Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 514.7

Шарыгин Георгий Игорьевич

Геометрия некоммутативных главных расслоений

01.01.04 – геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
Профессор, доктор физико-
математических наук,
Ю. П. Соловьёв

Москва 2000

Предисловие

1. Актуальность темы

Главной задачей диссертации является разработать возможно более полную теорию характеристических классов алгебр, на которых кодействует та или иная квантовая группа, или, более общо, алгебра Хопфа.

С формальной точки зрения такие объекты аналогичны, точнее, двойственны, пространствам, на которых действует группа Ли. В самом деле, если рассмотреть алгебры функций на пространстве и на группе, то отображение, двойственное умножению на элементы группы, определит обратный гомоморфизм на указанных алгебрах, удовлетворяющий (при некоторых не слишком ограничительных предположениях) всем условиям, задающим кодействие. Преимущество такого чисто алгебраического подхода состоит в возможности рассматривать не только коммутативные алгебры, тем самым значительно расширяя область применимости теории. Конечно, полученным таким образом результатам нельзя дать непосредственной геометрической интерпретации, однако в последнее время и, прежде всего, в рамках так называемой некоммутативной геометрии появились многочисленные примеры некоммутативных алгебр, тесно связанных с геометрическими объектами, изучение которых приносит значительую информацию о самом объекте. Прежде всего речь идёт о $\mathbf{C}^*$-алгебре слоения. Кроме того, можно рассматривать скрещённые произведения алгебр функций на многообразиях и групповых алгебр дискретных групп, изучение которых, несомненно, даёт достаточно информации о действии группы. Далее, теория групп и алгебр Ли поставляет два класса естествеено возникающих некоммутативных алгебр: универсальные обёртывающие алгебры алгебр Ли и алгебры функций относительно свёртки. Другие обширные классы примеров некоммутативных алгебр приходят из теории деформационного квантования, квантовой механики и квантовой теории поля. Все эти и другие примеры некоммутативных алгебр дают широкое поле для применения идей и методов некоммутативной геометрии, одним из разделов которой является теория некоммутативных главных расслоений.

Термин « некоммутативная геометрия» был предложен в начале 1980-х годов французским математиком А.Конном, [21], в связи с его исследованиями по теории слоений. Хотя некоммутативные алгебры, в частности $\mathbf{C}^*$-алгебра слоения, не могут быть отождествлены с алгебрами функций ни на каком топологическом пространстве, но оказалось чрезвычайно полезным рассматривать их в таком качестве и по мере возможностей применять к ним те же конструкции, которые имеются в обычной дифференциальной геометрии. На этом пути были получены многочисленные результаты, прежде всего в теории характеристических классов (см. [21, 22, 19, 18]). Оказалось, что конструкция Чженя-Вейля, позволяющая строить характеристические классы векторных расслоений над гладкими многообразиями, почти дословно переносится на случай конечно-порождённых проективных модулей над произвольными ассоциативными унитальными алгебрами. С другой стороны, известно, что в классическом случае характеристические классы векторных расслоений являются частным случаем характеристических классов соответствующего главного расслоения. Поэтому естественным желанием исследователей было построить аналогичную конструкцию и в некоммутативном случае.

Прежде всего, необходимо найти замену структурной группы некоммутативного главного расслоения. Ясно, что « некоммутативными аналогами» групп Ли являтся алгебры Хопфа. Однако, произвольная алгебра Хопфа — слишком общий объект для этих целей. Достаточно богатый класс алгебр Хопфа, обладающх многими свойствами алгебр функций на группах Ли, был обнаружен в середине 80-х годов. Речь идёт о квантовых группах, появившихся одновременно в работах нескольких математиков, см. например [13, 2].

В течение 90-х годов было предпринято несколько попыток создать на основе теории квантовых групп разумную теорию некоммутативных (квантовых) главных расслоений и изучить геометрию с « квантовой структурной группой». К числу таких работ относятся, например [20, 17]. Наиболее последовательная и развитая теория была создана югославским математиком Джорджевичем (Durdevic). Не вдаваясь в подробности его определений, аккуратно изложенных в тексте диссертации, см. Главу 1, скажем, что одной из главных трудностей было дать правильную алгебраическую интерпретацию свободного действия группы. Тем интереснее кажется факт, что это условие оказывается слегка ослабленным определением « расширения Галуа-Хопфа», объекта давно изучавшегося в алгебре. Именно работы Джорджевича и послужили отпраной точкой данной диссертации.

2. Содержание диссертации

Первая глава

В этой главе мы даём определения и обсуждаем основные свойства квантовых групп и квантовых главных расслоений. В главе практически нет утверждений и теорем, полученных автором диссертации, за исключением конструкции обобщённого гомоморфизма Вейля для случая немультипликативной регулярной связности, являющейся, по-существу, небольшим уточнением соответствующего результата для мультипликативных связностей, принадлежащего Джорджевичу. Кроме того, автору принадлежит конструкция замены структурной группы при помощи гомоморфизма.

Первый параграф посвящён теории квантовых групп. Основными источниками нам служат работы Вороновича [1]-[4]. Следует указать, что определения и результаты, которыми мы пользуемся, основаны на интерпретации квантовых групп, как некоммутативных алгебр функций на « квантовом пространстве», а не как деформированных универсальных обёртывающих алгебр, каковое описание принято в большинстве работ, посвящённых вопросу. То, что эти два подхода эквивалентны, следует, например, из основополагающей работы [13]. Содержание этого параграфа естественно разбивается на три части. Во-первых, мы даём определение (Определение 1.1) и описываем основные свойства квантовых групп, в частности мы вводим понятие классической части квантовой группы (см. Определение 1.2). Далее, мы, следуя работам [1] и [3] описываем свойства « дифференциальных исчислений» на квантовых группах. Конец первого параграфа посвящён основам теории представлений квантовых групп в смысле Вороновича (см. [2]). Не претендуя на полноту изложения, мы ограничиваемся фактами, которые нам потребуются позднее для работы с главными расслоениями. Теоремы 1.1 и 1.3 являются сводками результатов работ [3] и [2, 4] соответственно.

В следующих четырёх параграфах мы последовательно излагаем теорию квантовых главных расслоений, связностей на них и характеристических классов, при этом мы опираемся на работы Джорджевича [5]-[9]. Некоторые другие подходы к теории квантовых главных расслоений и вообще некоммутативной дифференциальной геометрии с квантовыми структурными группами можно найти также в работах [20, 17].

Во втором параграфе даётся определение квантового главного расслоения по Джорджевичу (Определение 1.3), обсуждается его геометрический смысл, в частности указывается на связь этих объектов с расширениями Галуа-Хопфа. В конце параграфа приводятся примеры некоммутативных (квантовых) главных расслоений. В качестве одного из способов построения квантовых главных расслоений рассматривается принадлежащая автору конструкция замены структурной группы (см. пример 1.2.5 и предложение 1.4).

Третий параграф посвящён теории дифференциального исчисления на некоммутативных главных расслоениях. В начале параграфа даётся определение дифференциального исчисления на тотальном пространстве расслоения, согласованного с исчислением Γ на структурной группе (Определение 1.4) и приводится пример, доказывающий существование таких объектов. Далее мы определяем алгебру дифференциальных форм на базе расслоения, $\Omega(\mathcal{M})$, алгебру горизонтальных дифференциальных форм, $\mathfrak{hor}(P)$, алгебру разложимых дифференциальных форм $\mathfrak{vh}(P)$ (при этом мы показываем, что два возможных способа определить её — эквивалентны, Предложение 1.5).

В четвёртом параграфе излагаются основные результаты работы Джорджевича [6]. Именно, дав вслед за этим автором определение псевдотензориальных, тензориальных форм и связностей на некоммутативном главном расслоении (Определение 1.5), мы формулируем без доказательства теорему о существовании связностей (Теорема 1.6). Далее мы определяем мультипликативные связности (условие 1.30) и отображение $m_\omega : \mathfrak{vh}(P) \to \Omega(P)$. Затем мы приводим без доказательства ещё одно техническое утверждение, принадлежащее Джорджевичу, Теор. 1.7.

Вслед за этим, при помощи отображения m_ω определятся горизонтальное проектирование (формула 1.31), и ковариантное дифференцирование (Определение 1.6). Теорема 1.8, принадлежащая Джорджевичу, содержит список свойств ковариантного дифференцирования, построеннного по произвольной связности.

Совершенно аналогично случаю обычного главного расслоения, мы определяем кривизну R_ω связности ω, Опр. 1.7. Список свойств форм кривизны общих связностей на некоммутативном главном расслоении содержится в Теореме 1.9. Её, как и предыдущую теорему мы приводим без доказательства.

Чтобы обойти трудности, связанные с немультипликативностью связности, мы вводим "накрывающее отображение"$\tilde{R}_\omega : \ker \epsilon \to \mathfrak{hor}(P)$ и доказываем, что квадрат ковариантного дифференцирования равен умножению на форму, определяемую при помощи этого отображения (Предложение 1.10). Это отображение не рассматривалось Джорджевичем явно, однако, все доказательства свойств формы кривизны основывались, по существу, на рассмотрении этого отображения.

Следующее определение, Опр. 1.8, является ключевым для всего нижеследующего изложения. Именно, в нём мы выделяем важнейший для нас класс связностей — регулярные связности. На идейном уровне, связность называется регулярной, если она фиксированным образом коммутирует с горизонтальными формами на расслоении (см. формулы (1.39) и (1.39′)). Существование этого требования, как нетривиального условия — чисто квантовый феномен, не существующий в обычном случае. Понятие регулярной связности введено Джорджевичем, им же исследованы свойства регулярных связностей, а так же горизонталной проекции, ковариантного дифференцирования и формы кривизны, определяемых регулярной связностью. Список этих свойств, без доказательств, которые, будучи чисто техническими, заняли бы весьма много места, мы приводим в виде теоремы (Теорема 1.11). При этом, мы переформулируем некоторые из свойств в терминах отображения $\tilde{R}_\omega$ (свойства (iii) и (iv)). Грубо говоря, регулярные связности — естественно выделяемый класс связностей, по своим свойствам максимально напоминающих обычные связности на главных расслоениях. Именно эти свойства и позволяют использовать их при построении гомоморфизма Вейля. Именно, оказывается, что очевидная перефразировка классической конструкции Чженя-Вейля (см., например [16]), позволяет почти дословно перенести доказательства из книги на случай регулярной связности на некоммутативном главном расслоении (Теорема 1.12). Отметим, что в работах Джорджевича не ставится вопроса о существовании регулярных связностей на некоммутативных главных расслоениях, ответ на который даётся в третьей главе данной диссертации.

Завершается параграф несколькими замечаниями, касающимися образа и области определения отображения из теоремы 1.12, а также её переформулировкой на случай немультипликативной регулярной связности (Теорема 1.13 и следующие за ней замечания). В конце параграф мы определяем гоморфизм Вейля в случае регулярной (мультипликативной или немультипликативной) связности, как отображение, фигурирующее в теоремах 1.12 или 1.13.

Последний параграф первой главы посвящён теории векторных расслоений, ассоциированных с данным главным. Вслед за определением и списком основных свойств этих объектов (опр. 1.10 и теорема 1.14) мы возвращаемся к предложению 1.4 и доказываем недостающие утверждения. Далее, мы описываем связь между категорией ассоциированных векторных расслоений некоторого главного квантового расслоения и самим расслоением (теорема 1.17), что позволяет нам строить новые примеры некомутативных главных расслоений. Аналогично ранее данному определению векторного расслоения $\mathcal{E}_u$, ассоциированному с некоммутативным главным расслоением при помощи некоторого представления структурной квантовой группы, мы определяем пространство $\mathcal{E}_u$-значных дифференциальных форм на базе. Список свойств этих пространств содержится в теореме 1.18.

Далее мы, следуя работе Джорджевича [6] вкратце излагаем теорию характеристических классов ассоциированных векторных расслоений. Для этого мы определдяем канонический след градуированного автоморфизма пространства $\mathcal{E}_u$-значных дифференциальных форм на базе (см. диаграмму (1.48)), который нам затем понадобится в третьей главе при изучении препятствий. Оказывается, что канонический след квадрата « транспонируемого дифференцирования» (см. Опр. 1.12) такого модуля задаёт характеристические классы в когомолгиях центра алгебры базы, не зависящие от выбора такого дифференцирования (теор. 1.22 и следствие 1.23). В том случае, когда дифференцирование, фигурирующее в указанных утверждениях порождено регулярной связностью на некоммутативном главном расслоении, построенные таким образом классы оказываются в образе обобщённого гомоморфизма Вейля (предл. 1.24).

Заканчивается параграф ещё одной теоремой Джорджевича (теор. 1.25), описывающей связь между дифференцированиями пространств $\mathcal{E}_u$-значных дифферециальных форм и регулярными связностями.

Вторая глава

В этой главе, состоящей из трёх параграфов, мы описываем явно, во что превращаются общие конструкции предыдущей главы в важных для приложений частных случаях.

Так, в первом параграфе мы разбираем случай « локально-тривиального» главного квантового расслоения над гладким многобразием. Именно, взяв за основу работу [5], мы, вслед за Джорджевичем определяем локально-тривиальные квантовые расслоения, как алгебры $\mathcal{B}$, для которых существуют тривиализующие гомеоморфизмы (Определение 2.1). Прежде, чем приступить к исследованию данного класса квантовых главных расслоений, мы приводим пример не локально-тривиального некоммутативного главного расслоения над гладкой базой, с « квантовой структурной группой» S^1. Возвращаясь после этого к локально-тривиальному случаю, мы доказываем (Теорема 2.5), что в этом образ обобщённого гомоморфизма Вейля $\tilde{W}$такого расслоения состоит из характеристических классов « классической части» расслоения P, определение которой приводится выше (см. Теорему 2.1). Теорема 2.5, является основным содержанием данного раздела. Прежде, чем доказать её, приходится провести много вспомогательных рассуждений. Так, мы описываем набор векторных расслоений, асоциированных с локально-тривиальным квантовым главным расслоением (Лемма 2.4 и Теорема 2.3) и, пользуясь этим результатом и Теоремой 2.2, взятой из [5], мы описываем связности на локально-тривиальном главном квантовом расслоением над гладким многообразием как навбор связностей на ассоциированных векторных расслоениях (Теорема 2.3). Все эти результаты используются при доказательстве теоремы 2.5, однако они предсатвляют интерес и сами по себе, например в связи с возможными исследованиями структуры пространств связностей и уравнения Янга-Миллса для некоммутативного главного расслоения.

Далее, в параграфах 2.2 и 2.3 мы разбираем более общий случай, когда базой расслоения (необязательно локально-тривиального) служит произвольная унитальная алгебра $\mathcal{M}$. В этом случае мы строим алгебру « полуклассических горизонтальных дифференциальных форм» на расслоении P, $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$), удовлетворяющую всем условиям пункта (ii) теоремы 1.25. После этого мы доказываем, что понятие связности в этом случае эквивалентно понятию « лифта дифференцирований», а теория характеристических классов ассоциированных векторных расслоений во многом аналогична теории, развитой в работах [18], [19].

Параграф 2.2 посвящён описанию « полуклассического» дифференциального исчисления на главном квантовом расслоении, точнее, алгебры « полуклассических» горизонтальных форм на главном квантовом расслоении, построенной по алгебре Ли дифференцирований базы. Определение этой алгебры (Опр. 2.3) полностью аналогично определению алгебры дифференциальных форм, построенной по дифференцированиям произвольной ассоциативной алгебры (см. Опр. 2.1), данной в [18]. Небольшое отличие проявлется в том, что нам приходится работать с алгебрами, снабжёнными инволюцией, в связи с чем определения указанной работы было необходимо несколько видоизменить (см. Определение 2.2). Другое отличие состоит в необходимости описывать кодействие квантовой структурной группы на этой алгебре.

Основной теоремой данного параграфа является Теорема 2.10, описывающая свойства алгебры полуклассических дифференциальных форм на квантовом главном расслоении. Оказывается, что для построенной алгебры справедливы все разложения, которые выполняются для алгебр горизонтальных диффенренциальных форм на главном квантовом расслоении (сравни Теор. 1.25). Важность этого утверждения в том, что мы не предъявляем никакого дифференциального исчисления на квантовом раслоении, алгеброй горизонтальных форм которого могла бы служить $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$, однако, благодаря утверждению (ii) теоремы 1.25, мы можем говорить о регулярных связностях на главном расслоении, заменяя их на подходящие дифференцирования алгебры $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$. Более того, ограничиваясь одним из модулей, входящих в разложения Теоремы 2.10, мы можем изучать классы Чженя соответствующего ассоциированного векторного расслоения, изучая « транспонируемые дифференцирования» указанного модуля, см. §1.5.

В последнем параграфе второй главы мы изучаем связности и кривизны на главных квантовых расслоениях в случае, когда алгебра горизонтальных форм — полуклассическая. А именнно, в предложении 2.12 вводится понятие « лифта дифференцирований», аналогичное классическому понятию « лифта векторных полей», см. [16], и доказывается, что задание лифта дифференцирований на алгебре полуклассических горизонтальных дифференциальных форм эквивалентно заданию регулярной связности на подходящем дифференциальном исчислении на главном квантовом расслоении. Далее мы изучаем структуру кривизны в случае полуклассического дифференциального исчисления на главном квантовом расслоении. Оказывается (см. предложение 2.13), что кривизна, определяемая общими методами из главы 1, совпадает в рассматтриваемом случае с тем, что дают конструкции из работ [19], [18].

Третья глава
Последняя глава диссертации посвящена следующему важному вопросу: существуют ли на гланом квантовом расслоении регулярные связности? Дело в том, что все конструкции Джорджевича, описанию которых посвящена первая глава, никак не отвечая на поставленный вопрос, тем не менее целиком и полностью основываются на предположении, что ответ на него положительный. В качестве оправдания, в работе [6] приводится конструкция, позволяющая изменить дифференциальное исчисление на главном расслоении таким образом, что необходимые для работы связности появляются. Однако, структуру нового дифференциального исчисления, полученного подобным путём, совершенно невозможно предсказать. Например, может случиться, что новое дифференциальное исчисление будет тривиальным (равным нулю в размерностях выше нулевой). То же самое касается и второй из представленных в главе 1 конструкций характеристических классов, связанных с ассоциированными векторными расслоениями (см. §1.5): вопрос о существовании необходимых для её успешной реализации «транспонируемых дифференцирований» соответствующих бимодулей никак не решается.

Решению этих двух проблем и посвящена третья глава. В первом параграфе мы изучаем вопрос о существовании регулярных связностей. Оказывается, основываясь на произвольной связности на расслоении, можно построить класс в когомологиях специально построенного по алгебре $\mathfrak{hor}(P)$ пространству Γ_{inv} коцепного комплекса (см. формулы (3.4) и (3.5)), служащий препятствием для существования связности на главном квантовом расслоении – равенство этого класса нулю необходимо и достаточно для существования регулярной связности (теорема 3.5 и следствие 3.6). Более того, при помощи этого препятствия мы построим аналог гомоморфизма Вейля, принимающий значение в Хохшильдовых когомологиях алгебры $\mathcal{M}$, со значениями в $\Omega(\mathcal{M})$(или, более общо, в когомологиях Хохшильда градуированной алгебры $\Omega(\mathcal{M})$, см. теорему 3.8 и замечание после неё).

В общем случае, однако, вычислить подобное препятствие не представляется возможным. Поэтому во втором параграфе мы разарабатываем более простой аналог вышеуказанной конструкции, позволяющий ответить на второй из поставленных вопросов: существование дифференцирований на присоединённых векторных расслоениях, прежде всего, в случае полу-классического дифференциального исчисления (см. главу 2). В начале параграфа разбирается более простой вопрос, а именно, впрос о препятствии для существования связности на произвольном правом модуле над алгеброй $\mathcal{M}$. В этом случае удаётся построить несложный комплекс и указать класс в его гомологиях, служащий препятствием для существования связности, см. (3.15), (3.17) и предложение 3.10. В случае, когда модуль $\mathcal{E}$ — проективный, мы получаем, в качестве следствия из предыдущих конструкций, хорошо известный езультат (см. [18], [21], [22]), гласящий, что на $\mathcal{E}$ существует связность, предл. 3.11. Далее мы приводим аналогичную конструкцию, позволяющую строить препятствия для существования связности на бимодулях, см. (3.18) - (3.21) и предложение 3.12. В случае, когда бимодуль $\mathcal{E}$ является векторным расслоением, ассоциированным с некоторым некоммутативным главным расслоением, его свойства (см. теор. 1.14) позволяют значительно упростить данную конструкцию, а именно, вместо достаточно громоздкого комплекса (3.18), являющегося на самом деле тотальным комплексом бикомплекса (3.23), мы можем рассмотреть более простой комплекс (3.23), (3.25), при этом препятствие будет задаваться коциклом (3.27). После этого мы приводим два примера вычислений значения данного препятствия. Наконец, в конце этого параграфа мы описываем связь между препятствиями к существованию дифференцирований присоединённых векторных расслоений и построенными в конце параграфа 3.1 классами в Хохшильдовых когомологиях алгебры $\mathcal{M}$ (предложение 3.14).

Оглавление

Глава 1

Квантовые группы и главные расслоения

В этой главе мы даём определения и обсуждаем основные свойства квантовых групп и квантовых главных расслоений. В теории квантовых групп нашими основными источниками являются работы Вороновича [2]-[4] . Следует указать, что определения и результаты, которыми мы пользуемся, основаны на интерпретации квантовых групп, как некоммутативных алгебр функций на « квантовом пространстве», а не как деформированных универсальных обёртывающих алгебр. Такое описание принято в большинстве работ, посвящённых вопросу. То, что эти два подхода эквивалентны, следует, например, из основополагающей работы [13]. Теории квантовых групп посвящён первый из пяти параграфов данной главы. Его содержание естественно разбивается на три части. Во-первых, мы даём определение и описываем основные свойства квантовых групп, в частности мы вводим понятие классической части квантовой группы. Далее, мы описываем свойства « дифференциальных исчислений» на квантовых группах, и излагаем основы теории представлений квантовых групп, ровно в том объёме, который нам потребуется позднее для работы с главными расслоениями. Далее мы последовательно излагаем теорию квантовых главных расслоений, связностей на них и характеристических классов, при этом мы опираемся на работы Джорджевича [5]-[9]. Некоторые другие подходы к теории квантовых главных расслоений и вообще некоммутативной дифференциальной геометрии с квантовыми структурными группами можно найти также в работах [20, 17]. Из результатов этой главы для дальнейшего особенно важны конструкция гомоморфизма Вейля (§1.4) и конструкция характеристических классов ассоциированных векторных расслоений (§1.5).

1.1 Квантовые группы

Вслед за [2] дадим следующее определение:

Определение 1.1. Компактной матричной псевдогруппой G, или квантовой группой, называется $\mathbf{C}^*$-алгебра A, для которой определён $*$-гомоморфизм $\hat{\phi} : A \to A \otimes A$ и в которой выделена всюду плотная $*$-подалгебра $\mathcal{A}$, порождённая элементами $(u_{ij})_{i,j=1,\dots n}$ так, что выполняются следующие условия

1. Ограничение отображения $\hat{\phi}$ на $\mathcal{A}$ задаёт отображение $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, при этом

$$\phi(u_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \otimes u_{kj} \tag{1.1}$$

2. Задан $*$-гомоморфизм $\epsilon : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ такой, что
$$(\epsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}})\phi = \mathrm{id}_{\mathcal{A}} = (\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes \epsilon)\phi. \tag{1.2}$$

3. Задан антиизоморфизм $\kappa : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, такой, что
$$m(\kappa \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}})\phi = \epsilon = m(\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes \kappa)\phi \tag{1.3}$$
$$\phi(\kappa(u)) = (\kappa \otimes \kappa)T(\phi(u)) \tag{1.4}$$
где $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ – умножение, и где $T : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ – тасующее отображение,
$$T(a \otimes b) = b \otimes a.$$

4. Выполняется равенство
$$\kappa(\kappa(u^*)^*) = u \qquad \text{для всех } u \in \mathcal{A}.$$

Равенства (1.1)–(1.4) показывают, что отображения ϕ, κ и ϵ задают на $\mathcal{A}$ структуру алгебры Хопфа. В самом деле, из равенства (1.1) и того, что $\mathcal{A}$ порождена элементами u_{ij} следует, что выполняется равенство
$$(\phi \otimes \mathrm{id})\phi = (\mathrm{id} \otimes \phi)\phi, \tag{1.4}$$
то есть коумножение ϕ коассоциативно, и все аксиомы алгебры Хопфа выполняются (при этом отображения κ и ϵ служат, соответственно, антиподом и коединицей). К сожалению, в общем случае не существует непрерывных отображений, распространяющих κ и ϵ на всю алгебру A, поэтому мы не можем говорить, что $\mathbf{C}^*$-алгебра A является $\mathbf{C}^*$-алгеброй Хопфа.

Ниже мы будем работать исключительно с алгеброй $\mathcal{A}$ – « алгеброй гладких функций на квантовой группе», поэтому мы зачастую будем называть квантовой группой саму алгебру $\mathcal{A}$ и говорить « квантовая группа $\mathcal{A}$», а не « квантовая группа G». Приведём примеры квантовых групп.

Пример 1.1.1 (Классические матричные группы Ли). Пусть $G \subseteq GL_N(\mathbb{C})$ — компактная матричная группа Ли. $\mathbf{C}^*$ - алгебра непрерывных функций на G, $C(G)$ – коммутативна. Выберем в $C(G)$ всюду плотную подалгебру $\mathcal{A}$, состоящую из полиномиальных функций от матричных элементов.

Алгебра $\mathcal{A}$ порождена набором функций $(w_{ij})_{i,j=1\ldots N}$ на группе G, значение функции w_{ij} на элементе $g \in G$ равно элементу стоящему на пересечении i^- строки и j^- столбца матрицы, задающей g. Коумножение ϕ в $\mathcal{A}$ задаётся по правилу
$$\sum_{(f)} f_{(1)}(g)f_{(2)}(h) = f(gh),$$
для любых $g, h \in G$, если $\sum_{(f)} f_{(1)} \otimes f_{(2)} = \phi(f)$. Из формулы для произведения матриц следует, что коумножение функций w_{ij} задаётся формулой
$$\phi(w_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} w_{ik} \otimes w_{kj}.$$
Антипод κ определяется как значение функции на обратном элементе:
$$\kappa(f)(g) = f(g^{-1}),$$

а коединица в $\mathcal{A}$ — это значение функций из $\mathcal{A}$ на единице группы G.

Несложно проверить, что выполняются все условия из определения 1.1. Полученная таким образом квантовая группа – G задаётся коммутативными алгебрами $A, \mathcal{A}$. Верно и обратное, любая квантовая группа G, у которой алгебра $\mathcal{A}$ — коммутативная, совпадает с некоторой квантовой группой из описанных в этом примере (см. [2]).

В дальнейшем мы будем работать исключительно с « алгебрами гладких функций $\mathcal{A}$», поэтому в оставшихся примерах мы ограничимся описаниями алгебр $\mathcal{A}$.

Пример 1.1.2 (Квантовая группа $SU_\mu(2)$). Матрица образующих элементов u имеет вид

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & -\mu\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

где $\mu \in (-1;1) \setminus \{0\}$ — парамеметр. Соотношения, которым удовлетворяют элементы $\{\alpha, \alpha^*, \gamma, \gamma^*\}$:

$$\alpha\alpha^* + \mu^2\gamma\gamma^* = 1,\ \alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = 1,$$
$$\alpha\gamma = \mu\gamma\alpha,\ \alpha\gamma^* = \mu\gamma^*\alpha,\ \gamma\gamma^* = \gamma^*\gamma.$$

Коединица ϵ задаётся формулами: $\epsilon(\alpha) = 1$, $\epsilon(\gamma) = 0$. Антипод κ определяется на образующих элементах u_{ij} формулой

$$\kappa(u_{ij}) = u_{ji}^*, \tag{1.6}$$

или, в терминах $\{\alpha, \alpha^*, \gamma, \gamma^*\}$:

$$\kappa(\alpha) = \alpha^*, \qquad \kappa(-\mu\gamma^*) = \gamma^*,$$
$$\kappa(\gamma) = -\mu\gamma, \qquad \kappa(\alpha^*) = \alpha.$$

Пример 1.1.3 (Квантовые группы $SU_\mu(n)$). Пусть $\mu \in (-1;1)\setminus\{0\}$ — произвольное число. Тогда $S_\mu U(n)$ —-это алгебра, порождённая элементами $(u_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ удовлетворяющими соотношениям

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij}u_{kj}^* = \delta_{kj}\cdot 1,\ \sum_{j=1}^{n} u_{ji}^*u_{jk} = \delta_{ik}\cdot 1,$$
$$\sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} u_{i_1j_1}\cdot\ldots\cdot u_{i_nj_n}E_{j_1\dots j_n} = E_{i_1\dots i_n}\cdot 1, \quad i_1,\dots,i_n = 1,\dots,n,$$

где $E_{i_1\dots i_n} = (-\mu)^{I(i)}$, $I(i)$ — число инверсий в последовательности $i_1, \dots i_n$. Опять антипод определяется формулой (1.6), а коединица — $\epsilon(u_{ij}) = \delta_{ij}$.

Пример 1.1.4 (Универсальная квантовая группа $U_F(n)$).

Пусть F — положительно-определённая матрица в $GL_n(\mathbb{C})$, такая, что $tr(F) = tr(F^{-1})$. Тогда мы можем рассматривать алгебру $U_F(n)$, порожденую элементами матрицы $u = (u_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ и соотношениями

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij}u_{kj}^* = \delta_{ik}\cdot 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} u_{ji}^*u_{jk} = \delta_{ik}\cdot 1,$$
$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij}^*u_{kj}^F = \delta_{ik}\cdot 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} u_{ji}^Fu_{jk}^* = \delta_{ik}\cdot 1,$$

где $u^F = FuF^{-1}$. Антипод задаётся формулой (1.6), а коединица — правилом $\epsilon(u_{ij}) = \delta_{ij}$.

Пусть теперь $\mathcal{A}$ — произвольная квантовая группа. Рассмотрим множество $*$-характеров алгебры $\mathcal{A}$ (то есть множество $*$-гомоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathbb{C}$). Формула

$$\big[\chi_1 \cdot \chi_2\big](a) = \sum_{(a)} \chi_1(a_{(1)})\chi_2(a_{(2)}), \qquad a \in \mathcal{A}, \tag{1.7}$$

задаёт умножение в множестве характеров (мы воспользовались записью

$$\phi(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)},$$

предложенной в [12]). Как доказано в [2], эта операция превращает множество характеров на $\mathcal{A}$ в компактную подгруппу в унитарной группе $U(n)$, n — размерность матрицы u из определения 1.1.

Определение 1.2. Эта группа называется *классической частью* квантовой группы $\mathcal{A}$ и обозначается G_{cl}, или $\mathcal{A}_{cl}$ (второе обозначение мы будем часто использовать при разговоре о полиномиальных функциях на G_{cl}).

Во многих случаях можно явно указать, какая группа будет классической частью той или иной квантовой группы. Так, например, в рассмотренных выше примерах, классическими частями будут: в первом примере — сама группа G, в случае $SU_\mu(2)$ — S^1, в случае квантовой группы $SU_\mu(n)$ — $n-1$-мерный тор T^{n-1}. Классическая часть универсальной квантовой группы $U_F(n)$ зависит от структуры корневых пространств оператора F, см. [5]. Наконец, укажем, что алгебру Ли $lie(\mathcal{A}_{cl})$ можно рассматривать, как множество таких линейных отображений $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$, что

$$X(ab) = X(a)\epsilon(b) + \epsilon(a)X(b), \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Заметим, что формула

$$s(a)(\chi) = \chi(a), \quad a \in \mathcal{A},\ \chi \in G_{cl}$$

задаёт отображение $s : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_{cl}$. Нетрудно проверить, что это отбражение является сюръективным морфизмом алгебры Хопфа $\mathcal{A}$ на алгебру полиномиальных функций на G_{cl}, см. первый пример.

Теперь мы вкратце расскажем о том, что мы будем называть дифференциальным исчислением на квантовой группе. Пусть, для начала, A — произвольная унитальная алгебра. Мы будем называть дифференциальным исчислением на алгебре A такой бимодуль Γ над A, для которого существует отображение

$$d : A \to \Gamma, \qquad d(ab) = d(a)b + ad(b),\ \forall a, b \in A.$$

При этом, любой элемент $\eta \in \Gamma$ должен быть представим в виде $\eta = \sum_k a_k db_k$.

Пример 1.1.5. Рассмотриим множество

$$A^2 \subseteq A \otimes A,\ A^2 = \Big\{\sum_k a_k \otimes b_k | \sum_k a_k b_k = 0\Big\}.$$

Отображение d задаётся формулой $dx = 1 \otimes x - x \otimes 1$. Несложно проверить, что все условия выполнены. Это дифференциальное исчисление мы будем называть тривиальным и обозначать Γ_{triv}, или $\Omega^0_{triv}(A)$.

В случае, когда $A = \mathcal{A}$ — квантовая группа, мы будем накладывать на дифференциальное исчисление Γ несколько дополнительных условий. Именно, мы требуем, чтобы формулы

$$\phi_\Gamma(\sum_k a_k db_k) = \sum_{k,(a_k),(b_k)} a_{k,(1)}b_{k,(1)} \otimes a_{k,(2)}db_{k,(2)}, \tag{1.8}$$

$$_\Gamma\phi(\sum_k a_k db_k) = \sum_{k,(a_k),(b_k)} a_{k,(1)}db_{k,(1)} \otimes a_{k,(2)}b_{k,(2)}, \tag{1.9}$$

корректно задавали отображения $\phi_\Gamma : \Gamma \to \mathcal{A} \otimes \Gamma$ и $_\Gamma\phi : \Gamma \to \Gamma \otimes \mathcal{A}$, и чтобы формула

$$(adb)^* = d(b^*)a^* \tag{1.10}$$

корректно определяла *-структуру на Γ. Дифференциальное исчислением, удовлетворяющее всем этим условиям мы будем называть *биковариантным*. Если же выполняется толлько одно из условий (1.8) или (1.9) (и условие (1.10)), то такое дифференциальное исчисление мы будем называть лево- (соотв. право-) ковариантным.

