МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 513.6

АБДЕЛЬ РАХМАН Мохаммед Шехата

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ИНСТАНТОНОВ НА ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(01.01.04 - геометрия и топология)

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Ю.П.Соловьев

Москва, 1993

Оглавление.

Введение.

Пространства модулей автодуальных связностей в главных расслоениях над римановым четырехмерным многообразием изучаются, как правило, с двух различных точек зрения. Первая из них касается топологического строения этих пространств модулей. Наиболее известными и значительными здесь являются работы С. Дональдсона, который показал, что знание даже простейших топологических свойств пространства модулей инстантонов приводит к очень глубоким результатам о топологии гладких четырехмерных многообразий. С другой стороны, физики изучают эти пространства потому, что полуклассическая (или инстантонная) аппроксимация функций Грина евклидовой квантовой теории Янга-Миллса выражается в терминах интегралов по пространствам модулей. Вычисление таких интегралов требует детального описания метрики и формы объема пространств модулей, т.е. описания пространств модулей как конкретных римановых многообразий.

Естественной римановой метрикой на пространстве модулей $\mathcal{M}$ является так называемая L^2-метрика, которая определяется следующим образом. Связности на главном расслоении $G \to P \to M$, где M – гладкое четырехмерное многообразие и G – компактная полупростая группа Ли, образуют аффинное пространство $\mathcal{A}$, касательное пространство к которому есть пространство 1-форм на M со значениями в ассоциированном векторном расслоении $\mathrm{Ad}P = E \times_{\mathrm{Ad}G} \mathfrak{g}$. L^2-скалярное произведение таких форм определяет риманову метрику на $\mathcal{A}$. Эта метрика инвариантна относительно действия группы $\mathcal{G}$ автоморфизмов расслоения P, называемой группой калибровочных преобразований. Поэтому касательное расслоение $T\mathcal{A}$ расщепляется на $\mathcal{G}$-инвариантные вертикальное и горизонтальное подрасслоения. Метрика на горизонтальном подрасслоении определяет метрику на пространстве орбит $\mathcal{A}|\mathcal{G}$. Метрика на пространстве модулей $\mathcal{M}$ - подмногообразии в $\mathcal{A}|\mathcal{G}$ - получается тогда ограничением метрики на $\mathcal{A}|\mathcal{G}$.

Возможность дальнейшего изучения метрики на $\mathcal{M}$ связана с тем, что в некоторых случаях известно полное топологическое описание этого пространства. Наиболее фундаментальным примером является пространство модулей $\mathcal{M}_1$ автодуальных связностей на SU(2) - расслоении с инстантонным числом K = 1 над стандартной четырехмерной сферой S^4. Топология этого пространства хорошо известна. Атья, Хитчин и Зингер [1] показали, что $\mathcal{M}_1$ диффеоморфно пространству $\mathbb{R}^5$. Более точно, они доказали, что группа SO(5,1) конформных диффеоморфизмов четырехмерной сферы транзитивно действует на $\mathcal{M}_1$ со стационарной подгруппой SO(5), поэтому $\mathcal{M}_1$ диффеоморфно пятимерному пространству $SO(5,1)|SO(5) \cong \mathbb{R}^5$.

Используя этот координатный диффеоморфизм

$$\bar{\mathcal{S}} : \mathbb{R}^5 \to \mathcal{M}_1$$

различные авторы ([14],[15],[16]) показали, что прообраз L^2-метрики g на $\mathcal{M}_1$ может быть задан в пространстве $\mathbb{R}^5$ формулой

$$(\bar{\mathcal{S}}^* g)_{ij} = \psi^2(\rho)\,\delta_{ij}$$

для некоторой функции ϕ переменной $\rho = |x|$. Отправляясь от этой формулы, можно без труда получить следующие свойства риманова многообразия $(\mathcal{M}_1, g)$:

(1) $\mathcal{M}_1$ конформно плоско;

(2) $\mathcal{M}_1$ радиально симметрично;

(3) $\mathcal{M}_1$ имеет конечный радиус и, следовательно, не полно;

(4) $\mathcal{M}_1$ имеет конечный объем.

Настоящая диссертация посвящена изучению L^2-метрики на пространстве $\mathcal{M}_1(Q)$ модулей автодуальных SU(2) - связностей с инстантонным числом K = 1 над стандартным четырехмерным евклидовым пространством $\mathbb{R}^4$. Существенное отличие этого случая от описанного выше состоит в том, что пространство $\mathbb{R}^4$ не компактно.

Подход к изучению метрики на $\mathcal{M}_1(Q)$ заключается в следующем. Согласно теореме Уленбек об устранимой особенности [11] пространство модулей $\mathcal{M}_1(Q)$ можно отождествить с пространством $\mathcal{M}_1$ и, следовательно, $\mathcal{M}_1(Q)$ также диффеоморфно $\mathbb{R}^5$. Мы рассматриваем семейство римановых метрик g_s, $s \in (0,1]$ на четырехмерной римановой сфере S^4, которые лежат в конформном классе стандартной метрики и удовлетворяют условию

$$\lim_{s \to 0} g_s = g_{\mathbb{R}^4} \text{ на } \mathbb{R}^4 = S^4 \setminus \{\text{южный полюс}\}.$$

Семейство $\{g_s\}$ индуцирует семейство $\{G_s\}$ L^2-метрик на пространстве модулей $\mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{M}_1(Q)$ автодуальных связностей на главном $SU(2)$ - расслоении над стандартной четырехмерной сферой. Следовательно, если $\{G_s\}$ сходится к римановой метрике G_0 на $\mathcal{M}_1$, то мы можем рассматривать G_0 как метрику на $\mathcal{M}_1(Q)$, отвечающую евклидовой метрике $g_{\mathbb{R}^4}$. В результате получается следующее утверждение.

Теорема 4.6.

В указанной выше параметризации пространства модулей $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1(Q)$ имеет место следующее равенство:

$$G_0 = \lim_{s \to 0} G_s = \frac{\pi^2}{r} dr^2 + 2\pi^2 g_{\mathbb{R}^4}.$$

Затем мы показываем, что метрика G_0 является в действительности L^2-метрикой на $\mathcal{M}_1(Q)$. Для этого используется конструкция, позволяющая отождествлять касательные векторы к $\mathcal{M}_1(Q)$ с гармоническими 1-формами на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$.

Диссертация состоит из четырех глав. Первая глава представляет собой краткий обзор основных понятий и конструкций, относящихся к теории Янга - Миллса. В частности, в ней описывается конструкция пространства модулей автодуальных связностей. Вторая глава посвящена описанию L^2-метрики на пространствах модулей автодуальных связностей. Основная часть главы содержит построение параметризации

$$\bar{S} : \mathbb{R}^5 \to \mathcal{M}_1$$

пространства модулей автодуальных SU(2) - связностей с инстантонным числом K = 1 над стандартной четырехмерной сферой. В третьей главе дается вычисление метрики $\bar{S}^* g$ на пространстве $\mathbb{R}^5$ и изучаются геометрические свойства риманова многообразия $(\mathcal{M}_1, g)$. Четвертая глава содержит основные результаты диссертации - теоремы 4.6, 4.7 и 4.11 - дающие полное описание L^2-метрики на пространстве модулей $\mathcal{M}_1(Q)$ автодуальных SU(2) - связностей с инстантонным числом K = 1 над стандартным четырехмерным евклидовым пространством.

Глава I. Пространство модулей автодуальных связностей.

В этой главе мы изложим вкратце основные понятия и конструкции, относящиеся к пространствам модулей Янга – Миллса. Подробно эти вопросы освещены в работах [1], [2], [3].

Пусть (M,g) – компактное ориентированное риманово четырехмерное многообразие и $P \to M$ – главное расслоение, структурной группой которого является компактная полупростая группа Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Обозначим через $AdP = P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ присоединенное ассоциированное расслоение и рассмотрим пространства

$$\Omega^q(AdP) = \Gamma(\Lambda^q T^*M \otimes AdP)$$

AdP – значных q-мерных форм на многообразии M. Расслоения $\Lambda^q T^*M \otimes AdP$ наделены естественными метриками $(\cdot,\cdot)$, индуцированными римановой метрикой и формой Киллинга. Поэтому на пространстве $\Omega^q(AdP)$ определено скалярное произведение

$$\langle \varphi, \phi \rangle_{L^2} = \int_M (\varphi, \phi).$$

Связностью в главном расслоении P называется гладкое отображение $A : TP \to \mathfrak{g}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) A является 1-формой на P со значениями в $\mathfrak{g}$ (т.е. $A \in \Gamma(T^*P \otimes \mathfrak{g})$).

2) Пусть $X \in \mathfrak{g}$ и $\tilde{X}$ – фундаментальное векторное поле на P, задаваемое правилом

$$\tilde{X}(p) = \frac{d}{dt}(\exp(tX)(p))\Big|_{t=0}, \quad p \in P.$$

Тогда $A(\tilde{X}) = X$.

3) Для любого элемента $g \in G$ имеет место равенство

$$A \circ dr_g = Ad_G(g^{-1}) \circ A,$$

где $r_g : p \in P \to p \circ g \in P$ – правое действие группы G на многообразии P.

Обозначим через $T_\nu(P)$ подрасслоение в касательном расслоении TP, порожденное векторами, касательными к слою G. Если задана связность, то TP разлагается в прямую сумму

$$T_pP = T_{\nu_p}(P) \oplus \operatorname{Ker} A_p, \quad p \in P.$$

Обозначим $\operatorname{Ker} A_p$ через $Th_p(P)$ и назовем его горизонтальным подрасслоением.

Пусть E - некоторое векторное расслоение с базой M. Связность $A : TP \to \mathfrak{g}$ в главном расслоении P задает линейное отображение

$$D : \sigma \in \Gamma(\Lambda^q T^*M \otimes E) \to D\sigma \in \Gamma(\Lambda^{q+1}T^*M \otimes E),$$

$$D\sigma_x(t_0,\dots,t_q) = [p, (d\hat{\sigma})_p(t_0^*,\dots,t_q^*)],$$

где $t_j \in T_xM$, $\pi(p) = x$, $t_j^* \in Th_p(P)$ и $dp(t_j^*) = t_j$.

Отображение D называется абсолютным дифференциалом в векторном расслоении E.

Определим теперь ковариантную производную в расслоении E, полагая

$$\nabla^A : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E),$$

$$(\nabla_X^A e)(x) = (De)_x(X),$$

где $e \in \Gamma(E)$, $X \in T_xM$, $x \in M$.

В частности, связность A задает ковариантную производную

$$\nabla^A : \Omega^0(AdP) \to \Omega^1(AdP).$$

Легко проверить, что для любого векторного поля X на многообразии M и любых двух сечений $\varphi, \psi \in \Omega^0(AdP)$ имеет место равенство

$$(\nabla_X^A\varphi, \psi) + (\varphi, \nabla_X^A\psi) = X(\varphi, \psi).$$

Оператор ∇^A можно продолжить на формы старших размерностей

$$\nabla^A : \Gamma(\Lambda^q T^*M \otimes AdP) \to \Gamma(T^*M \otimes \Lambda^q T^*M \otimes AdP),$$

полагая $\nabla^A = \nabla^g \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^A$,

где ∇^g - риманова связность, построенная по метрике g многообразия M. Взяв композицию ∇^A с внешним умножением, мы получаем ковариантную внешнюю производную

$$d_A : \Omega^q(\mathrm{Ad}P) \to \Omega^{q+1}(\mathrm{Ad}P);$$

композиция с внутренним умножением (т.е. с оператором, сопряженным к внешнему умножению) дает сопряженный оператор

$$d_A^* : \Omega^{q+1}(\mathrm{Ad}P) \to \Omega^q(\mathrm{Ad}P).$$

Если $\{e_i\}$ – локальный ортонормированный базис TM и $\{\theta^i\}$ – его дуальный базис, то операторы d_A и d_A^* задаются формулами

$$d_A\varphi = \sum_{i=1}^{n} \theta^i \wedge \nabla^A_{e_i}\varphi,$$

$$d_A^*\varphi = -\sum_{i=1}^{n} e_i \lrcorner \nabla^A_{e_i}\varphi, \quad \varphi \in \Omega^*(\mathrm{Ad}P).$$

Кривизной связности A называется оператор

$$d_A \circ d_A : \Omega^0(\mathrm{Ad}P) \to \Omega^2(\mathrm{Ad}P).$$

Нетрудно проверить, что $d_A \circ d_A$ – это оператор нулевого порядка, задаваемый умножением (в алгебре Ли $\mathfrak{g}$) на некоторый элемент $F_A \in \Omega^2(\mathrm{Ad}P)$; элемент F_A называется формой кривизны связности A. В локальных координатах композиция $d_A \circ d_A$ имеет вид

$$d_A d_A\varphi = [F_A, \varphi] = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \theta^i \wedge \theta^j [(F_A)_{ij}, \varphi] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \theta^i \wedge \theta^j (\nabla^A_{e_i}\nabla^A_{e_j} - \nabla^A_{e_j}\nabla^A_{e_i} - \nabla^A_{[e_i, e_j]})\varphi.$$

Имеются и другие важные алгебраические операторы на пространствах $\Omega^*(\mathrm{Ad}P)$. Прежде всего, оператор Ходжа $*$ действует на всех таких пространствах и разбивает $\Omega^2(\mathrm{Ad}P)$ в прямую сумму собственых ± 1 – подпространств $\Omega^2_\pm(\mathrm{Ad}P)$:

$$\Omega^2(\mathrm{Ad}P) = \Omega^2_+(\mathrm{Ad}P) \oplus \Omega^2_-(\mathrm{Ad}P).$$

Ортогональные проекторы на эти собственные подпространства имеют вид

$$P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm *).$$

Кроме того, каждая форма $X = \sum \omega_i \otimes B_i \in \Omega^1(\mathrm{Ad}P)$ определяет оператор

$$P_X : \Omega^q(AdP) \longrightarrow \Omega^{q+1}(AdP),$$

адаваемый формулой

$$P_X(\omega' \otimes B') = \sum_i \omega_i \otimes \omega'[B_i, B'].$$

опряженным к P_X служит оператор

$$P_X^* = - * P_X * : \ \Omega^q(AdP) \longrightarrow \Omega^{q-1}(AdP).$$

сли $X, Y \in \Omega^1(AdP)$, то в локальном базисе $\{\theta^i\}$, $X = X_i\theta^i$, $Y = Y_i\theta^i$, оператор P^* имеет вид

$$P_X^* Y = - P_Y^* X = - \sum_i [X_i, Y_i]. \qquad (1.1)$$

Форма кривизны F_A разлагается в сумму $F_A = F_A^+ + F_A^-$, где $F_A^\pm = p_\pm F_A$. Связность A называется автодуальной или инстантоном, если $F_A^- = 0$. Для автодуальной связности A последовательность про-транств

$$0 \longrightarrow \Omega^0(AdP) \xrightarrow{\ d_A\ } \Omega^1(AdP) \xrightarrow{\ d_A^-\ } \Omega^2_-(AdP) \longrightarrow 0, \qquad (1.2)$$

де $d_A^- = p_- d_A$ является эллиптическим комплексом. Этот комплекс мо-ет быть следующим образом превращен в комплекс гильбертовых про-транств. Фиксируем гладкую связность A_0 и некоторое целое число $\geqslant 0$. Для $\varphi \in \Omega^q(AdP)$ полагаем

$$(\nabla^{A_0})^\ell \varphi = (\underbrace{\nabla^{A_0} \circ \ldots \circ \nabla^{A_0}}_{\ell\ \text{раз}})\varphi \ \in \ \Gamma(\overset{\ell}{\otimes}\, T^*M \otimes \Lambda^q(T^*M) \otimes AdP).$$

огда соболевское пространство $\Omega^q_\ell(AdP)$ определяется как пополнение $^q(AdP)$ относительно нормы

$$\|\varphi\|_\ell = \Big(\sum_{j=0}^{\ell} \int_M |(\nabla^{A_0})^\ell \varphi|^2 \Big)^{1/2}.$$

то пополнение является гильбертовым пространством относительно ссоциированной с $\|\cdot\|_\ell$ билинейной формы.

