

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
механико-математический факультет

на правах рукописи
УДК 514.174+515.164.22

Шнурников Игорь Николаевич

Распределение количества компонент
связности дополнения к наборам
замкнутых геодезических

01.01.04 — геометрия и топология
диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
академик А.Т. Фоменко

Москва — 2012

Содержание

1	Введение	2
2	Конфигурации псевдопрямых на проективной плоскости	8
2.1	Линейные неравенства на числа точек пересечения фиксированной кратности	9
2.2	Оценки числа областей для наборов псевдопрямых с ограниченными вырождениями	18
2.3	Множества чисел связных компонент дополнений к наборам n псевдопрямых	28
3	Наборы погруженных окружностей на двумерных поверхностях	31
3.1	О числе связных компонент в неклоточных разбиениях сфер с ручками	31
3.2	Множество чисел областей в разбиениях поверхностей семействами кривых	33
3.3	Множества чисел областей в разбиениях торов и бутылок Клейна . .	34
3.4	Разбиения тетраэдров наборами замкнутых геодезических	39
3.5	Замкнутые геодезические на замкнутых гиперболических поверхностях	45
4	Наборы подмногообразий коразмерности один	53
4.1	Гомологическая оценка числа компонент связности	53
4.2	Применение функции Мебиуса для конфигураций гиперплоскостей .	55
4.3	Множества чисел областей в разбиениях проективных пространств .	59
4.4	Разбиения плоских d -мерных торов и пространств Лобачевского . . .	71
5	Заключение.	74

1 Введение

Работа относится к теории конфигураций подмногообразий — активно развивающемуся направлению, связанному с комбинаторикой, алгебраической топологией, теорией узлов, алгебраической геометрией. Под теорией конфигураций подмногообразий мы имеем в виду в первую очередь результаты, касающиеся комбинаторики и топологии конечных наборов плоскостей и их дополнений в аффинных и проективных пространствах, а также обобщения на наборы подмногообразий в других многообразиях. Базовые факты теории см. в книге П. Орлика, Х. Терао [32] 1992 г., а геометрические аспекты — в обзоре В. А. Васильева [3] 2001 г. Ряд обобщений для произвольных многообразий сделал П. Дешпанд [16] в 2011 г.

Обзор основных известных результатов.

Комбинаторика числа областей. Разбиения вещественных аффинных и проективных пространств наборами поверхностей коразмерности один изучал Я. Штейнер [36] в 1826 году. Он рассматривал разбиения трехмерного пространства конечными наборами плоскостей и сфер, причем наборы состояли из семейств параллельных плоскостей и концентрических сфер, и семейства находились в общем положении относительно друг друга. Я. Штейнер нашел число областей пространства для таких разбиений с указанными числами поверхностей в семействах. Р. Бак [11] в 1943 г. нашел максимальные возможные числа k -мерных клеток в разбиениях проективного пространства $\mathbb{R}P^d$ наборами n гиперплоскостей. Р. Шеннон [35] в 1976 г. доказал нижние оценки на числа k -мерных плоскостей пересечения и k -мерных клеток в разбиениях пространства $\mathbb{R}P^d$ наборами n гиперплоскостей (требовалось, чтобы пересечение всех n гиперплоскостей было пустым множеством).

Формула Заславского. Т. Заславский [37] в 1975 г. определил характеристический многочлен набора гиперплоскостей аффинного или проективного пространства с помощью функции Мебиуса частично упорядоченного множества пересечений; нашел линейные комбинации значений характеристического многочлена в некоторых точках, задающие число всех областей и число ограниченных областей в разбиениях пространства гиперплоскостями (для ограниченных областей требуется, чтобы пересечение всех гиперплоскостей было точкой или пустым множеством). Р. Эренберг, М. Рэдди, М. Слоун [17] в 2009 г. определили характеристический многочлен и предъявили аналогичные формулы для клеточных разбиений многомерного плоского тора набором плоских подторов коразмерности один. П. Дешпанд [16] в 2011 г. обобщил формулы Заславского для конфигураций подмногообразий (в определении конфигураций подмногообразий требовалось, чтобы пересечение подмногообразий было локально гомеоморфно пересечению плоскостей).

Когомологи дополнения в комплексных пространствах. П. Орлик и Л. Соломон [31] в 1980 г. выразили кольцо целочисленных когомологий дополнения к набору комплексных гиперплоскостей через ч. у. м. пересечений гиперплоскостей (построенная алгебра была названа в их честь). Они заметили, что характеристический многочлен для набора вещественных гиперплоскостей совпадает с многочленом Пуанкаре для комплексифицированного набора. Отсюда следует, что число областей разбиения вещественного пространства \mathbb{R}^m набором гиперплоскостей равно сумме чисел

Бетти дополнения в \mathbb{C}^m к объединению комплексифицированных гиперплоскостей. Обзор С. А. Юзвинского [9] 2001 г. посвящен свойствам алгебр Орлика-Соломона и некоторым их приложениям.

Гомотопические свойства дополнений к наборам плоскостей. Г. Л. Рыбников [8] в 2011 г. построил две комбинаторно эквивалентные конфигурации прямых на комплексной проективной плоскости, у которых фундаментальные группы дополнений не изоморфны.

Наборы псевдопрямых на проективной плоскости. Под набором псевдопрямых¹ мы имеем в виду конечный набор гладких замкнутых несамопересекающихся кривых, любые две из которых пересекаются трансверсально в единственной точке. Через t_i обозначим число точек, принадлежащих i псевдопрямым; через n обозначим число псевдопрямых набора. Исключим из рассмотрения наборы, в которых все n псевдопрямых проходят через одну точку. Известна серия результатов (см. обзоры П. Брасс, Уил. Мозер, Я. Пах [12] 2005 г., Н. Нилакантан [30] 2005 г.), ведущих начало от гипотезы Сильвестра $t_2 \geq 1$. П. Эрдеш и Г.Б. Пурди в [18] 1978 г. получили неравенство

$$\max\{t_2, t_3\} \geq n - 1 \quad \text{при} \quad n \geq 25;$$

доказали, что если $t_2 < n - 1$, то $t_3 > cn^2$ для некоторой положительной константы c . Дж. Сцима и Е.Т. Соьер в [14, 15] 1993 г. доказали, что $t_2 \geq \frac{6}{13}n$ при $n \geq 8$. Известен пример с $t_2 = \frac{n}{2}$ для четных $n \geq 6$, и гипотеза Дирака² утверждает, что $t_2 \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Э. Мельхиор [27] 1940 г. получил линейное по t_i неравенство, обращение которого в равенство эквивалентно тому, что все области разбиения треугольные. Ф. Хирцебрух [23] 1986 г., изучая возможные значения отношения чисел Черна для двумерных комплексных многообразий, доказал для наборов комплексных прямых линейное по t_i и n неравенство (не эквивалентное неравенству Мельхиора; требующее, чтобы не более $n - 3$ прямых пересекались в одной точке).

Связь конфигураций гиперплоскостей с многогранниками. Зонотром в \mathbb{R}^d называется выпуклый многогранник, все гиперграни которого центрально симметричны. А. Д. Александров [1] в 1933 г. заметил, что зонотр является центрально-симметричным многогранником. Имеется следующая связь наборов гиперплоскостей в проективных пространствах (т.е. наборов подпространств аффинных пространств коразмерности один) с зонотрами, (см. Б. Грюнбаум [20], 1967 г.). Для каждого подпространства p_i конечного набора подпространств в \mathbb{R}^{n+1} возьмем единичный отрезок, перпендикулярный p_i , после чего возьмем сумму Минковского³ этих отрезков. Например, для наборов прямых на проективной плоскости прямые соответствуют поясам зонотра, области плоскости \mathbb{RP}^2 — парам противоположных вершин зонотра, точки пересечения прямых — парам противоположных граней зонотра; трем не коллинеарным прямым на плоскости \mathbb{RP}^2 соответствует куб.

¹Пример неспрямляемого набора псевдопрямых можно построить с помощью теоремы Дезарга о коллинеарности трех точек пересечения соответствующих сторон двух перспективных треугольников.

²Интересные результаты получили Б. Грин, Т. Тао [19] в 2012 г., используя методы аддитивной комбинаторики. В частности, заявлено о доказательстве гипотезы Дирака для достаточно больших n .

³напомним, что сумма Минковского двух тел A и B , расположенных в аффинном пространстве, состоит из всевозможных точек $a + b$, где $a \in A$ и $b \in B$.

Нижние оценки числа областей в разбиениях проективной плоскости. Б. Грюнбаум [21] в 1972 г. впервые поставил вопрос об описании множества возможных чисел f областей в разбиениях вещественной двумерной проективной плоскости наборами из n проективных прямых и доказал, что

$$f \geq 3n - 6 \quad \text{при} \quad m \leq n - 2,$$

где m — максимальное число прямых, пересекающихся в одной точке. Тем самым, число областей не может принадлежать интервалу $(2n - 2; 3n - 6)$. Также Б. Грюнбаум предположил, что при $n \geq 9$ число областей не может находиться в интервале $(3n - 5, 4n - 12)$. Эту гипотезу независимо друг от друга доказали Р. Кордовил [13] в 1980 г., Дж. Б. Пурди [33] в 1980 г. для $n \geq 40$ и Н. Мартинов [25] в 1990 г. Для доказательства гипотезы Б. Грюнбаума Дж. Б. Пурди потребовалось доказать, что если для некоторого целого числа k

$$m \leq n - k \quad \text{и} \quad n \geq 4k^2 + k + 1, \quad \text{то} \quad f \geq (k + 1)(n - k).$$

Позже Н. Мартинов [26] в 1993 г. полностью описал все числа отрезка

$$\left[2n - 2, \frac{n(n - 1)}{2} + 1\right],$$

которые могут реализоваться в качестве числа областей. В. И. Арнольд [2] в 2008 г., не зная о работе Н. Мартинова, поставил задачу об описании всех возможных чисел областей “с нуля”. Он назвал лакунами целые числа, принадлежащие интервалам (a_i, b_i) , где

$$a_i = i(n - i + 1) + C_{i-1}^2, \quad b_i = (i + 1)(n - i).$$

В. И. Арнольд доказал, что число областей не может принадлежать лакуне номер i для достаточно больших n (для $n \gtrsim i^2$), однако в его работе [2] остался невыясненным вопрос, есть ли в лакуне номер i реализуемые значения числа областей при $\frac{i^2}{2} \lesssim n \lesssim i^2$ и $i \geq 3$.

Весьма любопытно сравнить множества пар чисел (n, f) , реализуемых наборами прямых на проективной плоскости, с теми же множествами, реализуемыми наборами псевдопрямых. Априори было неизвестно, совпадают ли эти множества, поскольку существуют примеры неспрямляемых наборов псевдопрямых. Однако Н. Мартинов заметил, что множества совпадают, поскольку его рассуждения [26] для наборов прямых дословно переносятся на наборы псевдопрямых.

Замкнутые геодезические. Птицына [7] в 1994 г. изучала замкнутые локально минимальные сети на равногранных тетраэдрах (границы — равные остроугольные треугольники, авторский термин — квазиравногранные).

В. Ю. Протасов [5, 6] в 2007–2008 гг. исследовал простые замкнутые геодезические на тетраэдрах (в основном, неравногранных); доказал, что для любой простой замкнутой геодезической на произвольном тетраэдре существует комбинаторно эквивалентная ей (т.е. пересекающая ребра в том же порядке) замкнутая геодезическая на правильном тетраэдре. Отнеся в один класс замкнутые геодезические, параллельные данной, В. Ю. Протасов доказал конечность числа классов замкнутых простых геодезических на неравногранных тетраэдрах и нашел верхние оценки; получил некоторые необходимые и некоторые достаточные условия того, чтобы

на неравногранном тетраэдре существовала хотя бы одна замкнутая простая геодезическая; доказал, что единственные трехмерные многогранники, на поверхности которых есть бесконечное число классов замкнутых простых геодезических, суть равногранные тетраэдры.

Автор не претендует на достаточно полный обзор литературы, упомянуты только некоторые работы, наиболее связанные с темой и результатами диссертации.

Постановка задачи.

Пусть M^d — связное замкнутое многообразие, A — объединение n связных замкнутых подмногообразий коразмерности один. Пусть f — число компонент связности дополнения $M^d \setminus A$. Требуется найти или описать множества всех возможных чисел f для данных M^d и n . При этом естественно искать множества чисел f , накладывая некоторые условия на тип подмногообразий или на их наборы. Например, рассматривать наборы замкнутых геодезических на двумерных многообразиях с метрикой постоянной гауссовой кривизны, наборы плоскостей коразмерности один в аффинных или проективных пространствах.

Результаты диссертации.

1. Для наборов псевдопрямых на вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ найдено и доказано неравенство

$$t_2 + \frac{3}{2}t_3 \geq 8 + \sum_{i \geq 4} \left(2i - 7\frac{1}{2}\right) t_i$$

при условии $t_n = t_{n-1} = t_{n-2} = 0$, где t_i — это число точек, каждая из которых принадлежит ровно i псевдопрямым. На основе этого и других известных ранее линейных по t_i неравенств получены нижние оценки числа компонент связности дополнения в $\mathbb{R}P^2$ к объединениям псевдопрямых. Подробнее см. теоремы 2.2 и 2.3 диссертации и работу автора [41].

2. Полностью вычислены множества $F(M, n)$ чисел компонент связности дополнений в M к объединениям n замкнутых геодезических для случаев, когда M :

- двумерный тор с любой⁴ локально евклидовой метрикой,
- двумерная бутылка Клейна с любой локально евклидовой метрикой,
- тетраэдр с равными гранями (любыми остроугольными треугольниками),

более подробно см. теоремы 3.2, 3.3 и 3.5 диссертации или работы автора [39, 40].

3. Для наборов из n связных замкнутых подмногообразий A_i коразмерности один в связном гладком компактном многообразии M^d без края, попарно трансверсально пересекающихся, найдена и доказана нижняя оценка числа связных компонент дополнения

$$\left| \pi_0 \left(M^d \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \right| \geq n - \dim H_{d-1}(M^d, G) + 1,$$

⁴отметим, что плоская метрика на торе задается невырожденной двумерной решеткой на плоскости, а множества $F(M, n)$ не зависят от выбора решетки

где группа $G = \mathbb{Z}$, если M^d и A_i ориентируемы, и $G = \mathbb{Z}_2$ иначе. Эта оценка точна в ряде случаев, включающих наборы подторов плоских d -мерных торов, наборы гиперплоскостей проективных пространств, наборы замкнутых кривых на двумерных ориентируемых замкнутых многообразиях. Более подробно см. теорему 4.1 диссертации или работу автора [41].

4. Для неприводимых наборов из n плоскостей коразмерности один в d -мерном вещественном проективном пространстве $\mathbb{R}P^d$ вычислены первые 4 по возрастанию числа множества $F(\mathbb{R}P^d, n)$ при $n \geq 2d + 5$ и $d \geq 3$; вычислены первые 36 по возрастанию чисел множества $F(\mathbb{R}P^3, n)$ для неприводимых наборов из $n \geq 50$ плоскостей в $\mathbb{R}P^3$, см. теоремы 4.5 и 4.6 диссертации и работу автора [41].

5. Полностью найдены множества $F(L^d, n)$ чисел компонент связности дополнений в d -мерных пространствах Лобачевского L^d к объединениям n плоскостей коразмерности один. Для дополнений в плоских d -мерных торах T^d к объединениям плоских подторов коразмерности один найдены бесконечные подмножества множеств $F(T^d, n)$. Выдвинута гипотеза, что эти подмножества совпадают с множествами $F(T^d, n)$ на основании того, что для $d = 2$ совпадение имеет место. Более подробно см. теоремы 4.10 и 4.9 диссертации и работы автора [40, 41].

Апробация результатов работы.

Результаты диссертации докладывались:

- на Международной конференции “Метрическая геометрия поверхностей и многогранников”, посвященной 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова, Москва, 2010 г.;
- на Международной конференции “Юбилейный Симпозиум А. З. Петрова по Общей Теории Относительности и Гравитации”, Казань, 2010 г.;
- на международной конференции “Дифференциальные Уравнения и Смежные Вопросы”, посвященной 110-ой годовщине И. Г. Петровского, Москва, 2011 г.;
- на научной конференции “Ломоносовские чтения”, Москва, 2011 г.;
- на международной конференции “Александровские чтения”, Москва, 2012 г.
- на международной конференции “Дискретная Геометрия”, посвященной 100-летию со дня рождения А. Д. Александрова, Ярославль, 2012 г.
- на семинаре “Algebraische Geometrie” (руководители Prof. Dr. Hubert Flenner, Prof. Gerhard Rohrle, Prof. Dr. Uwe Storch), Бохум, Рурский ун-т, 2009 г.;
- на семинаре “Геометрия в целом” (руководитель д.ф.-м.н. И. Х. Сабитов), Москва, МГУ, 2009–2010 гг.;
- на геометрическом семинаре им. И. Ф. Шарыгина (руководители д.ф.-м.н. И. Х. Сабитов, д.ф.-м.н. В. Ю. Протасов), Москва, МЦНМО, 2009 г.;
- на семинаре “Математические вопросы кибернетики” (руководитель д.ф.-м.н. О. М. Касим-Заде), Москва, МГУ, 2010;

- на семинаре “Теория автоматов” (руководитель акад. В. Б. Кудрявцев), Москва, МГУ, 2011 г.;
- на семинаре “Современные геометрические методы” (руководители акад. А. Т. Фоменко, д.ф.-м.н. А. В. Болсинов, д.ф.-м.н. А. С. Мищенко, д.ф.-м.н. А. А. Ошемков, к.ф.-м.н. Е. А. Кудрявцева, к.ф.-м.н. И. М. Никонов), Москва, МГУ, 2008 – 2011 гг.
- на семинаре “Дифференциальная геометрия и приложения” (руководитель акад. А. Т. Фоменко), Москва, МГУ, 2011 – 2012 г.
- на семинаре “Дискретная геометрия и геометрия чисел” (руководители д.ф.-м.н. Н. Г. Мощевитин, д.ф.-м.н. Н. П. Долбилин и д.ф.-м.н. М. Д. Ковалев), Москва, МГУ, 2011 гг.;
- на семинаре “Алгебраическая топология и ее приложения”, (рук. чл.-корр. РАН В. М. Бухштабер, д.ф.-м.н. А. В. Чернавский, д.ф.-м.н. И. А. Дынников, д.ф.-м.н. Т. Е. Панов, к.ф.-м.н. Л. А. Алания, д.ф.-м.н. А. А. Гайфуллин, к.ф.-м.н. Д. В. Миллионщиков) в рамках конференции «Ломоносовские чтения», Москва, МГУ, 2011 и 2012 гг.
- на семинаре “Узлы и теория представлений” (руководители д.ф.-м.н. В. О. Мантуров, к.ф.-м.н. Д. П. Ильютко и к.ф.-м.н. И. М. Никонов), Москва, МГУ, 2010 и 2011 г.;
- на семинаре по комбинаторной геометрии и топологии (руководитель д.ф.-м.н. В. О. Мантуров), Москва, РУДН, 2012 г.

2 Конфигурации псевдопрямых на проективной плоскости

Определение 2.1. Назовем псевдопрямой⁵ гладкую замкнутую несамопересекающуюся кривую на вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, не гомотопную отображению окружности в точку. Набором⁶ псевдопрямых назовем конечный набор \mathcal{A} из $n \geq 3$ псевдопрямых, любые две из которых пересекаются в единственной точке и пересекаются трансверсально.

Набору псевдопрямых \mathcal{A} соответствует разбиение плоскости $\mathbb{R}P^2$ в виде клеточного комплекса, (который будем обозначать так же, как и набор \mathcal{A}) с $v(\mathcal{A})$ вершинами, $e(\mathcal{A})$ ребрами и $f(\mathcal{A})$ двумерными клетками. Вершины комплекса — точки пересечения псевдопрямых, ребра — дуги псевдопрямых без внутренних точек пересечения, двумерные клетки (области) — компоненты связности дополнения в проективной плоскости к объединению псевдопрямых. Из формулы для эйлеровой характеристики (при $n \geq 2$) следует

$$v(\mathcal{A}) - e(\mathcal{A}) + f(\mathcal{A}) = 1$$

Набор псевдопрямых называется *тривиальным*, если у всех псевдопрямых существует общая точка. В дальнейшем наборы псевдопрямых предполагаются нетривиальными (если не сказано обратное). Псевдопрямые на плоскости $\mathbb{R}P^2$ находятся в *общем положении*, если никакие три из них не имеют общей точки. Нетривиальный набор псевдопрямых называется *симплициальным*, если каждая область примыкает по дугам ровно к трем псевдопрямым. Число областей $f = f(\mathcal{A})$ оценивается по индукции по n :

$$2n - 2 \leq f \leq 1 + \frac{n(n-1)}{2},$$

причем правое неравенство обращается в равенство для наборов псевдопрямых общего положения, а левое — для наборов, в которых $n - 1$ псевдопрямых проходят через одну точку. Если $n \geq 2$, то каждая 2-клетка примыкает к любой псевдопрямой набора по не более чем одной дуге и только с одной стороны, что можно доказать, используя нечетность числа точек пересечения двух замкнутых гомотопически нетривиальных простых контуров на проективной плоскости. *Изоморфными* считаются наборы, клеточные комплексы которых изоморфны, т.е. для которых существует взаимно-однозначное соответствие между вершинами, ребрами и 2-клетками, сохраняющее все инциденции.

Теорема 2.1. Б. Грюнбаум, [20, pp. 401-402] Для нетривиальных наборов прямых

$$v + 1 \leq f \leq 2v - 2$$

причем неравенство слева обращается в равенство тогда и только тогда, когда прямые в общем положении, а неравенство справа обращается в равенство тогда и только тогда, когда набор прямых симплициальный.

⁵перевод *pseudoline*

⁶термин *arrangement of pseudolines* здесь переводится как *набор псевдопрямых*. Есть схожий объект: *configurations* — *конфигурации*, наборы точек и прямых с дополнительными требованиями на число инциденций.

Через $t_i(\mathcal{A})$ обозначается число точек пересечения, принадлежащих i псевдопрямым из набора \mathcal{A} , для $2 \leq i \leq n$. Через $p_j(\mathcal{A})$ обозначается число областей, замыкающих по ребрам к j псевдопрямым из набора \mathcal{A} , для $2 \leq j \leq n$. Через $m(\mathcal{A})$ обозначается максимальное число псевдопрямых набора \mathcal{A} , имеющих общую точку (т.е. $m(\mathcal{A}) = \max\{i \mid t_i(\mathcal{A}) \neq 0\}$). Для двух изоморфных наборов числа t_i, p_j и m совпадают. Как правило, далее мы будем опускать зависимость чисел t_i, p_j и m от набора \mathcal{A} .

2.1 Линейные неравенства на числа точек пересечения фиксированной кратности

Определение 2.2. *Линейными по t_i неравенствами будем называть неравенства вида*

$$\sum_{i=2}^n \alpha_i t_i \geq \alpha_0, \quad (2.1)$$

где коэффициенты α_i зависят только от i и n , причем среди чисел α_i не более половины нулей⁷ для достаточно больших n .

К настоящему времени известно как минимум четыре (независимых) линейных по t_i соотношения для конфигураций на проективных плоскостях (некоторые доказаны для комплексных прямых, некоторые для псевдопрямых). Самое простое из них справедливо как для наборов комплексных прямых, так и для наборов псевдопрямых, и получается подсчетом числа пар (псевдо)прямых:

$$n(n-1) = \sum_{i=2}^m i(i-1)t_i \quad (2.2)$$

А именно, каждой точке пересечения i (псевдо)прямых поставим в соответствие $\frac{i(i-1)}{2}$ пар проходящих через нее (псевдо)прямых. Поскольку любые две (псевдо)прямые пересекаются в одной точке, то в сумме $\sum_{i \geq 2} \frac{i(i-1)}{2} t_i$ каждая пара (псевдо)прямых учитывается ровно один раз.

Неравенство Мельхиора, [27]. Для нетривиальных наборов псевдопрямых на плоскости \mathbb{RP}^2

$$t_2 \geq 3 + \sum_{i \geq 4} (i-3)t_i. \quad (2.3)$$

Неравенство Мельхиора обращается в равенство тогда и только тогда, когда набор псевдопрямых симплициальный. Доказательство следует из леммы 2.2. Е. Мельхиор первым начал перечислять симплициальные наборы псевдопрямых. Б. Грюнбаум [22] в 2009 г. привел список симплициальных наборов, полный при $n \leq 37$ (помимо списка существуют бесконечные серии симплициальных наборов). Для наборов комплексных прямых, вообще говоря, неравенство Мельхиора не выполняется

⁷ требование того, чтобы не менее половины коэффициентов были отличны от нуля, можно до некоторой степени варьировать. К числу линейных неравенств не относятся оценки чисел t_i типа теоремы Сильвестра.

(контрпример можно построить, проведя прямые через точки некоторой кубической кривой).

Неравенство Хирцебруха, [23]. Для наборов комплексных прямых на комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ при $m < n - 2$:

$$t_2 + \frac{3}{4}t_3 \geq n + \sum_{i \geq 5} (2i - 9)t_i. \quad (2.4)$$

При комплексификации набора вещественных прямых на проективной плоскости $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ числа t_i не меняются, тем самым, неравенство Хирцебруха также справедливо для наборов вещественных прямых на плоскости $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$. Существуют наборы прямых, для которых в (2.4) достигается равенство (подробности см. в [23]), например,

- набор 6 вещественных прямых, являющихся сторонами и диагоналями некоторого четырехугольника, $t_2 = 3$, $t_3 = 4$, $t_i = 0$ для $i \geq 4$, см. рис. 1.
- набор 9 прямых с $t_4 = 3$, $t_3 = 4$, $t_2 = 6$, см. рис. 2 (три точки пересечения на бесконечности).

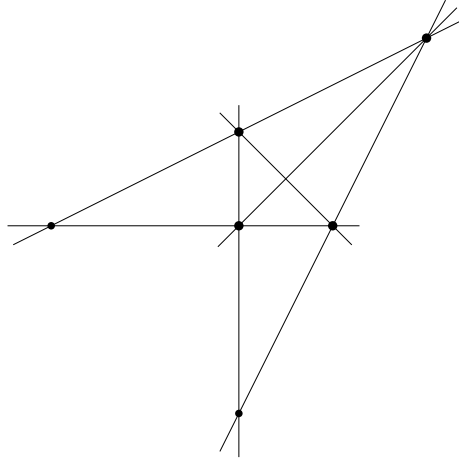


Рис. 1: $n = 6$, $t_2 = 3$, $t_3 = 4$

Доказательство неравенства Хирцебруха использует теорему Й.о. Мияока [29] о числах Черна $\frac{c_1^2}{c_2} \geq \frac{3}{2}$ для построенного по набору комплексных прямых алгебраического многообразия (полученного разрешением особенностей у разветвленного над набором прямых накрытия над $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$). В [12, с. 315] был поставлен вопрос об элементарном доказательстве неравенства Хирцебруха. Этот вопрос по-прежнему открыт. Однако коэффициенты следующего неравенства довольно близки к коэффициентам (2.4), хотя они не выводятся друг из друга непосредственно.

Теорема 2.2. Комбинаторный аналог неравенства Хирцебруха. Для нетривиальных наборов псевдопрямых на плоскости $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ при $m < n - 2$:

$$t_2 + \frac{3}{2}t_3 \geq 8 + \sum_{i \geq 4} \left(2i - 7\frac{1}{2}\right) t_i. \quad (2.5)$$

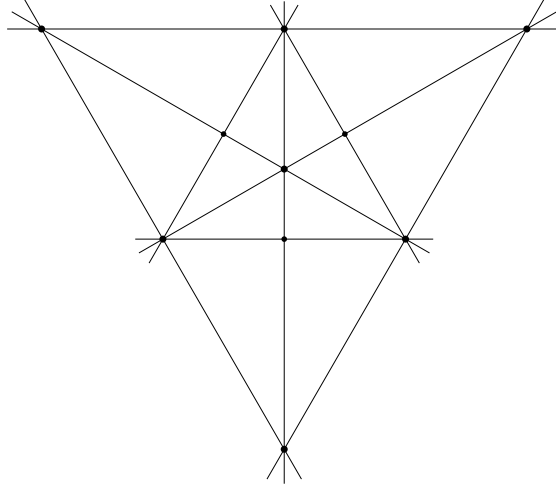


Рис. 2: $n = 9$, $t_2 = 6$, $t_3 = 4$, $t_4 = 3$

Равенство в (2.5) достигается для единственного с точностью до изоморфизма набора семи псевдопрямых. Этот набор задается двумя точками A и B , через каждую из которых проходит по 4 псевдопрямые набора (одна из псевдопрямых проходит через обе точки A и B). Тогда $t_4 = 2$, $t_2 = 9$, $t_3 = t_i = 0$ при $i \geq 5$. Для всех остальных наборов псевдопрямых имеем

$$t_2 + \frac{3}{2}t_3 \geq 9 + \sum_{i \geq 4} \left(2i - 7\frac{1}{2}\right) t_i.$$

Цель данного параграфа — доказать комбинаторный аналог (2.5) неравенства Ф. Хирцебруха, для чего нам потребуются следующие леммы.