Пример 1.1.6. Если $\mathcal{A}$ — алгебра полиномиальных функций на матричной группе Ли, то в качестве Γ можно взять пространство обыкновенных полиномиальных 1-форм на группе, $\Omega^1(G_{cl})$. Конечно, такое дифференциальное исчисление будет биковариантным. Для произвольной квантовой группы $\mathcal{A}$ можно рассмотреть тогда отображение

$$a \mapsto d(s(b)) \in \Omega^1(G_{cl})$$

превращающее $\Omega^1(G_{cl}) = \Gamma_{cl}$ в дифференциальное исчисление на $\mathcal{A}$. Это дифференциальное исчисление, вообще говоря, не является ни лево-, ни правоковариантным. Однако, эту конструкцию можно исправить: рассмотрим отображения

$$s_l : a \otimes b \mapsto \sum_{(a),(b)} a_{(1)}b_{(1)} \otimes s(a_{(2)})d(s(b_{(2)})) \in \mathcal{A} \otimes \Gamma_{cl},$$

$$s_r : a \otimes b \mapsto \sum_{(a),(b)} s(a_{(1)})d(s(b_{(1)})) \otimes a_{(2)}b_{(2)} \in \Gamma_{cl} \otimes \mathcal{A},$$

$$s_{bi} : a \otimes b \mapsto \sum_{(a),(b)} a_{(1)}b_{(1)} \otimes s(a_{(2)})d(s(b_{(2)})) \otimes a_{(3)}b_{(3)} \in \mathcal{A} \otimes \Gamma_{cl} \otimes \mathcal{A}.$$

Образы этих отображений, очевидно, будут соответственно лево-, право- и биковариантным дифференциальным исчислением на квантовой группе $\mathcal{A}$. Можно доказать, что образ первого отображения совпадает с пространством

$$\mathcal{A} \,\square_{\mathcal{A}_{cl}} \Gamma_{cl} \overset{\mathrm{def}}{=} \ker\Big(\big((\mathrm{id} \otimes s)\phi\big) \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \phi_{\Gamma_{cl}} : \mathcal{A} \otimes \Gamma_{cl} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_{cl} \otimes \Gamma_{cl}\Big),$$

— тензорным произведением $\mathcal{A}$ и Γ_{cl} над $\mathcal{A}_{cl}$. Аналогично, во втором случае образом служит пространство $\Gamma_{cl} \,\square_{\mathcal{A}_{cl}} \mathcal{A}$, а в третьем —
$\mathcal{A} \,\square_{\mathcal{A}_{cl}} \Gamma_{cl} \,\square_{\mathcal{A}_{cl}} \mathcal{A}$.

Слдедующая теорема доказана в [3] и [5].

Теорема 1.1. (*i*) *Пусть Γ — левоковариантое дифференциальное исчисление. Обозначим*

$$\Gamma_{inv} = \{\omega \in \Gamma | \phi_\Gamma(\omega) = 1 \otimes \omega\}.$$

Тогда справедливо разложение $\Gamma \cong \mathcal{A} \otimes \Gamma_{inv}$. (Для право-ковариантного дифференциального исчисления справедливо аналогичное утверждение, только Γ_{inv} следует заменить на аналогичное пространство $_{inv}\Gamma$.)

(ii) Рассмотрим отображение $\pi : \mathcal{A} \to \Gamma$,

$$\pi(a) = \kappa(a_{1)})d(a_{(2)})$$

(мы пропустили очевидный знак суммы). Тогда π — эпиморфное отображение $\ker(\epsilon)$ на Γ_{inv}. Ядро π, $\mathcal{R}_\Gamma$ — правый идеал в $\ker(\epsilon)$. (Например, идеал, соответствующий Γ_{triv} равен нулю и отображение π в этом случае принимает вид $\pi(a) = a - \epsilon(a)$.) Если при этом Γ — биковариантное дифференциальное исчисление, удовлетворяющее условию (1.10), то

$$ad(\mathcal{R}_\Gamma) \subseteq \mathcal{R}_\Gamma \otimes \mathcal{A}, \quad \text{и } \kappa(\mathcal{R}_\Gamma^*) = \mathcal{R}_\Gamma.$$

Здесь $ad : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ — присоединённое кодействие:

$$ad(a) = \sum_{(a)} a_{(2)} \otimes \kappa(a_{1)})a_{(3)}$$

Пусть Γ — произвольное дифференциальное исчяисление на произвольной алгебре A. Самый простой способ продолжить его до « исчисления дифференциальных форм высших порядков» — следующий. Достаточно рассмотреть фактор-алгебру

$$\Gamma^\wedge = \Gamma^{\otimes_\mathcal{A}} \big/ S,$$

где S — идеал в $\Gamma^{\otimes_\mathcal{A}}$, порождённый пространством

$$S^2 \subseteq \Gamma \otimes_\mathcal{A} \Gamma,$$

$$S^2 = \Big\{ \sum_k da_k \otimes db_k | \sum_k a_k db_k = 0 \Big\}.$$

Очевидно, что дифференциал $d : \mathcal{A} \to \Gamma$ продолжается до дифференциала $d : \Gamma^\wedge \to \Gamma^\wedge$, обладающего всеми свойствами дифференциала градуированной алгебры. Эту алгебру мы тоже будем называть дифференциальным исчислением на квантовой группе. Очевидно, полученное распространение универсально в следующем смысле (см. [5]):

Предложение 1.2. *Пусть Ω произвольная дифференциальная градуированная алгебра с дифференциалом d_Ω. Пусть $\varphi : \mathcal{A} \to \Omega$ гомоморфизм, такой, что отображение $\Gamma \to \Omega$, $adb \mapsto \varphi(a)d_\Omega(\varphi(b))$ корректно определено. Тогда существует единственное продолжение $\varphi^\wedge : \Gamma^\wedge \to \Omega$ гомоморфизма φ до гомоморфизма дифференциальных градуированных алгебр.*

В частности, из теоремы 1.1 и этого предложения следует, что для дифференциального исчисления $\Gamma_{triv}^\wedge$, построенного по Γ_{triv}, определены эпиморфные отображения на все возможные дифференциальные исчисления на квантовой группе.

Если Γ — биковариантный, то из предложения 1.2 следует, что отображения ϕ_Γ и ${}_\Gamma\phi$ продолжаются до аналогичных отображений $\phi_{\Gamma^\wedge}$ и ${}_{\Gamma^\wedge}\phi$. Тогда, из теоремы 1.1 следует, что существует разложение

$$\Gamma^\wedge \cong \mathcal{A} \otimes \Gamma_{inv}^\wedge,$$

$$\Gamma_{inv}^\wedge = \Gamma_{inv}^\otimes \big/ \Gamma_{inv}^\otimes \cap S,$$

причём идеал $S_{inv} = \Gamma_{inv}^\otimes \cap S$ порождён пространством

$$S_{inv}^2 = S^2 \cap \Big(\Gamma_{inv} \otimes \Gamma_{inv} \Big),$$

$$S^2 = \Big\{ \sum_{(a)} \pi(a_{(a)}) \otimes \pi(a_{(2)}) | a \in \mathcal{R}_\Gamma \Big\}.$$

Кроме того, $*$-структура на Γ продолжается до $*$-струтуре на дифференциальной градуированной алгебре $\Gamma^{\wedge}$. В терминах отображения π, дифференциал и $*$-структура на $\Gamma^{\wedge}$ задаются формулами:

$$da = a_{(1)}\pi(a_{(2)}), \quad d(\pi(a)) = -\pi(a_{(1)}) \wedge \pi(a_{(2)}), \quad \pi(a)^* = -\pi(\kappa(a)^*).$$

Например, из этого следует, что $\Gamma^{\wedge}_{triv}$ совпадает с кобар-резольвентой алгебры $\mathcal{A}$.

Наконец, заметим, что правое кодействие ${}_{\Gamma}\phi$ при ограничении на пространство Γ_{inv} определяет кодействие $\varpi : \Gamma_{inv} \to \Gamma_{inv} \otimes \mathcal{A}$. В терминах кодействия π, имеем

$$\varpi\pi = (\pi \otimes \mathrm{id})ad.$$

Другие примеры дифференциальных исчислений на квантовых группах можно найти в [3]. Полная классификация дифференциальных исчислений на некоторых классах квантовых групп содержится, например, в [14] и [15].

Закончим параграф описанием « представлений кватовых групп». Конечно-мерным представлением u квантовой группы $\mathcal{A}$, мы будем называть пару $u = (\tilde{u}, H_u)$, где $\tilde{u} = (u_{ij})_{i,j=1,\ldots,n_u}$ — матрица из элементов из $\mathcal{A}$, $H_u = \mathbb{C}^{n_u}$ — конечно-мерное гильбертово пространстрво, на котором справа кодействует квантовая группа $\mathcal{A}$, то есть определено отображение

$$\triangle_u : H_u \to H_u \otimes \mathcal{A},$$

$$(\triangle_u \otimes \mathrm{id})\triangle_u = (\mathrm{id} \otimes \phi)\triangle_u, \tag{1.11}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \epsilon)\triangle_u = \mathrm{id} \tag{1.12}$$

так что в некотором базисе $e_1, \ldots, e_{n_u}$ действие задаётся формулой

$$\triangle_u(e_i) = \sum_k e_k \otimes u_{ki}, \quad i = 1, \ldots, n_u. \tag{1.13}$$

Элементы $(u_{ij})_{i,j=1,\ldots,n_u}$ мы будем называть матричными элементами представления u в базисе $e_1, \ldots e_2$. Из (1.11) и (1.12) следует, что

$$\phi(u_{ij}) = \sum_k u_{ik} \otimes u_{kj}, \tag{1.14}$$

$$\epsilon(u_{ij}) = \delta_{ij} \tag{1.15}$$

Из определения 1.1 в частности следует, что матрица $(u_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ элементов, порождающих $\mathcal{A}$, задаёт представление квантовой группы $\mathcal{A}$ на пространстве $\mathbb{C}^n$. Это представление мы будем называть фундаментальным.

Суммой $u \oplus v$ представлений u и v называется представление на пространстве $H_u \oplus H_v$ заданное матрицей размерности $(n_u + n_v) \times (n_u + n_v)$

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} & 0 \\ 0 & \tilde{v} \end{pmatrix}.$$

Аналогично, тензорным произведением представления u и представления v, взятых в указанном порядке, называется предсталение $u \times v$ на пространстве $H_u \otimes H_v$, определяемое матрицей размерности $n_u n_v \times n_u n_v$ с элементами $u_{ij} v_{kl}$.

Морфизмом представления u в представление v называется линейное отображение $f : H_u \to H_v$, такое, что

$$(f \otimes \mathrm{id})\triangle_u = \triangle_v f.$$

Множество морфизмов представлений является векторным пространством и обозначается $\mathrm{Mor}(u, v)$. Представления u и v называются изоморфными, если существует морфизм $f \in \mathrm{Mor}(u, v)$, который является изоморфизмом соответствующих векторных пространств. Если представления u и v изоморфны, то их матрицы связаны соотношением $f^{-1}\tilde{v}f = \tilde{u}$. Например, в отличие от классического случая, представления $u \times v$ и $v \times u$, вообще говоря, не изоморфны, если только квантовая группа не совпадает с одной из групп из примера 1.1.1.

Представление u называется приводимым, если в пространстве H_u существует подпространство H, отличное от H_u и ненулевое, для которого выполняется вложение $\triangle_u(H) \subseteq H \otimes \mathcal{A}$. В противном случае представление u — неприводимое. Представление u — вполне приводимо, если оно изоморфно прямой сумме неприводимых представлений.

Для каждого представления u квантовой группы $\mathcal{A}$ определено *сопряжённое, или контрагредиентное представление*, $\bar{u}$, действуещее на пространстве $H_{\bar{u}} = H_u^*$ линейных функционалов на H_u. Матрица представления в двойственном базисе, $\bar{u}, \tilde{\bar{u}}$ определяется формулой

$$\bar{u}_{ij} = \kappa(u_{ji}).$$

Скалярное произведение на H_u задаёт антиизоморфизм векторных пространств $j_u : H_u \to H_u^* = H_{\bar{u}}$. Оператор

$$j_{\bar{u}} \circ j_u = C_u : H_{\bar{\bar{u}}} = H_u^{**} = H_u \to H_u$$

является морфизмом представлений, он называется каноническим морфизмом. Это — положительно-определённое линейное отображение, однозначно определяемое требованием $tr(C_u) = tr(C_u^{-1})$. Пусть $()_u$ – эрмитово скалярное произведение на H_u. Тогда справедлива следующая формула, связывающая скалярные произведения в сопряжённых представлениях

$$(f, g)_{\bar{u}} = (j_u^{-1}(g), C_u j_u^{-1}(f))_u.$$

Для любой пары сопряжённых представлений u, $\bar{u}$ определены канонические морфизмы представлений: спаривание $\gamma^u : H_u^* \otimes H_u \to H_\varnothing = \mathbb{C}$ (тут $\varnothing$ – тривиальное представление квантовой группы $\mathcal{A}$ на пространстве $\mathbb{C}$, матрица которого состоит из единицы группы $\mathcal{A}$) и вложение единичного оператора $I_u : \mathbb{C} \to H_u \otimes H_u^*$. Аналогично, меняя местами u и $\bar{u}$, получаем морфизмы $\gamma_u : H_u \otimes H_u^* \to \mathbb{C}$ и $I_u : \mathbb{C} \to H_u^* \otimes H_u$; в явном виде:

$$\gamma^u(f \otimes x) = f(x), \qquad \gamma_u(x \otimes f) = f(C_u(x)),$$
$$I_u(1) = \sum_{i=1}^{n_u} e_i \otimes e_i^*, \qquad I^u(1) = \sum_{i,j=1}^{n_u} [C_u^{-1}]_{ji} e_i^* \otimes e_i.$$

Здесь $e_1^*, \dots e_{n_u}^*$ — двойственный базис в пространстве $H_{\bar{u}} = H_u^*$.

Представления квантовой группы $\mathcal{A}$ образуют категорию, согласно теминологии статьи [4], такая категория называется конкретной моноидальной W^*-категорией. Эту категорию мы будем обозначать $R(G)$, или $R(\mathcal{A})$. В работах [2, 4] доказано следуещее утверждение:

Теорема 1.3. (i) *Все представления любой квантовой группы $\mathcal{A}$ вполне приводимы.*

(ii) *Любое неприводимое представление квантовой группы встречается в разложении на неприводимые представления подходящей тензорной степени фундаментального представления, или представления, сопряжённого фундаментальному.*

(*iii*) *Любое представление квантовой группы эквивалентно унитарному представлению, то есть такому представлению, матрица которого является унитарным элементом в тензорном произведении $B(H_u) \otimes \mathcal{A}$, где $B(H_u)$ — алгебра опреаторов на гильбертовом пространстве H_u. Для матрицы унитарного представления выполнено условие*

$$u^*_{ij} = \kappa(u_{ji}).$$

(*iv*) *Пусть $\mathcal{T}$ — множество неприводимых неэквиваленитных представлений квантовой группы $\mathcal{A}$. Тогда алгебра $\mathcal{A}$, как векторное пространство, распадается в прямую сумму подпространств $\tilde{H}_u$, порождённых матричными элементами u^α_{ij} представлений $\alpha \in \mathcal{T}$. При этом все элементы u^α_{ij} между собой линейно-независимы.*

(*v*) *Любая квантовая группа $\mathcal{A}$ однозначно восстанавливается по своей категории представлений $R(\mathcal{A})$.*

1.2 Определение квантовых расслоений. Примеры

Прежде всего дадим определения основного объекта с которым нам предстоит работать.

Определение 1.3. Некоммутативным (или квантовым) главным расслоением P с базой $\mathcal{M}$ – унитальной, ассоциативной, но необязательно коммутативной *-алгеброй, и со структурной группой $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ — алгебра гладких функций на квантовой группе G) называется унитальная ассоциативная (но некоммутативная) *-алгебра $\mathcal{B}$, для которой существует гомоморфизм *-алгебр $F : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$, такой, что

$$(\mathrm{id} \otimes \phi)F = (F \otimes \mathrm{id})F \tag{1.16}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \epsilon)F = id \tag{1.17}$$

где ϕ, ϵ – соответственно коумножение и коединица квантовой группы $\mathcal{A}$. При этом должны быть выполнены следующие два важных условия:

(*кгр1*) Существует вложение *-алгебр $i : \mathcal{M} \to \mathcal{B}$, такое, что

$$i(\mathcal{M}) = \{b \in \mathcal{B} | F(b) = b \otimes 1\}$$

(*кгр2*) Отображение $X : \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ заданное формулой

$$X(c \otimes b) = \sum_k cb_k \otimes \tilde{b}_k, \tag{1.18}$$

где $\sum\limits_k b \otimes \tilde{b}_k = F(b) \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ – эпиморфно.

Равенства (1.16) и (1.17) означают, что алгебра Хопфа $\mathcal{A}$ ко-действует на алгебре $\mathcal{B}$ (или, что « квантовая группа G действует на P»). Мы будем иногда опускать приставку « ко-» и говорить, что «…алгебра $\mathcal{A}$ действует на алгебре $\mathcal{B}$…», или на какой-нибудь другой алгебре.

В дальнейшем мы будем отождествлять алгебру $\mathcal{M}$ и образ вложения i. Поэтому можно считать, по-определению, что база расслоения P состоит из $\mathcal{A}$-инвариантных элементов:

$$\mathcal{M} \overset{\mathrm{def}}{=} \{m \in \mathcal{B} | F(M) = m \otimes 1\}$$

В самом деле, ясно, что $1 \in \mathcal{M}$ и что, если $m \in \mathcal{M}$, то и $m^* \in \mathcal{M}$. Кроме того, так как отображение F является гомоморфизмом алгебр, то сумма и произведение любых двух элементов из $\mathcal{M}$ тоже принадлежат $\mathcal{M}$, то есть множество $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}$ является $*$-подалгеброй в $\mathcal{B}$.

Обсудим теперь условие (*кгр2*). Заметим, прежде всего, что та же самая формула 1.18 может быть использована для того, чтобы задать отображение $\tilde{X} : \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$. Иначе говоря, отображение X пропускается через $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{B}$. Кроме того, оба отображения, и X, и $\tilde{X}$, являются морфизмами левых $\mathcal{B}$ модулей. Поэтому условие (*кгр2*) эквивалентно следующему условию

(*кгр2′*) Для любого $a \in \mathcal{A}$ существуют элементы $p_k, q_k \in \mathcal{B}$, что

$$X\Big(\sum_k p_k \otimes q_k\Big) = 1 \otimes a.$$

Объясним, наконец, геометрический смысл определения 2.1. В классическом случае главное расслоение P со структурной группой G — это пространство, на котором свободно действует группа Ли G. Действие группы G задаётся отображением $f : P \times G \to P$, таким, что коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
P \times G \times G \arrow[r, "f\times \mathrm{id}_G"] \arrow[d, "\mathrm{id}_P \times \varphi"] & P \times G \arrow[d, "f"] & P \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, equal] & P \times G \arrow[d, "f"] \\
P \times G \arrow[r, "f"] & P, & P \arrow[r, equal] & P.
\end{tikzcd}$$

Здесь φ — умножение в группе Ли G, и $i_1(p) = p \times \{e\}$. База расслоения P тогда отождествляется с фактор-пространством $M = P/G$.

В соответсвие с общей идеологией, описанной во « Введении», мы должны заменить сами пространства на соответствующие алгебры (гладких) функций и при этом обратить все стрелки в диаграммах. Тогда несложно проверить, что отображение пространств f при этом превращается в отображение $*$-алгебр F, удовлетворяющее уравнениям (2.1) и (2.2). (Ср. §1.1, определение представлений квантовой группы.) База расслоения становится множеством $\mathcal{M}$ — $\mathcal{A}$-инвариантных элементов алгебры $\mathcal{B}$.

В классическом случае условие свободности действия f эквивалентно инъективности следующего отображения

$$Y : P \times G \to P \times P,$$
$$(p, g) \overset{Y}{\mapsto} (p, p \cdot g),$$

где $p \cdot g = f(p, g)$. Очевидно, что образ отображения Y лежит в подпространстве

$$P \times_M P \overset{def}{=} \{(p, q) \in P \times P | \pi(p) = \pi(q)\} \subset P \times P,$$

где $\pi : P \to M$ – естественная проекция. Но инъективное отображение пространств, очевидно, индуцирует сюръективное отображение алгебр функций. В результате обращения стрелок в определении отображения Y, получается отображение X (или $\tilde{X}$). Следовательно условие (*кгр2*) является обобщением классического условия свободности действия структурной группы на пространстве расслоения.

Замечание. Несложно проверить, что, на самом деле, в классическом случае образ отображения Y *совпадает* с пространством $P \times_M P$. На языке алгебр функций это утверждение эквивалентно следующему условию:

(*ргх*) Отображение $\tilde{X} : \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ — изоморфизм.

В квантовом случае, однако, автору не известно доказательство того, что из условия (*кгр2*) следует изоморфность отображения $\tilde{X}$.

Если на алгебре $\mathcal{B}$ действует справа алгебра Хопфа $\mathcal{A}$, так что выполняется условие (*ргх*) то говорят, что $\mathcal{B}$ является *расширением Галуа – Хопфа* алгебры $\mathcal{M}$ при помощи алгебры Хопфа $\mathcal{A}$. Эти объекты изучаются, например в статье [11].

Закончим этот раздел примерами квантовых главных расслоений.

Пример 1.2.1 (Тривиальные главные квантовые расслоения). Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная унитальная *-алгебра, $\mathcal{A}$ — квантовая группа. Положим $\mathcal{B} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}$. Кодействие F на $\mathcal{B}$ задаётся формулой $F(m \otimes a) = m \otimes \phi(a)$, где $m \in \mathcal{M}, a \in \mathcal{A}$ и $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ — коумножение в квантовой группе $\mathcal{A}$. То, что отображение F является кодействием (то есть верны формулы (2.1) и (2.2)) и то, что алгебра $\mathcal{M}$ совпадает со множеством $\mathcal{A}$-инвариантных элементов этого кодействия — очевидно.

Проверим, что действие группы $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$ – свободное, то есть, что выполняется условие (*2′*). Рассмотрим произвольный элемент $a \in \mathcal{A}$. Пусть $\phi(a) = \sum_k b_k \otimes c_k$, тогда для $p_k = 1 \otimes \kappa(b_k)$, $q_k = 1 \otimes c_k$, очевидно, $X\Big(\sum_k p_k \otimes q_k\Big) = 1 \otimes a$. В частности, сама квантовая группа $\mathcal{A}$ является тривиальным расслоением над точкой: $C^\infty(\mathrm{pt}) = \mathbb{C}$.

Пример 1.2.2. Пусть $\Gamma^\wedge$ — алгебра (некоммутативных) дифференциальных форм на квантовой группе $\mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{A}$ действует на $\Gamma^\wedge$ справа (Напомним, что мы рассматриваем только би-ковариантные дифференциальные исчисления.) Множество неподвижных точек этого действия состоит из право-инвариантных дифференциальных форм на группе, ${}_{inv}\Gamma^\wedge$ (см. §1.1). Чтобы проверить выполнение условия (*2′*), достаточно вспомнить, что существует разложение

$$\Gamma^\wedge = {}_{inv}\Gamma^\wedge \otimes \mathcal{A}.$$

Далее, так же как в Примере 2.1, берём $p_k = 1 \otimes \kappa(b_k)$, $q_k = 1 \otimes c_k$, где $\sum_k b_k \otimes c_k = \phi(a)$.

Пример 1.2.3 (Скрещённые произведения). Примеры 2.1 и 2.2 — частные случаи следующей общей конструкции. Пусть $*$-алгебра Хопфа $\mathcal{A}$ действует слева, (*в обычном смысле*!) на унитальной $*$-алгебре $\mathcal{M}$, так что выполняются следующие условия:

$$a(m \cdot n) = \sum_{(a)} a_{(1)}(m) \cdot a_{(2)}(n),\ a(1) = \epsilon(a),$$
$$a^*(n^*) = (\kappa^{-1}(c)(n))^*,$$

для любого $a \in \mathcal{A}$, $m, n \in \mathcal{M}$, $\sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} = \phi(a)$ и $a(m)$ — результат действия элемента a на m.

Тогда можно определить алгебру $\mathcal{M} \rtimes \mathcal{A}$. Именно: как векторное пространство $\mathcal{M} \rtimes \mathcal{A} \cong \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}$, а умножение и $*$-структура на $\mathcal{M} \rtimes \mathcal{A}$ задаются при помощи формул

$$(m \otimes b)(n \otimes c) = \sum_{(b)} m b_{(1)}(n) \otimes b_{(2)} c \tag{1.19}$$

$$(m \otimes b)^* = \sum_{(b)} b^*_{(1)}(m^*) \otimes b^*_{(2)}. \tag{1.20}$$

На $\mathcal{M} \rtimes \mathcal{A}$ справа очевидным образом ко-действует алгебра Хопфа $\mathcal{A}$, так что множество неподвижных точек этого кодействия совпадает с $\mathcal{M}$. Если $\mathcal{A}$ — квантовая группа, то, чтобы доказать, что мы получили квантовое главное расслоение, осталось проверить выполнение условия (*кгр2*), что делается точно так же, как в предыдущих двух примерах.

Чтобы теперь получить из этой общей конструкции тривиальное главное расслоение примера 1.2.1, надо положить, что $a \in \mathcal{A}$ действует на $m \in \mathcal{M}$ по формуле

$$a(m) = \epsilon(a)m,$$

а в примере 1.2.2 $\mathcal{M} = {}_{inv}\Gamma^{\wedge}$ и действие задаётся формулой

$$a(\theta) = \sum_{(a)} a_{(1)}\theta\kappa(a_{(2)}),\ \theta \in {}_{inv}\Gamma^{\wedge}$$

(см. §1.1).

Совершенно аналогично можно определить скрещённое произведение в случае, когда алгебра Хопфа действует на унитальной алгебре $\mathcal{N}$ справа, в этом случае пишут $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{N}$. Кроме того, скрещённые произведения можно определить когда алгебра Хопфа $\mathcal{A}$ действует слева (соотв. справа) на алгебре $\mathcal{M}$ и ко-действует справа (соотв. слева) на алгебре $\mathcal{N}$. Полученная алгебра обозначается $\mathcal{M} \ltimes \mathcal{N}$ (соотв. $\mathcal{N} \rtimes \mathcal{M}$). Подробности можно найти, например, в книге [12] (см. также [20]).

Пример 1.2.4 (Однородные пространства). Пусть задано вложение квантовых групп $\tilde{\varphi} : G' \to G$, то есть эпиморфное отображение алгебр Хопфа $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$. Тогда можно построить некоммутативное главное расслоение со структурной группой G'. Алгеброй гладких функций на пространстве этого расслоения служит $\mathcal{A}$, действие $\mathcal{A}'$ на $\mathcal{A}$ определяется формулой

$$F_{\mathcal{A}'}(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes \varphi(a_{(2)}). \tag{1.21}$$

В силу эпиморфности отображения φ условие (*кгр2*) выполняется. Следовательно, ($\mathcal{A}$, $F_{\mathcal{A}'}$) — квантовое главное расслоение со структурной группой $\mathcal{A}$ и базой

$$\mathcal{M}' = \{a \in \mathcal{A} | F_{\mathcal{A}'}(a) = a \otimes 1\}.$$

Заметим, кстати, что эта же конструкция позволяет из произвольного главного расслоения со структурной квантовой группой $\mathcal{A}$ получить главное $\mathcal{A}'$-расслоение.

Пример 1.2.5 (Замена структурной группы). Пусть задано квантовое главное расслоение $P = (\mathcal{B},\ F)$ и пусть $f : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ — гомоморфизм квантовых групп (то есть морфизм алгебр Хопфа). Определим квантовое главное расслоение P', с базой $\mathcal{M}$, ассоциированное с P при помощи гомоморфизма f. Именно, рассмотрим подпространство $\mathcal{B} \,\Box_{\mathcal{A}}\, \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}'$:

$$\mathcal{B} \,\Box_{\mathcal{A}}\, \mathcal{A}' = \ker\Big(F \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}'} - \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes {}_{\mathcal{A}}F = \Phi : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}' \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'\Big), \tag{1.22}$$

где ${}_{\mathcal{A}}F(a') = \sum_{(a')} f(a'_{(1)}) \otimes a'_{(2)}$. Пространство $\mathcal{B} \,\Box_{\mathcal{A}}\, \mathcal{A}'$ называется тензорным произведением $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}'$ над алгеброй Хопфа $\mathcal{A}$.

Предложение 1.4. *Пространство* $\mathcal{B} \Box_{\mathcal{A}} \mathcal{A}'$ *является алгеброй гладких функций на квантовом главном расслоении со структурной группой* $\mathcal{A}'$ *и базой* $\mathcal{M}$, *то есть это алгебра для которой существует правое ко-действие* $F : \mathcal{B} \,\Box_{\mathcal{A}}\, \mathcal{A}' \to \Big(\mathcal{B} \,\Box_{\mathcal{A}}\, \mathcal{A}'\Big) \otimes \mathcal{A}'$, *такое, что выполняется условие (кгр2) и подалггебра, неподвижная относительноэтого ко-действия, изоморфна* $\mathcal{M}$.

Доказательство. Так как оба отображения, и $F \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}'}$, и $\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes {}_{\mathcal{A}}F$ — гомоморфизмы $*$-алгебр, то пространство $\mathcal{B} \,\square_{\mathcal{A}}\, \mathcal{A}'$ является $*$-подалгеброй в $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}'$ с единицей $1 \otimes 1' \in \mathcal{B} \,\square_{\mathcal{A}}\, \mathcal{A}'$.

Действие группы G' на $\mathcal{B} \,\square_{\mathcal{A}}\, \mathcal{A}'$ задаётся как ограничение на $\mathcal{B} \,\square_{\mathcal{A}}\, \mathcal{A}'$ отображения $\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \phi' : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}' \to \Big(\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}'\Big) \otimes \mathcal{A}'$ (здесь ϕ' – коумножение в $\mathcal{A}'$). В самом деле, очевидно, что

$$(F \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}'}^{\otimes 2})(\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \phi') = F \otimes \phi' = (\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes \phi')(F \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}})$$

и

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes {}_{\mathcal{A}}F \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}'})(\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \phi') &= \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes ({}_{\mathcal{A}}F \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}'})\phi' = \\ &= \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes (\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes \phi')_{\mathcal{A}}F = (\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes \phi')(\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes {}_{\mathcal{A}}F).\end{aligned}$$

Поэтому $(\Phi \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}'})(\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \phi') = (\mathrm{id}_{\mathcal{B}\otimes\mathcal{A}} \otimes \phi')\Phi$, и значит $(\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \phi')(\ker \Phi) \subseteq \ker(\Phi) \otimes \mathcal{A}'$.

Пусть $\tilde{F} : \mathcal{B} \,\square_{\mathcal{A}}\, \mathcal{A}' \to (\mathcal{B} \,\square_{\mathcal{A}}\, \mathcal{A}') \otimes \mathcal{A}'$ — вышеуказанное кодействие. Найдём его неподвижную подалгебру. Предположим, что

$$\tilde{F}\Big(\sum_i b_i \otimes a_i'\Big) = \Big(\sum_i b_i \otimes a_i'\Big) \otimes 1.$$

Это значит, что

$$\Big(\sum_i b_i \otimes a_i'\Big) \otimes 1 = \sum_{i,(a_i')} b_i \otimes a_{i,(1)}' \otimes a_{i,(2)}' = \sum_i b_i \otimes \Big(\sum_{(a_i')} a_{i,(1)}' \otimes a_{i,(2)}'\Big),$$

где $\sum_{(a_i')} a_{i,(1)}' \otimes a_{i,(2)}' = \phi'(a')$. Без ограничения общности можно считать, что все $b_i \in \mathcal{B}$ – линейно-независимы. Поэтому, сравнивая коэффициенты при b_i, получаем, что $\phi'(a_i') = a_i' \otimes 1$, для всех i и значит $a_i' \in \mathbb{C}$. Следовательно

$$\sum_i b_i \otimes a_i' = \tilde{b} \otimes 1.$$

Но тогда $\mathcal{B} \,\square_{\mathcal{A}}\, \mathcal{A} \ni \tilde{b} \otimes 1$ и значит

$$F(\tilde{b}) \otimes 1 = \tilde{b} \otimes {}_{\mathcal{A}}F(1) = \tilde{b} \otimes 1 \otimes 1,$$

то есть $F(\tilde{b}) = \tilde{b} \otimes 1,\ \tilde{b} \in \mathcal{M}$.

Наконец, нам осталось доказать, что выполняется условие (*кгр2*). Однако, это утверждение требует более основательного знакомства с устройством алгебры $\mathcal{B}$ и мы отложим его до §1.5, посвящённого описанию структуры ассоциированных векторных расслоений. □

Замечание. Пусть биалгебра $\mathcal{A}$ действует справа на векторном пространстве R и действует слева на пространстве L. Тогда, точно так же, как и выше можно определить тензорное произведение над $\mathcal{A}$ правого $\mathcal{A}$-комодуля R и левого $\mathcal{A}$-комодуля L, пространство $R \,\square_{\mathcal{A}}\, L$. Ясно, что если R и L — $*$-алгебры, и $\mathcal{A}$ действует на них гомоморфизмами алгебр, то и пространство $R \,\square_{\mathcal{A}}\, L$ будет алгеброй.

1.3 Дифференциальные исчисления

Как обычно, под « дифференциальным исчислением» следует понимать алгебру (некоммутативных) дифференциальных форм на расслоении. Ясно, что для успешной работы с главным расслоением следует потребовать, чтобы эта алгебра была согласована с дифференциальным исчислением на квантовой структурной группе $\mathcal{A}$. Точный смысл этого требования становится ясен из определения 1.3 ниже.