Аналогичным образом можно пополнить пространство связностей. бозначим через $\mathcal{A}$ множество всех гладких связностей в главном ссслоении $P \to M$. Ковариантные производные двух связностей $A_0, A \in$

$\in \mathcal{A}$ связаны соотношением

$$d_A = d_{A_0} + P_X \qquad (1.3)$$

для некоторой формы $X \in \Omega^1(AdP)$. Отсюда вытекает, что $\mathcal{A}$ является аффинным пространством и что для каждой $A \in \mathcal{A}$ существует естественное отождествление касательного пространства $T_A\mathcal{A}$ с пространством AdP – значных 1-форм $\Omega^1(AdP)$. Пространство $\mathcal{A}_\ell$ соболевских связностей определяется при фиксированной связности $A_0 \in \mathcal{A}$ отождествлением $\mathcal{A}$ с $\Omega^1(AdP)$ с помощью соотношения (1.3) и пополнением $\Omega^1(AdP)$ по соболевской ℓ-норме. Полученное таким образом пространство $\mathcal{A}_\ell$ не зависит от выбора связности A_0. Отображение кривизны $A \to F_A$ продолжается до гладкого отображения из $\mathcal{A}_{\ell+1}$ в $\Omega^2(AdP)$ в предположении, что $\ell \geqslant 1$ [4].

Каждая связность $A \in \mathcal{A}_\ell$ определяет лапласианы

$$\Delta_A^0 = d_A^* \, d_A \quad : \quad \Omega_\ell^0(AdP) \to \Omega_\ell^0(AdP),$$

$$\Delta_A^1 = d_A \, d_A^* + (d_A^-)^* \, d_A^- \quad : \quad \Omega_\ell^1(AdP) \to \Omega_\ell^1(AdP) \text{ и}$$

$$\Delta_A^2 = d_A^- \, (d_A^-)^* \quad : \quad \Omega_\ell^2(AdP) \to \Omega_\ell^2(AdP).$$

В силу спектральной теоремы для самосопряженных эллиптических операторов каждое пространство $\Omega_\ell^q(AdP)$, $q = 0,1,2$, разлагается в прямую сумму конечномерных собственных подпространств оператора Δ_A^q, собственные значения $\{\lambda_i\}$ которого вещественны, неотрицательны и образуют дискретное множество.

Таким образом, существуют L^2-ортогональные разложения

$$\Omega_\ell^q(AdP) = K^q \oplus B_\ell^q, \quad q = 0,1,2\,,$$

где $K^q = \operatorname{Ker}(\Delta_\ell^q) \subset C^\infty(AdP)$ – конечномерное подпространство гармонических форм оператора Δ_ℓ^q. Кроме того,

$$\Delta_\ell^q : B_{\ell+2}^q \longrightarrow B_\ell^q \; -$$

ограниченное отображение с ограниченным обратным

$$G_\ell^q : B_\ell^q \longrightarrow B_{\ell+2}^q\,,$$

называемым оператором Грина. Связность A называется неприводимой, если $K^0 = \{0\}$ или, эквивалентно, если $\mathrm{Ker}(d_A : \Omega^0 \to \Omega^1) = \{0\}$. В этом случае оператор Δ^0_ℓ обратим на пространстве $\Omega^0_\ell(\mathrm{Ad}P)$. Нетрудно показать, что множество $\hat{\lambda}_\ell$ неприводимых связностей являются открытым плотным множеством в $\mathcal{A}_\ell$.

Множество всех гладких автоморфизмов расслоения $P \to M$, неподвижных на базе, называется калибровочной группой расслоения P и обозначается $\mathcal{G}$. Эту группу можно естественно отождествить с пространством сечений ассоциированного расслоения $\mathrm{Aut}\,P = P \times_{\mathrm{Ad}} G$. Для $\ell \geqslant 3$ соболевское пополнение $\mathcal{G}_\ell$ определяется путем выбора точного представления

$\rho : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$. Это задает вложение

$$\mathcal{G} \subset \Gamma(P \times_\rho \mathrm{End}(V))$$

и $\mathcal{G}_\ell$ есть не что иное, как замыкание множества $\mathcal{G}$ в соболевском ℓ-пополнении пространства $\Gamma(P \times_\rho \mathrm{End}(V))$. Определенная таким способом, группа $\mathcal{G}_\ell$ является гладкой гильбертовой группой Ли с алгеброй Ли $\Omega^0_\ell(\mathrm{Ad}P)$ (см. [5]).

Если заменить представление ρ присоединенным представлением $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, получается группа $\ddot{\mathcal{G}}_\ell$. Поскольку ядро представления Ad есть не что иное как центр Z группы G, мы имеем $\ddot{\mathcal{G}}_\ell = \mathcal{G}_\ell | \mathcal{Z}$, где $\mathcal{Z} = \Gamma(P \times_{\mathrm{Ad}} Z)$ - центр группы $\mathcal{G}_\ell$.

Нетрудно показать, что $\mathcal{Z}$ изоморфна конечной группе Z, т.е. $\ddot{\mathcal{G}}_\ell = \mathcal{G}_\ell | Z$.

Калибровочное преобразование $g \in \mathcal{G}$ действует на связностях по формуле

$$d_A \longmapsto g \circ d_A \circ g^{-1},$$

и, следовательно, переводит F_A в $(\mathrm{Ad}g)F_A$. Это действие продолжается до гладкого действия группы $\mathcal{G}_{\ell+1}$ на $\mathcal{A}_\ell$ ($\ell \geqslant 2$). Дифференциал этого действия в точке $A \in \mathcal{A}_\ell$ имеет вид

$$-d_A : T_{id}\,\mathcal{G}_{\ell+1} = \Omega^0_{\ell+1}(\mathrm{AdP}) \to T_A\mathcal{A}_\ell = \Omega^1_\ell(\mathrm{AdP}).$$

Следовательно, касательное пространство к неприводимой связности $A \in \hat{\mathcal{A}}_\ell$ есть прямая сумма вертикального и горизонтального подпространств

$$T_A\hat{\mathcal{A}}_\ell = V_A \oplus H_A, \tag{1.4}$$

где $V_A = \operatorname{im} d_A$ – это касательное пространство к орбите группы $\mathcal{G}_{\ell+1}$, проходящей через точку A, и $H_A = \operatorname{Ker} d_A^*$ – ортогональное дополнение. Для $A \in \hat{\mathcal{A}}_\ell$ стационарная подгруппа действия $\mathcal{G}_{\ell+1}$ есть в точности центр Z. Кроме ого, теорема о стандартном срезе утверждает, что орбита, проходящая через A, имеет трубчатую окрестность, эквивалентно диффеоморфную произведению $\hat{\mathcal{G}}_{\ell+1} \times U$, где U – открытая окрестность точки A в пространстве H_A. Отсюда следует, что пространство орбит $\mathcal{O}_\ell$ является хаусдорфовым гильбертовым многообразием, и что

$$\hat{\mathcal{A}}_\ell \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_\ell = \hat{\mathcal{A}}_\ell | \hat{\mathcal{G}}_{\ell+1}$$

есть главное $\hat{\mathcal{G}}_{\ell+1}$-расслоение.

Мы будем обозначать класс калибровочной эквивалентности связности A через $[A] \in \mathcal{O}_\ell$ и будем часто отождествлять $T_{[A]}\mathcal{O}_\ell$ с горизонтальным подпространством $H_A \subset T_A\mathcal{A}_\ell$.
Ортогональное разложение (1.4) определяет операторы вертикального и горизонтального проектирования v_A, h_A в каждой точке $A \in \hat{\mathcal{A}}_\ell$. Чтобы найти явный вид этих операторов, представим произвольную форму $X \in \Omega^1(\mathrm{AdP})$ в виде

$$X = d_A G^0_A d^*_A X + (X - d_A G^0_A d^*_A X).$$

Так как первое слагаемое лежит в образе оператора d_A, а второе слагаемое принадлежит ядру оператора d^*_A, мы имеем

$$v_A = d_A G^0_A d^*_A, \quad h_A = \mathrm{Id} - d_A G^0_A d^*_A. \tag{1.5}$$

Действие Янга-Миллса для связности A задается формулой

$$\mathcal{YM}(A) = \frac{1}{2} \int_M |F_A|^2 \, \mathrm{vol}_g.$$

Это гладкая калибровочно инвариантная функция на пространстве $\mathcal{A}_l$, $l \geqslant 1$. Разумеется, значение $\mathcal{YM}(A)$ зависит от того, с какой кратностью входит форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в определение метрики на расслоении $\mathrm{Ad}P$. В случае $G = SU(N)$ обычно используют следовую форму стандартного представления G на $\mathbb{C}^N$, взятую со знаком минус; такая форма отличается от формы Киллинга коэффициентом $-1/2\,N$. В общем случае, если рассматривается метрика на $\mathrm{Ad}P$, индуцированная формой Киллинга умноженной на $-\lambda$, имеет место формула

$$\mathcal{YM}(A) = \frac{\lambda}{2} \int_M - \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, F_A \wedge \mathrm{ad}\, F_A) + \int_M |F_A^-|^2 \, \mathrm{vol}_g.$$

Первое слагаемое в этой формуле есть не что иное, как (взятое с положительной кратностью) характеристическое число Понтрягина $p_1(\mathrm{Ad}P)$ [14], где $p_1(\mathrm{Ad}P)$ – первый класс Понтрягина вещественного расслоения $\mathrm{Ad}P$. Это слагаемое зависит только от расслоения P и не зависит от выбора связности A. Таким образом, автодуальные связности могут существовать только тогда, когда $p_1(\mathrm{Ad}P)[M] \geqslant 0$; в случае существования они абсолютно минимизируют функционал Янга-Миллса.

Следует отметить, что для $G = SU(N)$ существует векторное расслоение E, ассоциированное со стандартным представлением

$$G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^N) = GL(N, \mathbb{C}).$$

Для этого расслоения мы имеем

$$2\,N\,c_2(E) = -\,c_2(\mathrm{Ad}P \otimes \mathbb{C}) = -\,p_1(\mathrm{Ad}P).$$

По традиции в этом случае характеристическое число Понтрягина расслоения $P \to M$ выражают в терминах так называемого инстантонного числа $K = -\,c_2(E)[M]$:

$$p_1(\mathrm{Ad}P) = 2\,N\,K.$$

Теоремы существования Таубса ([6],[7]) показывают, что автодуальные связности существуют на всех расслоениях с $p_1(AdP)[M] \geqslant 0$ для многих типов четырехмерных многообразий, включая, в частности, те из них, которые обладают положительной формой пересечения циклов.

Пусть $\beta_\ell \subset \mathcal{A}_\ell$ - калибровочно инвариантное множество всех автодуальных SU(2) - связностей. Образ β_ℓ в пространстве орбит называется пространством модулей автодуальных связностей и обозначается через $\mathcal{M}$. Таким образом,

$$\mathcal{M} = \{[A] \mid A \text{ автодуальна}\} \subset \mathcal{O}_\ell.$$

Это множество содержит в качестве плотного открытого подмножества пространство модулей

$$\hat{\mathcal{M}} = \{[A] \mid A \text{ автодуальна и } \operatorname{Ker} \Delta_A^0 = \{0\}\}$$

неприводимых автодуальных связностей.

Теорема Атья-Хитчина-Зингера [1] показывает, что в случае, когда оно не пусто, множество

$$\hat{\mathcal{M}}' = \{[A] \in \mathcal{M} \mid \operatorname{Ker} \Delta_A^2 = \{0\}\}$$

является многообразием размерности

$$2\, p_1(AdP)[M] - \dim G\, (1 - b_1 + b_2^-),$$

где $b_1 = \dim H^1(M; \mathbb{R})$ и b_2^- есть размерность пространства антиавтодуальных гармонических 2-форм на M. Трудности, возникающие из-за присутствия связностей A с $\operatorname{Ker} \Delta_A^2 \neq \{0\}$ могут быть преодолены по меньшей мере двумя способами. Прежде всего, с помощью формул Вейтценбека можно показать, что при некотором условии на кривизну многообразия M, ядро оператора Δ_A^2 равно нулю для всех $A \in \hat{\mathcal{M}}$. Это условие на кривизну заключается в том, что оператор

$$-2\, W_- + \frac{s}{3}\, \mathrm{Id} \in \operatorname{End}(\Lambda_-^2\, T^*M)$$

является положительно определенным. Здесь s - скалярная кривизна многообразия M и W_- - эндоморфизм Вейля, задаваемый формулой

$$W_-(\theta^i \wedge \theta^j)_- = \frac{1}{2} W_{ijk\ell}(\theta^k \wedge \theta^\ell)_-.$$

Во-вторых, Фрид и Уленбек [2] показали, что в случае $G = SU(2)$ всегда возможно так пошевелить метрику на M, чтобы $\hat{\mathcal{M}}' = \hat{\mathcal{M}}$. В дальнейшем мы будем предполагать, что находимся в одной из этих ситуаций, так что $\hat{\mathcal{M}}$ - многообразие.

Имеется простое описание касательного пространства к многообразию $\hat{\mathcal{M}}$. Если

$$A_t = A_0 + t\,B + O(t^2) \ -$$

однопараметрическое семейство связностей, то

$$F_{A_t} = F_{A_0} + t\, d_{A_0} B + O(t^2),$$

и если A_t - автодуальные связности (т.е. $F^-_{A_t} = 0$) для всех t, то $d^-_{A_0} B = 0$. Таким образом, отождествляя $T_{[A]}\mathcal{O}_\ell$ с горизонтальным подпространством H_A из (1.4), мы имеем

$$T_{[A]}\hat{\mathcal{M}} = \{B \in \Omega^1_\ell(\mathrm{Ad}P) \mid d^*_A B = 0,\ d^-_A B = 0\}. \qquad (1.6)$$

Соображения, связанные с эллиптической регулярностью, показывают, что любая связность $A' \in \mathcal{B}_\ell$ $\mathcal{G}_{\ell+1}$-эквивалентна гладкой связности A и что для такой A правая часть равенства (1.6) состоит из гладких форм B.

