + a_0 b_0^2 b_1) + 2a_1 b_0^2 b_1 y_0 y_1^4 - a_1 b_0^3 y_1^5 - c_2 b_0 b_1^2 y_0^2 y_1 - 4c_1 b_0^2 b_1^2 y_0 y_1 + y_0^4 y_1 (7a_{-1} b_0 b_1^2 - a_0 b_1^3) + y_0^3 y_1^2 (2a_0 b_0 b_1^2 - 8a_{-1} b_0^2 b_1) - 2b_0 b_1^3 x_0 y_0^3 y_1 + 2c_2 b_0^2 b_1 y_0 y_1^2 +$$

$$+ 2C_1 b_0 b_1^3 y_0^2 - 2a_{-1} b_1^3 y_0^5 + b_1^4 x_0 y_0^4 \,] ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{1}{4y_0^2 y_1^2 (b_0 y_1 - b_1 y_0)} [\, 4C_1 b_0^3 b_1 y_0 y_1^2 + 2b_0^4 x_0 y_0 y_1^4 -$$

$$- 4b_0^3 b_1 x_0 y_0^2 y_1^3 + y_0^3 y_1^3 (4a_0 b_0^2 b_1 + 16 a_1 b_0 b_1^2) + y_0^2 y_1^4 (-2a_0 b_0^3 -$$

$$- 14 a_1 b_0^2 b_1 + 16 a_{-1} b_0^2 b_1) + 4a_1 b_0^3 y_0 y_1^5 + y_0^4 y_1^2 (2a_0 b_0 b_1^2 -$$

$$- 12 a_{-1} b_0^2 b_1 - 6a_1 b_1^3) - 4C_1 b_0^2 b_1^2 - 2C_2 b_0^2 b_1 + 4b_0 b_1^3 x_0 y_0^4 y_1 -$$

$$- 4a_{-1} b_0 b_1^2 y_0^5 y_1 + 4C_2 b_0 b_1^2 y_0^3 y_1 - 4C_1 b_0^2 b_1^2 y_0^2 y_1 - 2C_1 b_1^3 y_0^4 +$$

$$+ 4C_1 b_0 b_1^3 y_0^3 + 2a_{-1} b_1^3 y_0^6 - 2b_1^4 x_0 y_0^5 \,] .$$

Ищем критические точки функции f . Для этого надо решить систему $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y_0} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$.

Из уравнения $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$ следует, что $b_0 y_1 - b_1 y_0 = 0$. Откуда $y_1 = \frac{b_1}{b_0} y_0$, а это противоречит предположению, что $y_1 \neq \frac{b_1}{b_0} y_0$.

Итак, видно, что функция f на $Q^3 \setminus \left\{ \begin{matrix} y_0 = 0 \\ y_1 = \frac{b_1}{b_0} y_0 \end{matrix} \right\}$ критических точек не имеет.

Рассмотрим теперь точки, которые не попали в карту на Q^3, описанную выше.

Итак, пусть $y_0 = 0$. Тогда $Q^3 \cap \{ y_0 = 0 \} = \Pi$ задается системой уравнений

$$\Pi : \begin{cases} F = -x_1 y_1^2 = C_1 , \\ H = -b_0 x_0 y_1 - a_1 y_1^3 - 2b_1 x_1 y_1 = C_2 . \end{cases}$$

Из равенства $-x_1 y_1^2 = C_1$ получаем $x_1 = -\frac{C_1}{y_1^2}$, $y_1 \neq 0$. Подставляя полученную зависимость в уравнение $H = C_2$, имеем

$$x_0 = \frac{-a_1 y_1^3 + 2b_1 C_1 - C_2 y_1}{b_0 y_1^2} , \quad b_0 \neq 0 .$$

Итак, на двумерной поверхности $\Pi = \Pi(x_{-1}, y_1)$ можно взять локальную систему координат (x_{-1}, y_1). В этой системе координат имеет место равенство:

$$f|_{\Pi} = \frac{1}{y_1^2} [\, b_0^2 x_{-1} y_1^2 + b_1 C_2 y_1 - b_1^2 C_1 + y_1^3 (-a_0 b_0 - a_1 b_1) \,] .$$

Вычисляем производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{-1}} = \frac{1}{y_1^2}\left(b_0^2 y_1^2\right) = b_0^2 ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{1}{y_1^3}\left[-b_1 c_2 y_1 + 2b_1^2 c_1 + y_1^3(-a_0 b_0 - a_1 b_1)\right].$$

Для нахождения критических точек ограничения функции f на подмножество $\{y_0 = 0\}$ имеем систему $\frac{\partial f}{\partial x_{-1}} = \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$. Равенство $\frac{\partial f}{\partial x_{-1}} = 0$ выполняется при $b_0 = 0$, а это противоречит предположению. Итак, функция на этом подмножестве критических точек не имеет.

Замечание. Для а) $y_1 = \frac{b_0}{b_1} y_0$; б) $y_0 = 0$, $y_1 = 0$ функции F, H, f являются функционально зависимы. Следовательно, функция f на Q^3 критических точек не имеет.

Докажем теперь, что многообразие Q^3 в общем положении диффеоморфно тривиальному одномерному векторному расслоению над $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Орбита M^4 задана уравнением (4.2.1). в пятимерном пространстве $G^* \cong \mathbb{R}^5$ с координатами $x_{-1}, x_0, x_1, y_0, y_1$. Трехмерная поверхность Q^3 постоянной энергии в M^4 задается уравнением (4.2.2). В общем положении тогда и только тогда, когда

$$(c_1, c_2) \neq (0,0) \Rightarrow y_0 \neq 0 \wedge y_1 \neq 0 .$$

а) Если $y_0 \neq 0$, то

$$x_0 = \frac{1}{y_0(b_0 y_1 - b_1 y_0)}\left(c_2 y_0 - 2b_0 c_1 - 2b_0 x_1 y_1^2 - a_{-1} y_0^3 - a_0 y_0^3 y_1 + \right.$$
$$\left. + a_1 y_0 y_1^2 + 2b_1 x_1 y_0 y_1\right),$$

$$x_{-1} = \frac{1}{y_0^2(b_0 y_1 - b_1 y_0)}\left(-c_1 b_0 y_1 - c_1 b_1 y_0 + c_2 y_0 y_1 - b_0 x_1 y_1^3 - \right.$$
$$\left. - a_{-1} y_0^3 y_1 - a_0 y_0^2 y_1^2 + a_1 y_0 y_1^3 + b_1 y_0 y_1^2\right).$$

Если фиксировать (y_0, y_1), то плоскости $H = const$ и $F = const$ пересекаются по прямой.

б) Если $y_0 = 0$, то M^4: $F = -x_1 y_1^2 = c_1$ и

$H = b_0 x_0 y_1 - a_1 y_1^2 - 2b_1 x_1 y_1 = C_2$, из этой системы видно, что пересечение $F = const$ и $H = const$ тоже есть прямая. Из предыдущего следует, что $Q^3 \cong M^2 \times (0,1)$, где для M^2 имеется две возможности 1) $M^2 \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, 2) $M^2 \cong L^2$ (лист Мёбиуса). Второй случай невозможен, так как орбита ориентируема, а Q^3 задается одним уравнением $H = const$ в ориентируемом многообразии и, следовательно, оно ориентируемо. Теорема в случае $n = 1$ доказана.

2.2. Случай $n = 2$

Докажем боттовость интегралов для $n = 2$. Орбита M^4 является пересечением двух квадрик

$$M^4 : \begin{cases} F_1 = y_1^2 - 4 y_0 y_2 = C_1 , \\ F_2 = 2x_{-1} y_0 - x_0 y_1 - 2 x_1 y_2 = C_2 \end{cases} \tag{4.3.1}$$

в шестимерном пространстве $G^* \cong \mathbb{R}^6$ с координатами $x_{-1}, x_0, x_1, y_0, y_1, y_2$. Это многообразие, очевидно, некомпактное, так как для данного набора (y_0, y_1, y_2), удовлетворяющего уравнению $F_1 = C_1$, всегда можно найти подходящий набор (x_{-1}, x_0, x_1) , удовлетворяющий уравнению $F_2 = C_2$, т.е. M^4 неограничено.

Трехмерная поверхность Q^3 постоянной энергии в M^4 задается дополнительным уравнением

$$H = 2b_1 y_1 - 4b_2 y_0 - 4b_0 y_2 = C_3 . \tag{4.3.2}$$

Существует еще дополнительный интеграл

$$f = 2a_{-1} y_0 + 2b_0 x_{-1} - a_0 y_1 - b_1 x_0 - 2a_1 y_2 - 2b_2 x_1 , \tag{4.3.3}$$

независимый с H (почти всюду) и находящийся с ним в инволюции.

Исследуем поверхность $y_1^2 - 4y_0 y_2 = C_1$ уровня инварианта. Пусть

$$y_0 = (u_2 + u_3)\frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

$$y_1 = u_1 ,$$

$$y_2 = (u_2 - u_3)\frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Тогда $\frac{u_1^2}{C_1} - \frac{u_2^2}{2C_1} + \frac{u_3^2}{2C_1} = 1$, если только $C_1 \neq 0$.
При $C_1 > 0$ то уравнение описывает однополостный гиперболоид, при $C_1 < 0$ – двуполостный гиперболоид, при $C_1 = 0$ имеем конус. Обозначим эту поверхность через Π . Имеет место

Предложение 4.I. Орбита M^4 общего положения коприсоединенного представления диффеоморфна касательному расслоению $T\Pi$ над поверхностью Π , $\Pi : y_1^2 - 4y_0y_2 = C_1$.