Лемма 2.1. Для нетривиальных наборов псевдопрямых числа v , e и f клеточного комплекса выражаются через t_i :

$$v = \sum_{i \geq 2} t_i, \quad e = \sum_{i \geq 2} it_i, \quad f = 1 + \sum_{i \geq 2} (i - 1)t_i.$$

Доказательство. Число v выражается указанным способом по определению чисел t_i . Из каждой точки пересечения i псевдопрямых выходит $2i$ ребер комплекса, поэтому сумма $\sum_{i \geq 2} 2it_i$ суть количество ребер, посчитанных дважды. Из эйлеровой характеристики проективной плоскости имеем $v - e + f = 1$, откуда следует формула для числа f . \square

Лемма 2.2. Е. Мельхиор, [27]. Для нетривиальных наборов псевдопрямых

$$\sum_{i \geq 2} (3 - i)t_i = 3 + \sum_{j \geq 3} (j - 3)p_j. \quad (2.6)$$

Доказательство. Числа вершин v , ребер e и областей f комплекса равны

$$v = \sum_{i \geq 2} t_i, \quad e = \sum_{i \geq 2} it_i = \frac{1}{2} \sum_{j \geq 3} jp_j, \quad f = \sum_{j \geq 3} p_j.$$

Напомним, что для нетривиальных наборов $p_2 = 0$. По формуле Эйлера для проективной плоскости получаем

$$3 = 3f - (2e + e) + 3v = 3 \sum_{j \geq 3} p_j - \left(\sum_{j \geq 3} jp_j + \sum_{i \geq 2} it_i \right) + 3 \sum_{i \geq 2} t_i = \\ \sum_{j \geq 3} (3 - j)p_j + \sum_{i \geq 2} (3 - i)t_i.$$

□

Далее удобнее рассматривать объединение псевдопрямых (нетривиального набора) как граф, вложенный в проективную плоскость. Вершинами и ребрами этого графа соответственно являются точки пересечения псевдопрямых и дуги псевдопрямых, не содержащие отличных от своих концов точек пересечения псевдопрямых. Степень любой вершины (т.е. число исходящих ребер) четна, так как точка пересечения i псевдопрямых является вершиной степени $2i$. Следовательно, число вершин степени $2i$ рассматриваемого графа равно t_i для $i = 2, \dots, n$. Любое ребро графа для нетривиального набора псевдопрямых примыкает к двум различным областям на проективной плоскости. В графе нет петель и кратные ребра между парой вершин, если они есть, лежат на одной псевдопрямой.

Лемма 2.3. (лемма о простом ребре) *Пусть для набора n псевдопрямых верно $m < n - 1$. Пусть степени обоих концов некоторого ребра соответствующего графа равны четырем. Тогда из двух примыкающих к этому ребру областей хотя бы одна ограничена не менее чем четырьмя ребрами графа.*

Доказательство. Обозначим концы этого ребра через A и B , а псевдопрямые, проходящие через точки A и B и отличные от псевдопрямой AB , через l_1 и l_2 соответственно. Обозначим точку пересечения псевдопрямых l_1 и l_2 через C . Предположим, что обе примыкающие к ребру AB области ограничены тремя ребрами. Одно из этих ребер — это AB , а два других (для каждой области) находятся на псевдопрямых l_1 и l_2 и имеют общую точку. Точка C — это единственная общая точка псевдопрямых l_1 и l_2 , поэтому каждая из двух примыкающих к ребру AB областей ограничена ребром с концами в точках A и C , ребром с концами в точках B и C и самим ребром AB . Следовательно, на псевдопрямой l_1 есть ровно две точки пересечения с остальными псевдопрямыми набора, и это точки A и C . На проективной плоскости любые две различные псевдопрямые пересекаются в единственной точке, поэтому каждая псевдопрямая из набора, кроме l_1 , проходит или через точку A , или через точку C . Степень точки A равна четырем, т.е. через точку A проходит, не считая l_1 , только псевдопрямая AB . Тогда через точку C вместе с псевдопрямой l_1 проходит $n - 1$ псевдопрямых, что противоречит условию $t_{n-1} = 0$. Следовательно, обе примыкающие к ребру AB области не могут быть ограничены тремя ребрами графа каждая. □

Лемма 2.4. (лемма об оценке t_2 сверху). Для наборов n псевдопрямых с $m < n - 2$

$$2t_2 \leq 1 + 3p_4 + \sum_{j \geq 5} jp_j + \sum_{i \geq 3} \left(i - \frac{3}{2}\right) t_i. \quad (2.7)$$

Доказательство. Для соответствующего набору псевдопрямых графа обозначим через x число ребер, оба конца которых имеют степень 4, а через y — число ребер, оба конца которых имеют степень не менее чем 6.

Шаг 1. Всего в графе $\sum_{i \geq 2} it_i$ ребер, поэтому число ребер, один конец которых имеет степень 4, а другой не меньшую чем 6, равно

$$\sum_{i \geq 2} (it_i) - x - y.$$

Каждая вершина графа степени 4 является концом четырех ребер, хотя бы один конец каждого из которых имеет степень 4. Поэтому суммарное по всем ребрам число их концов степени 4 равно $4t_2$ и равно

$$4t_2 = 2x + \sum_{i \geq 2} it_i - x - y \quad \implies \quad x = 2t_2 + y - \sum_{i \geq 3} it_i. \quad (2.8)$$

Шаг 2. Предположим, что существуют две различные точки A и B , такие что любая псевдопрямая из набора проходит через хотя бы одну из них. Обозначим через a и b число псевдопрямых набора, проходящих через точки A и B соответственно. Возможны два случая.

(i) В наборе нет псевдопрямой, проходящей через точки A и B . Тогда $a + b = n$ и из условия $t_{n-2} = 0$ следует, что $a \geq 3$ и $b \geq 3$. В этом случае

- $t_2 = ab, \quad \sum_{i \geq 3} \left(i - \frac{3}{2}\right) t_i = a + b - 3,$
- $p_4 = ab - a - b + 3, \quad p_i = 0$ при $i \geq 5$.

Теперь неравенство (2.7) проверяется непосредственно:

$$2ab \leq 1 + 3(ab - a - b + 3) + a + b - 3 \quad \Leftrightarrow \quad (a - 2)(b - 2) + 3 \geq 0.$$

(ii) В наборе есть псевдопрямая, проходящая через точки A и B . Тогда $a + b = n + 1$ и из условия $t_{n-2} = 0$ следует, что $a \geq 4$ и $b \geq 4$. В этом случае

- $t_2 = ab - a - b + 1, \quad \sum_{i \geq 3} \left(i - \frac{3}{2}\right) t_i = a + b - 3,$
- $p_4 = ab - 2a - 2b + 4, \quad p_i = 0$ при $i \geq 5$.

Теперь неравенство (2.7) проверяется непосредственно:

$$2(ab - a - b + 1) \leq 1 + 3(ab - 2a - 2b + 4) + a + b - 3 \quad \Leftrightarrow \quad (a - 3)(b - 3) - 1 \geq 0.$$

В дальнейшем доказательстве леммы (а именно, в шагах 5 и 6) будем считать, что не существует двух различных точек, таких что любая псевдопрямая набора проходит через хотя бы одну из них.

Шаг 3. Для данного графа рассмотрим множество F областей (т.е. компонент связности дополнения к прямому), каждая из которых ограничена не менее чем четырьмя ребрами и граница которой содержит хотя бы одну вершину степени 4 (внутри областей точек графа нет). Для области $\Gamma \in F$ обозначим через $x(\Gamma)$ число ограничивающих Γ ребер, оба конца которых имеют степень 4. Для области $\Gamma \in F$ обозначим через $s(\Gamma)$ число ее вершин (т.е. вершин на границе Γ) степени не менее чем 6. Положим

$$\delta(\Gamma) = \begin{cases} 0, & \text{если } s(\Gamma) \geq 1; \\ 1, & \text{если } s(\Gamma) = 0. \end{cases}$$

Докажем, что если область Γ ограничена j ребрами, то

$$s(\Gamma) \leq (j - 1) - x(\Gamma) + \delta(\Gamma). \quad (2.9)$$

Рассмотрим три случая.

(i) $x(\Gamma) = 0$. Тогда $s(\Gamma) \leq j - 1$, так как на границе Γ есть вершина степени 4.

(ii) $x(\Gamma) = j$. Тогда $s(\Gamma) = 0$ и $\delta(\Gamma) = 1$.

(iii) $0 < x(\Gamma) < j$. Рассмотрим отдельно границу Γ , состоящую из j ребер. Среди них выберем $x(\Gamma)$ ребер, оба конца которых имеют степень 4. Пусть эти $x(\Gamma)$ ребер образуют на границе Γ ровно $z(\Gamma)$ компонент связности, каждая компонента — это несколько подряд идущих выбранных ребер. Из $x(\Gamma) > 0$ следует, что $z(\Gamma) \geq 1$, а из $x(\Gamma) < j$ следует, что каждая компонента не замкнута (т.е. гомеоморфна отрезку). В каждой компоненте число вершин степени 4 на единицу больше числа ребер этой компоненты. Все вершины и ребра различных компонент связности различны, поэтому граница области Γ содержит не менее $x(\Gamma) + z(\Gamma)$ вершин степени 4. Так как $z(\Gamma) \geq 1$, то

$$s(\Gamma) \leq j - 1 - x(\Gamma).$$

Обозначим через s сумму $s = \sum_{\Gamma \in F} s(\Gamma)$. Суммируя (2.9) по всем областям $\Gamma \in F$, получим

$$s \leq \sum_{j \geq 4} (j - 1)p_j - \sum_{\Gamma \in F} x(\Gamma) + \sum_{\Gamma \in F} \delta(\Gamma). \quad (2.10)$$

Шаг 4. Покрасим в красный цвет ребра графа, оба конца которых имеют степень 4 и обе примыкающие области к которым ограничены не менее чем четырьмя ребрами каждая (т.е. обе примыкающие области из F). Обозначим число красных ребер через a . Тогда по лемме 2.3 (о простом ребре) число $x - a$ равно числу ребер, оба конца которых имеют степень 4 и ровно одна из двух примыкающих областей ограничена не менее чем четырьмя ребрами (т.е. одна примыкающая область из F). Следовательно,

$$\sum_{\Gamma \in F} x(\Gamma) = x + a. \quad (2.11)$$

Покрасим в синий цвет четырехугольные области, все вершины которых имеют степень 4. Докажем, что к каждой синей области примыкает не менее двух красных ребер. Для этого выведем из условия $t_{n-2} = 0$ аналогично лемме 2.3 (о простом ребре), что в каждой паре противоположных ребер любой синей области есть хотя бы одно красное ребро. Предположим противное, что оба ребра AB и CD некоторой синей области $ABCD$ не красные. Тогда к ребрам AB и CD примыкают треугольные

области ABH и CDG , причем точка пересечения прямых BC и AD совпадает и с точкой H , и с точкой G . Следовательно, через эту точку $G = H$ проходят $n - 2$ псевдопрямые набора (все псевдопрямые кроме AB и CD), что противоречит условию $t_{n-2} = 0$.

Обозначим число синих областей через p . Сумма $\sum_{\Gamma \in F} \delta(\Gamma)$ равна количеству областей, каждая из которых ограничена не менее чем четырьмя ребрами и все вершины которой имеют степень 4. Поэтому

$$\sum_{\Gamma \in F} \delta(\Gamma) \leq p + \sum_{j \geq 5} jp_j. \quad (2.12)$$

Обозначим через φ число пар (C, κ) синих областей C и красных ребер κ на границе области C . Так как к любой из p синих областей примыкает не менее двух красных ребер, то $\varphi \geq 2p$. С другой стороны, каждое красное ребро примыкает к не более чем двум синим областям и поэтому $2a \geq \varphi$. Следовательно, $a \geq p$. Итак, из (2.10), (2.11), (2.12) и неравенства $a \geq p$ следует, что

$$s \leq 3p_4 - x + \sum_{j \geq 5} jp_j. \quad (2.13)$$

Шаг 5. Рассмотрим произвольную вершину V степени не менее 6 и удалим из графа все ребра, лежащие на проходящих через точку V псевдопрямых (соответственно изменятся степени оставшихся вершин, а некоторые вершины, возможно, исчезнут). Обозначим полученный граф через $G(V)$, а исходный граф через G . После шага 2 достаточно рассматривать только те наборы псевдопрямых, для которых не существует двух точек, таких что любая псевдопрямая набора проходит через хотя бы одну из них. Для таких наборов псевдопрямых граф $G(V)$ имеет хотя бы две различные вершины и каждая область проективной плоскости, образованная графом $G(V)$, ограничена не менее чем тремя ребрами графа $G(V)$. Значит, точка V находится внутри некоторой области, образованной графом $G(V)$, граница которой есть d -угольник с вершинами A_1, \dots, A_d при $d \geq 3$ (занумерованными в порядке следования). Докажем, что для любой вершины $V \in G$ имеет место хотя бы одно из следующих утверждений.

1. Вершина V соединена ребрами графа G с не менее чем тремя вершинами из множества $\{A_1, \dots, A_d\}$.
2. Вершина V соединена ребрами графа G с ровно двумя вершинами из множества $\{A_1, \dots, A_d\}$ и является вершиной границы одной области из множества F .
3. Вершина V является вершиной границ не менее чем двух областей из множества F .

Пусть для какого-то i , $1 \leq i \leq d$ отрезок VA_i не является ребром графа G . Тогда интервал VA_i принадлежит образованной графом G области, граница которой содержит вершины V и A_i , и состоит из не менее четырех ребер графа G . Если эта область не из множества F , то ее граница есть многоугольник с вершинами

$$V, A_k, A_{k+1}, \dots, A_i, \dots, A_l$$

для некоторых чисел k и l , т.е. все вершины границы, кроме V , суть точки A_k, \dots, A_l , а отрезки VA_k и VA_l являются ребрами графа G . Предположим, что для вершины V утверждение (1) не выполняется. Тогда возможны два случая.

- (i) Вершина V соединена ребрами графа G ровно с двумя вершинами из множества $\{A_1, \dots, A_d\}$.
- (ii) Вершина V соединена ребрами графа G с не более одной вершиной из множества $\{A_1, \dots, A_d\}$.

В случае (i) обозначим эти две вершины через A_k и A_l . Тогда среди остальных $d - 2 \geq 1$ вершин множества $\{A_1, \dots, A_d\}$ найдется вершина A_q , такая что точка V содержится в треугольнике $A_q A_k A_l$ (а треугольник лежит в замыкании области A_1, \dots, A_n). Тогда отрезок VA_q не является ребром графа G и интервал VA_q содержится в области из множества F . Следовательно, в случае (i) выполняется утверждение (2).

Случай (ii). Предположим, что вершина V соединена ребром графа G с некоторой вершиной A_k из множества $\{A_1, \dots, A_d\}$. Тогда псевдопрямая VA_k разбивает множество вершин $\{A_1, \dots, A_d\} \setminus \{A_k\}$ на два непустых подмножества, находящихся по разные стороны (в замыкании области $A_1 \dots A_d$) от псевдопрямой VA_k . Тогда по обе стороны от псевдопрямой VA_k найдется область из F , граница которой содержит точку V . Следовательно, будет выполнено утверждение (3). Если вершина V не соединена ребром графа G ни с какой вершиной из множества $\{A_1, \dots, A_d\}$, то вместо псевдопрямой VA_k возьмем любую псевдопрямую набора, проходящую через точку V . Аналогично получим, что для вершины V выполнено утверждение (3).

Шаг 6. Для произвольной вершины V (исходного) графа степени не менее чем 6 обозначим через $s'(V)$ сумму числа подходящих к вершине V ребер, другой конец которых имеет степень не менее чем 6, и удвоенного числа примыкающих к V областей из множества F . Так как для любой вершины V степени не менее чем 6 выполняется хотя бы одно из утверждений (1) — (3) предыдущего шага, то $s'(V) \geq 3$. Обозначим через s' сумму

$$s' = \sum_{\deg(V) \geq 6} s'(V)$$

чисел $s'(V)$ для всех вершин V степени не менее чем 6. Так как $s'(V) \geq 3$, то

$$s' \geq 3 \sum_{i \geq 3} t_i.$$

С другой стороны, $s' = 2y + 2s$. Следовательно,

$$y + s \geq \frac{3}{2} \sum_{i \geq 3} t_i. \quad (2.14)$$

Из (2.8) и (2.13) получаем

$$3p_4 + \sum_{j \geq 5} jp_j - s \geq x = 2t_2 + y - \sum_{i \geq 3} it_i \implies 3p_4 + \sum_{j \geq 5} jp_j + \sum_{i \geq 3} it_i - 2t_2 \geq y + s.$$

Из последнего неравенства и (2.14) следует, что

$$3p_4 + \sum_{j \geq 5} jp_j + \sum_{i \geq 3} it_i - 2t_2 \geq \frac{3}{2} \sum_{i \geq 3} t_i \implies 3p_4 + \sum_{j \geq 5} jp_j + \sum_{i \geq 3} \left(i - \frac{3}{2}\right) t_i \geq 2t_2. \quad \square$$

Доказательство теоремы 2.2. По лемме Мельхиора 2.2 имеем

$$\sum_{i \geq 2} (9 - 3i)t_i = 9 + 3p_4 + \sum_{j \geq 5} (3j - 9)p_j.$$

По лемме 2.4 получаем

$$3p_4 + \sum_{j \geq 5} jp_j \geq 2t_2 - \sum_{i \geq 3} \left(i - \frac{3}{2}\right) t_i - 1.$$

Заметим, что $3j - 9 \geq j$ при $j \geq 5$. Следовательно, т.к. $p_j \geq 0$, справедливо

$$\sum_{i \geq 2} (9 - 3i)t_i \geq 9 + 2t_2 - \sum_{i \geq 3} \left(i - \frac{3}{2}\right) t_i - 1 \iff t_2 + \frac{3}{2}t_3 \geq 8 + \sum_{i \geq 4} \left(2i - 7\frac{1}{2}\right) t_i. \quad \square$$

Замечание 2.1. (А. Т. Фоменко). Перенесем все члены неравенств Мельхиора (2.3), Хирцебруха (2.4) и (2.5) в большую часть и составим из получившихся коэффициентов при t_2, \dots, t_n три вектора в \mathbb{R}^{n-1} . А именно, координата номер $i = 1, \dots, n-1$ векторов равна коэффициенту при t_{i+1} в соответствующем неравенстве:

$$\begin{aligned} \vec{N}_1 &= (1, 0, -1, \dots, 3 - n), \\ \vec{N}_2 &= \left(1, \frac{3}{4}, 0, -1, \dots, 9 - 2n\right), \\ \vec{N}_3 &= \left(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, 7\frac{1}{2} - 2n\right). \end{aligned}$$

Асимптотика при $n \rightarrow \infty$ длин векторов $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$ следующая:

$$\begin{aligned} |\vec{N}_1| &= \frac{1}{\sqrt{3}} n^{\frac{3}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \\ |\vec{N}_2| &= \frac{2}{\sqrt{3}} n^{\frac{3}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \\ |\vec{N}_3| &= \frac{2}{\sqrt{3}} n^{\frac{3}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Докажем, что углы между векторами \vec{N}_1 и \vec{N}_2 , а также между векторами \vec{N}_2 и \vec{N}_3 стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Так как

$$|\vec{N}_1 - \vec{N}_2| = \frac{1}{\sqrt{3}} n^{\frac{3}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{и} \quad |\vec{N}_2 - \vec{N}_3| = \frac{3}{2} n^{\frac{1}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

при $n \rightarrow \infty$, то по теореме косинусов для треугольника со сторонами \vec{N}_1, \vec{N}_2 и треугольника со сторонами \vec{N}_2, \vec{N}_3 получаем:

$$\cos \angle(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = 1 - O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{и} \quad \cos \angle(\vec{N}_2, \vec{N}_3) = 1 - O\left(\frac{1}{n}\right)$$

при $n \rightarrow \infty$.

2.2 Оценки числа областей для наборов псевдопрямых с ограниченными вырождениями

Максимальное число m псевдопрямых, имеющих общую точку, выступает как некий показатель вырожденности наборов псевдопрямых. Наша цель — получить нижние оценки числа областей f для фиксированных чисел n и m . При этом каждая оценка требует дополнительных соотношений между n и m .

Метод построения нижних оценок числа f через линейные по t_i неравенства. Зафиксируем число псевдопрямых n и максимальное число m псевдопрямых, имеющих общую точку. По лемме 2.1

$$f - 1 = \sum_{i=2}^m (i-1)t_i. \quad (2.15)$$

Рассмотрим линейное по t_i неравенство вида

$$\sum_{i \geq 2} \alpha_i t_i \geq \alpha_0, \quad (2.16)$$

где $\alpha_0, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ — константы при фиксированном n . Например, для неравенства Хирцебруха (2.4) эти константы равны

$$\alpha_0 = n, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = \frac{3}{4}, \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_i = 9 - 2i \quad \text{при} \quad i \geq 5.$$

Подберем такие положительные коэффициенты c_1 и c_2 (постоянные при фиксированном m), что

$$c_1 i(i-1) + c_2 \alpha_i \leq i-1 \quad \text{для всех} \quad 2 \leq i \leq m. \quad (2.17)$$

Умножим неравенство (2.17) для каждого i на t_i и просуммируем по $i = 2, \dots, m$. Поскольку числа t_i неотрицательны, то получится неравенство

$$c_1 \sum_{i=2}^m i(i-1)t_i + c_2 \sum_{i=2}^m \alpha_i t_i \leq \sum_{i=2}^m (i-1)t_i \quad \Leftrightarrow \quad c_1 n(n-1) + c_2 \sum_{i=2}^m \alpha_i t_i \leq f - 1.$$

Так как $c_2 > 0$, то из последнего неравенства, из (2.16) и того, что $t_k = 0$ при $k > m$, следует

$$f \geq c_1 n(n-1) + c_2 \alpha_0 + 1. \quad (2.18)$$

для положительных констант c_1 и c_2 , удовлетворяющих системе неравенств (2.17).

Нижние оценки числа областей f

Теорема 2.3. Пусть для нетривиального набора n различных псевдопрямых на вещественной проективной плоскости максимальное число псевдопрямых, имеющих общую точку, равно t . Пусть $T \geq t$. Тогда

$$f \geq 2 \frac{n^2 - n + 2T}{T + 3}, \quad (2.19)$$

$$f \geq \frac{(3t - 8\frac{1}{2})(n^2 - n) + (9t^2 - 21t + 1)}{m^2 + 3t - 15} \quad (2.20)$$

при $12 \leq t < n - 2$.

Для нетривиальных наборов n различных прямых на проективной плоскости \mathbb{RP}^2 при $5 \leq t < n - 2$ справедливо неравенство

$$f \geq \frac{(3t - 10)n^2 + (m^2 - 6t + 12)n}{m^2 + 3t - 18} + 1, \quad (2.21)$$

Замечание 2.2. Для наборов прямых выполняются все три неравенства теоремы. Неравенство (2.19) следует из (2.20) при $6 \leq t < n - 2$.

Доказательство. Докажем первое неравенство. Запишем неравенство Мельхиора (2.3) в виде (2.16) с коэффициентами

$$\alpha_0 = 3, \quad \alpha_i = 3 - i \quad \text{при} \quad i \geq 2.$$

Введем положительные множители

$$c_1 = \frac{2}{T + 3} \quad \text{и} \quad c_2 = \frac{T - 1}{T + 3}.$$

Рассмотрим квадратный многочлен относительно i :

$$w(i) = c_1 i(i - 1) + c_2(3 - i) - (i - 1).$$

Так как значения многочлена $w(i)$ на концах отрезка $[2, T]$ равны нулю и старший коэффициент $c_1 > 0$, то $w(i) \leq 0$ для всех $2 \leq i \leq T$. Отсюда и из (2.18) получаем

$$f \geq 2 \left(\frac{n^2 - n + 2T}{T + 3} \right).$$

Докажем второе неравенство теоремы. Так как $t < n - 2$, то $t_{n-1} = t_{n-2} = 0$ и выполняется неравенство (2.5). Запишем (2.5) в виде (2.16) с коэффициентами

$$\alpha_0 = 8, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_i = 7\frac{1}{2} - 2i$$

при $i \geq 4$. Так как $t \geq 12$, то система неравенств (2.17) принимает вид

$$1 \geq 2c_1 + c_2, \quad 2 \geq 6c_1 + \frac{3}{2}c_2, \quad i - 1 \geq c_1 i(i - 1) - c_2 \left(2i - 7\frac{1}{2} \right) \quad (2.22)$$

для $4 \leq i \leq m$. Докажем, что для констант (положительных при $m \geq 12$)

$$c_1 = \frac{3m - 8\frac{1}{2}}{m^2 + 3m - 15}, \quad c_2 = \frac{m^2 - 3m + 2}{m^2 + 3m - 15}$$

выполняются неравенства (2.22). Во-первых, $2c_1 + c_2 = 1$. Во-вторых,

$$\begin{aligned} 6c_1 + \frac{3}{2}c_2 = 3c_1 + \frac{3}{2}(2c_1 + c_2) = 3c_1 + \frac{3}{2} \leq 2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow c_1 \leq \frac{1}{6} &\Leftrightarrow (m - 12)(m - 3) \geq 0. \end{aligned}$$

В-третьих, рассмотрим квадратный трехчлен

$$R(i) = c_1 i(i - 1) - c_2 \left(2i - 7\frac{1}{2}\right) - (i - 1).$$

Разложим трехчлен $R(i)$ на множители

$$R(i) = \frac{(i - m) \left((3m - 8\frac{1}{2})i - (8\frac{1}{2}m - 19\frac{1}{2}) \right)}{m^2 + 3m - 15}.$$

Заметим, что $R(i) \leq 0$ при $4 \leq i \leq m$, т.к. для $i \geq 4$ выполняется

$$\left(3m - 8\frac{1}{2}\right)i - \left(8\frac{1}{2}m - 19\frac{1}{2}\right) \geq 3\frac{1}{2}m - 14\frac{1}{2} > 0$$

при $m \geq 12$. Следовательно, для выбранных констант c_1 и c_2 справедлива система неравенств (2.22) и неравенство (2.18) при $\alpha_0 = 8$ имеет вид

$$f \geq \frac{(3m - 8\frac{1}{2})(n^2 - n) + (9m^2 - 21m + 1)}{m^2 + 3m - 15}$$

при $12 \leq m < n - 2$.

Докажем третье неравенство. Поскольку $m < n - 2$, то выполняется неравенство (2.4). Запишем (2.4) в виде (2.16) с коэффициентами

$$\alpha_0 = n, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = \frac{3}{4}, \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_i = 9 - 2i$$

при $i \geq 5$. Так как $m \geq 5$, то система неравенств (2.17) принимает вид

$$1 \geq 2c_1 + c_2, \quad 2 \geq 6c_1 + \frac{3}{4}c_2, \quad 3 \geq 12c_1, \quad i - 1 \geq c_1 i(i - 1) - c_2(2i - 9) \quad (2.23)$$

для $5 \leq i \leq m$. Докажем, что для констант (положительных при $m \geq 5$)

$$c_1 = \frac{3m - 10}{m^2 + 3m - 18}, \quad c_2 = \frac{m^2 - 3m + 2}{m^2 + 3m - 18}$$

выполняются неравенства (2.23). Во-первых, $2c_1 + c_2 = 1$. Во-вторых,

$$c_1 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow (m - 4)(m - 5) + 2 \geq 0.$$

В-третьих,

$$6c_1 + \frac{3}{4}c_2 = \frac{3}{4}(2c_1 + c_2) + 4\frac{1}{2}c_1 \leq \frac{3}{4} + \frac{9}{8} < 2.$$

Наконец, рассмотрим квадратный трехчлен

$$Q(i) = c_1i(i-1) - c_2(2i-9) - (i-1).$$

Разложим трехчлен $Q(i)$ на множители

$$Q(i) = \frac{(i-m)((3m-10)i - (10m-24))}{(m-3)(m+6)}.$$

Заметим, что $Q(i) \leq 0$ при $5 \leq i \leq m$, так как, если $m \geq 6$, то

$$(3m-10)i - (10m-24) \geq 5m-26 > 0,$$

а если $m = 5$, то тогда $i = 5$ и $Q(5) = 0$. Итак, для выбранных c_1 и c_2 справедлива система неравенств (2.23) и поэтому из (2.18) при $\alpha_0 = n$ следует

$$f \geq \frac{(3m-10)n^2 + (m^2 - 6m + 12)n}{m^2 + 3m - 18} + 1$$

при $5 \leq m < n - 2$. □

С помощью полученных нижних оценок мы дадим новое доказательство следующей леммы Н. Мартинова, которая будет нужна для классификации всех возможных чисел областей.