Простейшие примеры пространств модулей возникают в случае, когда M - односвязное четырехмерное многообразие с положительной формой пересечений и P есть главное $SU(2)$ - расслоение с инстантонным числом $K = 1$. В этом случае пространство модулей $\hat{\mathcal{M}}$ является пятимерным многообразием, топологическая структура которого была описана Дональдсоном [8]. Многообразие $\hat{\mathcal{M}}$ ориентируемо; $\mathcal{M} - \hat{\mathcal{M}}$ состоит из конечного числа точек, представляемых приводимыми связностями; окрестности этих точек в $\mathcal{M}$ локально диффеоморфны открытому конусу на $\mathbb{C}P^2$; в $\mathcal{M}$ существует компактное подмножество, дополнение к которому диффеоморфно $M \times (1,\infty)$.

Глава 2. Общая геометрическая структура пространства модулей инстантонов.

Наиболее изученным пространством модулей автодуальных связностей является пространство $\mathcal{M}_1$ модулей инстантонов. Напомним, что инстантоном называется автодуальная связность на главном $SU(2)$ - расслоении $P \to S^4$ над четырехмерной сферой с инстантонным числом $K = -c_2(P) = 1$. Предполагается, что сфера S^4 снабжена стандартной метрикой.

Так как $H^2(S^4;\mathbb{Z}) = 0$, то согласно [8] пространство $\mathcal{M}_1$ не содержит приводимых связностей. Поэтому из теоремы о тривиализации [2] вытекает, что $\operatorname{Ker}(\Delta_A^2) = \{0\}$ для любой связности $A \in \mathcal{M}_1$. Следовательно, пространство $\mathcal{M}_1 = \hat{\mathcal{M}}_1 = \hat{\mathcal{M}}_1'$ является пятимерным многообразием.

Конформные диффеоморфизмы четырехмерной сферы S^4 образуют группу Ли, изоморфную $SO(5,1)$. В работе [1] показано, что существует естественное транзитивное действие этой группы на пространстве модулей $\mathcal{M}_1$. Стационарная подгруппа этого действия на каждом инстантоне изоморфна $SO(5)$ и поэтому многообразие $\mathcal{M}_1$ диффеоморфно гиперболическому пятимерному пространству:

$$\mathcal{M}_1 \cong SO(5,1) \mid SO(5) \cong \mathbb{R}^5. \tag{2.1}$$

В этой и следующей главах мы будем использовать этот диффеоморфизм для описания геометрии многообразия $\mathcal{M}_1$. Нам понадобится более подробное описание действия конформной группы, чем то, которое было дано в работе [1].

Мы начнем этот параграф с этого описания.

Всюду в дальнейшем мы фиксируем соболевский индекс $\ell \geqslant 2$ и будем, как правило, обозначать пространства $\mathcal{A}_\ell$, $\mathcal{G}_{\ell+1}$ и $\mathcal{O}_\ell$ просто через $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$ и $\mathcal{O}$ соответственно.

Пусть V - векторное пространство со скалярным произведением

$(\cdot,\cdot)$. Тогда на его второй внешней степени $\Lambda^2 V$ существует индуцированное скалярное произведение, задаваемое формулой

$$(v \wedge w,\ v' \wedge w') = (v,v')(w,w') - (v,w')(v',w). \tag{2.2}$$

В частности,

$$|v \wedge w|^2 = |v|^2\ |w|^2 - (v,w)^2. \tag{2.3}$$

Хорошо известно, что существует изоморфизм пространства $\Lambda^2 V$ с алгеброй Ли $so(V)$ кососимметрических эндоморфизмов векторного пространства V, задаваемый формулой

$$(v \wedge w).u = (w,u)\, v - (v,u)\, w, \tag{2.4}$$

где $v \wedge w \in \Lambda^2 V$, $u \in V$, а точкой обозначено действие элемента $v \wedge w$ на векторное пространство V. Это действие превращает $\Lambda^2 V$ в алгебру Ли с умножением

$$\begin{aligned}[][v \wedge w,\ v' \wedge w'] &= -(v,v')\, w \wedge w' + (v,w')\, w \wedge v' + \\ &+ (w,v')\, v \wedge w' - (w,w')\, v \wedge v' = \\ &= ((v \wedge w)\cdot v') \wedge w' + v' \wedge ((v \wedge w)\cdot w').\end{aligned} \tag{2.5}$$

В случае, когда $V = \mathbb{R}^4$, оператор Ходжа $*$ задает операторы проектирования $p_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm *)$ из $\Lambda^2 V$ на автодуальное подпространство $\Lambda^2_+ V$ и на антиавтодуальное подпространство $\Lambda^2_- V$ соответственно. Для краткости мы будем обозначать образы $p_\pm(v \wedge w)$ просто через $(v \wedge w)_\pm$. Относительно введенной выше скобки Ли (2.5) разложение $\Lambda^2 V \cong \Lambda^2_+ V \oplus \Lambda^2_- V$ соответствует изоморфизму алгебр Ли $so(4) \cong so(3) \oplus so(3)$, а метрика (2.2) соответствует взятой с коэффициентом $-1/4$ форме Киллинга на каждом из прямых слагаемых $\Lambda^2_\pm V = so(3)$. Поскольку $p_\pm$ являются морфизмами алгебры Ли, мы имеем

$$[(v \wedge w)_+,\ (v' \wedge w')_-] = 0, \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}[][v \wedge w,\ (v' \wedge w')_\pm] &= [(v \wedge w)_\pm,\ (v' \wedge w')_\pm] = \\ &= [v \wedge w,\ v' \wedge w']_\pm.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Рассмотрим теперь какое-либо риманово многообразие M. Риманова метрика задает изоморфизмы $TM \cong T^*M$ и $\Lambda^2 TM \cong \Lambda^2 T^*M$ и индуцирует метрику и структуру алгебры Ли на расслоении Λ^2T^*M по формулам (2.2) и (2.5). Если многообразие M ориентировано, оператор Ходжа определяет подрасслоения $\Lambda^2_\pm(TM)$. Обозначим через Q SO(3) - расслоение ортонормированных реперов расслоения Λ^2_+TM и пусть P - единственное поднятие Q до связного главного SU(2) - расслоения. Поскольку $su(2) \cong so(3) = \Lambda^2_+\mathbb{R}^4$, существует естественное отождествление $\Lambda^2_+TM = \mathrm{Ad}P$ расслоений алгебр Ли с метриками.

В случае, когда M - это четырехмерная сфера S^4, это расслоение P есть не что иное, как SU(2) - расслоение над S^4 с инстантонным числом K = 1 (подробности см. в [2]). Поэтому мы можем описать действие конформной группы на пространстве связностей $\mathcal{A}$. Это описание получается следующим образом. Любой диффеоморфизм Φ сферы S^4 индуцирует отображения расслоений

$$\Phi_* : TS^4 \to TS^4 \text{ и } \Lambda^2\Phi_* : \Lambda^2TS^4 \to \Lambda^2TS^4.$$

В случае, когда диффеоморфизм Φ является конформным и сохраняет ориентацию, отображение $\Lambda^2\Phi_*$ коммутирует с оператором Ходжа и, следовательно, сохраняет подрасслоение $\Lambda^2_+TS^4$. Если $\Phi^*g = \gamma^2g$, то отображение $\Lambda^2\Phi_*$ не сохраняет нормы (разумеется, за исключением случая, когда $\gamma \equiv 1$). Однако $\gamma^{-2}\Lambda^2\Phi_*$ очевидным образом сохраняет нормы и, следовательно, индуцирует морфизм расслоения Q, переводящий элемент $\{(e_i\wedge e_j)_+(x)\}$ в $\{\gamma^{-2}(x)(\Phi_*e_i\wedge\Phi_*e_j)_+\}$. Таким образом, группа SO(5,1) действует на расслоении Q и, значит, на пространстве связностей этого расслоения. Но связности на Q находятся во взаимно однозначном соответствии со связностями на накрывающем расслоении P, что задает действие группы SO(5,1) на пространстве $\mathcal{A}$.

Займемся теперь конформными векторными полями на сфере S^4. Мы будем использовать следующие обозначения. Через x будет обозначаться точка сферы S^4 (иногда рассматриваемая как единичный вектор в $\mathbb{R}^5$), $\{e_i\}$ будет локальный ортонормированный репер в TS^4 и (θ^i) - дуальный репер. Репер будет называться специальным в точке x, если ковариантные производные сечений e_i обращаются в нуль в этой точке. По повторяющимся индексам будет подразумеваться суммирование. Связность ∇ Леви-Чивита на TM индуцирует связности на всех ассоциированных векторных расслоениях, в частности, на расслоении $\Lambda^2_+TS^4$. Мы будем обозначать эти связности по-прежнему через ∇ или же, в слечае необходимости, будем указывать соответствующее ассоциирующее представление (например, $\Lambda^2_+\nabla$). Связность, сопряженная к ∇, будет обозначаться через ∇^*.

Каждый вектор $v \in \mathbb{R}^5$ определяет линейную функцию $f_v = (v,\cdot)$ на сфере S^4. Взятый со знаком минус градиент этой функции

$$V(x) = - \operatorname{grad} f_v(x) = (v,x)\, x - v$$

имеет ковариантную производную

$$(\nabla_Y V)(x) = (\partial_Y V)^T(x) - f_v(x)\, Y, \tag{2.8}$$

где через ∂ обозначена обычная производная по направлению в $\mathbb{R}^5$ и $T : \mathbb{R}^5 \to T_xS^4$ означает ортогональную проекцию. Таким образом, для произвольных касательных векторов Y и Z мы имеем

$$(\mathcal{L}_V g)(Y,Z) = g(\nabla_Y V,\, Z) + g(Y,\, \nabla_Z V) = 2\, f_v\, g(X,Y),$$

откуда $\mathcal{L}_V g = 2\, f_v g$. Следовательно, каждое V является конформным векторным полем на S^4.

Предложение 2.1.

Имеют место следующие соотношения:

i) $|V|^2 = |\operatorname{grad} f_v|^2 = |v|^2 - f_v^2$;

ii) $\nabla\, df_v = - f_v g$;

iii) $\nabla^*\nabla\, f_v = 4\, f_v$;

iv) $\nabla^*\nabla\, V = V$.

Кроме того, поток Φ_t^V, порожденный векторным полем V, переводит метрику g в

$$(\Phi_t^V)^* g = \gamma_V(t)^2 g, \tag{2.9}$$

$$\text{где } \gamma_V(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(|v|t) - \dfrac{f_v}{|v|}\operatorname{sh}(|v|t)}. \tag{2.10}$$

Доказательство.

(i). Это утверждение вытекает непосредственно из определения векторного поля V.

(ii). Для любых векторных полей $Y,Z \in TS^4$ мы имеем

$$(\nabla\, df_v)(Y,Z) = \langle\nabla_Y df_v, Z\rangle = g(-\nabla_Y V, Z) = -f_v g(Y,Z).$$

(iii). $\nabla^*\nabla f_v = -(\nabla\, df_v)(e_i,e_i) = f_v g(e_i,e_i) = 4f_v$.

(iv). Проведем вычисления в специальном репере в произвольной точке $x \in S^4$. Имеем

$$(\nabla^*\nabla V)(x) = -\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} V\Big|_x = -\nabla_{e_i}(f_v, e_i)\Big|_x =$$

$$= -\langle df_v, e_i\rangle\, e_i\Big|_x = (V, e_i)\, e_i\Big|_x = V(x).$$

Наконец, положим

$$\gamma(t) = e^{\int_0^t (\Phi_t^V)^* f_v ds} \quad \text{и}$$

$$h(t) = \gamma^{-2}(t)(\Phi_t^V)^* g.$$

Тогда

$$\frac{dh}{dt} = \gamma^{-2}(\,-2\,(\Phi_t^V)^* f_v)(\Phi_t^V)^* g + \gamma^{-2}(\Phi_t^V)^* \mathcal{L}_V g =$$

$$= \gamma^{-2}(\Phi_t^V)^* g[-2(\Phi_t^V)^* f_v + 2(\Phi_t^V)^* f_v] = 0.$$

Следовательно, функция h постоянна и поскольку $h(0) = g$, мы получаем соотношение (2.9). Так как векторное поле V коммутирует со своим собственным потоком Φ_t^V, функция $\rho(t) = (\Phi_t^V)^* f_v$ удовлетворяет уравнению

$$\rho'(t) = (\Phi_t^V)^*(V(f_v)) = (\Phi_t^V)^*(\langle df_v, V\rangle).$$

Но согласно (i) мы имеем

$$\langle df_v, V\rangle = -|V|^2 - f_v^2 - |v|^2 ;$$

следовательно,

$$\rho' = \rho^2 - |v|^2.$$

Стало быть, функция $\gamma^{-1}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\gamma^{-1})''(t) = [-\rho\gamma^{-1}]' = \gamma^{-1}[\rho^2 - \rho'] = \gamma^{-1}|v|^2$$

с начальными условиями $\gamma^{-1}(0) = 1$ и $(\gamma^{-1})'(0) = -\rho(0) = -f_v$. Единственное решение этого уравнения дает нам функцию (2.10).

Предложение 2.1, тем самым, полностью доказано.

Замечание. В дальнейшем мы будем использовать следующие сокращенные обозначения:

$$\left.\begin{aligned} r &= |v|, \\ a_r &= \operatorname{ch} r, \\ b_r &= \frac{1}{r}\operatorname{sh} r,\ b_0 = 1, \\ \gamma_r &= \frac{1}{a_r - b_r f_r} \end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

Отметим теперь, что для любого ориентированного риманова четырехмерного многообразия M существует естественное конформно-инвариантное вложение

$$\alpha : TM \to T^*M \otimes \Lambda^2_+TM,$$

задаваемое правилом

$$\alpha(Y) = \theta^i \otimes (e_i \wedge Y)_+.$$

Так как проекция p_+ ковариантно постоянна, то

$$\nabla_Y(\alpha(Z)) = \alpha(\nabla_Y Z),$$

где ∇ - связность Леви-Чивита.