Доказательство. При фиксированных (y_0, y_1, y_2) точка с координатами $(x_{-1}, x_0, x_1, y_0, y_1, y_2)$ принадлежит орбите M^4 тогда и только тогда, когда точка (x_{-1}, x_0, x_1) принадлежит плоскости $2x_{-1}y_0 - x_0y_1 - 2x_1y_2 = C_2$, которая параллельна касательной плоскости $T_m\Pi$ к Π в точке $m = (y_0, y_1, y_2)$, так как

$$\operatorname{grad}_m (y_1^2 - 4y_0y_2) = [-4y_2, 2y_1, -4y_0].$$

Теперь опишем поверхность Q^3 постоянной энергии. Из предыдущего утверждения вытекает следующее

Предложение 4.2. Поверхность Q^3 постоянной энергии $2b_1y_1 - 4b_2y_0 - 4b_0y_2 = C_3$ диффеоморфна для орбит общего положения, ограничению $(T\Pi)|_\gamma$ на кривую $\gamma = \Pi \cap \mathbb{\Pi}$ второго порядка касательного расслоения $T\Pi$ к поверхности Π , где $\mathbb{\Pi}$ – плоскость в пространстве R^3 с координатами (y_0, y_1, y_2), которая описывается уравнением $2b_1y_1 - 4b_2y_0 - 4b_0y_2 = C_3$.

Доказательство вытекает из того, что пересечение $\gamma = \Pi \cap \mathbb{\Pi}$ задается системой
$$\begin{cases} F_1 = y_1^2 - 4y_0y_2 = C_1, \\ H = 2b_1y_1 - 4b_2y_0 - 4b_0y_2 = C_3 \end{cases}$$
а Q^3 задается системой $F_1 = C_1$, $F_2 = C_2$, $H = C_3$.

Из предложения 4.2 вытекает топологическое строение многообразия Q^3 .

Предложение 4.3. Многообразие Q^3 можно представить в виде $Q^3 \cong M^2 \times (0,1)$, где M^2 – одна из двумерных поверхностей:

а) цилиндр $M^2 \cong S^1 \times (0,1)$, б) плоскость $M^2 \cong \mathbb{R}^2$, в) два экземпляра плоскости $M^2 \cong S^0 \times \mathbb{R}^2$. Причем при изменении энергии возможна перестройка $a \to б \to в \to a$.

<u>Доказательство</u>. В общем случае пересечение $\gamma = \Pi \cap \overline{\Pi}$ есть а) либо эллипс $Э$, б) либо парабола P , в) либо гипербола Γ . В первом случае $Q^3 \cong T\overline{\Pi}|_Э \cong Э \times T_{x_0}\overline{\Pi} \cong Э \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong$ $\cong (Э \times \mathbb{R}) \times (0,1)$, т.е. можно положить $M^2 \cong (Э \times \mathbb{R}) \cong S^1 \times \mathbb{R}$.

Во втором случае $Q^3 \cong T\overline{\Pi}|_P \cong P \times T_{x_0}\overline{\Pi} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong$ $\cong (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (0,1)$, т.е. можно положить $M^2 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. В третьем случае $Q^3 \cong T\overline{\Pi}|_\Gamma \cong \Gamma \times T_{x_0}\overline{\Pi} \cong (S^0 \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong$ $\cong (S^0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, т.е. можно положить $M^2 \cong S^0 \times \mathbb{R}^2$. Предложение доказано.

Исследуем сначала пересечение гиперболоида $y_1^2 - 4y_0y_2 = C_1$ с плоскостью $-4b_2y_0 + 2b_1y_1 - 4b_0y_2 = C_3$. Напомним простейшие свойства пересечения поверхности второго порядка и плоскости, которые будем использовать в дальнейшем.

1. Плоскость $\overline{\Pi}: Ax + By + Cz + D = 0$ пересекает поверхность $\Pi: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx +$ $+ 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0$ по центральной линии $\overline{\Pi} \cap \Pi$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (4.3.4)$$

2. Координаты (x_0, y_0, z_0) центра линии пересечения определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1 = \lambda A \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2 = \lambda B \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3 = \lambda C \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \qquad (4.3.5)$$

3. Канонические уравнения паре сечения $\Pi \cap \Pi'$

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{k_3}{I_2} = 0 \qquad (4.3.6)$$

где λ_1, λ_2 - корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0 \qquad (4.3.7)$$

а I_1, I_2, k_3 - инварианты кривой $\Pi \cap \Pi'$, равные

$$-I_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & A \\ a_{21} & a_{22} & B \\ A & B & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & A \\ a_{31} & a_{33} & C \\ A & C & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & B \\ a_{32} & a_{33} & C \\ B & C & 0 \end{vmatrix},$$

$$-k_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 & C \\ a_1 & a_2 & a_3 & a & D \\ A & B & C & D & 0 \end{vmatrix}, \quad -I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix}$$

4. Главные направления $\{l, m, n\}$ пересечения $\Pi \cap \Pi'$ находятся из системы

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i) l + a_{12} m + a_{13} n - A\beta = 0 \\ a_{21} l + (a_{22} - \lambda_i) m + a_{23} n - B\beta = 0 \\ a_{31} l + a_{32} m + (a_{33} - \lambda_i) n - C\beta = 0 \\ A l + B m + C n = 0 \end{cases} \qquad (4.3.8)$$

$i = 1, 2$, где λ_1, λ_2 - корни характеристического уравнения (4.3.7). Корню λ_1 отвечает вектор $\{l_1, m_1, n_1\} = v_1$, а корню λ_2 - вектор $\{l_2, m_2, n_2\} = v$.

В нашем случае пересечения $\Pi \cap \Pi'$ являются центральной кривой тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & -4b_2 \\ 0 & 1 & 0 & 2b_1 \\ -2 & 0 & 0 & -4b_0 \\ -4b_2 & 2b_1 & -4b_0 & 0 \end{vmatrix} = 16(b_1^2 - 4b_0 b_2) \neq 0,$$

Если пересечение $\Pi \cap \Pi$ является центральной линией, то координаты $(y_0^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)})$ центра M_0 этой линии находятся из системы уравнений

$$
\begin{cases}
-2y_2 = \lambda(-4b_2) \\
y_1 = \lambda(2b_1) \\
-2y_0 = \lambda(-4b_0) \\
-4b_2 y_0 + 2b_1 y_1 - 4b_0 y_2 = C_3 .
\end{cases}
$$

Отсюда $y_0 = 2\lambda b_0$, $y_1 = 2\lambda b_1$, $y_2 = 2\lambda b_2$, поэтому

$$\lambda = \frac{C_3}{4(b_1^2 - 4b_0 b_2)}$$ и, следовательно,

$$y_0^{(0)} = \frac{b_0 C_3}{2(b_1^2 - 4b_0 b_2)},$$

$$y_1^{(0)} = \frac{b_1 C_3}{2(b_1^2 - 4b_0 b_2)},$$

$$y_2^{(0)} = \frac{b_2 C_3}{2(b_1^2 - 4b_0 b_2)}.$$

Выпишем теперь инварианты кривой $\Pi \cap \Pi$:

$$-I_1 = 16(b_0^2 + 4b_0 b_2 + b_2^2),$$

$$-k_3 = -C_1 I_2 + 4C_3^2,$$

$$-I_2 = 16(b_1^2 - 4b_0 b_2).$$

Решаем характеристическое уравнение (4.3.7), т.е. уравнение $\lambda^2 - 16\lambda(b_0^2 + 4b_0 b_2 + b_2^2) - 16(b_1^2 - 4b_0 b_2) = 0$. Ясно, что

$$\lambda_1 = 4[2(b_0^2 + 4b_0 b_2 + b_2^2) + \sqrt{4(b_0^2 + 4b_0 b_2 + b_2^2) + b_1^2 - 4b_0 b_2}\,],$$

$$\lambda_2 = 4[2(b_0^2 + 4b_0 b_2 + b_2^2) - \sqrt{4(b_0^2 + 4b_0 b_2 + b_2^2) + b_1^2 - 4b_0 b_2}\,]. \quad (4.3.9)$$

Решим теперь систему уравнений (4.3.8) для $\lambda = \lambda_i$, $i = 1, 2$.

$$
\begin{cases}
-\lambda_i l - 2n - A\beta = 0 \\
(1 - \lambda_i) m - B\beta = 0 \\
-2l - \lambda_i n - C\beta = 0 \\
Al + Bm + Cn = 0 .
\end{cases}
$$

Ясно, что вектор $v_i = \{l_i, m_i, n_i\}$ главного направления имеет координаты

$$\begin{aligned} l_i &= A\lambda_i^2 + \lambda_i(C-A) - C \\ m_i &= B(2+\lambda_i^2) \\ n_i &= 2A\lambda_i^3 + \lambda_i^2(C-3A) + \lambda_i(-C+2A) - 2A, \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

где $i=1,2$, а λ_1, λ_2 в явном виде указаны в (4.3.9).
Пересечение поверхности $y_1^2 - 4y_0y_2 = C_1$ с плоскостью $2b_1y_1 - 4b_2y_0 - 4b_0y_2 = C_3$ в случае общего положения есть либо эллипс, либо гипербола.

Построим локальную систему координат на многообразии Q^3 постоянной энергии. Если пересечение $\Pi \cap \Pi$ есть эллипс, то его уравнение в канонической системе координат (M_0, v_1, v_2) (описанного в явном виде выше) имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, здесь a и b однозначно определяется из уравнения (4.3.6), все коэффициенты которого в явном виде выписаны выше; если же пересечение $\Pi \cap \Pi$ есть гипербола, то в канонической системе координат (M_0, v_1, v_2) ее уравнение имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. В первом случае можно положить $u = a\cos t$, $v = b\sin t$, а во втором $u = a\,ch\,t$, $v = b\,sh\,t$, где u, v – координаты в плоскости Π относительно канонической системы координат (M_0, v_1, v_2).