Лемма 2.5. Н. Мартинов, [26, th. 1]. *Для нетривиальных наборов n псевдопрямых и целых чисел k , таких что $n \geq C_{k+1}^2 + 3$ и $m \leq k$, справедливо*

$$f \geq (k+1)(n-k).$$

Для нетривиальных наборов n псевдопрямых и целых чисел k , таких что $n \geq C_{k+1}^2 + 3$ и $m \leq k$, справедливо

$$f \geq (k+1)(n-k). \tag{2.24}$$

Для наборов прямых эту лемму можно алгебраически вывести из первого и третьего неравенств теоремы 2.3. Для наборов псевдопрямых нам понадобится дополнительное построение. Рассмотрим четыре случая.

- (1) $m < k$,
- (2) $m = k$ и $2 \leq k \leq 5$,
- (3) $m = k \geq 6$ и $t_k = 1$,
- (4) $m = k \geq 6$ и $t_k \geq 2$.

Случаи (1) — (3). В случае (1) из набора псевдопрямых удаляется любая псевдопрямая, в случае (3) — псевдопрямая, проходящая через точку пересечения k псевдопрямых. Число областей при этом только уменьшится. Применим первое неравенство теоремы 2.3 для полученных семейств из $n - 1$ псевдопрямых с максимальной

кратностью не более $k - 1$ в случаях (1) и (3) и для исходного набора из n псевдопрямых с максимальной кратностью k в случае (2).

$$\begin{aligned} \text{случай (2): } f &\geq 2 \frac{n^2 - n + 2k}{k + 3}; \\ \text{случаи (1), (3): } f &\geq 2 \frac{(n - 1)^2 - (n - 1) + 2(k - 1)}{k + 2}. \end{aligned}$$

Докажем следующие неравенства при условии $n \geq \frac{k^2+k}{2} + 3$ (и при $k \leq 5$ в случае (2)):

$$\begin{aligned} 2 \frac{n^2 - n + 2k}{k + 3} &\geq (k + 1)(n - k); \\ 2 \frac{(n - 1)^2 - (n - 1) + 2(k - 1)}{k + 2} &\geq (k + 1)(n - k), \end{aligned}$$

Эти неравенства равносильны неравенствам

$$\begin{aligned} s(n) &= n^2 - n \frac{k^2 + 4k + 5}{2} + \frac{k^3 + 4k^2 + 7k}{2} \geq 0; \\ q(n) &= n^2 - n \frac{k^2 + 3k + 8}{2} + \frac{k^3 + 3k^2 + 6k}{2} \geq 0. \end{aligned}$$

Левые части двух последних неравенств суть квадратные трехчлены $s(n)$ и $q(n)$ относительно n , для проверки неотрицательности которых при $n \geq \frac{k^2+k}{2} + 3$ достаточно установить неотрицательность значений $s\left(\frac{k^2+k}{2} + 3\right)$ и $q\left(\frac{k^2+k}{2} + 3\right)$:

$$\begin{aligned} s\left(\frac{k^2 + k}{2} + 3\right) &= \frac{(6 - k)(k^2 + 1) - 2k}{4}; \\ q\left(\frac{k^2 + k}{2} + 3\right) &= \frac{(k - 3)(k + 2)}{2} \geq 0. \end{aligned}$$

При $k \leq 5$ верно $6 - k \geq 1$, и поэтому $s\left(\frac{k^2+k}{2} + 3\right) \geq 0$. В случаях (1) и (3) верно $k \geq 3$, поэтому $q\left(\frac{k^2+k}{2} + 3\right) \geq 0$. Итак, во всех случаях (1) — (3) получили неравенство $f \geq (k + 1)(n - k)$.

Случай 4. Дано $m = k \geq 6$ и $t_k \geq 2$. Тогда найдутся хотя бы две точки, в каждой из которых пересекается k псевдопрямых. Обозначим эти точки через P и Q . Рассмотрим конечную последовательность A_0, A_1, \dots, A_i семейств псевдопрямых, в которой каждое следующее семейство A_j получается из предыдущего семейства A_{j-1} добавлением одной псевдопрямой из исходного набора A , не принадлежащей семейству A_{j-1} (при этом не важно, какая именно из оставшихся псевдопрямых набора A добавляется к семейству A_{j-1}). Возможны два случая, в зависимости от которых мы определим A_0 и A_i .

(а) В семействе A нет псевдопрямой, проходящей через точки P и Q . В качестве A_0 возьмем $2k$ -элементное множество псевдопрямых, каждая из которых проходит

через хотя бы одну из точек P и Q , а в качестве A_i — семейство A . Тогда получается $I = n - 2k$.

(б) В семействе A есть псевдопрямая, проходящая через точки P и Q . Такая псевдопрямая в семействе единственная, назовем ее псевдопрямой PQ . За конфигурацию A_0 возьмем $2k - 2$ псевдопрямых, отличных от псевдопрямой PQ , каждая из которых проходит через одну из точек P и Q . Пусть семейство A_i образуют все псевдопрямые из A , кроме псевдопрямой PQ . В этом случае $I = n - 2k + 1$.

Будем рассматривать оба случая одновременно, пока не получим неравенство на $f(A_i)$. Обозначим через

$$R(A_i) = 2e(A_i) - 3f(A_i)$$

разность между удвоенным числом ребер и утроенным числом областей конфигурации A_i . Для всех i верно $R(A_i) \geq 0$, так как каждая из областей ограничена хотя бы тремя дугами. Пусть семейство A_i получается из A_{i-1} добавлением псевдопрямой l_i . Пусть псевдопрямая l_i проходит через v_i точек пересечения псевдопрямых конфигурации A_{i-1} и еще пересекает u_i псевдопрямых из A_{i-1} в u_i точках. Тогда в конфигурации A_i на псевдопрямой l_i лежит u_i точек пересечения кратности два и v_i точек пересечения кратности хотя бы три. Следовательно, псевдопрямая l_i состоит (в конфигурации A_i) из $u_i + v_i$ дуг, каждая из которых делит некоторую область, высекаемую семейством A_{i-1} , на две части. Поэтому $f(A_i) - f(A_{i-1}) = u_i + v_i$. Кроме того, псевдопрямая l_i делит надвое u_i ребер из конфигурации A_{i-1} , поэтому $e(A_i) - e(A_{i-1}) = 2u_i + v_i$. Из двух последних формул следует неравенство

$$R(A_i) - R(A_{i-1}) = u_i - v_i.$$

Пусть псевдопрямая l_i проходит через w_i точек пересечения псевдопрямых семейства A_0 . Тогда псевдопрямая l_i пересекает псевдопрямые семейства A_0 в $n(A_0) - w_i$ точках. Пусть z_i и x_i обозначают количества не лежащих на псевдопрямых семейства A_0 точек пересечения псевдопрямой l_i с псевдопрямыми семейства A_{i-1} , которые принадлежат ровно одной и хотя бы двум псевдопрямым семейства A_{i-1} соответственно. Все оставшиеся точки пересечения псевдопрямой l_i с ровно одной псевдопрямой из A_{i-1} лежат на прямых из A_0 , поэтому оставшихся точек не более $n(A_0) - 2w_i$. Следовательно, $u_i \leq n(A_0) - 2w_i + z_i$. Заметим, что $v_i \geq w_i + x_i$. Тогда

$$R(A_i) - R(A_{i-1}) \leq u_i - w_i - x_i \leq n(A_0) - 3w_i + z_i - x_i. \quad (2.25)$$

На псевдопрямой l_i находится $z_i + x_i$ точек пересечения, не принадлежащих псевдопрямым из A_0 . Поэтому

$$f(A_i) - f(A_{i-1}) = n(A_0) - w_i + z_i + x_i. \quad (2.26)$$

Сложив формулы (2.25) и (2.26) по всем $i = 1, 2, \dots, I$ получим

$$R(A_i) - R(A_0) \leq In(A_0) - 3 \sum_{i=1}^I w_i + \sum_{i=1}^I z_i - \sum_{i=1}^I x_i. \quad (2.27)$$

$$f(A_i) - f(A_0) = In(A_0) - \sum_{i=1}^I w_i + \sum_{i=1}^I z_i + \sum_{i=1}^I x_i. \quad (2.28)$$

Выразим $\sum_{i=1}^I w_i$ из неравенства (2.27) и подставим в равенство (2.28), учитывая $R(A_i) \geq 0$:

$$f(A_i) \geq f(A_0) + \frac{2}{3}In(A_0) - \frac{R(A_0)}{3} + \frac{4}{3} \sum_{i=1}^I x_i + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^I z_i. \quad (2.29)$$

Теперь рассмотрим два случая по отдельности.

Случай (а). Псевдопрямая PQ не принадлежит семейству A . Тогда, подставляя в неравенство (2.29) параметры

$$n(A_0) = 2k, \quad I = n - 2k, \quad f(A_0) = k^2 + 2k - 1, \quad R(A_0) = (k - 1)^2 + 2, \quad x_i \geq 0, \quad z_i \geq 0,$$

получаем неравенство

$$f(A_i) \geq \frac{4kn - 6k^2 + 8k - 6}{3}.$$

Осталось заметить, что $f(A) = f(A_i)$ и что неравенство $\frac{4kn - 6k^2 + 8k - 6}{3} \geq (k + 1)(n - k)$ равносильно неравенству $(k - 3)(n - (3k - 2)) \geq 0$, которое выполняется при данных условиях на n и k . Поэтому в случае (а) получаем $f \geq (k + 1)(n - k)$.

Случай (б). Псевдопрямая PQ принадлежит семейству A . Обозначим через b_j количество точек пересечения псевдопрямых семейства A кратности j , лежащих на псевдопрямой PQ и отличных от точек P и Q . Тогда количество псевдопрямых семейства A , не проходящих через точки P и Q , равно $I = \sum_{j=2}^k (j - 1)b_j = n - 2k + 1$. Из определения чисел x_i и z_i следует

$$\sum_{i=1}^I z_i \geq b_3 + \dots + b_k \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^I x_i \geq \sum_{j=3}^k (j - 3)b_j. \quad (2.30)$$

Вычислим параметры семейства A_0 :

$$n(A_0) = 2k - 2, \quad f(A_0) = k^2 - 2, \quad R(A_0) = (k - 2)^2 + 2. \quad (2.31)$$

Подставим (2.30), (2.31) и формулу $f(A) - f(t_i) = 2 + \sum_{j=2}^k b_j$ в неравенство (2.29):

$$f(A) \geq \frac{(4k - 4)n - 6k^2 + 16k - 10}{3} + b_2 + \sum_{j=3}^k b_j \left(\frac{4j - 7}{3} \right). \quad (2.32)$$

Так как

$$\sum_{j=2}^k (j - 1)b_j = n - 2k + 1 \quad \text{и} \quad \frac{4j - 7}{3} \geq \frac{5}{6}(j - 1) \quad \text{при} \quad j \geq 3,$$

то

$$b_2 + \sum_{j=3}^k b_j \left(\frac{4j - 7}{3} \right) \geq \frac{5}{6}(n - 2k + 1).$$

Учитывая последнее неравенство, преобразуем (2.32) к виду

$$f(A) \geq \frac{(8k - 3)n - 12k^2 + 22k - 15}{6}.$$

Осталось доказать неравенство

$$\frac{(8k-3)n - 12k^2 + 22k - 15}{6} \geq (k+1)(n-k) \Leftrightarrow n(2k-9) \geq 6k^2 - 28k + 15,$$

которое имеет место при $n \geq \frac{k^2+k}{2} + 3 \geq 3k + 3$ и при $k \geq 6$. Случай (б) разобран. \square

Еще одна нижняя оценка числа областей

Под (n, m, f) конфигурацией будем иметь в виду набор из n псевдопрямых на проективной плоскости с максимальной кратностью точек пересечения m , причем дополнение к их объединению состоит из f областей.

Лемма 2.6. *Для (n, m, f) конфигураций псевдопрямых*

$$f \geq 1 + \frac{n(n-1)}{m} + \frac{m-2}{m}(t_2 + \dots + t_{m-1}).$$

Доказательство. По лемме 2.1

$$f = 1 + \sum_{i=2}^m (i-1)t_i.$$

Число пар псевдопрямых равно

$$\frac{n(n-1)}{2} = \sum_{i=2}^m \frac{i(i-1)}{2} t_i.$$

Умножим равенство числа пар на $\frac{2}{m}$ и выделим сумму из равенства леммы 2.1, получим

$$\frac{n(n-1)}{m} = \sum_{i=2}^m \frac{i(i-1)}{m} t_i = \sum_{i=2}^m (i-1)t_i - \sum_{i=2}^m \left(i-1 - \frac{i(i-1)}{m} \right) t_i.$$

Множители в последней сумме равны

$$i-1 - \frac{i(i-1)}{m} = \frac{(i-1)(m-i)}{m} \geq \frac{m-2}{m} \quad \text{при } 2 \leq i \leq m-1.$$

Поэтому

$$\frac{n(n-1)}{m} \leq \sum_{i=2}^m (i-1)t_i - \frac{m-2}{m}(t_2 + \dots + t_{m-1})$$

и

$$f \geq 1 + \frac{n(n-1)}{m} + \frac{m-2}{m}(t_2 + \dots + t_{m-1}).$$

\square

Теорема 2.4. *Для (n, f, m) конфигураций псевдопрямых при $m \geq 4$ и $n \geq m+1$*

$$f \geq 2 \left(\frac{n^2 + (m^2 - 2m - 1)n - m^3 + 3m^2}{3m - 1} \right). \quad (2.33)$$

Доказательство. Возьмем точку O пересечения m псевдопрямых l_1, \dots, l_m , обозначенных в порядке следования. Псевдопрямые l_1, \dots, l_m без учета остальных псевдопрямых набора делят проективную плоскость на m областей. Обозначим через D_i область между псевдопрямыми l_i и l_{i+1} , считая $l_{m+1} = l_1$. Каждая из оставшихся $n - m$ псевдопрямых l_{m+1}, \dots, l_n пересекает область D_i по простой дуге. Выберем максимальное по количеству множество M_i дуг области D_i , попарно не пересекающихся во внутренних точках. Обозначим через a_i число дуг множества M_i . Объединение дуг множество отрезков образует граф без циклов (то есть лес — несвязное объединение деревьев). Действительно, через точку O и через долю можно провести мысленную псевдопрямую и упорядочить отрезки подмножества по порядку (любому из двух, считая от точки O) следования их точек пересечения с мысленной псевдопрямой. Тогда оба конца первого по порядку отрезка предполагаемого цикла суть концы двух других отрезков цикла, располагающихся по одну сторону доли от первого отрезка и, следовательно, пересекающихся во внутренней точке. В графе без циклов число ребер не превосходит уменьшенного на единицу числа вершин. Вершины графа располагаются на псевдопрямых l_i и l_{i+1} , поэтому $a_i + 1$ не превосходит числа точек пересечения псевдопрямых l_i и l_{i+1} с оставшимися $(n - m)$ прямыми. За c_j для $j = 2, \dots, m$ обозначим количество точек пересечения кратности j , расположенных на прямых l_1, \dots, l_m , кроме точки O . Итак,

$$m + \sum_{i=1}^m a_i \leq 2 \sum_{j=2}^m c_j. \quad (2.34)$$

Каждая из $n - m - a_i$ дуг, не вошедших в множество M_i , пересекает хотя бы одну из его дуг во внутренней точке. Поэтому $n - m - a_i$ не превосходит суммы (по точкам пересечения псевдопрямых, расположенных строго внутри области D_i) уменьшенных на единицу кратностей, то есть

$$n - m - a_i \leq \sum_{j=2}^m t_j^i (j - 1), \quad (2.35)$$

где через t_j^i обозначено количество точек пересечения кратности j в области D_i .

Тогда

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=2}^m t_j^i (j - 1) + \sum_{j=2}^m c_j (j - 1) + m, \quad (2.36)$$

так как $c_j + \sum_{i=1}^m t_j^i$ — это количество точек пересечения на плоскости \mathbb{RP}^2 кратности j , отличных от точки O . Заметим, что

$$\sum_{j=2}^m c_j (j - 1) = m(n - m), \quad (2.37)$$

так как каждая из оставшихся псевдопрямых пересекается с каждой из m псевдопрямых l_1, \dots, l_m . Из равенств (2.36) и (2.37) следует:

$$f - m(n - m + 1) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=2}^m t_j^i (j - 1). \quad (2.38)$$

Сложим неравенства (2.35) по всем $i = 1, \dots, m$ и сложим с (2.34):

$$m(n - m + 1) \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=2}^m t_j^i (j - 1) + 2(c_2 + \dots + c_m). \quad (2.39)$$

Подставим в (2.39) равенство (2.38) и выразим f :

$$f \geq 2m(n - m + 1) - 2(c_2 + \dots + c_m). \quad (2.40)$$

Обозначим через s сумму $c_2 + \dots + c_{m-1}$. Из равенства (2.37) и неравенства

$$c_2 + 2c_3 + \dots + (m - 2)c_{m-1} \geq s$$

имеем:

$$c_m \leq \frac{m(n - m) - s}{m - 1}. \quad (2.41)$$

Подставим (2.41) в (2.40), используя сумму s :

$$f \geq 2m(n - m + 1) - 2s - \frac{2m(n - m)}{m - 1} + \frac{2s}{m - 1} = \frac{2m(n - m)(m - 2)}{m - 1} + 2m - 2s \frac{m - 2}{m - 1}. \quad (2.42)$$

По лемме 2.6 верно неравенство

$$f \geq 1 + \frac{n(n - 1)}{m} + \frac{m - 2}{m}s. \quad (2.43)$$

Умножим неравенство (2.42) на $m - 1$, неравенство (2.43) на $2m$ и сложим:

$$(3m - 1)f \geq 2m(n - m)(m - 2) + 2m^2 + 2n(n - 1).$$

Отсюда получаем требуемое неравенство. \square

Замечание 2.3. Найдем все пары чисел (n, m) с $m \geq 4$ и $n \geq m + 1$, при которых теорема 2.4 сильнее неравенства (2.19) теоремы 2.3. Сравним правые части соответствующих неравенств на числа областей f

$$\frac{n^2 + (m^2 - 2m - 1)n - m^3 + 3m^2}{3m - 1} > \frac{n^2 - n + 2m}{m + 3} \Leftrightarrow (m - 2)(n - m - 1)(2n - m^2 - m) < 0.$$

Следовательно, при $m + 1 < n < \frac{m^2 + m}{2}$ теорема 2.4 сильнее неравенства (2.19) теоремы 2.3.

Замечание 2.4. Если для (n, m, f) конфигурации псевдопрямых $f = 2 \left(\frac{n^2 - n + 2m}{m + 3} \right)$, то конфигурация принадлежит одному из следующих типов.

1.

$$n = m + 1, \quad m \geq 2, \quad f = 2n - 2, \quad t_2 = m, \quad t_3 = \dots = t_{m-1} = 0, \quad t_m = 1.$$

2.

$$n \leq 7, \quad m = 3, \quad f = \frac{n^2 - n}{3} + 2.$$

Например, из второго типа подходят

$$n = 6, m = 3, f = 12, t_2 = 3, t_3 = 4$$

и

$$n = 7, m = 3, f = 16, t_2 = 3, t_3 = 6$$

Действительно, доказательство неравенства (2.19) теоремы 2.3 использовало неравенства $2e \geq 3f$ и

$$(A(3-j) + Bj(j-1))t_j \leq (j-1)t_j,$$

которые обращаются в равенство, если и только если все области конфигурации треугольные и $t_j = 0$ при $2 < j < m$.

2.3 Множества чисел связных компонент дополнений к наборам n псевдопрямых

Теорема 2.5. Н. Мартинов, 1993. *Нетривиальный набор из n псевдопрямых на плоскости \mathbb{RP}^2 делит последнюю на f областей тогда и только тогда, когда существует целое число k , $1 \leq k \leq n-2$, такое что*

$$(n-k)(k+1) + C_k^2 - \min\{n-k, C_k^2\} \leq f \leq (n-k)(k+1) + C_k^2.$$

Заметим, что объединение отрезков

$$[(n-k)(k+1) + C_k^2 - \min\{n-k, C_k^2\}; (n-k)(k+1) + C_k^2]$$

по k , $1 \leq k \leq n-2$ покрывает все целые числа отрезка $[2n-2; C_n^2+1]$, кроме чисел интервалов $(a_i; b_i)$ — лакун⁸, где

$$a_i = i(n-i+1) + C_{i-1}^2, \quad b_i = (i+1)(n-i).$$

Лакуна номер i содержит хотя бы одно целое число тогда и только тогда, когда

$$b_i \geq a_i + 2 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq C_{i+1}^2 + 3.$$

Обозначим через d_n следующее число

$$d_n = \max\{d \in \mathbb{Z} \mid n \geq C_{d+1}^2 + 3\}.$$

Решая квадратное неравенство, получим

$$d_n = \left\lceil \sqrt{2n - 5\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} \right\rceil.$$

⁸Поскольку В.И. Арнольд не исключал тривиальные наборы, то в [2] лакуны нумеровались числами i , начиная с единицы. Без тривиального набора псевдопрямых лакуна (a_1, b_1) пропадает, и в наших обозначениях $i \geq 2$.

Следствие 2.1. Число лакун равно $d_n - 1$ и они нумеруются числами i , $2 \leq i \leq d_n$. Число областей для набора псевдопрямых не может принадлежать какой-либо лакуне. Последняя лакуна заканчивается перед числом $(n - d_n)(d_n + 1) \approx \sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}$. Доля целых чисел отрезка $[2n - 2; C_n^2 + 1]$, реализуемых в качестве числа областей, стремится к единице при $n \rightarrow \infty$. Все лакуны содержатся в отрезке

$$[2n - 2; (n - d_n)(d_n + 1)]$$

и доля целых чисел этого отрезка, реализуемых в качестве числа областей, стремится к $\frac{1}{3}$ при $n \rightarrow \infty$.

Действительно, количество содержащихся в лакунах целых чисел равно

$$\sum_{i=2}^{d_n} (b_i - a_i - 1) = \sum_{i=2}^{d_n} (n - C_{i+1}^2 - 2) \approx \frac{2\sqrt{2}}{3} n^{\frac{3}{2}}.$$

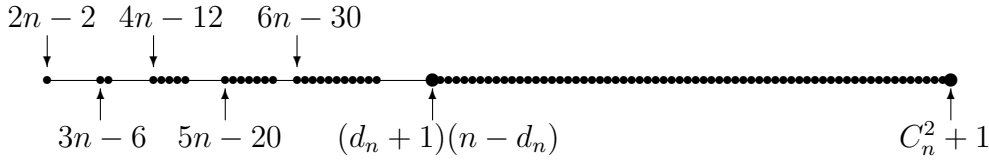


Рис. 3: Множество чисел областей для больших n

Лемма 2.7. Арнольд, [2]. Для нетривиальных наборов n псевдопрямых

$$m(n - m + 1) \leq f \leq m(n - m + 1) + C_{n-m}^2,$$

причем равенство справа достигается, если помимо m пересекающихся в одной точке псевдопрямых остальные $n - m$ псевдопрямых находятся в общем положении друг к другу и к коллинеарным псевдопрямым.

Доказательство. Докажем лемму индукцией по n , база $n = m + 1$. Пусть двойное неравенство выполняется для наборов n псевдопрямых. Тогда при добавлении еще одной псевдопрямой номер $n + 1$ число областей увеличится на число точек пересечения добавленной псевдопрямой с предыдущими, которое не меньше m и не больше n . Заметим, что равенство слева, вообще говоря, может не достигаться при $m < \frac{n}{2}$. \square

Лемма 2.8. Пусть число областей нетривиального набора n псевдопрямых принадлежит лакуне номер i , где $i \leq d_n$. Тогда $m \leq i$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. что $m \geq i + 1$. Тогда, если $i + 1 \leq m \leq n - i$, то по лемме 2.7

$$f \geq m(n - m + 1) \geq (i + 1)(n - i) = b_i,$$

что противоречит тому, что число f принадлежит лакуне номер i . Если $m \geq n - i + 1$, то $n - m \leq i - 1$ и $C_{n-m}^2 \leq C_{i-1}^2$. Следовательно по лемме 2.7

$$f \leq m(n - m + 1) + C_{n-m}^2 \leq i(n - i + 1) + C_{i-1}^2 = a_i,$$

что противоречит тому, что число f принадлежит лакуне номер i . □

Доказательство теоремы Мартинова. Достаточность. Для данного k , $1 \leq k \leq n - 2$ и числа f , такого что

$$f = (n - k)(k + 1) + C_k^2 - t, \quad 0 \leq t \leq \min \{n - k, C_k^2\}$$

построим набор из n прямых, делящий плоскость на f областей. Пусть через одну точку проходит $n - k$ прямых, остальные прямые находятся в общем положении по отношению друг к другу. При этом t прямых из тех, которые проходят через одну точку, проходят через t точек пересечения прямых, находящихся в общем положении. Провести так прямые возможно, т.к. $0 \leq t \leq \min \{n - k, C_k^2\}$. Нетрудно подсчитать, что число областей равно $f = (n - k)(k + 1) + C_k^2 - t$.

Необходимость следует из лемм 2.8 и 2.5, в которой в качестве числа k следует взять номер i гипотетической лакуны, содержащей число областей f . □

Замечание 2.5. Если рассматривать вместо псевдопрямых наборы прямых, то множество всех возможных чисел областей не измениться, т.к. пример был построен для прямых, а необходимость в теореме Мартинова для прямых очевидно следует из необходимости для псевдопрямых.

3 Наборы погруженных окружностей на двумерных поверхностях

Пусть M — связная двумерная гладкая компактная поверхность без края, $S = S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$ — дизъюнктивное объединение n окружностей, $\varphi : S \rightarrow M$ — погружение с конечным числом прообразов точек пересечения, т.е. с конечным числом пар различных точек (x, y) , таких что $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Нас будет интересовать число f компонент связности дополнения в M к $\varphi(S)$. Множество всех возможных чисел f для данного многообразия и числа n будем (как и раньше) обозначать через $F_p(M, n)$. При этом оказывается, что без дополнительных ограничений на погружение φ множество $F_p(M, n)$ получается довольно простым. Если же зафиксировать метрику на M и вместо $\varphi(S)$ рассматривать наборы из n замкнутых геодезических, то множества $F(M, n)$ чисел компонент связности будут более интересными. Мы найдем в явном виде последние множества для равногранных тетраэдров, торов и бутылок Клейна с локально евклидовой метрикой, причем окажется, что множества не зависят от конкретного выбора плоской метрики или от соотношений между длинами ребер равногранного тетраэдра.

3.1 О числе связных компонент в неклоточных разбиениях сфер с ручками

Определение 3.1. Назовем разбиение поверхности M^2 конечным набором замкнутых гладких регулярных кривых клеточным, если все компоненты связности дополнения в M^2 к объединению кривых гомеоморфны открытым дискам.

Замечание 3.1. Клеточные разбиения поверхности рода $g \geq 2$ действительно суть представления поверхности в виде клеточного комплекса.

Для набора \mathcal{A} из n прямых на проективной плоскости характеристический многочлен имеет вид

$$\varphi_{\mathcal{A}}(t) = t^2 - nt + \sum_{i \geq 2} (i-1)t_i,$$

где t_i — это число точек, принадлежащих i прямым. Следовательно, по теореме Заславского число областей проективной плоскости равно $1 + \sum_{i \geq 2} (i-1)t_i$.

Дадим аналогичное определение многочлена $\varphi_{\mathcal{A}}(t)$ для набора окружностей, погруженных окружностей в замкнутую риманову поверхность M рода $g \geq 0$ (гомеоморфную сфере с g ручками). Обозначим через $S = S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$ дизъюнктивное объединение n окружностей, а через $\phi : S \rightarrow M$ погружение с конечным числом точек самопересечения. Обозначим через t_i число точек M , прообраз ϕ^{-1} которых состоит из i точек для $i \geq 2$.