Связность Леви-Чивита $\nabla = \nabla^0$ на S^4 является единственной SO(5) - инвариантной связностью на TS^4. Соответствующая однородная связность $A_0 = \Lambda^2\nabla^0$ на $\Lambda^2_+TS^4$ автодуальна; мы будем называть ее стандартным инстантоном и рассматривать как отмеченную точку многообразия M_1. Мы можем получить другие автодуальные связности с помощью конформных диффеоморфизмов. В самом деле, для каждого $v \in \mathbb{R}^5$ обозначим через ∇^v связность на TS^4, задаваемую формулой

$$\nabla^v Y = \gamma_v (\Phi_v^* \nabla) \gamma_v^{-1} Y, \quad Y \in \Gamma(TS^4),$$

где

$$(\Phi_v^* \nabla)_X Y = \Phi_{v*}^{-1} (\nabla_{\Phi_{v*} X} \Phi_{v*} Y).$$

Связность ∇^v является прообразом связности ∇^0 при сохраняющем нормы автоморфизме $\gamma^{-1}\Phi_{v*}$ расслоения TS^4 и, следовательно, определяет связность на Q. Отвечающая ей связность на $\Lambda_+^2 TS^4$ имеет вид:

$$\Lambda^2 \nabla^v = \gamma_v^2 (\Lambda_+^2 \Phi_v^* \nabla) \gamma_v^{-2}.$$

Предложение 2.2.

Для каждого вектора $v \in \mathbb{R}^5$ связность $\Lambda^2\nabla^v$ на $\Lambda_+^2 TS^4$ согласована со стандартной метрикой на $\Lambda_+^2 TS^4$, автодуальна и удовлетворяет следующим условиям:

(i) $\Lambda^2\nabla^v = \Lambda^2\nabla^0 - b_v \gamma_v \mathrm{ad}(\alpha(V))$,

(ii) $F^v = \Phi_v^* F^0 = \gamma_v^2 F^0$,

где F^v - кривизна связности $\Lambda^2 \nabla^v$.

Доказательство.

Связности ∇^v ассоциированы с расслоением Q и поэтому согласованы со стандартной метрикой. Сопряжение ковариантной производной с помощью функции не оказывает влияния на кривизну, поэтому $F^v = \Phi_v^* F^0$. Но $F^0 = \Lambda_+^2 R$ получается из риманова тензора кривизны R на S^4, задаваемого формулой

$$R(X,Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y. \tag{2.12}$$

Поэтому $\Phi_v^* F^0 = \gamma_v^2 F^0$. Отсюда следует автодуальность и свойство (ii).

Чтобы доказать свойство (i), заметим, что связность $\Phi_v^* \nabla$ согласована с метрикой $\Phi_v^* g = \gamma_v^2 g$, в то время как $\Lambda^2 \Phi_v^* \nabla$ согласована со стандартной метрикой на TS^4. Несложное вычисление показывает, что

$$(\Phi^*\nabla)_Y Z = \nabla_Y Z + Y(\phi)Z + Z(\phi)Y - g(Y,Z)\ \mathrm{grad}\phi,$$

где $\phi = \log \gamma_v$. Следовательно,

$$\nabla^v_Y Z = \nabla_Y Z + Z(\phi)Y - g(Y,Z)\ \mathrm{grad}\phi = \\ = \nabla_Y Z + (Y \wedge \mathrm{grad}\phi)\cdot Z, \qquad (2.13)$$

или равносильно,

$$\nabla^v = \nabla + \theta^i \otimes (e_i \wedge \mathrm{grad}\phi).$$

Свойство (i) получается теперь, если применить представление Λ^2_+, использовать соотношение (2.7) и заметить, что

$$\mathrm{grad}\phi = -\gamma_v\ \mathrm{grad}(a_v - b_v f_v) = -\gamma_v b_v V.$$

Предложение 2.2 доказано.

Предложение 2.3.

Кривизна F^0 удовлетворяет следующим условиям:

(i) $F^0(X,Y) = \mathrm{ad}(X \wedge Y)_+$;

(ii) $F^0 = \frac{1}{2}(\theta^i \wedge \theta^j) \otimes (e_i \wedge e_j) = \frac{1}{2}(\theta^i \wedge \theta^j)_+ \otimes (e_i \wedge e_j)_+$.

Доказательство.

В силу (2.12) и (2.5) мы имеем

$$(\Lambda^2 R)(X,Y)(Z \wedge W) = ((X \wedge Y)\cdot Z) \wedge W + Z \wedge ((X \wedge Y)\cdot W) = \\ = [X \wedge Y,\ Z \wedge W],$$

так что $(\Lambda^2 R)(X,Y) = \mathrm{ad}(X \wedge Y)$. Ограничивая это равенство на $\Lambda^2_+ TS^4$ и используя соотношение (2.7), мы получаем свойство (i). Записав (i) в локальном репере, мы получим первую часть свойства (ii). Заметим теперь, что

$$(\theta^i \wedge \theta^j)_- \otimes (e_i \wedge e_j)_+ = 0, \qquad (2.14)$$

поскольку левая часть этого равенства является скаляром в неприводимом представлении $\Lambda^2_- \otimes \Lambda^2_+$ группы SO(4). Отсюда следует вторая часть свойства (ii). Предложение 2.3, тем самым, полностью доказано.

Теперь мы в состоянии заняться диффеоморфизмом между $\mathcal{M}_1$ и $\mathbb{R}^5$, упомянутом в начале этой главы. Заметим, прежде всего, что каждый вектор $v \in \mathbb{R}^5$ задает векторное поле V на четырехмерной сфере S^4 и $\mathrm{Ad}P$ - значную 1-форму X_v, определяемую соотношением

$$X_v = \alpha(V) \in \Omega^1(\mathrm{Ad}P)$$

(вложение $\alpha : TM \to T^*M \otimes \Lambda^2_+ TM$ было определено после (2.11)). Кроме того, $v \in \mathbb{R}^5$ задает также автодуальную связность на Q по формуле (1) предложения 2.2. Чтобы упростить обозначения, мы будем опускать символы Λ^2 и ad в этой формуле и будем писать ∇ вместо ∇^0. Предложение 2.2 определяет аффинное отображение

$$\mathcal{S} : \mathbb{R}^5 \to \mathcal{A},$$

задаваемое равенством

$$\mathcal{S}(v) = \nabla^v = \nabla - b_v \gamma_v X_v. \tag{2.15}$$

Образом этого отображения служат автодуальные связности, которые получаются применением конформных преобразований вида $\Phi^v = \exp(V)$ к стандартному инстантону. Так как каждый конформный диффеоморфизм сферы S^4 может быть представлен в виде $g \cdot \exp(V)$ для некоторого конформного векторного поля V и некоторого элемента $g \in SO(5)$, то результаты Атья - Хитчина - Зингера ([1], §9) показывают, что образ $\mathcal{S}$ проектируется в $\mathcal{A}|\mathcal{G}$ на пространство модулей $\mathcal{M}_1$. Кроме того, поскольку в силу предложения 2.2. (ii) модуль кривизны $|F^v| = \gamma_v^2 |F^0|$ калибровочно инвариантен, а функции γ_v^2, γ_w^2 различны при $v \neq w$, то композиция

$$\mathbb{R}^5 \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{A}|\mathcal{G}$$

инъективна и, значит, является гомеоморфизмом.

Оставшаяся часть этой главы будет посвящена доказательству следующего утверждения.

Теорема 2.4.

Отображение S индуцирует диффеоморфизм

$$\bar{S} = \pi \circ S : \mathbb{R}^5 \to M_1$$

и, следовательно, задает координаты на многообразии M_1.

Первый шаг доказательства теоремы 2.4 заключается в вычислении производной для S. Для этого найдем, прежде всего, альтернативное выражение для X_v. Предложения (2.2) (ii) и (2.3) (ii) показывают, что внутреннее произведение $i_Y F^v$ векторного поля $Y \in TS^4$ и F^v (определяемое равенством $(i_Y F^v)(Z) = F^v(Y,Z)$) имеет вид

$$i_Y F^v = \frac{1}{2}\gamma_v^2(Y^i\theta^j - Y^j\theta^i) \otimes (e_i \wedge e_j)_+ =$$

$$= -\gamma_v^2\theta^i \otimes (e_i \wedge Y)_+ = -\gamma_v^2\,\alpha(Y). \qquad (2.16)$$

Здесь $Y^i = \langle\theta^i, Y\rangle$.

Положив в этой формуле $v = 0$ и взяв в качестве Y конформное векторное поле V, мы получим

$$X_v = \alpha(V) = -i_V F^0. \qquad (2.17)$$

Предложение 2.5.

Производная

$$Y_v^w = (DS)_v(w) = \frac{d}{dt} S(v + tw)\Big|_{t=0}$$

отображения S в точке $v \in \mathbb{R}^5$ задается формулой

$$Y_v^w = \begin{cases} -\gamma_v^2 X_v = -\gamma_v^2\alpha(V) = i_V F^v, & \text{если } w = v, \\ -b_v^2\gamma_v^2 f_w X_v - b_v\gamma_v X_w = \alpha(b_v^2\gamma_v^2 f_w V + b_v\gamma_v W), & \text{если } w \perp v \end{cases} \qquad (2.18)$$

Доказательство.

Положим $v_t = v + tw$, $a_t = a_{v_t}$ и т.д. и обозначим штрихом производную по t в точке $t = 0$. Простые вычисления показывают, что

$$a' = (v,w)b_v, \quad b' = (a_v - b_v)|v|^{-2}(v,w), \quad f' = f_w.$$

Следовательно,

$$Y_v^w = -(b_t\gamma_t)'X_v - b_v\gamma_v X_w = -\alpha[(b_t\gamma_t)'V + b_v\gamma_v W]. \quad (2.19)$$

Используя равенство

$$a_v^2 - b_v^2|v|^2 = 1,$$

мы получаем, что

$$(b_t\gamma_t)' = \gamma_v^2[(1 - a_v b_v)|v|^{-2}(v,w) + b_v^2 f_w]. \qquad (2.20)$$

Если $v \perp w$, это равенство превращается в равенство

$$(b_t\gamma_t)' = \gamma_v^2 b_v^2 f_w.$$

В случае, когда $v = w$, соотношение $b_v f_v = a_v - \gamma_v^{-1}$ показывает, что

$$(b_t\gamma_t)' + b_v\gamma_v = \gamma_v^2.$$

Комбинируя эти формулы и используя соотношение (2.17), мы получаем требуемые равенства (2.18). Предложение 2.5, тем самым, доказано.

Займемся теперь описанием касательного пространства $T_{\nabla^v}\mathcal{M}_1$; из этого описания будет вытекать, в частности, что $\bar{S}$ – локальный диффеоморфизм. Так как мы знаем, что $\bar{S}$ является гомеоморфизмом, то этим будем завершено доказательство теоремы 2.4.

Теорема 2.6.

В точке $A = \nabla^v \in \mathcal{A}$ касательное пространство $T_A\mathcal{M}_1$ имеет вид:

$$T_A\mathcal{M}_1 = \{i_{\underline{W}}F^v \mid \underline{W} = -\nabla_w \text{ для некоторого } w \in \mathbb{R}^5\}.$$

Кроме того, отображение $\bar{S} = \pi S$ является локальным диффеоморфизмом.

Доказательство.

Всякое конформное векторное поле $W = -\nabla f_w$, $w \in \mathbb{R}^5$ определяет поток $\Phi_t = \Phi_t^w$ на M. Как уже упоминалось в начале этой главы, поток Φ_t поднимается до потока $\tilde{\Phi}_t$ на главном расслоении P. Обозначим через $\tilde{W}$ инфинитезимальную образующую потока $\tilde{\Phi}_t$, пусть $G = SU(2)$ означает структурную группу расслоения P и $\mathfrak{g}$ – алгебру Ли группы G. Так как $\tilde{\Phi}_t$ является морфизмом расслоений, накрывающим Φ_t, то $\tilde{W}$ представляет собой G-инвариантное векторное поле, накрывающее W.

Пусть теперь $w_A \in \Omega^1(P;\mathfrak{g})$ – одномерная форма, отвечающая связности A. Тогда

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t^* w_A)\Big|_{t=0} = \mathcal{L}_{\tilde{W}} w_A = i_{\tilde{W}} dw_A + d i_{\tilde{W}} w_A =$$

$$= 1_{\tilde W}(dw_A + \frac{1}{2}[w_A, w_A]) + [w_A, 1_{\tilde W} w_A] + d(1_{\tilde W} w_A) =$$

$$= 1_{\tilde W}\tilde F_A + d\tilde u + [w_A, \tilde u], \qquad (2.21)$$

где $\tilde u = 1_{\tilde W} w_A$ и $\tilde F_A$ — кривизна, рассматриваемая как $\mathfrak{g}$-значная 2-форма на P. Заметим, что $\tilde u$ удовлетворяет соотношению

$$R_h^* \tilde u = (\mathrm{Ad} h^{-1})(\tilde u) \text{ для } h \in G$$

и, следовательно, представляет сечение $u \in \Gamma(\mathrm{Ad}P)$ расслоения AdP. Стало быть, как утверждение об AdP-значных 1-формах на S^4, соотношение (2.21) может быть переписано в виде:

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t^* A)\Big|_{t=0} = 1_W F_A + d_A u . \qquad (2.22)$$

Заметим также, что

$$\Phi_t^* A = (\Phi_t^W)^* A = (\Phi_t^W)^* (\Phi_1^V)^* A^0 = (\Phi_1^V \Phi_1^{tW})^* \nabla^0 .$$

Группа SO(5) является максимальной компактной подгруппой в SO(5,1) и существует гладкое разложение $SO(5,1) = SO(5)\cdot\mathbb{R}^5$, где $\mathbb{R}^5$ подмногообразие $\{\Phi_t^V \mid V \in \mathbb{R}^5\}$ в SO(5,1). Следовательно, существуют такие гладко зависящие от параметра t элементы $g_t \in SO(5)$ и $z_t \in \mathbb{R}^5$, что $\Phi_1^V \Phi_1^{tW} = g_t \Phi_1^{z_t}$. Так как $g_t^* \nabla^0 = \nabla^0$ и $(\Phi_1^z)^* \nabla^0 = \mathcal{S}(z)$, то $\Phi_t^* A = \mathcal{S}(z_t)$. Стало быть, если положить

$$z' = \frac{d}{dt} z_t \Big|_{t=0},$$

то уравнение (2.22) примет вид

$$1_W F_A = \mathcal{S}_*(z') - d_A u . \qquad (2.23)$$

Но $d_A^- \circ d_A = 0$ и, как указывалось выше, $d_A^- \circ \mathcal{S}_* = 0$; поэтому мы имеем

$$d_A^-(1_W F_A) = 0. \qquad (2.24)$$

Фиксируем теперь некоторую точку $x \in S^4$ и специальный репер (e_i) в этой точке. Тогда в точке x имеют место соотношения

$$d_A^*(1_W F^V) = d_A^*(-\gamma^2 \alpha(W)) = \nabla_{e_i}^V(\gamma^2(e_i \wedge W)_+) =$$

$$= (\mathrm{grad}(\gamma^2) \wedge W + \gamma^2 \nabla^V e_i \wedge W + \gamma^2 e_i \wedge \nabla^V W)_+ . \qquad (2.25)$$

Поскольку

$$\mathrm{grad}(\gamma^2) = -2\,b\,\gamma^3\,V,$$

то в силу (2.13) и (2.4) мы имеем

$$\nabla^V_i W = \nabla^0_i W - b\,\gamma\,(e_i \wedge V)\cdot W =$$

$$= f_W e_i - b\,\gamma\,\langle V,W\rangle\, e_i + b\,\gamma\,\langle e_i,W\rangle\, V. \qquad (2.26)$$

Аналогично, в точке $x \in S^4$ выполняется соотношение

$$\nabla^V_i e_i = 3\,b\,\gamma\,V.$$

Подстановка в (2.25) показывает, что

$$d^*_A(1_W F_A) = 0 \qquad (2.27)$$

в точке $x \in S^4$ и, в силу ее произвольности, всюду на сфере S^4.