Именно, пусть $P = (\mathcal{B},\ F)$ — квантовое главное расслоение над базой $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$ со структурной квантовой группой $\mathcal{A}$. Фиксируем на квантовой группе $\mathcal{A}$ биковариантное дифференциальное исчисление $\Gamma^\wedge$. Следующее определение взято из [6]:

Определение 1.4. Дифференциальным исчислением на квантовом главном расслоении P, согласованным с $\Gamma^\wedge$, называется дифференциальная градуированная *-алгебра $\Omega(P,\ \Gamma^\wedge) = \Omega(P)$, такая, что

1. $\Omega^0(P) = \mathcal{B}$;
2. $\Omega(P)$ порождена $\Omega^0(P)$ как дифференциальная градуированная алгебра;
3. Существует отображение дифференциальных градуированных алгебр

$$\widehat{F} : \Omega(P) \to \Omega(P) \otimes \Gamma^\wedge,$$

такое, что $\widehat{F}_{|\Omega^0(P)} = F : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$.

Прежде, чем мы продолжим давать определения, заметим, что для любого фиксированного биковариантного дифференциального исчисления $\Gamma^\wedge$ на квантовой группе $\mathcal{A}$ на любом квантовом главном расслоении P существует соответствующее $\Gamma^\wedge$ дифференциальное исчисление $\Omega(P,\ \Gamma^\wedge)$. В самом деле, достаточно взять в качестве $\Omega(P)$ тривиальное диффернциальное исчисление, $\Omega_{triv}(\mathcal{B})$, существующее для любой ассоциативной унитальной алгебры, см. §1.1. Напомним, что

$$\Omega_{triv}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^2 = \{\sum\nolimits_k b_k \otimes c_k \in \mathcal{B}^{\otimes 2} | \sum\nolimits_k b_k c_k = 0\}.$$

Так как F – гомоморфизм алгебр, то $F^{\otimes 2}(\mathcal{B}^2) \subseteq (\mathcal{B} \otimes \mathcal{A})^2$, и значит отображение F естественным образом распространяется до отображения

$$\widehat{F}^1_{triv} : \Omega^1_{triv}(\mathcal{B}) \to \Omega^1_{triv}(\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}) = \Omega^1_{triv}(\mathcal{B}) \otimes \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \otimes \Omega^1_{triv}(\mathcal{A}),$$

а значит и до отображения

$$\widehat{F}_{triv} : \Omega_{triv}(\mathcal{B}) \to \Omega_{triv}(\mathcal{B}) \otimes \Omega_{triv}(\mathcal{A})$$

указанного типа. С другой стороны, как указано в §1.1, для любого дифференциального исчисления $\Gamma^\wedge$ на $\mathcal{A}$ существует единственный эпиморфизм дифференциальных градуировнных алгебр $g : \Omega_{triv}(\mathcal{A}) = \Gamma^\wedge_0 \to \Gamma^\wedge$. Поэтому мы можем положить

$$\widehat{F} = (\mathrm{id} \otimes g)\widehat{F}_{triv}$$
$$\widehat{F} : \Omega_{triv}(\mathcal{B}) = \Omega_0(P) \to \Omega_0(P) \otimes \Gamma^\wedge.$$

С любым дифференциальным исчислением $\Omega(P)$ на P можно связать несколько важных градуированных алгебр.

1. Прежде всего, определим алгебру $\Omega(\mathcal{M})$ дифференциальное исчисление на базе $\mathcal{M}$ расслоения P:

$$\Omega(\mathcal{M}) \overset{\mathrm{def}}{=} \widehat{F}^{-1}(\Omega(P) \otimes 1). \tag{1.23}$$

Заметим, что ограничение на $\Omega(\mathcal{M})$ дифференциала d алгебры $\Omega(P)$ переводит алгебру $\Omega(\mathcal{M})$ в себя. Таким образом $\Omega(\mathcal{M})$ является дифференциальной градуированной *-подалгеброй в $\Omega(P)$, через $d_\mathcal{M}$ мы будем обозначать дифференциал в $\Omega(\mathcal{M})$.

Конечно, дифференциальная градуированная $*$-подалгебра $\Omega(\tilde{\mathcal{M}})$ в $\Omega(P)$, порождённая $*$-алгеброй $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}$, лежит в $\Omega(\mathcal{M})$. Обратное утверждение, однако, вообще говоря, неверно.

2. Во-вторых, определим алгебру $\mathfrak{hor}(P)$, « горизонтальных дифференциальных форм» на расслоении P:

$$\mathfrak{hor}(P) \overset{\text{def}}{=} \widehat{F}^{-1}(\Omega(P) \otimes \mathcal{A}). \tag{1.24}$$

Очевидно, что $\mathfrak{hor}(P)$ является градуированной *-подалгеброй в $\Omega(P)$, причём $\Omega(\mathcal{M}) \subseteq \mathfrak{hor}(P)$, $\mathfrak{hor}^0(P) = \mathcal{B}$. Однако, в отличие от $\Omega(\mathcal{M})$, $d(\mathfrak{hor}(P)) \nsubseteq \mathfrak{hor}(P)$, так что $\mathfrak{hor}(P)$ не является дифференциальной подалгеброй в $\Omega(P)$. Наконец, ограничение на подалгебру $\mathfrak{hor}(P)$ отображения $\widehat{F}$ индуцирует на ней правое (ко-)действие квантовой группы $\mathcal{A}$. Это кодействие мы будем обозначать $F^\wedge$.

3. Рассмотрим алгебру лево-инвариантных дифференциальных форм на квантовой группе $\mathcal{A}$:

$$\Gamma^\wedge_{inv} = \{\theta \in \Gamma_{inv} | \phi_{\Gamma^\wedge}(\theta) = 1 \otimes \theta\},$$

см. §1.1. Напомним, что формула

$$\theta \circ a = \sum_{(a)} \kappa(a_{(1)}) \theta a_{(2)}$$

задаёт на $\Gamma^\wedge_{inv}$ правое действие алгебры $\mathcal{A}$, удовлетворяющее условиям из примера 1.2.3. Поэтому мы можем построить по $\Gamma^\wedge_{inv}$ и $\mathfrak{hor}(P)$ скрещённое произведение $\mathfrak{hor}(P) \ltimes \Gamma^\wedge_{inv}$ (см. §1.2, пример 1.2.3), которое естественным образом будет наделено структурой $*$-алгебры, на которой справа кодействует алгебра Хопфа $\mathcal{A}$ (кодействие задаётся как тензорное произведение отображений $\widehat{F} : \mathfrak{hor}(P) \to \mathfrak{hor}(P) \otimes \mathcal{A}$ и $\varpi^\wedge : \Gamma^\wedge_{inv} \to \Gamma^\wedge_{inv} \otimes \mathcal{A}$, см. §1.1).

Кроме того, по правому $\mathcal{A}$-комодулю $\mathfrak{hor}(P)$ и левому $\mathcal{A}$-комодулю $\Gamma^\wedge$ мы можем построить тензорное произведение над $\mathcal{A}$,

$$\mathfrak{hor}(P) \, \Box_{\mathcal{A}} \, \Gamma^\wedge$$

(см. §1.2, пример 1.2.5). Это пространство тоже будет $*$-алгеброй с правым действием квантовой группы.

Предложение 1.5.

$$\mathfrak{hor}(P) \rtimes \Gamma^\wedge_{inv} \cong \mathfrak{hor} \, \Box_{\mathcal{A}} \, \Gamma^\wedge,$$

причём действия квантовых групп при этом отождествлении совпадают

Доказательство. Напомним, что справедливо следующее разложение

$$\Gamma^\wedge \cong \mathcal{A} \otimes \Gamma^\wedge_{inv}, \tag{1.25}$$

(напомним, что $\Gamma^{\wedge 0}_{inv} = \Gamma^{\otimes 0}_{inv} = \mathbb{C}$), левое действие $\mathcal{A}$ на $\Gamma^\wedge$ при этом совпадает с отображением $\phi \otimes \mathrm{id}$. Но несложно заметить, что для любой коалгебры C и любого правого C-комодуля D существует изоморфизм $D \, \Box_C \, C \cong D$. В самом деле, очевидно, что следующие два отображения взаимно-обратны

$$g : D \, \Box_C \, C \to D, \; d \otimes c \mapsto d\epsilon(c),$$

где ϵ – коединица C, и

$$f : D \to D \, \Box_C \, C, \; d \mapsto \phi_C(d) \in C$$

($\phi_C : D \to D \otimes C$ – кодействие).

Таким образом получили изоморфизм векторных пространств

$$\tilde{f} : \mathfrak{hor}(P) \ltimes \Gamma^{\wedge}_{inv} \cong \mathfrak{hor}(P) \,\Box_{\mathcal{A}}\, \Gamma^{\wedge}.$$

Пусть m — умножение в $\mathfrak{hor}(P) \,\Box_{\mathcal{A}}\, \Gamma^{\wedge}$. Изоморфизм $\tilde{f}$ переводит его в отображение

$$\tilde{f}^{-1} \circ m \circ (\tilde{f} \otimes \tilde{f}) : (\mathfrak{hor}(P) \ltimes \Gamma^{\wedge}_{inv})^{\otimes 2} \to \mathfrak{hor}(P) \ltimes \Gamma^{\wedge}_{inv},$$

которое собвпадает с умножением в $\mathfrak{hor}(P) \ltimes \Gamma^{\wedge}_{inv}$ — достаточно заметить (см. [3],[5]) что умножение в $\Gamma^{\wedge}$ задаётся формулой

$$(a \otimes \theta)(b \otimes \eta) = \sum_{(b)} ab_{(1)} \otimes (\theta \circ b_{(2)})\eta$$

(мы воспользовались разложением (1.25)). Аналогично проверяем, что изоморфизм $\tilde{f}$ сохраняет $*$-структуру и $\mathcal{A}$-кодействие. □

Полученная нами алгебра называется алгеброй *разложимых дифференциалдьных форм* на главном расслоении P и обозначается $\mathfrak{vh}(P)$. Правое кодействие квантовой группы $\mathcal{A}$ на $\mathfrak{vh}(P)$ мы будем обозначать $F^{\wedge}_{vh}$.

Замечание. Вместо алгебры $\mathfrak{hor}(P)$ в этой конструкции можно исплользовать её *-подалгебру $\mathfrak{hor}^0(P) = \mathcal{B}$. При этом получается градуированная *-подалгебра в $\mathfrak{vh}(P)$,

$$\mathfrak{ver}(P) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{B} \rtimes \Gamma^{\wedge}_{inv} \cong \mathcal{B} \,\Box_{\mathcal{A}}\, \Gamma^{\wedge},$$

называемая алгеброй *вертикализованных дифференциальных* форм на раслоении. На ней тоже определено правое кодействие квантовой группы $\mathcal{A}$.

4. Расссмотрим отображение

$$F^{\wedge} \overset{\text{def}}{=} (\mathrm{id} \otimes \mathrm{pr}_0)\widehat{F} : \Omega(P) \to \Omega(P) \otimes \mathcal{A}, \tag{1.26}$$

где pr_0 — проектирование на формы нулевой степени в $\Gamma^{\wedge}$, то есть $\mathcal{A}$. Очевидно, что $F^{\wedge}$ является отображением градуированных $*$-алгебр и задаёт правое кодействие квантовой группы $\mathcal{A}$ на $\Omega(P)$. Очевидно, что на $\mathfrak{hor}(P)$ это отображение совпадает с уже построенным в пункте 2 кодействием (поэтому мы и не вводим для него отдельного обозначения).

1.4 Связности и гомоморфизм Вейля

Вслед за работой [6] дадим определение:

Определение 1.5. (a) Псевдотензориальной формой на квантовом главном расслоении $P = (\mathcal{B},\ F)$ со структурной квантовой группой $\mathcal{A}$ и диффернециальным исчислением $\Omega(P) = \Omega(P,\ \Gamma^{\wedge})$ называется $*$-линейное отображение $\varphi : \Gamma_{inv} \to \Omega(P)$, такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Gamma_{inv} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varpi"] & \Omega(P) \arrow[d, "F^{\wedge}"] \\ \Gamma_{inv} \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "\varphi\otimes\mathrm{id}"] & \Omega(P) \otimes \mathcal{A} \end{tikzcd} \tag{1.27}$$

коммутативна. Пространство псевдотензориальных форм на P является градуированным векторным пространством (градуировка индуцируется из $\Omega(P)$). Мы будем обозначать его $\psi(P)$.
(b) Псевдотензориальная форма $\varphi \in \psi(P)$ называется тензориальной, если $\varphi(\Gamma_{inv}) \subseteq \mathfrak{hor}(P)$. Тензориальные формы на расслоении P образуют градуированное подпространство в пространстве всех псевдотензориальных форм, которое мы будем обозначать $\tau(P) \subseteq \psi(P)$.
(c) Связностью на главном квантовом расслоении P с дифференциальным исчислением $\Omega(P)$ называют произвольную псевдотензориальную форму ω, для которой выполняются равенства

$$\widehat{F}(\omega(\theta)) = \sum_k \omega(\theta_k) \otimes c_k + 1 \otimes \theta \tag{1.28}$$

для всех $\theta \in \Gamma_{inv}$, где $\sum_k \theta_k \otimes c_k = \varpi(\theta)$.

Следующая важная теорема доказана в работе [6].

Теорема 1.6. (i) *На любом главном квантовом расслоении P с любым дифференциального исчисления $\Omega(P)$ существуют связности.*

(ii) *Если ω_1, ω_2 две связности на главном квантовом расслоении P с дифференциальным исчислением $\Omega(P)$, то их разность, $\omega_1 - \omega_2 \in \psi(P)$, является* тензориальной *1-формой на расслоении.*

В дальнейшем при разговоре о связностях мы больше не будем указывать на дифференциальное исчисление на P.

Пусть теперь ω — некоторая связность на главном квантовом расслоении P. В цитированной статье показано, что для любого дифференциального исчисления $\Gamma^\wedge$ на квантовой группе существует сечение $\iota : \Gamma^\wedge_{inv} \to \Gamma^\otimes_{inv}$ естественной проекции $\Gamma^\otimes_{inv} \to \Gamma^\wedge_{inv}$ такое, что

1. $\varpi^\otimes \iota = (\iota \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}})\varpi^\wedge$, где $\varpi^\otimes$, $\varpi^\wedge$ — распространения правого кодействия $\varpi : \Gamma_{inv} \to \Gamma_{inv} \otimes \mathcal{A}$ на $\Gamma^\otimes_{inv}$ и $\Gamma^\wedge_{inv}$ соответственно;
2. $\iota(\theta^*) = \iota(\theta)^*$ для любого $\theta \in \Gamma^\wedge_{inv}$;
3. $\iota(\theta \circ a) = (\iota(\theta)) \circ a$ для всех $a \in \mathcal{A}$, $\theta \in \Gamma^\wedge_{inv}$.

Положим

$$\omega^\wedge \overset{\mathrm{def}}{=} \omega^\otimes \iota : \Gamma^\wedge_{inv} \to \Gamma^\otimes_{inv}. \tag{1.29}$$

Это отображение, конечно, в общем случае зависит от выбора сечения ι. Связности, для которых отображение $\omega^\wedge$ определено канонически, то есть независимо от выбора ι, называются *мультипликативными*, так как они, очевидно, задают гомоморфизм *-алгебр $\Gamma^\wedge_{inv} \to \Omega(P)$. Вспомним, что ядро естественной проекции $\Gamma^\otimes_{inv} \to \Gamma^\wedge_{inv}$ порождено векторным подпространством

$$\left\langle \sum_{(a)} \pi(a_{(1)}) \otimes \pi(a_{(2)}) | a \in \mathcal{R} \right\rangle \subseteq \Gamma^{\otimes 2}_{inv},$$

где $\mathcal{R} \subseteq \ker(\epsilon)$ — правый идеал, определяющий дифференциальное исчиение Γ на квантовой группе. Поэтому условие мультипликативности связности ω есть

$$\left\langle \sum_{(a)} \omega(\pi(a_{(1)}))\omega(\pi(a_{(2)})) \right\rangle = 0. \tag{1.30}$$

В частности, если $\Gamma = \Gamma_0$ — тривиальное дифференциальное исчисление, то $\mathcal{R} = 0$, и поэтому все связности будут мультипликативными. В общем случае, однако, условие (1.30) — нетривиально.

Определим теперь для произвольной связности ω отображение векторных пространств $m_\omega : \mathfrak{vh}(P) \to \Omega(P)$ по формуле

$$m_\omega(\varphi \otimes \theta) = \varphi\omega^\wedge(\theta).$$

Следующая теорем взята из [6]

Теорема 1.7. (i) *Отображение векторных пространств* m_ω *– биективно;*

(ii) *диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{vh}(P) \arrow[r, "m_\omega"] \arrow[d, "\widehat{F}_{vh}"] & \Omega(P) \arrow[d, "F^\wedge"] \\
\mathfrak{vh}(P) \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "m_\omega \otimes \mathrm{id}"] & \Omega(P) \otimes \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Теперь, при помощи отображения m_ω мы можем определить горизонтальное проектирование h_ω дифференциальных форм на расслоении P:

$$h_\omega = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{pr}_0) m_\omega^{-1} : \Omega(P) \to \mathfrak{hor}(P). \tag{1.31}$$

Из теоремы 1.7 следует, что отображение h_ω — $\mathcal{A}$-ковариантно, то есть коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\Omega(P) \arrow[r, "h_\omega"] \arrow[d, "F^\wedge"] & \mathfrak{hor}(P) \arrow[d, "F^\wedge"] \\
\Omega(P) \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "h_\omega \otimes \mathrm{id}"] & \mathfrak{hor}(P) \otimes \mathcal{A}.
\end{tikzcd} \tag{1.32}$$

Кроме того, очевидно, что $(h_\omega)_{|\mathfrak{hor}(P)} = \mathrm{id}$.

Определение 1.6. Ковариантной производной на квантовом главном расслоении P, ассоциированной со связностью ω, называется отображение

$$D_\omega \overset{\mathrm{def}}{=} h_\omega \circ d : \Omega(P) \to \mathfrak{hor}(P) \tag{1.33}$$

(d — дифференциал в $\Omega(P)$).

Следующая теорема даёт список основных свойств ковариантного дифференцирования, см. [6]:

Теорема 1.8. (i) $D_\omega(\Omega^n(P)) \subseteq \mathfrak{hor}^{n+1}(P)$*;*

(ii) *диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\Omega(P) \arrow[r, "D_\omega"] \arrow[d, "F^\wedge"] & \mathfrak{hor}(P) \arrow[d, "F^\wedge"] \\
\Omega(P) \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "D_\omega \otimes \mathrm{id}"] & \mathfrak{hor}(P) \otimes \mathcal{A}
\end{tikzcd} \tag{1.34}$$

коммутативна;

(iii) $(D_\omega)_{|\Omega(\mathcal{M})} = d_{|\Omega(\mathcal{M})} = d_\mathcal{M}$*;*

(iv) *ограничение отображения* D_ω *на подалгебру* $\mathfrak{hor}(P)$ *задаётся формулой*

$$D_\omega(\varphi) = d\varphi - (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \varphi_k \omega(\pi(c_k)) \tag{1.35}$$

где $\sum_k \varphi_k \otimes c_k = F^\wedge(\varphi)$ *и* $\partial\varphi = \deg \varphi$.

Пусть теперь $\alpha \in \psi(P)$ — произвольная псевдотензориальная форма. В силу коммутативности диаграмм (1.32) и (1.34), композиции отображения α с h_ω и D_ω будут тензориальными формами на расслоении P. Эти тензориальные формы мы будем обозначать $h_\omega(\alpha)$ и $D_\omega(\alpha)$.

Определение 1.7. Формой кривизны связности ω называется тензориальная 2-форма

$$R_\omega \overset{\text{def}}{=} D_\omega(\omega). \tag{1.36}$$

Пусть Ω — произвольная ассоциативная алгебра и пусть $\alpha,\ \beta : \Gamma_{inv} \to \Omega$ — произвольные линейные отображения. Тогда мы можем определить отображения

$$[\alpha, \beta]_q,\ \langle \alpha, \beta \rangle : \Gamma_{inv} \to \Omega$$

при помощи формул

$$[\alpha, \beta]_q(\theta) = \sum_l \alpha(\theta_l)\beta(\pi(d_l)),$$
$$\langle \alpha, \beta \rangle = \big(m(\alpha \otimes \beta)\iota\big)(d(\theta)),$$

где m – умножение в Ω, а $d : \Gamma_{inv} \to \Gamma_{inv}^{\otimes 2}$ – ограничение на Γ_{inv} дифференциала на Γ. Заметим, в частности, что отображение $\langle \alpha, \beta \rangle$ определено неканонически, оно зависит от выбора сечения ι. Сформулируем очередную теорему.

Теорема 1.9. (i) *Пусть* $\varphi \in \tau(P)$ *– произвольная тензориальная форма. Тогда ковариантная производная от* φ *равна*

$$D_\omega(\varphi) = d \circ \varphi - (-1)^{\partial\varphi}[\varphi, \omega]_q.$$

(ii) *Форма кривизны связности* ω *равна*

$$R_\omega = d \circ \omega - \langle \omega, \omega \rangle.$$

(iii) *Справедливо следуещее равенство (обобщённое тождество Бьянки):*

$$D_\omega(R_\omega) - \{\langle \omega, R_\omega \rangle - \langle R_\omega, \omega \rangle - [R_\omega, \omega]_q\} = \langle \omega, \langle \omega, \omega \rangle \rangle - \langle \langle \omega, \omega \rangle, \omega \rangle. \tag{1.37}$$

Кроме того, правая часть равенства (1.37) равна нулю, если связность ω *мультипликативна.*

Мы видим, что в общем случае значение формы кривизны зависит от выбора сечения ι, если связность не является мультипликативной. Однако, это затруднение можно обойти, если рассмотреть отображение $\tilde{R}_\omega : \ker \epsilon \to \mathfrak{hor}(P)$, "накрывающее"форму кривизны:

$$\tilde{R}_\omega(a) = d\omega(\pi(a)) - \sum_{(a)} \omega(\pi(a_{(1)}))\omega(\pi(a_{(2)})).$$

Ясно, что в случае, когда связность ω – мультипликативная, $\tilde{R}_\omega(a) = R_\omega(\pi(a))$.

Предложение 1.10. *Справедливо равенство*

$$D^2_\omega(\varphi) = -\sum_k \varphi_k \tilde{R}_\omega(c_k - \epsilon(c_k)) \tag{1.38}$$

для любой горизонтальной дифференциальной формы $\varphi \in \mathfrak{hor}(P)$.

Доказательство. Воспользуемся формулой (1.35):

$$\begin{aligned} D^2_\omega(\varphi) = D_\omega(d\varphi - (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \varphi_k \omega(\pi(c_k)) = \\ = -(-1)^{\partial\varphi} \sum_k \left\{ d\varphi_k \omega(\pi(c_k)) + (-1)^{\partial\varphi} \varphi_k d\omega(\pi(c_k)) \right\} - \\ - (-1)^{\partial\varphi+1} \sum_k d\varphi_k \omega(\pi(c_k)) - \\ - (-1)^{\partial\varphi+1} \left\{ -(-1)^{\partial\varphi+1} \sum_{k,(c_k)} \varphi_k \omega(\pi(c_{k,(3)}))\omega(\pi(c_{k,(1)}\kappa(c_{k,(3)})c_{k,(4)})) \right\} = \\ = -\sum_k \varphi_k \left\{ \sum_{(c_k)} d\omega(\pi(c_k)) - \omega(\pi(c_{k,(1)}))\omega(\pi(c_{k,(2)})) \right\}. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что выражение, стоящее в фигурных скобках в последней сумме равно $\tilde{R}_\omega(c_k - \epsilon(c_k))$. □

Отсюда, в частности, следует, что для мультипликативной связности выполняется равенство

$$D^2_\omega(\varphi) = -\sum_k \varphi_k R_\omega(\pi(c_k))). \tag{1.38$'$}$$

Хотя мультипликативность — очень важное свойство связностей на квантовых главных расслоениях, его недостаточно, чтобы можно было развивать теорию харктеристических классов, аналогичную классической. В нижеследуещем определении мы формулируем дополнительные ограничения на ω, выделяющие класс связностей, по своим свойствам приближающихся к связностям на обычных главных расслоениях.

Определение 1.8. Связность ω на главном квантовом расслоении называется *регулярной*, если для любой горизонтальной дифференциальной формы $\varphi \in \mathfrak{hor}(P)$ и любого элемента $\theta \in \Gamma_{inv}$ выполнено равенство

$$\omega(\theta)\varphi = (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \varphi_k \omega(\theta \circ c_k) \tag{1.39}$$

или, эквивалентно

$$\varphi\omega(\theta) = (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \omega(\theta \circ \kappa^{-1}(c_k))\varphi_k \tag{1.39$'$}$$

Сформулируем в виде теоремы список основных свойств регулярных связностей:

Теорема 1.11 (см. [6]). *Пусть ω – регулярная связность, тогда*

(i) *для любой горизонтальной дифференциальной формы φ на расслоении выполняется равенство*

$$D_\omega(\varphi^*) = D_\omega(\varphi)^*;$$

(ii) *для любых* $\varphi, \psi \in \mathfrak{hor}(P)$ *выполняется равенство*

$$D_\omega(\varphi\psi) = d_\omega(\varphi)\psi + (-1)^{\partial\varphi} D_\omega(\psi)$$

Таким образом, отображение $D_{\omega|\mathfrak{hor}(P)}$ *является эрмитовым антидифференцированием алгебры* $\mathfrak{hor}(P)$.

(iii) *Для любой горизонтальной дифференциальной формы* φ *на расслоении* P *и любого* $a \in \ker\epsilon$ *выполняются равенства*

$$\tilde{R}_\omega(a)\varphi = \sum_k \varphi_k \tilde{R}_\omega(ac_k) \tag{1.40}$$

или, эквивалентно,

$$\varphi\tilde{R}_\omega(a) = \sum_k \tilde{R}_\omega(a\kappa^{-1}(c_k))\varphi_k \qquad (1.40');$$

(iv) *для любой тензориальной формы* λ *на* P, *независимо от выбора сечения* ι *выполняется равенство*

$$[\lambda, \omega]_q = -\left\{\langle\lambda, \omega\rangle - (-1)^{\partial\lambda}\langle\omega, \lambda\rangle\right\},$$

в частности, обобщённое тождество Бьянки (1.37) *принимает вид*

$$D_\omega(R_\omega) = \langle\omega, \langle\omega, \omega\rangle\rangle - \langle\langle\omega, \omega\rangle, \omega\rangle$$

а композиция D_ω *с отображением* $\tilde{R}_\omega$ *равна нулю.*

Если, кроме того, связность ω *мультипликативная, то*

(v) *отображение* m_ω *является изоморфизмом* $*$*-алгебр;*

(vi) *горизонтальное проектирование* h_ω *является гомоморфизмом* $*$*-алгебр и для любых двух дифференциальных форм* $\alpha, \beta \in \Omega(P)$ *выполняется равенство*

$$D_\omega(\alpha\beta) = D_\omega(\alpha)h_\omega(\beta) + (-1)^{\partial\alpha} h_\omega(\alpha)D_\omega(\beta);$$

(vii) *отображения* h_ω *и* D_ω *— эрмитовы, то есть для любой формы* $\alpha \in \Omega(P)$

$$h_\omega(\alpha^*) = h_\omega(\alpha)^* \text{ и } D_\omega(\alpha^*) = D_\omega(\alpha)^*;$$

$(viii)$ *форма кривизны связности* ω *корректно определена и для любой горизонтальной дифференциальной формы* φ *на* P *и любого* $\theta \in \Gamma_{inv}$ *выполнены следующие равенства*

$$R_\omega(\theta)\varphi = \sum_k \varphi_k R_\omega(\theta \circ c_k) \tag{1.41}$$

или, эквивалентно,

$$\varphi R_\omega(\theta) = \sum_k R_\omega(\theta \circ \kappa^{-1}(c_k))\varphi_k \qquad (1.41');$$

(ix) *тождество Бьянки* (1.37) *принимает классический вид*

$$D_\omega(R_\omega) = 0 \tag{1.42}$$

Наконец, если хоть одна регулярная связность на P *мультипликативна, то и все остальные регулярные связности на* P *тоже мультипликативны.*

Пусть на P существуют регулярные связности. Фиксируем одну из таких связностей ω. Будем временно считать, что она мультипликативна (например, можно предположить, что дифференциальное исчисление на группе тривиально, то есть, что идеал $\mathcal{R}$ равен нулю). В этом случае можно построить отображение, аналогичное классическому гомоморфизму Вейля.

Именно, пусть $I_{\otimes} \subseteq \Gamma_{inv}^{\otimes}$ — пространство $\varpi^{\otimes}$ – инвариантных элементов в $\Gamma_{inv}^{\otimes}$. Обозначим через $R_{\omega}^{\otimes} : \Gamma_{inv}^{\otimes} \to \mathfrak{hor}(P)$ отображение, задающееся формулой

$$R_{\omega}^{\otimes}(\theta^1 \otimes \ldots \otimes \theta^n) = R_{\omega}(\theta^1) \cdot \ldots \cdot R_{\omega}(\theta^n).$$

Теорема 1.12 (см. [6],[7]). *Пусть* $\tilde{\theta} = \sum_i \theta_i^1 \otimes \ldots \otimes \theta_i^n \in I_{\otimes}$ *— произвольный элемент. Тогда*

(i) $R_{\omega}^{\otimes}(\tilde{\theta}) \in \Omega(\mathcal{M})$

(ii) $d_{\mathcal{M}}(R_{\omega}^{\otimes}(\tilde{\theta}) = 0$

(iii) класс когомологий

$$[R_{\omega}^{\otimes}(\tilde{\theta})] \in H^{2n}(\Omega(\mathcal{M}))$$

не зависит от выбора регулярной связности ω.

Доказательство. Для полноты картины мы приведём его полностью. Оно копирует классические рассуждения теории Чженя-Вейля (см., например, [16]).

Прежде всего, первое утверждение теоремы очевидно, так как форма кривизны связности — эквивариантное отображение. Далее, воспользуемся тем, что на $\Omega(\mathcal{M})$ ковариантное дифференцирование совпадает с дифференциалом $d_{\mathcal{M}}$, тогда

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{M}}(R_{\omega}^{\otimes}(\tilde{\theta})) &= D_{\omega}(R_{\omega}^{\otimes}(\tilde{\theta})) = \\ &= \sum_i \{D_{\omega}(R_{\omega}(\theta_i^1)) \cdot \ldots \cdot R_{\omega}(\theta_i^n) + \ldots + R_{\omega}(\theta_i^1) \cdot \ldots \cdot D_{\omega}(R_{\omega}(\theta_i^n))\} = 0. \end{aligned}$$

(Мы воспользовались тем, что D_{ω} — антидифференцирование алгебры $\mathfrak{hor}(P)$ и тождеством Бьянки (1.42).)

Пусть теперь ω' — другая регулярная мультипликативная связность. Положим

$$\omega_t = \omega + t(\omega' - \omega), \; t \in [0; 1].$$

Для любого $t \in [0; 1]$ псевдотензориальная форма ω_t является регулярной мультипликативной связностью на P, $\omega_0 = \omega, \; \omega_1 = \omega'$. Вычислим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R_{\omega_t} = \frac{d}{dt} \left[d\omega_t - \langle \omega_t, \omega_t \rangle \right] &= \\ &= d\varphi - \langle \varphi, \omega \rangle - \langle \omega, \varphi \rangle - 2t \langle \varphi, \varphi \rangle = \\ &= d\varphi - \langle \omega + t\varphi, \omega + t\varphi \rangle = D_{\omega_t}(\varphi), \end{aligned}$$

где $\varphi = \omega' - \omega$ (мы активно пользовалис результатами теоремы 1.11). Поэтому

$$\frac{d}{dt}(R^{\otimes}_{\omega_t}(\tilde{\theta})) =$$

$$= \sum_i \Big\{ (D_{\omega_t}(\varphi))(\theta_i^1) R_{\omega_t}(\theta_i^2) \cdot \ldots \cdot R_{\omega_t}(\theta_i^n) + \ldots +$$

$$+ R_{\omega_t}(\theta_i^1) \cdot \ldots \cdot R_{\omega_t}(\theta_i^{(n-1)}) (D_{\omega_t}(\varphi))(\theta_i^n) \Big\} =$$

$$= D_{\omega_t}\Big(\sum_i \big\{ \varphi(\theta_i^1) R_{\omega_t}(\theta_i^2) \cdot \ldots \cdot R_{\omega_t}(\theta_i^n) + \ldots +$$

$$+ R_{\omega_t}(\theta_i^1) \cdot \ldots \cdot R_{\omega_t}(\theta_i^{(n-1)}) \varphi(\theta_i^n) \big\} \Big) = d_{\mathcal{M}}(\psi_t(\tilde{\theta})),$$

где

$$\psi_t(\tilde{\theta}) = \sum_i \big\{ \varphi(\theta_i^1) \cdot \ldots \cdot R_{\omega_t}(\theta_i^n) + \ldots + R_{\omega_t}(\theta_i^1) \cdot \ldots \cdot \varphi(\theta_i^n) \big\}.$$

Интегрируя теперь последнее равенство по t от 0 до 1 получаем:

$$R_{\omega'}(\tilde{\theta}) = R_{\omega}(\tilde{\theta}) + d_{\mathcal{M}}\Big(\int_0^1 \psi_t(\tilde{\theta}) \Big).$$

□

Сделаем несколько замечаний относительно образа и области определения отображения $R^{\otimes}_{\omega}$.

Во-первых, в силу коммутационных соотношений (1.41), (1.41′) элемент $R^{\otimes}_{\omega}(\tilde{\theta})$ для любого $\tilde{\theta} \in I_{\otimes}$ лежит в градуированном центре $\mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M}))$ алгебры $\Omega(\mathcal{M})$, являющемся градуированной дифференциальной *-подалгеброй в $\Omega(\mathcal{M})$. Более того, из рассуждений, использованных при доказательстве пункта (*iii*) видно, что класс когомологий $[R^{\otimes}_{\omega}(\tilde{\theta})] \in \mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M}))$ корректно определён.