Определение 3.2. Характеристическим многочленом для погружения ϕ назовем многочлен

$$\varphi_{\phi}(t) = t^2 - nt + \sum_{i \geq 2} (i-1)t_i.$$

В отличие от проективной плоскости, число областей римановой поверхности нельзя выразить только через характеристический многочлен, т.к. области могут быть не гомеоморфны диску.

Теорема 3.1. *На замкнутой римановой поверхности M рода $g \geq 0$ рассмотрим погружение $\phi : S \rightarrow M$ дизъюнктного объединения n окружностей с конечным числом точек самопересечения. Тогда для числа связных компонент $|\pi_0(M \setminus \phi(S))|$ дополнения в M к множеству $\phi(S)$ верно*

$$|\pi_0(M \setminus \phi(S))| = \varphi_{\phi(S)}(0) + 1 - g + |\pi_0(\phi(S))| + k - u,$$

где $\varphi_{\phi(S)}(t)$ — это характеристический многочлен, $|\pi_0(\phi(S))|$ — число компонент связности множества $\phi(S) \subset M$, k — сумма родов компонент связности $M \setminus \phi(S)$, u — сумма родов компонент связности регулярной ε -окрестности $U_\varepsilon(\phi(S))$ множества $\phi(S)$.

Следствие 3.1. (а)

$$|\pi_0(M \setminus \phi(S))| \geq \varphi_{\phi(S)}(0) + 2 - 2g,$$

причем, если все компоненты связности $M \setminus \phi(S)$ гомеоморфны диску, то достигается равенство.

(б)

$$|\pi_0(M \setminus \phi(S))| \geq n - 2g + 1,$$

причем равенство достигается для набора $2g$ образующих фундаментальной группы M .

(в)

$$|\pi_0(M \setminus \phi(S))| \leq \varphi_{\phi(S)}(0) + |\pi_0(\phi(S))| + 1,$$

причем для набора, состоящего из одной простой геодезической, делящей многообразие M рода $g \geq 2$ на две области, достигается равенство.

(г) Для двумерной стандартной сферы S^2 и объединения n замкнутых геодезических, получим $|\pi_0(\phi(S))| = 1$, $k = u = 0$ и, следовательно,

$$|\pi_0(S^2 \setminus \phi(S))| = \varphi_{\phi(S)}(0) + 2.$$

(д) Для двумерного плоского тора $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ и объединения n замкнутых геодезических, взятого за $\phi(S)$, получим $k = 0$, $g = 1$ и

$$|\pi_0(T^2 \setminus \phi(S))| = \varphi_{\phi(S)}(0) + |\pi_0(\phi(S))| - u.$$

Если среди геодезических есть хотя бы две не параллельные друг другу, то

$$|\pi_0(\phi(S))| = u = 1 \quad \text{и} \quad |\pi_0(T^2 \setminus \phi(S))| = \varphi_{\phi(S)}(0).$$

Если все замкнутые геодезические попарно параллельны, то

$$|\pi_0(\phi(S))| = n, \quad u = \varphi_{\phi(S)}(0) = 0 \quad \text{и} \quad |\pi_0(T^2 \setminus \phi(S))| = n.$$

Доказательство теоремы 3.1. Посчитаем Эйлерову характеристику $\chi(M)$ многообразия M и применим два факта:

Лемма 3.1. Для конечных симплициальных комплексов X и Y верно

$$\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y).$$

Здесь X и Y считаются подкомплексами в некотором объемлющем комплексе.

Лемма 3.2. Любое компактное двумерное подмногообразие сферы с g ручками гомеоморфно несвязному объединению сфер с ручками и дырками, причем сумма родов компонент связности не превосходит числа g .

В качестве X возьмем регулярную окрестность $\phi(S)$, в качестве Y — замыкание дополнения в M к регулярной окрестности множества $\phi(S)$. \square

3.2 Множество чисел областей в разбиениях поверхностей семействами кривых

Определение 3.3. Допустимым семейством кривых Γ будем называть множество замкнутых гладких кривых на замкнутом гладком двумерном многообразии M^2 со следующими свойствами:

- для любой $\gamma \in \Gamma$ все точки самопересечения γ двойные и их число минимально в классе замкнутых кривых, свободно гомотопных γ ,
- для любых $\gamma_1 \in \Gamma$ и $\gamma_2 \in \Gamma$ число точек пересечения γ_1 и γ_2 с учетом кратности самопересечения минимально в классе замкнутых кривых, свободно гомотопных γ_1 и γ_2 ,
- для любого конечного множества точек S поверхности M^2 и нетривиального элемента a фундаментальной группы M^2 существует кривая $\gamma \in \Gamma$, гомотопная a и не проходящая через точки из S ,
- для любой точки A на поверхности M^2 и нетривиального элемента a фундаментальной группы M^2 существует кривая $\gamma \in \Gamma$, гомотопная a и проходящая через точку A .

Через $F(M^2, \Gamma, n)$ обозначим множество всех возможных чисел компонент связности дополнения в M^2 к объединению n различных кривых из Γ

Гипотеза 3.1. Пусть M^2 гомеоморфно сфере с $g \geq 2$ ручками, а Γ — произвольное допустимое множество кривых на M^2 . Тогда

$$F(M^2, \Gamma, n) = \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n - 2g + 1\}.$$

В силу следствия 3.1 остается реализовать все натуральные числа, большие $n - 2g$, наборами кривых из Γ .

3.3 Множества чисел областей в разбиениях торов и бутылок Клейна

Разбиения наборами замкнутых геодезических. Под плоским тором T^2 или плоской бутылкой Клейна KL^2 имеем в виду параллелограмм $ABCD \subset \mathbb{R}^2$ на евклидовой плоскости с отождествленными сторонами

$$AB \sim DC, AD \sim BC \quad \text{и} \quad AB \sim DC, AD \sim CB$$

соответственно. Пусть $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ и $p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow KL^2$ соответствующие локально изометричные универсальные накрытия. Поднятие геодезической (от данной точки плоскости) является прямой, причем замкнутость геодезической равносильна соизмеримости координат направляющего вектора прямой, разложенного по базису $\{\vec{AB}, \vec{AD}\}$. Назовем замкнутые геодезические *параллельными*, если любые их накрывающие прямые параллельны. Опустим высоту BH на прямую AD и обозначим через u, v и w вектора \vec{AB}, \vec{AD} и \vec{HB} соответственно. Для взаимно простых целых чисел k, l *геодезической типа (k, l)* на торе T^2 назовем замкнутой геодезической, для которой любая ее накрывающая прямая параллельна вектору $ku + lv$. *Геодезической типа $(2k, l)$* на KL^2 назовем замкнутую геодезическую, для которой найдется накрывающая ее прямая, параллельная вектору $2kw + lv$, за исключением двух замкнутых геодезических, перпендикулярных v и имеющих длину $\|w\|$. Тип этих двух геодезических будем считать равным $(1, 0)$. Для набора замкнутых геодезических на торе и на бутылке Клейна KL^2 с евклидовыми метриками через t_i обозначим число точек, принадлежащих i геодезическим с учетом кратности самопересечения на KL^2 .

Лемма 3.3. *Две замкнутые геодезические на плоском торе типов (a, b) и (c, d) пересекаются в $|ad - bc|$ точках.*

Доказательство. Считаем, что $|ad - bc| \neq 0$, т.к. иначе точек пересечения нет. Длины данных геодезических γ_1 и γ_2 равны $\|au + bv\|$ и $\|cu + dv\|$ соответственно. Расстояния между соседними витками γ_1 и γ_2 равны

$$h_1 = \frac{S}{\|au + bv\|} \quad \text{и} \quad h_2 = \frac{S}{\|cu + dv\|}$$

соответственно, где $S = \|[u, v]\|$ — площадь тора. Тогда

$$\sin \angle(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{|ad - bc|S}{\|au + bv\| \cdot \|cu + dv\|}$$

Поэтому расстояние между соседними по γ_1 точками пересечения равно

$$\frac{h_2}{\sin \angle(\gamma_1, \gamma_2)} = \frac{\|au + bv\|}{|ad - bc|}.$$

Значит, на γ_1 находится $|ad - bc|$ точек пересечения. □

Лемма 3.4. (а) Замкнутая геодезическая типа $(2k, l)$ на плоской бутылке Клейна KL^2 имеет $|kl|$ точек самопересечения, кратности два каждая.

(б) Две замкнутые непараллельные геодезические на KL^2 имеют хотя бы одну точку пересечения. Замкнутая геодезическая типа $(2, 0)$ пересекает непараллельную ей замкнутую геодезическую γ по крайней мере в двух точках или проходит через точку самопересечения γ .

Доказательство. (а) Для $kl = 0$ лемма очевидна, считаем далее, что $kl \neq 0$. Через любую точку KL^2 геодезическая проходит не более двух раз, т.к. покрывающие ее прямые составляют с v один из углов $\{\varphi, \pi - \varphi\}$, где

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2k\|w\|}{l\|v\|}.$$

Пусть прямая

$$\tilde{\gamma}(t) = A + (p_1 + lt)v + (p_2 + 2kt)w$$

накрывает данную геодезическую γ при $t \in \mathbb{R}$ для некоторых $p_1 \in \mathbb{R}$, $p_2 \in \mathbb{R}$. Пусть $A\tilde{H} = \alpha v$. Точка самопересечения γ происходит при параметрах t_1 и t_2 накрывающей прямой тогда и только тогда, когда

$$t_1 = \frac{(2\alpha - 4p_1)k - l + 2(kj - li)}{4kl}, \quad t_2 = \frac{(2\alpha - 4p_1)k + l + 2(kj + li)}{4kl}$$

для некоторых целых чисел i и j . Следующие дробные части равны

$$\{t_1 + t_2\} = \left\{ \frac{\alpha - 2p_1}{l} + \frac{j}{l} \right\} \quad \text{и} \quad \{t_2 - t_1\} = \left\{ \frac{2i + 1}{2k} \right\},$$

поэтому точки самопересечения γ однозначно соответствуют парам целых чисел (i, j) , где

$$i \in \{0, 1, \dots, |k| - 1\} \quad \text{и} \quad j \in \{0, 1, \dots, |l| - 1\}.$$

(б) Накрывающие прямые замкнутых не параллельных геодезических имеют точку пересечения, поэтому и геодезические пересекаются. Замкнутая геодезическая γ , не параллельная геодезической типа $(2, 0)$ имеет либо тип $(0, 1)$, либо тип (k, l) с $kl \neq 0$. Первый случай очевиден, а во втором геодезическую γ накрывает два семейства параллельных прямых, и с каждым из них пересекается накрывающая прямая для геодезической типа $(2, 0)$. \square

Лемма 3.5. Если набор замкнутых геодезических на плоском торе или на плоской бутылке Клейна содержит хотя бы две непараллельные, то все образованные области гомеоморфны открытому диску.

Доказательство. Достаточно доказать лемму в случае, когда набор состоит из двух замкнутых непараллельных геодезических на T^2 или KL^2 или из одной геодезической типа $(2k, l)$ с $kl \neq 0$ на KL^2 . Рассмотрим накрытия

$$p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2 \quad \text{и} \quad p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow KL^2.$$

Предположим, что какие-то две различные точки X и Y связной компоненты прообраза некоторой области отображаются в одну точку при накрытии p_1 или p_2 . Тогда эта связная компонента содержит бесконечную ломаную с равными по длине звеньями, одним звеном которой является отрезок XY . Так как связная компонента прообраза области ограничена, то таких точек X и Y не существует. Следовательно, каждая область гомеоморфна своему прообразу — диску. \square

Лемма 3.6. *Если все области тора T^2 или бутылки Клейна KL^2 с евклидовыми метриками, образованные набором замкнутых геодезических, гомеоморфны диску, то число областей равно*

$$\sum_{i \geq 2} (i - 1)t_i.$$

Доказательство. Если все области гомеоморфны диску, то набор геодезических образует клеточное разбиение поверхности, поскольку на любой геодезической будет хотя бы одна точка пересечения. В этом разбиении $\sum t_i$ вершин — точек пересечения геодезических, $\sum it_i$ ребер — отрезков геодезических и f двумерных клеток — областей. Эйлерова характеристика тора и бутылки Клейна равна нулю, откуда получаем требуемое. \square

Теорема 3.2. *Для тора T^2 с локально евклидовой метрикой множества чисел областей при $n \geq 2$ следующие:*

$$F(T^2, n) = \{n - 1, n\} \cup \{l \in \mathbb{N} | l \geq 2n - 4\}.$$

А множество $F(T^2, 1) = \{1\}$.

Доказательство. Приведем примеры наборов $n \geq 2$ замкнутых геодезических: $n - s$ геодезических типа $(0,1)$ и s геодезических типа $(1,0)$ образуют $n - s$ областей на торе для $s \in \{0, 1\}$. На торе $n - 2$ параллельных геодезических типа $(0,1)$, одна геодезическая типа $(1,0)$ и одна геодезическая типа $(1, a)$, не проходящая через точки пересечения геодезических типа $(0,1)$ с геодезической типа $(1,0)$, образуют $2n - 4 + a$ областей для любого целого $a \geq 0$ (по леммам 3.3, 3.5 и 3.6), см. рис. 4.

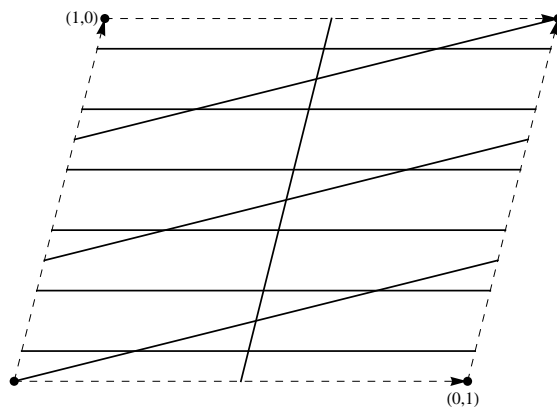


Рис. 4: $n = 8, a = 3$

Теперь докажем, что в множествах $F(T^2, n)$ нет других чисел. Рассмотрим произвольный набор Γ из $n \geq 3$ различных замкнутых геодезических на T^2 , образующий $f = f(\Gamma)$ областей. Обозначим через m максимальное число параллельных геодезических в наборе Γ .

Если $m = n$, то $f = n$. Если $m = n - 1$, то f делится нацело на $n - 1$. Если $2 \leq m \leq n - 2$, то каждая из $n - m$ оставшихся в Γ геодезических имеет по крайней мере m точек пересечения с m параллельными геодезическими, поэтому по леммам 3.5 и 3.6 получаем

$$f \geq m(n - m) \geq 2n - 4.$$

Остался случай $m = 1$. Если любые две геодезические из Γ пересекаются не менее, чем в двух точках, то из лемм 3.5 и 3.6 следует, что $f \geq 2n - 2$. Если некоторые геодезические γ_1 и γ_2 из Γ пересекаются в одной точке и любая из $n - 2$ оставшихся в Γ геодезических пересекает объединение $\gamma_1 \cup \gamma_2$ не менее чем в двух точках, то из лемм 3.5 и 3.6 следует, что $f \geq 2n - 3$. Докажем, что если попарные пересечения некоторых геодезических γ_1, γ_2 и γ_3 из Γ состоят из одной точки и эта точка общая, то любая из $n - 3$ оставшихся в Γ геодезических пересекает $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ не менее чем в двух точках. Из этого и из лемм 3.5 и 3.6 следует, что $f \geq 2n - 4$. Заменим базис $\{u, v\}$ решетки на плоскости, порождающей тор, так, что в новом базисе типы γ_1 и γ_2 будут равны $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Тогда тип γ_3 будет равен $(1, -1)$ или $(1, 1)$. Для любой оставшейся в Γ геодезической (кроме γ_1, γ_2 и γ_3) типа (x, y) в новом базисе число точек пересечения с $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ по лемме 3.3 не меньше чем

$$|x| + |y| + |x \pm y| - 2 \geq 2.$$

□

Теорема 3.3. *Для бутылки Клейна KL^2 с локально евклидовой метрикой множества чисел областей имеют следующий вид при $n \geq 2$:*

$$F(KL^2, n) = \{n - 1, n, n + 1\} \cup \{l \in \mathbb{N} | l \geq 2n - 4\}.$$

А множество $F(KL^2, 1) = \mathbb{N}$.

Доказательство. Приведем примеры наборов $n \geq 2$ замкнутых геодезических: $n - s$ геодезических типа $(0, 1)$ и s геодезических типа $(1, 0)$ образуют $n - s$ областей на бутылке Клейна KL^2 для $s \in \{0, 1\}$. Геодезическая типа $(2, a)$ и $n - 1$ геодезических типа $(0, 1)$, не проходящих через точки самопересечения первой, образуют $2n - 2 + a$ областей для любого целого $a \geq 0$ (по леммам 3.4(а), 3.5 и 3.6), см рис. 5.

На бутылке Клейна n геодезических типа $(2, 0)$ образуют $n + 1$ область; на бутылке Клейна $n - 1 - s$ геодезических типа $(2, 0)$, геодезическая типа $(0, 1)$ и s геодезических типа $(1, 0)$ образуют $2n - 2 - s$ областей при $s \in \{1, 2\}$. Осталось заметить, что на KL^2 одна геодезическая типа $(2, a)$ образует a областей для любого натурального числа a (по леммам 3.4(б), 3.5 и 3.6).

Теперь докажем, что в множествах $F(KL^2, n)$ нет других чисел. Рассмотрим произвольный набор Γ из $n \geq 3$ различных замкнутых геодезических на T^2 или KL^2 , образующий $f = f(\Gamma)$ областей. Обозначим через m максимальное число параллельных геодезических в наборе Γ , при этом самопересекающаяся геодезическая не считается параллельной ни себе, ни другим геодезическим.

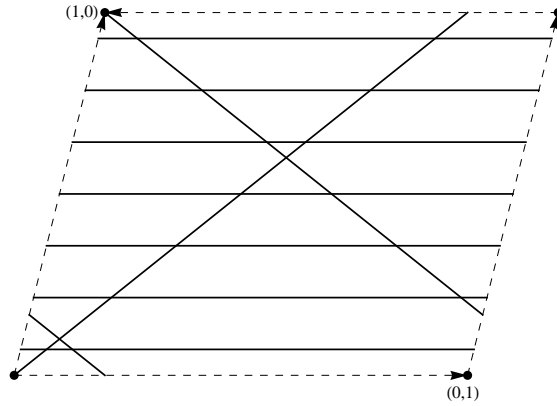


Рис. 5: $n = 8$, $a = 2$

Любая из m параллельных геодезических при $m \geq 1$ имеет тип (k, l) с $kl = 0$, поскольку геодезическая типа (k, l) с $kl \neq 0$ сама себе не параллельна. Если $m = n$, то $f \in \{n - 1, n, n + 1\}$. Если $m = n - 1$ и оставшаяся в Γ геодезическая имеет тип (k, l) , то при $kl = 0$ получаем $f \in \{n - 1, 2n - 4, 2n - 3, 2n - 2\}$, а при $kl \neq 0$ из лемм 3.4(б), 3.5 и 3.6 следует, что $f \geq 2n - 4$. Если $2 \leq m \leq n - 2$, то каждая из $n - m$ оставшихся в Γ геодезических имеет по лемме 3.4(б) как минимум одну точку пересечения с каждой из m параллельных геодезических. Тогда из лемм 3.5 и 3.6 следует, что $f \geq m(n - m) \geq 2n - 4$. Остался случай $m \leq 1$. Выделим две геодезические в Γ так, чтобы все геодезические в Γ типа (k, l) с $kl = 0$ оказались бы выделенными. Каждая из $n - 2$ невыделенных геодезических имеет тип $(2k, l)$ с $|kl| \geq 1$, поэтому из лемм 3.4(а)(б), 3.5 и 3.6 следует, что $f \geq 2n - 4$. \square

Разбиения тора и бутылки Клейна наборами псевдогеодезических

Определение 3.4. Назовем псевдогеодезической на двумерном торе замкнутую гладкую несамопересекающуюся гомотопически не тривиальную кривую. Назовем псевдогеодезической на бутылке Клейна замкнутую гладкую кривую, гомотопную какой-нибудь геодезической на плоской бутылке Клейна, с двойными трансверсальными точками самопересечения, число которых минимально в классе кривых (с теми же свойствами), свободно гомотопных данной (гомотопия замкнутых кривых без ограничений на самопересечения). Конфигурацией (набором) псевдогеодезических на торе или на бутылке Клейна назовем конечный набор псевдогеодезических, для которого число точек пересечения любых двух псевдогеодезических γ_1 и γ_2 равно минимальному возможному числу точек пересечения замкнутых несамопересекающихся кривых, свободно гомотопных γ_1 и γ_2 , с учетом кратности точек самопересечения.

Выберем некоторые образующие e_1, e_2 фундаментальной группы тора. Тогда гомотопический класс замкнутых ориентированных кривых на торе будет определяться парой целых чисел (k, l) . При этом несамопересекающимся кривым соответствуют пары взаимно простых чисел (k, l) .

Теорема 3.4. *Множества всех возможных чисел областей в разбиениях тора и бутылки Клейна наборами из n псевдогеодезических равны соответственно аналогичным множествам для разбиений плоского тора и плоской бутылки Клейна наборами из n замкнутых геодезических геодезически.*

Доказательство. Для наборов псевдогеодезических выполняются следующие аналоги лемм 3.3, 3.4, 3.5, 3.6.

- Псевдогеодезические на торе классов (a, b) и (c, d) (одного набора и в одном базисе) пересекаются в $|ad - bc|$ точках.
- Псевдогеодезическая на бутылке Клейна класса $(2k, l)$ (т.е. гомотопная геодезической на плоской бутылке Клейна типа $(2k, l)$) при $kl \neq 0$ имеет $|kl|$ точек самопересечения.
- Если из двух псевдогеодезических ни одна не гомотопна некоторой степени другой, то они имеют хотя бы одну точку пересечения. Псевдогеодезическая типа $(2, 0)$ пересекает псевдогеодезическую типа $(2k, l)$ с $l \neq 0$ по крайней мере в двух точках или проходит через ее точку самопересечения.
- Если набор псевдогеодезических на торе содержит хотя бы две негомотопные, то все образованные области гомеоморфны открытому диску. Если набор псевдогеодезических на бутылке Клейна содержит хотя бы одну самопересекающуюся, то все образованные области гомеоморфны открытому диску. Если набор псевдогеодезических на бутылке Клейна содержит две псевдогеодезические, из которых ни одна не гомотопна некоторой степени другой, то все образованные области гомеоморфны открытому диску.
- Если все области тора или бутылки Клейна, образованные набором псевдогеодезических, гомеоморфны диску, то число областей равно

$$\sum_{i \geq 2} (i - 1)t_i.$$

Доказательства теорем 3.2, 3.3 переносятся без изменений на разбиения наборами псевдогеодезических, причем вместо лемм используются их аналоги для псевдогеодезических. □

Замечание 3.2. Если в определении псевдогеодезических разрешить им представлять все нетривиальные гомотопические классы, то множество чисел областей может измениться. Например, кривая класса $(0, l)$ на торе имеет $l - 1$ точку самопересечения.

3.4 Разбиения тетраэдров наборами замкнутых геодезических

Геодезическими на тетраэдре называются локально кратчайшие кусочно-гладкие кривые. Геодезические суть ломаные с узлами на ребрах тетраэдра и звеньями на его гранях, такие, что

- соседние звенья лежат на разных гранях,
- ломаные состоят не менее чем из четырех звеньев,
- углы между ребром тетраэдра и соседними звеньями геодезической с общей вершиной на этом ребре равны;
- ломаные не проходят через вершины тетраэдра.

Определение 3.5. Тетраэдр T_r в трехмерном евклидовом пространстве называется равногранным, если его грани суть равные треугольники.

Замкнутые геодезические без самопересечений будем называть простыми. На равногранных тетраэдрах все замкнутые геодезические простые и легко описываются с помощью двулистного разветвленного накрытия равногранного тетраэдра тором с плоской метрикой (точки ветвления над вершинами тетраэдра). В этом параграфе на произвольных тетраэдрах будем рассматривать только простые замкнутые геодезические.

Для тетраэдра T через $F(T, n)$ обозначим множество всех возможных чисел компонент связности дополнений к объединениям n различных замкнутых простых геодезических. А. Т. Фоменко поставил задачу — найти множества $F(T, n)$. В.Ю. Протасов выдвинул гипотезу, что $F(T, n) \subseteq F(T_r, n)$ на основании своей теоремы [5] о том, что любая простая геодезическая на произвольном тетраэдре реализуется комбинаторно эквивалентной ей простой геодезической на правильном тетраэдре. Мы найдем множества $F(T_r, n)$, а затем предложим подход к доказательству гипотезы В.Ю. Протасова.

Разбиения равногранных тетраэдров замкнутыми геодезическими

Замечание 3.3. Гранями равногранного тетраэдра могут служить любые остроугольные треугольники, для этого достаточно согнуть остроугольный треугольник вдоль его средних линий.

Явное описание замкнутых геодезических на равногранном тетраэдре дадим в обозначениях В.Ю. Протасова из [5]. Возьмем произвольный равногранный тетраэдр $ABCD$ и развернем его грани на плоскость ABC , получится треугольник с вершинами $D_1D_2D_3$. Продолжая разворачивать на плоскость ABC грани тетраэдра, получим замощение плоскости одинаковыми треугольниками. Каждой точке плоскости соответствует одна точка на тетраэдре, т.е. замощение не зависит от порядка разверток. Получаем разветвленное накрытие тетраэдра плоскостью, с точками ветвления над его вершинами. Введем координаты на плоскости ABC , так что вершины A, B и C имели бы координаты $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ и $(0, \frac{1}{2})$ соответственно. Напомним, что геодезическая не проходит через вершины тетраэдра и в точках пересечения ребер углы, “накрест” лежащие на разных гранях, равны. Поэтому поднятие замкнутой геодезической на тетраэдре на плоскость есть прямая, параллельная вектору (k, l) для некоторых взаимно простых целых чисел k и l . Замкнутые геодезические называются *изоморфными*, если они пересекают одни и те же грани $ABCD$ в одинаковом порядке. Параллельность накрывающих прямых равносильна (см. [5]) изоморфизму

замкнутых геодезических. Итак, каждому классу изоморфных замкнутых геодезических ставится в соответствие пара целых взаимно простых чисел (k, l) , определенная однозначно с точностью до знака (при фиксированной системе координат плоскости и нумерации вершин тетраэдра). Геодезическая типа (k, l) пересекает каждую грань тетраэдра по $k + l$ отрезкам. Ребра тетраэдра разбиваются на три пары противоположных, геодезическая типа (k, l) имеет по $k + l$ узлов на каждом ребре одной пары, по k узлов на каждом ребре второй пары и по l узлов на каждом ребре оставшейся пары.

Лемма 3.7. *Две замкнутые геодезические с соответствующими парами (a, b) и (c, d) пересекаются в $2|ad - bc|$ точках тетраэдра.*

Доказательство. Построим треугольник $D_1D_2D_3$ (см. обозначения выше) до параллелограмма $D_1D_2D_3D_4$ (порядок обхода вершин 1234). отождествив стороны $D_1D_2 \sim D_4D_3$ и $D_1D_4 \sim D_2D_3$, получим тор, двулистно накрывающий тетраэдр $ABCD$. При этом вершинам тетраэдра соответствуют точки ветвления (второго порядка). Так как геодезическая не проходит через вершины тетраэдра, то ее поднятие на тор есть две замкнутые геодезические на торе. Используем лемму 3.3: две замкнутые геодезические на плоском торе с соответствующими парами (a, b) и (c, d) пересекаются в $|ad - bc|$ точках тора. Следовательно, на накрывающем торе имеем $4|ad - bc|$ точек пересечения поднятых геодезических. Осталось заметить, что в каждую точку пересечения геодезических на тетраэдре проецируются две точки пересечения поднятых геодезических на торе. \square

Обозначим через f число компонент связности дополнения к объединению геодезических (для каждого набора получается свое число f). Компоненты связности дополнения к объединению геодезических набора будем называть *областями* (хотя они не всегда гомеоморфны открытому диску). Обозначим через t_i число точек тетраэдра, принадлежащих ровно i геодезическим набора для $i \geq 2$.

Лемма 3.8. *Если не все замкнутые геодезические набора изоморфны, то*

$$f = 2 + \sum_{i \geq 2} (i - 1)t_i$$

и все области гомеоморфны открытому диску.