Итак, мы установили, что

$$1_W F_A \in \mathrm{Ker}(d^*_A) \cap \mathrm{Ker}(d^-_A)$$

для любого векторного поля W. Так как $\{1_W F_A\} = \{\gamma^2\alpha(W)\}$ является пятимерным подпространством в $\Omega^1(\mathrm{AdP})$, то векторы $1_W F_A$ порождают касательное пространство $T_A\mathcal{M}_1$. Но из соотношения (2.23) вытекает, что

$$h_A(\mathcal{S}_*(z')) = 1_W F_A\ ;$$

следовательно, отображение

$$h : \{Y^W_V\} \to T_A\mathcal{M}_1$$

сюръективно. Кроме того, из предложения 2.5 легко выводится, что $\dim\{Y^W_V\} = 5$. Следовательно, ограничение $h\big|_{\mathrm{im}\mathcal{S}}$ является изоморфизмом и, значит, изоморфизмом является и $\pi \circ \mathcal{S}$. Таким образом, мы получим, что $\pi \circ \mathcal{S}$ – локальный диффеоморфизм, что и требовалось доказать.

Глава 3. Метрика пространства $\mathcal{M}_1$ модулей инстантонов на четырехмерной сфере S^4.

В этой главе мы получим точную формулу для метрики g на пространстве $\mathcal{M}_1$ и с ее помощью опишем геометрическую форму этого пространства. Наш подход заключается в прямом вычислении выражения $\bar{S}^*g$ для метрики в координатной системе

$$\bar{S} = \pi S : \mathbb{R}^5 \to \mathcal{M}_1,$$

введенной в предыдущей главе. В точке $v \in \mathbb{R}^5$ эта метрика задается соотношением

$$(\bar{S}^*g)_v(w,w) = g(\pi_* Y_v^w, \pi_* Y_v^w) = \|hY_v^w\|^2,$$

где $Y_v^w = (DS)_v(w)$ определяется формулой (2.18). Таким образом, мы должны найти горизонтальные проекции hY_v^w векторных полей Y_v^w в точках $S(v)$. Мы начнем с того, что проверим, являются ли векторные поля Y_v^w горизонтальными.

Предложение 3.1.

Имеет место следующее соотношение:

$$d^*_{\nabla^v} Y_v^w = 2\, b_v^2\, \gamma_v^2 (V \wedge W)_+.$$

Доказательство.

Из доказательства предложения 2.5 мы имеем, что

$$Y_v^w = -\alpha(Z),$$

где $Z = (b\gamma)'V + b\gamma W$. Фиксируем некоторую точку $x \in S^4$ и выберем специальный репер $\{e_i\}$ в этой точке. Тогда в точке x выполняются соотношения

$$\begin{aligned} d^*_{\nabla^v} Y_v^w &= e_k \lrcorner \nabla_k^v[\theta^i \otimes (e_i \wedge Z)_+] = (\nabla_i^v e_i \wedge Z + e_i \wedge \nabla_i^v Z)_+ = \\ &= (\nabla_i^v e_i \wedge Z + \operatorname{grad}(b\gamma)' \wedge V + \operatorname{grad}(b\gamma) \wedge W + \\ &\quad + (b\gamma)' e_i \wedge \nabla_i^v V + b\gamma e_i \wedge \nabla_i^v W)_+ . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Но

$$\operatorname{grad}(b\gamma) = -b^2\gamma^2 V,$$

а согласно (2.20)

$$\operatorname{grad}(b\gamma)' = - b^2\gamma^2 W.$$

Далее, в (2.26) мы вычислили $\nabla_i^v W$ и, кроме того, нашли, что $\nabla_i^v e_i = 3b\gamma W$ в точке $x \in S^4$. Предложение 3.1 вытекает теперь из соотношений (3.1).

Чтобы двигаться дальше, мы введем две функции, которые встретятся нам в последующих вычислениях. Для $v \in \mathbb{R}^5$ положим $r = |v|$ и определим, используя обозначения (2.11), функцию

$$A(r) = \frac{1}{b_v^2|v|^2} + 3\,\frac{b_v - a_v}{b_v^5|v|^4} = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 r} + \frac{3}{\operatorname{sh}^4 r} - \frac{3r\cdot\operatorname{ch} r}{\operatorname{sh}^5 r}$$

и функцию

$$B(r) = \frac{1}{2 - A(r)}\left[\frac{3(a_v b_v - 1)}{b_v^2|v|^2} - a_v b_v A(r)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{r^2(2 - A(r))}\left[3\operatorname{cth}(r) - \frac{3r}{\operatorname{sh}^2 r} - \operatorname{ch} r\cdot\operatorname{sh} r\cdot A(r)\right]^2.$$

Мы будем вычислять L^2-нормы векторных полей Y_v^W и $i_Z F$, выражая их как интегралы от функций γ_v и f_v по сфере S^4. Конкретные интегралы, которые понадобятся нам в дальнейшем, представляют собой предмет следующего предложения.

Предложение 3.2.

Пусть γ, a, b, A означают, соответственно, функции γ_v, a_v, b_v и $A(|v|)$. Тогда

(i) $\displaystyle\int\gamma^4 = \frac{8}{3}\pi^2$ (независимо от v) ;

(ii) $\displaystyle\int\gamma^4(|v|^2 - f_v^2) = \frac{16}{3}\pi^2\,|v|^2 A$;

(iii) $\displaystyle\int\gamma^3 = \frac{4\pi^2}{b^2|v|^2}\left(a - \frac{1}{b}\right)$, если $v \neq 0$;

(iv) для $w \perp v$, $\displaystyle\int\gamma^4 f_w^2 = \frac{4}{3}\pi^2|w|^2 A$.

Все интегралы в этих формулах берутся по четырехмерной сфере S^4.

Для доказательства этого предложения нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 3.3.

$$\int_{S^4} f_v f_w = \frac{8}{15}\pi^2(v,w).$$

Доказательство.

Мы имеем

$f_v = (v,x) = |v| \cos\theta$, где θ – угол между векторами v и x.

Следовательно,

$$\int_{S^4} f_v^2 = |v| \int_0^\pi \cos^2\theta \cdot \mathrm{Vol}(S^3)\cdot \sin^3\theta \, d\theta = \frac{8}{15}\pi^2|v|^2,$$

поскольку объем единичной трехмерной сферы $\mathrm{Vol}(S^3) = 2\pi$. Требуемое утверждение получается теперь путем применения формулы поляризации. Лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4.

Пусть $\alpha,\beta > 0$ и $\alpha^2 - \beta^2 = 1$. Тогда

(i) $$\int_0^\pi \frac{\sin^5\theta}{(\alpha-\beta\cos\theta)^4}\, d\theta = \frac{8}{3\beta^2} + \frac{8}{\beta^4} + \frac{4\alpha}{\beta^5}\ln\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta};$$

(ii) $$\int_0^\pi \frac{\sin^3\theta}{(\alpha-\beta\cos\theta)^3}\, d\theta = \frac{2}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^3} + \ln\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}.$$

Доказательство.

Сделаем в обоих случаях замену переменной $u = \cos\theta$. Тогда

$$\int_0^\pi \frac{\sin^5\theta}{(\alpha-\beta\cos\theta)^4}\, d\theta = \int_{-1}^1 \frac{(1-u^2)^2 du}{(\alpha-\beta u)^4};$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3\theta}{(\alpha-\beta\cos\theta)^3}\, d\theta = \int_{-1}^1 \frac{(1-u^2) du}{(\alpha-\beta u)^3},$$

и требуемые результаты получаются интегрированием стандартных рациональных функций. Лемма 3.4, тем самым, доказана.

Доказательство предложения 3.2.

(i). Поток Φ_t^v конформного векторного поля V удовлетворяет уравнению (2.9), поэтому элемент объема $(\Phi_t^v)^* g$ представляет собой умноженный на γ_v^4 элемент объема dv_g, построенный по метрике g. Так как интегралы инвариантны относительно сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов, то

$$\int_{S^4} \gamma^4 dv_g = \int_{S^4} (\Phi_t^v)^* dv_g = \int_{S^4} dv_g = \mathrm{Vol}(S^4) = \frac{8}{3}\pi^2.$$

(ii). Для каждого ненулевого вектора $v \in \mathbb{R}^5$ положим $\alpha = \mathrm{ch}|v|$, $\beta = \mathrm{sh}|v|$ и $f_v = |v| \cos\theta$. Тогда

$$\gamma_v = \frac{1}{\alpha - \beta\cos\theta} \text{ и}$$

$$\int_{S^4} \gamma_v^4(|v|^2 - f_v^2) = |v|^2 \int_0^\pi (\alpha - \beta\cos\theta)^{-4} \mathrm{Vol}(S^3) \sin^5\theta \, d\theta.$$

В силу леммы 3.4 этот интеграл равен

$$|v|^2 \cdot 2\pi^2 \cdot \frac{8}{3} A(|v|).$$

(iii). Из пункта (ii) леммы 3.4 следует, что интеграл

$$\int_{S^4} \gamma_v^3 = \mathrm{Vol}(S^3) \int_0^\pi \frac{\sin^3\theta}{(\alpha - \beta\cos\theta)^3} d\theta$$

равен $4\pi^2 b^{-2}(\alpha - \beta^{-1}|v|)$, где $\alpha = a$ и $\beta = b|v|$.

(iv). Как и прежде, пусть θ - угол между векторами v и $x \in S^4$ и пусть φ - угол между вектором w и ортогональной проекцией вектора x на подпространство $H \subset \mathbb{R}^5$ векторов, перпендикулярных v. Тогда $w \in H$ и $f_w = \langle x, w\rangle = |w| \cos\varphi \sin\theta$. Следовательно,

$$\int_{S^4} \gamma_v^4 f_w^2 = \int_0^\pi (\alpha - \beta\cos\theta)^{-4} |w|^2 \left[\int_{\Sigma_\theta} \sin^2\theta \cos^2\varphi \right] d\theta,$$

где Σ_θ - трехмерная сфера радиуса $\sin\theta$ в пространстве H. Внутренний интеграл равен $\sin^5\theta \cdot I$, где I - это интеграл

$$\int_{S^3} \cos^2\varphi = \int_{S^3} x^2 = \frac{1}{4}\int_{S^3} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) =$$

$$= \frac{1}{4}\,\mathrm{Vol}(S^3) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Требуемый результат следует теперь из двух последних соотношений, леммы 3.4 (ii) и определения функции $A(r)$. Предложение 3.2, тем самым, полностью доказано.

Предложение 3.5.

(i). $\|Y_v^v\|^2 = \|i_v F^v\|^2 = 8\pi^2|v|^2 A(|v|)$.

(ii). Если $w \perp v$, то $\|i_w F^v\|^2 = 2\pi^2|w|^2(2 - A(|v|))$.

Доказательство.

Вычисляя норму векторного поля $i_W F^v = -\gamma_v^2\alpha(W)$ с помощью предложения 2.1 (i) найдем, что

$$\|i_W F^v\|^2 = \frac{3}{2}\int \gamma^4(|w|^2 - f_w^2).$$

Утверждение (i) получается теперь, если взять $w = v$ и применить предложение 3.2 (ii). Утверждение (ii) следует из предложения 3.2 (ii), (iv) для случая $w \perp v$.

Предложение 3.6.

Предположим, что $w \perp v$. Тогда

(i). $\langle Y_v^w, i_W F^v\rangle = 2\pi^2|w|^2(3b^{-2}|v|^{-2}(ab-1) - abA)$;

(ii). для любого $z \perp w$ имеет место равенство

$$\langle Y_v^w, i_Z F^v\rangle = 0.$$

Доказательство.

Отправляясь от предложения 3.5, находим

$$\langle Y_v^w, i_Z F^v\rangle = \frac{3}{2}\langle b^2\gamma^2 f_w V + b\gamma W, \gamma^2 Z\rangle =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{S^4}\left\{ \gamma^4 b f_w\Big[(v,z) - f_v f_z\Big] + \gamma^3\Big[(w,z) - f_w f_z\Big] \right\}. \qquad (3.2)$$

Взяв $z = w$ и используя соотношение $b\gamma f = a\gamma - 1$, можно упростить подинтегральное выражение - оно станет равным

$$|w|^2\gamma^3 - a\gamma^4 f_w^2.$$

Интегрируя это выражение и используя предложение 3.2 (iii), 3.2 (iv), мы получаем соотношение (i). С другой стороны, в случае, когда $z \perp w$, равенство (3.2) превращается в

$$\langle Y_v^w,\ i_Z F^v\rangle = \frac{3}{2}\int_{S^4}\left\{ b\gamma^4\Big[(v,z) - f_v f_z\Big] - \gamma^3 f_z \right\} f_w.$$

Выберем теперь координаты $\{x^i\}$ в $\mathbb{R}^5$ таким образом, чтобы вектор w был направлен вдоль оси x^5. Тогда часть последнего подинтегрального выражения, находящаяся в фигурных скобках, не зависит от координаты x^5 (поскольку от x^5 не зависят функции f_v и f_z). Так как f_w и, значит, все подинтегральное выражение, является нечетной функцией переменной x^5, то интеграл обязан обратиться в нуль. Это дает соотношение (ii). Тем самым, предложение 3.6 полностью доказано.

Теорема 3.7.

(1). $\|hY_v^v\|^2 = \|Y_v^v\|^2 = 8\pi^2|v|^2 A(|v|)$.

(2). Для любого вектора $w \perp v$ выполняются соотношения

$$\|hY_v^w\|^2 = 2\pi^2|w|^2 B(|w|) \quad \text{и} \quad \langle hY_v^w,\ hY_v^v\rangle = 0.$$

Доказательство.

(1). Согласно предложению 3.1 векторное поле Y_v^v горизонтально, поэтому доказываемое соотношение непосредственно вытекает из предложения 3.5 (i).