Во-вторых, пусть $\sigma : \Gamma^{\otimes 2}_{inv} \to \Gamma^{\otimes 2}_{inv}$ опрератор « некоммутативной перестановки»:

$$\sigma(\theta \otimes \eta) = \sum_l \eta_l \otimes \theta \circ d_l,$$

где $\theta, \eta \in \Gamma_{inv}$, $\sum_l \eta_l \otimes d_l = \varpi(\eta)$. Из тех же перестановочных соотношений (1.41), (1.41′) следует, что

$$R^{\otimes}_{\omega}\sigma(\theta \otimes \eta) = R^{\otimes}_{\omega}(\theta \otimes \eta),$$

а значит, в качестве области определения отображения $R^{\otimes}_{\omega}$ можно взять $I(\Sigma)$ — образ $I_{\otimes}$ при естественной проекции на $\Sigma = \Gamma^{\otimes}_{inv} \Big/ \langle \mathrm{Im}(\mathrm{id} - \sigma) \rangle$ — « алгебру полиномиальных функций на алгебре Ли квантовой группы».

Наконец, если регулярная связность ω не является мультипликативной (а следовательно на расслоении P вообще нет регулярных мультипликативных связностей), то вместо отображения $R^{\otimes}_{\omega}$ надо рассматривать аналогичное отображение

$$\tilde{R}^{\otimes}_{\omega} : (\ker \epsilon)^{\otimes}_{inv} \to \mathfrak{hor}(P)$$

где $(\ker \epsilon)^{\otimes}_{inv}$ — множество $ad^{\otimes}$-инвариантных элементов,

$$ad : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \ ad(a) = \sum_{(a)} a_{(2)} \otimes \kappa(a_{(1)}) a_{(3)}$$

— присоединённое действие квантовой группы на себе. Очевидно, что $ad(\ker(\epsilon)) \subseteq \ker\epsilon \otimes \mathcal{A}$. Следующая теорема является несложной переформулировкой Теоремы 1.12.

Теорема 1.13. *Образ отображения $\tilde{R}^{\otimes}_{\omega}$ лежит в пространстве замкнутых форм на в $\Omega(\mathcal{M})$, и соответствующие классы когомологий не зависят от выбора регулярной связности.*

Кроме того, из коммутационных соотношений (1.40) и (1.40′) следует, что, на самом деле, образ отображения $\tilde{R}^{\otimes}_{\omega}$ лежит в $\mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M}))$ и что

$$\tilde{R}^{\otimes}_{\omega}\tilde{\sigma}(a \otimes b) = \tilde{R}^{\otimes}_{\omega}(a \otimes b),$$

где

$$\tilde{\sigma}(a \otimes b) = \sum_{(b)} b_{(2)} \otimes a\kappa(b_{(1)})b_{(3)}.$$

Обозначим фактор-алгебру, соответствующую перестановке $\tilde{\sigma}$, через $\tilde{\Sigma}$, а проекцию $(\ker\epsilon)^{\otimes}_{inv}$ при отображении $(\ker\epsilon)^{\otimes} \to \tilde{\Sigma}$ — через $I(\tilde{\Sigma})$.

Определение 1.9. Отображение

$$W : I(\Sigma) \to H^*(\mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M}))),\ W(\mathrm{pr}(\tilde{\theta})) = [R^{\otimes}_{\omega}(\tilde{\theta})],$$

где ω — произвольная регулярная мультипликативная связность на P, а $\mathrm{pr} : I_{\otimes} \to I(\Sigma)$ — естественная проекция, мы будем называть *гомоморфизмом Вейля* (то, что это отображение является гомоморфизмом градуированных $*$-алгебр — очевидно).

Аналогично, отображение

$$\tilde{W} : I(\tilde{\Sigma}) \to H^*(\mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M}))),\ \tilde{W}(\mathrm{pr}(\tilde{a})) = [\tilde{R}^{\otimes}_{\omega}(\tilde{a})],$$

где ω — произвольная регулярная связность на P, мы будем называть *обобщённым гомоморфизмом Вейля.*

Ниже мы, всё же, будем обычно рассматривать W и $\tilde{W}$ как отображения соответствующих подалгебр в $\Gamma^{\otimes}_{inv}$ и $(\ker\epsilon)^{\otimes}$.

1.5 Векторные расслоения и классы Чженя.

Пусть $P = (\mathcal{B}, F)$ — квантовое главное расслоение с базой $\mathcal{M}$ и структурной группой $\mathcal{A}$. Пусть $u = (\tilde{u}, H_u)$ — представление квантовой группы $\mathcal{A}$.

Дадим определение векторного расслоения, ассоциированного с P при помощи представления u.

Определение 1.10. Векторным расслоением, ассоциированным с главным квантовым расслоением P при помощи представления u называется пространство морфизмов представлений

$$\mathrm{Mor}(u, F) = \Big\{A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H_u, \mathcal{B}) | F \circ A = (A \otimes \mathrm{id})\triangle_u\Big\}.$$

Мы будем обозначать это пространство $\mathcal{E}_u$.

Вообще, если $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ — произвольные правые $\mathcal{A}$-комодули, то

$$\mathrm{Mor}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \overset{\mathrm{def}}{=} \Big\{A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) | \triangle_{\mathcal{N}} \circ A = (A \otimes \mathrm{id})\triangle_{\mathcal{M}}\Big\} \tag{1.43}$$

Заметим теперь, что очевидные формулы

$$(A\cdot m)(e) = A(e)m,\ (m\cdot A)(e) = mA(e),\ m\in\mathcal{M},\ A\in\mathcal{E}_u,\ e\in H_u$$

задают на $\mathcal{E}_u$ структуру $\mathcal{M}$ -бимодуля.

Сформулируем теперь, в виде теоремы, список основных свойств ассоциированных векторных расслоений (см. [6]):

Теорема 1.14. (i) *Для любого представления u пространство $\mathcal{E}_u$ — ненулевой бимодуль над $\mathcal{M}$, причём $\mathcal{E}_u$ проективен и как левый, и как правый модуль над $\mathcal{M}$;*

(ii) $\mathcal{E}_\varnothing = \mathcal{M}$;

(iii) *для любых двух представлений u и v*

$$\mathcal{E}_{u\oplus v} = \mathcal{E}_u \oplus \mathcal{E}_v, \qquad \mathcal{E}_{u\times v} = \mathcal{E}_u \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_v,$$

причём второй изоморфизм задаётся умножением в $\mathcal{B}$:

$$\big(\theta_{uv}(\varphi\otimes\psi)\big)(x\otimes y) = \varphi(x)\psi(y),$$

где $x\in H_u,\ y\in H_v,\ \varphi\in\mathcal{E}_u,\ \psi\in\mathcal{E}_v$;

(iv) *существует антиизоморфизм $\mathcal{M}$-бимодулей $\natural_u : \mathcal{E}_u \to \mathcal{E}_{\bar{u}}$, определяемый при помощи диаграммы:*

$$\begin{tikzcd} H_u \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "j_u"] & \mathcal{B} \arrow[d, "*"] \\ H_u^* \arrow[r, "\natural_u\varphi"] & \mathcal{B}; \end{tikzcd}$$

(v) *любой морфизм представлений $f\in\mathrm{Mor}(u,v)$ индуцирует обратное отображение бимодулей*

$$f_* : \mathcal{E}_v \to \mathcal{E}_u,$$

в частности, отображения $\gamma^u,\ \gamma_u,\ I_u,\ I^u$ индуцируют (в свете отожествлений пункта (iii) вложения бимодулей

$$\gamma_*^u : \mathcal{M} \to \mathcal{E}_{\bar{u}} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_u, \qquad \gamma_u^* : \mathcal{M} \to \mathcal{E}_u \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_{\bar{u}},$$

и спаривания

$$\langle\rangle_u^+ : \mathcal{E}_u \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_{\bar{u}} \to \mathcal{M}, \qquad \langle\rangle_u^- : \mathcal{E}_{\bar{u}} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_u \to \mathcal{M};$$

в явном виде, для $\varphi\in\mathcal{E}_u,\ \psi\in\mathcal{E}_{\bar{u}}$

$$\langle\varphi,\psi\rangle_u^+ = \sum_{i=1}^{n_u} \varphi(e_i)\psi(e_i^*), \tag{1.44}$$

$$\langle\psi,\varphi\rangle_u^- = \sum_{i,j=1}^{n_u} [C_u^{-1}]_{ji}\psi(e_i^*)\varphi(e_j); \tag{1.45}$$

(vi) *алгебра $\mathcal{B}$ раскладывается в прямую сумму $\mathcal{M}$ - бимодулей*

$$\mathcal{B} = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}}^{\oplus} \mathcal{B}^\alpha,$$

где $\mathcal{T}$ — множество всех неприводимых представлений квантовой группы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}^\alpha \cong \mathcal{E}_\alpha \otimes H_\alpha$.

Заметим, что из свойств (iv) и (v) следует, что формулы

$$(x, y)^{+} = \langle x, \natural_u(y)\rangle_u^{+},$$
$$(x, y)^{-} = \langle \natural_u(y), x\rangle_u^{-}$$

задают на $\mathcal{E}_u \ni x, y$ невырожденные полуторалинейные спаривания (как левого и правого $\mathcal{M}$–модуля соответственно). Кроме того, если элементы $\mu_k \in \mathcal{E}_{\bar{u}},\ \nu_k \in \mathcal{E}_u$ таковы, что

$$\gamma_*^u(1) = \sum_k \mu_k \otimes \nu_k,$$

то выполняется равенство

$$\sum_k \mu_k(e_i^*)\nu_k(e_j) = \delta_{ij} \cdot 1. \tag{1.46}$$

В самом деле, из определений и сделанных отождествлений следует, что

$$\sum_k \mu_k(e_i^*)\nu_k(e_j) = \Big(\sum_k \mu_k \otimes \nu_k\Big)(e_i^* \otimes e_j) =$$
$$= \big(\gamma_*^u(1)\big)(e_i^* \otimes e_j) = (\gamma_u(e_i^* \otimes e_j)) \cdot 1 = e_i^*(e_j) \cdot 1 = \delta_{ij} \cdot 1.$$

Теперь мы можем доказать последнее утверждение Предложения 1.4: квантовая группа $\mathcal{A}'$ свободно действует на пространстве $\mathcal{B} \,\square_{\mathcal{A}}\, \mathcal{A}$.

Доказательство. Как известно (см. §1.1) любая квантовая группа $\mathcal{A}'$, как векторное пространство распадается в прямую сумму подпространств $\tilde{H}_{\alpha'}$ порождённых матричными элементами $(u_{i'j'}^{\alpha'})_{i',j'=1,\dots,n_{\alpha'}}$ всевозможных неэквивалентных неприводимых представлений $\alpha' \in \mathcal{T}'$ группы $\mathcal{A}'$. При этом, все такие элементы линейно независимы. Заметим, что в силу формулы

$$\phi'(u_{i'j'}^{\alpha'}) = \sum_{k'} u_{i'k'}^{\alpha'} \otimes u_{k'j'}^{\alpha'},$$

пространство $\tilde{H}_{\alpha'}$ является би-комодулем над $\mathcal{A}'$.

Пусть $H_{\alpha'}$ — пространство представления α', и $e_{i'},\ i = 1, \dots, n_{\alpha'}$ — орто-базис в $H_{\alpha'}$, такой, что

$$\triangle_{\alpha'}(e_{i'}) = \sum_{k'} e_{k'} \otimes u_{k'i'}^{\alpha'}.$$

Очевидно, что формула

$$_{\alpha'}\triangle(e_{i'}) = \sum_{k'} u_{i'k'}^{\alpha'} \otimes e_{k'}$$

задаёт на пространстве $H_{\alpha'}$ структуру левого $\mathcal{A}'$— комодуля. Этот комодуль мы будем обозначать $H_{\alpha'}^{\top}$. Следующее утверждение — очевидно.

Лемма 1.15. *$\tilde{H}_{\alpha'} \cong H_{\alpha'}^{\top} \otimes H_{\alpha'}$ как би-комодуль над $\mathcal{A}'$. Изоморфизм задаётся формулой $e_{i'} \otimes e_{j'} \mapsto u_{i'j'}^{\alpha'}$.*

Пусть $f : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ — гомоморфизм квантовых групп. Формулы

$$\triangle_{\alpha'}^{\mathcal{A}}(e_{i'}) = \sum_{k'} e_{k'} \otimes f(u_{k'i'}^{\alpha'}),$$
$$_{\alpha'}\triangle^{\mathcal{A}}(e_{i'}) = \sum_{k'} f(u_{i'k'}^{\alpha'}) \otimes e_{k'}$$

определяют на $H_{\alpha'}$ структуру левого (соотв. правого) комодуля над $\mathcal{A}$, иначе говоря, пространство $H_{\alpha'}$ становится пространством некоторого, может быть приводимого, представления группы $\mathcal{A}$. Ясно, что если

$$H_{\alpha'} = \sum\nolimits^{\oplus}_{\sigma\in\mathcal{S}(\alpha')} H_\sigma$$

— разложение пространства $H_{\alpha'}$ в прямую сумму неприводимых представлений $\mathcal{A}$ относительно кодействия $\triangle^{\mathcal{A}}_{\alpha'}$, то

$$H^{\top}_{\alpha'} = \sum\nolimits^{\oplus}_{\sigma\in\mathcal{S}(\alpha')} H^{\top}_\sigma.$$

Воспользуемся теперь результатами пункта (vi) теоремы 1.14:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}\,\square_{\mathcal{A}}\,\mathcal{A}' &= \Big(\sum\nolimits^{\oplus}_{\alpha\in\mathcal{T}} \mathcal{E}_\alpha \otimes H_\alpha\Big)\,\square_{\mathcal{A}}\,\Big(\sum\nolimits^{\oplus}_{\alpha\in\mathcal{T}'} \tilde{H}_{\alpha'}\Big) = \\
&= \Big(\sum\nolimits^{\oplus}_{\alpha\in\mathcal{T}} \mathcal{E}_\alpha \otimes H_\alpha\Big)\,\square_{\mathcal{A}}\,\Big(\sum\nolimits^{\oplus}_{\alpha\in\mathcal{T}'} H^{\top}_{\alpha'} \otimes H_{\alpha'}\Big) = \\
&= \Big(\sum\nolimits^{\oplus}_{\alpha\in\mathcal{T}} \mathcal{E}_\alpha \otimes H_\alpha\Big)\,\square_{\mathcal{A}}\,\left(\sum\nolimits^{\oplus}_{\alpha\in\mathcal{T}'}\Big(\sum\nolimits^{\oplus}_{\sigma\in\mathcal{S}(\alpha')} H^{\top}_\sigma\Big) \otimes H_{\alpha'}\right) = \\
&= \sum\nolimits^{\oplus}_{\alpha\in\mathcal{T},\alpha'\in\mathcal{T}'} \mathcal{E}_\alpha \otimes \Big(\sum\nolimits^{\oplus}_{\sigma\in\mathcal{S}(\alpha')} H_\alpha\,\square_{\mathcal{A}}\,H^{\top}_\sigma\Big) \otimes H_{\alpha'}.
\end{aligned}$$

Лемма 1.16. $H_\alpha\,\square_{\mathcal{A}}\,H^{\top}_\beta = \begin{cases} \mathbb{C}, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$

Доказательство. Пусть $e^\alpha_i,\ i = 1,\ldots,n_\alpha,\ e^\beta_j,\ j = 1,\ldots,n_\beta$ — базисы в пространствах $H_\alpha,\ H_\beta$, в которых правое действие квантовой группы задаётся формулой (1.13). Рассмотрим произвольный элемент $\sum_{i,j} C_{ij} e^\alpha_i \otimes e^\beta_j \in H_\alpha\,\square_{\mathcal{A}}\,H^{\top}_\beta \subseteq H_\alpha \otimes H_\beta$. Согласно определению тензорного произведения над коалгеброй, должно быть выполнено следующее равенство

$$\sum_{i,j,k} C_{ij} e^\alpha_k \otimes u^\alpha_{ki} \otimes e^\beta_i = \sum_{i,j,l} C_{ij} e^\alpha_i \otimes u^\beta_{jl} \otimes e^\beta_l.$$

Сравнивая коэффициенты при $e^\alpha_n \otimes e^\beta_m$, получаем

$$\sum_i C_{im} u^\alpha_{ni} = \sum_j C_{ni} u^\beta_{jm}.$$

Так как все элементы u^α_{ij} и u^β_{kl} линейно-независимы, то $\alpha = \beta$ и коэффициенты при u^α_{ij} слева и справа совпадают. Поэтому $\delta_{ni} C_{jm} = \delta_{mi} C_{ni}$ для любых $i, j, m, n = 1, \ldots, n_\alpha$, откуда $C_{ij} = C\delta_{ij},\ C \in \mathbb{C}$. $\square$

Итак,

$$\mathcal{B}\,\square_{\mathcal{A}}\,\mathcal{A}' = \sum\nolimits^{\oplus}_{\alpha'\in\mathcal{T}'}\Big(\sum\nolimits^{\oplus}_{\sigma\in\mathcal{S}(\alpha')} \mathcal{E}_\sigma\Big) \otimes H_{\alpha'} = \sum\nolimits^{\oplus}_{\alpha'\in\mathcal{T}'} \mathcal{E}_{\alpha'} \otimes H_{\alpha'},$$

где $\mathcal{E}_{\alpha'} = \sum\nolimits^{\oplus}_{\sigma\in\mathcal{S}(\alpha')} \mathcal{E}_\sigma$. Ясно, что если $u_{\alpha'}$ — представление квантовой группы $\mathcal{A}$ на пространстве $H_{\alpha'}$, описываемое кодействием $\triangle^{\mathcal{A}}_{\alpha'}$ то $\mathcal{E}_{\alpha'} = \mathcal{E}_{u_{\alpha'}}$.

Теперь мы можем найти такие элементы $p_k, q_k \in \mathcal{B} \,\square_{\mathcal{A}}\, \mathcal{A}'$, что $X(\sum_k p_k \otimes q_k) = 1 \otimes a'$ для произвольного $a' \in \mathcal{A}'$. В самом деле, можно считать, что $a' = u^{\alpha'}_{i'j'}$ для некоторых $\alpha' \in \mathcal{T}'$, $i', j' = 1, \ldots, n_{\alpha'}$. Пусть $\mu'_k \in \mathcal{E}_{\bar{u}_{\alpha'}}$, $\nu'_k \in \mathcal{E}_{u_{\alpha'}}$ определяются формулой

$$\gamma^{u_{\alpha'}}_*(1) = \sum_k \mu'_k \otimes \nu'_k.$$

Возьмём

$$p_k = \sum_{l'} \mu'_k(e^*_{l'}) \otimes \kappa(u^{\alpha'}_{i'l'}), \qquad q_k = \sum_{m'} \nu'_k(e_{m'}) \otimes u^{\alpha'}_{m'j'}.$$

Очевидно, что $p_k, q_k \in \mathcal{B} \,\square_{\mathcal{A}}\, \mathcal{A}'$. Вычислим

$$X(p_k \otimes q_k) = \sum_k \left\{ \Big(\sum_{l'} \mu'_k(e^*_{l'}) \otimes \kappa(u^{\alpha'}_{i'l'}) \Big) \Big(\sum_{m',n'} \nu'_k(e_{m'}) \otimes u^{\alpha'}_{m'n'} \otimes u^{\alpha'}_{n'j'} \Big) \right\} =$$

$$= \sum_{k,l',m',n'} \mu'_k(e^*_{l'}) \nu'_k(e_{m'}) \otimes \kappa(u^{\alpha'}_{i'l'}) u^{\alpha'}_{m'n'} \otimes u^{\alpha'}_{n'j'} =$$

$$= \sum_{m',n'} 1 \otimes \kappa(u^{\alpha'}_{i'm'}) u^{\alpha'}_{m'n'} \otimes u^{\alpha'}_{n'j'} = 1 \otimes 1 \otimes u^{\alpha'}_{i'j'}$$

Мы воспользовались формулой (1.46) и тем, что

$$\sum_{m'} \kappa(u^{\alpha'}_{i'm'}) u^{\alpha'}_{m'j'} = \delta_{i'j'} \cdot 1.$$

□

Таким образом, ясно, что структура ассоциированных векторных расслоений тесно связана со структурой главного расслоения. На самом деле, главное расслоение можно восстановить по множеству ассоциированных векторных расслоений. Именно, пусть $R(G)$ — категория конечномерных представлений квантовой группы G. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая ассоциативная унитальная $*$-алгебра, $\Phi(\mathcal{M})$ — категория $\mathcal{M}$- бимодулей, конечно-порождённых и проективных и как левые, и как правые $\mathcal{M}$-модули. В качестве морфизмов категории $R(G)$ мы будем рассматривать не только линейные, но и антилинейные морфизмы представлений. Под антилинейным морфизмом мы понимаем такое антилинейное отображение гильбертовых пространств $f : H_u \to H_v$, что $\triangle_v f = (f \otimes *)\triangle_u$. Множество антилинейных морфизмов представлений мы будем обозначать $\bar{\mathrm{M}}(u, v)$. Тогда

$$\mathrm{Mor}_{R(G)}(u, v) = \mathrm{Mor}(u, v) \oplus \bar{\mathrm{M}}(u, v).$$

Аналогично, морфизмами в категории $\Phi(\mathcal{M})$ мы будем считать не только гомоморфизмы бимодулей, но и антигомоморфизмы: такие отображения φ, что $\varphi(mp) = \varphi(p)m^*$ ($m \in \mathcal{M}$, p — элемент бимодуля), и наоборот. Категории $R(G)$ и $\Phi(\mathcal{M})$, таким образом, становятся $\mathbb{Z}_2$-градуированными.

Пусть, как обычно, $\times$ обозначает тензорное произведение представлений в $R(G)$. Мы будем говорить, что функтор градуированных категорий $\rho : R(G) \to \Phi(\mathcal{M})$ – мультипликативный, если существует естественная эквивалентность θ функторов $(\cdot \otimes_{\mathcal{M}} \cdot)(\rho, \rho)$ и $\rho(\cdot \times \cdot)$, такая, что для любых трёх представлений $u, v, w \in R(G)$ выполнено равенство

$$\theta_{u \times v, w}(\theta_{uv} \otimes \mathrm{id}) = \theta_{u, v \times w}(\mathrm{id} \otimes \theta_{vw}).$$

Следующая теорема составляет основное содержание статьи [8]:

Теорема 1.17. *Для любого квантового главного расслоения с базой* $\mathcal{M}$ *соответствие* $R(G) \ni u \overset{\rho}{\mapsto} \mathcal{E}_u$ *определяет мультипликативный функтор градуированных категорий* $\rho : R(G) \to \Phi(\mathcal{M})$. *Наоборот, для любого мультипликативного функтора* $\rho : R(G) \to \Phi(\mathcal{M})$ *существует единственное главное квантовое расслоение с базой* $\mathcal{M}$ *и со структурной квантовой группой* G, *такое, что* $\rho(u) = \mathcal{E}_u$.

Теорема 1.17 позволяет описывать главные расслоения, если категория $R(G)$ достаточно простая. Приведём примеры

Пример 1.5.1. $G = U(1)$. Главные $U(1)$-расслоения с базой $\mathcal{M}$ однозначно определяются бимодулем $\mathcal{E}$ над $\mathcal{M}$, конечно-порождённым и проективным и как левый, и как правый модуль над $\mathcal{M}$. При этом должны быть определены отображения бимодулей

$$\mu : \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{M}} \bar{\mathcal{E}} \to \mathcal{M}$$
$$\bar{\mu} : \bar{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E} \to \mathcal{M}$$

для которых $\mu \otimes \mathrm{id} = \mathrm{id} \otimes \bar{\mu}$ и $\bar{\mu} \otimes \mathrm{id} = \mathrm{id} \otimes \mu$ Тут $\bar{\mathcal{E}}$ – сопряжённый бимодуль ,то есть $\mathcal{E} = \bar{\mathcal{E}}$, как векторные пространства а умножение в $\bar{\mathcal{E}}$ определяется формулами

$$m \circ e = em^*, \;\; e \circ m = m^*e.$$

Пример 1.5.2. Другая квантовая группа, категория представлений которой устроена достаточно просто — универсальная матричная псевдогруппа $U_F(n)$, см. §1.1. Представления этой квантовой группы взаимно-однозначно соответствуют словам из $u, \bar{u}$, где u — фундаментальное представление, $\bar{u}$ — его сопряжение, F — канонический морфизм $F : H_u \to H_u$. Морфизмы в категории представлений этой квантовой группы порождены сопряжениями $\{j_u, j_{\bar{u}}\}$, спариваниями $\{\gamma_u, \gamma^u\}$ и вложениями единичных операторов $\{I_u, I^u\}$, удовлетворяющими соотношениям, описанным в начале параграфа.

Тогда главные квантовые расслоения с такой структурной группой однозначно соответствуют парам антиизоморфных $\mathcal{M}$ -бимодулей $\mathcal{E}_u, \mathcal{E}_{\bar{u}}$, для которых определены спаривания $\{\langle\rangle_u^+, \langle,\rangle_u^-\}$ и вложения $\{\gamma_u^*, \gamma_*^u\}$.

В частности, для любого главного квантового расслоения P, любая пара ассоциированных векторных расслоений $\mathcal{E}_u$, $\mathcal{E}_{\bar{u}}$, соответствующих соппряжённым представлениям u, $\bar{u}$ удовлетворяет всем описанным требованиям и следовательно определяет некоторое главное квантовое расслоение со структурной группой $U_{C_u}(n_u)$.

Точно так же, как и ассоциированные векторные расслоения $\mathcal{E}_u$, можно определить пространства $\mathcal{E}_u$ – значных дифференциальных форм на базе. Именно, положим:

$$\mathcal{F}_u = \mathrm{Mor}(u, F^\wedge).$$

Следующую тоерему см. [6, 8].

Теорема 1.18 (свойства пространств $\mathcal{F}_u$). (*i*) *Для любого* u, $\mathcal{F}_u$ — *градуированный бимодуль над градуированной алгеброй* $\Omega(\mathcal{M})$;

(*ii*) $\mathcal{F}_\varnothing = \Omega(\mathcal{M})$;

(*iii*) *умножение на элементы из* $\Omega(\mathcal{M})$ *задаёт изоморфизмы*

$$\mathcal{E}_u \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) \cong \mathcal{F}_u \cong \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_u;$$

(*iv*) *пусть* $\sigma_u : \mathcal{E}_u \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) \to \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_u$ — *сквозной изоморфизм,* m — *умножение в* $\mathcal{M}$, *тогда*

$$\sigma_u(\mathrm{id} \otimes m) = (m \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma_u)(\sigma_u \otimes \mathrm{id});$$

(v) *для любых представлений u и v*

$$(\mathrm{id} \otimes \theta_{uv})\sigma_{u\times v} = (\sigma_u \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma_v)(\theta_{uv} \otimes \mathrm{id}),$$

где $\theta_{uv} : \mathcal{E}_u \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_v \to \mathcal{E}_{u\times v}$ изоморфизм, описанный выше;

(vi) *следуещие две диаграммы коммутативны*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_u \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) \arrow[r, "\sigma_u"] \arrow[d, "f_*\otimes\mathrm{id}"] & \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_u \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f_*"] & \mathcal{E}_u \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) \arrow[r, "\sigma_u"] \arrow[d, "{[\natural_u,*]}"] & \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_u \arrow[d, "{[*,\natural_u]}"] \\
\mathcal{E}_v \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) \arrow[r, "\sigma_v"] & \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_v, & \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_{\bar u} \arrow[r, "\sigma_{\bar u}"] & \mathcal{E}_{\bar u} \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}),
\end{tikzcd}$$

где $f : H_v \to H_u$ – морфизм представлений и $[a, b](x \otimes y) \overset{\mathrm{def}}{=} b(y) \otimes a(x)$ (заметим, что, тем самым, определены морфизм градуированных бимодулей $\hat{f}_*$ и антиизоморфизм градуированных бимодулей $\hat{\natural}_u$);

(vii) *алгебра $\mathfrak{hor}(P)$ распадается в прямую сумму*

$$\mathfrak{hor}(P) = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}}^{\oplus} \mathcal{H}_\alpha, \qquad \mathcal{H}_\alpha \cong \mathcal{F}_\alpha \otimes H_\alpha;$$

и поэтому

$$\Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{B} \cong \mathfrak{hor}(P) \cong \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}); \tag{1.47}$$

$(viii)$ *наоборот, если задана система градуированных бимодулей $\mathcal{F}_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{T}$ над $\Omega(\mathcal{M})$, удовлетворяющая условиям (i) - (vi) то по ним однозначно восстанавливается алгебра $\mathfrak{hor}(P)$.*

Определим теперь « канонический след» произвольного градуированного автоморфизма $A : \mathcal{F}_u \to \mathcal{F}_u$ градуированного бимодуля $\mathcal{F}_u$, для чего рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_{\bar u} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_u \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes A"] & \mathcal{E}_{\bar u} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_u \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) \arrow[d, "\langle\rangle_u^-\otimes\mathrm{id}"] \\
\mathcal{M} = \mathcal{E}_\varnothing \arrow[u, "\gamma_*^u"] \arrow[r, "\widetilde{tr_{\mathcal{M}}}(A)"] & \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) = \Omega(\mathcal{M}).
\end{tikzcd} \tag{1.48}$$

В этой диаграмме $\widetilde{tr_{\mathcal{M}}}(A)$ — морфизм градуированных бимодулей, восстанавливаемый при помощи диаграммы. Ясно, что морфизм $\widetilde{tr_{\mathcal{M}}}(A)$ однозначно определяется своим значением на единице

$$tr_{\mathcal{M}}(A) \overset{\mathrm{def}}{=} \widetilde{tr_{\mathcal{M}}}(A)(1),$$

причём, так как $\widetilde{tr_{\mathcal{M}}}(A)$ — морфизм *би*-модулей, то $tr_{\mathcal{M}} \in \mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M}))$. Очевидно, $tr_{\mathcal{M}}(A \oplus B) = tr_{\mathcal{M}}(A) + tr_{\mathcal{M}}(B)$. Исследуем теперь поведение отображения $tr_{\mathcal{M}}$ относительно композиции морфизмов. Докажем, сначала, следуещее вспомогательное утверждение.

Лемма 1.19. *Спаривания $\langle\rangle_u^+$ (соотв. $\langle\rangle_u^-$) индуцируют изоморфизм пространства $\mathcal{E}_{\bar u}$ как левого (соотв. как правого) модуля над $\mathcal{M}$ с пространством левых (соотв. правых) модульных морфизмов $\mathcal{E}_u \to \mathcal{M}$.*

Доказательство. Мы докажем первое утверждение, второе доказывается полностью аналогично. Итак, то, что спаривание $\langle\rangle_u^+$ индуцирует морфизм указанных градуированных модулей — очевидно. Из равенства

$$\sum_k \mu_k \langle \nu_k, \psi\rangle_u^+ = \psi,$$

где, как обычно $\sum_k \mu_k \otimes \nu_k = \gamma_*^u$, следует, что этот морфизм (мы будем его обозначать χ_u^+) — инъективный. Чтобы доказать это равенство, достаточно применить правую и левую часть к вектору e_l^* и воспользоваться равенствами (1.44) и (1.46). Пусть $\varphi : \mathcal{E}_u \to \mathcal{M}$ — произвольное $\mathcal{M}$- линейное отображение. Рассмотрим тогда элемент $\psi = \sum_k \mu_k \varphi(\nu_k) \in \mathcal{E}_{\bar{u}}$. Имеем:

$$\begin{aligned}\left[\chi_u^+(\psi)\right](\xi) = \langle \xi, \psi \rangle_u^+ = \sum_k \langle \xi, \mu_k \varphi(\nu_k) \rangle_u^+ = \\ = \sum_k \langle \xi, \mu_k \rangle_u^+ \varphi(\nu_k) = \sum_k \varphi\left[\langle \xi, \mu_k \rangle_u^+ \nu_k\right] = \varphi(\xi)\end{aligned}$$

для любого $\xi \in \mathcal{E}_u$, то есть χ_u^+ — эпиморфное отображение. □

В свете этого утверждения ясно, что для любого градуированного автоморфизма $A : \mathcal{F}_u \to \mathcal{F}_u$ формулы

$$\langle A_\perp \varphi, x \rangle_u^- = \langle \varphi, Ax \rangle_u^-,$$
$$\langle x, A^\top \varphi \rangle_u^+ = \langle Ax, \varphi \rangle_u^+$$

задают градуированные автоморфизмы $A_\perp, A^\top : \mathcal{F}_{\bar{u}} \to \mathcal{F}_{\bar{u}}$ сопряжённого бимодуля (здесь $\langle\rangle_u^-, \langle\rangle_u^+$ — спаривания градуированных бимодулей $\mathcal{F}_u$ и $\mathcal{F}_{\bar{u}}$, построенные по морфизмам представлений I_u, I^u, см теорему 1.18).

Определение 1.11. Автоморфизм A бимодуля $\mathcal{F}_u$ называется транспонируемым, если $A_\perp = A^\top$.

Прежде, чем иы сформулируем следуещее утверждение, заметим, что диаграмма (1.48) позволяет определить канонический след даже если отображение A сохраняет только структуру левого модуля. Конечно, в этом случае след уже не обязан быть элементом центра алгебры $\Omega(\mathcal{M})$. Следующий результат см. в [7].

Предложение 1.20. *Если автоморфизм B бимодуля $\mathcal{F}_u$ — транспонируемый, то для любого морфизма левых градуированных модулей A,*

$$tr_{\mathcal{M}}(AB) = (-1)^{\partial A \partial B} tr_{\mathcal{M}}(BA). \tag{1.49}$$

Доказательство. В силу утверждения леммы, мы можем теперь считать, что $A = \varphi \otimes x$, где $\varphi \in \mathcal{E}_{\bar{u}},\ x \in \mathcal{F}_u$. Тогда $BA = \varphi \otimes B(x),\ (-1)^{\partial A \partial B} AB = B^\top(\varphi) \otimes x$ и значит

$$tr_{\mathcal{M}}(BA - (-1)^{\partial A \partial B} AB) = \langle \varphi, B(x) \rangle_u^- - \langle B^\top(\varphi), x \rangle_u^- = 0$$

в силу транспонируемости B. □

Пусть $D : \mathcal{F}_u \to \mathcal{F}_u$ — отображение градуированных пространств степени 1. Мы будем говорить, что D — дифференцирование градуированного модуля $\mathcal{F}_u$, если выполняются равенства:

$$D(\psi\alpha) = D(\psi)\alpha + (-1)^{\partial\psi} \psi d_{\mathcal{M}}(\alpha),$$
$$D(\alpha\psi) = d_{\mathcal{M}}(\alpha)\psi + (-1)^{\partial\alpha} \alpha D(\psi).$$

для любых $\psi \in \mathcal{F}_u,\ \alpha \in \Omega(\mathcal{M})$.