Доказательство. Докажем сначала, что все области суть диски. Предположим, что несколько замкнутых геодезических делят тетраэдр на области, гомеоморфные диску. Добавим к набору еще одну замкнутую геодезическую, имеющую хотя бы одну точку пересечения с предыдущими. Добавленная геодезическая пересекает любую область тетраэдра (образованную предыдущими геодезическими) по незамкнутой простой ломаной и, следовательно, делит эту область на две подобласти, гомеоморфные диску. Поэтому все области тетраэдра, образованные новым набором, по-прежнему будут гомеоморфны диску. Осталось правильно упорядочить добавление геодезических. Первая выбирается произвольным образом, вторая выбирается не изоморфной первой, остальные выбираются произвольным образом.

Теперь рассмотрим граф, вершины которого — точки пересечения геодезических набора, ребра — отрезки геодезических, не содержащие отличных от своих концов

вершин графа. Число вершин и ребер графа равны $\sum t_i$ и $\sum it_i$ соответственно, откуда по формуле Эйлера для связных графов находим число областей. \square

Лемма 3.9. *Множество точек пересечений трех попарно неизоморфных замкнутых геодезических состоит не менее чем из трех точек. Любая замкнутая геодезическая пересекает объединение двух не изоморфных ей геодезических по крайней мере в трех точках.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Рассмотрим полные прообразы этих трех геодезических на плоскости, разветвленно накрывающей тетраэдр (см. выше подробности). Получим три семейства параллельных прямых, делящих плоскость на многоугольники. Среди этих многоугольников будет треугольник (возьмем сначала какой-нибудь треугольник, образованный прямыми различных семейств, если его пересекают накрывающие прямые, то выберем в нем меньший треугольник и т.д., процесс будет конечен). Итак, найден треугольник со сторонами на накрывающих геодезических прямых, такой что внутри него не содержится точек накрывающих прямых. Его вершины проецируются в различные точки тетраэдра — точки пересечения исходных геодезических, которых поэтому не меньше трех.

Если бы замкнутая геодезическая пересекала объединение двух неизоморфных ей геодезических в двух точках, то эти точки были бы единственными точками попарных пересечений. Что невозможно, т.к. таких точек не меньше трех.

Отметим, что множество точек попарных пересечений трех неизоморфных замкнутых геодезических не может состоять из трех точек, и поэтому состоит из не менее чем четырех точек. Пример для четырех точек можно получить, взяв три четырехзвенные замкнутые геодезические, проходящие через одну точку (звенья каждой четырехзвенной геодезической параллельны паре противоположных ребер тетраэдра). \square

Лемма 3.10. *Для любой пары целых чисел (n, k) при $n \geq 3$ и $k \geq 0$ существует набор из n замкнутых геодезических на тетраэдре, для которого $f = 4n - 6 + k$.*

Доказательство. Возьмем замкнутую геодезическую типа $(1, a)$, геодезическую типа $(1, 0)$ и $n - 2$ замкнутых геодезических типа $(0, 1)$, число a — целое и неотрицательное. Если $a = 0$, то получим $4n - 6$ областей тетраэдра. Если $a > 0$ и геодезические типа $(0, 1)$ не проходят через точки пересечения геодезических типа $(1, a)$ и $(1, 0)$, то получится $f = 4n - 6 + 2a$ областей. Если $a > 0$ и ровно одна геодезическая типа $(0, 1)$ проходит через одну точку пересечения геодезических типа $(1, a)$ и $(1, 0)$, то получится $f = 4n - 7 + 2a$ областей. \square

Лемма 3.11. *Если в наборе нет изоморфных геодезических, то $f \geq 4n - 6$ при $n \geq 3$.*

Доказательство. Если любые две замкнутые геодезические набора пересекаются не менее чем в четырех точках, то по лемме 3.8 получаем, что число областей тетраэдра не меньше чем $4n - 2$. Докажем, что если некоторые две геодезические γ_1 и γ_2 набора пересекаются ровно в двух точках, то тогда все остальные замкнутые геодезические, за исключением может быть двух, пересекают объединение $\gamma_1 \cup \gamma_2$ по крайней мере в четырех точках. Рассмотрим двулистное разветвленное накрытие тетраэдра тором

и поднимем замкнутые геодезические на тетраэдре до замкнутых геодезических на торе (с плоской метрикой). Тогда связные компоненты $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ поднятия геодезических γ_1 и γ_2 пересекаются на торе в одной точке и поэтому могут быть выбраны в качестве базиса $(1,0)$ и $(0,1)$ (образующих фундаментальной группы тора). Замкнутая геодезическая типа (x,y) на торе пересекает объединение геодезических типа $(1,0)$ и $(0,1)$ не менее чем в $|x| + |y| - 1$ точках (см. лемму 3.3). Осталось заметить, что $|x| + |y| - 1 \geq 2$ для всех упорядоченных пар целых чисел (x,y) , определенных с точностью до знака, кроме пар $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ и $(1,-1)$. Следовательно, любая замкнутая геодезическая $\tilde{\gamma}$ на торе, не имеющая этих четырех типов в базисе $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$, пересекает $\tilde{\gamma}_1 \cup \tilde{\gamma}_2$ хотя бы в двух точках. А значит, ее проекция на тетраэдр — замкнутая геодезическая γ пересекает $\gamma_1 \cup \gamma_2$ по крайней мере в четырех точках, поскольку поднятие γ на тор состоит из двух замкнутых геодезических $\tilde{\gamma}$, каждая из которых содержит хотя бы две соответствующие точки пересечения.

Итак, каждая замкнутая геодезическая набора, кроме γ_1, γ_2 и еще может быть двух (γ_3 и γ_4), пересекает объединение $\gamma_1 \cup \gamma_2$ по крайней мере в четырех точках. А каждая из возможно существующих γ_3 и γ_4 пересекает объединение $\gamma_1 \cup \gamma_2$ по крайней мере в трех точках по лемме 3.9. Геодезические γ_1, γ_2 делят тетраэдр на 4 части. Добавляя геодезические γ_3, γ_4 и остальные геодезические набора по очереди, получаем $f \geq 4n - 6$ по лемме 3.8. \square

Теорема 3.5. *Для произвольного равногранного тетраэдра T_r и наборов из n различных замкнутых геодезических на нем множество всех возможных чисел связных компонент дополнения имеет вид*

$$F(T_r, n) = \{n + 1, 2n\} \cup \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 4n - 6\}$$

для $n \geq 3$,

$$F(T_r, 1) = \{1\}, \quad F(T_r, 2) = \{3, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

Доказательство. Приведем примеры наборов, реализующих все возможные числа областей f . Наборы из n изоморфных замкнутых геодезических образуют $n + 1$ область на тетраэдре. Набор из n четырехзвенных геодезических, из которых ровно $n - 1$ изоморфны, дает $2n$ областей на тетраэдре. Для $n \geq 3$ осталось учесть лемму 3.10. Для $n = 2$ возьмем замкнутую геодезическую типа $(1, a)$ и замкнутую геодезическую типа $(1, 0)$, получится $2a + 2$ области для любого целого $a > 0$.

Докажем, что других чисел областей для равногранного тетраэдра быть не может. Если $n = 1$ или $n = 2$, то это следует из лемм 3.7 и 3.8, а также из того, что замкнутые геодезические на равногранном тетраэдре не самопересекаются. Пусть $n \geq 3$, тогда обозначим через m максимальное число изоморфных (параллельных) замкнутых геодезических в наборе. Если $m = n$, то $f = n + 1$. Если $m = n - 1$, то по леммам 3.7 и 3.8 имеем $f = 2 + 2(n - 1)k$ для некоторого натурального числа k . Если $2 \leq m \leq n - 2$, то по леммам 3.7 и 3.8 получаем $f \geq 2 + 2m(n - m) \geq 4n - 6$. В оставшемся случае $m = 1$ применяем лемму 3.11. \square

Разбиения неравносторонних тетраэдров простыми геодезическими. Пусть $T = ABCD$ — не равносторонний тетраэдр, на котором существуют замкнутые геодезические без самопересечений (достаточные условия см. в [5]).

Теорема 3.6. В. Ю. Протасов, [5, 6]. (а) Любая замкнутая простая геодезическая γ на произвольном тетраэдре соответствует замкнутой геодезической $\tilde{\gamma}$ на правильном тетраэдре, пересекающей ребра в той же последовательности (между вершинами тетраэдров заранее установлено соответствие).

(б) Среди всех поверхностей трехмерных многогранников равносторонние тетраэдры и только они содержат бесконечное число неизоморфных (попарно непараллельных) замкнутых простых геодезических.

Гипотеза 3.2. В. Ю. Протасов. Для множества $F(T, n)$ чисел областей разбиений произвольного тетраэдра T наборами из n различных простых замкнутых геодезических имеем

$$F(T, n) \subseteq \{n + 1, 2n\} \cup \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 4n - 6\}$$

при $n \geq 3$,

$$F(T, 2) \subseteq \{3\} \cup \{2m \mid m \in \mathbb{N}, m \geq 2\},$$

причем каждое из включений обращается в равенство тогда и только тогда, когда тетраэдр T равносторонний. Более того, для неравносторонних тетраэдров T множества $F(T, n)$ конечны для всех натуральных чисел n .

Заметим, что конечность множеств $F(T, n)$ для неравносторонних тетраэдров легко следует из теоремы 3.6. Ниже мы приводим идеи, которые, скорее всего, можно довести до доказательства гипотезы в положительном смысле.

Пусть γ_1 и γ_2 — различные замкнутые геодезические на T без самопересечений. Зададим на тетраэдре ориентацию, в соответствии с которой обходы ребер грани тетраэдра можно будет разделять на положительные и отрицательные.

Определение 3.6. Назовем подходящей пару незамкнутых несамопересекающихся k -звенных ломаных $l_1 \subset \gamma_1$ и $l_2 \subset \gamma_2$, если $k \geq 2$ и для вершин X_1, \dots, X_{k+1} и Y_1, \dots, Y_{k+1} ломаных l_1 и l_2 соответственно выполняются условия:

- точки X_i и Y_i принадлежат одним и тем же ребрам тетраэдра для всех i , где $2 \leq i \leq k$,
- точки X_i и Y_i лежат на разных ребрах тетраэдра для $i = 1$ и $i = k + 1$,
- Направление обхода ребер тетраэдра, содержащих точки X_1, Y_1 и X_2 , совпадает с направлением обхода ребер, содержащих точки X_{k+1}, Y_{k+1} и X_k .

Гипотеза 3.3. (а) Если $l_1 \subset \gamma_1$ и $l_2 \subset \gamma_2$ — подходящая пара, то ломаные l_1 и l_2 пересекаются в единственной точке.

(б) Если P — точка пересечения замкнутых простых геодезических γ_1 и γ_2 , то найдется подходящая пара $l_1 \subset \gamma_1$ и $l_2 \subset \gamma_2$, такая, что P — точка пересечения ломаных l_1 и l_2 .

(в) (Следствие первых двух пунктов гипотезы). Число точек пересечения замкнутых простых геодезических равно числу подходящих пар ломаных для них.

(г) Если замкнутым простым геодезическим γ_1 и γ_2 на тетраэдре T соответствуют геодезические $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ на правильном тетраэдре, то число точек пересечения геодезических γ_1 и γ_2 равно числу точек пересечения геодезических $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$.

Пункт (г) следует из (в), т.к. подходящие пары для геодезических γ_1 и γ_2 взаимно однозначно соответствуют парам для геодезических $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$.

3.5 Замкнутые геодезические на замкнутых гиперболических поверхностях

Пусть M — связная гладкая двумерная замкнутая поверхность без края с метрикой постоянной отрицательной кривизны. M гомеоморфна сфере с $g \geq 2$ ручками или с $k \geq 3$ листами Мебиуса (по теор. Гаусса). Назовем *простой* замкнутую геодезическую без самопересечений. Компоненты связности дополнения в M к объединению замкнутых геодезических будем называть областями, хотя они могут быть не гомеоморфны диску.

Теорема 3.7. Пусть M — связная замкнутая двумерная поверхность с гиперболической метрикой. Тогда существуют константы c_1, c_2 и c_3 , такие что для любых двух различных замкнутых геодезических γ_1 и γ_2 на M длины T_1 и T_2

(а)

$$|\pi_0(M \setminus \{\gamma_1 \cup \gamma_2\})| \leq c_1 T_1 T_2 + c_2 (T_1^2 + T_2^2),$$

(б) если обе геодезические не самопересекаются, то

$$|\pi_0(M \setminus \{\gamma_1 \cup \gamma_2\})| \leq c_3 T_1 T_2.$$

Доказательство. (б) Пусть γ_1 и γ_2 пересекаются в p точках и образуют f областей на M_g^2 . Граница любой области содержит отрезок какой-то геодезической, причем каждый отрезок содержится в границах не более чем двух областей. Поэтому число областей f не превосходит удвоенного числа отрезков и

$$f \leq 4p \quad \text{при} \quad p \geq 1 \quad \text{и} \quad f \leq 4 \quad \text{при} \quad p = 0. \quad (3.1)$$

При $p = 0$ границами областей будут сами геодезические. Оценим теперь число p точек пересечения двух простых замкнутых геодезических с длинами T_1 и T_2 . Дискретная группа G движений плоскости Лобачевского порождена сдвигами вдоль прямых $B_i B_{i+2g}$ на расстояния $\rho(B_i, B_{i+2g})$. Образы многоугольника $A_1 A_2 \dots A_{4g}$ при действии группы G покрывают всю плоскость Лобачевского. Обозначим множества образов точек O и A_1, A_2, \dots, A_{4g} при действии группы G через $\{O_i, i = 1, \dots, \infty\}$ и $\{A_i, i = 1, \dots, \infty\}$ соответственно.

Для бесконечного множества

$$\{O_i \cup A_i, i = 1, \dots, \infty\}$$

построим замкнутые многоугольные ячейки Вороного. Обозначим через U_i и V_i ячейки, содержащие точки O_i и A_i соответственно. Докажем, что ячейка точки O совпадает с многоугольником $B_1 B_2 \dots B_{4g}$. Рассмотрим треугольник $OA_1 B_1$. Так

как $\angle A_1OB_1 = \frac{\pi}{4g} = \angle B_1A_1O$, то отрезки OB_1 и A_1B_1 симметричны относительно срединного перпендикуляра к отрезку OA_1 . Аналогично отрезки OB_{4g} и A_1B_{4g} симметричны относительно срединного перпендикуляра к отрезку OA_1 . Следовательно, B_1B_{4g} — срединный перпендикуляр к OA_1 . Аналогично, прямые $B_{i-1}B_i$ равноудалены от точек O и A_i для $i = 2, \dots, 4g$. Поэтому многоугольник $B_1B_2 \dots B_{4g}$ — это ячейка точки O .

Заметим, что $\triangle OB_1B_{4g} = \triangle A_1B_1B_{4g}$ и, следовательно, $\angle OB_1B_{4g} = 45^\circ$. Тогда $\angle B_{i-1}B_iB_{i+1} = 90^\circ$ для $i = 1, \dots, 4g$. Из равенства треугольников $\triangle OB_1B_{4g}$ и $\triangle A_1B_1B_{4g}$ следует, что ячейки точек O и A_1 суть равные $4g$ -угольники, все углы которых равны 90° , а длины всех сторон равны $\rho(B_1, B_2)$. Таким образом, ячейка U_i точки O_i — это $4g$ -угольник, стороны которого также являются сторонами ячеек $V_{j_1} \dots V_{j_{4g}}$ точек $A_{j_1}, \dots, A_{j_{4g}}$ для некоторых индексов j_1, \dots, j_{4g} . Рассмотрим прямые l_1 и l_2 на плоскости Лобачевского, такие что $\gamma_1 = \phi(l_1)$ и $\gamma_2 = \phi(l_2)$. Прямыми l_1 и l_2 поставим в соответствие две бесконечные в обе стороны последовательности ячеек Вороного, с которыми они имеют общие точки, учитывая следующее: если прямая проходит через вершину Q какой-то ячейки, то из четырех ячеек, содержащих точку Q , в последовательность включим три ячейки в таком порядке, чтобы ячейки U_i чередовались с ячейками V_j ; а если прямая проходит по стороне ячеек U_i и V_j , то в последовательность включим U_i . Тогда получатся две бесконечные последовательности Π_1 и Π_2 , в которых ячейки U_i чередуются с ячейками V_j .

Выберем отрезки $[X_1X_2]$ и $[Y_1Y_2]$ на прямых l_1 и l_2 длиной T_1 и T_2 соответственно, так чтобы точки X_1 и Y_1 принадлежали ячейкам U_{i_α} и U_{i_β} . Так как длины геодезических равны длинам отрезков $[X_1X_2]$ и $[Y_1Y_2]$, то точки $\phi(X_1) = \phi(X_2)$ и $\phi(Y_1) = \phi(Y_2)$. Поэтому точки X_2 и Y_2 принадлежат ячейкам U_{i_δ} и U_{i_ϵ} для некоторых индексов i_δ и i_ϵ . Пересечение отрезка $[X_1X_2]$ с произвольной ячейкой Вороного есть или отрезок, или точка, или пустое множество. Обозначим непустые пересечения отрезка $[X_1X_2]$ с ячейками $U_{i_k} \in \Pi_1$ через $[E_{2k-1}E_{2k}]$ для $k = 1, \dots, \kappa$ в порядке следования ячеек в Π_1 . Аналогично, обозначим непустые пересечения отрезка $[Y_1Y_2]$ с ячейками $U_{j_l} \in \Pi_2$ через $[F_{2l-1}F_{2l}]$ для $l = 1, \dots, \lambda$ в порядке следования ячеек в Π_2 . В силу выбора точек X_1, X_2, Y_1, Y_2 имеем

$$E_1 = X_1, F_1 = Y_1, E_{2\kappa} = X_2, F_{2\lambda} = Y_2.$$

Оценим числа κ и λ через T_1 и T_2 . Ячейка Вороного U_i имеет по одной общей точке с $4g$ ячейками U_s при $s \neq i$. Рассмотрим

$$r_i = \min_j \left(\rho(Z_1, Z_2) \mid Z_1 \in U_i, Z_2 \in U_j, U_i \cap U_j = \emptyset \right)$$

минимальное расстояние от ячейки U_i до тех ячеек U_j , с которыми ячейка U_i не имеет общих точек. Так как группа G состоит из изометрий плоскости Лобачевского, то число r_i не зависит от i , т.е. $r = r_i$ — константа (при фиксированном числе g). Рассмотрим три отрезка (возможно, вырождающиеся в точки)

$$[E_{2k-1}E_{2k}] \subset U_{i_k}, \quad [E_{2k+1}E_{2k+2}] \subset U_{i_{k+1}}, \quad [E_{2k+3}E_{2k+4}] \subset U_{i_{k+2}},$$

принадлежащие отрезку $[X_1X_2]$. Предположим, что ячейки U_{i_k} и $U_{i_{k+2}}$ имеют общую точку. Это означает, что ячейки U_{i_k} и $U_{i_{k+2}}$ находятся в $4g$ -угольниках D_1 и

D_2 , имеющих общую сторону и полученных из исходного $4g$ -угольника $A_1A_2 \dots A_{4g}$ некоторыми движениями из группы G . Тогда и отрезок $[E_{2k-1}E_{2k+4}]$ находится в объединении $D_1 \cup D_2$. Следовательно, отрезок $[E_{2k+1}E_{2k+2}]$ находится во внутренности объединения $D_1 \cup D_2$. Однако внутренность объединения $D_1 \cup D_2$ имеет общие точки с ячейками U_i только при $i = i_k$ и $i = i_{k+2}$, что противоречит тому, что отрезок $[E_{2k+1}E_{2k+2}] \subset U_{i_{k+1}}$. Итак, ячейки U_{i_k} и $U_{i_{k+2}}$ не имеют общих точек, следовательно $\rho(E_{2k}, E_{2k+3}) \geq r$ по определению числа r . Поэтому $\rho(E_{2k-1}, E_{2k+3}) \geq r$, т.е. сумма длин двух соседних отрезков $[E_{2k-1}E_{2k}]$; $[E_{2k+1}E_{2k+2}]$ и двух интервалов $(E_{2k}E_{2k+1})$; $(E_{2k+2}E_{2k+3})$ не меньше r . Отсюда следует, что

$$\kappa < \frac{2T_1}{r} + 2.$$

Аналогично для γ_2 имеем $\lambda < \frac{2T_2}{r} + 2$.

Теперь оценим число точек пересечения γ_1 и γ_2 . Каждая точка пересечения находится или на паре отрезков

$$[E_{2k-1}E_{2k}] \quad \text{и} \quad [F_{2l-1}F_{2l}] \quad \text{для} \quad k = 1, \dots, \kappa; \quad l = 1, \dots, \lambda,$$

или на паре интервалов

$$(E_{2k}E_{2k+1}) \quad \text{и} \quad (F_{2l}F_{2l+1}) \quad \text{для} \quad k = 1, \dots, \kappa - 1; \quad l = 1, \dots, \lambda - 1.$$

Отрезки $[E_{2k-1}E_{2k}]$ и $[F_{2l-1}F_{2l}]$ находятся в ячейках U_{i_k} и U_{j_l} , поэтому ϕ -образы отрезков $[E_{2k-1}E_{2k}]$ и $[F_{2l-1}F_{2l}]$ имеют не более двух общих точек. Две общие точки возможны, например, когда отрезки $[E_{2k-1}E_{2k}]$ и $[F_{2l-1}F_{2l}]$ пересекаются внутри ячейки, содержащей точку O , и, кроме того, выполняется $E_{2k} = B_{g+1}$, $F_{2l} = B_1$. Тогда $\phi(E_{2k}) = \phi(F_{2l})$. Аналогично, ϕ -образы интервалов $(E_{2k}E_{2k+1})$ и $(F_{2l}F_{2l+1})$ имеют не более одной общей точки. Следовательно,

$$p \leq 2\kappa\lambda + (\kappa - 1)(\lambda - 1) < 3\kappa\lambda < \frac{12}{r^2} (T_1 + r)(T_2 + r).$$

Обозначим через t минимум длин простых замкнутых геодезических на M_g^2 . Тогда

$$T_i + r \leq \left(1 + \frac{r}{t}\right) T_i \quad \text{для} \quad i = 1, 2,$$

и поэтому

$$p < \frac{12}{r^2} \left(1 + \frac{r}{t}\right)^2 T_1 T_2.$$

Учитывая (3.1) и $36 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{r}\right)^2 T_1 T_2 \geq 36 > 4 \geq f$ для $p = 0$, получаем

$$f \leq 36 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{r}\right)^2 T_1 T_2.$$

Итак, константа $c = 36 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{r}\right)^2$ удовлетворяет условию пункта (б) теоремы.

(а) Аналогично пункту (б).

□

Теорема 3.8. *Существует связная двумерная замкнутая поверхность M рода $g \geq 2$ с гиперболической метрикой, для которой выполняется каждое из следующих утверждений.*

(а) *для любого числа $T > 0$ найдутся две простые замкнутые геодезические с длинами $T_1 > T$ и $T_2 > T$, образующие одну область на M .*

(б) *Существует константа $c_0 > 0$, такая что для любого числа $T > 0$ найдутся две различные простые замкнутые геодезические на M с длинами $T_1 > T$ и $T_2 > T$, образующие не менее чем $c_0 T_1 T_2$ областей на M .*

(в) *Для любого натурального числа f существует замкнутая геодезическая, образующая f областей на M .*

Доказательство. Рассмотрим замкнутую риманову поверхность M_g^2 рода $g \geq 2$ с гиперболической метрикой следующего вида. отождествим противоположные стороны у $4g$ -угольника на плоскости Лобачевского с равными сторонами и с углами, равными $\frac{\pi}{2g}$. При отождествлении получается многообразие, гомеоморфное M_g^2 . Обозначим вершины многоугольника через A_1, A_2, \dots, A_{4g} . Рассмотрим дискретную группу G движений плоскости Лобачевского L^2 , изоморфную фундаментальной группе M_g^2 и порожденную сдвигами плоскости L^2 вдоль $2g$ прямых, проходящих через середины противоположных сторон многоугольника $A_1 A_2 \dots A_{4g}$, на расстояние между этими серединами. Так как действие группы G на плоскости Лобачевского не имеет неподвижных точек, то факторпространство $L^2/G \approx M_g^2$ наделяется структурой гладкого многообразия с индуцированной метрикой постоянной отрицательной кривизны. Обозначим через $\phi : L^2 \rightarrow M_g^2$ соответствующее отображение факторизации (ϕ — универсальное накрытие).

Плоскость Лобачевского L^2 покрывается образами многоугольника $A_1 \dots A_{4g}$ при действии дискретной группы движений G . Обозначим через $S \subset L^2$ множество образов вершин многоугольника $A_1 \dots A_{4g}$, середин его сторон и центра O при действии группы G .

Обозначим через B_i середины сторон $A_i A_{i+1}$ многоугольника $A_1 \dots A_{4g}$ для $i = 1, \dots, 4g$. Через $\rho(X, Y)$ обозначим расстояние между точками X и Y на плоскости Лобачевского.

(а) В качестве γ_1 возьмем замкнутую геодезическую, состоящую из $k+1$ отрезков:

$$A_1^1 A_1^2, A_2^1 A_2^2, A_3^1 A_3^2, \dots, A_{k+1}^1 A_{k+1}^2,$$

где $A_1^1 = A_1$, $A_{k+1}^2 = A_{2g+1}$, а точки A_i^2 и A_i^1 расположены на сторонах $A_{2g} A_{2g+1}$ и $A_1 A_{4g}$ многоугольника $A_1 \dots A_{4g}$ соответственно, причем точки A_i^2 и A_{i+1}^1 определяют одну точку на сфере с ручками M_g^2 при $i = 1, \dots, k$, см. рис. 6.

В качестве γ_2 возьмем аналогичную замкнутую геодезическую, состоящую из k отрезков $B_i^1 B_i^2$, $i = 1, \dots, k$. Возьмем $k > \frac{T}{\rho_{\min}}$, где ρ_{\min} — это минимальное расстояние между точками отрезков $A_1 A_{4g}$ и $A_{2g} A_{2g+1}$. Тогда длины геодезических γ_1 и γ_2 будут больше T .

Замкнутую геодезическую γ_2 можно получить из γ_1 следующим образом. Возьмем k отрезков $A_i^1 A_i^2$, $i = 1, \dots, k$ и начнем их "поворачивать" на малые углы и "смещать" на малые расстояния, так чтобы точки A_i^2 и A_{i+1}^1 определяли бы одну точку на сфере с ручками при $i = 1, \dots, k-1$. Точки A_j^2 будут перемещаться по отрезкам $A_j^2 A_{j+1}^2$, причем первой точкой из A_j^2 , $j = 1, \dots, k$, которая достигнет точки

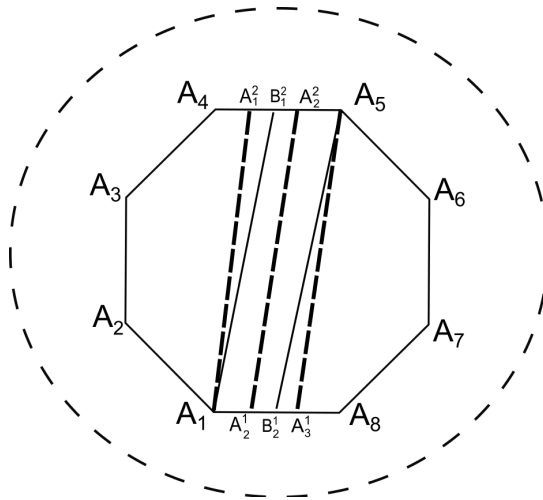


Рис. 6: $g = 2, k = 2$

A_{j+1}^2 , будет точка A_k^2 . Следовательно, при таком преобразовании φ отрезки $A_j^1 A_j^2, j = 1, \dots, k$ образуют замкнутую геодезическую γ_2 , причем $B_i^2 = \varphi(A_i^2) \in (A_i^2 A_{i+1}^2)$ при $i = 1, \dots, k-1$ и $B_k^2 = \varphi(A_k^2)$. Так как точки B_i^2 находятся строго между точками A_i^2 и A_{i+1}^2 при $i = 1, \dots, k-1$, то интервалы $A_i^1 A_i^2$ и $B_j^1 B_j^2$ не пересекаются, и поэтому геодезические γ_1 и γ_2 образуют одну область на сфере с g ручками M_g^2 .