(2). Горизонтальная часть hY_v^w векторного поля Y_v^w получается проектированием на подпространство, натянутое на векторы $\{i_Z F\}$. В силу предложения 3.6 (ii) горизонтальная часть hY_v^w имеет вид

$$hY_v^w = \frac{\langle Y_v^w, i_W F^v\rangle\ i_W F^v}{\|i_W F^v\|^2}. \tag{3.3}$$

Используя предложения 3.5 (ii), 3.6 (i) и определение функции B, мы получаем отсюда, что

$$\|hY^w_v\|^2 = 2\pi^2|w|^2B(|v|).$$

Наконец, равенство (3.3) показывает, что $\langle hY^w_v, hY^v_v\rangle$ кратна функции

$$\langle i_W F^V, i_V F^V\rangle = \langle \gamma_v^2\alpha(W), \gamma_v^2\alpha(V)\rangle = -\frac{3}{2}\int_{S^4}\gamma_v^4 f_v f_w.$$

Используя рассуждения, аналогичные тем, которые применялись при доказательстве предложения 3.6 (ii), можно показать, что этот интеграл обращается в нуль. Следовательно,

$$\langle hY^w_v, hY^v_v\rangle = 0.$$

Теорема 3.7 доказана.

Доказанная теорема позволяет нам выразить прообраз $\bar{\mathcal{S}}^*g$ метрики g в терминах стандартных координат $\{x^i\}$ на $\mathbb{R}^5$. Пусть $u_i = \partial/\partial x_i$ – единичные базисные векторные поля и $r = |x|$. Тогда векторные поля

$$w_i(x) = u_i - (x^i/r^2)x$$

удовлетворяют условию

$$w_i \perp x, \quad 1 \leqslant i \leqslant 5.$$

Следовательно,

$$\bar{\mathcal{S}}^*u_i = \frac{x^i}{r^2}\bar{\mathcal{S}}_*x + \bar{\mathcal{S}}_*w_i = \frac{x^i}{r^2}X^x_x + hX^{w_i}_x,$$

и по теореме 3.7

$$\langle\bar{\mathcal{S}}^*u_i, \bar{\mathcal{S}}^*u_j\rangle = 2\pi^2(4x^ix^jr^{-2}A(r) + \langle w_i, w_j\rangle B(r)).$$

Отсюда немедленно вытекает следующая формула для метрики.

Теорема 3.8.

Пусть g – метрика на пространстве модулей инстантонов $\mathcal{M}_1$. При диффеоморфизме

$$\mathcal{S} : \mathbb{R}^5 \to \mathcal{M}_1$$

метрика g преобразуется в метрику $\bar{\mathcal{S}}^*g = h_{ij}\,dx^i \otimes dx^j$, где

$$h_{ij} = 2\pi^2B(r)\left[\delta_{ij} + \left(\frac{4A(r)}{B(r)} - 1\right)\frac{x^ix^j}{r^2}\right]. \tag{3.4}$$

Эту формулу можно упростить специальным выбором координат. Прежде всего, мы имеем

$$\bar{S}^*g = 2\pi^2 B(r) \left\{ \sum (dx^i)^2 + C(r)(dr)^2 \right\},$$

где

$$C(r) = \frac{4A(r)}{B(r)} - 1.$$

Определим новые координаты, полагая

$$y^i = E(r)\, x^i,$$

где

$$E(r) = \exp\left[\int_0^r \frac{\sqrt{1 + C(s)} - 1}{s}\, ds \right]$$

(этот интеграл сходится, поскольку $C(s) = O(s^2)$ при $s \to 0$). Тогда функция $\rho = rE(r)$ удовлетворяет соотношению

$$\rho^2 = \sum (y^i)^2,$$

причем

$$\rho'(r) = E(r)\sqrt{1 + C(r)} > 0,$$

так что ρ представляет собой монотонно возрастающую функцию переменной r. Следовательно, отображение

$$x \longmapsto y = E(r)\, x$$

является диффеоморфизмом и уравнение

$$\rho = rE(r)$$

определяет r как гладкую функцию от ρ. В частности, мы можем определить гладкую положительную функцию $\phi(\rho)$, полагая

$$\phi(\rho)^2 = 2\pi^2 \frac{B(r)}{E(r)^2}.$$

Переписывая метрику (3.4) в этих новых координатах $\{y^i\}$, мы найдем, что

$$\bar{S}^*g = \phi(\rho)^2 \sum (dy^i)^2. \qquad (3.5)$$

Переформулируем сказанное в виде следующего утверждения.

Теорема 3.8.

Существует такой координатный диффеоморфизм

$$\bar{S} : \mathbb{R}^5 \to \mathcal{M}_1,$$

для которого прообраз естественной метрики g на $\mathcal{M}_1$ задается формулой

$$(\bar{S}^* g)_{ij} = \psi(\rho)\delta_{ij},$$

где ψ - гладкая функция переменной $\rho = |x|$.

Эта теорема вместе с явным видом функции ψ позволяет нам описать основные геометрические свойства пространства модулей инстантонов $\mathcal{M}_1$.

Теорема 3.9.

Риманово многообразие $(\mathcal{M}_1, g)$ обладает следующими свойствами.

(1). $\mathcal{M}_1$ конформно плоско.

(2). $\mathcal{M}_1$ радиально симметрично. Более точно, действие группы $SO(5)$ на S^4 индуцирует изометрию $\mathcal{M}_1$, прообраз которой при диффеоморфизме $\bar{S}$ совпадает с обычным $SO(5)$ - действием на $\mathbb{R}^5$.

(3). $\mathcal{M}_1$ имеет конечный радиус, и, следовательно, не полно.

(4). $\mathcal{M}_1$ имеет конечный объем.

Доказательство.

(1). Это утверждение немедленно следует из формулы (3.5).

(2). Очевидно, что метрика (3.5) инвариантна относительно стандартного действия группы $SO(5)$ на пятимерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^5$. По построению диффеоморфизма $\bar{S}$, это действие соответствует $SO(5)$ - действию на пространстве $\mathcal{M}_1$, индуцированному вращениями четырехмерной сферы S^4.

(3). Если задана метрика вида (3.5), то нетрудно убедиться, что радиальные линии, выходящие из начала координат (т.е. из отмеченной точки) являются геодезическими (параметризация которых не обязательно является натуральной). Покажем, что эти геодезические имеют конечную длину. С этой целью фиксируем вектор

$v \in \mathbb{R}^5$ единичной длины ($|v| = 1$) и рассмотрим луч $\{t_v\}$, $0 \leqslant t < \infty$. Касательный вектор T к этому лучу в точке tv удовлетворяет уравнению

$$\bar{S}^* T = t^{-1} Y^v_v.$$

Следовательно, согласно предложению 3.5 (1)

$$\|S^* T\|^2 = \frac{1}{t^2} \|Y^v_v\|^2 = 8\pi^2 A(t).$$

Стало быть, длина этого луча равна

$$L = 2\pi \sqrt{2} \int_0^\infty \sqrt{A(r)}\, dr. \qquad (3.6)$$

Но при $r \to \infty$, $\sqrt{A(r)} \sim \frac{2}{e^r}$ и, значит, интеграл (3.6) конечен (поскольку $A(0) = \frac{2}{5}$, точка $r = 0$ не вызывает проблем). Таким образом, пространство $\mathcal{M}_1$ не полно.

(4). Объем пространства $\mathcal{M}_1$ (впрочем, как и любого другого многообразия) вычисляется по формуле

$$\operatorname{Vol} \mathcal{M}_1 = \int_{\mathbb{R}^5} J(v)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^5, \qquad (3.7)$$

где $J(v)$ - якобиан диффеоморфизма $\bar{S} : \mathbb{R}^5 \to \mathcal{M}_1$. Этот якобиан может быть вычислен в любой не равной нулю точке $v \in \mathbb{R}^5$ следующим образом. Прежде всего, выберем ортонормированный базис $\{w_1 = \frac{v}{|v|}, w_2, w_3, w_4, w_5\}$. Согласно теореме 3.7 $\{\bar{S}_* w_i\}$ является ортонормированным базисом касательного пространства $T_{\bar{S}(v)} \mathcal{M}_1$, и, следовательно,

$$J(v) = \prod_{i=1}^{5} \|\bar{S}_* w_i\|.$$

Используя теорему 3.7 и тот факт, что

$$\bar{S}_* w_1 = \frac{Y^v_v}{|v|},$$

мы получаем

$$J(v) = 8\sqrt{2}\,\pi^5 \sqrt{A(r)}\, B^2(r),$$

где $r = |v|$. Эта функция непрерывна при $r = 0$, а для больших r мы имеем $\sqrt{A(r)} \sim \frac{2}{e^r}$, $B(r) \sim \frac{2}{r^2}$, и поэтому

$$J(v) \sim \frac{64\sqrt{2}\,\pi^2}{r^4 e^r}.$$

Следовательно, интеграл (3.7) конечен, а это означает, что многообразие $\mathcal{M}_1$ имеет конечный объем. Теорема 3.9, тем самым, полностью доказана.

Свойства (2) и (3) доказанной теоремы гласят, что пространство $\mathcal{M}_1$ может быть компактифицировано краем, который является стандартной сферой конечного радиуса. Точная форма этого утверждения такова.

Следствие 3.10.

Пространство модулей инстантонов $\mathcal{M}_1$ может быть изометрично вложено в качестве внутренней части в компактное риманово многообразие с краем $\overline{\mathcal{M}}_1$, край которого $\partial\overline{\mathcal{M}}_1$ изометричен стандартной четырехмерной сфере радиуса 2π. Кроме того, вложение $\partial\overline{\mathcal{M}}_1 \subset \overline{\mathcal{M}}_1$ является вполне геодезическим отображением.

Доказательство.

Опишем, прежде всего, те гиперповерхности в $\mathcal{M}_1$, точки которых находятся на одинаковом расстоянии от отмеченной точки A_0. В силу теоремы 3.7 эти гиперповерхности суть не что иное, как сферы $\{r = \mathrm{const}\}$ или, эквивалентно, $\{\rho = \mathrm{const}\}$. Формула 3.5 показывает, что метрика на сфере S_ρ фиксированного радиуса ρ есть умноженная на $\phi(\rho)^2$ метрика стандартной сферы того же радиуса ρ. Следовательно, S_ρ изометрична стандартной сфере радиуса

$$R(\rho) = \rho\phi(\rho) = \pi\rho\sqrt{2B(r)}. \tag{3.8}$$

Геодезические лучи, выходящие из точки A_0, имеют конечную длину L, задаваемую формулой (3.6). Нетрудно проверить, что при изменении длины дуги геодезического луча от 0 до L, переменная r меняется от

0 до ∞, а переменная ρ – от 0 до некоторого предельного значения ρ_∞. Так как при $r \to \infty$, $B(r) \sim \frac{2}{r^2}$, то из формулы (3.8) вытекает, что $R(\rho) \to R(\rho_\infty) = 2\pi$. Следовательно, замыкание $\mathcal{M}_1$ в метрической топологии является компактным многообразием и его край изометричен сфере радиуса 2π.

Вычислим теперь вторую квадратичную форму этих сфер S_r при $r \to \infty$. Используя формулу (3.9) для метрики, легко видеть, что единичная нормаль N к S_r имеет вид:

$$N = \frac{1}{\psi(\rho(r))} \cdot \frac{\partial}{\partial\rho}.$$

Прямые вычисления показывают, что для любых двух векторов X,Y, касающихся S_ρ, вторая квадратичная форма $b(X,Y) = \langle\nabla_X N, Y\rangle$ имеет вид

$$b(X,Y) = \frac{1}{\psi}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\ \ln(\rho\phi)\ \right]\langle X,Y\rangle.$$

Мы можем теперь воспользоваться определениями функций ρ и $\phi(\rho)$, чтобы выразить $b(X,Y)$ через радиус r:

$$b(X,Y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^2 r^2 AB}}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\sqrt{B}\right)\langle X,Y\rangle.$$

Вычисляя асимптотику этого выражения с помощью явного вида функций $A(r)$ и $B(r)$, мы найдем, что

$$b(X,Y) \sim \frac{3}{2\sqrt{2}}\, e^{-r}\langle X,Y\rangle \sim \frac{3d}{16\pi^2}\langle X,Y\rangle,$$

где

$$d = 2\pi\sqrt{2}\int_r^\infty \sqrt{A}\,dr \sim 2\pi\sqrt{2}\int_r^\infty 2e^{-r}dr \sim 4\pi\sqrt{2}\, e^{-r}$$

– расстояние до края многообразия $\bar{\mathcal{M}}_1$. Таким образом, $b \equiv 0$ на $\partial\mathcal{M}_1$ и, следовательно, вложение $\partial\mathcal{M}_1 \subset \bar{\mathcal{M}}_1$ является вполне геодезическим. Это завершает доказательство следствия 3.10.

Глава 4. Метрика пространства модулей инстантонов на четырехмерном евклидовом пространстве.

В предыдущей главе мы описали L^2-метрику на пространстве $\mathcal{M}_1$ модулей инстантонов над главным $SU(2)$ - расслоением $P \to S^4$ с инстантонным числом $K = 1$. Целью настоящей главы является описание аналога этой L^2-метрики на пространстве модулей автодуальных $SU(2)$ - связностей с инстантонным числом 1 над пространством $\mathbb{R}^4$ с евклидовой метрикой. Принципиальным отличием этих двух случаев является то, что пространство $\mathbb{R}^4$ не компактно.

В этой главе мы будем использовать следующие обозначения.

Пусть $Q = \mathbb{R}^4 \times SU(2)$ - тривиальное главное $SU(2)$ - расслоение над пространством $\mathbb{R}^4$, снабженным евклидовой метрикой $g_{\mathbb{R}^4}$ и $P \to S^4$ - главное $SU(2)$ - расслоение над четырехмерной сферой S^4 со стандартной метрикой g_{S^4}. Обозначим через $\mathcal{SD}_1(P)$ пространство гладких автодуальных связностей на P и через $\mathcal{SD}_1(Q)$ - пространство гладких автодуальных связностей A на Q с инстантонным числом

$$K = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{Tr}(F^A \wedge F^A) = 1.$$

Здесь F^A - кривизна связности A. Пусть $\mathcal{G}(P)$ и $\mathcal{G}(Q)$ - группы гладких калибровочных преобразований расслоений P и Q соответственно. Согласно теореме Уленбек [11] мы можем отождествить пространства модулей $\mathcal{M}_1(P)$ и $\mathcal{M}_1(Q)$ с соответствующими пространствами орбит:

$$\mathcal{M}_1(P) = \mathcal{SD}_1(P)|\mathcal{G}(P), \quad \mathcal{M}_1(Q) = \mathcal{SD}_1(Q)|\mathcal{G}(Q).$$

Пусть $\mathbb{H}$ - тело кватернионов. Группа $SL(2,\mathbb{H})$, действуя на $S^4 = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ с помощью дробно-линейных преобразований, является двулистным накрытием группы сохраняющих ориентацию конформных преобразований стандартной четырехмерной сферы S^4. Как отмечалось в предыдущих главах, соответствующее действие группы $SL(2,\mathbb{H})$ на $\mathcal{M}_1(P)$ транзитивно и стационарные подгруппы сопряжены группе $Sp(2)$, которая служит стационарной подгруппой класса калибровочной эквивалентности $[A_0]$ так называемого основного инстантона A_0. Таким образом, отображение $\Phi : (0,1) \times \mathbb{H} \to \mathcal{M}_1(P)$, определяемое формулой

$$\Phi(t,x) = [A_0]\cdot c_t \cdot d_x,$$

где

$$c_t = \begin{pmatrix} t^{-1/4} & 0 \\ 0 & t^{1/4} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{H}),$$

$$d_x = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ -\bar{x} & 1 \end{pmatrix} \in Sp(2),$$

задает параметризацию пространства

$$\mathcal{M}_1(P) \setminus \{ [A_0]\cdot c_t \mid t \in [1,\infty) \}.$$

Рассмотрим риманову метрику g на четырехмерной сфере S^4, лежащую в конформном классе со стандартной метрикой g_{S^4}. Тогда g индуцирует L^2-метрику G на пространстве модулей $\mathcal{M}_1(P)$ (см. главу 3). Положим теперь

$$g_s = \frac{1}{4s}\,(c_{s^{-1}})^* g_{S^4}, \quad s \in (0,1].$$

Прямая проверка показывает, что

$$g_s = \frac{1}{(1+s|x|^2)^2}\, g_{\mathbb{R}^4}$$

на $\mathbb{R}^4 = S^4 \setminus \{$южный полюс$\}$. Следовательно, существует поточечный (в $\mathbb{R}^4$) предел

$$\lim_{s\to 0} g_s = g_{\mathbb{R}^4}.$$

Таким образом, если предел

$$G_0 = \lim_{s\to 0} G_s \quad (G_s \text{ индуцирована метрикой } g_s)$$

существует и задает риманову метрику на $\mathcal{M}_1(P)$, то G_0 можно рассматривать как L^2-метрику относительно евклидовой метрики $g_{\mathbb{R}^4}$.