Для произвольного дифференцирования D модуля $\mathcal{F}_u$ следующие формулы

$$d_{\mathcal{M}} \langle \varphi, \psi \rangle_u^- = \langle D_\perp(\varphi), \psi \rangle_u^- + (-1)^{\partial\varphi} \langle \varphi, D(\psi) \rangle_u^-,$$
$$d_{\mathcal{M}} \langle \psi, \varphi \rangle_u^+ = \langle D(\psi), \varphi \rangle_u^+ + (-1)^{\partial\psi} \langle \psi, D^\top(\varphi) \rangle_u^+$$

однозначно определяют дифференцирования $D_\perp$, $D^\top$ сопряжённого модуля $\mathcal{F}_{\bar{u}}$ (мы опять пользуемся утверждением леммы 1.19).

Определение 1.12. Дифференцирование D называется транспонируемым, если $D_\perp = D^\top$.

В качестве примера транспонируемого дифференцирования можно, прежде всего, привести отображение $D_{\omega,u} : \mathcal{F}_u \to \mathcal{F}_u$, индуцированное ковариантной производной, ассоциированной с произвольной регулярной связностью ω на P. Это отображение отправляет морфизм $\varphi \in \mathcal{F}_u = \mathrm{Mor}(u, F^\wedge)$ в композицию $D_\omega \circ \varphi$. В силу диаграммы (1.34) эта композиция тоже принадлежит $\mathcal{F}_u$. Очевидно, что дифференцирования $(D_{\omega,u})^\top$ и $(D_{\omega,u})_\perp$ оба равны $D_{\omega,\bar{u}}$.

Пусть теперь A — произвольный автоморфизм бимодуля $\mathcal{F}_u$, D — произвольное диффернцирование. Заметим, что отображение

$$\nabla(A) = DA - (-1)^{\partial A} AD : \mathcal{F}_u \to \mathcal{F}_u$$

тоже будет морфизмом бимодулей.

Предложение 1.21. *Если дифференнцирование D — транспонируемо, то для любого A*

$$tr_{\mathcal{M}}(\nabla(A)) = d_{\mathcal{M}}(tr_{\mathcal{M}}(A)). \tag{1.50}$$

Доказательство. Воспользуемся опять утверждением леммы 1.19. Мы можем считать, что $A = \varphi \otimes x$, тогда $DA = D^\top(\varphi) \otimes x$ и $(-1)^{\partial a} AD = -(-1)^{\partial\varphi} \varphi \otimes D(x)$, и поэтому

$$d_{\mathcal{M}}(tr_{\mathcal{M}}(A)) = d_{\mathcal{M}}\langle\varphi, x\rangle_u^- = \langle D^\top(\varphi), x\rangle_u^- + \\ + (-1)^{\partial\varphi}\langle\varphi, D(x)\rangle_u^- = tr_{\mathcal{M}}(DA - (-1)^{\partial A} AD) = tr_{\mathcal{M}}(\nabla(A))$$

□

Фиксируем теперь представление квантовой группы $u \in R(G)$. Для произвольного $z \in \mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M}))$ и транспонируемого дифференцирования $D : \mathcal{F}_u \to \mathcal{F}_u$ положим

$$\Theta_n(z, D) \overset{\mathrm{def}}{=} tr_{\mathcal{M}}(zD^{2n}) \in \mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M})).$$

Теорема 1.22. (i) *$d_{\mathcal{M}}\Theta_n(z, D) = \Theta_n(d_{\mathcal{M}}z, D)$, в частности, если $d_{\mathcal{M}}z = 0$ то и $d_{\mathcal{M}}\Theta_n(z, D) = 0$;*

(ii) *в случае, если $d_{\mathcal{M}}z = 0$, класс когомологий $[\Theta_n(z, D)] \in H^{2n+\partial z}(\mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M})))$ не зависит от выбора транспонируемого дифференцирования D (и от выбора элемента в классе когомологий $[z]$).*

Доказательство. Утверждение (i) следует из (1.50). Докажем (ii). Пусть $d_{\mathcal{M}}z = 0$, и пусть D' — другое транспонируемое дифференцирование. Положим $D' - D = S : \mathcal{F}_u \to \mathcal{F}_u$ и определим семейство транспонируемых дифференцирований D_t, $t \in [0; 1]$, $D_0 = D$, $D_1 = D'$ при помощи формулы

$$D_t = D + tS, \qquad t \in [0; 1].$$

Вычислим

$$\frac{d}{dt}\Theta_n(z, D_t) = \frac{d}{dt} tr_{\mathcal{M}}(zD_t^{2n}) = \sum_{i=1}^{2n} tr_{\mathcal{M}}(zD_t^{i-1} S D_t^{2n-1}) = \\ = tr_{\mathcal{M}}(D_t X - (-1)^{\partial X} X D_t) = d_{\mathcal{M}}(tr_{\mathcal{M}}(X)),$$

где

$$X = \sum_{i=1}^{n} D_t^{2i-1} S D_t^{2n-2i} z.$$

(Здесь z рассматривается как бимодульный морфизм $z : \mathcal{F}_u \to \mathcal{F}_u$.) Интегрируя по t от 0 до 1, получаем, что классы когомологий $[\Theta_n(z, D)]$ и $[\Theta_n(z, D')]$ совпадают. То, что выбор элемента в классе $[z]$ также не влияет на класс $[\Theta_n(z, D)]$, следует из (i). □

Следствие 1.23. *Для каждого целого $n \geq 1$ и каждого векторного расслоения $\mathcal{E}_u$, ассоциированного с главным квантовым расслоением P при помощи представления u, такого, что существуют транспонируемые дифференцирования D модуля $\mathcal{F}_u$, определены классы $\theta_n^u \in H^{2n}(\mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M})))$, $\theta_n^u = [\Theta_n(1, D)]$. В частности, если на P существуют регулярные связности, то классы θ_n^u определены для всех $u \in R(G)$.*

Вспомним, что, когда на P существуют регулярные связности, мы в §1.4 определили характеристические классы расслоения P при помощи обобщённого гомоморфизма Вейля $\tilde{W}$, принимающего значения также в $H^{2*}(\mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M})))$. Связь между этими характеристическими классами и классами θ_n^u ассоциированных векторных расслоений устанавливается следующим образом.

Прежде всего, заметим, что на матричном элементе u_{ij} представления u присоединённое действие ad задаётся фолрмулой

$$ad(u_{ij}) = \sum_{k,l=1}^{n_u} u_{kl} \otimes \kappa(u_{ik}) u_{lj}.$$

Следовательно, пространство $\tilde{H}_u$ инвариантно относительно этого кодействия. Более того, представление $ad_{|\tilde{H}_u}$ изоморфно тензорному произведению $H_{\bar{u}} \otimes H_u$ (изоморфизм задаётся соответствием $e_i^* \otimes e_j \mapsto u_{ij}$). Так как $I^u : \mathbb{C} \to H_{\bar{u}} \otimes H_u$ — морфизм представлений, то мы заключаем, что образ сквозного отображения $\mathbb{C} \to \tilde{H}_u$ — элемент $a(u) = tr(C_u^{-1} \tilde{u})$ — ad-инвариантен ($\tilde{u} = (u_{ij})$ — матрица представления u).

Для любого $n \geq 1$ положим

$$\tilde{a}^n(u) = \sum_{(a)} \Big(a_{(1)}(u) - \epsilon(a_{(1)}(u) \Big) \otimes \ldots \otimes \Big(a_{(n)}(u) - \epsilon(a_{(n)}(u)) \Big),$$

где $\sum_{(a)} a_{(1)}(u) \otimes \ldots \otimes a_{(n)}(u) = \phi^{n-1}(a(u))$ и ϕ^n определяется по индукции: $\phi^1 = \phi$, $\phi^n = (\phi \otimes \mathrm{id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{id})\phi^{n-1}$ – id стоит $n-1$ раз. Очевидно, $\tilde{a}^n(u) \in (\ker \epsilon)_{inv}^{\otimes}$.

Предложение 1.24. $\theta_n^u = \tilde{W}(\tilde{a}^n(u))$

Доказательство. Это — прямое следствие формул (1.38), (1.45) и (1.46). □

В заключение главы 1, сформулируем ещё два принадлежащих Джорджевичу утверждения, описывающие связь между дифференцированиями модулей $\mathcal{F}_u$ и регулярными связностями на P.

Теорема 1.25. (i) *Пусть $\{D_u\}_{u \in R(G)}$ — такой набор дифференцирований модулей $\mathcal{F}_u$, что выполнены следующие условия:*

$$D_{u \times v}(\varphi \otimes \psi) = D_u(\varphi)\psi + (-1)^{\partial\varphi} \varphi D_v(\psi), \;\; D_{\varnothing} = d_{\mathcal{M}},$$
$$D_{\bar{u}} \natural_u = \natural_u D_u, \;\; D_u f_* = f_* D_v,$$

для любых $u, v \in R(G)$, $\varphi \in \mathcal{F}_u$, $\psi \in \mathcal{F}_v$, $f \in \mathrm{Mor}(u, v)$ *(мы воспользовались изоморфизмом* $\mathcal{F}_u \otimes_{\Omega(\mathcal{M})} \mathcal{F}_v \cong \mathcal{F}_{u \times v}$*). Тогда существует (единственное) дифференцирование* D *алгебры* $\mathfrak{hor}(P)$*, такое, что* $(D \otimes \mathrm{id})F^{\wedge} = F^{\wedge}D$*, индуцирующее на любом модуле* $\mathcal{F}_u$ *дифференцирование* D_u*.*

(ii) *Пусть* $\mathfrak{hor}_P$ *— произвольная градуированная *-алгебра, такая, что* $\mathfrak{hor}_P^0 = \mathcal{B}$*. Предположим, что на* $\mathfrak{hor}_P$ *задано правое кодействие квантовой группы:* $F_P : \mathfrak{hor}_P \to \mathfrak{hor}_P \otimes \mathcal{A}$*, совпадающее на* $\mathcal{B}$ *с* F*. Пусть на *-подалгебре* $\Omega(\mathcal{M}) = F_P^{-1}(\mathfrak{hor}_P \otimes \mathcal{A})$ *задан дифференциал* $d_{\mathcal{M}}$*, удовлетворяющий всем свойствам дифференциалов *-алгебр. Обозначим через* $\mathfrak{der}(P)$ *— аффинное пространство линейных отображений* $D : \mathfrak{hor}_P \to \mathfrak{hor}_P$*, таких, что*

$$D(\mathfrak{hor}_P^*) \subseteq \mathfrak{hor}_P^{*+1},\ D(\psi^*) = D(\psi)^*,\ D_{|\Omega(\mathcal{M})} = d_{\mathcal{M}},$$
$$F_P D = (D \otimes \mathrm{id})F_P,\ D(\varphi\psi) = D(\varphi)\psi + (-1)^{\partial\varphi}\varphi D(\psi).$$

Тогда для любого подпространства $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{der}(P)$ *существуют такие дифференциальные исчисления* $\Gamma^{\wedge}$ *на* $\mathcal{A}$ *и* $\Omega(P) = \Omega(P, \Gamma^{\wedge})$ *на* P*, что* $\mathfrak{hor}_P$ *совпадает с алгеброй горизонтальных дифференциальных форм на* P*, и все* $D \in \mathcal{L}$ *задаются как ковариантные дифференцирования, построенные по регулярным связностям на* P*.*

Глава 2

Полуклассическая теория

В этой главе мы описываем, во что превращается общая теория из главы 1, если в качестве дифференциального исчисления на базе использовать дифференциальную градуированную алгебру, построенную по алгебре Ли дифференцирований алгебры $\mathcal{M}$. Так, в первом параграфе мы разбираем случай « локально-тривиального» главного квантового расслоения над гладким многобразием. Мы докажем, что в этом случае образ обобщённого гомоморфизма Вейля $\tilde{W}$ (ср. §1.4), который в этом случае можно определить для произвольной, необязательно регулярной, связности состоит из характеристических классов « классической части» расслоения P. Далее, в параграфах 2.2 и 2.3 мы разбираем более общий случай, когда базой расслоения служит произвольная унитальная алгебра $\mathcal{M}$. В этом случае мы строим алгебру полуклассических дифференциальных форм на расслоении P, $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$, удовлетворяющую всем условиям пункта (ii) теоремы 1.25. После этого мы доказываем, что понятие связности в этом случае эквивалентно понятию « лифта дифференцирований», а теория характеристических классов ассоциированных векторных расслоений во многом аналогична теории, развитой в работах [18], [19].

Основное отличие теории, рассматриваемой в диссертации, от работ [18], [19], состоит в том, что векторные расслоения, ассоциированные с некоторым главным квантовым расслоением, являются *би*модулями над $\mathcal{M}$ — « алгеброй функций нак базе». Поэтому, например, связности на них не всегда существуют (см. Главу 3, а также [24]). Кроме того, канонический след $tr_{\mathcal{M}}$ см. §1.5, не является следом морфизмов правых, или левых, модулей в смысле вышеуказанных работ, так как условие $tr_{\mathcal{M}}(AB) = tr_{\mathcal{M}}(BA)$ выполняется только если один из морфизмов — транспонируемый.

Таким образом возникает много вопросов, прежде всего: как связаны характеристические классы векторных расслоений, построенные в Главе 1, с классами из работ [18], [19]? Конечно, предполагается, что дифференциальное исчисление, которое используется нами — полуклассическое. Оказывается, например, что регулярные связности в « полуклассической теории» являются связностями в смысле указанных работ, а формы кривизны таких связностей в смысле первой главы и в смысле этих работ — совпадают (см. Предложение 2.13).

2.1 Локально-тривиальные квантовые расслоения

В случае, когда база $\mathcal{M} = C^\infty(M)$, где M — некоторое гладкое (C^∞) компактное многообразие, можно выделить важный класс квантовых главных расслоений, называемых локально–тривиальными. Дадим точное определение (см. [5]).

Определение 2.1. Локально–тривиальным квантовым главным расслоением над многообразием M с квантовой структурной группой $\mathcal{A}$ называется унитальная $*$-алгебра $\mathcal{B}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) Существует отображение $F : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$, являющееся ко–действием;

2) Существует $*$–гомоморфизм $i : C^{\infty}(M) \to \mathcal{B}$;

3) Для любой точки $x \in M$ существует окрестность $U \ni x$, для которой определен $*$–гомоморфизм $\pi_U : \mathcal{B} \to C^{\infty}(M) \otimes \mathcal{A}$, такой, что $\pi_U(i(f)) = f|_U \otimes 1$;

4) $(\mathrm{id} \otimes \phi)\pi_U = (\pi_U \otimes \mathrm{id}) \circ F$;

5) Если $q = i(\phi)b \in \mathcal{B}$, где $\phi \in C_0^{\infty}(U)$, то $\pi_U(q) = 0 \Leftrightarrow q = 0$.

Заметим, что из определения 2.1, конечно, следует, что $\mathcal{B}$ будет квантовым главным расслоением со структурной группой $\mathcal{A}$ и базой $\mathcal{M}$ в обычном смысле (для доказательства того, что выполняется условие (*кгр2*), достаточно рассмотреть разбиение единицы $(\phi_U)_{u \in \mathcal{U}}$ для некоторого конечного покрытия $\mathcal{U}$). Обратное утверждение, однако, неверно: существуют квантовые главные расслоения, база $\mathcal{M}$ которых равна $C^{\infty}(M)$ для некоторого компактного многообразия M, но которые при этом не являются локально–тривиальными. Рассмотрим пример.

Пусть $\mathcal{A} = S^1$. Как указано в §1.5, задание расслоения со сотруктурной группой $\mathcal{A}$ эквивалентно заданию двух сопряженных модулей $\mathcal{E}$, $\overline{\mathcal{E}}$ над $\mathcal{M}$ и отображений спаривания

$$\mu : \overline{\mathcal{E}} \otimes_{\mu} \mathcal{E} \to \mathcal{M}$$
$$\overline{\mu} : \mathcal{E} \otimes_{\mu} \overline{\mathcal{E}} \to \mathcal{M}.$$

Если $\mathcal{M} = C^{\infty}(M)$, то можно в качестве модуля $\mathcal{E}$ взять $\Gamma(\xi)$, где ξ — некоторое классическое линейное расслоение, $\overline{\mathcal{E}} = \Gamma(\overline{\xi})$. Однако структуру бимодуля в $\mathcal{E}$ мы введем немного исказив ее. Пусть $\varepsilon : C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(M)$ — $*$–автоморфизм алгебры $\mathcal{M}$ (например, индуцированный некоторым диффеоморфизмом многообразия M). Спаривания μ и $\overline{\mu}$ мы определим при помощи формул

$$\mu(\psi) = U\varepsilon^{-1}(\mu_0(\psi)),$$
$$\overline{\mu}(\phi) = \varepsilon(U)(\overline{\mu}_0(\varphi))$$

где $\psi \in \overline{\mathcal{E}} \otimes_{\mu} \mathcal{E}$, $\varphi \in \mathcal{E} \otimes_{\mu} \overline{\mathcal{E}}$, μ_0, $\overline{\mu}_0$ — стандартные спаривания сечений линейного расслоения ξ с сечениями двойственного расслоения $\overline{\xi}$, а U — функция на M такая, что

$$U^* = U,$$

т.е. U — действительнозначная функция. Ясно, что если $\varepsilon \neq \mathrm{id}$, то полученное главное расслоение не будет локально–тривиальным. Однако и база, и даже структурная группа этого расслоения — классические.

Теперь вернемся к локально–тривиальным расслоениям. После того, как дано определение, можно доказать следующее утверждение (см. [5]):

Теорема 2.1. *Любое квантовое главное расслоение со структурной группой $\mathcal{A}$, получается при помощи следующей конструкции из некоторого (однозначно определенного) главного расслоения со структурной группой G_{cl}. Пусть*

$$\begin{tikzcd} P_{cl} \arrow[d, "G_{cl}"] \\ M \end{tikzcd} \quad \text{— \textit{некоторое главное расслоение.}}$$

Группа G_{cl} действует на алгебре $C^\infty(P_{cl})$ по правилу: $(g\cdot\phi)(x) = \phi(g\cdot x)$; кроме того, она действует на алгебре $\mathcal{A}$: $\zeta_g(a) = \sum g(S(a_{(1)}))a_{(2)}$. Тогда $\mathcal{B} = \{w \in C^\infty(P_{cl}) \otimes \mathcal{A} \mid g(w) = w, \forall g \in \mathcal{A}\} = C^\infty(P_{cl}) \otimes_{G_U} \mathcal{A}$.

Итак, после того, как мы построили главное расслоение, надо заняться построением дифференциального исчисления (то есть алгебры дифференциальных форм) на квантовых главных расслоениях. Конечно, можно воспользоваться общей конструкцией, описанной в главе 1 (§1.3). Однако, естественно было бы потребовать чтобы, во-первых, алгебра $\Omega(\mathcal{M})$, построенная по $\Omega(P)$, совпадала с алгеброй классических дифференциальных форм на многообразии M, а во-вторых, чтобы $*$-алгебра $\Omega(P)$ была локально-тривиальной в естетственном смысле, то есть чтобы тривиализующие отображения π_U распространялись до отображений $\pi_U^\wedge : \Omega(P) \to \Omega(\mathcal{M})|_U \otimes \Gamma^\wedge$, где $\Omega(\mathcal{M})|_U = \Omega(M)|_U$ — образ алгебры обычных дифференциальных форм на M при ограничении на U. Как показано в статье [5], далеко не всякое дифференицальное исчисление Γ на квантовой группе можно использовать для этих целей: необходимое и достаточное условие, выделяющее те Γ, которые допускают такое распространение для произвольных $\mathcal{B}$, а не только тривиальных $\mathcal{B} \cong C^\infty(M) \otimes \mathcal{A}$ (мы будем называть такие Γ допустимыми) выражается следующей формулой:

$$(X \otimes \mathrm{id})ad(a) = 0, \qquad \forall X \in lie(\mathcal{A}_{cl}), \quad a \in \mathcal{R}.$$

Здесь $lie(\mathcal{A}_{cl})$ — алгебра Ли группы Ли $\mathcal{A}_{cl}$.

Если положить $\overline{\mathcal{R}} = \{a \in \ker\epsilon \mid (X \otimes \mathrm{id})ad(a) = 0,\ \forall X \in lie(\mathcal{A}_{cl})\}$, то (см. [5]) множество $\overline{\mathcal{R}}$ является правым ad–инвариантным идеалом в $\ker\varepsilon$.

Определение 2.2. Минимальным допустимым дифференциальным исчислением на квантовой группе $\mathcal{A}$ называется дифференциальное исчисление Γ_1, соответствующее идеалу $\overline{\mathcal{R}}$.

Прилагательное « минимальный» в данном контексте подразумевает, что для любого другого допустимого модуля Γ выполнено вложение $\mathcal{R}_\Gamma \subseteq \overline{\mathcal{R}}$. К сожалению, даже в случае группы $SU_\mu(2)$, пространство $(\Gamma_1)_{inv}$ является бесконечномерным. Кроме того, с этим дифференциальным исчислением не всегда удобно работать (например, непонятно, какие связности будут в этом случае регулярными, или мультипликативными). Поэтому нашим основным примером будет, все-таки, $\Gamma = \Gamma_0 \approx \ker\epsilon$, соответствующее нулевому идеалу $\mathcal{R}$.

Замечание. Минимальное допустимое дифференциальное исчисление, как нетрудно видеть, совпадает с построенным в §1.1 исчислением $\Gamma_{\mathcal{A},\mathcal{A}}$ (напомним, что $\Gamma_{\mathcal{A},\mathcal{A}} = \mathcal{A}\Box_{\mathcal{A}_{cl}} \Omega(G_{cl}) \Box_{\mathcal{A}_{cl}} \mathcal{A}$).

Кроме того, в дальнейшем мы будем изучать образ гомоморфизма Вейля в этом случае. В этот раз он лежит в алгебре обычных когомологий де Рама многообразия M. Как указано в §1.3, этот гомоморфизм (обобщенный) отображает пространство $ad^\otimes$–инвариантных элементов из $(\ker\epsilon)^\otimes$ в когомологии $H^{ev}(M, \mathbb{R})$. Но, как известно, $\ker\epsilon = (\Gamma_0)_{inv}$, так что в результате описание образа W, данное в данном разделе для простейшего дифференциального исчисления Γ_0, годится и для образа обобщенного гомоморфизма Вейля $\tilde{W}$ (ниже мы подробнее остановимся на этом вопросе).

Мы будем использовать следующие обозначения:

$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ — атлас расслоения P (то есть, набор открытых множеств U_α, таких, что $M = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ и для каждого α определен $*$–гомоморфизм $\pi_{U_\alpha} : P \to C^\infty(U_\alpha) \otimes \mathcal{A}$). Если мы будем работать только с компактными многообразиями M, то можно считать, что атлас $\mathcal{U}$ конечен (в противном случае мы предполагаем, что он локально–конечен);

P_{cl} — « классическая часть P» — главное расслоение со структурной группой G_{cl};

$\pi^{\wedge}_{U_\alpha}$ — отображения, распространяющие на $\Omega(P)$ отображения π_{U_α}–карты расслоения;

$\{g_{UV}\}_{U\cap V\neq\varnothing}$ — коцикл классической части расслоения P, т.е. $U, V \in \mathcal{U}$, и отображения $g_{UV} : U \cap V \to G_{cl}$, такие, что

$$g_{UV}g_{VW}g_{WU} = e$$

(e — единица группы G_{cl}).

Заметим, что в рассматриваемом случае алгебра горизонтальных форм может быть описана по-другому. Именно,

$$\mathfrak{hor}(P) = \{\theta \in \Omega(P) | \pi^{\wedge}_U(\theta) \in \Omega(U) \otimes \mathcal{A},\ \forall U \in \mathcal{U}\}.$$

Кроме того, можно дать и описание в локальных терминах тензориальных форм и связностей. Следующая теорема доказана в [5] (определения тензориальных форм и связностей см. в §1.4).

Теорема 2.2. (i) *Любая тензориальная форма φ степени n однозначно определяется своей локальной записью:*

$$\pi^{\wedge}_U(\varphi(\theta)) = \sum_k \varphi_U(\theta_k) \otimes c_k,$$

где $\overline{\omega}(\theta) = \sum\limits_k \theta_k \otimes c_k$ и $\{\varphi_U : \Gamma_{inv} \to \Omega^n(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$ — набор $*$–линейных отображений. Если $V \in \mathcal{U}$ — другая карта, $U \cap V \neq \varnothing$, то

$$\varphi_V(\theta)|_{U\cap V} = \sum_k \varphi_U(\theta_k)|_{U\cap V}\, g_{UV}(c_k). \tag{2.1}$$

$g_{UV} : U \cap V \to G_{cl}$ — функция перехода для расслоения P_{cl}. И наоборот: любой набор $\{\varphi_U : \Gamma_{inv} \to \Omega^n(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$, удовлетворяющий (2.1), *определяет некоторую тензориальную форму степени n.*

(ii) *Любая связность ω однозначно определяется своими локальными калибровочными потенциалами $\{A_U : \Gamma_{inv} \to \Omega^1(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$:*

$$\pi^{\wedge}_U(\omega(\theta)) = \sum_k A_U(\theta_k) \otimes c_k + 1_U \otimes \theta.$$

Если $V \in \mathcal{U}$ — другая карта, $U \cap V \neq \varnothing$, то

$$A_V(\theta)|_{U\cap V} = \sum_k A_U(\theta_k)|_{U\cap V}\, g_{UV}(c_k) + \partial^{UV}(\theta), \tag{2.2}$$

где $\partial^{UV}(\pi(a)) = \sum g_{VU}(a_{(1)})d(g_{UV}(a_{(2)}))$ — в случае, когда Γ — допустимое дифференциальное исчисление, это выражение не зависит от выбора представителя из $a \in \mathcal{A}$, $\pi(a) = \theta$. И наоборот, любой набор локальных калибровочных потенциалов $\{A_U : \Gamma_{inv} \to \Omega^1(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$, удовлетворяющий (2.2), *определяет некоторую связность на расслоении P.*

(iii) *Форма кривизны связности ω определяется набором $*$–линейных отображений $\{F_U : \Gamma_{inv} \to \Omega^2(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$, определяемых по формуле*

$$F_U(\theta) = dA_U(\theta) - \langle A_U, A_U\rangle(\theta), \tag{2.3}$$

где последнее слагаемое равно

$$\langle A_U, A_U\rangle(\pi(a)) = \sum A_U(\pi(a_{(1)}))A_U(\pi(a_{(2)}))$$

(ср. §1.4).

(iv) Условие регулярности связности в терминах калибровочных потенциалов $\{A_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ имеет вид:

$$A_U(\theta\circ a)=\varepsilon(a)A_U(\theta)$$

для любого $U\in\mathcal{U}$, $a\in\mathcal{A}$, $\theta\in\Gamma_{inv}$. Все регулярные связности на P мультипликативны и могут быть интерпретированы как связности на классическом главном расслоении P_{cl}, классической части расслоения P.

Пусть теперь дифференциальное исчисление на группе $\mathcal{A}$ — тривиальное. Тогда мы можем описать связности на локально–тривиальном главном расслоении более точно. Именно, верна следующая теорема.

Теорема 2.3. *В описанной ситуации задание связности на главном расслоении P эквивалентно выбору линейной связности для каждого векторного расслоения, ассоциированного с P при помощи некоторого неприводимого унитарного представления квантовой группы (заметим, что мы не говорим о регулярности связности, получающейся таким образом).*

Доказательство. Прежде всего, дадим описание векторных расслоений, ассоциированных с локально–тривиальным квантовым главным расслоением. Для этого нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2.4. *Пусть $P=(\mathcal{B},F)$ — произвольное квантовое главное расслоение, $H_u^\top$ — пространство представления u, на котором $\mathcal{A}$ действует слева (см. §1.5). Тогда*

$$\mathcal{E}_u=\mathcal{B}\,\Box_{\mathcal{A}}\,H_u^\top.$$

Доказательство. Достаточно провести его для случая, когда представление $u=u^\alpha$ неприводимо. Но тогда, согласно разложению из п. (vii) теоремы 1.18

$$\mathcal{B}\,\Box_{\mathcal{A}}\,H_\alpha^\top=\left(\sum_{\alpha'\in\mathcal{T}}^{\oplus}\mathcal{E}_{\alpha'}\otimes H_{\alpha'}\right)\Box_{\mathcal{A}}\,H_\alpha^\top=\sum_{\alpha'\in\mathcal{T}}^{\oplus}\mathcal{E}_{\alpha'}\otimes(H_{\alpha'}\,\Box_{\mathcal{A}}\,H_\alpha^\top)=\mathcal{E}_\alpha.$$

Последнее равенство следует из леммы 1.16. ☐

В нашем случае, когда расслоение P локально тривиально, согласно теореме 2.1,

$$\begin{aligned}\mathcal{B}=C^\infty(P_{cl})\otimes_{G_{cl}}\mathcal{A}\cong C^\infty(P_{cl})\otimes_{G_{cl}}(\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}^{\oplus}\tilde{H}_\alpha)\cong\\ \cong C^\infty(P_{cl})\otimes_{G_{cl}}(\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}^{\oplus}H_\alpha^\top\otimes H_\alpha)\cong\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}^{\oplus}(C^\infty(P_{cl})\otimes_{G_{cl}}H_\alpha^\top)\otimes H_\alpha.\end{aligned}$$

Все равенства записаны для бимодулей над $C^\infty(M)$, на которых ко-действует (справа) квантовая группа $\mathcal{A}$, при этом мы активно использовали результаты §1.5. Тогда

$$\mathcal{E}_\alpha=\mathcal{B}\,\Box_{\mathcal{A}}\,H_\alpha^\top=\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}^{\oplus}(C^\infty(P_{cl})\otimes_{G_{cl}}H_\alpha^\top)\otimes H_\alpha\right)\Box_{\mathcal{A}}\,H_\alpha^\top=C^\infty(P_{cl})\otimes_{G_{cl}}H_\alpha^\top.$$

Итак, векторное расслоение $\mathcal{E}_\alpha$, ассоциированное с локально–тривиальным главным квантовым расслоением при помощи (неприводимого) представления u^α, равно $C^\infty(P_{cl})\otimes_{G_{cl}}H_\alpha^\top$ (как бимодуль над $C^\infty(M)$). Теперь можно дать описание этих пространств в терминах функций перехода.

Для этого заметим, что выполнено следующее равенство:

$$C^\infty(P_{cl})\otimes_{G_{cl}} H_\alpha^\top \cong C^\infty_{inv}(P_{cl}, H_\alpha^\top) = \\ = \{\varphi = C^\infty(P_{cl}, H_\alpha^\top) | \varphi(xg) = \rho_\alpha(g)(\varphi(x)),\ \forall x\in P, g\in G_{cl}\}$$

Тут $\rho_\alpha(g)(e) = (g\otimes \mathrm{id}_{H_\alpha^\top})_\alpha\triangle(e)$, где ${}_\alpha\triangle$ — левое кодействие квантовой группы $\mathcal{A}$ на $H_\alpha^\top = H_\alpha$, и группа G_{cl} интерпретируется как множество характеров алгебры $\mathcal{A}$. Заметим, что $\rho_\alpha : G_{cl}\to U(n_\alpha)$ — унитарное представление группы G_{cl} ($n_\alpha = \dim H_\alpha$); в самом деле:

$$\rho_\alpha(g_1g_2)(e) = (g_1g_2\otimes \mathrm{id})_\alpha\triangle(e) = \\ = (g_1\otimes g_2\otimes \mathrm{id})(\phi\otimes \mathrm{id})_\alpha\triangle(e) = \\ = (g_1\otimes g_2\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes {}_\alpha\triangle)_\alpha\triangle(e) = \rho_\alpha(g_1)\rho_\alpha(g_2)(e).$$

Унитарность ρ_α следует из того, что матрица (u_{ij}^α), определяющая представление u, — унитарный элемент в $\mathcal{B}(H_\alpha)\otimes\mathcal{A}$.

С другой стороны, очевидно, что $C^\infty_{inv}(P_{cl}, H_\alpha^\top) = \Gamma^\infty(P_{cl}\times_{G_{cl}} H_\alpha^\top) = \Gamma^\infty(P_{cl}\times_{\rho_\alpha}\mathbb{C}^{n_\alpha})$, и мы будем в дальнейшем говорить, что расслоение $P_{cl}\times_{\rho_\alpha}\mathbb{C}^{n_\alpha}$ ассоциировано с квантовым главным расслоением P при помощи u^α.

Далее, как указано в §1.1, см. также [2], в качестве базиса алгебры $\mathcal{A}$ можно взять следующий набор: $\{u_{ij}^\alpha \mid i,j = 1,\ldots,n_\alpha,\ \alpha\in\mathcal{T}\}$, где множество $\mathcal{T}$ — все неэквивалентные унитарные представления квантовой группы $\mathcal{A}$, $n_\alpha = \dim H_\alpha$, и элементы u_{ij}^α — матричные элементы представления u (см. §§1.1 и 1.5).

Напомним условие унитарности представления u^α:

$$\kappa(u_{ij}^\alpha) = (u_{ji}^\alpha)^*. \tag{2.4}$$

При отождествлении $(\Gamma_0)_{inv}\cong\ker\epsilon$, проекция $\pi : \mathcal{A}\to(\Gamma_0)_{inv}$ принимает вид $\pi(a) = a - \epsilon(a)\cdot 1$. Пусть $\{\varnothing\}\in\mathcal{T}$ обозначает тривиальное одномерное представление (матрица этого представления состоит из единственного элемента 1). Тогда очевидно, что множество

$$\{\pi(u_{ij}^\alpha) = u_{ij}^\alpha - \delta_{ij}\cdot 1 \mid i,j = 1,\ldots,n_\alpha,\ \alpha\in\mathcal{T}\setminus\{\varnothing\}\}$$

будет базисом в $(\Gamma_0)_{inv}$.