(б) Возьмем построенную в доказательстве пункта (а) геодезическую γ_1 , состоящую из $k+1$ отрезков, соединяющих точки на сторонах $A_1 A_{4g}$ и $A_{2g} A_{2g+1}$ многоугольника $A_1 \dots A_{4g}$. В качестве геодезической γ_2 возьмем аналогичную замкнутую геодезическую, состоящую из $l+1$ отрезков, соединяющих точки на сторонах $A_g A_{g+1}$ и $A_{3g} A_{3g+1}$ многоугольника $A_1 \dots A_{4g}$, см. рис. 7.

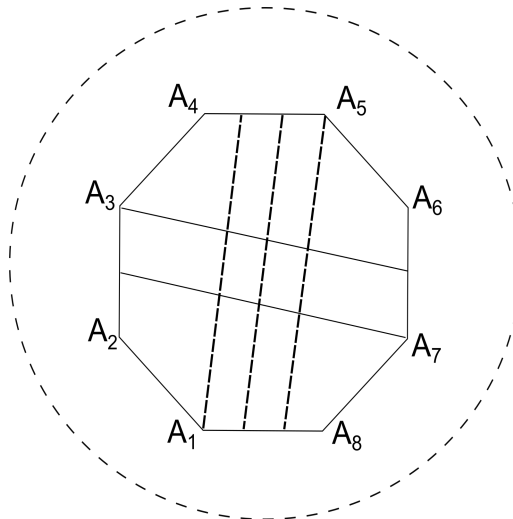


Рис. 7: $g = 2, k = 2, l = 1$

Тогда замкнутые геодезические γ_1 и γ_2 образуют более чем kl областей на сфере с g ручками M_g^2 . Обозначим через ρ_{\max} максимальное расстояние между точками отрезков A_1A_{4g} и $A_{2g}A_{2g+1}$ соответственно. Тогда для длин T_1 и T_2 геодезических γ_1 и γ_2 имеем

$$T_1 \leq \rho_{\max}(k+1), \quad T_2 \leq \rho_{\max}(l+1).$$

Следовательно, при $k \geq 2$, $l \geq 2$ геодезические γ_1 и γ_2 образуют более чем

$$kl \geq \frac{4}{9}(k+1)(l+1) \geq \frac{4T_1T_2}{9\rho_{\max}^2}$$

областей на сфере с ручками M_g^2 . Итак, константа $c_0 = \frac{4}{9\rho_{\max}^2}$ удовлетворяет условию пункта (б) теоремы.

(в) Приведем примеры таких геодезических отдельно для четного и нечетного чисел f . Пусть f нечетно, $f = 2k + 1$. Построим геодезическую γ , симметричную относительно центра O многоугольника $A_1 \dots A_{4g}$, см. рис. 8.

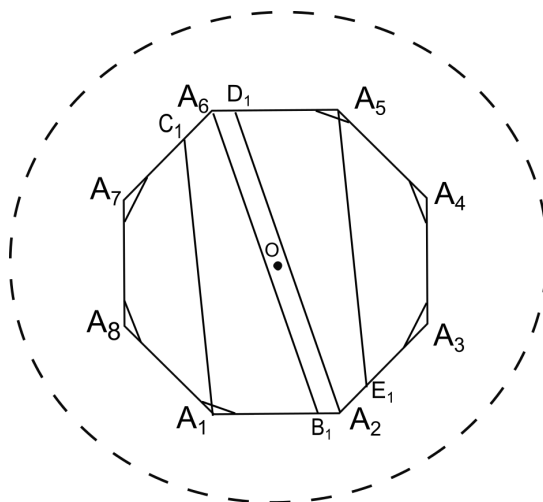


Рис. 8: $g = 2$, $k = 1$, $f = 3$

Выпустим луч l_1 из вершины A_{2g+2} многоугольника $A_1 \dots A_{4g}$ достаточно близко к центру O . Тогда луч l_1 пересечет сторону A_1A_2 в точке B_1 около вершины A_2 и после пересечения всех остальных сторон (каждую по одному разу) l_1 выйдет из стороны $A_{2g+2}A_{2g+3}$ в точке C_1 около вершины A_{2g+2} . При этом угол между лучом l_1 и стороной $A_{2g+2}A_{2g+3}$ в точке C_1 меньше чем такой же угол в точке A_{2g+2} . Пусть теперь луч l_1 , вышедший из точки C_1 , опять пройдет близко к центру O многоугольника и пересечет сторону A_1A_2 в точке B_2 , лежащей на отрезке A_1B_1 . После пересечения всех остальных сторон многоугольника, луч l_1 выйдет из стороны $A_{2g+2}A_{2g+3}$ в точке C_2 . При этом точка C_2 лежит на отрезке C_1A_{2g+3} близко к точке C_1 . Угол между лучом l_1 и стороной $A_{2g+2}A_{2g+3}$ в точке C_2 меньше чем такой же угол в точке C_1 . Пусть луч l_1 аналогичным образом пересекает сторону A_1A_2 в точках B_3, \dots, B_k и выходит из стороны $A_{2g+2}A_{2g+3}$ в точках C_3, \dots, C_k . Теперь выберем начальное направление луча l_1 так, что после выхода из точки C_k луч попадает в вершину A_1 .

Такое направление луча существует, поскольку при непрерывном уменьшении угла между лучом l_1 и стороной $A_{2g+2}A_{2g+3}$ в начальной точке A_{2g+2} от значения $\frac{\pi}{4g}$ точка B_{k+1} будет непрерывно двигаться по стороне A_1A_2 и при некотором угле попадет в вершину A_1 .

Пусть луч l_2 будет симметричен лучу l_1 относительно центра O многоугольника $A_1 \dots A_{4g}$. То есть луч l_2 идет из точки A_2 , пересекает сторону $A_{2g+1}A_{2g+2}$ в точках D_1, \dots, D_k , выходит из стороны A_2A_3 в точках E_1, \dots, E_k и после выхода из точки E_k попадает в вершину A_{2g+1} . В силу симметрии угол между лучом l_1 и стороной $A_{2g+1}A_{2g+2}$ в точке A_{2g+2} равен углу между лучом l_2 и стороной A_1A_2 в точке A_2 . Кроме того, угол между лучом l_1 и стороной A_1A_2 в вершине A_1 равен углу между лучом l_2 и стороной $A_{2g+1}A_{2g+2}$ в точке A_{2g+1} . Поэтому указанные отрезки лучей l_1 и l_2 задают замкнутую гладкую геодезическую γ , которая образует $2k + 1$ областей на сфере с ручками M_g^2 при $k \geq 1$.

Одну область образует замкнутая геодезическая, совпадающая со стороной A_1A_2 многоугольника.

Теперь построим аналогичный пример замкнутой геодезической γ , образующей $f = 2k$ области на сфере с ручками M_g^2 при $k \geq 1$. Геодезическая γ проходит через точки O , A_1 и A_{2g+1} и симметрична относительно точки O . Назовем лучами l_1 и l_2 отрезки γ между точками O и A_1 и между точками O и A_{2g+1} соответственно, тогда $\gamma = l_1 \cup l_2$. Пусть лучи l_1 и l_2 идут из центра O многоугольника в противоположных направлениях близко к вершинам A_2 и A_{2g+2} соответственно. Луч l_1 пересекает сторону A_1A_2 в точках B_1, \dots, B_k , выходит из стороны $A_{2g+2}A_{2g+3}$ в точках C_1, \dots, C_k и после точки C_k попадает в вершину A_1 , см. рис. 9.

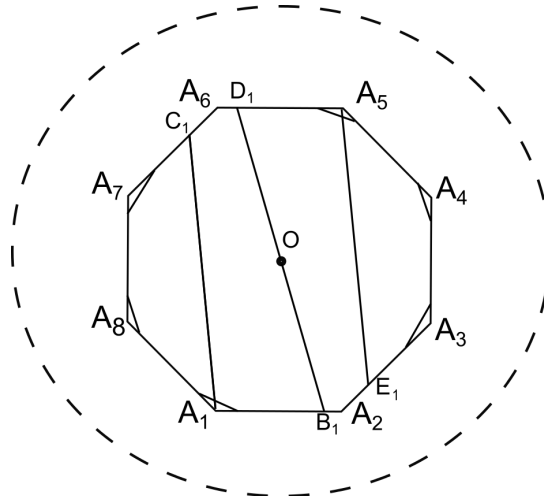


Рис. 9: $g = 2$, $k = 1$, $f = 2$

Пусть луч l_2 аналогично пересекает сторону $A_{2g+1}A_{2g+2}$ в точках D_1, \dots, D_k , выходит из стороны A_2A_3 в точках E_1, \dots, E_k и после точки E_k попадает в вершину A_{2g+1} . В силу симметрии угол между лучом l_1 и стороной A_1A_2 в вершине A_1 равен углу между лучом l_2 и стороной $A_{2g+1}A_{2g+2}$ в точке A_{2g+1} . Поэтому указанные отрезки лучей l_1 и l_2 задают замкнутую гладкую геодезическую γ , которая образует

$2k$ областей на сфере с ручками M_g^2 при $k \geq 1$. □

Замечание 3.4. Построенные при доказательстве пункта (б) теоремы простые замкнутые геодезические γ_1 и γ_2 пересекаются в одной точке.

Гипотеза 3.4. Для данных $g \geq 2$ и M_g^2 существует константа $T_0 > 0$, такая что любые две замкнутые простые геодезические, длины которых не меньше T_0 , имеют хотя бы одну общую точку.

4 Наборы подмногообразий коразмерности один

Определение 4.1. Пусть M — связное гладкое вещественное d -мерное многообразие без края. Конфигурацией подмногообразий коразмерности один будем называть конечный набор A_1, \dots, A_n замкнутых подмногообразий коразмерности один в M , подмногообразия которого пересекаются попарно трансверсально.

4.1 Гомологическая оценка числа компонент связности

Пусть M^n — связное n -мерное гладкое компактное многообразие без края, $A_i \subset M^n$ — различные связные $(n-1)$ -мерные замкнутые подмногообразия в M^n , $1 \leq i \leq k$. Возьмем объединение

$$A = \bigcup_{i=1}^k A_i.$$

Обозначим число $|\pi_0(M^n \setminus A)|$ связных компонент дополнения в M^n к A через f . Возьмем регулярную открытую окрестность UA множества A в M^n . Пусть

$$M^n \setminus UA \cong \bigsqcup_{j=1}^f N_j,$$

где N_j — компоненты связности дополнения в многообразии M^n к окрестности UA . Если M^n и все подмногообразия A_i ориентируемы, то в качестве группы коэффициентов будем брать группу $G = \mathbb{Z}$. Если хотя бы одно из A_i или M^n неориентируемо, то $G = \mathbb{Z}_2$.

Лемма 4.1. Если замкнутые подмногообразия $A_i \subset M^n$, $i = 1, \dots, k$ размерности $n-1$ попарно пересекаются трансверсально, то

$$\dim(H_{n-1}(UA, G)) = \dim(H_{n-1}(A, G)) \geq k$$

Доказательство. Регулярная окрестность UA гомотопически эквивалентна A , поэтому все группы гомологий у множеств A и UA совпадают. Докажем индукцией по k , что

$$\dim H_{n-1}(\cup_{i=1}^k A_i, G) \geq k.$$

Для $k=1$ это очевидно, т.к. для связного замкнутого $(n-1)$ -мерного многообразия $H_{n-1}(A_1, G) \cong G$. Предположим, что утверждение верно для $k-1$ подмногообразий и докажем его для k подмногообразий. Пусть

$$A' = \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i.$$

Тогда по предположению индукции

$$\dim H_{n-1}(A', G) \geq k-1.$$

Запишем для пары A', A_k точную последовательность Майера – Вьеториса:

$$\longrightarrow H_{n-1}(A' \cap A_k) \longrightarrow H_{n-1}(A') \oplus H_{n-1}(A_k) \longrightarrow H_{n-1}(A' \cup A_k) \longrightarrow$$

Так как любые два подмногообразия A_i и A_j пересекаются трансверсально, то $A' \cap A_k$ суть конечное объединение не более чем $(n - 2)$ – мерных подмногообразий в M^n . Откуда $H_{n-1}(A' \cap A_k) = 0$ и отображение

$$H_{n-1}(A') \oplus H_{n-1}(A_k) \longrightarrow H_{n-1}(A' \cup A_k)$$

мономорфно. Следовательно,

$$\dim H_{n-1}(A' \cup A_k) \geq \dim H_{n-1}(A') + \dim H_{n-1}(A_k) \geq k.$$

□

Лемма 4.2.

$$H_n(M^n, UA, G) \cong G^f.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} H_n(M^n, UA, G) &= \tilde{H}_n(M^n/UA, G) = \\ &= \tilde{H}_n\left(\sqcup_{j=1}^f N_j / \sqcup_{j=1}^f \partial N_j, G\right) = \tilde{H}_n\left(\vee_{j=1}^f N_j / \partial N_j, G\right) = \\ &= \bigoplus_{j=1}^f \tilde{H}_n(N_j / \partial N_j, G) = G^f, \end{aligned}$$

где $n \geq 1$, \vee – букет пространств, \tilde{H}_n – группа приведенных гомологий, ∂N_j – граница N_j . □

Теорема 4.1. Пусть A_1, \dots, A_k – связные замкнутые подмногообразия коразмерности один в связном замкнутом многообразии M^n . Если подмногообразия A_i попарно пересекаются трансверсально и $A = \cup_i A_i$, то

$$|\pi_0(M^n \setminus A)| \geq k + 1 - \dim H_{n-1}(M^n, G).$$

Доказательство. Для включения $i : UA \rightarrow M^n$ запишем точную гомологическую последовательность пары с коэффициентами в G :

$$H_n(UA) \longrightarrow H_n(M^n) \longrightarrow H_n(M^n, UA) \longrightarrow H_{n-1}(UA) \longrightarrow H_{n-1}(M^n) \longrightarrow$$

Заметим, что

$$H_n(UA) = H_n(A) = 0, \quad H_n(M^n) = G.$$

Из точности последовательности в члене $H_n(M^n)$ следует, что отображение

$$H_n(M^n) \longrightarrow H_n(M^n, UA)$$

есть мономорфизм. По лемме 4.2

$$H_n(M^n, UA, G) \cong G^f$$

Нетрудно видеть, что

$$\dim H_{n-1}(UA) \leq \dim \operatorname{Im} \partial_* + \dim \operatorname{Im} i_*,$$

где гомоморфизмы

$$\partial_* : H_n(M^n, UA) \longrightarrow H_{n-1}(UA), \quad i_* : H_{n-1}(UA) \longrightarrow H_{n-1}(M^n).$$

Заметим, что

$$\dim \operatorname{Im} i_* \leq \dim H_{n-1}(M^n), \quad \dim \operatorname{Im} \partial_* \leq f - 1.$$

По лемме 4.1 $\dim H_{n-1}(UA) \geq k$, откуда $k \leq f - 1 + \dim H_{n-1}(M^n)$. \square

Замечание 4.1. Нетрудно видеть, что для двумерных многообразий — сфер с $g \geq 0$ ручками, бутылки Клейна и многомерных проективных пространств, сфер и торов (примеры для торов см. ниже) существуют наборы из

$$n \geq \dim H_{n-1}(M^n)$$

подмногообразий, такие что неравенство в теореме 4.1 обращается в равенство.

4.2 Применение функции Мебиуса для конфигураций гиперплоскостей

Пусть \mathcal{A} — конечный набор гиперплоскостей пространства V , где V — это евклидово пространство \mathbb{R}^d или проективное пространство $\mathbb{R}\mathbb{P}^d$. Множество пересечений $L(\mathcal{A})$ состоит из всевозможных непустых пересечений гиперплоскостей из \mathcal{A} , включая само пространство V . На множестве пересечений введем частичный порядок, обратный включению, т.е. $u \preceq v \Leftrightarrow u \supseteq v$. Определим функцию Мебиуса $\mu : L(\mathcal{A}) \times L(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{Z}$,

$$\mu(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \not\preceq v; \\ 1, & \text{если } u = v; \\ -\sum_{u \preceq w \prec v} \mu(u, w), & \text{если } u \prec v. \end{cases}$$

Заметим, что этим определением функция Мебиуса задается однозначно. Пусть P — одна из гиперплоскостей набора \mathcal{A} . Через \mathcal{A}' обозначим набор остальных гиперплоскостей из \mathcal{A} . Через \mathcal{A}'' обозначим набор пересечений плоскости P с плоскостями из \mathcal{A}' , т.е. \mathcal{A}'' есть набор $(d-2)$ -мерных плоскостей в $(d-1)$ -мерной плоскости P . *Тройкой наборов* назовем тройку $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$, где \mathcal{A}' и \mathcal{A}'' обозначены выше. Для множеств пересечений наборов $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ и \mathcal{A}'' построим соответствующие функции Мебиуса μ, μ' и μ'' . Элементы $L(\mathcal{A})$ будем называть ребрами. В дальнейшем для наборов в пространстве V и ребер v вместо $\mu(V, v)$ будем писать $\mu(v)$.

Лемма 4.3. Пусть $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ — тройка наборов. Если ребро v принадлежит $L(\mathcal{A}')$ и $L(\mathcal{A}'')$, то

$$\mu(v) = \mu'(v) - \mu''(v).$$

Если ребро v принадлежит $L(\mathcal{A}'')$ и не принадлежит $L(\mathcal{A}')$, то

$$\mu(v) = -\mu''(v).$$

Если ребро v принадлежит $L(\mathcal{A}')$ и не принадлежит $L(\mathcal{A}'')$, то

$$\mu(v) = \mu'(v).$$

Доказательство. Следует из определения функции Мебиуса индукцией по коразмерности ребра v , начиная с нуля. \square

Следствие 4.1. Для любых ребер u, v набора гиперплоскостей, таких что $u \preceq v$:

$$\text{sign}(\mu(u, v)) = (-1)^{\dim(u)+\dim(v)}$$

Доказательство. Индукция по размерности пространства u , индукция по коразмерности v как подпространства в u . \square

Через $f(\mathcal{A})$ обозначим число связных компонент дополнения к объединению гиперплоскостей из \mathcal{A} . Характеристическим многочленом набора \mathcal{A} называется многочлен

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{v \in L(\mathcal{A})} \mu(v) t^{\dim(v)}$$

Заметим, что для тройки наборов

$$f(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A}') + f(\mathcal{A}'')$$

и

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}'}(t) - \chi_{\mathcal{A}''}(t)$$

Отсюда следует

Теорема 4.2. Заславский, [37]. (а) Для набора \mathcal{A} гиперплоскостей в проективном пространстве \mathbb{RP}^d

$$f(\mathcal{A}) = (-1)^d \frac{\chi_{\mathcal{A}}(1) + \chi_{\mathcal{A}}(-1)}{2} = \sum_{\dim(v) \geq 2, v \in L(\mathcal{A})} |\mu(v)|$$

(б) Для набора \mathcal{A} гиперплоскостей в евклидовом пространстве \mathbb{R}^d

$$f(\mathcal{A}) = (-1)^d \chi_{\mathcal{A}}(-1) = \sum_{v \in L(\mathcal{A})} |\mu(v)|$$

(в) Если для набора \mathcal{A} гиперплоскостей в евклидовом пространстве \mathbb{R}^d не существует прямой, параллельной всем гиперплоскостям, то число ограниченных областей $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{A}$ равно

$$\tilde{f}(\mathcal{A}) = (-1)^d \chi_{\mathcal{A}}(1)$$

Объединение гиперплоскостей набора \mathcal{A} будем обозначать через \mathbf{A} . Пусть \mathcal{A} и \mathcal{B} — два набора различных гиперплоскостей в проективном или аффинном вещественных пространствах. Если ребро $v \in L(\mathcal{B})$ не принадлежит \mathbf{A} , то через \mathcal{A}_v обозначим набор пересечений ребра v с гиперплоскостями из \mathcal{A} , причем этот набор есть набор гиперплоскостей в v , рассматриваемом как самостоятельное пространство. Соответственно, построим характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}_v}(t)$. Функцию Мебиуса множества $L(\mathcal{B})$ обозначим через $\mu_{\mathcal{B}}$.

Лемма 4.4.

$$\chi_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}(t) = \sum_{v \in L(\mathcal{B}), v \notin \mathcal{A}} \mu_{\mathcal{B}}(v) \chi_{\mathcal{A}_v}(t).$$

Доказательство. Доказывается по индукции по числу плоскостей в \mathcal{B} , используется лемма 4.3. \square

Нижние оценки числа областей

Если пересечение всех гиперплоскостей набора \mathcal{A} непусто, то набор называется *тривиальным*. В дальнейшем будем рассматривать только нетривиальные наборы гиперплоскостей. Для наборов в евклидовом пространстве \mathbb{R}^d потребуем также, чтобы пересечение любых d гиперплоскостей было не пустым множеством. Гиперплоскости набора \mathcal{A} разбивают пространство V на многогранники (не обязательно ограниченные для евклидова пространства V). Через $f_k(\mathcal{A})$ обозначим число всех k -мерных граней многогранников для разбиения набором \mathcal{A} (грань, принадлежащая нескольким многогранникам, считается один раз).

Следствие 4.2. Для наборов гиперплоскостей \mathcal{A} и \mathcal{B} в d -мерном пространстве

$$f_d(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \sum_{v \in L(\mathcal{B}), v \notin \mathcal{A}} |\mu_{\mathcal{B}}(v)| f_{\dim(v)}(\mathcal{A}_v).$$

Обозначим через $m = m(\mathcal{A})$ максимальное число гиперплоскостей набора \mathcal{A} , имеющих непустое пересечение.

Лемма 4.5. Для нетривиального набора n гиперплоскостей в проективном пространстве $\mathbb{R}\mathbb{P}^d$

$$f \geq (n - m + 1)(m - d + 2)2^{d-2}.$$

Доказательство. Рассмотрим m гиперплоскостей A_1, \dots, A_m с непустым пересечением Q . Размерность Q равна нулю, а гиперплоскости A_1, \dots, A_m получаются взятием конуса с центром в Q над некоторым набором \mathcal{B} из m гиперплоскостей в $(d-1)$ -мерном подпространстве. Так как \mathcal{B} нетривиальный набор, то по известной оценке числа областей (см. [35])

$$f_{d-1}(\mathcal{B}) \geq (m - d + 2)2^{d-2}$$

На каждой из остальных гиперплоскостей набора плоскости A_1, \dots, A_m высекают конфигурацию, проективно эквивалентную \mathcal{B} . Поэтому при каждом добавлении к гиперплоскостям A_1, \dots, A_m остальных $n - m$ гиперплоскостей одна за одной число областей будет увеличиваться не менее чем на $(m - d + 2)2^{d-2}$. \square

Лемма 4.6. Пусть \mathcal{A} — набор гиперплоскостей в евклидовом или вещественном проективном d -мерных пространствах. Пусть ребро v принадлежит i гиперплоскостям. Тогда

$$|\mu(v)| \geq i - d + \dim(v) + 1.$$

Доказательство. Индукция по коразмерности $s = d - \dim(v)$. База: для коразмерностей 0, 1 и 2 неравенство обращается в равенство. Предположение: неравенство выполняется для всех ребер всех наборов с коразмерностью не более $s - 1$. Переход: выберем из набора $s = d - \dim(v)$ гиперплоскостей A_1, \dots, A_s , пересечение которых является ребром v . Остальные гиперплоскости набора обозначим через A_{s+1}, \dots, A_n . Рассмотрим последовательность наборов гиперплоскостей $\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_{n-s}$, где

$$\mathcal{A}_0 = \{A_1, \dots, A_s\},$$

и

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i-1} \cup A_{s+i}.$$

Так как \mathcal{A}_0 — набор с нормальными пересечениями, то $\mu_{\mathcal{A}_0}(v) = (-1)^s$. Если $v \not\subseteq A_{s+i}$, то по лемме 4.3

$$\mu_{\mathcal{A}_i}(v) = \mu_{\mathcal{A}_{i-1}}(v).$$

Если $v \subseteq A_{s+i}$, то по лемме 4.3

$$\mu_{\mathcal{A}_i}(v) = \mu_{\mathcal{A}_{i-1}}(v) - \mu_{A_{s+i} \cap \mathcal{A}_{i-1}}(v).$$

Заметим, что

$$\text{sign}(\mu_{\mathcal{A}_{i-1}}(v)) = (-1)^{d+\dim(v)}, \quad \text{sign}(\mu_{A_{s+i} \cap \mathcal{A}_{i-1}}(v)) = (-1)^{d-1+\dim(v)}.$$

Поэтому в случае $v \subseteq A_{s+i}$ имеем

$$|\mu_{\mathcal{A}_i}(v)| \geq |\mu_{\mathcal{A}_{i-1}}(v)| + 1.$$

□

Теорема 4.3. Пусть \mathcal{A} — набор из n гиперплоскостей в \mathbb{R}^d и задано число $1 \leq i \leq d$, причем пересечение любых i гиперплоскостей из \mathcal{A} непусто и не существует прямой, параллельной всем гиперплоскостям из \mathcal{A} . Тогда для функции Мебиуса множества пересечений набора \mathcal{A} имеем

$$\sum_{\dim(v)=d-i} |\mu(v)| \geq (m - d + 1) \frac{C_n^i}{C_{m-d+i}^i}.$$

То же неравенство верно для наборов \mathcal{A} в вещественных проективных пространствах \mathbb{RP}^d , причем требуется, чтобы не существовало j -мерной плоскости, принадлежащей всем гиперплоскостям при $j \geq d - i + 1$.

Доказательство. Обозначим через $a_j^{(d-i)}$ число $(d-i)$ -мерных плоскостей из множества пересечений $L(\mathcal{A})$, принадлежащих j гиперплоскостям, где $i \leq j \leq m - (d-i)$ ($(d-i)$ -мерная плоскость не может принадлежать более чем $m - (d-i)$ гиперплоскостям, т.к. найдутся еще не менее чем $d - i$ гиперплоскостей, с которыми у нее непустое пересечение).

Каждому поднабору из i гиперплоскостей A_{k_1}, \dots, A_{k_i} из \mathcal{A} поставим в соответствие все $(d-i)$ -мерные плоскости из $L(\mathcal{A})$, лежащие в непустом пересечении

$A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_i}$. При этом плоскость, принадлежащая j гиперплоскостям, будет учтена C_j^i раз. Поэтому

$$C_n^i \leq \sum_{j=i}^{m-(d-i)} a_j^{(d-i)} C_j^i \leq \sum_{j=i}^{m-(d-i)} a_j^{(d-i)} (j-i+1) \frac{C_{m-d+i}^i}{m-d+1}.$$

По лемме 4.6 имеем $|\mu(v)| \geq (j-i+1)$, поэтому

$$\sum_{j=i}^{m-(d-i)} a_j^{(d-i)} (j-i+1) \leq \sum_{\dim(v)=d-i} |\mu(v)|,$$

откуда получаем требуемое неравенство. \square

Замечание 4.2. Неравенство (4.3) обращается в равенство для $i = 1$ и для наборов общего положения для любого i .

Следствие 4.3. Пусть \mathcal{A} — набор гиперплоскостей в \mathbb{R}^d , удовлетворяющий условиям теоремы 4.3. Пусть \mathcal{A}_c — набор комплексифицированных плоскостей в \mathbb{C}^d . Тогда

$$\dim H^i(\mathbb{C}^d \setminus \mathcal{A}_c) \geq (m-d+1) \frac{C_n^i}{C_{m-d+i}^i}.$$

Следует из теоремы 4.3 и факта из [31]:

$$\dim H^i(\mathbb{C}^d \setminus \mathcal{A}_c) = \sum_{\dim(v)=d-i} |\mu(v)|$$

Теорема 4.4. Пусть \mathcal{A} — нетривиальный набор гиперплоскостей в проективном пространстве $\mathbb{R}\mathbb{P}^d$. Пусть m — максимальное число гиперплоскостей, имеющих общую точку. Тогда

$$f \geq (m-d+1) \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \frac{C_n^{d-2j}}{C_{m-2j}^{d-2j}}.$$

Доказательство. Следует из теорем 4.2 и 4.3. \square

4.3 Множества чисел областей в разбиениях проективных пространств

Рассмотрим конечный набор \mathcal{A} гиперплоскостей (проективных подпространств ко-размерности один) в вещественном проективном пространстве $\mathbb{R}\mathbb{P}^d$. Напомним, что тривиальным называется набор, все плоскости которого проходят через одну точку. Назовем *минимальным*⁹ нетривиальный набор n гиперплоскостей в $\mathbb{R}\mathbb{P}^d$, в котором $n-d+1$ гиперплоскостей имеют общую $d-2$ -мерную плоскость, а остальные $d-1$ гиперплоскостей находятся в общем положении. Шеннон [35] получил нижние точные оценки для числа k -мерных плоскостей $g_k(\mathcal{A})$ и для числа k -мерных клеток

⁹перевод термина *near pencil*

$f_k(\mathcal{A})$ в нетривиальных наборах \mathcal{A} , состоящих из n гиперплоскостей в \mathbb{RP}^d и нашел наборы, на которых они достигаются:

$$g_k(\mathcal{A}) \geq C_{d+1}^{k+1} + (n-d-1)C_{d-1}^k, \quad 0 \leq k \leq d-1 \quad (4.1)$$

$$f_k(\mathcal{A}) \geq n2^k C_d^k + 2^{k-1} C_{d-1}^{k-1} (d+1-n) - k2^k C_{d+1}^{k+1}, \quad 0 \leq k \leq d \quad (4.2)$$

Частный случай (4.2) для $d = k$ был доказан МакМюлленом:

$$f_d(\mathcal{A}) \geq 2^{d-1}(n-d+1) \quad (4.3)$$

Неравенства (4.1) для $0 \leq k < d$ и (4.2) для $d \geq 2$ и $0 < k \leq d$ обращаются в равенства для минимальных наборов. При $k = 0$ неравенство (4.2) обращается в равенство не только для минимальных наборов [10], [35], но и, например, для набора, в котором a и $n-a$ плоскостей проходят соответственно через две непересекающиеся прямые в \mathbb{RP}^3 при любом $2 \leq a \leq n-2$.