Итак, если пересечение $\Pi \cap \Pi$ есть эллипс, то для $\Pi \cap \Pi$ имеем параметризацию

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{b_0 C_3}{2(b_1^2 - 4b_0b_2)} + a\cos t \cdot l_1 + b\sin t \cdot l_2, \\ y_1 &= \frac{b_1 C_3}{2(b_1^2 - 4b_0b_2)} + a\cos t \cdot m_1 + b\sin t \cdot m_2, \\ y_2 &= \frac{b_2 C_3}{2(b_1^2 - 4b_0b_2)} + a\cos t \cdot n_1 + b\sin t \cdot n_2, \end{aligned}$$

где l_i, m_i, n_i даны формулами (4.3.10), если пересечение $\Pi \cap \Pi$ есть гипербола, то для $\Pi \cap \Pi$ имеем параметризацию

$$y_0 = \frac{b_0 c_3}{2(b_1^2 - 4b_0 b_2)} + a\,ch t \cdot l_1 + b\,sh t \cdot l_2$$

$$y_1 = \frac{b_1 c_3}{2(b_1^2 - 4b_0 b_2)} + a\,ch t \cdot m_1 + b\,sh t \cdot m_2$$

$$y_2 = \frac{b_2 c_3}{2(b_1^2 - 4b_0 b_2)} + a\,ch t \cdot n_1 + b\,sh t \cdot n_2 .$$

На Q^3 возьмем локальную систему координат (t, x_0, x_1). Ясно, что t, x_0, x_1 – локальная система координат, так как

$$x_{-1} = \frac{c_2 + x_0 y_1 + 2x_1 y_2}{2y_0} \quad \text{для} \quad y_0 \neq 0$$

на поверхности Q^3, на которой выполнено равенство $2x_{-1}y_0 - x_0 y_1 - 2x_1 y_2 = c_2$. Подставляя y_0, y_1, y_2, получим

$$x_{-1} = \frac{1}{2\left[\frac{b_0 c_3}{2(b_1^2 - 4b_0 b_2)} + a l_1 \cos t + b l_2 \sin t\right]} \left[c_2 + x_0\left(\frac{b_1 c_3}{2(b_1^2 - 4b_0 b_2)} + a m_1 \cos t + b m_2 \sin t\right) + 2x_1\left(\frac{b_2 c_3}{2(b_1^2 - 4b_0 b_2)} + a n_1 \cos t + b n_2 \sin t\right)\right].$$

Итак, на поверхности Q^3 постоянной энергии имеем

$$\begin{cases} x_{-1} = x_{-1}(x_0, x_1, t), & x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \\ y_0 = y_0(t), & y_1 = y_1(t), \quad y_2 = y_2(t), \end{cases}$$

причем все зависимости выписаны явно. Второй интеграл f – это функция:

$$f = 2a_{-1}y_0 + 2b_0 x_{-1} - a_0 y_1 - b_1 x_0 - 2a_1 y_2 - 2b_2 x_1 .$$

Рассмотрим ограничение $f|_{Q^3}$. Имеем

$$f|_{Q^3} = \frac{a_{-1} b_0 c_3}{b_1^2 - 4b_0 b_2} + 2a_{-1} a l_1 \cos t + 2a_{-1} b l_2 \sin t - \frac{a_0 b_1 c_3}{2(b_1^2 - 4b_0 b_2)} - a_0 a m_1 \cos t - a_0 b m_2 \sin t - b_1 x_0 - 2b_2 x_1 - \frac{a_1 b_2 c_3}{b_1^2 - 4b_0 b_2} - 2a_1 a n_1 \cos t - 2a_1 b n_2 \sin t + \frac{b_0}{\left(\frac{b_0 c_3}{2(b_1^2 - 4b_0 b_2)} + a l_1 \cos t + b l_2 \sin t\right)} \left[c_2 + x_0\left(\frac{b_1 c_3}{2(b_1^2 - 4b_0 b_2)} + a m_1 \cos t + b m_2 \sin t\right) + 2x_1\left(\frac{b_2 c_3}{2(b_1^2 - 4b_0 b_2)} + a n_1 \cos t + b n_2 \sin t\right)\right].$$

Считаем теперь производные $\frac{\partial f}{\partial x_0}$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = \frac{1}{\left(\frac{b_0 C_3}{2(b_1^2-4b_0b_2)} + a l_1 \cos t + b l_2 \sin t\right)}\left[b_0\left(\frac{b_1 C_3}{2(b_1^2-4b_0b_2)} + a m_1 \cos t + \right.\right.$$

$$\left.\left. + b m_2 \sin t\right)\right] - b_1 \, ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{2b_0}{\left(\frac{b_0 C_3}{2(b_1^2-4b_0b_2)} + a l_1 \cos t + b l_2 \sin t\right)}\left[\frac{b_2 C_3}{2(b_1^2-4b_0b_2)} + a n_1 \cos t + \right.$$

$$\left. + b n_2 \sin t\right] - 2b_2 \, ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{a b_0 l_1 \sin t + b_0 b l_2 \cos t}{\left(\frac{b_0 C_3}{2(b_1^2-4b_0b_2)} + a l_1 \cos t + b l_2 \sin t\right)^2}\left[C_2 + \frac{b_1 C_3 x_0 + 2b_2 C_3 x_1}{2(b_1^2-4b_0b_2)}\right.$$

$$\left. + a \cos t\,(x_0 m_1 + 2x_1 n_1) + b \sin t\,(x_0 m_2 + 2x_1 n_2)\right] +$$

$$+ \frac{b_0}{\left(\frac{b_0 C_3}{2(b_1^2-4b_0b_2)} + a l_1 \cos t + b l_2 \sin t\right)}\cdot\left[a \sin t\,(-x_0 m_1 + \right.$$

$$+ 2x_1 n_1) + b \cos t\,(x_0 m_2 + 2x_1 n_2) + a \sin t\,(-2a_1 l_1 +$$

$$\left. + a_0 m_1 + 2a_1 n_1) + b \sin t\,(2a_1 l_2 - a_0 m_2 - 2a_1 n_2\right).$$

Ищем критические точки функции f . Для этого надо решить систему $\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Из уравнения $\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0$ следует, что

$$\frac{b_0 b_1 C_3}{2(b_1^2-4b_0b_2)} - \frac{b_0 b_1 C_3}{2(b_1^2-4b_0b_2)} + a \cos t\,(b_0 m_1 - b_1 l_1) +$$

$$+ b \sin t\,(b_0 m_2 - b_1 l_2) = 0 \, ,$$

т.е. $a \cos t\,(b_0 m_1 - b_1 l_1) = b \sin t\,(b_1 l_2 - b_0 m_2)$.

Отсюда при $\cos t \neq 0$, $(b_1 l_2 - b_0 m_2) \neq 0$ получим равенство $\frac{b}{a}\,\mathrm{tg}\,t = \frac{b_0 m_1 - b_1 l_1}{b_1 l_2 - b_0 m_2}$.

Из уравнения $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$ следует, что

$$a\cos t(b_0 n_1 - b_2 l_1) = b\sin t(b_2 l_2 - b_0 n_2).$$

Отсюда при $\cos t \neq 0$, $(b_2 l_2 - b_0 n_2) \neq 0$ получим равенство

$$\frac{b}{a}\,tg\,t = \frac{b_0 n_1 - b_2 l_1}{b_2 l_2 - b_0 n_2}.$$

Поэтому для того, чтобы функция f на a^3 имела особые точки, необходимо равенство

$$\frac{b_0 m_1 - b_1 l_1}{b_1 l_2 - b_0 m_2} = \frac{b_0 n_1 - b_2 l_1}{b_2 l_2 - b_0 n_2}.$$

Отсюда

$$b_0 b_2(m_1 l_2 - l_1 m_2) + b_0^2(m_2 n_1 - m_1 n_2) +$$
$$+ b_1 b_2(l_1 l_2 - l_1 l_2) + b_0 b_1(l_1 n_2 - l_2 n_1) = 0 \quad \text{т.е.}$$

$$b_0 b_2(m_1 l_2 - l_1 m_2) + b_0^2(m_2 n_1 - m_1 n_2) + b_0 b_1(l_1 n_2 - l_2 n_1) = 0. \quad (4.3.II)$$

Соотношение (4.3.II) тождественно не выполняется. Действительно, пусть $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$. Тогда решения уравнения (4.3.7), это

$$\lambda_1 = 16{,}944271; \quad \lambda_2 = -0{,}9442715.$$

Решая систему (4.3.8) для $\lambda_1 = 16{,}944271$ получим

$$l_1 = -71{,}777084; \quad m_1 = 578{,}21662; \quad n_1 = -1080{,}6562.$$

Если $\lambda_2 = -0{,}9442715$, имеем

$$l_2 = -0{,}222914; \quad m_2 = 5{,}7832972; \quad n_2 = -7{,}3436804.$$

Подставляя теперь полученные значения в уравнение (4.3.II), получим $-1717{,}5034 \neq 0$. Таким образом, соотношение (4.3.II) тождественно не выполняется. Следовательно, если вектор сдвига не удовлетворяет соотношению (4.3.II), то критических точек функция f на $a^3 \setminus \{y_0 = 0\}$ не имеет.

Рассмотрим теперь точки, которые не попали в карту на , описанную выше. Итак, пусть $y_0 = 0$. Тогда $Q^3 \cap \{y_0 = 0\}$ задается системой уравнений:

$$\begin{cases} F_1 = y_1^2 = C_1, \\ F_2 = -x_0 y_1 - 2x_1 y_2 = C_2, \\ H = 2b_1 y_1 - 4b_0 y_2 = C_3. \end{cases}$$

Второй интеграл имеет вид

$$f = 2b_0 x_{-1} - a_0 y_1 - b_1 x_0 - 2a_1 y_2 - 2b_2 x_1 .$$

Из равенства $y_1^2 = C_1$ вытекает, что либо $y_{1,1} = \sqrt{C_1}$, либо $y_{1,2} = -\sqrt{C_1}$ для $C_1 \geq 0$.