Наша ближайшая цель - вычислить предел G_0. Для этого мы используем следующие факты.

Предложение 4.1.

Пусть $s \in (0,1)$. Тогда

$$G_s = \frac{1}{4s} F_s^* G_{S^4},$$

где отображение $F_s : \mathcal{M}_1(P) \to \mathcal{M}_1(P)$ задается формулой

$$F_s([A]) = [A]\cdot c_s,$$

а G_{S^4} - метрика на $\mathcal{M}_1(P)$, индуцированная стандартной метрикой g_{S^4} на сфере S^4.

Доказательство.

Непосредственная проверка показывает, что

$$(\eta_1,\eta_2)_{L^2(g_s)} = \frac{1}{4s} (f_s^*\eta_1, f_s^*\eta_2)_{L^2(g_{S^4})},$$

где f_s - произвольный морфизм расслоения P, согласованный с c_s. А это и есть требуемое утверждение.

Предложение 4.2.

(i). Риманова метрика G_{S^4} задается формулой

$$\Phi^* G_{S^4} = \alpha(t)dt^2 + \beta(t) \frac{1}{(1+|x|^2)^2} g_{\mathbb{R}^4},$$

где

$$\alpha(t) = 4\pi^2 \left[\frac{t^2+10t+1}{t(t-1)^4} - \frac{6(t+1)}{(t-1)^5} \ln t \right],$$

$$\beta(t) = 2\pi^2 \left[\frac{t^2-8t+1}{(t-1)^2} + \frac{12t^2}{(t-1)(t+1)} \ln t \right],$$

где кватернионы $\mathbb{H}$ отождествлены с $\mathbb{R}^4$.

(ii). $\lim\limits_{t\to 0} (t\alpha(t)) = 4\pi^2$, $\lim\limits_{t\to 0} (\beta(t)) = 2\pi^2$.

Доказательство.

Пункт (i) представляет собой переформулировку теоремы 3.8, пункт (11) проверяется прямым вычислением.

Для наших целей будет полезно использовать еще одну параметризацию

$$\psi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathcal{M}_1(P)$$

пространства модулей $\mathcal{M}_1(P)$, задаваемую формулой

$$\psi(r,b) = [A_0]\cdot c_r \cdot h_b,$$

где

$$h_b = \begin{bmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{H}).$$

Сравнивая параметризации Φ и ψ, мы видим, что $\Phi(t,x) = \psi(r,b)$ тогда и только тогда, когда

$$c_r \cdot h_b \cdot d_x^{-1} \cdot c_{t^{-1}} \in Sp(2) \tag{4.1}$$

Так как

$$d_x^{-1} = \bar{d}_x^{T} = d_{-x},$$

то соотношение (4.1) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &-(1 - x\bar{b})(x + b) + rx = 0, \\ &\frac{1}{\sqrt{t(1 + |x|^2)}} \left[\frac{1}{\sqrt{r}} |x + b|^2 + \sqrt{r} \right] = 1 \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Полагая, что $b = b_1 \in \mathbb{R}^-$, мы получаем следующее утверждение.

Предложение 4.3.

Функция перехода

$$\Phi \circ \psi^{-1} \Big|_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \longrightarrow (0,1) \times \mathbb{R}^+$$

задается формулой

$$\Phi \circ \psi^{-1}(r,b_1) = (t(r,b_1),\ x_1(r,b_1)),$$

где

$$x_1(r,b_1) = \lambda(r,b_1) + \sqrt{\lambda(r,b_1)^2 + 1} \in \mathbb{R}^+ \text{ с}$$

$$\lambda(r,b_1) = \frac{1 - r - b_1^2}{2\,b_1} \text{ и}$$

$$t(r,b_1) = \theta(r,b_1)^2 \in (0,1) \text{ с}$$

$$\theta(r,b_1) = \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot \frac{r + (x_1(r,b_1) + b_1)^2}{1 + x_1(r,b_1)^2}.$$

Используя это предложение, мы получаем следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r,b_1) = \frac{\partial t}{\partial r}(r,b_1)\frac{\partial}{\partial t}(t,x_1) + \frac{\partial x_1}{\partial r}(r,b_1)\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}(t,x_1) \text{ и}$$

$$\frac{\partial}{\partial b_1}(r,b_1) = \frac{\partial t}{\partial b_1}(r,b_1)\frac{\partial}{\partial t}(t,x_1) + \frac{\partial x_1}{\partial b_1}(r,b_1)\frac{\partial}{\partial x_1}(t,x_1),$$

где $(r,b_1) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$. Кроме того, имеет место следующее утверждение.

Предложение 4.4.

Канонические векторные поля $\frac{\partial}{\partial b_j}$, $j = 2,3,4$ связаны с полями $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial x_j}$ следующими соотношениями:

$$\frac{\partial}{\partial b_j}(r,b_1) = \frac{1 + x_1(r,b_1)^2}{2\,b_1\sqrt{\lambda(r,b_1)^2 + 1}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(t,x_1)$$

для $(r,b_1) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$.

Доказательство.

Пусть $\{a_2,a_3,a_4\}$ – стандартный базис мнимых кватернионов. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial b_j}(r,b_1) = \frac{\partial\gamma}{\partial v}(0),$$

$$\text{где } \gamma(v) = \varphi(r,b_1 + a_j v).$$

В силу уравнений (4.2) мы имеем $\gamma(v) = \Phi(t(v),x(v))$, где $t(v)$, $x(v)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$rx(v) = [1 - x(v)\cdot(b_1 - a_j v)]\cdot[x(v) + b_1 + a_j v], \qquad (4.3)$$

$$\sqrt{t(v)\,(1 + |x(v)|^2)} = \frac{1}{\sqrt{r}}[x(v) + b_1 + a_j v]^2 + \sqrt{r}. \qquad (4.4)$$

Дифференцируя соотношение (4.3), мы получаем, что

$$(r - 1 + b_1^2 + 2b_1x_1)\frac{dx}{dv}(0) = a_j(1 + x_1^2).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dx_i}{dv}(0) = \frac{1 + x_1^2}{r - 1 + b_1^2 + 2b_1x_1}\,\delta_{ij} \quad \text{для } i = 1,2,3,4.$$

Далее, из соотношений (4.4) и

$$\frac{d}{dv}\left(|x(v) + b_1 + a_j v|^2\right)\Big|_{v=0} = \frac{d}{dv}\left(|x(v)|^2\right)\Big|_{v=0} = 0$$

мы выводим, что

$$\frac{dt}{dv}(0) = 0.$$

Требуемая формула вытекает теперь из соотношений

$$1 - r - b_1^2 = 2b_1\lambda(\gamma, b_1) \text{ и}$$

$$\frac{\partial}{\partial b_j}(r,b_1) = \frac{dt}{dv}(0)\cdot\frac{\partial}{\partial t}(t,x_1) + \sum_{i=1}^{4}\frac{dx_i}{dv}(0)\,\frac{\partial}{\partial x_i}(t,x_1).$$

Предложение 4.4 доказано.

Для вычисления метрики G_0 нам понадобится несколько пределов. Соберем их в виде следующего утверждения.

Предложение 4.5.

Для $(r,b_1) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$ имеют место следующие соотношения:

(i) $\lim\limits_{s\to 0} t(sr, \sqrt{s}\, b_1) = \lim\limits_{s\to 0} x_1(sr, \sqrt{s}\, b_1) = 0$;

(ii) $\lim\limits_{s\to 0} \left(\sqrt{s}\, \dfrac{\partial\theta}{\partial r}(sr, \sqrt{s}\, b_1)\right) = -\dfrac{1}{2\sqrt{r}}$;

(iii) $\lim\limits_{s\to 0} \left(\sqrt{s}\, \dfrac{\partial x_1}{\partial r}(sr, \sqrt{s}\, b_1)\right) = 0$;

(iv) $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{\partial\theta}{\partial b_1}(sr, \sqrt{s}\, b_1) = 0$;

(v) $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{\partial x_1}{\partial b_1}(sr, \sqrt{s}\, b_1) = -1$;

(vi) $\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{1 + x_1(sr, \sqrt{s}\, b_1)^2}{2b_1\sqrt{s\lambda(sr, \sqrt{s}\, b_1)^2 + s}} = -1.$

Доказательство.

Все указанные пределы выводятся из следующих равенств:

$$\lim_{s\to 0}\left(\sqrt{s}\,\lambda(sr, \sqrt{s}\, b_1)\right) = \frac{1}{2b_1},$$

$$\lim_{s\to 0}\left(s\,\frac{\partial\lambda}{\partial b_1}(sr,\sqrt{s}\,b_1)\right) = -\frac{1}{2b_1^2} \quad \text{и}$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{\sqrt{s}}{x_1(sr,\sqrt{s}\,b_1)} = \lim_{s\to 0}\left[\sqrt{s}\left(\sqrt{\lambda(sr,\sqrt{s}\,b_1)^2+1}-\lambda(sr,\sqrt{s}\,b_1)\right)\right] =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2b_1}\right)^2} - \frac{1}{2b_1} = -\frac{1}{b_1}$$

(напомним, что $b_1 \in \mathbb{R}^-$).

Теперь мы в состоянии получить один из центральных результатов этой главы.

Теорема 4.6.

Предел G_0 существует в каждой точке и является плоской римановой метрикой, задаваемой формулой

$$\phi^* G_0 = \frac{\pi^2}{r}\,dr^2 + 2\pi^2 g_{\mathbb{R}^4}\,,$$

где, как и прежде, пространство кватернионов $\mathbb{H}$ отождествляется с $\mathbb{R}^4$.

Доказательство.

Пусть $(q_1,q_2) \in Sp(1)\times Sp(1) \subset Sp(2)$.

Тогда

$$F_s([A]\cdot(q_1,q_2)) = F_s([A])\cdot(q_1,q_2).$$

Далее, из соотношения

$$[A_0]\cdot C_r\cdot(q_1,q_2)^{-1} = [A_0]\cdot C_r$$

вытекает, что

$$\phi(r,b)\cdot(q_1,q_2) = [A_0]\cdot C_r\cdot h_b\cdot(q_1,q_2) =$$
$$= [A_0]\cdot C_r\cdot(q_1,q_2)^{-1}\cdot h_b\cdot(q_1,q_2) =$$
$$= [A_0]\cdot C_r\cdot h_{\bar q_1 b q_2} = \phi(r,\bar q_1 b q_2)$$

для $(r,b) \in \mathbb{R}^+\times\mathbb{H}$. Вспоминая, что группа $Sp(1)\times Sp(1)$ изометрично действует на многообразии $(\mathcal{M}(P),G_{S^4})$ и что $Sp(1)\cdot\mathbb{R}^-\cdot Sp(1) = \mathbb{H}$, мы видим, что для доказательства теоремы достаточно установить следующие соотношения:

$$G_0\left(\frac{\partial}{\partial r}(r,b_1),\ \frac{\partial}{\partial r}(r,b_1)\right) = \frac{\pi^2}{r}\ , \tag{4.5}$$

$$G_0\left(\frac{\partial}{\partial r}(r,b_1),\ \frac{\partial}{\partial b_i}(r,b_1)\right) = 0\ , \tag{4.6}$$

$$G_0\left(\frac{\partial}{\partial b_i}(r,b_1),\ \frac{\partial}{\partial b_j}(r,b_1)\right) = 2\pi^2\delta_{ij} \tag{4.7}$$

для $i,j = 1,2,3,4$ и $(r,b_1) \in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^-$.

Поскольку

$$h_b\cdot C_s = C_s\cdot h_{\sqrt{s}b},$$

мы имеем

$$F_s \circ \phi(r,b) = \phi(sr,\ \sqrt{s}\ b).$$

Отсюда следует, что

$$(F_s)_*\frac{\partial}{\partial r}(r,b) = s\ \frac{\partial}{\partial r}(sr,\ \sqrt{s}\ b) \text{ и}$$

$$(F_s)_*\frac{\partial}{\partial b_i}(r,b) = \sqrt{s}\ \frac{\partial}{\partial b_i}(sr,\ \sqrt{s}\ b)\ ,\quad i = 1,2,3,4.$$

Используя предложения 4.1, 4.2 и 4.5, мы получаем теперь, что

$$G_0\left(\frac{\partial}{\partial r}(r,b_1),\ \frac{\partial}{\partial r}(r,b_1)\right) =$$

$$= \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{4s}\ G_{s^4}\left((F_s)_*\frac{\partial}{\partial r}(r,b_1)\ ,\ (F_s)_*\frac{\partial}{\partial r}(r,b_1)\right)\right] =$$

$$= \lim_{s\to 0}\left[\frac{s}{4}\ G_{s^4}\left(\frac{\partial}{\partial r}(sr,\ \sqrt{s}\ b_1)\ ,\ \frac{\partial}{\partial r}(sr,\ \sqrt{s}\ b_1)\right)\right] =$$

$$= \lim_{s\to 0}\left(\left[\sqrt{s}\ \frac{\partial\theta}{\partial r}(sr,\ \sqrt{s}\ b_1)\right]^2 t(sr,\ \sqrt{s}\ b_1)\ \alpha(t(sr,\ \sqrt{s}\ b_1)) + \right.$$

$$\left. + \left[\sqrt{s}\ \frac{\partial x_1}{\partial r}(sr,\ \sqrt{s}\ b_1)\right]^2 \frac{\beta(t(sr,\ \sqrt{s}\ b_1))}{(1 + x_1(sr,\ \sqrt{s}\ b_1)^2)^2}\right) =$$

$$= 4\pi^2\left[-\frac{1}{2\sqrt{r}}\right]^2 = \frac{\pi^2}{r}\ ,$$

т.е. соотношение (4.5). Аналогично, с помощью предложения 4.4 доказываются соотношения (4.6) и (4.7), а из этих соотношений немедленно вытекает, что

$$\phi^* G_0 = 2\pi^2 (d\ell^2 + g_{\mathbb{R}^4}) ,$$

где $\ell = \sqrt{2r}$. Теорема 4.6, темсамым, полностью доказана.