Итак, фиксируем $\alpha\in\mathcal{T}$ и выберем какую–нибудь карту $U\in\mathcal{U}$. Мы можем рассмотреть матрицу $A_U^\alpha = ({}_Ua_{ij}^\alpha)_{i,j=1}^{n_\alpha}$, ${}_Ua_{ij}^\alpha = A_U(\pi(u_{ij}^\alpha))$, ${}_Ua_{ij}^\alpha\in\Omega^1(U)$. Тогда, во-первых, вспомним, что A_U — $*$–линейное отображение, то есть, $A_U(\theta^*) = \overline{A}_U(\theta)$. Но $*$–структура на Γ вводится таким образом, что (см. [5]) $\pi(a)^* = -\pi(\kappa(a)^*)$. Следовательно,

$$\pi(u_{ij}^\alpha)^* = -\pi(\kappa(u_{ij}^\alpha)^*) \overset{(2.4)}{=} -\pi((u_{ji}^{\alpha *})^*) = -\pi(u_{ji}^\alpha).$$

Поэтому

$${}_U\overline{a}_{ij}^\alpha = \overline{A}_U(\pi(u_{ij}^\alpha)) = A_U(\pi(u_{ij}^\alpha)^*) = -A_U(\pi(u_{ji}^\alpha)) = -{}_Ua_{ji}^\alpha,$$

то есть матрица A_U^α — косоэрмитова.

Теперь мы найдем закон преобразования матричных элементов ${}_Ua_{ij}^\alpha$ при изменении карты. Для этого вспомним, что $\omega(\pi(a)) = \sum_{(a)}\pi(a_{(2)})\otimes\kappa(a_{(1)})a_{(3)}$. Значит

$$\omega(\pi(u_{ij}^\alpha)) = \sum_{k,l=1}^{n_\alpha}\pi(u_{kl}^\alpha)\otimes\kappa(u_{ik}^\alpha)u_{lj}^\alpha. \tag{2.5}$$

Тогда (см. формулу (2.2))

$$ {}_V a^\alpha_{ij}|_{U\cap V} = A_V(\pi(u^\alpha_{ij}))|_{U\cap V} = \sum_{k,l} A_U(\pi(u^\alpha_{kl}))|_{U\cap V} g_{UV}(\kappa(u^\alpha_{ik})u^\alpha_{lj}) + \partial^{UV}(\pi(u^\alpha_{ij})). \qquad (2.6)$$

Но

$$g_{UV}(\kappa(u^\alpha_{ik})u^\alpha_{lj}) = g^{-1}_{UV}(u^\alpha_{ik})g_{UV}(u^\alpha_{lj}) = ((R^\alpha_{UV})^{-1})_{ik}(R^\alpha_{UV})_{lj}, \qquad (2.7)$$

где матрица $((R^\alpha_{UV})_{ij})^{n_\alpha}_{i,j=1} = R^\alpha_{UV}(x)$ равна $\rho_\alpha(g_{UV}(x))$, и аналогично

$$\partial^{UV}(\pi(u^\alpha_{ij})) = \sum_k ((R^\alpha_{UV})^{-1})_{ik} d(R^\alpha_{UV})_{kj}. \qquad (2.8)$$

Переписывая теперь (2.6) с учетом (2.7) и (2.8), получаем, что матрицы $\{A^\alpha_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ преобразуются по закону

$$(A^\alpha_V)|_{U\cap V} = (R^\alpha_{UV})^{-1}(A^\alpha_U)|_{U\cap V}(R^\alpha_{UV}) + (R^\alpha_{UV})^{-1}dR^\alpha_{UV}.$$

Мы видим, что набор $\{A^\alpha_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ задает линейную связность в векторном расслоении, ассоциированном с P_{cl} при помощи представления ρ_α. □

Аналогично, прямым вычислением получаем, что матрицы $\{F^\alpha_U = (F_U(\pi(u^\alpha_{ij})))^{n_\alpha}_{i,j=1}\}_{U\in\mathcal{U}}$ равны

$$(F^\alpha_U)_{ij} = d({}_U a^\alpha_{ij}) + \sum_k {}_U a^\alpha_{ik} \wedge {}_U a^\alpha_{kj}$$

(d — внешний дифференциал на $\Omega(U)$) и преобразуются по закону

$$(F^\alpha_V)|_{U\cap V} = (R^\alpha_{UV})^{-1}(F^\alpha_U)|_{U\cap V}(R^\alpha_{UV}),$$

то есть этот набор матриц совпадает с формой кривизны вышеуказанной линейной связности.

Квантовое тождество Бьянки в локальной записи выглядит следующим образом:

$$DF_U - \{[F_U, A_U]_q - \langle F_U, A_U\rangle + \langle A_U, F_U\rangle\} = \langle A_U, \langle A_U, A_U\rangle\rangle - \langle\langle A_U, A_U\rangle, A_U\rangle. \qquad (2.9)$$

В этой формуле левая и правая части — $*$–линейные отображения из Γ_{inv} в $\Omega^3(U)$, произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ определяется так же, как и выше, а $[F_U, A_U]_q(\theta) = \sum\limits_k F_U(\theta_k)\wedge A_U(\pi(c_k))$, где $\varpi(\theta) = \sum\limits_k \theta_k \otimes c_k$ (см. §1.4). Кроме того, ковариантная производная, стоящая в левой части, равна

$$DF_U = dF_U + [F_U, A_U]_q.$$

Поэтому в случае, когда произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ корректно определено, как у нас, правая часть в (2.9) равна нулю и если переписать (2.9) для базисного элемента $\pi(u^\alpha_{ij})$, получим равенство

$$d(F^\alpha_U)_{ij} + \sum_k \{(F^\alpha_U)_{ik}\wedge(A^\alpha_U)_{kj} - (A^\alpha_U)_{ik}\wedge(F^\alpha_U)_{kj}\} = 0,$$

или, на матричном языке,

$$dF^\alpha_U + [F^\alpha_U, A^\alpha_U] = 0.$$

То есть, тождество (2.9) переходит для конкретного выбора $\Gamma = \Gamma_0$ в обычное тождество Бьянки для линейных связностей.

Замечание. В случае, когда Γ — произвольное допустимое дифференциальное исчисление, рассмотрим вместо формы связности $\omega : \Gamma_{inv} \to \Omega(P)$, отображение $\tilde{\omega} : \ker \epsilon = \Gamma_0 \to \Omega(P)$,

$$\tilde{\omega}(a) = \omega(\pi(a)).$$

Оно корректно определено и однозначно задаётся локальными калибровочными потенциалами

$$\tilde{A}_U(a) = A_U(\pi(a)),$$

удовлетворяющими условиям

$$\tilde{A}_V(a)|_{U\cap V} = \sum_{(a)} \tilde{A}_U(a_{(2)})|_{U\cap V} g_{UV}(\kappa(a_{(1)})a_{(3)}) + \sum_{(a)} g_{UV}(a_{(1)}) d g_{UV}(a_{(2)}).$$

Правда, так как $\Omega(P)$ в этот раз построен по дифференциальному исчислению $\Gamma \neq \Gamma_0$, эти потенциалы нельзя использовать дя построения связности на расслоении P относительно дифференциального исчисления Γ_0.

Совершенно аналогично вышеприведенным вычислениям доказывается, что матрицы $\{\tilde{A}^\alpha_U \mid U \in \mathcal{U}\}$, $\tilde{A}^\alpha_U = ({}_U\tilde{a}^\alpha_{ij}) = (\tilde{A}_U(u^\alpha_{ij}))$ образуют для каждого α линейную связность на ассоциированном векторном расслоении. Тогда обобщенная формула кривизны $\tilde{R}_\omega$ (см. §1.4) связности ω, может быть отождествлена в локальных терминах с набором форм кривизны указанных линейных связностей:

$$\pi^\wedge_U(\tilde{R}_\omega(u^\alpha_{ij})) = d({}_U\tilde{a}^\alpha_{ij}) + \sum_k {}_U\tilde{a}^\alpha_{ik} \wedge {}_U\tilde{a}^\alpha_{kj}.$$

Единственное отличие от вышеописанного случая состоит в том, что матрица $\tilde{A}^\alpha_U$ лежит не просто в пространстве косоэрмитовых матриц, то есть в $\mathfrak{u}(n_\alpha)$, но в некотором векторном подпространстве в $\sum^\oplus_{\alpha\in\mathcal{T}} \mathfrak{u}(n_\alpha)$, выделенном в $\sum^\oplus_{\alpha\in\mathcal{T}} \mathfrak{u}(n_\alpha)$ при помощи соотношений

$$\sum_{\alpha, i_\alpha, j_\alpha} \tilde{a}^\alpha_{i_\alpha j_\alpha} = 0,$$

где

$$\sum_{\alpha, i_\alpha, j_\alpha} u^\alpha_{i_\alpha j_\alpha} \in \mathcal{R},$$

где $\mathcal{R}$ — идеал, определяющий дифференциальное исчисление Γ. (Мы рассматриваем все матрицы $\tilde{A}^\alpha_{ij}$ одновременно для всех $\alpha \in \mathcal{T}$). Существует некоторая минимальная подалгебра Ли $\mathfrak{g}$ в $\sum^\oplus_{\alpha\in\mathcal{T}} \mathfrak{u}(n_\alpha)$, содержащая указанное подпространство. Конечно, эта подалгебра содержит подалгебру $\sum^\oplus_{\alpha\in\mathcal{T}} \rho_\alpha(lie(G_{cl}))$. Мы можем считать, поэтому, что на каждом векторном расслоении $P_{cl} \times_{\rho_\alpha} \mathbb{C}^{n_\alpha}$ задана линейная связность со значениями в $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}(n_\alpha)$, тогда матрицы $({}_U\tilde{R}^\alpha_{ij})$ определяют кривизну этой связности.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему данного параграфа. Она касается образа гомоморфизма Вейля. В §1.4 мы определили гомоморфизм Вейля в случае, когда на расслоении P задана регулярная связность. Если, однако, квантовое расслоение P локально–тривиально, то все регулярные связности мультипликативны и могут быть интерпретированы как связности на « классической части» P_{cl} расслоения P (см. пункт (*iv*) Теоремы 2.2). Очевидно, что образ гомоморфизма Вейля для таких связностей состоит из характеристических классов расслоений P_{cl}. Мы докажем, что и для произвольных, не обязательно регулярных, связностей верно аналогичное утверждение. Именно, пусть ω — произвольная мультипликативная связность. Тогда, точно так же, как и в §1.4, мы можем определить отображение $R^{\otimes}_{\omega} : \Gamma^{\otimes}_{inv} \to \Omega(\mathcal{M})$. (В случае немультипликативной связности алгебру $\Gamma^{\otimes}_{inv}$ следует заменить на $(\ker \epsilon)^{\otimes}_{inv}$ и рассматривать отображение $\tilde{R}^{\otimes}_{\omega}$). Тогда справедлива

Теорема 2.5. *Пусть элемент* $I_{\otimes} \ni \tilde{\theta} = \sum\limits_{i} \theta^1_i \otimes \cdots \otimes \theta^n_i$ *(соответственно* $\tilde{a} \in (\ker \epsilon)^{\otimes}_{inv}$ *) таков, что для любой (необязательно регулярной) связности* ω *на любом локально–тривиальном квантовом расслоении* P, $d(R^{\otimes}_{\omega}(\tilde{\theta})) = 0$ *(соответственно* $d(\tilde{R}^{\otimes}_{\omega}(\tilde{a})) = 0$*), где* d *— дифференциал в* $\Omega(\mathcal{M}) = \Omega^*(M)$*, то образ* $W(\theta)$ *(соответственно* $\tilde{W}(\tilde{a})$*) лежит в множестве характеристических классов Чженя, классической части* P_{cl} *расслоения* P.

Доказательство. Прежде всего заметим, что образ $R^{\otimes}_{\omega}(I_{\otimes})$ (и $\tilde{R}^{\otimes}_{\omega}((\ker \epsilon)^{\otimes}_{inv})$) для любой связности ω лежит во множестве дифференциальных форм, которые на каждой карте U расслоения представляются в виде полинома от элементов матриц F^{α}_{U}, $\alpha \in \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$. Во-вторых, эти полиномы инвариантны при замене матриц F^{α}_{U} на сопряженные матрицы $R^{-1} F^{\alpha}_{U} R$, $R \in \rho_{\alpha}(\mathcal{A}_{cl})$, хотя вообще говоря не инвариантны при такой замене для произвольной унитарной матрицы R. Что касается значения внешнего дифференциала от этих форм, то он определяется при помощи тождества Бьянки. Поэтому утверждение теоремы 2.5 является прямым следствием следующего утверждения.

Лемма 2.6. *Если выполняются условия теоремы, то полиномы, задающие локальную запись формы* $R^{\otimes}_{\omega}(\tilde{\theta})$ *(соответственно* $\tilde{R}^{\otimes}_{\omega}(\tilde{a})$*) инвариантны относительно сопряжений произвольными унитарными матрицами (соответственно, относительно сопряжений произвольными элементами из компоненты единицы группы Ли* $G_{\alpha} \subseteq U(n_{\alpha})$*, соответствующей подалгебре Ли* $\mathfrak{g}_{\alpha} \subseteq \mathfrak{u}(n_{\alpha})$*).*

Доказательство. Мы докажем только первое утверждение, второе доказывается полностью аналогично.

Во–первых, так как равенство $dR^{\otimes}_{\omega}(\tilde{\theta}) = 0$ достаточно проверять локально, то мы вправе предположить, что расслоение тривиальное, и рассматривать только одну карту U. Поэтому в дальнейшем мы не будем указывать какой карте соответствует матрица, представляющая кривизну. Мы будем писать просто F^{α} вместо F^{α}_{U} (тут α — неприводимое представление квантовой группы, отличное от тождествнного).

Предположим, что в выражение для $R^{\otimes}_{\omega}(\tilde{\theta})$ входят коэффициенты только одной матрицы F^{α} (то есть фиксируем на время представление). Пусть $p(t_{ij})$ — многочлен от комплексных переменных t_{ij}, такой что $R^{\otimes}_{\omega}(\tilde{\theta}) = p(F^{\alpha}_{ij})$. В силу того, что для всех i, j $\deg F^{\alpha}_{ij} = 2$, получаем

$$dp(F^{\alpha}_{ij}) = \sum_{i,j} \frac{\partial p}{\partial F^{\alpha}_{ij}} dF^{\alpha}_{ij} = 0. \tag{2.10}$$

Из тождества Бьянки следует

$$dF^{\alpha}_{ij} = -\sum_{k} \{F^{\alpha}_{ik} \wedge A^{\alpha}_{kj} - A^{\alpha}_{ik} \wedge F^{\alpha}_{kj}\}$$

и, подставляя это в выражение (2.10),

$$0 = \sum_{i,j} \frac{\partial p}{\partial F^{\alpha}_{ij}} dF^{\alpha}_{ij} = \sum_{i,j} \frac{\partial p}{\partial F^{\alpha}_{ij}} \sum_{k} \{A^{\alpha}_{ik} \wedge F^{\alpha}_{kj} - F^{\alpha}_{ik} \wedge A^{\alpha}_{kj}\}.$$

Выберем некоторый базис $\{e_i\}$ в пространстве косоэрмитовых матриц нужного порядка над $\mathbb{C}$ и пусть f^i, a^i, $i = 1, \dots, m$ — коэффициенты разложения матриц F^α, A^α по этому базису, $f^i = f^i(a^1, \dots a^m) \in \Omega^2(U)$, $a^i \in \Omega^1(U)$. Тогда мы сможем переписать последнее выражение в терминах f^i, a^i, работая с ними, как с формальными переменными (ведь все f^i коммутируют между собой и со всеми a^i, и в каждый моном входит не больше одного a^i, см.(2.10)). Получим:

$$0 = \sum_i Q_i(f^1, \dots, f^m)a^i. \tag{2.11}$$

Нам нужно доказать, что из предположения о том, что последнее равенство выполнено для любого набора 1–форм a^j следует, что $Q_i \equiv 0$ для всех i. Для этого вспомним, что

$$A^\alpha = \sum_i e_i \otimes a^i,$$
$$F^\alpha = dA^\alpha - A^\alpha \wedge A^\alpha = \sum_i e_i \otimes da^i - \sum_{i<j} [e_i, e_j] \otimes a^i \wedge a_j.$$

Предположим, что для некоторого k, скажем, для $k = 1$, многочлен $Q_k \neq 0$. Тогда выберем

$$a^1 = dx^1 + R^1(x^2, \dots, x^n, dx^2, \dots, dx^n),$$
$$a^j = R^j(x^2, \dots, x^n, dx^2, \dots, dx^n), j = 2, \dots, m,$$

где R^l, $l = 1, \dots, m$ — 1–формы, такие что в некоторой точке x_0: $R^j(x_0) = 0$, $dR^j(x_0) = 0$. Тогда в этой точке

$$F^\alpha(x_0) = \sum_i e_i \otimes f^i(x_0) = \sum_i e_i \otimes dR^i(x_0),$$

и значит (2.11) превращается в этой точке в равенство

$$0 = Q_1(dR^1(x_0), \dots, dR^m(x_0))dx^1.$$

Далее, пусть $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ ($n = \dim M$) — базис в $\Lambda^1(T^*_{x_0}M)$, $\xi_i = dx^i$. Тогда последнее равенство переписывается в форме

$$Q_1(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)\xi_1 = 0,$$

где $\eta_i \in \Lambda^2(\xi_1, \dots, \xi_n)$, причем в выражения для η_i не входит ξ_1. Но ясно, что подходящим выбором η_i можно добиться, чтобы $Q_1(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m) \neq 0$. Тогда $Q_1(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)\xi_1 \neq 0$. Противоречие.

Итак, многочлены Q_i, входящие в (2.11) тождественно равны нулю. Поэтому для любых двух косоэрмитовых матриц A и B выполняется равенство:

$$\sum_{i,j} \frac{\partial p}{\partial A_{ij}} \sum_k \{B_{ik}A_{kj} - A_{ik}B_{kj}\} = \sum_{i,j} \frac{\partial p}{\partial A_{ij}} [B, A]_{ij} = 0,$$

где $p = p(A_{ij}) = p(A)$ — многочлены от матричных элементов. Но, как известно,

$$[B, A] = \frac{d}{dt|_{t=0}} \hat{B}^{-1}(t) A \hat{B}(t).$$

Здесь $\hat{B} = e^{tB}$, $\hat{B}^{-1} = e^{-tB}$. Положим $q(t) = p(\hat{B}^{-1})(t)A\hat{B}(t) = p(\hat{A}(t))$. Тогда мы можем найти производную $q(t)$. Заметим, что при всех t матрица $\hat{B}^{-1}(t)A\hat{B}(t) = \hat{A}(t)$ — косоэрмитова, поэтому

$$q'(t_0) = \frac{dp(\hat{A}(t))}{dt}\Big|_{t=t_0} = \sum_{i,j} \frac{\partial p}{\partial \hat{A}_{ij}}\Big|_{t=t_0} \frac{d\hat{A}_{ij}(t)}{dt}\Big|_{t=t_0}.$$

Но

$$\frac{d\hat{A}_{ij}(t)}{dt}\Big|_{t=t_0} = \left(\frac{d\hat{A}}{dt}\Big|_{t=t_0}\right)_{ij}.$$

И

$$\frac{d\hat{A}}{dt}\Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} e^{-tB}Ae^{tB} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{-(t_0+t)B}Ae^{(t_0+t)B} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{-tB}Ce^{tB} = [B, C],$$

где $C = e^{-t_0B}Ae^{t_0B} = \hat{A}(t_0)$, поэтому

$$q'(t_0) = \sum_{i,j} \frac{\partial p}{\partial C_{ij}}[B, C]_{ij} = 0.$$

Итак, $q(t) = \mathrm{const} = q(0) = p(A)$. Так как множество унитарных матриц вида e^B порождает всю группу $U(n_\alpha)$, то тем самым мы доказали утверждение в данном случае.

В случае, когда мы не фиксируем $\alpha \in \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\}$, и в случае, когда вместо косоэрмитовых матриц рассматривается другая матричная алгебра Ли, рассуждения полностью ангалогичны (таким образом утверждение Леммы верно и для $\widetilde{R}^{\otimes}_{\omega}(\widetilde{a})$). Лемма доказана. ☐

Утверждение теоремы теперь следует из определения гомоморфизма Вейля классического главного расслоения. ☐

В заключение этого параграфа отметим, что может случиться, что в образе $R^{\otimes}_{\omega}(I_{\otimes})$ (или $\widetilde{R}^{\otimes}_{\omega}((\ker\epsilon)^{\otimes}_{inv})$) вообще не содержится замкнутых форм.

2.2 Полуклассические дифференциальные исчисления

Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная унитальная (необязательно коммутативная) алгебра. В работах [18], [19] построена дифференицальная градуированная алгебра $\Omega_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M})$, которую мы будем использовать в дальнейшем. Опишем поэтому конструкции, предложенные в указанных статьях.

Пусть $\mathcal{M}$ — ассоциативная алгебра с единицей (не обязательно коммутативная). Пусть $\mathcal{Z}$ — коммутативная подалгебра в $\mathcal{M}$, лежащая в центре алгебры $\mathcal{M}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$; $\mathfrak{Der}(\mathcal{M})$ — дифференцирования алгебры $\mathcal{M}$, т.е.

$$\mathfrak{Der}(\mathcal{M}) = \{X \in \mathrm{Hom}_K(\mathcal{M}, \mathcal{M}) \mid X(ab) = X(a)b + aX(b)\},$$

где K — основное поле ($\mathbb{C}$ в нашем случае).

Очевидно, что правила

$$(zX)(m) = zX(m), \qquad (Xz)(m) = X(m)z,$$

для любого $X \in \mathfrak{Der}(\mathcal{M})$, $z \in \mathcal{Z}$, $m \in \mathcal{M}$, задают над $\mathfrak{Der}(\mathcal{M})$ структуру коммутативного бимодуля над $\mathcal{Z}$, т.е.

$$zX = Xz, \qquad \forall X \in \mathfrak{Der}(\mathcal{M}),\ z \in \mathcal{Z}.$$

Кроме того, пусть X, $Y \in \mathfrak{Der}(\mathcal{M})$ — произвольные дифференцирования алгебры $\mathcal{M}$. Положим

$$[X, Y](m) = X(Y(m)) - Y(X(m)).$$

Тогда

$$\begin{aligned}[X, Y](m_1 m_2) &= X(Y(m_1)m_2 + m_1 Y(m_2)) - Y(X(m_1)m_2 + m_1 X(m_2)) = \\ &= X(Y(m_1))m_2 + Y(m_1)X(m_2) + X(m_1)Y(m_2) + m_1 X(Y(m_2)) - \\ &- Y(X(m_1))m_2 - X(m_1)Y(m_2) - Y(m_1)X(m_2) - m_1 Y(X(m_2)) = \\ &[X(Y(m_1)) - Y(X(m_1))]m_2 + m_1[X(Y(m_2)) - Y(X(m_2))] = \\ &= [X, Y](m_1)m_2 + m_1[X, Y](m_2),\end{aligned}$$

т.е. $[X, Y] \in \mathfrak{Der}(\mathcal{M})$. Очевидно, что операция $[,]$ задает на $\mathfrak{Der}(\mathcal{M})$ структуру алгебры Ли над K.

Рассмотрим внешнюю алгебру

$$\Lambda^*_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M}) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \Lambda^n_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M}),$$

где $\Lambda^0_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M}) = K$, $\Lambda^n_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M}) = \Lambda^n(\mathfrak{Der}(\mathcal{M}))\Big/\!\sim$, где $\Lambda^n(\mathfrak{Der}(\mathcal{M}))$ — обычная внешняя степень векторного пространства $\mathfrak{Der}(\mathcal{M})$, рассматриваемая естественным образом как бимодуль над $\mathcal{Z}$, а отношение эквивалентности определяется равенствами

$$\begin{aligned}z(X_1 \wedge \cdots \wedge X_n) &= zX_1 \wedge \cdots \wedge X_n = \\ &= X_1 \wedge zX_2 \wedge \cdots \wedge X_n = \cdots = \\ &= X_1 \wedge \cdots \wedge zX_r \wedge \cdots \wedge X_n = \\ &= \cdots = X_1 \wedge \cdots \wedge zX_n = (X_1 \wedge \cdots \wedge X_n)z\end{aligned}$$

для любых $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{Der}(\mathcal{M})$, $z \in \mathcal{Z}$.

Рассмотрим теперь градуированное пространство

$$\Omega^*_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M}) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \Omega^n_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M}),$$

где

$$\begin{aligned}\Omega^0_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M}) &= \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathcal{M}) = \mathcal{M}, \\ \Omega^n_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M}) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M}), \mathcal{M}), \quad n \geqslant 1.\end{aligned}$$

Пусть $\omega_1 \in \Omega^n_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M})$, $\omega_2 \in \Omega^m_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M})$ — произвольные элементы. Определим элемент $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega^{n+m}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M})$ при помощи формулы

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(X_1, \ldots, X_{m+n}) = \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_n \\ j_1 < \cdots < j_m}} (-1)^{\varepsilon(\pi)} \omega_1(X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}) \omega_2(X_{j_1}, \ldots, X_{j_m}), \tag{2.12}$$

где $\varepsilon(\pi)$ — знак перестановки $\pi \in \Sigma_{n+m}$, $\pi(k) = i_k$, $k = 1, \ldots, n$, $\pi(n + k) = j_k$, $k = 1, \ldots, m$, если n, $m \geqslant 1$; если $\omega_1 = a \in \mathcal{M}$, то

$$(a\omega_2(X_1, \ldots, X_m)) = a \cdot \omega_2(X_1, \ldots, X_m),$$

и, аналогично, если $\omega_2 = b \in \mathcal{M}$, то

$$(\omega_1 b(X_1, \dots, X_n)) = \omega_1(X_1, \dots, X_n) \cdot b.$$

Определим для произвольного элемента $\omega \in \Omega^n_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M})$, $n \geqslant 1$, элемент $d\omega \in \mathrm{Hom}(\Lambda^{n+1}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M}), \mathcal{M})$,

$$(d\omega)(X_1, \dots, X_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{n+1})) + \\ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{n+1}),$$

где $\widehat{\ }$ означает пропуск элемента.

Следующая теорема доказана в работе [18].

Теорема 2.7.

(*i*) *Отображение*

$$\begin{aligned} \wedge : \quad & \Omega^*_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M}) \otimes \Omega^*_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M}) \to \Omega^*_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M}) \\ & \omega_1 \otimes \omega_2 \mapsto \omega_1 \wedge \omega_2, \end{aligned}$$

превращает пространство $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M})$ в градутированную (но, вообще говоря, некоммутативную) алгебру.

(*ii*) *Для любого $\omega \in \Omega^n_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M})$, $n \geqslant 1$*

$$d\omega \in \Omega^{n+1}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M}).$$

(*iii*) *Если положить $(da)(X) = X(a)$, для любого $a \in \mathcal{M} = \Omega^0_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M})$, то будет выполняться равенство $d^2\omega = 0$, для любого $\omega \in \Omega^*_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M})$.*

(*iv*) *Для любых $\omega_1 \in \Omega^n_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M})$ и $\omega_2 \in \Omega^m_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M})$ выполняется равенство*

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^n \omega_1 \wedge d(\omega_2).$$

Таким образом, пространство $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M})$ превращается в дифференциальную градуированную алгебру.

В случае, если $\mathcal{M}$ — унитальная $*$–алгебра, следует потребовать, чтобы $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{M})$ состояла из $*$–инвариантных (эрмитовых) элементов. Вместо алгебры Ли всех дифференцирований мы будем рассматривать эрмитовы дифференцирования, то есть

$$\mathfrak{Der}_h(\mathcal{M}) = \{X \in \mathfrak{Der}(\mathcal{M}) \mid X(a^*) = X(a)^*, \quad \forall a \in \mathcal{M}\}.$$

Ясно, что $\mathfrak{Der}_h(\mathcal{M})$ является подалгеброй Ли в $\mathfrak{Der}(\mathcal{M})$ и одновременно $\mathcal{Z}$–подмодулем в $\mathfrak{Der}(\mathcal{M})$.

Можно построить дифференциальную градуированную алгебру $\Omega^*_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M})$,

$$\Omega^*_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \Omega^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}),$$

где

$$\begin{aligned} &\Omega^0_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \\ &\Omega^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{Der}_h(\mathcal{M})), \mathcal{M}), \quad n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Умножение и дифференциал в алгебре $\Omega^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M})$ задаются теми же самыми формулами, что и умножение и дифференциал в $\Omega^n_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M})$.

Предложение 2.8. *Формула*

$$\begin{array}{l}(\omega^*)(X_1,\dots,X_n)=(\omega(X_1,\dots,X_n))^*, \quad \omega\in\Omega^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), n\geqslant 1, \text{ и}\\ (a)^*=a^*, \quad a\in\Omega^0_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M})=\mathcal{M}\end{array} \tag{2.13}$$

задает на $\Omega^*_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M})$ *структуру градуированной* $*$*–алгебры, совпадающую на* $\Omega^0_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M})$ *со* $*$*–структурой на* $\mathcal{M}$.

Доказательство. Второе утверждение предложения 2.8 очевидно. Докажем первое.

Прежде всего, если $n\geqslant 1$, то, очевидно,

$$\begin{aligned}\omega^*(zX_1,\dots,X_n)=(\omega(zX_1,\dots,X_n))^*=&\\ =(zw(X_1,\dots,X_n))^*=(\omega(X_1,\dots,X_n))^*z^*=&\\ z(w(X_1,\dots,X_n))^*=z\omega^*(X_1,\dots,X_n),&\end{aligned}$$

то есть $\omega^*\in\Omega^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M})$. Далее, если $\omega_1\in\Omega^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M})$, $\omega_2\in\Omega^m_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M})$, $n,m\geqslant 1$ — произвольные элементы, то

$$\begin{aligned}(\omega_1\wedge\omega_2)^*(X_1,\dots,X_{m+n})=((\omega_1\wedge\omega_2)(X_1,\dots,X_{m+n}))^*=&\\ \left(\sum_{\substack{i_1<\dots<i_n\\ j_1<\dots<j_m}}(-1)^{\varepsilon(\pi)}\omega_1(X_{i_1},\dots,X_{i_n})\omega_2(X_{j_1},\dots,X_{j_m})\right)^*=&\\ =\sum_{\substack{i_1<\dots<i_n\\ j_1<\dots<j_m}}(-1)^{\varepsilon(\pi)}\omega_2^*(X_{j_1},\dots,X_{j_m})\omega_1^*(X_{i_1},\dots,X_{i_n})=&\\ =(-1)^{\varepsilon(\tau)}(\omega_2^*\wedge\omega_1^*)(X_1,\dots,X_{m+n}),&\end{aligned}$$

где τ — перестановка, $\tau\in\Sigma_{m+n}$, τ меняет местами блок, состоящий из первых n элементов с блоком, состоящим из последних m элементов (элементы внутри блоков не перемещаются). Несложно видеть, что $\varepsilon(\tau)=(-1)^{mn}$, то есть выполняется равенство

$$(\omega_1\wedge\omega_2)^*=(-1)^{\deg\omega_1\cdot\deg\omega_2}\omega_2^*\wedge\omega_1^*. \tag{2.14}$$

Наконец, покажем, что $d(\omega^*) = (d\omega)^*$ для любого $\omega \in \Omega^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M})$, $n \geqslant 1$. В самом деле,

$$(d\omega)^*(X_1,\ldots,X_{n+1}) = (d\omega(X_1,\ldots,X_{n+1}))^* =$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}X_i(\omega(X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_{n+1}))\right)^* +$$
$$+\left(\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_{n+1})\right)^* =$$
$$=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\Big(X_i(\omega(X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_{n+1}))\Big)^* +$$
$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\Big(\omega([X_i,X_j],X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_{n+1})\Big)^* =$$
$$=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}X_i\Big((\omega(X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_{n+1}))^*\Big) +$$
$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega^*([X_i,X_j],X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_{n+1}) =$$
$$=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}X_i(\omega^*(X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_{n+1}))+$$
$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega^*([X_i,X_j],X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_{n+1}) =$$
$$= d(\omega^*)(X_1,\ldots,X_{n+1}).$$

Это равенство верно для любых $X_1,\ldots,X_{n+1} \in \mathfrak{Der}_h(\mathcal{M})$, значит, верно, что $d(\omega^*) = (d\omega)^*$.

До сих пор все дифференциальные формы, которые мы рассматривали, были положительной степени, поэтому для окончания доказательства осталось заметить, что если степень одной из двух форм ω_1, ω_2 равна нулю, то равенство (2.14) выполняется автоматически. □

Вернемся теперь к главным квантовым расслоениям. Пусть $P = (\mathcal{B}, F)$ — главное квантовое расслоение со структурной группой $\mathcal{A}$ и базой $\mathcal{M}$. Выберем в коммутативной алгебре $\mathcal{Z}(\mathcal{B})\cap\mathcal{M}$ подалгебру $\mathcal{Z}$, состоящую из эрмитовых (т.е. $z^* = z$) элементов. Пусть $\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M})$ обозначает внешнюю алгебру, построенную по $\mathfrak{Der}_h(\mathcal{M})$ и $\mathcal{Z}$.

Рассмотрим градуированное пространство

$$\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}),\mathcal{B})$$

(напомним, что $\Lambda^0_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}) = \mathbb{C}$, и значит, при $n = 0$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}\,\Lambda^0_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}),\mathcal{B}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{C},\mathcal{B}) = \mathcal{B}$). Отображение $F : \mathcal{B} \to \mathcal{B}\otimes\mathcal{A}$ индуцирует отображение градуированных пространств

$$F_* : \bigoplus_{n\geqslant 0}\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}),\mathcal{B}) \to \bigoplus_{n\geqslant 0}\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}),\mathcal{B}\otimes\mathcal{A}).$$

Заметим, что существует очевидное вложение для любого $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}),\mathcal{B})\otimes\mathcal{A} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}),\mathcal{B}\otimes\mathcal{A}).$$

Теорема 2.9. *Пространство* $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P) = \bigoplus\limits_{n\geqslant 0} \mathfrak{hor}^n_{sc}(P)$, *где*

$$\mathfrak{hor}^n_{sc}(P) = F_*^{-1}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{B}) \otimes \mathcal{A})$$

является градуированной $*$–алгеброй, на которой справа кодействует квантовая группа $\mathcal{A}$.