Пусть $y_1 = \sqrt{C_1}$. Тогда $y_2 = \dfrac{2b_1\sqrt{C_1} - C_3}{4b_0}$ для $b_0 \neq 0$. Из соотношения $-x_0\sqrt{C_1} - 2x_1 \dfrac{2b_1\sqrt{C_1} - C_3}{4b_0} = C_2$ вытекает равенство

$$x_0 = \frac{C_3 x_1 - 2b_1\sqrt{C_1}\, x_1 - 2b_0 C_2}{2b_0\sqrt{C_1}} \quad \text{при } b_0 \neq 0,\ C_1 \neq 0 .$$

Итак, на двумерной поверхности $Q = Q(x_{-1}, x_1)$ можно взять локальную систему координат (x_{-1}, x_1). В этой системе координат имеет место равенство

$$f|_Q = \frac{1}{2b_0\sqrt{C_1}} \Big\{ 4b_0^2\sqrt{C_1}\, x_{-1} - 2a_0 b_0 C_1 - b_1 C_3 x_1 + 2b_1^2\sqrt{C_1}\, x_1 + 2b_0 b_1 C_2 - 2a_1 b_1 C_1 + a_1\sqrt{C_1}\, C_3 - 4b_0 b_2\sqrt{C_1}\, x_1 \Big\}.$$

Вычисляем производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{-1}} = \frac{1}{2b_0\sqrt{C_1}} \cdot 4b_0^2\sqrt{C_1} = 2b_0 ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{2b_0\sqrt{C_1}} \cdot \Big\{ -b_1 C_3 + 2b_1^2\sqrt{C_1} - 4b_0 b_2\sqrt{C_1} \Big\}.$$

Для нахождения критических точек ограничения функции f на подмножество $\{y_0 = 0\}$ имеем систему $\dfrac{\partial f}{\partial x_{-1}} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0$. Равенство $\dfrac{\partial f}{\partial x_{-1}} = 0$ выполняется при $b_0 = 0$, а это противоречие предположению.

Итак, функция f на G^5 критических точек не имеет (в предположении, что вектор сдвига общего положения), так как если бы функция f имела критическую точку, принадлежащую поверхности $\{\gamma_0 = 0\}$, то эта точка была бы критической для ограничения функции f на поверхность $\{\gamma_0 = 0\}$.

(Общее положение, когда условие а) (4.3.11) $\neq 0$

б) $b_0 \neq 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Е.М., Винберг Э.Б., Элашвили А.Г. Орбиты наибольшей размерности полупростых линейных групп Ли // Функц.анализ. 1967. - Т.1, № 4, с.3-7.
2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики // М.: Наука. 1974. - 432 с.
3. Арнольд В.И., Гивенталь А.Б. Симплектическая геометрия // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.4. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М., 1985. с.7-139.
4. Архангельский А.А. Вполне интегрируемые гамильтоновы системы на группе треугольных матриц // Матем.сбор. - 1979.- Т.108, № 1. - с.134-142.
5. Беляев А.В. О движении многомерного тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести // Матем.сбор. 1981, 114:3, с.465-470.
6. Березин Ф.А. Несколько замечаний об ассоциативной оболочке алгебры Ли // Функц.анализ и его прилож.- 1967. - Т.1, № 2, с. 1-14.
7. Болсинов А.В. Инволютивные семейства функций на двойственных пространствах к алгебрам Ли типа $G +_{\varphi} V$ // Успехи Матем.наук. Т.42. вып.6(258), 1987. - с.183-184.
8. Болсинов А.В. Новые примеры вполне интегрируемых систем на алгебрах Ли // Изд-во МГУ. Геометрия, дифференциальные уравнения и механика. 1986. - с.54-59.
9. Болсинов А.В. Вполне интегрируемые системы на сжатиях алгебр Ли // В кн.: Труды сем. по вект.и тенз.анализу. М.МГУ. вып. 22, 1985. - с.8-16.

10. Браилов А.В. Некоторые случаи полной интегрируемости уравнений Эйлера и приложения // Докл. АН СССР. - 1983. - 268, № 3. с. 1043-1046.

11. Браилов А.В. Полная интегрируемость с некоммутирующими интегралами некоторых уравнений Эйлера // Сб.Применение топологии в современном анализе. - Воронеж. - ВГУ.- 1985.- с.22-41.

12. Браилов А.В. Инволютивные наборы на алгебрах Ли и расширение кольца скаляров // Вестник МГУ, серия матем.мех.,1983. - № 1. - с.47-51.

13. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления // М.: Гос.изд.иностр.лит. 1947. - 408 с.

14. Веселов А.П. Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на $so(4)$ .// ДАН СССР. - 1983. т.270. № 6. с.1298-1300.

15. Винберг Э., Онищик И. Семинар по алгебраическим группам и группам Ли // М.: МГУ. - 1969. - 226 с.

16. Винберг Э. Линейные представления групп // М.: Наука. 1985. - 144 с.

17. Дао Чонг Тхи. Интегрируемость уравнений Эйлера на однородных симплектических многообразиях // Матем.сбор.1978, 106, № 2. - с.154-161.

18. Джекобсон Н. Алгебры Ли // М.: Мир. - 1964. - 355 с.

19. Дубровин Б.А., Кричевер Н.М., Новиков С.П. Интегрируемые системы I // Современные пробл.матем. Фундаментальные направл. Т.4 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР) М. - 1985. - с.179-284.

20. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия // М.: Наука. - 1986. - 759 с.

21. Картан Э. Геометрия группы Ли и симметрические пространства // М.: ИЛ. - 1949. - 384 с.

22. Кириллов А.А. Элементы теории представлений // М.: Наука. - 1978. - 343 с.

23. Крафт Х. Геометрические методы в теории инвариантов // М.: Мир. - 1987. - 312 с.

24. Ле Нгок Тьеуен. Коммутативные наборы функции на орбитах общего положения конечномерных алгебр Ли // Успехи матем. наук. - 1983. - Т.38, - № I. - с.I79-I80.

25. Ле Нгок Тьеуен. Полные инволютивные наборы функций на расширениях алгебры Ли, связанных с алгебрами Фробениуса // Тр.сем.по вектр.и тенз.анализу. М.: МГУ. - 1985. - вып.22, с.69-I06.

26. Манаков С.В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамик n - мерного твердого тела // Функц.анализ.- 1976. - Т.IO, № 4. с.93-94.

27. Мантуров О.В. Алгебры с неприводимой группой автоморфизмов// Докл.АН СССР. - 1985. - Т.28I, № 5. - с.I048-I05I.

28. Мантуров О.В. Инварианты присоединенных представлений полупростых алгебр Ли // Тензорные инварианты . - М. 1986.- с. 3-8. Деп. в ВИНИТИ, № 6553-В86.

29. Мантуров О.В. Однородные пространства и инвариантные тензоры // Проблемы геометрии. Итоги науки и техн.ВИНИТИ АН СССР. М. - Т.I8, - 1986. - с.I05-I42.

30. Милнор Дж. Теория Морса // М.: Мир, I965. - I85 с.

3I. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв.АН СССР, сер.матем.- 1978. - Т.49, № 2. - с.396-4I5.

32. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Об интегрировании уравнения Эйлера на полупростых алгебрах Ли // Докл.АН СССР.- 1976. - Т.231, № 3. - с.536-538.

33. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии // Изд-во МГУ. 1980. - 440 с.

34. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем // Функц. анализ и его прил. - 1978. - Т.12, № 2, с.46-56.

35. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли // Тр.Сем.по вект.и тенз.анализу. - 1979. -Т.19, с.3-94.

36. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями // В кн.: Труды сем. по вект.и тенз.анализу. М.: МГУ, 1981. - вып.20.с.5-54.

37. Мозер Ю. Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем // Успехи матем.наук.- 1981. - Т.36, № 6,- с.109-151.

38. Ольшанецкий М.А., Переломов А.М., Рейман А.Г., Семенов-Тян-Шанский М.А. Интегрируемые системы II // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.16. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М.- 1987. - с.86-226.

39. Певцова Т.А. Симплектическая структура орбит коприсоединенного представления алгебры Ли типа $E \times_S G$ // Успехи матем.наук.- 1982. - Т.37, № 2. - с.225-226.

40. Певцова Т.А. Один способ построения коммутативной алгебры интегралов на алгебрах Ли // Всесоюз.конферен.на соврем. проблемам геометрии. Тезисы докладов. Минск,1979.- 149 с.

41. Переломов А.М. Несколько замечаний об интегрировании уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости // Функц. анализ и его приложения.1981. 15:2, с.83-85

42. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы // М.: Наука. - 1984.- 520 с.

43. Рашевский П.К. Геометрическая теория уравнений в частных производных // М.-Л.: Гостехиздат. - 1947. - 354 с.

44. Рейман А.Г. Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с градуированными алгебрами Ли // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1980. - Т.95.- с.3-54.

45. Серр Ж.П. Алгебры Ли и группы Ли // М.: Мир.- 1969.- 375с.

46. Спрингер Т. Теория инвариантов // М.: Мир. - 1981.- 191 с.

47. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии // М.: Мир. - 1970. - 412 с.

48. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений // М. Изд-во физ.-мат.лит. МГУ. - 1958. - 468 с.

49. Татаринов Я.В. Лекции по классической динамике // М.: МГУ.- 1984. - 295 с.

50. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Методика построения гамильтоновых потоков на симплектических пространствах и интегрируемости некоторых гидродинамических систем // Докл.АН СССР.- 1980. - Т.254. № 6. - с.1349-1353.

51. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Динамические системы на орбитах линейных представлений групп и полная интегрируемость некоторых гидродинамических систем // Функц.анализ. - 1983. - т.17, № 1. - с.31-39.

52. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Геометрия скобок Пуассона и методы интегрирования по Лиувиллю систем на симметрических пространствах // Совр.проблемы матем. Новейшие достижения. Т.29 (Итоги науки и техн.ВИНИТИ АН СССР),1986. - с.3-108.

53. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Геометрические и алгебраические механизмы интегрируемости гамильтоновых систем на однородных пространствах и алгебрах Ли // Совр.проблемы матем. Фундаментальные направления. Т.16 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР) М.- 1987. с.227-299.

54. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли // Успехи матем.наук.- 1984. - 39. - № 2. - с.3-56.

55. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Групповые неинвариантные симплектические структуры и гамильтоновы потоки на симметрических пространствах // Вып.: Труды сем. по вект.и тенз.анализу 1983. - вып.21. М.: МГУ, с.23-83.

56. Трофимов В.В. Деформации интегрируемых систем // Анализ на многообразиях и дифференциальные уравнения. - Воронеж: Изд-во ВГУ. - 1986. - с.156-164.

57. Трофимов В.В. Уравнения Эйлера на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер.матем.- 1979.- 43. - № 3. - с.714-732.

58. Трофимов В.В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли // Изв.АН СССР. Сер.матем. 1980. - 44. - № 5.- с.1191-1199.

59. Трофимов В.В. Конечномерные представления алгебр Ли и вполне интегрируемые системы // Матем.сбор.- 1980. - III, № 4. - с.610-621.

60. Трофимов В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестник МГУ. Сер.мат. мех. 1984. - № 6. - с.31-33.

61. Трофимов В.В. Расширения алгебр Ли и гамильтоновых систем // Изв.АН СССР, серия матем., 1983.- 47.- № 6.- с.1303-1321.

62. Трофимов В.В. Вполне интегрируемые геодезические потоки левоинвариантных метрик на группах Ли, связанные с коммутативными градуированными алгебрами с двойственностью Пуанкаре // ДАН СССР. 263; 4, 1982, с.812-816.

63. Фоменко А.Т. О симплектических структурах и интегрируемых системах на симметрических пространствах // Матем.сбор. 1981. - Т.115, вып.2. - с.263-280.

64. Фоменко А.Т. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы // М.: Изд-во МГУ. - 1983. - 216 с.

65. Фоменко А.Т. Вариационные методы в топологии // М.:Наука.- 1982. - 344 с.

66. Фоменко А.Т. Топологические вариационные задачи // Изд-во МГУ. - 1984. - 216 с.

67. Фоменко А.Т. Полная интегрируемость некоторых классических гамильтоновых систем // В кн. Моногенные функции и отображения. Киев. Инст.матем.АН УССР.- 1982.- с.3-19.

68. Фоменко А.Т. Алгебраические свойства интегрируемых гамильтоновых систем // В кн.: Тезисы ленингр.междунар.топол. конференции. Ленинград. - 1982. - 46 с.

69. Фоменко А.Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // Докл.АН СССР. - 1986.- Т.287, № 5. -с.1071-1075.

70. Фоменко А.Т. Топология трехмерных многообразий и интегрируемые механические гамильтоновы системы // В кн.: Тираспольский симпозиум по общей топологии и её приложения. - Кишинев. 1985. - с.235-237.

71. Фоменко А.Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв.АН СССР, серия матем. Т.50, № 6, 1986. - с.1276-1307.

72. Хаджиев Дж. Теория инвариантов бинарных форм // Ташкент. ФАн. 1978. - 54 с.

73. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симплектические пространства // М.: Мир. - 1964. - 533 с.

74. Bolsinov A. V. On a completeness of a involutive set of function constructed by argument shift method // Тезисы Международной топологической конференции. Баку. Часть II, 1987. - 49 с.

75. Bott R. Non-degenerate critical manifolds // Ann. of Math. Ser. 2, 1954, v. 60. - № 2, p. 248-261.

76. Dickson L. E. Differential equations from the group standpoint // Ann. Math. 1924. - 25 № 4, p. 287-378.

77. Dixmier J. Algebres enveloppantes // Paris Bruxelles Montreal, 1974, 378 p.

78. Fomenko A. T. The integrability of some Hamiltonian systems // Ann. of global analysis and geometry. 1983. v. 1. № 2, p. 1-10.

79. Guillemin V., Sternberg S. Symplectic technique in physics // Cambridge Univ. Press - 1984. - 468 p.

80. Iacob A. Invariant manifolds in the motion of a rigid body about a fixed point // Rev. Math. Pures Appl., 1971, vol. 16, № 10, p. 1497-1521.

81. Mumford D. Geometric invariant theory // Erg. d. Math. BD. 34, Springer - Verlag 1965. 280 p.

82. Marschen J., Weinstein A. Reduction of symplectic manifolds with symmetry // Reports on Math. Phys. 1984, 5:1, p. 121 - 130.

83. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H. Invariants of real low dimension Lie algebras// J. Math. Phys., 1976. v. 17. №6. p. 986 - 994.

84. Reyman A. G, Semenov - Tian - Shansky M. A., Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations // I. Invent. math., 1979, 54, p. 81 - 100.

85. Reyman A. G., Semenov - Tian - Shansky M. A., Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations // II. Invent. math. 1981, 63, p. 423 - 432.

86. Semenov - Tian - Shansky M.A. Group theoretical aspects of completely integrable systems // Lect. Notes Math., 1982, 970, p. 173 - 185.

87. Wojtyński W. Grupy i algebry Liego // P.W.N. Warszawa 1986. - 404 s.

88. Vergne M. La structure de Poisson sur l'algebre symmetrique d'un algebra de Lie nilpotente // Bull. Soc. Math. France. 1972. - 100, p. 301 - 335.

deg \ bec	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	Y_2		Y_1		Y_0												
2		Y_2^2		Y_1Y_2		Y_1^2 Y_0Y_2		Y_0Y_1		Y_0^2							
3			Y_2^3		$Y_1Y_2^2$		$Y_1^2Y_2$ $Y_0Y_2^2$		Y_1^3 $Y_0Y_1Y_2$		$Y_0^2Y_2$ $Y_0Y_1^2$		$Y_0^2Y_1$		Y_0^3		
4				Y_2^4		$Y_1Y_2^3$		$Y_1^2Y_2^2$ $Y_0Y_2^3$		$Y_1^3Y_2$ $Y_0Y_1Y_2^2$		Y_1^4 $Y_0^2Y_2^2$ $Y_0Y_1^2Y_2$		$Y_0^2Y_1Y_2$ $Y_0Y_1^3$		$Y_0^3Y_2$ $Y_0^2Y_1^2$	
5					Y_2^5		$Y_1Y_2^4$		$Y_1^2Y_2^3$ $Y_0Y_2^4$		$Y_1^3Y_2^2$ $Y_0Y_1Y_2^3$		$Y_1^4Y_2$ $Y_0^2Y_2^3$ $Y_0Y_1^2Y_2^2$		$Y_0^2Y_1Y_2^2$ $Y_0Y_1^3Y_2$ Y_1^5		$Y_0^3Y_2^2$ $Y_0^2Y_1^2Y_2$ $Y_0Y_1^4$
6						Y_2^6		$Y_1Y_2^5$		$Y_1^2Y_2^4$ $Y_0Y_2^5$		$Y_1^3Y_2^3$ $Y_0Y_1Y_2^4$		$Y_1^4Y_2^2$ $Y_0^2Y_2^4$ $Y_0Y_1^2Y_2^3$		$Y_0^2Y_1Y_2^3$ $Y_0Y_1^3Y_2^2$ $Y_2Y_1^5$	
7							Y_2^7		$Y_1Y_2^6$		$Y_1^2Y_2^5$ $Y_0Y_2^6$		$Y_1^3Y_2^4$ $Y_0Y_1Y_2^5$		$Y_1^4Y_2^3$ $Y_0^2Y_2^5$ $Y_0Y_1Y_2^4$		$Y_0^2Y_1Y_2^4$ $Y_0Y_1^3Y_2^3$ $Y_2^2Y_1^5$
8								Y_2^8		$Y_1Y_2^7$		$Y_1^2Y_2^6$ $Y_0Y_2^7$		$Y_1^3Y_2^5$ $Y_0Y_1Y_2^6$		$Y_1^4Y_2^4$ $Y_0^2Y_2^6$ $Y_0Y_1^2Y_2^5$	