Обозначим через $F_n^{(d)}$ множество всех возможных чисел $f_d(\mathcal{A})$ для нетривиальных наборов \mathcal{A} из n различных гиперплоскостей в вещественном проективном d -мерном пространстве.

Максимальный элемент множеств $F_n^{(d)}$ равны (см. [34])

$$1 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{\max\{n-1, d\}}.$$

Теорема 4.5. Пусть $d \geq 3$ и $n \geq 2d + 5$. Тогда первые четыре по возрастанию элемента множества $F_n^{(d)}$ следующие:

$$(n-d+1)2^{d-1}, \quad 3(n-d)2^{d-2}, \quad (3n-3d+1)2^{d-2}, \quad 7(n-d)2^{d-3}.$$

Доказательство. Докажем, что $f \leq 7(n-d)2^{d-3}$ при $m \leq d+1$. Если $m = d$, то гиперплоскости набора находятся в общем положении и число областей максимальное возможное. Если $m = d+1$, то по теореме 4.4 имеем

$$f \geq \frac{C_n^{d+1}}{n-d} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3(d+1)d(d-1)} \dots \frac{(n-d+2)}{4}(n-d+1) \geq 7 \cdot 2^{d-3}(n-d)$$

т.к. $n \geq 2d + 5$.

Теперь докажем теорему для $d = 3$, $n \geq 11$. Возьмем нетривиальный набор \mathcal{A} в пространстве \mathbb{RP}^3 , m — максимальное число гиперплоскостей с непустым пересечением. Рассмотрим три случая.

1. $m = n-1$. Тогда $f(\mathcal{A}) = 2\varphi$, где $\varphi \in F_{n-1}^2$. Множество F_{n-1}^2 известно по теореме Мартинова 2.5:

$$\{f \in F_{n-1}^2 \mid f \leq 4n-16\} = \{2n-4, 3n-9, 3n-8, 4n-16\}.$$

2. $m = n-2$. Аналогично случаю 2 из перехода индукции.

3. $5 \leq m \leq n-3$. По лемме 4.5 имеем

$$f \geq 2(n-m+1)(m-1) \geq 8n-32 \geq 7n-21$$

при $n \geq 11$.

Для произвольного $d \geq 3$ используем индукцию по числу d . База $d = 3$ уже проверена. Предположение индукции — первые 4 числа множества $F_n^{(\tilde{d})}$ имеют указанный вид для любого $3 \leq \tilde{d} < d$ и $n \geq 2\tilde{d} + 5$. Переход: возьмем нетривиальный набор \mathcal{A} в пространстве \mathbb{RP}^d , m — максимальное число гиперплоскостей с непустым пересечением. Рассмотрим три случая.

1. $m = n - 1$. Тогда $f(\mathcal{A}) = 2\varphi$, где $\varphi \in F_{n-1}^{(d-1)}$. Применяя предположение индукции к множеству $F_{n-1}^{(d-1)}$, получим, что либо φ совпадает с одним из 4 чисел

$$(n - d + 1)2^{d-2}, \quad 3(n - d)2^{d-3}, \quad (3n - 3d + 1)2^{d-3}, \quad 7(n - d)2^{d-4},$$

либо $\varphi > 7(n - d)2^{d-4}$.

2. $m = n - 2$. Рассмотрим $n - 2$ гиперплоскости p_1, \dots, p_{n-2} , имеющих общую точку. Они делят \mathbb{RP}^d на φ областей, где $\varphi \in F_{n-2}^{d-1}$. Обозначим через l пересечение двух оставшихся гиперплоскостей. По предположению индукции

$$\varphi = (n - d)2^{d-2} \quad \text{или} \quad \varphi \geq 3(n - d - 1)2^{d-3}$$

(предположение индукции можно использовать т.к. $n - 2 \geq 2(d - 1) + 5$). Если

$$l \in \bigcup_{i=1}^{n-2} p_i$$

тогда $f = 3\varphi$ и случай разобран. Если

$$l \notin \bigcup_{i=1}^{n-2} p_i,$$

тогда обозначим через B множество плоскостей $p_i \cap l$ в l , где l рассматривается как объемлющее $(d - 2)$ -мерное проективное пространство. Можно доказать, что B — это конфигурация как минимум $n - 3$ плоскостей в l (и пересечение всех ее плоскостей есть пустое множество). Тогда $f(B) \geq (n - d)2^{d-3}$ по теореме Шеннона [35]. Поскольку

$$f = 3\varphi + f(B) \geq 7(n - d)2d - 3,$$

то этот случай разобран.

3. $d + 2 \leq m \leq n - 3$. По лемме 4.5 имеем

$$f \geq (n - m + 1)(m - d + 2)2^{d-2} \geq (4n - 4d - 4)2^{d-2} \geq 7(n - d)2^{d-3}$$

при $n \geq d + 8$. □

Лемма 4.7. Для нетривиальных наборов \mathcal{A} из n гиперплоскостей в проективной пространстве \mathbb{RP}^d

$$f \geq 2 \frac{n^2 - n}{m - d + 5}.$$

Доказательство. Проведем произвольную двумерную плоскость P общего положения по отношению к набору \mathcal{A} . Тогда гиперплоскости из \mathcal{A} образуют на P набор \mathcal{A}_P из n прямых, причем в каждой точке пересекается не более $m - d + 2$ прямые. Из первого неравенства теоремы 2.3 следует

$$f_d(\mathcal{A}) \geq f_2(\mathcal{A}_P) \geq 2 \frac{n^2 - n}{m - d + 5}.$$

□

Лемма 4.8. Пусть k_1, \dots, k_s натуральные числа, $k = \sum_{i \geq 1} k_i$. Пусть $d \geq s + 2$ и $n \geq k + d - s + 1$. Тогда

$$F_n^{(d)} \supseteq \left\{ \varphi \cdot \prod_{i=1}^s (k_i + 1) \mid \varphi \in F_{n-k}^{(d-s)} \right\}. \quad (4.4)$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in F_{n-k}^{(d-s)}$. Возьмем набор \mathcal{A}_0 из $n - k$ гиперплоскостей в проективном пространстве \mathbb{RP}^{d-s} , такой что $f_{d-s}(\mathcal{A}_0) = \varphi$. Построим набор \mathcal{A}_1 из $n - k + k_1$ гиперплоскостей в проективном пространстве \mathbb{RP}^{d-s+1} , такой что $f_{d-s+1}(\mathcal{A}_1) = \varphi(k_1 + 1)$. Для этого возьмем конус над набором \mathcal{A}_0 с центром в точке O и добавим k_1 гиперплоскостей, проходящих через $(d - s - 1)$ -мерную плоскость U , лежащую на какой-нибудь плоскости из \mathcal{A}_0 и не содержащую точку O . Построенный набор будет нетривиальным. Аналогично построим наборы $\mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_s$. В итоге

$$f(\mathcal{A}_s) = \varphi \cdot \prod_{i=1}^s (k_i + 1) \in F_n^{(d)}.$$

□

Следствие 4.4. Множество $F_n^{(d)}$ содержит числа

$$(2n - 2d + 2)2^{d-2}, (3n - 3d)2^{d-2}, (3n - 3d + 1)2^{d-2}, (4n - 4d - 4)2^{d-2}, \\ (4n - 4d - 3)2^{d-2}, (4n - 4d - 2)2^{d-2}, (4n - 4d - 1)2^{d-2}, (5n - 5d - 10)2^{d-2}.$$

Напомним, что проективные подпространства размерностей i и j пространства \mathbb{RP}^n находятся в *общем положении*, если их пересечение есть $i + j - n$ -мерное проективное подпространство при $i + j \geq n$ и пустое множество при $i + j < n$. Скажем, что проективное подпространство находится в *общем положении* относительно конфигурации гиперплоскостей, если оно находится в общем положении с гиперплоскостями и всеми пересечениями любого количества гиперплоскостей.

Лемма 4.9. ([37]) Пусть A_n^3 — набор из n плоскостей в \mathbb{RP}^3 , набор A_{n-1}^3 получен из A_n^3 удалением плоскости U . Пересечения плоскостей из A_{n-1}^3 с плоскостью U образуют набор A^2 прямых на U . Тогда

$$f(A_n^3) = f(A_{n-1}^3) + f(A^2).$$

Для набора A_n^m гиперплоскостей в $\mathbb{R}P^m$ обозначим через t_i^j число j -мерных клеток, принадлежащих i гиперплоскостям для $0 \leq j \leq m-1$. Тогда число областей $f(A_n^m)$ можно выразить через t_i^j аналогично формулам Заславского [37].

Предложение 4.1. *Если пересечение всех n гиперплоскостей набора A_n^m есть точка или пустое множество, то*

$$f(A_n^m) = 1 + \sum_{i=1}^n (i-1) (t_i^0 - t_i^1 + t_i^2 - \dots + t_i^{m-2}) \quad \text{для четного } m, \quad (4.5)$$

$$f(A_n^m) = n + \sum_{i=1}^n (i-1) (-t_i^0 + t_i^1 - t_i^2 + \dots + t_i^{m-2}) \quad \text{для нечетного } m. \quad (4.6)$$

Доказательство. Занумеруем гиперплоскости и обозначим через q_i^j число j -мерных клеток, принадлежащих i -й гиперплоскости. Для четных m посчитаем эйлерову характеристику i -й гиперплоскости

$$q_i^0 - q_i^1 + \dots - q_i^{m-1} = 0$$

Заметим, что $\sum_i q_i^j = \sum_i i t_i^j$ для $j = 0, \dots, m-1$. Следовательно,

$$\sum_i t_i^{m-1} = t_1^{m-1} = \sum_i q_i^{m-1} = \sum_i (q_i^{m-2} - \dots + q_i^0) = \sum_i i (t_i^{m-2} - \dots + t_i^0).$$

Теперь используем эйлерову характеристику $\mathbb{R}P^m$:

$$f = 1 - \sum_i (t_i^0 - t_i^1 + \dots - t_i^{m-1}) = 1 + \sum_{i=1}^n (i-1) (t_i^0 - t_i^1 + t_i^2 - \dots + t_i^{m-2}).$$

Для нечетных m доказательство аналогично. \square

Предложение 4.2. *(аналог неравенства Мельхиора [27]). Пусть максимальное число плоскостей набора, имеющих общую точку, равно m . Если $m < n$, то*

$$\sum_{i \geq 3} (i-2)t_i^0 \geq n + \sum_{i \geq 2} (i-2)t_i^1.$$

Доказательство. Обозначим через q_i^2 число областей i -й плоскости, разделенной пересечениями с остальными плоскостями. Если $m < n$, то все трехмерные области $\mathbb{R}P^3$ ограничены не менее чем четырьмя гранями, поэтому $\sum_{j=1}^n q_i^2 \geq 2f(A_n^3)$. Используя лемму 4.1, получаем

$$n + \sum_i i t_i^1 - \sum_i i t_i^0 \geq 2 \left(n + \sum_i (i-1)t_i^1 - \sum_i (i-1)t_i^0 \right).$$

\square

Теорема 4.6. Первые 36 по возрастанию числа множества $F_n^{(3)}$ для $n \geq 50$ следующие (т.е. все реализуемые числа областей вплоть до $12n - 60$)

$$4n - 8, 6n - 18, 6n - 16, 7n - 21, 7n - 20, 8n - 32, 8n - 30, 8n - 28, \\ 8n - 26, 9n - 36, 9n - 33, 9n - 31, 9n - 30, 10n - 50, 10n - 48, 10n - 46, \\ 10n - 44, 10n - 42, 10n - 40, 10n - 39, 10n - 38, 10n - 37, 10n - 36, 10n - 35, \\ 11n - 44, 11n - 43, 11n - 42, 11n - 41, 11n - 40, 12n - 72, 12n - 70, 12n - 68, \\ 12n - 66, 12n - 64, 12n - 62, 12n - 60.$$

Доказательство. Докажем, что другие числа, меньшие $12n - 60$, не принадлежат множеству $F_n^{(3)}$. Рассмотрим набор \mathcal{A} из n гиперплоскостей, $f = f(\mathcal{A})$. Пусть m — максимальное число плоскостей, имеющих непустое пересечение. Рассмотрим три случая.

1. $m \geq n - 5$. Перебором убеждаемся, что число f или принадлежит указанному множеству, или больше чем $12n - 60$. Все указанные числа областей реализуются наборами плоскостей с $m \geq n - 5$.

2. $8 \leq m \leq n - 6$. Тогда по лемме 4.5 имеем $f \geq 7n - 49$.

3. $m \leq 7$. По лемме 4.7

$$f \geq 2 \frac{n^2 - n}{9} \geq 12n - 60$$

при $n \geq 50$. □

Замечание 4.3. Как видно из теоремы 4.6, множество чисел областей достаточно сложно устроено уже для разбиений плоскостями трехмерного проективного пространства. Поэтому неудивительно отсутствие точного (формульного) описания множеств $F(\mathbb{R}P^d, n)$ для $d > 2$. Возможно, целесообразно ставить вопрос о плотности распределения реализуемых чисел на определенных, достаточно больших отрезках.

Разбиения трехмерных проективных пространств всевозможными наборами плоскостей.

Здесь мы откажемся от требования нетривиальности наборов из n плоскостей в вещественном d — мерном проективном пространстве и узнаем, что тогда можно будет сказать о множествах чисел областей, которые будем обозначать через F_n^d . Максимальное число множества F_n^d обозначим через $f_{\max}(d, n)$. Нас будут интересовать преимущественно множества F_n^3 , т.к. множества F_n^2 известны, а множества F_n^d при $d > 3$, вероятно, более сложны, чем F_n^3 .

Пример 4.1. Множества F_n^2 и F_n^3 для $n \leq 7$.

n	F_n^2	F_n^3
3	3, 4	3, 4
4	4, 6, 7	4, 6, 7, 8
5	5, 8 — 11	5, 8 — 12, 14, 15
6	6, 10, 12 — 16	6, 10, 12 — 16, 18, 20 — 26
7	7, 12, 15 — 22	7, 12, 15 — 22, 24, 26 — 42

Обозначим через L_n^m множество целых чисел между n и $f_{\max}(m, n)$, не реализуемых при данных m и n в качестве чисел областей, т.е.

$$L_n^m = \{f \in \mathbb{N} \mid n \leq f \leq f_{\max}(m, n)\} \setminus F_n^m.$$

Подмножества множества L_n^m , состоящие из подряд идущих целых чисел будем называть *лакунами* (вслед за [2]) и нумеровать по порядку возрастания содержащихся чисел. Обозначим через d_n при $n \geq 3$ число

$$d_n = \left\lceil \sqrt{2n - \frac{23}{4} - \frac{1}{2}} \right\rceil.$$

Для двумерного случая множества F_n^2 были найдены в [26] и оказалось, что число лакун в множестве L_n^2 равно d_n и что

$$L_n^2 = \bigcup_{i=1}^{d_n} \{g \in \mathbb{N} \mid i(n - i + 1) + C_{i-1}^2 < g < (i + 1)(n - i)\}.$$

Заметим, что при $n = 6$ и $n = 7$ (см. пример 4.1) множество L_n^3 содержит больше чисел, чем множество L_n^2 . Однако при достаточно больших n оказывается, что множество L_n^3 содержится в множестве L_n^2 .

Теорема 4.7. $L_n^3 \subset L_n^2$ при $n \geq 71$.

Естественно попробовать найти несколько первых чисел множества F_n^3 .

Теорема 4.8. При $n \geq 16$ верно

$$\{f \in F_n^3 \mid f \leq 6n - 16\} = \{f \in F_n^2 \mid f \leq 6n - 16\} \cup \{4n - 8, 6n - 18, 6n - 16\}.$$

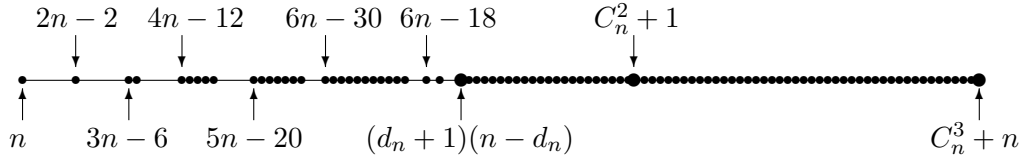


Рис. 10: Множество F_n^3 для больших n

Для доказательств теорем 4.7 и 4.8 нам понадобятся вспомогательные леммы. Обозначим через q_n и Δ_n соответственно числа $(d_n + 1)(n - d_n)$ и $1 + C_n^2 - q_n$.

Лемма 4.10. При $n \geq 71$ верно

$$3q_{n-2} + n - 4 \leq \frac{n^2 - n}{2} + 2.$$

Доказательство. Преобразуем неравенство, произведя замену $n = m + 2$ и $q_m = (d_m + 1)(m - d_m)$ к виду

$$(m - (3d_m + 2.5))^2 \geq \frac{1}{4} (32d_m^2 + 56d_m - 15) \quad (4.7)$$

Так как $m \geq \frac{d_m^2 + d_m}{2} + 3$ (по определению числа d_m , см. раздел 2.3) и $m \geq 69, d_m \geq 11$, то неравенство (4.7) достаточно доказать для $m = \frac{d_m^2 + d_m}{2} + 3$. В этом случае оно имеет вид

$$(d_m^2 - 5d_m + 1)^2 \geq 32d_m^2 + 56d_m - 15$$

и выполняется, поскольку число $(6d_m + 1)^2$ отделяет левую часть неравенства от правой при $d_m \geq 11$. \square

Напомним, что

$$f_{\max}(2, n) = 1 + C_n^2 \quad \text{и} \quad f_{\max}(3, n) = n + C_n^3.$$

Зафиксируем число n конфигурации гиперплоскостей в \mathbb{RP}^3 . Обозначим через $f_{\max}(i)$ и $f_{\min}(i)$ числа

$$f_{\max}(i) = n + C_n^3 - C_{n-i-1}^3, \quad f_{\min}(i) = f_{\max}(i) - (i+1)\Delta_{n-i} - i \quad (4.8)$$

для $2 \leq i \leq n-3$. Заметим, что $f_{\max}(i)$ — это максимальное число областей, образованных конфигурациями n плоскостей в \mathbb{RP}^3 , в которых существует точка, общая для i плоскостей.

Лемма 4.11. $f_{\max}(i-1) \geq f_{\min}(i)$ при $3 \leq i \leq n-4$ и $n \geq 7$.

Доказательство. Пользуясь определениями чисел $f_{\max}(i-1)$ и $f_{\min}(i)$, перепишем исходное неравенство в виде

$$(i+1)\Delta_{n-i} + i \geq C_{n-i-1}^2.$$

Для $i = n-4$ и $i = n-5$ ($\Delta_4 = 1, \Delta_5 = 3$) оно верно. Считаем далее, что $i \leq n-6$, сделаем замену $n-i = m$. Теперь достаточно доказать неравенство для $i = 3$:

$$4\Delta_m + 3 \geq C_{m-1}^2 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 + m(d_m^2 - 7d_m - 3) + 8(d_m^2 + d_m) + 12 \geq 0.$$

Последнее неравенство заведомо выполняется при $m \geq 6$ и $d_m \geq 2$. \square

Лемма 4.12. Если $d_m \geq 2$, то любое целое число между q_m и $1 + C_m^2$ есть число областей конфигурации A^2 прямых на проективной плоскости со следующим условием. Либо найдется точка Q_3 , принадлежащая ровно трем прямым из A^2 , либо найдутся две различные точки Q_2 и Q'_2 , каждая из которых принадлежит ровно двум прямым из A^2 и такими, что прямая $Q_2Q'_2$ не проходит через другие точки пересечения прямых из A^2 и не принадлежит A^2 .

Доказательство. В [26] любое целое число между q_m и $1 + C_m^2$ реализовалось следующим образом. Через одну точку проведено $n - k$ прямых u_1, \dots, u_{n-k} . Остальные k прямых находятся в общем положении друг относительно друга, причем l их точек пересечения лежат на прямых u_1, \dots, u_{n-k} . При этом из $d_m \geq 2$ следует, что $2 \leq k \leq n - 2$. Если $l \geq 1$, то лемма доказана, т.к. найдена точка Q_3 . Если $l = 0$, то k прямых u_{n-k+1}, \dots, u_n общего положения можно провести так, что две точки пересечения $Q_2 = u_1 \cap u_{n-k+1}$, $Q'_2 = u_2 \cap u_{n-k+2}$ будут удовлетворять условию леммы. \square

Напомним, что проективные подпространства размерностей i и j пространства \mathbb{RP}^n находятся в *общем положении*, если их пересечение есть $i + j - n$ -мерное проективное подпространство при $i + j \geq n$ и пустое множество при $i + j < n$. Скажем, что проективное подпространство находится в общем положении относительно конфигурации гиперплоскостей, если оно находится в общем положении с гиперплоскостями и всеми пересечениями любого количества гиперплоскостей.

Лемма 4.13. ([37]) Пусть A_n^3 — набор из n плоскостей в \mathbb{RP}^3 , набор A_{n-1}^3 получен из A_n^3 удалением плоскости U . Пересечения плоскостей из A_{n-1}^3 с плоскостью U образуют набор A^2 прямых на U . Тогда

$$f(A_n^3) = f(A_{n-1}^3) + f(A^2).$$

Лемма 4.14. Пусть t плоскостей конфигурации A_n^3 проходит через одну точку и образуют (без остальных плоскостей из A_n^3) f_m областей. Тогда

$$f_m(1 + n - t) \leq f(A_n^3) \leq f_m(1 + n - t) + C_{n-m}^2 \left(\frac{n + 2m - 2}{3} \right).$$

Доказательство. Индукция по $n - t$, используя лемму 4.13. Правое неравенство обращается в равенство, если остальные $n - t$ плоскостей находятся в общем положении с t плоскостями. \square

Лемма 4.15. Пусть $2 \leq i \leq n - 4$ и $n \geq 9$. Тогда множество F_n^3 содержит все целые числа отрезка $[f_{\min}(i), f_{\max}(i)]$.

Доказательство. Любое целое число f , $f \in [f_{\min}(i), f_{\max}(i)]$ можно представить в виде

$$f = (i + 1)f_{n-i} + C_i^2 \left(n - \frac{2}{3}(i + 1) \right) - r, \quad (4.9)$$

где $0 \leq r \leq i$ и $q_{n-i} \leq f_{n-i} \leq 1 + C_{n-i}^2$. Построим пример набора гиперплоскостей, делящего \mathbb{RP}^3 на f областей, где f вида (4.9). Возьмем набор A^2 , состоящий из $n - i$ прямых на проективной плоскости, удовлетворяющий условию леммы 4.12, делящий плоскость на $f(A^2) = f_{n-i}$ областей (это понадобится в дальнейшем только в случаях (в) и (г)). Вложим $\mathbb{RP}^2 \subset \mathbb{RP}^3$, выберем точку $O \notin \mathbb{RP}^2$ и проведем плоскости U_1, \dots, U_{n-i} через точку O и прямые из A^2 . Получим набор A_{n-i}^3 , состоящий из $n - i$ плоскостей в \mathbb{RP}^3 . Заметим, что любая плоскость U , не проходящая через точку O , в пересечении с A_{n-i}^3 образует конфигурацию прямых на U , проективно эквивалентную A^2 . Проведем плоскости U_{n-i+1}, \dots, U_n в общем положении по отношению друг

к другу и к набору A_{n-i}^3 . Обозначим через A_{n-i+j}^2 конфигурацию прямых $U_k \cap U_{n-i+j}$, где $1 \leq k < n - i + j$ на проективной плоскости U_{n-i+j} для $1 \leq j \leq i$. Через A_{n-i+j}^3 обозначим набор плоскостей U_1, \dots, U_{n-i+j} в \mathbb{RP}^3 . Тогда

$$f(A_{n-i+j}^3) = f(A_{n-i+j-1}^3) + f(A_{n-i+j}^2) \quad \text{при} \quad 1 \leq j \leq i; \quad f(A_{n-i}^3) = f_{n-i}.$$

Заметим, что

$$f(A_{n-i+j}^2) = f_{n-i} + (n-i) + \dots + (n-i+j-2) = f_{n-i} + C_{n-i+j-1}^2 - C_{n-i}^2.$$

Следовательно,

$$f(A_n^3) = f_{n-i} + \sum_{j=1}^i f(A_{n-i+j}^2) = (i+1)f_{n-i} + C_i^2 \left(n - \frac{2}{3}(i+1) \right).$$

Таким образом, получен набор A_n^3 плоскостей с числом областей $f(A_n^3)$ вида (4.9) при $r = 0$.

Для $r > 0$ нарушим общность положения плоскостей U_{n-i+1}, \dots, U_n (сжимая области в точки). При этом плоскости U_{n-i+1}, \dots, U_n будут "почти" общего положения, такие что

$$f(A_{n-i+j}^2) = f_{n-i} + C_{n-i+j-1}^2 - C_{n-i}^2 - a_j,$$

где a_j — неотрицательные целые числа и $\sum_{j=1}^i a_j = r$. Если удастся провести плоскости U_{n-i+1}, \dots, U_n таким образом, то получится набор из n плоскостей с требуемым в (4.9) числом областей для любого $0 \leq r \leq i$. Рассмотрим четыре случая.

Случай (а): $0 < r \leq i - 1$. Проведем плоскость U_{n-i+1} произвольным образом, но не через точку O . Тогда

$$f(A_{n-i+1}^2) = f_{n-i} > n - i.$$

Следовательно по теореме Сильвестра-Галлаи найдется точка P_1 , принадлежащая ровно двум прямым из конфигурации A_{n-i+1}^2 . Проведем плоскость U_{n-i+2} через точку P_1 так, чтобы прямая $U_{n-i+1} \cap U_{n-i+2}$ не проходила бы через другие точки пересечения конфигурации A_{n-i+1}^2 . Тогда $a_1 = 1$, т.е. за счет точки P_1 пропала одна область. Прделаем то же самое с плоскостями $U_{n-i+3}, \dots, U_{n-i+r+1}$. А именно, выберем точку P_j , принадлежащую ровно двум прямым из A_{n-i+j}^2 и проведем плоскость $U_{n-i+j+1}$ через точку P_j так, чтобы плоскость $U_{n-i+j+1}$ не проходила бы через другие точки пересечения прямых конфигураций $A_{n-i+1}^2, \dots, A_{n-i+j}^2$. Индекс j принимает значения от 1 до r . Точки P_j существуют по теореме Сильвестра-Галлаи. Множество точек пересечения прямых конфигураций $A_{n-i+1}^2, \dots, A_{n-i+j}^2$ конечно, следовательно провести плоскость $U_{n-i+j+1}$ можно. Остальные плоскости $U_{n-i+r+2}, \dots, U_n$ проведем в общем положении. Нетрудно видеть, что

$$a_2 = a_3 = \dots = a_{r+1} = 1, \quad a_1 = a_{r+2} = \dots = a_i = 0.$$

Случай (б): $r = i \geq 4$. Проведем плоскости U_{n-i+1} и U_{n-i+2} так же, как в случае (а). Плоскость U_{n-i+3} проведем через точку P_1 так, чтобы плоскость U_{n-i+3} не содержала бы других точек пересечения прямых конфигураций A_{n-i+1}^2 и A_{n-i+2}^2 . Проведем плоскости $U_{n-i+4}, \dots, U_{n-i+r-1}$ аналогично случаю (а). Остальные плоскости U_{n-i+r}, \dots, U_n будут в общем положении. Тогда получим

$$a_3 = 3, \quad a_2 = a_4 = \dots = a_{r-1} = 1, \quad a_1 = a_r = \dots = a_i = 0.$$

Случай (в): $r = i = 2$. Проведем плоскость U_{n-1} произвольным образом не через точку O и получим конфигурацию прямых A_{n-1}^2 , удовлетворяющую условию леммы 4.12. Следовательно, существует либо точка Q_3 , либо точки Q_2 и Q'_2 . Тогда проведем плоскость U_n через точку Q_3 или через прямую $Q_2Q'_2$ соответственно так, чтобы плоскость U_n не проходила бы через другие точки пересечения прямых из A_{n-1}^2 . Получим $a_1 = 0$, $a_2 = 2$.