Следующее утверждение представляет собой аналог следствия 3.10 для некомпактного случая и доказывается теми же самыми средствами.

Теорема 4.7.

Пусть $\overline{\mathcal{M}_1(Q)}$ – пополнение $(\mathcal{M}_1(Q),\ G_0)$ как метрического пространства. Тогда

(i) $\overline{\mathcal{M}_1(Q)} \setminus \mathcal{M}_1(Q)$ диффеоморфно $\mathbb{R}^4$;

(ii) вложение $\mathcal{M}_1(Q) \subset \overline{\mathcal{M}_1(Q)}$ является вполне геодезическим отображением.

Вычислив явный вид римановой метрики G_0 на пространстве модулей $\mathcal{M}_1(Q)$, покажем теперь, что G_0 есть L^2-метрика. С этой целью отождествим группу SU(2) с симплектической группой Sp(1). Тогда скалярное произведение на алгебре Ли sp(1) = Im($\mathbb{H}$) примет вид

$$(v_1, v_2) = - \mathrm{Re}(v_1, v_2).$$

Напомним, что с помощью отождествления $\mathcal{M}_1(P) \cong \mathcal{M}_1(Q)$ параметризация

$$\phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathcal{M}_1(Q)$$

задается формулой

$$\phi(r,b) = [A_{r-1,b}], \text{ где } A_{r-1,b} = h_b^* A_{r-1}$$

и связности A_{r-1} на тривиальном расслоении $Q = \mathbb{H} \times Sp(1)$ ($= \mathbb{R}^4 \times SU(2)$) определяются правилом

$$A_{r-1} = C_r^* A_0 = \mathrm{Im} \left(\frac{x d\bar{x}}{r + |x|^2} \right).$$

Отметим, кроме того, что элементы $C_r, h_b \in SL(2,\mathbb{H})$ действуют на кватернионном пространстве $\mathbb{H}$ по формулам

$$C_r\,x = \frac{1}{\sqrt{r}}\,x \quad \text{и} \quad h_b x = x - b.$$

Теперь мы собираемся отождествить, как в компактном случае, касательные векторы к многообразию $\mathcal{M}_1(Q)$ в точке $[A_{r-1,b}]$ с 1-формами в пространстве

$$H(A_{r-1,b}) = \{\ \eta \in \Omega^1(\mathbb{H}, sp(1))\ |\ (d_{A_{r-1,b}})^*\eta = 0 \text{ и}$$

$$\text{и } p_- d_{A_{r-1,b}}\eta = 0\ \} \cap L^2.$$

Здесь $(d_{A_{r-1,b}})^* : \Omega^1(\mathbb{H}, sp(1)) \to \Omega^0(\mathbb{H}, sp(1))$ - формально сопряженный оператор к $d_{A_{r-1,b}}$ относительно евклидовой метрики $g_{\mathbb{R}^4}$. Приведенные ниже утверждения содержат полное описание пространств $H(A_{r-1})$ для $r \in \mathbb{R}^+$.

Предложение 4.8.

Одномерные формы

$$\psi_k^r = \frac{d\gamma^k}{(r + |x|^2)^2}\ ,\ k = 1,2,3,4,$$

$$\psi_5^r = \operatorname{Im}\left(\frac{xd\bar{x}}{(r + |x|^2)^2}\right),$$

$$\psi_6^r = \frac{1}{(r + |x|^2)^2}\,(\gamma^2 dx_1 - \gamma^1 dx_2 - \gamma^4 dx_3 + \gamma^3 dx_4)\ ,$$

$$\psi_7^r = \frac{1}{(r + |x|^2)^2}\,(\gamma^3 dx_1 + \gamma^4 dx_2 - \gamma^1 dx_3 - \gamma^2 dx_4) \text{ и}$$

$$\psi_8^r = \frac{1}{(r + |x|^2)^2}\,(\gamma^4 dx_1 - \gamma^3 dx_2 + \gamma^2 dx_3 - \gamma^1 dx_4)\ ,$$

где γ_k, $k = 1,2,3,4$, определяется соотношением

$$\operatorname{Im}(xd\bar{x}) = \sum_{k=1}^{4} \gamma^k dx_k,$$

образуют L^2-ортогональный базис пространства $H(A_{r-1})$.

Доказательство.

Согласно результатам Таубса [12] размерность $\dim H(A_{r-1}) = 8$. Прямая проверка показывает, что $\psi_i^r \in H(A_{r-1})$ для $i = 1,\dots,8$. Так как $\langle\varphi_k^r,\varphi_m^r\rangle$ для $k = 1,\ldots,4$ и $m = 5,\ldots,8$ являются нечетными функциями от x и $\langle d\gamma^k, d\gamma^\ell\rangle = 0$ для $k \neq \ell$, формы φ_i^r L^2-ортогональны, что и требовалось доказать.

Поскольку

$$h_b : \mathbb{H} \to \mathbb{H} -$$

изометрия относительно стандартной метрики $g_{\mathbb{R}^4}$, очевидно, что множество

$$\{\, h_b^* \varphi_i^r \,,\ i = 1,\ldots,8 \,\}$$

образует L^2-ортогональный базис пространства $H(A_{r-1,b})$.

Предложение 4.9.

Пусть $m = 6,7,8$ и

$$\varphi_m^r = \frac{1}{2r(r + |x|^2)} \left([\gamma^1, \gamma^{m-4}] - a_{m-4}|x|^2 \right),$$

где (a_2, a_3, a_4) — стандартный базис пространства мнимых кватернионов $\mathrm{Im}\,\mathbb{H}$. Тогда

$$\psi_m^r = d_{A_{r-1}} \varphi_m^r.$$

Доказательство состоит в прямом вычислении ψ_m^r, $m = 6,7,8$, являются фундаментальными векторными полями действия группы $\mathcal{G}(Q)$ калибровочных преобразований. С другой стороны, справедливо следующее утверждение.

Предложение 4.10.

Пусть $(r,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{H}$ и $\mu_{r,b} : \mathbb{H} \to Sp(1)$ -калибровочное преобразование, определяемое формулой

$$\mu_{r,b} = \exp\left[\frac{\mathrm{Im}(b\bar{x})}{r + |x|^2} \right].$$

Тогда

$$\left.\frac{\partial}{\partial r} (A_{r-1,b} \cdot \mu_{r,b})\right|_{b=0} = \frac{d}{dr} A_{r-1} = - \psi_5^r \text{ и}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial b_k} (A_{r-1,b} \cdot \mu_{r,b})\right|_{b=0} = 2r\, \psi_k^r \,,\ k = 1,2,3,4.$$

Доказательство.

Пусть $A(v)$ - гладкая кривая в пространстве связностей с начальным условием $A(0) = A$ и $\mu(v)$ - гладкая кривая в группе калибровочных преобразований, удовлетворяющая условию $\mu(0) = 1$. Тогда

$$\frac{d}{dv}(A(v)\cdot\mu(v))\Big|_{v=0} = \frac{dA}{dv}(0) + d_A\frac{d\mu}{dv}(0).$$

Используя тот факт, что

$$\gamma^k = -\operatorname{Im}(a_k\bar{x}),\ k = 1,2,3,4,$$

где $a_1 = 1$, мы получаем требуемые соотношения. Предложение 4.10 доказано.

Стоит отметить, что формы

$$\frac{\partial}{\partial b_k}(A_{r-1,b}\cdot\mu_{r,b} - A_{r-1,b})\Big|_{b=0} = d_{A_{r-1}}(\frac{\partial}{\partial b_k}\mu_{r,b})\Big|_{b=0} =$$

$$= \frac{1}{(r + |x|^2)}(2x_k\operatorname{Im}(xd\bar{x}) + (|x|^2 - r)d\gamma^k),\ k = 1,2,3,4,$$

не являются квадратично интегрируемыми.

Предложения 4.2 и 4.10 позволяют нам отождествить касательное пространство $T_{[A_{r-1,b}]}\mathcal{M}_1(Q)$ с L^2-ортогональным дополнением в $H(A_{r-1,b})$ к подпространству $d_{A_{r-1,b}}(\Omega^0(\mathbb{H},sp(1))\cap H(A_{r-1,b}))$, если положить

$$\frac{\partial}{\partial r}(r,b) = -h_b^*\psi_5^r \text{ и}$$

$$\frac{\partial}{\partial b_k}(r,b) = 2rh_b^*\psi_k^r,\ \ k = 1,2,3,4,$$

относительно параметризации ϕ. Это отождествление задает L^2-метрику на пространстве модулей $\mathcal{M}_1(Q)$.

Теорема 4.11.

Описанная выше L^2-метрика на $\mathcal{M}_1(Q)$ совпадает с римановой метрикой G_0.

Доказательство.

Так как h_b изометрично действует на $\mathbb{H}$, то достаточно проверить, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}(r,0),\ \frac{\partial}{\partial r}(r,0)\right)_{L^2} = \frac{\pi^2}{r}\,, \tag{4.8}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}(r,0),\ \frac{\partial}{\partial b_k}(r,0)\right)_{L^2} = 0\,, \tag{4.9}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial b_k}(r,0),\ \frac{\partial}{\partial b_\ell}(r,0)\right)_{L^2} = 2\pi^2\delta_{k\ell} \tag{4.10}$$

для $1 \leqslant k,\ \ell \leqslant 4$. Мы имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}(r,0),\ \frac{\partial}{\partial r}(r,0)\right)_{L^2} = (\psi_5^r, \psi_5^r)_{L^2} =$$

$$= \int_{\mathbb{H}} \frac{3|x|^2}{(r+|x|^2)^4}\,dx = \mathrm{Vol}(S^3)\int_0^\infty \frac{3v^5}{(r+v^2)^4}\,dv =$$

$$= \pi^2 \int_0^\infty \frac{3z^2}{(r+z)^4}\,dz = \frac{\pi^2}{r}\,.$$

Это дает соотношение (4.8). Аналогично проверяются соотношения (4.9) и (4.10). Теорема 4.11, тем самым, полностью доказана.

Список литературы.

1. Atiyah M.F., Hitchin N., Singer I. Self-duality in four dimensional Riemannian geometry. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 362, 425 - 461, 1978.

2. Freed D., Uhlenbeck K. Instantons and four-manifolds. Springer, 1984. [Имеется русский перевод: Фрид Д., Уленбек К. Инстантоны и четырехмерные многообразия. М., Мир, 1988.]

3. Lawson H.B. The theory of gauge fields in four dimensions. American Math. Society, Providence, 1986.

4. Uhlenbeck K. Connections with L^p bounds on curvature. Comm. Math. Phys., 83, 31 - 42, 1982.

5. Mitter P.K., Viallet C.M. On the bundle of connections and the gauge orbit manifold in Yang-Mills theory. Comm. Math. Phys., 79, 457 - 472, 1981.

6. Taubes C.H. Self-dual connections on non-self-dual 4-manifolds. J. Differ. Geom., 17, 139 - 170, 1982.

7. Taubes C.H. Self-dual connections on 4-manifolds with indefinite intersection matrix. J. Differ. Geom., 19, 517 - 560, 1984.

8. Donaldson S.K. An application of gauge theory to four-dimensional topology. J. Differ. Geom., 18, 279 - 315, 1983.

9. Singer I. The geometry of the orbit spase for nonabelian gauge theories. Physica Scripta, 24, 817 - 820, 1981.

10. Itoh M. Geometry of anti-self-dual connections and Kuranishi map. Journ. of Math. Soc. Japan, 53, 699 - 744, 1988.

11. Uhlenbeck K. Removable singularities in Yang-Mills fields. Commun. Math. Phys., 83, 11 - 29, 1982.

12. Taubes C.H. Stability in Yang-Mills theories. Commun. Math. Phys., 91, 235 - 263, 1983.

13. Atiyah M.F. Geometry of Yang-Mills fields. Scuola Normale

Superiore, Pisa, 1979.

14. Doi H., Matsumoto Y., Matumoto T. An explicit formula of the metric on the moduli space of the BPST-instantons over S^4. A Fete of topology. New York : Academic Press, 1987.

15. Grossier D. The geometry of the moduli space of CP^2 instantons. Invent.Math., 99, 393 - 409, 1990.

16. Grossier D., Parker T.H. The geometry of the Yang-Mills moduli space for definite manifolds. J. Diff. Geom., 29, 499 - 544, 1989.

17. Bott R., Tu L. Differential forms in algebraic topology. Springer - Verlag, 1982. [Имеется русский перевод : Ботт Р., Ту Л. Дифференциальные формы в алгебраической топологии. М., Наука, 1989.]

18. Bourguignon J.P. Formules des Weitzenbock en dimension 4. In : Geometrie Riemanniene de dimension 4. CEDIC, Paris, 1981. [Имеется русский перевод: Бургиньон Ж.-П. Формулы Вейтценбёка в размерности 4. В кн. : Четырехмерная риманова геометрия. М., Мир, 1985, 260 - 273.]

19. Sedlacek S. A direct method for minimization the Yang-Mills functional on 4-manifolds. Commun. Math. Phys., 86, 515 - 527, 1982.

20. Singer I.M. Some remarks on the Gribov ambiguity Commun. Math. Phys., 60, 7 - 12, 1978.

21. Marsden J. Applications of global analysis in mathematical physics. Publish or Perish, 1974.

22. 't Hooft G. Gauge theories of the forces between elementary particles. Scientific American, 243, 104 - 138, 1980.

23. Соловьёв Ю.П. Топология четырехмерных многообразий. Успехи матем. наук, 46, № 2, 1991.

24. Rawnsley J.H. Differential geometry of instantons. Commun. of Dublin Inst. Advanced Studies, No.25, 1978.
25. Donaldson S. Vector bundles on the flag manifolds and the Ward correspondence. Progress in Math., v.60, Birkhauser, 1985.
26. Buchdal N.P. Instantons on $\mathbb{C}P^2$. Journ. Differ. Geom., 24, 19 - 52, 1986.
27. Babelon O., Viallet C.M. The Riemannian geometry of the configuration space for gauge theories. Commun. Math., 81, 515 - 525, 1981.
28. Bleeker D. Gauge theory and variational principles. Addison Wesley, London, 1981.