deg \ bec	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
4	$Y_0^3Y_1$		Y_0^4												
5		$Y_0^3Y_1Y_2$ $Y_0^2Y_1^3$		$Y_0^4Y_2$ $Y_0^3Y_1^2$		$Y_0^4Y_1$		Y_0^5							
6	$Y_0^3Y_2^3$ $Y_0^2Y_1^2Y_2^2$ $Y_0Y_1^4Y_2$ Y_1^6		$Y_0^3Y_1Y_2^2$ $Y_0^2Y_1^3Y_2$ $Y_0Y_1^5$		$Y_0^4Y_2^2$ $Y_0^3Y_1^2Y_2$ $Y_0^2Y_1^4$		$Y_0^4Y_1Y_2$ $Y_0^3Y_1^3$		$Y_0^5Y_2$ $Y_0^4Y_1^2$		$Y_0^5Y_1$		Y_0^6		
7		$Y_0^3Y_2^4$ $Y_0^2Y_1^2Y_2^3$ $Y_0Y_1^4Y_2^2$ $Y_1^6Y_2$		$Y_0^3Y_1Y_2^3$ $Y_0^2Y_1^3Y_2^2$ $Y_0Y_1^5Y_2$ Y_1^7		$Y_0^4Y_2^3$ $Y_0^3Y_1^2Y_2^2$ $Y_0^2Y_1^4Y_2$ $Y_0Y_1^6$		$Y_0^4Y_1Y_2^2$ $Y_0^3Y_1^3Y_2$ $Y_0^2Y_1^5$		$Y_0^5Y_2^2$ $Y_0^4Y_1^2Y_2$ $Y_0^3Y_1^4$		$Y_0^5Y_1Y_2$ $Y_0^4Y_1^3$		$Y_0^6Y_2$ $Y_0^5Y_1^2$	
8	$Y_0^2Y_1Y_2^5$ $Y_0Y_1^3Y_2^4$ $Y_2^3Y_1^5$		$Y_0^3Y_2^5$ $Y_0^2Y_1^2Y_2^4$ $Y_0Y_1^4Y_2^3$ $Y_1^6Y_2^2$		$Y_0^3Y_1Y_2^4$ $Y_0^2Y_1^3Y_2^3$ $Y_0Y_1^5Y_2^2$ $Y_1^7Y_2$		$Y_0^4Y_2^4$ $Y_0^3Y_1^2Y_2^3$ $Y_0^2Y_1^4Y_2^2$ $Y_0Y_1^6Y_2$ Y_1^8		$Y_0^4Y_1Y_2^3$ $Y_0^3Y_1^3Y_2^2$ $Y_0^2Y_1^5Y_2$ $Y_0Y_1^7$		$Y_0^5Y_2^3$ $Y_0^4Y_1^2Y_2^2$ $Y_0^3Y_1^4Y_2$ $Y_0^2Y_1^6$		$Y_0^5Y_1Y_2^2$ $Y_0^4Y_1^3Y_2$ $Y_0^3Y_1^5$		$Y_0^6Y_2^2$ $Y_0^5Y_1^2Y_2$ $Y_0^4Y_1^4$
9		$Y_0^2Y_1Y_2^6$ $Y_0Y_1^3Y_2^5$ $Y_1^5Y_2^4$		$Y_0^3Y_2^6$ $Y_0^2Y_1^2Y_2^5$ $Y_0Y_1^4Y_2^4$ $Y_1^6Y_2^3$		$Y_0^3Y_1Y_2^5$ $Y_0^2Y_1^3Y_2^4$ $Y_0Y_1^5Y_2^3$ $Y_1^2Y_2^2$		$Y_0^4Y_2^5$ $Y_0^3Y_1^2Y_2^4$ $Y_0^2Y_1^4Y_2^3$ $Y_0Y_1^4Y_2^2$ $Y_1^8Y_2$		$Y_0^4Y_1Y_2^4$ $Y_0^3Y_1^3Y_2^3$ $Y_0^2Y_1^5Y_2^2$ $Y_0Y_1^7Y_2$ Y_1^9		$Y_0^5Y_2^4$ $Y_0^4Y_1^2Y_2^3$ $Y_0^3Y_1^4Y_2^2$ $Y_0^2Y_1^6Y_2$ $Y_0Y_1^8$		$Y_0^5Y_1Y_2^3$ $Y_0^4Y_1^3Y_2^2$ $Y_0^3Y_1^5Y_2$ $Y_0^2Y_1^7$	

deg \ bec	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
1	Y_2	Y_1	Y_0														
2		Y_2^2	Y_1Y_2	Y_0Y_2 Y_1^2	Y_0Y_1	Y_0^2											
3			Y_2^3	$Y_1Y_2^2$	$Y_0Y_2^2$ $Y_1^2Y_2$	$Y_0Y_1Y_2$ Y_1^3	$Y_0Y_1^2$ $Y_0^2Y_2$	$Y_0^2Y_1$	Y_0^3								
4				Y_2^4	$Y_1Y_2^3$	$Y_0Y_2^3$ $Y_1^2Y_2^2$	$Y_0Y_1Y_2^2$ $Y_1^3Y_2$	$Y_0^2Y_2^2$ $Y_0Y_1^2Y_2$ Y_1^4	$Y_0^2Y_1Y_2$ $Y_0Y_1^3$	$Y_0^2Y_1^2$ $Y_0^3Y_2$	$Y_0^3Y_1$	Y_0^4					
5					Y_2^5	$Y_1Y_2^4$	$Y_0Y_2^4$ $Y_1^2Y_2^3$	$Y_0Y_1Y_2^3$ $Y_1^3Y_2^2$	$Y_0^2Y_2^3$ $Y_0Y_1^2Y_2^2$ $Y_1^4Y_2$	$Y_0^2Y_1Y_2^2$ $Y_0Y_1^3Y_2$ Y_1^5	$Y_0^2Y_1^2Y_2$ $Y_0^3Y_2^2$ $Y_0Y_1^4$	$Y_0^3Y_1Y_2$ $Y_0^2Y_1^3$	$Y_0^4Y_2$ $Y_0^3Y_1^2$	$Y_0^4Y_1$	Y_0^5		
6						Y_2^6	$Y_1Y_2^5$	$Y_0Y_2^5$ $Y_1^2Y_2^4$	$Y_0Y_1Y_2^4$ $Y_1^3Y_2^3$	$Y_0^2Y_2^4$ $Y_0Y_1^2Y_2^3$ $Y_1^4Y_2^2$	$Y_0^2Y_1Y_2^3$ $Y_0Y_1^3Y_2^2$ $Y_1^5Y_2$	$Y_0^2Y_1^2Y_2^2$ $Y_0^3Y_2^3$ $Y_0Y_1^4Y_2$ Y_1^6	$Y_0^3Y_1Y_2^2$ $Y_0^2Y_1^3Y_2$ $Y_0Y_1^5$	$Y_0^4Y_2^2$ $Y_0^3Y_1^2Y_2$ $Y_0^2Y_1^4$	$Y_0^4Y_1Y_2$ $Y_0^3Y_1^3$	$Y_0^5Y_2$ $Y_0^4Y_1^2$	$Y_0^5Y_1$
7							Y_2^7	$Y_1Y_2^6$	$Y_0Y_2^6$ $Y_1^2Y_2^5$	$Y_0Y_1Y_2^5$ $Y_1^3Y_2^4$	$Y_0^2Y_2^5$ $Y_0Y_1^2Y_2^4$ $Y_1^4Y_2^3$	$Y_0^2Y_1Y_2^4$ $Y_0Y_1^3Y_2^3$ $Y_1^5Y_2^2$	$Y_0^2Y_1^2Y_2^3$ $Y_0^3Y_2^4$ $Y_0Y_1^4Y_2^2$ $Y_1^6Y_2$	$Y_0^3Y_1Y_2^3$ $Y_0^2Y_1^3Y_2^2$ $Y_0Y_1^5Y_2$ Y_1^7	$Y_0^4Y_2^3$ $Y_0^3Y_1^2Y_2^2$ $Y_0^2Y_1^4Y_2$ $Y_0Y_1^6$	$Y_0^4Y_1Y_2^2$ $Y_0^3Y_1^3Y_2$ $Y_0^2Y_1^5$	$Y_0^5Y_2^2$ $Y_0^4Y_1^2Y_2$ $Y_0^3Y_1^4$

Инварианты представления Ad^* группы Ли $SL(2,\mathbb{R}) \otimes_{\Phi_n} \mathbb{R}^{n+1}$

Для $n=1$, $F = x_{-1} y_0^2 - x_0 y_0 y_1 - x_1 y_1^2$;

Для $n=2$, $F_1 = x_0 y_1 + 2 x_1 y_2 - 2 x_{-1} y_0$, $F_2 = 4 y_0 y_2 - y_1^2$;

Для $n=3$, $F = 4 y_0 y_2^3 + 27 y_0^2 y_3^2 + 4 y_1^3 y_3 - y_1^2 y_2^2 - 18 y_0 y_1 y_2 y_3$;

Для $n=4$, $F_1 = 72 y_0 y_2 y_4 + 9 y_1 y_2 y_3 - 27 y_0 y_3^2 - 2 y_2^3 - 27 y_1^2 y_4$, $F_2 = y_2^2 + 12 y_0 y_4 - 3 y_1 y_3$.

Замечание. Для $n = 5, 6$ инварианты приведены в виде указанных коэффициентов и степени координат $y_0, y_1, \ldots, y_n$, т.е. $A y_0^a y_1^b \ldots y_{n-1}^c y_n^d = A(ab\ldots cd)$.

$n=5$, $F_1 = 625(200002) - 250(110011) + 25(101101) + 40(101020) + 40(020101) + 9(020020) - 15(100210) - 15(012001) - 19(011110) + 6(010300) + 6(013010) - 2(002200)$,

$F_2 = 15625(400004) - 750(300212) + 1250(301103) + 2000(301022) - 12500(310013) - 750(212003) - 2950(220022) + 2000(220103) + 9(200420) - 48(201230) - 30(201311) + 64(202040) - 75(202202) + 80(202121) + 300(210302) + 300(203012) + 300(210221) - 1450(211112) - 800(211031) - \frac{68}{5}(105220) - 4(103301) - \frac{26}{5}(110510) + \frac{96}{5}(104030) + 42(111320) + 12(111401) + 12(104111) + 20(112211) - \frac{304}{5}(112130) - 30(113102) - \frac{54}{5}(120230) - 168(120311) - 168(113021) + 144(121040) + 546(121121) + 80(121202) + 300(122012) - 180(130031) - 800(130112) + \frac{81}{5}(040040) + 64(040202) + 144(040121) - 54(032021) - 48(032102) - \frac{304}{5}(031211) - \frac{342}{5}(031130) + \frac{96}{5}(030401) + \frac{107}{25}(030320) + 9(024004) + 42(023111) + \frac{109}{5}(023030) - \frac{68}{5}(022301) + 13(022220) - \frac{228}{25}(021410) + \frac{36}{25}(020600) + \frac{141}{25}(013310) - \frac{24}{5}(012500) - \frac{228}{25}(014140) + \frac{16}{5}(014201) - \frac{36}{5}(015011) + \frac{36}{25}(006020) - \frac{24}{25}(005210) + \frac{4}{25}(004400)$,