Доказательство. Заметим, что формулы, аналогичные (2.12) и (2.13) превращает пространство $\bigoplus\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{B})$ в градуированную $*$–алгебру. Докажем, что $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$ будет $*$–подалгеброй в $\bigoplus\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{B})$ относительно введенного умножения и $*$–структуры.

В самом деле, в пространстве $\bigoplus\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{B} \otimes \mathcal{A})$ точно таким же способом можно ввести стуктуру градуированной $*$–алгебры. Так как отображение $F : \mathcal{B} \to \mathcal{B}\otimes\mathcal{A}$ является гомоморфизмом $*$–алгебр, то и отображение F_*, рассмотренное выше, будет гомоморфизмом $*$–алгебр. С другой стороны, очевидно, что $\big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{B})\big) \otimes \mathcal{A}$ — $*$–подалгебра в $\bigoplus\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{B} \otimes \mathcal{A})$. Поэтому прообраз этой подалгебры относительно гомоморфизма F_* будет $*$–подалгеброй в $\bigoplus\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{B})$.

Докажем теперь, что на $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$ справа кодействует квантовая группа $\mathcal{A}$. Но, в самом деле, ограничение гомоморфизма F_* на $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$ задает отображение

$$F_\wedge : \mathfrak{hor}^*_{sc}(P) \to \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{B}) \otimes \mathcal{A}.$$

Покажем, что на самом деле

$$F_\wedge(\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)) \subseteq \mathfrak{hor}^*_{sc}(P) \otimes \mathcal{A}.$$

Для этого рассмотрим отображение

$$(F \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}})_* : \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}) \to \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}^{\otimes 2}).$$

На подалгебре

$$\left(\bigoplus_{n\geqslant 0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{B})\right) \otimes \mathcal{A} \subseteq \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{B} \otimes \mathcal{A})$$

это отображение, очевидно, совпадает с

$$F_* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}} : \left(\bigoplus_{n\geqslant 0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{B})\right) \otimes \mathcal{A} \to \left(\bigoplus_{n\geqslant 0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{B} \otimes \mathcal{A})\right) \otimes \mathcal{A}.$$

Таким образом, чтобы доказать последнее утверждение, нам достаточно показать, что

$$(F \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}})_* \left(F_\wedge(\mathfrak{hor}^*_{sc}(P))\right) \subseteq \left(\bigoplus_{n\geqslant 0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{B})\right) \otimes \mathcal{A}^{\otimes 2}.$$

Но $F_\wedge = F_*|_{\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)}$, а, с другой стороны

$$(F \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}})_* F_* = ((F \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}})F)_* = ((\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \phi)F)_* = (\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \otimes \phi)_* F_*.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}(F\otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}})_*(F_\wedge(\mathfrak{hor}^*_{sc}(P))) &= (\mathrm{id}_{\mathcal{B}}\otimes\phi)_*(F_\wedge(\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)))\subseteq\\ &\subseteq (\mathrm{id}_{\mathcal{B}}\otimes\phi)_*\left[\left(\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}),\mathcal{B})\right)\otimes\mathcal{A}\right]=\\ &= ((\mathrm{id}_{\mathcal{B}})_*\otimes\phi)\left[\left(\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}),\mathcal{B})\right)\otimes\mathcal{A}\right]\subseteq\\ &\subseteq\left[\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}),\mathcal{B})\right]\otimes\mathcal{A}^{\otimes 2}.\end{aligned}$$

Итак,

$$F_\wedge(\mathfrak{hor}^*_{sc}(P))\subseteq\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)\otimes\mathcal{A}.$$

То, что $F_\wedge$ является гомоморфизмом градуированных $*$–алгебр, следует из аналогичных свойств отображения F_*, равно как и выполнение свойств

$$(F_\wedge\otimes\mathrm{id})F_\wedge=(\mathrm{id}\otimes\phi)F_\wedge,\qquad(\mathrm{id}\otimes\epsilon)F_\wedge=\mathrm{id}.$$

□

Определение 2.3. Алгебру $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$ мы будем называть алгеброй полуклассических дифференциальных форм на расслоении P. Аналогично, дифференциальную градуированную $*$–алгебру $\Omega^*_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M})$, построенную по $\mathfrak{Der}_h(\mathcal{M})$ и $\mathcal{Z}\subseteq\mathcal{Z}(\mathcal{B})\cap\mathcal{M}$, $\mathcal{Z}$ состоит из эрмитовых элементов, мы будем называть алгеброй полуклассических диффеpеницальных форм на $\mathcal{M}$ (приставка "полу–" указывает на то, что $\mathcal{M}$ — некоммутативная алгебра), обозначается $\Omega_{sc}(\mathcal{M})$.

Следующая теорема описывает важнейшие свойства алгебры $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$.

Теорема 2.10.

(i) *Алгебра $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$ представляется в виде прямой суммы правых $\mathcal{A}$–комодулей, являющихся градуированными $\Omega_{sc}(\mathcal{M})$–бимодулями:*

$$\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)=\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{T}}\mathcal{H}^\alpha,$$

где

$$\mathcal{H}^\alpha\simeq(\Omega_{sc}(\mathcal{M})\otimes_{\mathcal{M}}\mathcal{E}^\alpha)\otimes H_\alpha$$

, как левый $\Omega_{sc}(\mathcal{M})$–модуль, и

$$\mathcal{H}^\alpha\simeq(\mathcal{E}^\alpha\otimes_{\mathcal{M}}\Omega_{sc}(\mathcal{M}))\otimes H_\alpha$$

, как правый $\Omega_{sc}(\mathcal{M})$–модуль. ($\alpha\in\mathcal{T}$ — набор неэквивалентных неприводимых представлений квантовой группы $\mathcal{A}$, $\mathcal{E}^\alpha$ — векторное расслоение, ассоциированное с P при помощи представления α, $H_\alpha=\mathbb{C}^{n_\alpha}$ — векторное пространство, на котором действует представление α).

В частности, $*$–алгебра $\mathcal{A}$–инвариантных элементов в $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$, $\mathcal{H}^\varnothing$ совпадает с $\Omega_{sc}(\mathcal{M})$.

(ii) *Справедливы следующие разложения* $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$ *в тензорные произведения:*

$$\Omega_{sc}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{B} \cong \mathfrak{hor}^*_{sc}(P) \simeq \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{M}} \Omega_{sc}(\mathcal{M}), \tag{2.15}$$

причем левый изоморфизм является изоморфизмом левых градуированных $\Omega_{sc}(\mathcal{M})$*–модулей, а правый изоморфизм — изоморфизм правых градуированных* $\Omega_{sc}(\mathcal{M})$*–модулей.*

Доказательство.
(i) Воспользуемся изоморфизмом

$$D \,\square_C\, C \cong D,$$

справедливым для любого правого комодуля D над коалгеброй C.

Тогда

$$\mathfrak{hor}^*_{sc}(P) \cong \mathfrak{hor}^*_{sc} \,\square_{\mathcal{A}}\, \mathcal{A} \cong \mathfrak{hor}^*_{sc} \,\square_{\mathcal{A}} \left(\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{T}} \tilde{H}^\alpha \right) \cong \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{T}} \left(\mathfrak{hor}^*_{sc}(P) \,\square_{\mathcal{A}}\, \tilde{H}^\alpha \right),$$

где $\tilde{H}^\alpha$ — подпространство в $\mathcal{A}$, порожденное элементами u^α_{ij}, $i, j = 1, \dots, n_\alpha$ матрицы u^α, задающей представление α. Как указано в главе 1 (§1.5), $\tilde{H}^\alpha \cong H^\top_\alpha \otimes H_\alpha$ как бикомодуль над $\mathcal{A}$, поэтому

$$\mathfrak{hor}^*_{sc}(P) \,\square_{\mathcal{A}}\, \tilde{H}^\alpha \cong \left(\mathfrak{hor}^*_{sc}(P) \,\square_{\mathcal{A}}\, H^\top_\alpha \right) \otimes H_\alpha,$$

как правый $\mathcal{A}$–комодуль. Очевидно, что умножение на элементы $\Omega_{sc}(\mathcal{M}) \subseteq \mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$, задает на пространстве $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P) \square_{\mathcal{A}} H^\top_\alpha$ структуру градуированного бимодуля над $\Omega_{sc}(\mathcal{M})$. Мы покажем, что, как левый $\Omega_{sc}(\mathcal{M})$–модуль, $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P) \square_{\mathcal{A}} H^\top_\alpha$ изоморфен $\Omega_{sc}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}^\alpha$, а как правый $\Omega_{sc}(\mathcal{M})$–модуль, $\mathcal{E}^\alpha \otimes_{\mathcal{M}} \Omega_{sc}(\mathcal{M})$.

В самом деле, пусть $\sum\limits_{k=1}^{n_\alpha} \omega_k \otimes e_k \in \mathfrak{hor}^n_{sc}(P) \,\square_{\mathcal{A}}\, H^\top_\alpha$, где $\omega_k \in \mathfrak{hor}^n_{sc}(P)$, e_k — базис в $H^\top_\alpha$. Это значит, что $\sum\limits_{k=1}^{n_\alpha} F_\wedge(\omega_k) \otimes e_k = \sum\limits_{j,k=1}^{n_\alpha} \omega_k \otimes u^\alpha_{kj} \otimes e_j$.

Сравнивая коэффициенты при e_k, получаем, что

$$F_\wedge(\omega_k) = \sum_{j=1}^{n_\alpha} \omega_j \otimes u^\alpha_{jk}.$$

Из этого следует, в частности, что, если форма $\omega \in \mathfrak{hor}^n_{sc}(P)$ входит в разложение ненулевого элемента из $\mathfrak{hor}^n_{sc}(P) \,\square_{\mathcal{A}}\, H^\top_\alpha$, то

$$F_\wedge(\omega) \in \mathfrak{hor}^n_{sc}(P) \otimes \tilde{H}_\alpha. \tag{2.16}$$

С другой стороны, пусть $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{der}_h(\mathcal{M})$ — произвольные элементы. Из вложения (2.16) следует, что

$$F(\omega(X_1, \dots, X_n)) \in \mathcal{B} \otimes \tilde{H}_\alpha,$$

где F — кодействие $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$.

Отсюда следует, что

$$\omega(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{B}^\alpha \quad \text{для любых} \quad X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{der}_h(\mathcal{M}),$$

где $\mathcal{B}^\alpha \subseteq \mathcal{B}$ — подпространство, такое что $F(\mathcal{B}^\alpha) \subseteq \mathcal{B} \otimes \widetilde{H}_\alpha$. Как следует из результатов главы 1, $\mathcal{B} \cong \mathcal{E}^\alpha \otimes H_\alpha$. Поэтому для ω вышеуказанного типа

$$\omega \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{B}^\alpha) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{B}),$$

где, при этом, очевидно

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{B}^\alpha) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{E}^\alpha \otimes H_\alpha) \cong \\ \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{E}^\alpha) \otimes H_\alpha \subseteq \mathfrak{hor}^n_{sc}(P). \quad (2.17)$$

Значит,

$$\mathfrak{hor}^n_{sc}(P) \,\square_{\mathcal{A}}\, H_\alpha^\top \subseteq \big(\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{E}^\alpha) \otimes H_\alpha\big) \,\square_{\mathcal{A}}\, H_\alpha^\top \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{E}^\alpha),$$

так как $H_\alpha \,\square_{\mathcal{A}}\, H_\alpha^\top = \mathbb{C}$.

С другой стороны, в силу вложения (2.17)

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{E}^\alpha) \subseteq \mathfrak{hor}^n_{sc}(P) \,\square_{\mathcal{A}}\, H_\alpha^\top,$$

и, значит,

$$\mathfrak{hor}^*_{sc}(P) \,\square_{\mathcal{A}}\, H_\alpha^\top \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^*_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{E}^\alpha).$$

Осталось доазать, что

$$\Omega_{sc}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}^\alpha \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^*_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{E}^\alpha) \cong \mathcal{E}^\alpha \otimes_{\mathcal{M}} \Omega_{sc}(\mathcal{M}).$$

Достаточно показать, что для любого $n \geqslant 1$

$$\Omega^n_{sc}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}^\alpha \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}^\alpha \cong \\ \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{E}^\alpha),$$

и аналогично для правого разложения (для $n = 0$ утверждение очевидно). Для этого вспомним, что $\mathcal{E}^\alpha$ — проективный конечнопорожденный левый модуль над $\mathcal{M}$, и одновременно правый конечнопорожденный проективный модуль над $\mathcal{M}$, и воспользуемся следующим хорошо известным утверждением

Лемма 2.11. *Пусть E — конечнопорожденной проективный правый модуль над произвольной унитальной алгеброй $\mathcal{M}$, H — произвольный бимодуль над коммутативной алгеброй $\mathcal{Z} \subseteq Z(\mathcal{M})$. Тогда справедливо разложение*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, E) \cong E \otimes_{\mathcal{M}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, \mathcal{M}).$$

Доказательство. Пусть сначала E — произвольный правый $\mathcal{M}$ — модуль. Рассмотрим очевидное отображение

$$\varphi_E : E \otimes_{\mathcal{M}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, \mathcal{M}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, E), \\ (\varphi_E(e \otimes f))(h) = ef(h), \quad e \in E,\ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(H, \mathcal{M}),\ h \in H$$

(корректность этого определения проверяется элементарным образом). Очевидно также, что φ_E является морфизмом правых $\mathcal{M}$–модулей.

Пусть $\psi : E \to E'$ — произвольный морфизм правых модулей над $\mathcal{M}$. Формула

$$(\psi_*(f))(h) = \psi(f(h))$$

задает морфизм $\psi_* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(H,E) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(H,E')$ правых $\mathcal{M}$–модулей. Очевидно, что отображение φ_E естественно относительно ψ и ψ_*, то есть коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
E \otimes_{\mathcal{M}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(H,\mathcal{M}) \arrow[r, "\varphi_E"] \arrow[d, "\psi\otimes\mathrm{id}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(H,E) \arrow[d, "\psi_*"] \\
E' \otimes_{\mathcal{M}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(H,\mathcal{M}) \arrow[r, "\varphi_{E'}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(H,E').
\end{tikzcd}$$

Наконец, ясно, что для любого свободного конечнопорожденного модуля $\mathcal{M}^n$, $\varphi_{\mathcal{M}^n}$ — изоморфизм.

Пусть теперь E — проективный конечнопорожденный модуль, то есть существует свободный конечнопорожденный модуль $\mathcal{M}^n$, и отображения модулей

$$i : E \to \mathcal{M}^n, \qquad p : \mathcal{M}^n \to E,$$

такие, что $p \circ i = \mathrm{id}$.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
E \otimes_{\mathcal{M}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(H,\mathcal{M}) \arrow[r, "i\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\varphi_E"] & \mathcal{M}^n \otimes_{\mathcal{M}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(H,\mathcal{M}) \arrow[r, "p\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{M}^n}"] & E \otimes_{\mathcal{M}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(H,\mathcal{M}) \arrow[d, "\varphi_E"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(H,E) \arrow[r, "i_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(H,\mathcal{M}^n) \arrow[r, "p_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(H,E).
\end{tikzcd}$$

Тогда для любого $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(H,E)$

$$f = \mathrm{id}_*(f) = (p\circ i)_*(f) = p_* i_*(f) = \varphi_E(p\otimes \mathrm{id})\varphi^{-1}_{\mathcal{M}^n} i_*(f),$$

и, значит, отображение φ_E — сюръективно (заметим, что эта часть выполняется для произвольного конечнопорожденного модуля E). С другой стороны, φ_E — инъективно, так как $i_* \circ \varphi_E = (i\otimes \mathrm{id}) \circ \varphi_{\mathcal{M}^n}$, причем $\varphi_{\mathcal{M}^n}$ — изоморфизм, а $i \otimes \mathrm{id}$ — инъективное отображение, так как $(p\otimes\mathrm{id})(i\otimes\mathrm{id}) = \mathrm{id}\otimes\mathrm{id}$. Лемма доказана □

Таким образом, пункт (i) доказан.

Пункт (ii) — непосредственное следствие пункта (i) и разложения алгебры $\mathcal{B}$ в прямую сумму $\mathcal{M}$–бимодулей: $\mathcal{B} = \sum^{\oplus}_{\alpha\in\mathcal{T}} \mathcal{B}^\alpha$ □

2.3 Связности в полуклассической теории

Как следует из теорем 2.9 и 2.10, алгебра $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$ удовлетворяет всем условиям, накладываемым на алгебру горизонтальных дифференциальных форм на квантовом главном расслоении (см. теоремы 1.18 и 1.25).

Пусть теперь $\Omega(P)$ — такое дифференциальное исчисление на квантовом главном расслоении P, что алгебра горизонтальных дифференциальных форм этого дифференциального исчисления совпадает с $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$. Тогда, как показано в §1.4, ковариантные дифференцирования D_ω, построенные по регулярным связностям ω на P, являются градуированными антидифференцированиями степени 1 на $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$, такими, что

$$D_\omega(\varphi^*) = D_\omega(\varphi)^*; \tag{2.18}$$

$$F_\wedge D_\omega(\varphi) = (D_\omega \otimes \mathrm{id})F_\wedge(\varphi), \tag{2.19}$$

и $D_\omega|_{\Omega_{sc}(\mathcal{M})} = d_{\mathcal{M}}$, где $d_{\mathcal{M}}$ — дифференциал на $\Omega_{sc}(\mathcal{M})$, индуцированный из $\Omega(P)$.

Мы будем считать, что $d_{\mathcal{M}} = d_{sc}$, где

$$d_{sc} : \Omega^n_{sc}(\mathcal{M}) \to \Omega^{n+1}_{sc}(\mathcal{M}),$$

— дифференциал на $\Omega^*_{sc}(\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^*_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{M})$, описанный в прерыдущем параграфе.

В силу теоремы 1.25, верно и обратное утверждение: для любого подпространства $\mathcal{L}$ в аффинном пространстве $\mathfrak{Der}_{sc}(P)$, состоящем из градуированных антидифференцирований D на $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$, таких, что выполнены условия (2.18), (2.19) и $D|_{\Omega_{sc}(\mathcal{M})} = d_{sc}$, существует такое дифференциальное исчисление $\Omega(P) = \Omega(P, \mathcal{L})$ на главном квантовом расслоении P, что любое дифференцирование D из $\mathcal{L}$ является ковариантным дифференцированием для некоторой регулярной связности на P в дифференциальном исчислении $\Omega(P)$ (конечно, подалгебра горизонтальных дифференциальных форм в $\Omega(P)$ совпадает с $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$).

Итак, изучим антидифференцирование порядка 1 алгебры $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$, удовлетворяющие уравнениям (2.18) и (2.19) и условию $D|_{\Omega_{sc}(\mathcal{M})} = d_{sc}$.

Предложение 2.12. *Любое дифференцирование D, удовлетворяющее указанным условиям, определяет « лифт дифференцирований»: отображение $\mathcal{Z}$–бимодулей*

$$l : \mathfrak{Der}_h(\mathcal{M}) \to \mathfrak{Der}_h(\mathcal{B}),$$

такое, что

$$l(X)(m) = X(m), \qquad \forall m \in \mathcal{M} \tag{2.20}$$

$$F(l(X)(b)) = (l(X) \otimes \mathrm{id})F(b), \qquad \forall b \in \mathcal{B}. \tag{2.21}$$

И наоборот, любое отображение $l : \mathfrak{Der}_h(\mathcal{M}) \to \mathfrak{Der}_h(\mathcal{B})$, удовлетворяющее (2.20) *и* (2.21) *однозначно определяет некоторое антидифференцирование D степени* 1 *градуированной $*$–алгебры $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$, удовлетворяющее вышеуказанным условиям.*

Замечание. В классическом случае, когда $\mathcal{M}$ и $\mathcal{B}$ — алгебры гладких ($\mathbb{C}$–значных) функций на многообразиях M и P, дифференцирования этих алгебр соответствуют $\mathbb{C}$–значным гладким векторным полям на многообразиях. В этом случае все алгебры, входящие в определения — коммутативны, и можно выбрать в качестве $\mathcal{Z}$ алгебру действительнозначных функций на M; эрмитовы дифференцирования в алгебрах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{B}$ — это гладкие действительнозначные векторные поля. В этом случае понятие « лифта дифференцирования» превращается в известное из классической дифференциальной геометрии понятие « лифта векторных полей» (см., например, [16]): для каждого векторного поля X на M, связность τ на главном расслоении P над M позволяет построить единственным образом определенное векторное поле $\widetilde{X}$ на P, такое, что (см. [16]).

1. $\forall g \in G$, $dR_g(\widetilde{X}) = \widetilde{X}$ ($R_g : P \to P$ — отображение, задаваемое как правое действие G на P при помощи элемента g, dR_g — дифференциал этого действия);

2. Пусть $\pi : P \to M$ — проекция. Из 1) следует, что $\pi_*(\widetilde{X}(p))$ не зависит от выбора $p \in \pi^{-1}(x)$ для любого $x \in M$; более того, должно быть выполнено следующее условие:
$$\pi_*(\widetilde{X}(p)) = X(\pi(p)).$$

3. $\widetilde{(fX)} = \pi_*(f)\widetilde{X}$ для любой (действительнозначной) функции f на M, и $\widetilde{X+Y} = \widetilde{X} + \widetilde{Y}$.

Для того, чтобы по классической связности τ на главном расслоении P построить такое отображение, достаточно вспомнить, что связность в классическом случае есть G–инвариантное распределение горизонтальных подпространств в касательном расслоении к P. Очевидно, что и наоборот, любое отображение векторных полей на M в векторные поля на P, $X \mapsto \widetilde{X}$, удовлетворяющее условиям 1) — 3), задает связность на главном расслоении P (горизонтальное подпространство в точке $p \in P$ состоит из векторов $\widetilde{X}(p)$ для всемозможных векторных полей X на M).

Доказательство. Пусть $D : \mathfrak{hor}^*_{sc}(P) \to \mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$ — дифференцирование, удовлетворяющее условиям (2.18), (2.19) и $d|_{\Omega_{sc}(\mathcal{M})} = d_{sc}$. Рассмотрим ограничение D_0 отображения D на $\mathfrak{hor}^0_{sc}(P) = \mathcal{B}$. Тогда $D_0 : \mathcal{B} \to \mathfrak{hor}^1_{sc}(P) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^1_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{B}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{Der}_h(\mathcal{M}), \mathcal{B})$. Пусть $X \in \mathfrak{Der}_h(\mathcal{M})$ — произвольное дифференцирование. Определим отображение $\widetilde{X} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ по правилу $\widetilde{X}(b) = (D_0(b))(X)$ для любого $X \in \mathfrak{Der}_h(\mathcal{M})$, $b \in \mathcal{B}$.

Мы докажем, что соответствие $X \mapsto \widetilde{X}$ определяет лифт дифференцирований.

В самом деле, для любых b_1, $b_2 \in \mathcal{B}$, $X \in \mathfrak{Der}_h(\mathcal{M})$,

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(b_1 b_2) &= (D_0(b_1 b_2))(X) = (D_0(b_1) b_2 + b_1 D_0(b_2))(X) = \\ &= (D_0(b_1))(X) \cdot b_2 + b_1 \cdot (D_0(b_2))(X) = \widetilde{X}(b_1) b_2 + b_1 \widetilde{X}(b_2),\end{aligned}$$

и, значит, $\widetilde{X}$ — дифференцирование алгебры $\mathcal{B}$, кроме того,

$$\widetilde{X}(b^*) = (D_0(b^*))(X) = (D_0(b)^*)(X) = [(D_0(b))(X)]^* = \widetilde{X}(b)^*$$

для любого $b \in \mathcal{B}$, и поэтому $\widetilde{X} \in \mathfrak{Der}_h(\mathcal{M})$.

Далее,

$$(\widetilde{zX})(b) = (D_0(b))(zX) = z(D_0(b))(X) = z\widetilde{X}(b)$$

для любого $X \in \mathfrak{Der}_h(\mathcal{M})$, $z \in \mathcal{Z}$, $b \in \mathcal{B}$, и поэтому отображение $l : \mathfrak{Der}_h(\mathcal{M}) \to \mathfrak{Der}_h(\mathcal{B})$, $X \mapsto \widetilde{X}$, является морфизмом $\mathcal{Z}$–(би)модулей.

Проверим, что отображение $X \overset{l}{\longmapsto} \widetilde{X}$ удовлетворяет условию (2.21). Вычисляем:

$$\begin{aligned}F(\widetilde{X}(b)) = F((D_0(b))(X)) = (F_\wedge D_0(b))(X) = \sum_{(b)} (D_0(b_{(1)}) \otimes b_{(2)})(X) = \\ = \sum_{(b)} D_0(b_{(1)})(X) \otimes b_{(2)} = (\widetilde{X} \otimes \mathrm{id}) F(b),\end{aligned}$$

то есть выполнено условие (2.20). И, если $m \in \mathcal{M}$, то

$$\widetilde{X}(m) = D_0(m)(X) = d_{sc}(m)(X) = X(m)$$

(последнее равенство вытекает из определения дифференциала d_{sc}).

Итак, любое дифференцирование алгебры $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$ определяет “лифт” $l : \mathfrak{Der}_h(\mathcal{M}) \to \mathfrak{Der}_h(\mathcal{B})$. Пусть, наоборот, задан некоторый “лифт” l, т.е. задано отображение $\mathcal{Z}$–(би)модулей

$$l : \mathfrak{Der}_h(\mathcal{M}) \to \mathfrak{Der}_h(\mathcal{B}),$$

удовлетворяющее условиям (2.20), (2.21). Мы построим дифференцирование степени 1 алгебры $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$, продолжающее d_{sc} на $\Omega_{sc}(\mathcal{M}) \subseteq \mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$ и удовлетворяющее условиям (2.18), (2.19).

Именно, положим

$$D_l(\omega)(X_1,\dots,X_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1} l(X_i)(\omega(X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_{n+1}))+$$
$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,\widehat{X}_j,\dots,X_{n+1}),$$

где $\omega \in \mathfrak{hor}^n_{sc}(P)$ — произвольный элемент, $X_1,\dots,X_{n+1} \in \mathfrak{Der}_h(\mathcal{M})$ — дифференцирования. Тогда $D_l(\omega) \in \mathrm{Hom}(\Lambda^{n+1}_{\mathcal{Z},h},\, \mathcal{B})$ (так как, очевидно,

$$D_l(\omega)(X_1,\dots,X_i,\dots,X_j,\dots,X_{n+1}) = -D_l(\omega)(X_1,\dots,X_j,\dots,X_i\dots,X_{n+1})$$

для любых $i,\ j$).

Покажем, что на самом деле

$$D_l(\omega) \in \mathfrak{hor}^{n+1}_{sc}(P) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^{n+1}_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}),\mathcal{B}).$$

Но, во–первых,

$$D_l(\omega)(zX_1,\dots,X_{n+1}) = l(zX_1)\omega(X_2,\dots,X_{n+1})+$$
$$+\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i+1}l(X_i)\omega(zX_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_{n+1})+$$
$$+\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i+1}\omega([zX_1,X_i],X_2,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_{n+1})+$$
$$+\sum_{1<i<j\leqslant n+1}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],zX_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,\widehat{X}_j,\dots,X_{n+1}).$$

Воспользуемся тем, что ω и l — $\mathcal{Z}$–линейные отображения, и формулой

$$[zX,Y] = z[X,Y] - Y(z)X,$$

и, значит,

$$D_l(\omega)(zX_1,\dots,X_{n+1}) = zl(X_1)\omega(X_2,\dots,X_{n+1})+$$
$$+\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i+1}\Big\{l(X_i)(z)\omega(X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_{n+1})+$$
$$+zl(X_i)\omega(X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_{n+1})\Big\}+$$
$$+\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i+1}\Big\{-X_i(z)\omega(X_1,X_2,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_{n+1})+$$
$$+z\omega([X_1,X_i],X_2,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_{n+1})\Big\}+$$
$$+\sum_{1<i<j\leqslant n+1}(-1)^{i+j}z\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,\widehat{X}_j,\dots,X_{n+1})$$

(мы используем тот факт, что $X(z) \in \mathcal{Z}$ для любого $z \in \mathcal{Z}$ и $X \in \mathfrak{Der}_h(\mathcal{M})$; напомним, что алгебра $\mathcal{Z}$ состоит из эрмитовых элементов центра $*$–алгебры $\mathcal{M}$). С другой стороны, $l(X_i)(z) = X_i(z)$, так как $z \in \mathcal{M}$. Значит,

$$\begin{aligned} D_l(\omega)(zX_1,\dots,X_{n+1}) = {} & zl(X_1)\omega(X_2,\dots,X_{n+1}) + \\ & + \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i+1}X_i(z)\omega(X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_{n+1}) + \\ & + z\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i+1}l(X_i)\omega(X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_{n+1}) + \\ & + \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i+2}X_i(z)(X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_{n+1}) + \\ & + z\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,\widehat{X}_j,\dots,X_{n+1}) = \\ & = zD_l(\omega)(X_1,\dots,X_{n+1}). \end{aligned}$$

Итак, $D_l(\omega) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^{n+1}_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}),\mathcal{B})$.

Покажем, что $D_l(\omega) \in \mathfrak{hor}^{n+1}_{sc}(P)$. Для этого достаточно доказать, что для любых $X_1,\dots,X_{n+1} \in \mathfrak{Der}_h(\mathcal{M})$

$$\{F_*(D_l(\omega))\}(X_1,\dots,X_{n+1}) = \sum_{(\omega)} D_l(\omega_{(1)})(X_1,\dots,X_{n+1}) \otimes \widetilde{\omega}_{(2)},$$

где $\sum\limits_{(\omega)} \omega_{(1)} \otimes \widetilde{\omega}_{(2)} = F_\wedge(\omega)$. Тем самым мы сразу докажем, что D_l удовлетворяет условию (2.19). Но, в самом деле,

$$\begin{aligned} \{F_*(D_l(\omega))\}(X_1,\dots,X_{n+1}) = {} & F(D_l(\omega)(X_1,\dots,X_{n+1})) = \\ & = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}F(l(X_i)(\omega(X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_{n+1}))) + \\ & + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}F(\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,\widehat{X}_j,\dots,X_{n+1})) = \\ & = \sum_{i=1}^{n+1}(l(X_i)\otimes \mathrm{id})F(\omega(X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_{n+1})) + \\ & + \sum_{i<j}\sum_{(\omega)}(-1)^{i+j}\omega_{(1)}([X_i,X_j],X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,\widehat{X}_j,\dots,X_{n+1}) \otimes \widetilde{\omega}_{(2)} = \\ & = \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{(\omega)}(-1)^{i+1}l(X_i)\omega_{(1)}(X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_{n+1}) \otimes \widetilde{\omega}_{(2)} + \\ & + \sum_{(\omega)}\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega_{(1)}([X_i,X_j],X_1,\dots,\widehat{X}_i,\dots,\widehat{X}_j,\dots,X_{n+1}) \otimes \widetilde{\omega}_{(2)} = \\ & = \sum_{(\omega)} D_l(\omega_{(1)})(X_1,\dots,X_{n+1}) \otimes \widetilde{\omega}_{(2)} = \left\{(D_l \otimes \mathrm{id})F_\wedge(\omega)\right\}(X_1,\dots,X_{n+1}). \end{aligned}$$

Наконец, условие (2.18) проверяется прямым вычислением:

$$
\begin{aligned}
D_l(\omega^*)(X_1,\ldots,X_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1} l(X_i)(\omega^*)(X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_{n+1}) + \\
+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega^*([X_i,X_j],X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_{n+1}) = \\
= \sum_{i=1}^{n+1} l(X_i)\left((\omega(X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_{n+1}))^*\right) + \\
+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\left(\omega([X_i,X_j],X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_{n+1})\right)^* = \\
= \left(D_l(\omega)(X_1,\ldots,X_{n+1})\right)^*,
\end{aligned}
$$

для любых $X_1,\ldots,X_{n+1}\in\mathfrak{Der}_h(\mathcal{M})$.

Итак, $D_l:\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)\to\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$ — эрмитово $\mathcal{A}$–эквивариантное отображение. То, что D_l — градуированное дифференцирование, доказывается точно так же, как и аналогичное утверждение о свойствах дифференциала d_{sc}. А так как $l(X)(m)=X(m)$, ограничение D_l на $\Omega_{sc}(\mathcal{M})$ совпадает с d_{sc}.

Наконец, из разложения п. (ii) теоремы 2.10 следует, что любое градуированное антидифференцирование на $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$ однозначно восстанавливается по своему ограничению на $\mathfrak{hor}^0_{sc}(P)=\mathcal{B}$ и на $\Omega_{sc}(\mathcal{M})$. □

Замечание. Из доказанного следует, что, по аналогии с классическим случаем (см. Замечание, предшествующее доказательству данной Теоремы), мы могли бы сразу определить связность на главном квантовом расслоении P как лифт дифференцирований $l:\mathfrak{Der}_h(\mathcal{M})\to\mathfrak{Der}_h(\mathcal{B})$, для которого выполнены все вышеперечисленные условия. В этом случае предложение 2.12 устанавливает связь между таким определением связности и данным в главе 1 определением.

Будучи частным случаем регулярной связности, лифт дифференцирований на главном квантовом расслоении может не существовать (подробнее мы на этом останавливаемся в Главе 3). Чтобы лучше понять, почему так может происходить, изучим отображение, индуцируемое D_l на ассоциированных векторных расслоениях.