Случай (г): $r = i = 3$. Проведем плоскости U_{n-2} и U_{n-1} так же, как были проведены плоскости U_{n-1} и U_n в случае (в). Плоскость U_n проведем аналогично плоскостям $U_{n-i+j+1}$ для $1 < j \leq r$ из случая (а). Тогда $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$.

Итак, разобраны все случаи и построены примеры наборов плоскостей с числом областей типа (4.9). Такие наборы, вообще говоря, не единственны. \square

Лемма 4.16. *Если все проективные плоскости набора A_n^3 проходят через одну общую точку P , то $f(A_n^3) \in F_n^2$. Если все кроме одной проективные плоскости набора A_n^3 проходят через одну общую точку P и образуют f_{n-1} областей, то $f(A_n^3) = 2f_{n-1}$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Рассмотрим проективную плоскость U , не содержащую точку P . Пусть плоскости набора A_n^3 пересекаются с плоскостью U по прямым u_1, \dots, u_n и $A_n^2 = \{u_1, \dots, u_n\}$. Каждой точке X , не лежащей на плоскостях $\bigcup_i U_i$ проективного пространства поставим в соответствие точку $Y = PX \cap U$ пересечения прямой PX с плоскостью U . При этом соответствии трехмерным областям, образованным плоскостями U_1, \dots, U_n будут взаимно однозначно соответствовать двумерные области, образованные прямыми u_1, \dots, u_n на плоскости U . Поэтому $f(A_n^3) = f(A_n^2)$, т.е. $f(A_n^3) \in F_n^2$. Второе утверждение следует из леммы 4.14. \square

Лемма 4.17. *Если не существует точки, принадлежащей не менее чем $m + 1$ проективной плоскости из набора A_n^3 , состоящего из n плоскостей и $m < n$, то*

$$f(A_n^3) \geq 2 \frac{n^2 - n + 2(m - 1)}{m + 2}.$$

Доказательство. Любая прямая принадлежит не более чем $m - 1$ проективной плоскости из A_n^3 . Рассмотрим плоскость U общего положения относительно A_n^3 . Пересечения плоскостей из A_n^3 с плоскостью U объединим в набор A_n^2 , состоящий из n прямых и разбивающий плоскость U на $f(A_n^2)$ областей. Каждой двумерной области $h \subset U$ соответствует трехмерная область в $H \subset \mathbb{RP}^3$, образованная A_n^3 , такая что $h = H \cap U$. Поэтому $f(A_n^2) \leq f(A_n^3)$. Для набора A_n^2 на плоскости U не существует точки, принадлежащей хотя бы m прямым из A_n^2 . Осталось применить неравенство пункта (а) теоремы 2.3:

Если не существует точки, принадлежащей не менее чем m проективным прямым из набора A_n^2 прямых на проективной плоскости и $m \leq n$, то

$$f(A_n^2) \geq 2 \left(\frac{n^2 - n + 2(m - 1)}{m + 2} \right).$$

\square

Доказательство теоремы 4.7. Согласно лемме 4.15 множество F_n^3 содержит все целые числа между $f_{\min}(i)$ и $f_{\max}(i)$ для всех $2 \leq i \leq n - 4$. Из леммы 4.11 вытекает,

что отрезки $[f_{\min}(i), f_{\max}(i)]$ покрывают все целые числа от $f_{\min}(2)$ до $f_{\max}(n-4)$. Поскольку

$$f_{\max}(n-4) = n + C_n^3 - 1, \quad \text{а} \quad f_{\min}(2) = 3q_{n-2} + n - 4 \leq C_n^2 + 2$$

при $n \geq 71$ по лемме 4.10, то множество F_n^3 содержит (при $n \geq 71$) все целые числа между $1 + C_n^2$ и $n + C_n^3$ (включительно). Поэтому любое нереализуемое в качестве числа областей на \mathbb{RP}^3 число $g \in L_n^3$ меньше $1 + C_n^2$ и, поскольку $F_n^2 \subset F_n^3$, также не реализуется на \mathbb{RP}^2 . Следовательно, $L_n^3 \subset L_n^2$. Осталось заметить, что $L_n^3 \neq L_n^2$ при $n \geq 13$, т.к. $4n - 8 \notin L_n^3$ и $4n - 8 \in L_n^2$. \square

Доказательство теоремы 4.8. Обозначим через f число областей $f(A_n^3)$. Обозначим через m максимальное число плоскостей набора A_n^3 , проходящих через одну точку. Обозначим через $f_m \in F_m^2$ число областей, образованных проходящими через одну точку m плоскостями из A_n^3 . Если $m = n$, то по лемме 4.16 имеем $f \in F_n^2$. Если $m < n$, то $f_m \geq 2m - 2$, т.к. иначе m плоскостей имели бы общую прямую, а значит нашлись бы $m + 1$ плоскость, имеющие общую точку. Если $m = 3$, то плоскости находятся в общем положении и $f = n + C_3^2 > 6n - 16$ при $n \geq 7$. Рассмотрим остальные случаи.

Случай 1, $m = n - 1$. Тогда по лемме 4.16 получаем $f = 2f_{n-1}, f_{n-1} \in F_{n-1}^2$.

Случай 2, $m = n - 2$. Тогда по лемме 4.14 имеем $f \geq 3f_{n-2}$. Если $f_{n-2} \geq 2n - 5$, то $f \geq 6n - 15$. Если $f_{n-2} = 2n - 6$, то из m плоскостей, имеющих общую точку P , $m - 1$ плоскость имеют общую прямую l . Обозначим через U_1, U_2, U_3 плоскости набора, не проходящие через прямую l , причем плоскость U_3 содержит точку P . Обозначим через l_1 прямую $U_1 \cap U_2$. Если $l_1 \subset U_3$, то $f = 6n - 18$. Иначе l_1 не пересекается с l . Следовательно, l_1 пересекает m плоскостей не менее чем в $n - 3$ точках и по лемме 4.13 имеем $f \geq 7n - 21$.

Случай 3, $5 \leq m \leq n - 4$. По лемме 4.14 имеем

$$f \geq f_m(n - m + 1) \geq 2(m - 1)(n - m + 1) \geq 6n - 16.$$

Случай 4, $m = 4$. По лемме 4.17 при $n \geq 16$ имеем

$$f \geq \frac{n^2 - n + 6}{3} \geq 6n - 16.$$

\square

Пример 4.2. Пусть проективные плоскости набора A_{n-k}^3 проходят через одну общую точку и пусть есть еще набор A_k^3 плоскостей, никакие три из которых не имеют общей прямой. Пусть наборы A_{n-k}^3 и A_k^3 находятся в общем положении друг относительно друга, т.е. вершины A_{n-k}^3 не лежат на плоскостях из A_k^3 и наоборот, ребра A_k^3 не проходят через ребра A_{n-k}^3 . Тогда

$$f(A_{n-k}^3 \cup A_k^3) = (k + 1)f(A_{n-k}^3) + (n - k) \frac{k(k - 1)}{2} + f(A_k^3) - k.$$

Пример 4.3. Возьмем набор A_{n-k}^2 прямых на некоторой проективной плоскости и еще одну прямую l на этой же плоскости. Пусть прямые из A_{n-k}^2 пересекают прямую l в q точках, причем l не совпадает ни с какой прямой из A_{n-k}^2 . Теперь построим набор

из n проективных плоскостей. Пусть $n - k$ проективных плоскостей проходят через общую точку P и через прямые набора A_{n-k}^2 с соответствующими номерами. Пусть оставшиеся k плоскостей проходят через прямую l и не проходят через точку P . Тогда при $2 \leq k \leq n - 2$ для построенного набора A_n^3 верно $f(A_n^3) = (k + 1)f(A_{n-k}^2) + (k - 1)q$.

Пример 4.4. Возьмем набор A_{n-k}^2 прямых на некоторой проективной плоскости и выберем из него две прямые, l_1 и l_2 . Пусть точка пересечения прямых l_1 и l_2 принадлежит r прямым из A_{n-k}^2 . Построим набор A_n^3 из n проективных плоскостей в проективном пространстве. Пусть $n - k$ проективных плоскостей проходят через общую точку P и через прямые набора A_{n-k}^2 с соответствующими номерами. Пусть $k = k_1 + k_2$, где $k_1 \geq 1$ и $k_2 \geq 1$. Пусть оставшиеся k плоскостей не проходят через точку P , причем k_1 плоскостей из них проходят через прямую l_1 , а k_2 плоскостей проходят через прямую l_2 . Тогда при $2 \leq k \leq n - 2$ верно

$$f(A_n^3) = (k + 1)f(A_{n-k}^2) + (n - k - r + 1)k_1k_2.$$

4.4 Разбиения плоских d -мерных торов и пространств Лобачевского

Определение 4.2. Плоским d -мерным тором T^d называется факторпространство аффинного d -мерного вещественного пространства \mathbb{R}^d по d -мерной решетке Z^d (не обязательно решетке целых чисел). Подтор коразмерности один в T^d задается уравнением

$$\sum_i a_i x_i = c,$$

где a_i — рациональные числа, x_i — координаты пространства \mathbb{R}^d в каком-нибудь базисе, построенные по какому-нибудь базису решетки Z^d , c — произвольное вещественное число.

Подтор коразмерности один — замкнутое подмногообразие в торе T^d , гомеоморфное $(d - 1)$ -мерному тору.

Теорема 4.9. Множество $F(T^d, n)$ всех возможных чисел компонент связности дополнений в d -мерном плоском торе к объединениям n плоских подторов коразмерности один содержит множество

$$F(T^d, n) \supseteq \{n - d + 1, \dots, n\} \cup \{l \in \mathbb{N} \mid l \geq 2(n - d)\}.$$

Доказательство. Пусть $T^d = \mathbb{R}^d / Z^d$ и в решетке Z^d выбран базис e . Пусть (x_1, \dots, x_d) — координаты пространства \mathbb{R}^d в базисе e . Построим примеры конфигураций с числом f связных компонент отдельно для $f \leq n$ и для $f \geq 2n - 2d$.

Рассмотрим набор из n гиперплоскостей в \mathbb{R}^d (каждое уравнение соответствует одной гиперплоскости):

$$\begin{aligned} x_i &= 0, & 1 \leq i \leq k, \\ x_{k+1} &= c_{i-k}, & k + 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

для некоторого целого k , $0 \leq k \leq d - 1$ и вещественных чисел c_{i-k} с различными дробными частями. При отображении факторизации $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d/Z^d$ получится набор $\{T_i^{d-1}, i = 1, \dots, n\}$ из n подторов коразмерности один. При этом дополнение гомеоморфно прямому произведению

$$T^d \setminus \bigcup_i T_i^{d-1} \approx \mathbb{R}^k \times (S^1 \setminus \{p_1, \dots, p_{n-k}\}) \times (S^1)^{d-k-1},$$

где через $S^1 \setminus \{p_1, \dots, p_{n-k}\}$ обозначена окружность без $n - k$ точек. Отсюда число связных компонент дополнения равно $n - k$, где k — любое целое число, такое, что $0 \leq k \leq d - 1$.

Теперь возьмем целое неотрицательное число k и построим пример конфигурации с $2n - 2d + k$ связными компонентами дополнения. Зададим подторы уравнениями:

$$\begin{aligned} x_i &= 0, \quad \text{где } 2 \leq i \leq d, \\ x_2 &= kx_1 + \frac{1}{2}, \\ x_1 &= c_j \quad \text{для } j = 1, \dots, n - d, \end{aligned}$$

причем числа $kc_j + \frac{1}{2}$ не целые ни при каких j . (Это условие того, что пересечение трех подторов

$$x_2 = kx_1 + \frac{1}{2}, \quad x_1 = c_j, \quad x_2 = 0$$

является пустым множеством.) Нетрудно видеть, что

$$T^d \setminus \bigcup_{i=3}^d \{x_i = 0\} \approx T^2 \times \mathbb{R}^{d-2}.$$

В двумерном торе уравнения

$$\begin{aligned} x_2 &= 0, \\ x_2 &= kx_1 + \frac{1}{2}, \\ x_1 &= c_j \quad \text{для } j = 1, \dots, n - d \end{aligned}$$

задают набор из $n - d + 2$ замкнутых геодезических, объединение которых делит тор на $2n - 2d + k$ связных компонент (более подробно разбиение двумерных торов геодезическими обсуждалось в разделе 3.3). \square

Разбиения пространства Лобачевского наборами подпространств коразмерности один

В качестве модели m -мерного пространства Лобачевского L^m возьмем множество точек

$$\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m > 0\} \quad \text{с метрикой} \quad ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_m^2}{x_m^2}.$$

Вполне геодезические подмногообразия коразмерности один — это гиперплоскости пространства Лобачевского, т.е. евклидовы полусферы с центром на абсолюте и евклидовы полуплоскости, перпендикулярные абсолюту $x_m = 0$.

Теорема 4.10. Пусть n различных гиперплоскостей m -мерного пространства Лобачевского делят последнее на f областей. Тогда

$$n + 1 \leq f \leq 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^m, \quad (4.10)$$

где биномиальный коэффициент C_n^i считается равным нулю при $i > n$. Любое целое число f , удовлетворяющее неравенствам (4.10) для фиксированных n и m , может реализоваться как число областей m -мерного пространства Лобачевского, разделенного n -гиперплоскостями.

Для доказательства теоремы понадобятся следующие определения и лемма. Обозначим пространство плоскостей коразмерности один в L^m через H^m . Обозначим пространство наборов, состоящих из n различных упорядоченных плоскостей коразмерности один в L^m через $\mathbb{A}^{nm} \subset H^m \times \dots \times H^m$. Фиксируем числа m и n . Пусть A_1 и A_2 — два различных набора из \mathbb{A}^{nm} . Деформацией набора A_1 в набор A_2 назовем непрерывное отображение $s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{A}^{nm}$, такое что $s(0) = A_1$ и $s(1) = A_2$. Число областей, образованных набором $A \in \mathbb{A}^{nm}$ в пространстве Лобачевского L^m , обозначим через $f(A)$. Назовем момент времени $t_0 \in [0, 1]$ критическим, если число областей $f(s(t))$ не постоянно в любой сколь угодно малой окрестности точки $t_0 \in [0, 1]$. В дальнейшем мы будем рассматривать только деформации с конечным числом критических моментов времени, при этом точки 0 и 1 не критические. В критический момент t_0 изменяется число областей, причем изменяется на

$$|f(s(t_0 + \epsilon)) - f(s(t_0 - \epsilon))|$$

для достаточно малого ϵ .

Назовем набор $A \in \mathbb{A}^{nm}$ исключительным, если существует деформация $s(t)$ со следующим свойством. Для некоторого критического момента t_0 верно $A = s(t_0)$ и число областей изменяется при деформации $s(t)$ в момент t_0 не менее чем на два.

Лемма 4.18. Множество исключительных наборов есть подмножество коразмерности два в \mathbb{A}^{nm} .

Доказательство. Если в момент t_0 исчезает область, то ограничивающие ее гиперплоскости (при $t < t_0$, не уменьшая общности), возможно, вместе с абсолютом будут проходить при $t = t_0$ через одну точку (которая может быть на абсолюте). Это некоторое условие, выполняющееся на поверхности коразмерности один в \mathbb{A}^{nm} .

Если при $t = t_0$ исчезают по крайней мере две области, то они были ограничены разными множествами гиперплоскостей (в которых, возможно, некоторые гиперплоскости совпадали). Поэтому условия исчезания областей независимы и одновременно выполняются на поверхности коразмерности не менее двух в \mathbb{A}^{nm} . \square

Доказательство теоремы 4.10. Неравенство $f \geq n + 1$ доказывается индукцией по n . Другое неравенство из (4.10) доказывается по паре индукций по m и n . Внешняя индукция по m , база $m = 2$, предположение — неравенство выполняется для размерностей, меньших m , и любого числа n . Индукция по n внутренняя, база $n = 1$, предположение — неравенство выполняется для данной размерности m и меньшего числа гиперплоскостей. Выкладки такие же как и в доказательстве аналогичной оценки для гиперплоскостей в евклидовом пространстве (формулы Шлеффли).

Докажем, что любое целое число f , удовлетворяющее (4.10) может быть числом областей. Рассмотрим набор из n гиперплоскостей евклидова пространства \mathbb{R}^m общего положения, в котором все ограниченные области имеют достаточно малый диаметр и располагались в верхнем полупространстве $x_m > 0$. Заменяем теперь гиперплоскости евклидова пространства на касающиеся их гиперплоскости пространства Лобачевского. Для достаточно малого диаметра ограниченных областей при замене гиперплоскостей число областей (всех, не только ограниченных) не изменится и будет равно

$$f_{\max} = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^m.$$

Возьмем построенный набор гиперплоскостей в L^m в качестве A_1 , а набор из n непесекающихся гиперплоскостей в качестве A_2 . Поскольку множество коразмерности два не делит пространство \mathbb{A}^{nm} на связные компоненты, то наборы A_1 и A_2 можно соединить деформацией $s(t)$, не проходящей через исключительные наборы. Тогда число областей наборов $s(t)$ изменяется в каждый критический момент времени не более, чем на один. Следовательно, любое число областей f , такое что $n + 1 \leq f \leq f_{\max}$, встречается в наборах деформации $s(t)$. \square

Замечание 4.4. Для двумерной плоскости Лобачевского можно явно построить набор прямых, делящий плоскость на f областей, где

$$n + 1 \leq f \leq 1 + \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Для этого представим число f в виде суммы

$$f = n + 1 + \frac{k(k - 1)}{2} + l$$

для целых чисел l, k , таких, что $1 \leq k \leq n - 1$ и $0 \leq l \leq k$. Расположим k прямых p_1, \dots, p_k так, что любые две из них пересекаются и никакие три из них не пересекаются в одной точке. Проведем прямую p_{k+1} так, что она пересекает ровно l из прямых p_1, \dots, p_k и не проходит через точки их попарных пересечений. Каждая из остальных прямых p_{k+2}, \dots, p_n не пересекается ни с какой прямой этого набора. Нетрудно увидеть, что получится $n + 1 + \frac{k(k-1)}{2} + l$ областей плоскости Лобачевского.

5 Заключение.

Множества чисел f связных компонент дополнения описаны в работе в той или иной мере для ряда конфигураций подмногообразий. В тех случаях, когда множества F удавалось найти явно или практически явно, алгоритм нахождения множеств был следующий:

- ввести параметр t вырождения конфигурации подмногообразий (например, максимальное число пересекающихся в одной точке);
- перебрать все комбинаторные типы конфигураций с большой степенью вырождения;

- реализовать почти все возможные значения числа f конфигурациями со “средней” степенью вырождения;
- доказать, что число f связных компонент не может принадлежать лакуне множества F (если они есть). Для этого найти нижние оценки числа f через m и n .

Самым трудным и часто с необходимостью использующим различные результаты и теории является последний пункт, а именно, нижние оценки. Поэтому получение новых нижних оценок представляется более интересной и перспективной задачей, чем описание множеств чисел связных компонент. Имеет смысл (а вероятно, и приложения найдутся) строить нижние оценки для конфигураций с различными параметрами вырождения, например, гомологического характера.

При изучении наборов геодезических на поверхностях с гиперболической метрикой, возможно, окажется полезной следующая

Гипотеза 5.1. Пусть S — бесконечное семейство связных замкнутых кривых по связном компактном двумерном многообразии M без края. Пусть $\varphi(L)$ — количество кривых из S длины не более L . Пусть $f_{\min}(M, n)$ — минимальное возможное число связных компонент дополнения в M к объединению n различных кривых из S . Тогда функция $f_{\min}(M, n)$ монотонно не убывает и при $L > 0$

$$f_{\min}(M, \varphi(L)) \geq c_M n L$$

для некоторой константы c_M , зависящей от M .

Благодарности. Глубоко признателен своему научному руководителю А. Т. Фоменко за постановки задач и внимание к работе. Глубоко благодарен Н. П. Долбилину, Е. А. Кудрявцевой и В. Ю. Протасову за неоднократные обсуждения задач и полезные ссылки на литературу. Особенно поблагодарить хотелось бы В. И. Арнольда, привлечшего внимание к задаче и популяризовавшего ее в открытой лекции 2007 г.

Список литературы

- [1] А. Д. Александров, Одна теорема о выпуклых многогранниках, *Тр. Физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова*, **4**, с. 87. Л.: изд-во АН СССР, 1933.
- [2] В. И. Арнольд, На сколько частей делят плоскость n прямых? *Матем. просвещение сер. 3* (2008) **12**, 95–104.
- [3] В. А. Васильев, Топология наборов плоскостей и их дополнений. *Успехи математических наук* (2001) Т. 56. № 2(338). С. 167 — 203.
- [4] В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. *Задачи по стереометрии*. М.: Наука, 1989

- [5] В. Ю. Протасов, Замкнутые геодезические на поверхности симплекса. *Матем. сб.* **198**:2 (2007), 103 — 120.
- [6] В. Ю. Протасов, О числе замкнутых геодезических на многограннике. *Усп. Матем. Н.* **63**:5, (2008) 197 — 198.
- [7] И. В. Птицына, Классификация замкнутых минимальных сетей на тетраэдрах. *Матем. сб.* **185**, N 5 (1994), 119 — 138.
- [8] Г. Л. Рыбников, О фундаментальной группе дополнения к комплексной конфигурации гиперплоскостей, *Функц. анализ и его прил.*, **45**:2 (2011), 71 — 85.
- [9] С. А. Юзвинский, Алгебры Орлика–Соломона в алгебре и топологии. *Усп. Матем. Н.*, **56**:2(338) (2001), 87 — 166.
- [10] J.G. Basterfield, L.M. Kelly, A characterization of sets of n points which determine n hyperplanes. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **64** (1968) 585–588.
- [11] R.C. Buck, Partition of space // *Amer. Math. Monthly* **105** N 5, (1943) 541 — 544.
- [12] P. Brass, W. Mozer, J. Pach, Incidence and Arrangement Problems. In *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer 2005. Chapter 7, pp. 289–324.
- [13] R. Cordovil, Sur l'évaluation $t(M; 2, 0)$ du polynôme de Tutte d'un matroïde et une conjecture de B. Grünbaum relative aux arrangements de droites du plan. *European J. Combin.* (1980) **1**, 317–322.
- [14] J. Csima, E.T. Sawyer, There exist $\frac{6n}{13}$ ordinary points. *Discrete Comput. Geom.* (1993) **9**, 187–202.
- [15] J. Csima, E.T. Sawyer, The $\frac{6n}{13}$ theorem revisited. In: *Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications Vol. 1*. Wiley, New York, 1995, pp. 235–249.
- [16] P. Deshpande, Arrangements of Submanifolds and the Tangent Bundle Complement. *Electronic Thesis and Dissertation Repository*, Paper 154 (2011).
- [17] R. Ehrenborg, M. Readdy, M. Slone, Affine and toric hyperplane arrangements. *Discr. Comp. Geom.* **41**:4 (2009), 481 — 512.
- [18] P. Erdos, G.B. Purdy, Some combinatorial problems in the plane. *J. Combinatorial Theory Ser. A* (1978) **25**, 205–210.
- [19] B. Green, T. Tao, On sets defining few ordinary lines. <http://arxiv.org/abs/1208.4714>, 2012.
- [20] B. Grünbaum, *Convex polytopes*, Interscience, London, 1967.
- [21] B. Grünbaum, *Arrangements and Spreads*. AMS, Providence, Rhode Island, 1972.
- [22] B. Grünbaum, A catalogue of simplicial arrangements in the real projective plane. *Ars Mathematica Contemporanea* **2**, (2009), 1–25.

- [23] F. Hirzebruch, Singularities of algebraic surfaces and characteristic numbers. *Contemporary Math.* (1986) **58**, 141-155.
- [24] H. Huber, Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen, *Math. Ann.* **138** (1959), 1 — 26.
- [25] N. Martinov, On conjecture 2.4 of Grunbaum. *Mathematics and Education in Mathematics (Proc. 19th Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Sunny Beach, April 1990)*. Bulgarian Academy of Science, Sofia, 1990, pp. 112–117.
- [26] N. Martinov, Classification of arrangements by the number of their cells. *Discrete and Comput. Geometry* (1993) **9**, №1, 39–46.
- [27] E. Melchior, Über Vielseite der Projektiven Ebene. *Deutsche Mathematik* (1940) **5**, 461-475.
- [28] M. Mirzakhani, Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces. *Ann. of Math.* **168**:2 (2008), 97 — 125.
- [29] Y. Miyaoka, The maximal number of quotient singularities on surfaces with given numerical invariants. *Math. Ann.* (1984) **268**, 159–171.
- [30] N. Nilakantan, Extremal Problems Related to the Sylvester-Gallai Theorem. In *Combinatorial and Computational Geometry*, ed. by J.E. Goodman, J.Pach, E. Welzl, Cambridge University Press, 2005. pp. 479–494.
- [31] P. Orlic, L. Solomon, Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. *Inventiones Math.* **56**:2 (1980), 167 — 189.
- [32] P. Orlic, H. Terao, Arrangements of Hyperplanes. Springer – Verlag, Berlin – Heidelberg, 1992. 329 pp.
- [33] G.B. Purdy, On the number of regions determined by n lines in the projective plane. *Geom. dedic.* (1980) **9**, 107-109.
- [34] L. Schläfli, Theorie der vielfachen Kontinuität. *Denkschr. Schweiz. naturf. Ges.* **38**, (1901) 1 — 237.
- [35] R.W. Shannon, A lower bound on the number of cells in arrangements of hyperplanes. *Jour. of combinatorial theory (A)*, **20**, (1976) 327–335.
- [36] J. Steiner, Einige Gesetze über die Theilung der Ebene und des Raumes. *J. Reine Angew. Math.* **1** (1826), 349 — 364.
- [37] T. Zaslavsky, Facing up to arrangements: Face count formulas for partitions of space by hyperplanes. *Mem. Amer. Math. Soc.* **154**:1 (1975).

Публикации автора по теме диссертации.

- [38] И.Н. Шнурников, На сколько областей делят плоскость n прямыми, среди которых не более $n - k$ коллинеарных? *Вестник Моск. ун-та, сер. 1* (2010) **5**, 32-36.
- [39] И. Н. Шнурников, О числе областей, образованных наборами замкнутых геодезических на плоских поверхностях. *Матем. Зам.* **90**:4 (2011), 636 — 640.
- [40] И. Н. Шнурников, Конфигурации подмногообразий коразмерности 1. *Матем. сб.* (2012) **203**:9, 133 — 160.
- [41] Шнурников И.Н. О числе компонент связности дополнений к объединениям замкнутых подмногообразий. Деп. в ВИНТИ, № 347 – В 2012, с. 1 — 28.
- [42] Шнурников И.Н., Число областей в разбиениях плоскости прямыми не общего положения. Сборник тезисов международной конференции “Геометрия в «целом», топология и их приложения”, Харьков, 2009 г., с. 47.
- [43] Шнурников И.Н., Классификация конфигураций прямых на проективной плоскости по числу областей. Тезисы докладов Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна — 2010, Воронеж, 2010 г., с. 160 — 161.
- [44] Шнурников И.Н., О числе областей проективного пространства, разделенного n плоскостями. Тезисы докладов международной конференции “Юбилейный симпозиум А.З. Петрова по общей теории относительности и гравитации”, Казань, 2010 г., с. 125 — 126.
- [45] Шнурников И.Н., О числе областей, образованных набором замкнутых геодезических на плоских поверхностях. Тезисы докладов международной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященной 110-ой годовщине И.Г. Петровского, Москва, 2011 г., с. 396-397.
- [46] Шнурников И.Н., О числе областей дополнений в конфигурациях подмногообразий. Тезисы докладов международной конференции “Дискретная геометрия”, посвященной 100-летию со дня рождения А.Д. Александрова, Ярославль, 2012 г., с. 85 — 86.