$F_3 = \frac{15625}{3}(600006) - 625(510015) + 100(501024) + 625(501105) - 375(500214) - 800(412033) - 375(412005) + 1000(420105) + 2725(420024) - 975(411114) + 150(403014) + 300(410223) + 150(410304)$

$$+80(402042)+75(402204)+\frac{128}{25}(401070)-\frac{624}{5}(401151)+80(401232)-150(401313)-\frac{48}{25}(400260)$$

$$+16(400341)-35(400422)+40(400503)+176(330114)-\frac{1540}{3}(330033)+300(322014)+176(321042)$$

$$+690(321123)-140(313023)-150(313104)-\frac{252}{125}(320070)+\frac{448}{25}(320151)-122(320232)-120(320313)$$

$$+40(305004)-\frac{128}{25}(312051)-224(312132)+210(312213)-9(302412)-\frac{63}{5}(302331)+\frac{48}{125}(302250)$$

$$+4(310512)-\frac{58}{5}(310431)+\frac{176}{125}(310350)+\frac{53}{3}(303303)+8(303222)+\frac{127}{375}(303060)-60(311403)$$

$$+78(311322)+\frac{144}{5}(311240)-\frac{384}{125}(311160)-60(304113)+32(304032)+\frac{1}{25}(300630)-\frac{9}{25}(300711)$$

$$-\frac{2}{25}(301440)+\frac{3}{5}(301602)-\frac{79}{25}(301521)-224(231213)-\frac{318}{5}(231132)-\frac{608}{25}(231051)-35(224004)$$

$$+80(232104)-122(232023)+80(240204)+176(240123)+\frac{409}{5}(240042)-12(221412)-\frac{506}{25}(221331)$$

$$-\frac{96}{125}(221250)+8(222303)-9(214203)-12(214122)-\frac{64}{5}(214041)-\frac{42}{5}(222222)+\frac{816}{25}(222141)$$

$$+\frac{127}{125}(222060)+4(215013)+32(230403)+52(230322)-\frac{84}{25}(230241)+\frac{192}{125}(230160)+78(223113)$$

$$+52(223032)-\frac{33}{125}(211530)-\frac{157}{125}(211611)-\frac{122}{125}(204240)-\frac{11}{20}(204402)-\frac{53}{25}(204321)+\frac{68}{25}(212340)$$

$$+\frac{36}{25}(212502)+\frac{21}{25}(212421)+\frac{36}{25}(205212)+\frac{52}{25}(205131)+\frac{434}{625}(205050)-\frac{3}{25}(220440)-\frac{26}{25}(220602)$$

$$+\frac{612}{125}(220521)+\frac{49}{5}(213312)+\frac{172}{25}(213231)-\frac{32}{25}(213150)+\frac{3}{5}(206103)-\frac{26}{25}(206022)-\frac{67}{10000}(200,10,00)$$

$$+\frac{9}{250}(201810)-\frac{1}{5}(202620)-\frac{39}{500}(202701)+\frac{2}{125}(210720)+\frac{18}{125}(210801)+\frac{74}{125}(203430)+\frac{93}{125}(203511)$$

$$-\frac{128}{25}(150213)-\frac{608}{25}(150132)+\frac{348}{625}(150051)+16(143004)-\frac{224}{5}(051104)+\frac{448}{25}(051023)-\frac{64}{5}(140412)$$

$$+\frac{44}{125}(140331)-\frac{3}{5}(140250)-\frac{38}{5}(133203)-\frac{506}{25}(133122)+\frac{64}{125}(133041)+\frac{816}{25}(141222)+\frac{309}{125}(141141)$$

$$+\frac{72}{125}(141060)-\frac{57}{5}(134013)+\frac{144}{5}(142113)-\frac{84}{25}(142032)-\frac{64}{125}(130530)-\frac{404}{125}(130611)+\frac{712}{625}(123240)$$

$$-\frac{53}{25}(123402)-\frac{323}{125}(123321)-\frac{157}{125}(116112)-\frac{104}{125}(116031)+\frac{34}{25}(131340)+\frac{52}{25}(131502)+\frac{544}{125}(131421)$$

$$+\frac{29}{25}(124212)+\frac{544}{125}(124131)+\frac{176}{625}(124050)-\frac{9}{25}(117003)+\frac{172}{25}(132312)-\frac{1206}{125}(132231)-\frac{208}{125}(132150)$$

$$-\frac{19}{25}(125103)+\frac{612}{125}(125022)+\frac{9}{5000}(111900)+\frac{3}{5000}(104610)+\frac{7}{2500}(112710)+\frac{11}{625}(105420)-\frac{21}{5000}(105501)$$

$$-\frac{24}{625}(120810)-\frac{87}{625}(113520)+\frac{3}{100}(113601)-\frac{49}{625}(106230)+\frac{3}{100}(106311)+\frac{246}{625}(121620)-\frac{4}{125}(121701)$$

$$+\tfrac{419}{625}(114330)-\tfrac{78}{250}(114411)+\tfrac{56}{625}(107040)-\tfrac{39}{500}(107202)-\tfrac{4}{125}(107121)-\tfrac{419}{625}(122430)+\tfrac{93}{125}(122511)$$
$$-\tfrac{392}{625}(115140)+\tfrac{93}{125}(115302)+\tfrac{93}{125}(115221)+\tfrac{18}{125}(108012)-\tfrac{1}{2500}(103800)+\tfrac{128}{25}(070104)-\tfrac{256}{125}(070023)$$
$$-\tfrac{47}{25}(062004)+\tfrac{128}{375}(060303)+\tfrac{76}{125}(060141)-\tfrac{297}{3125}(060060)-\tfrac{381}{125}(061113)+\tfrac{192}{125}(061032)+\tfrac{126}{125}(053013)$$
$$+\tfrac{46}{3125}(050340)+\tfrac{434}{625}(050502)+\tfrac{176}{625}(050421)+\tfrac{48}{125}(052203)-\tfrac{96}{125}(052122)-\tfrac{3}{5}(052041)-\tfrac{32}{25}(051314)$$
$$-\tfrac{208}{125}(051231)+\tfrac{441}{3125}(051150)+\tfrac{47}{3125}(042240)-\tfrac{184}{125}(042402)+\tfrac{316}{625}(042321)+\tfrac{28}{25}(043212)+\tfrac{34}{25}(043131)$$
$$+\tfrac{46}{3125}(043050)-\tfrac{9}{25}(044103)-\tfrac{3}{25}(044022)+\tfrac{67}{3125}(040620)+\tfrac{56}{625}(040701)-\tfrac{324}{3125}(041430)-\tfrac{394}{625}(041511)$$
$$-\tfrac{32}{125}(035112)-\tfrac{24}{125}(035031)+\tfrac{1}{25}(036003)-\tfrac{29}{6250}(030900)-\tfrac{134}{3125}(031710)+\tfrac{67}{625}(032520)-\tfrac{49}{625}(032601)$$
$$-\tfrac{53}{9375}(033330)+\tfrac{353}{625}(033411)-\tfrac{312}{3125}(034140)+\tfrac{74}{125}(034302)-\tfrac{809}{625}(034221)+\tfrac{3}{125}(027012)+\tfrac{573}{12500}(023610)$$
$$-\tfrac{1621}{12500}(024420)-\tfrac{247}{50000}(022800)+\tfrac{11}{625}(024501)+\tfrac{62}{625}(025230)-\tfrac{87}{625}(025311)+\tfrac{64}{3125}(026040)-\tfrac{1}{5}(026202)$$
$$+\tfrac{246}{625}(026121)+\tfrac{9}{250}(018102)-\tfrac{44}{625}(018021)+\tfrac{573}{12500}(016320)+\tfrac{3}{5000}(016401)-\tfrac{134}{3125}(017130)+\tfrac{7}{2500}(017211)$$
$$-\tfrac{77}{5000}(015510)+\tfrac{21}{12500}(014800)-\tfrac{27}{10000}(00,10,002)+\tfrac{26}{6250}(009030)+\tfrac{9}{5000}(009111)-\tfrac{1}{2500}(008301)-\tfrac{247}{50000}(008420)$$
$$+\tfrac{21}{12500}(007410)-\tfrac{7}{37500}(006600)$$

$m=6$

$$F_1 = 120(1000001)-20(0100010)+8(0010100)-3(0002000),$$

$$F_2 = 27780(2000002)-9260(1100011)+2024(1010101)+700(1010020)+700(0200101)+480(0200020)$$
$$-444(1002001)-420(1001110)-420(0111001)-524(0110110)+112(1000300)+284(0102010)-28(0101200)$$
$$+112(0030001)-28(0021001)+116(0020200)-80(0012100)+15(0004000),$$

$$F_3 = 230400(3000003)-115200(2100012)+38400(2010021)-46080(2010102)+34560(2002002)-23040(2001111)$$
$$+1536(2000301)+3200(1200021)+38400(1200102)+3840(1101120)-1024(1100310)+5120(1110111)-23040(1111002)$$
$$-6400(1110030)-1536(1101201)-\tfrac{17408}{5}(1020201)+2560(1020120)-1536(1021011)+1536(1003002)-960(1012020)$$
$$+1536(1011210)+\tfrac{2048}{5}(1010400)+\tfrac{20736}{5}(1012101)-\tfrac{4968}{5}(1004001)+576(1003110)-\tfrac{768}{5}(1002300)+1600(0300030)$$
$$-6400(0300111)-560(0204020)+256(0201210)+2560(0210201)-640(0210120)+3840(0211011)-960(0202101)$$

$$-1024(0130011)+256(0121020)-\frac{512}{5}(0120210)+\frac{1664}{5}(1104110)+576(0113001)-\frac{512}{5}(0111300)-\frac{614}{5}(0104010)$$

$$+\frac{192}{5}(0103200)-1536(0121101)+\frac{4024}{25}(0030300)-\frac{768}{5}(0032001)-\frac{512}{5}(0031110)+\frac{2048}{5}(0040101)-\frac{516}{25}(0022200)$$

$$+\frac{192}{5}(0023010)+\frac{72}{25}(0014100)-\frac{9}{25}(0006000),$$

$$F_4=18000(5000005)-15000(4100014)-2500(4010023)-\frac{1250}{5}(4001032)-\frac{625}{9}(4002141)-\frac{3125}{324}(4000050)$$

$$+\frac{250}{7}(3003112)-\frac{425}{63}(3003031)+\frac{16}{21}(3002302)+\frac{125}{9}(3002221)-\frac{125}{54}(3004140)-\frac{1442}{189}(3001411)-\frac{100}{81}(3001331)$$

$$+\frac{244}{189}(3000601)+\frac{16}{81}(3000520)-\frac{255}{28}(3004003)-\frac{100}{5}(3011212)-\frac{1250}{27}(3011131)-\frac{625}{162}(3011050)-\frac{500}{27}(3010404)$$

$$+\frac{2020}{81}(3010321)+\frac{1250}{5}(3101122)+\frac{625}{6}(3101041)-\frac{2500}{27}(3100231)+\frac{625}{81}(3100150)+\frac{2500}{9}(3020122)+\frac{500}{6}(3020203)$$

$$+\frac{625}{27}(3020041)-\frac{5000}{5}(3110113)-\frac{8750}{9}(3110032)+\frac{11875}{5}(3200023)+2500(3200104)+\frac{14375}{27}(2210122)+\frac{2500}{9}(2210203)$$

$$+\frac{8750}{81}(2210041)+\frac{1250}{5}(2211013)-\frac{8750}{9}(2300113)-\frac{65625}{162}(2300032)-\frac{625}{6}(2202022)-\frac{625}{9}(2201212)-\frac{11875}{162}(2201131)$$

$$-\frac{4375}{486}(2201050)-\frac{625}{81}(2200402)+\frac{8750}{243}(2200321)+\frac{625}{486}(2200240)-\frac{4250}{27}(2120212)-\frac{2500}{27}(2120131)-\frac{625}{486}(2120050)$$

$$-\frac{625}{9}(2121022)-\frac{500}{3}(2121103)-\frac{625}{81}(2040022)-\frac{500}{27}(2040103)-\frac{170}{7}(2113003)+\frac{2480}{21}(2112112)+\frac{6925}{189}(2112031)$$

$$+\frac{3307}{189}(2111302)+\frac{8110}{189}(2111221)+\frac{5375}{486}(2111140)-\frac{26848}{1701}(2110411)-\frac{800}{243}(2110330)+\frac{16}{21}(2032003)+\frac{3303}{189}(2031112)$$

$$+\frac{1535}{567}(2031031)+\frac{14324}{2835}(2030302)+\frac{2662}{189}(2030221)+\frac{425}{243}(2030140)-\frac{425}{56}(2104012)-\frac{194}{21}(2103202)-\frac{160}{9}(2103121)$$

$$+\frac{25}{756}(2103040)+\frac{1766}{189}(2102311)-\frac{4505}{1134}(2102230)+\frac{70136}{42525}(2020501)+\frac{152}{315}(2020420)-\frac{254}{567}(2101501)+\frac{1391}{567}\cdot$$

$$(2101420)-\frac{590}{1701}(2100610)-\frac{194}{21}(2023012)-\frac{752}{105}(2022202)-\frac{1109}{45}(2022121)-\frac{2705}{1134}(2022040)-\frac{10954}{2835}\cdot$$

$$(2021311)-\frac{1304}{1701}(2021230)+\frac{87707}{18144}(2014021)+\frac{11951}{7560}(2014102)+\frac{11083}{2835}(2013211)+\frac{1093}{378}(2013130)-$$

$$-\frac{1174}{945}(2012401)-\frac{593}{405}(2012320)+\frac{1218}{14175}(2011510)+\frac{412}{212625}(2010700)-\frac{169}{1064}(2006002)-\frac{3481}{4320}(2005111)-$$

$$-\frac{895}{1512}(2005030)+\frac{2489}{10080}(2004301)+\frac{602}{1890}(2004220)-\frac{47}{1260}(2003410)-\frac{103}{141750}(2002600)+\frac{625}{9}(1410004)$$

$$+\frac{625}{9}(1410004)+\frac{625}{6}(1401013)+\frac{8750}{81}(1400122)+\frac{625}{27}(1400203)+\frac{19375}{1944}(1400041)-\frac{2500}{27}(1320013)-$$

$$-\frac{28750}{729}(1310131)-\frac{14375}{4374}(1310050)+\frac{8750}{243}(1230022)+\frac{2000}{81}(1230103)-\frac{425}{63}(1303003)+\frac{4925}{189}(1302112)+$$

$$+\frac{30875}{2268}(1302031)+\frac{4535}{567}(1301302)+\frac{11025}{3402}(1301221)+\frac{8425}{1458}(1301140)-\frac{1565}{567}(1300411)-\frac{3625}{2187}(1300330)$$

$$+\frac{115}{7}(1222003)+\frac{8110}{189}(1221112)+\frac{11025}{3402}(1221031)+\frac{2662}{189}(1220302)+\frac{15355}{378}(1220221)+\frac{3250}{729}\cdot$$

$$+\frac{1542}{189}(1141003)-\frac{26848}{1701}(1140112)-\frac{1565}{567}(1140031)+\frac{244}{189}(1160003)-\frac{160}{9}(1213012)-\frac{1109}{63}\cdot$$

$$(1212402)-\frac{2521}{567}(1211311)-\frac{12665}{3402}(1211230)+\frac{11954}{8505}(0210501)+\frac{19034}{10206}(0210420)+$$

$$+\frac{1766}{189}(1132012)-\frac{10952}{2835}(0131202)-\frac{2121}{567}(1131121)-\frac{24092}{2835}(1130311)-\frac{12871}{5103}(1130230)-$$

$$-\frac{254}{567}(1051012)+\frac{70135}{42525}(1050202)-\frac{641}{10206}(1050040)-\frac{11225}{4536}(1212040)+\frac{856175}{31104}(1204021)$$

$$+\frac{8801}{18144}(1204102)-\frac{7969}{6804}(1232110)+\frac{55}{24}(1203130)-\frac{272}{567}(1224001)-\frac{451}{1701}(1202320)+$$

$$+\frac{733}{8505}(1201510)+\frac{424}{42525}(1200700)-\frac{7969}{6804}(1123021)+\frac{11083}{2835}(1123102)+\frac{3403}{2835}(1122211)$$

$$+\frac{427}{579}(1122130)-\frac{1114}{945}(112140.1)+\frac{10343}{8505}(1121320)-\frac{89416}{127575}(1120510)-\frac{272}{567}(1042021)$$

$$-\frac{1424}{945}(1042102)-\frac{1127}{324}(1041211)-\frac{1723}{3402}(1041130)+\frac{103}{127575}(1040401)+\frac{6726}{15309}(1040320)$$

$$+\frac{100241}{303200}(1008001)-\frac{2861}{1533200}(1006300)-\frac{168040}{356000}(1016101)+\frac{109339}{120960}(1016020)-$$

$$-\frac{2861}{68040}(1014400)-\frac{1163}{106250}(1111600)+\frac{2489}{10080}(1034002)+\frac{3519}{6804}(1033111)+\frac{12437}{40824}\cdot$$

$$(1033030)-\frac{254}{243}(1032301)-\frac{1847}{34020}(1032220)+\frac{986}{6075}(1031410)+\frac{1091}{106250}(1030600)$$

$$-\frac{3125}{324}(0600004)+\frac{2625}{104976}(0500050)+\frac{625}{81}(0510013)-\frac{4375}{486}(0501022)-\frac{625}{162}(0501103)$$

$$-\frac{625}{486}(0500212)-\frac{14375}{4374}(0500131)-\frac{25}{756}(0403012)-\frac{2105}{1134}(0402202)-\frac{13225}{4536}(0402121)$$

$$+\frac{2305}{1701}(0401311)-\frac{15125}{61236}(0401230)-\frac{12225}{4536}(0400501)+\frac{25}{189}(0400420)+\frac{125}{54}\cdot$$

$$\cdot(0411112)+\frac{8125}{1458}(0411031)+\frac{125}{243}(0410302)+\frac{3250}{729}(0410221)+\frac{11875}{52488}(0410140)+\frac{625}{486}\cdot$$

$$(0412003)-\frac{100}{81}(0331003)-\frac{100}{243}(0330112)-\frac{3625}{2187}(0330031)-\frac{4505}{1134}(0322012)$$

$$+\frac{1523}{15278}(0311401)-\frac{10201}{9841}(0311320)-\frac{895}{1512}(0305002)-\frac{162}{42525}(0301600)+\frac{16}{81}(0250003)+\frac{1391}{576}\cdot$$

$$\cdot(0211012)+\frac{152}{315}(0240202)+\frac{19034}{10206}(0240121)+\frac{25}{189}(0240040)-\frac{457}{1701}(0232021)-\frac{593}{405}\cdot$$

$$\cdot(0232102)-\frac{9941}{10206}(0231130)+\frac{6076}{15309}(0230401)+\frac{70649}{102060}(0221410)-\frac{548}{1701}(0160012)$$

$$+\frac{733}{8505}(0151021)+\frac{2213}{14175}(0151102)-\frac{2731}{45360}(0150130)-\frac{3115}{3759}(0170020)-\frac{929}{30375}(0140410)$$

$$+\frac{424}{42525}(0070021)+\frac{412}{212625}(007021)-\frac{412}{212625}(0070021)+\frac{412}{212625}(0070102)-\frac{123}{141750}\cdot$$

$$\cdot(0022600)-\frac{1163}{106250}(0061111)-\frac{53}{42525}(0061030)+\frac{1091}{106250}(0060301)-\frac{1954}{273375}(0060220)$$

$$+\frac{347}{486000}(0053011)+\frac{4}{25625}(0052201)-\frac{15159}{20412}(0050500)-\frac{2861}{55400}(0044101)-\frac{899}{5184}\cdot$$

$$\cdot(0044020)-\frac{14767}{102060}(0030430)+\frac{229}{30375}(0027010)-\frac{2831}{76545}(0026200)-\frac{1559}{20412}(0018100)$$

$$+\frac{12437}{40824}(000,10,000).$$