Напомним, что ассоциированные векторные расслоения $\mathcal{E}_u$ — это пространства морфизмов $\mathrm{Mor}(u,F)$. Если $f:H_u\to\mathcal{B}$ — морфизм из $\mathcal{E}_u$, то $D_l\circ f:H_u\to\mathfrak{hor}^1_{sc}(P)$ тоже является морфизмом $\mathcal{A}$–комодулей, то есть

$$F_\wedge\circ D_l\circ f=(D_l\circ f\otimes\mathrm{id})\Delta_u.$$

Но $\mathfrak{hor}^1_{sc}(P)\subseteq\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{Der}_h(\mathcal{M}),\mathcal{B})$, поэтому, вычисляя значение $(D_l\circ f)(e)$ на дифференцировании X, где $e\in H_u$, получаем, что соответствие

$$\left((D_l\circ f)(\cdot)\right)(X):H_u\to\mathcal{B}$$

является $\mathcal{A}$–эквивариантным, и следовательно принадлежит $\mathcal{E}_u$. Значит отображение D_l можно интерпретировать как отображение из $\mathcal{E}_u\ni f$ в $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{Der}_h(\mathcal{M}),\mathcal{E}_u)$:

$$\widetilde{\nabla}_X f=\left((D_l\circ f)(\cdot)\right)(X):H_u\to\mathcal{B},$$

вместо точки следует подставлять элементы из пространства H_u. Это отображение из H_u в $\mathcal{B}$ будет морфизмом представлений, и, следовательно, элементом из $\mathcal{E}_u$. Отображение $\widetilde{\nabla}:\mathcal{E}_u\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{Der}_h(\mathcal{M}),\mathcal{E}_u)$ удовлетворяет следующим соотношениям: для любого

$m \in \mathcal{M}$

$$\widetilde{\nabla}_X(f \cdot m) = (\widetilde{\nabla}_X f) \cdot m + f \cdot X(m), \tag{2.22}$$

$$\widetilde{\nabla}_X(m \cdot f) = X(m) \cdot f + m\widetilde{\nabla}_X f. \tag{2.23}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_X(fm)(e) = ((D_l \circ fm)(e))\,(X) = (D_l(f(e)m))\,(X) = \\ = ((D_l(f(e)))m)\,(X) + (f(e)d_{sc}(m))(X) = \\ = (D_l(f(e))(X))\,m + f(e)(d_{sc}(m)(X)) = \\ = (\widetilde{\nabla}_X f)(e) \cdot m + f(e)X(m),\end{aligned}$$

для любого $m \in \mathcal{M}$, $e \in H_u$. Аналогично доказывается соотношение (2.23).

В работах [18] и [19] (см. также [21]) определяются связности на проективных правых модулях над произвольной унитальной алгеброй $\mathcal{M}$. Именно: связностью на модуле E называется отображение $\nabla : E \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{Der}(\mathcal{M}), E)$, такое, что

$$\nabla_X(e \cdot m) = \nabla_X(e) \cdot m + e \cdot X(m) \qquad (\mathcal{Z} \text{ — центр } \mathcal{M})$$

В этих работах показано, что такого рода связности существуют на всех проективных конечно–прожденных модулях E над $\mathcal{M}$. В нашем случае *би*модуль $\mathcal{E}_u$ проективен и конечнопорожден как левый и как правый модуль над $\mathcal{M}$. Из этого следует, что всегда существуют отображения $\nabla : \mathcal{E}_u \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{Der}_h(\mathcal{M}), \mathcal{E}_u)$, удовлетворяющие отдельно или соотношению (2.22) или (2.23). Однако, как будет показано в главе 3 (а также в [24]), в общем случае может не существовать отображений, удовлетворяющих и (2.22), и (2.23).

В заключение скажем несколько слов о том, что такое кривизна связности на ассоциированном векторном расслоении и о характеристических классах.

Именно, в работе [18] кривизна связности определяется как автоморфизм модуля E: $\Theta(X, Y) : E \to E$, зависящий от пары дифференцирований X, $Y \in \mathfrak{Der}(\mathcal{M})$,

$$\Theta(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}. \tag{2.24}$$

Очевидно, что $\Theta(X, Y) = -\Theta(Y, X)$. Далее формула

$$\begin{aligned}(\Theta \wedge \cdots \wedge \Theta)(X_1, X_2, \ldots, X_{2n-1}, X_{2n}) = \\ = \frac{1}{2^n} \sum_{\sigma \in \Sigma_{2n}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \Theta(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}) \cdots \Theta(X_{\sigma(2n-1)}, X_{\sigma(2n)})\end{aligned} \tag{2.25}$$

определяет автоморфизм $(\Theta \wedge \cdots \wedge \Theta)(X_1, X_2, \ldots, X_{2n}) : E \to E$, кососимметрическим образом зависящий от дифференцирований $X_1, \ldots, X_{2n}$. В этих работах также доказывается, что след автоморфизмов

$$(\Theta \wedge \cdots \wedge \Theta)(X_1, \ldots, X_{2n}),$$

построенный по произвольному следу $tr : \mathcal{M} \to V$, где V — произвольный $\mathfrak{Der}(\mathcal{M})$–модуль, и $\mathcal{Z}$–бимодуль, для которого выполняется равенство $X(zv) = X(z)v + zX(v)$, $X \in \mathfrak{Der}(\mathcal{M})$, $z \in \mathcal{Z}$, $v \in V$, удовлетворяет соотношению

$$d(tr(\Theta \wedge \cdots \wedge \Theta))(X_1, \ldots, X_{2n+1}) = 0$$

(тут

$$d(\omega)(X_1,\ldots,X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}X_i\omega(X_1,\ldots,\widehat{X}_i\ldots,X_{p+1})+ \\ +\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_{p+1})$$

для произвольного $\omega \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^p_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M}),V)$ — обобщение дифференциала d_{sc}). Кроме того, оказывается, что класс $[d(tr(\Theta\wedge\cdots\wedge\Theta))] \in H^{2n}(\mathcal{M},V)$, где $H^*(\mathcal{M},V)$ — когомологии дифференциального комплекса

$$V \xrightarrow{d} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^1_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M}),V) \xrightarrow{d} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^2_{\mathcal{Z}}(\mathcal{M}),V) \to \ldots,$$

не зависит от выбора связности ∇.

С другой стороны, в §1.5 приведена конструкция характеристических классов ассоциированных векторных расслоений, основывающаяся на ковариантной производной произвольной регулярной связности. Именно, там показано, что классы $[tr_{\mathcal{M}}(D^{2n}_\omega)] \in H^{2n}(\mathcal{Z}(\Omega(\mathcal{M})))$ не зависят от выбора регулярной связности ω.

В нашем случае, ковариантное дифференцирование, построенное по регулярной связности — это все равно, что дифференцирование D_l, построенное по лифту $l : \mathfrak{Der}_h(\mathcal{M}) \to \mathfrak{Der}_h(\mathcal{B})$. С другой стороны, как показано выше, D_l определяет отображения $\widetilde{\nabla}$,

$$\widetilde{\nabla} : \mathcal{E}_u \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{Der}_h(\mathcal{M}),\mathcal{E}_u),$$

по которым, при помощи формулы (2.24), можно построить отображение $\widetilde{\Theta}(X,Y) : \mathcal{E}_u \to \mathcal{E}_u$.

Предложение 2.13.

$$\left(\widetilde{\Theta}(X,Y)(f)\right)(e) = \left(D^2_l(f(e))\right)(X,Y),$$

где $e \in H_u$, $f \in \mathcal{E}_u = \mathrm{Mor}(u,F)$. *Аналогично,*

$$\left[\left((\widetilde{\Theta}\wedge\cdots\wedge\widetilde{\Theta})(X_1,\ldots,X_{2n})\right)(f)\right](e) = D^{2n}_l(f(e))(X_1,\ldots,X_{2n}).$$

Доказательство. Вычислим

$$\left(\widetilde{\Theta}(X,Y)(f)\right)(e) = \left[\left(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y - \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}\right)(f)\right](e) = \\ = \widetilde{\nabla}_X\left(D_l(f(e))(Y)\right) - \widetilde{\nabla}_Y\left(D_l(f(e))(X)\right) - D_l(f(e))([X,Y]).$$

С другой стороны,

$$D_l(b)(X) = l(X)(b) \qquad \text{для любого} \quad b \in \mathcal{B},\ X \in \mathfrak{Der}_h(\mathcal{M}).$$

Значит,

$$\widetilde{\nabla}_X\left(D_l(f(e))(Y)\right) = \widetilde{\nabla}_X\left(l(Y)(f(e))\right) = D_l\left(l(Y)(f(e))\right)(X) = l(X)(l(Y)(f(e))).$$

Аналогично, $\widetilde{\nabla}_Y(D_l(f(e))(X)) = l(Y)l(X)(f(e))$.

В итоге получаем

$$\left(\widetilde{\Theta}(X,Y)(f)\right)(e) = \{l(X)l(Y) - l(Y)l(X) - l([X,Y])\}\,f(e). \tag{2.26}$$

С другой стороны, по определению D_l, см. предложение 2.12

$$\left[D_l^2(b)\right](X,Y) = l(X)(D_l(b)(Y)) - l(Y)(D_l(b)(X)) - D_l(b)([X,Y]) = \\ = \{l(X)l(Y) - l(Y)l(X) - l([X,Y])\}(b),$$

и это верно для любого $b \in \mathcal{B}$.

Таким образом, первое равенство доказано. Чтобы получить второе равенство, достаточно сравнить формулу (2.25) с тем, что получается по индукции из (2.26) при помощи формулы для дифференциала D_l. ☐

Итак, на уровне форм кривизны оба подхода дают одно и то же. Однако, в общем случае отображение $tr_{\mathcal{M}}$ не будет *следом* градуированных морфизмов (см. §1.5), так как для него, в общем случае, не выполняется равенство $tr_{\mathcal{M}}(AB) = (-1)^{\partial A \partial B} tr_{\mathcal{M}}(BA)$, и поэтому его нельзя применить к произвольной связности $\nabla : \mathcal{E}_u \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{Der}_h(\mathcal{M}), \mathcal{E}_u)$, в смысле работ [18], [19] и [21]. В следующей главе мы установим связь между произвольными (нерегулярными) связностями на P и связностями в смысле этих работ.

Глава 3

Связности и препятствия

В этой главе обсуждается вопрос существования регулярных связностей на квантовых главных расслоениях. Как показано в главе 1, для тех квантовых расслоений, на которых определены регулярные связности, существует достаточно богатая теория характеристических классов, полностью аналогичная теории Чженя-Вейля в случае классических главных расслоений. Кроме того, в §1.5 приведена конструкция характеристических классов векторных расслоений, ассоциированных с данным главным расслоением. Это построение несколько более универсальна, чем конструкция Чженя-Вейля, но для него всё-равно надо, чтобы на ассоциированных векторных расслоениях существовали транспонируемы дифференцирования.

Прежде всего мы отвечаем на вопрос о существовании регулярных связностей. Оказывается, основываясь на произвольной связности на расслоении, можно построить когомологическое препятствие, равенство которого нулю означает положительный ответ на этот вопрос. Это препятствие — класс когомологий специально построенного по алгебре $\mathfrak{hor}(P)$ и пространству Γ_{inv} коцепного комплекса. Более того, при помощи этого препятствия мы построим аналог гомоморфизма Вейля, принимающий значение в Хохшильдовых когомологиях алгебры $\mathcal{M}$, со значениями в $\Omega(\mathcal{M})$, или, более общо, в Хохшильдовых когомологиях градуированной алгебры $\Omega(\mathcal{M})$. При этом естественное отображение $HH(\Omega(\mathcal{M}), \Omega(\mathcal{M})) \to HH(\mathcal{M}, \Omega(\mathcal{M}))$ перводит образ второго из построенных отображений в образ первого.

В общем случае, однако, вычислить подобное препятствие не представляется возможным. Поэтому далее мы переходим к рассмотрению аналогичных препятствий для существования дифференцирований на присоединённых векторных расслоениях, прежде всего, в случае полу-классического дифференциального исчисления (см. главу 2). В этом случае тоже удаётся построить аналогичные препятствия. Приводятся примеры , в которых вычисляется значение построенного препятствия. Кроме того, в последнем параграфе мы описываем связь между препятствиями к существованию дифференцирований присоединённых векторных расслоений и вышеописанными классами в Хохшильдовых когомологиях алгебры $\mathcal{M}$(или $\Omega(\mathcal{M})$).

3.1 Существование регулярных связностей

Пусть ω — некоторая связность на расслоении P с дифференциальным исчислением $\Omega(P)$. Пусть Γ — соответствующий модуль дифференциальных форм на квантовой структурной группе $\mathcal{A}$. Напомним, что связность ω называется регулярной, если для любой горизонтальной дифференциальной формы $\varphi \in \mathfrak{hor}(P) = \widehat{F}^{-1}(\Omega(P) \otimes 1) \subseteq \Omega(P)$

и любого $\theta \in \Gamma_{inv}$ выполняется

$$\omega(\theta)\varphi = (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \varphi_k \omega(\theta \circ c_k),$$

где $\sum_k \varphi_k \otimes c_k = \widehat{F}(\varphi)$ и

$$\theta \circ a = \sum_{(a)} \kappa(a_{(1)})\theta a_{(2)} \in \Gamma_{inv}, \qquad \theta \in \Gamma_{inv},\ a \in \mathcal{A}.$$

Рассмотрим тогда, для произвольной связности ω, отображение $l_\omega : \Gamma_{inv} \otimes \mathfrak{hor}(P) \to \Omega(P)$, определяемое формулой

$$l_\omega(\theta \otimes \varphi) = \omega(\theta)\varphi - (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \varphi_k \omega(\theta \circ c_k). \tag{3.1}$$

Предложение 3.1. *$\widehat{F} l_\omega(\theta \otimes \varphi) = \sum_{k,l} l_\omega(\theta_l \otimes \varphi_k) \otimes d_l c_k$, где $\sum_l \theta_l \otimes d_l = \varpi(\theta)$. В частности, $l_\omega(\Gamma_{inv} \otimes \mathfrak{hor}(P)) \subseteq \mathfrak{hor}(P)$.*

Доказательство. Это утверждение есть в статье [6]. В силу его важности для нас в дальнейшем, мы приведём полное доказательство в этой работе. Оно состоит в прямом вычислении:

$$\begin{aligned}
\widehat{F} l_\omega(\theta \otimes \varphi) &= \widehat{F}\Big(\omega(\theta)\varphi - (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \varphi_k \omega(\theta \circ c_k)\Big) = \\
&= \widehat{F}(\omega(\theta))\widehat{F}(\varphi) - (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \widehat{F}(\varphi_k)\widehat{F}(\omega(\theta \circ c_k)) = \\
&= \Big(\sum_l \omega(\theta_l) \otimes d_l + 1 \otimes \theta\Big)\Big(\sum_k \varphi_k \otimes c_k\Big) - \\
&- (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \Big(\sum_{(c_k)} \varphi_k \otimes c_{k,(1)}\Big)\Big(\sum_{l,(c_k)} \omega(\theta_l \circ c_{k,(3)}) \otimes \kappa(c_{k,(2)}) d_l c_{k,(4)}\Big) - \\
&- (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \sum_{(c_k)} \big((\varphi_k \otimes c_{k,(1)})(1 \otimes \theta \circ c_{k,(2)})\big) = \\
&= \sum_{k,l} \omega(\theta_l)\varphi_k \otimes d_l c_k + (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \varphi_k \otimes \theta c_k - \\
&- (-1)^{\partial\varphi} \sum_{k,l,(c_k)} \varphi_k \omega(\theta_l \circ c_{k,(3)}) \otimes c_{k,(1)} \kappa(c_{k,(2)}) d_l c_{k,(4)} - \\
&- (-1)^{\partial\varphi} \sum_{k,(c_k)} \varphi_k \otimes c_{k,(1)} \kappa(c_{k,(2)}) \theta c_{k,(3)} = \\
&= \sum_{k,l} l_\omega(\theta_l \otimes \varphi_k) \otimes d_l c_k.
\end{aligned}$$

□

Построим теперь обещанный коцепной комплекс. В дальнейшем мы не раз будем использовать похожие конструкции, поэтому мы проведём рассуждения подробно. Рассмотрим тензорное произведение

$$\mathcal{N} = \mathfrak{hor}(P) \otimes \Gamma_{inv}. \tag{3.2}$$

Умножение на элементы алгебры $\mathfrak{hor}(P)$ задаёт на $\mathcal{N}$ структуру градуированного левого модуля над $\mathfrak{hor}(P)$. Зададим на $\mathcal{N}$ структуру правого градуированного модуля над $\mathfrak{hor}(P)$ при помощи формулы:

$$(\psi \otimes \theta) \cdot \varphi = (-1)^{\partial\varphi} \sum_k \psi\varphi_k \otimes \theta \circ c_k. \tag{3.3}$$

Очевидно, что выполняются равенства $n \cdot 1 = n$, $n \cdot (\varphi\chi) = (n \cdot \varphi) \cdot \chi$ и $(\varphi \cdot n) \cdot \chi = \varphi \cdot (n \cdot \chi)$ $(\forall n \in \mathcal{N},\ \forall \varphi, \chi \in \mathfrak{hor}(P))$, то есть $\mathcal{N}$ становится градуированным бимодулем над градуированной алгеброй $\mathfrak{hor}(P)$. Заметим, что на $\mathcal{N}$ справа кодействует квантовая группа $\mathcal{A}$, при помощи отображения

$$F_{\mathcal{N}} \overset{\mathrm{def}}{=} F^{\wedge} \otimes \varpi : \varphi \otimes \theta \mapsto \sum_{k,l} \big(\varphi_k \otimes \theta\big) \otimes c_k d_l.$$

Предложение 3.2. *Умножение на элементы* $\mathfrak{hor}(P)$ *в* $\mathcal{N}$ *является* $\mathcal{A}$-*эквивариантным отображением, то есть*

$$F_{\mathcal{N}}(\varphi \cdot n) = (\cdot \otimes \cdot)(F^{\wedge} \otimes F_{\mathcal{N}})(\varphi \otimes n),$$
$$F_{\mathcal{N}}(n \cdot \varphi) = (\cdot \otimes \cdot)(F_{\mathcal{N}} \otimes F^{\wedge})(n \otimes \varphi),$$

для любых $n \in \mathcal{N}$, $\varphi \in \mathfrak{hor}(P)$.

Доказательство. Первая формула очевидна. Докажем вторую. Это делается прямым вычислением: пусть $\psi \otimes \theta = n \in \mathcal{N}$, тогда

$$\begin{aligned}(-1)^{\partial\varphi} F_{\mathcal{N}}(n \cdot \varphi) &= F_{\mathcal{N}}\Big(\sum_k \psi\varphi_k \otimes \theta \circ c_k\Big) = \\ &= \sum_{k,l,m,(c_k)} \big(\psi_m\varphi_k \otimes \theta_l \circ c_{k,(3)}\big) \otimes b_m c_{k,(1)} \kappa(c_{k,(2)}) d_l c_{k,(4)} = \\ &= \sum_{k,l,m,(c_k)} \big(\psi_m\varphi_k \otimes \theta_l \circ c_{k,(1)}\big) \otimes b_m d_l c_{k,(2)} = \\ &= (-1)^{\partial\varphi} (\cdot \otimes \cdot)(F_{\mathcal{N}} \otimes F^{\wedge})(n \otimes \varphi),\end{aligned}$$

где $\sum_m \psi_m \otimes b_m = F^{\wedge}(\psi)$. □

В дальнейшем, для краткости, мы будем обозначать градуированную алгебру $\mathfrak{hor}(P)$ буквой $\mathcal{K}$. Для любого $n \geqslant 0$ рассмотрим пространства

$$C^n_{eq}(\mathcal{N}, \mathcal{K}) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}^{eq}_{\mathcal{K}}(\mathcal{N} \otimes \mathcal{K}^{\otimes n}, \mathcal{K}), \tag{3.4}$$

где $\mathrm{Hom}^{eq}_{\mathcal{K}}(\mathcal{N} \otimes \mathcal{K}^{\otimes n}, \mathcal{K})$ — множество всех $\mathcal{A}$-эквивариантных морфизмов левых $\mathcal{K}$-модулей. Положим для произвольного $\mu \in C^n_{eq}(\mathcal{N}, \mathcal{K})$

$$\begin{aligned}\delta\mu(n \otimes k_1 \otimes \ldots \otimes k_{n+1}) &= \mu(nk_1 \otimes \ldots \otimes k_{n+1}) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \mu(n \otimes k_1 \otimes \ldots \otimes k_i k_{i+1} \otimes \ldots \otimes k_{n+1}) + \\ &+ (-1)^{n+1} \mu(n \otimes k_1 \otimes \ldots \otimes k_n) k_{n+1}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Предложение 3.3. (i) *$\delta\mu \in C^{n+1}_{eq}(\mathcal{N}, \mathcal{K})$;*

(ii) $\delta(\delta\mu) = 0.$

Доказательство. Первое утверждение является очевидным следствием предложения 3.2. Докажем вторую формулу. Вычисляем:

$$\begin{aligned}\delta(\delta\mu)(n\otimes k_1\otimes\ldots\otimes k_{n+2}) = \delta\mu(nk_1\otimes\ldots\otimes k_{n+2}) &+ \\ +\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i\delta\mu(n\otimes k_1\otimes\ldots\otimes k_ik_{i+1}\otimes\ldots\otimes k_{n+2}) &+ \\ +(-1)^{n+2}\delta\mu(n\otimes k_1\otimes\ldots\otimes k_{n+1})k_{n+2}&.\end{aligned}$$

Сначала рассмотрим первое слагаемое. Согласно (3.5):

$$\begin{aligned}\delta\mu(nk_1\otimes k_2\otimes\ldots\otimes k_{n+2}) = \mu(nk_1k_2\otimes\ldots\otimes k_{n+2}) &+ \\ +\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i-1}\mu(nk_1\otimes k_2\otimes\ldots\otimes k_ik_{i+1}\otimes\ldots\otimes k_{n+2}) &+ \\ +(-1)^{n+1}\mu(nk_1\otimes k_2\otimes\ldots\otimes k_{n+1})k_{n+2}&.\end{aligned}$$

Далее, при $2\leqslant i\leqslant n$

$$\begin{aligned}\delta\mu(n\otimes k_1\otimes\ldots\otimes k_ik_{i+1}\otimes\ldots\otimes k_{n+2}) = \mu(nk_1\otimes\ldots\otimes k_ik_{i+1}\otimes\ldots\otimes k_{n+2}) &+ \\ +\sum_{j=1}^{i-2}(-1)^j\mu(n\otimes k_1\ldots\otimes k_jk_{j+1}\otimes\ldots\otimes k_ik_{i+1}\otimes\ldots\otimes k_{n+2}) &+ \\ +(-1)^{i-1}\mu(n\otimes k_1\otimes\ldots\otimes k_{i-1}k_ik_{i+1}\otimes\ldots\otimes k_{n+2}) &+ \\ +(-1)^i\mu(n\otimes k_1\otimes\ldots\otimes k_ik_{i+1}k_{i+2}\otimes\ldots\otimes k_{n+2}) &+ \\ +\sum_{j=i+1}^{n+1}(-1)^{j-1}\mu(n\otimes k_1\ldots\otimes k_ik_{i+1}\otimes\ldots\otimes k_jk_{j+1}\otimes\ldots\otimes k_{n+2}) &+ \\ +(-1)^{n+1}\mu(n\otimes k_1\otimes\ldots\otimes k_ik_{i+1}\otimes\ldots\otimes k_{n+1})k_{n+2}&.\end{aligned}$$

Наконец, при $i=1$

$$\begin{aligned}\delta\mu(n\otimes k_1k_2\otimes\ldots\otimes k_{n+2}) = \mu(nk_1k_2\otimes k_3\otimes\ldots\otimes k_{n+2}) &- \\ -\mu(n\otimes k_1k_2k_3\otimes\ldots\otimes k_{n+2}) &+ \\ +\sum_{i=3}^{n+1}(-1)^{i-1}\mu(n\otimes k_1k_2\otimes\ldots\otimes k_ik_{i+1}\otimes\ldots\otimes k_{n+2}) &+ \\ +(-1)^{n+1}\mu(n\otimes k_1k_2\otimes\ldots\otimes k_{n+1})k_{n+2}&,\end{aligned}$$

при $i=n+1$

$$\begin{aligned}\delta\mu(n\otimes k_1\otimes\ldots\otimes k_{n+1}k_{n+2}) = \mu(nk_1\otimes\ldots\otimes k_{n+1}k_{n+2}) &+ \\ +\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\mu(n\otimes k_1\otimes\ldots\otimes k_ik_{i+1}\otimes\ldots\otimes k_{n+1}k_{n+2}) &+ \\ +(-1)^n\mu(n\otimes k_1\otimes\ldots\otimes k_nk_{n+1}k_{n+2}) &+ \\ +(-1)^{n+1}\mu(n\otimes k_1\otimes\ldots\otimes k_n)k_{n+1}k_{n+2}&,\end{aligned}$$

и, при $i = n + 2$

$$\delta\mu(n \otimes k_1 \otimes \ldots \otimes k_{n+1})k_{n+2} = \mu(nk_1 \otimes \ldots \otimes k_{n+1})k_{n+2} + \\ + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \mu(n \otimes k_1 \otimes \ldots \otimes k_i k_{i+1} \otimes \ldots \otimes k_{n+1})k_{n+2} + \\ + (-1)^{n+1}\mu(n \otimes k_1 \otimes \ldots \otimes k_n)k_{n+1}k_{n+2}.$$

Складывая все эти равенства с соответсвующими знаками, получаем ноль. □

Следствие 3.4. *Градуированное пространство*

$$C^{\bullet}_{eq}(\mathcal{N}, \mathcal{K}) \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geqslant 0} C^n(\mathcal{N}, \mathcal{K}) \tag{3.6}$$

является коцепным комплексом с дифференциалом δ.

Рассмотрим теперь отображение $\mu_\omega : \mathcal{N} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ задаваемое формулой

$$\mu_\omega\big((\psi \otimes \theta) \otimes \varphi\big) = \psi l_\omega(\theta \otimes \varphi). \tag{3.7}$$

Теорема 3.5. *$\mu_\omega \in C^1_{eq}(\mathcal{N}, \mathcal{K})$ и $\delta\mu_\omega = 0$. Кроме того, класс когомологий $[\mu_\omega] \in H^1(\mathcal{N}, \mathcal{K})$ не зависит от выбора связности ω.*

Доказательство. Первое утверждение — очевидное следствие предложения 3.1. Докажем второе. Пусть $n = \psi \otimes \theta$. Найдём $\delta\mu_\omega(n \otimes \varphi \otimes \chi)$:

$$\delta\mu_\omega(n \otimes \varphi \otimes \chi) = \mu_\omega(n\varphi \otimes \chi) - \mu_\omega(n \otimes \varphi\chi) + \mu_\omega(n \otimes \varphi)\chi.$$

Пусть $F^\wedge(\chi) = \sum_n \chi_n \otimes f_n$, тогда

$$\mu_\omega(n\varphi \otimes \chi) = (-1)^{\partial\varphi}\mu_\omega\Big(\Big(\sum_k \psi\varphi_k \otimes \theta \circ c_k\Big) \otimes \chi\Big) = \\ = (-1)^{\partial\varphi}\sum_k \psi\varphi_k l_\omega(\theta \circ c_k \otimes \chi) = \\ = (-1)^{\partial\varphi}\sum_k \psi\varphi_k\Big\{\omega(\theta \circ c_k)\chi - (-1)^{\partial\chi}\sum_n \chi_n\omega((\theta \circ c_k) \circ f_n)\Big\} = \\ = (-1)^{\partial\varphi}\psi\Big\{\sum_k \varphi_k\omega(\theta \circ c_k)\Big\}\chi - (-1)^{\partial\varphi + \partial\chi}\psi\sum_{n,k}\varphi_k\chi_n\omega(\theta \circ c_k f_n);$$

$$-\mu_\omega(n \otimes \varphi\chi) = -\psi l_\omega(\theta \otimes \varphi\chi) = \\ = -\psi\omega(\theta)\varphi\chi + (-1)^{\partial\varphi + \partial\chi}\psi\sum_{n,k}\varphi_k\chi_n\omega(\theta \circ c_k f_n)$$

и

$$\mu_\omega(n \otimes \varphi)\chi = \psi l_\omega(\theta \otimes \varphi)\chi = \\ = \psi\Big\{\omega(\theta)\varphi - (-1)^{\partial\varphi}\sum_k \varphi_k\omega(\theta \circ c_k)\Big\}\chi = \\ = \psi\omega(\theta)\varphi\chi - (-1)^{\partial\varphi}\psi\Big\{\sum_k \varphi_k\omega(\theta \circ c_k)\Big\}\chi.$$

Складывая эти равенства получаем ноль.

Пусть теперь ω' — другая связность. Найдём разность $\mu_{\omega'} - \mu_\omega$. Положим $\lambda = \omega' - \omega$, $\lambda \in \tau(P)$ (напомним, что $\tau(P)$ — пространство тензориальных форм расслоения P). Тогда

$$\begin{aligned}\big\{\mu_{\omega'} - \mu_\omega\big\}(n \otimes \varphi) = \psi l_{\omega'}(\theta \otimes \varphi) - \psi l_\omega(\theta \otimes \varphi) = \\ = \psi\omega'(\theta)\varphi - (-1)^{\partial\varphi}\psi \sum_k \varphi_k \omega'(\theta \circ c_k) - \\ - \psi\omega(\theta)\varphi - (-1)^{\partial\varphi}\psi \sum_k \varphi_k \omega(\theta \circ c_k) = \\ = \psi\lambda(\theta)\varphi - (-1)^{\partial\varphi}\psi \sum_k \varphi_k \lambda(\theta \circ c_k) = \delta\tilde{\lambda}(n \otimes \varphi), \quad (3.8)\end{aligned}$$

где $\tilde{\lambda}(\psi \otimes \theta) = \psi\lambda(\theta) \in C^0(\mathcal{N}, \mathcal{K})$. □

Следствие 3.6. *На главном квантовом расслоении P существуют регулярные связности тогда и только тогда, когда равен нулю класс когомологий $[\mu_\omega] \in H^1_{eq}(\mathcal{N}, \mathcal{K})$.*

Доказательство. Прямое утверждение — тривиальное следствие предыдущей теоремы и того, что, согласно определению, ω — регулярная связность тогда и только тогда, когда $l_\omega = 0$.

Чтобы доказать обратное, заметим, что пространство $C^1_{eq}(\mathcal{N}, \mathcal{K})$ можно отождествить с пространством тензориальных форм на расслоении P, $\tau(P)$. Тогда из (3.8) следует, что $\mu_\omega + \delta\tilde{\lambda} = \mu_{\omega+\lambda}$ для любой тензориальной формы λ (здесь $\tilde{\lambda}$ — элемент из $C^1_{eq}(\mathcal{N}, \mathcal{K})$, отождествляемый с λ). □

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, отображение градуированных пространств $\mu_\omega : \mathcal{N} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ имеет степень 1, так как $\omega \in \psi^1(P)$ — псевдотензориальная 1-форма. Поэтому, если рассматривать на $C^\bullet_{eq}(\mathcal{N}, \mathcal{K})$ градуировку, равную сумме введённой градуировки и степени отображения, то класс $[\mu_\omega]$ будет лежать в $H^2_{eq}(\mathcal{N}, \mathcal{K})$.

Во-вторых, коцепной комплекс $C^\bullet_{eq}(\mathcal{N}, \mathcal{K})$ является подкомплексом в

$$C^\bullet(\mathcal{N}, \mathcal{K}) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathcal{N} \otimes \mathcal{K}^{\otimes n}, \mathcal{K})$$

(дифференциал в $C^\bullet(\mathcal{N}, \mathcal{K})$ задаётся той же формулой, что и дифференциал в $C^\bullet_{eq}(\mathcal{N}, \mathcal{K})$).

В-третьих, пусть $I^1_\otimes$ — пространство ϖ-инвариантных элементов в Γ_{inv}, $\theta \in I^1_\otimes$ — произвольный элемент. Рассмотрим отображение

$$\begin{gathered} i^\theta : \Omega(\mathcal{M})^{\otimes n} \to \mathcal{N} \otimes \mathcal{K}^{\otimes n}, \\ i^\theta(m_1 \otimes \ldots \otimes m_n) = (1 \otimes \theta) \otimes m_1 \otimes \ldots \otimes m_n. \end{gathered}$$

Так как любое отображение $\mu \in C^n_{eq}(\mathcal{N}, \mathcal{K})$ $\mathcal{A}$-эквивариантно, то, в частности μ отображает подпространство $i^\theta\big((\Omega(\mathcal{M}))^{\otimes n}\big)$ в $\Omega(\mathcal{M})$. В частности, коцикл μ_ω индуцируеи отображение

$$\begin{aligned} \theta_\omega = i^\theta_*(\mu_\omega) : \Omega(\mathcal{M}) \to \Omega(\mathcal{M}), \\ \theta_\omega(m) = \omega(\theta)m - (-1)^{\partial m} m\omega(\theta). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Предложение 3.7. *θ_ω — дифференцирование градуированной алгебры $\Omega(\mathcal{M})$ и, если ω' — другая связность, то разность $\theta_{\omega'} - \theta_\omega$ — внутреннее дифференцирование алгебры $\Omega(\mathcal{M})$.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}\theta_\omega(m_1m_2) = \omega(\theta)m_1m_2 - (-1)^{\partial m_1 + \partial m_2} m_1m_2\omega(\theta) = \omega(\theta)m_1m_2 - \\ - (-1)^{\partial m_1} m_1\omega(\theta)m_2 + (-1)^{\partial m_1} m_1\omega(\theta)m_2 - \\ - (-1)^{\partial m_1 + \partial m_2} m_1m_2\omega(\theta) = \theta_\omega(m_1)m_2 + (-1)^{\partial m_1} m_1\theta_\omega(m_2).\end{aligned}$$

Аналогично, при помощи (3.8), проверяем, что разность $\theta_{\omega'} - \theta_\omega$ равна внутреннему дифференцированию, порождённому элементом $\lambda(\theta)$.

□

Конечно, само дифференцирование θ_ω отнюдь не обязано быть внутренним. Ограничение θ_ω на $\mathcal{M}$ задаёт дифференцирование на $\mathcal{M}$ со значением в $\Omega^1(\mathcal{M})$, определённое с точностью до внутреннего дифференцирования.

Как известно (см. [10]) фактор-пространство пространства дифференцирований некоторой ассоциативной алгебры A со значениями в A-бимодуле M по подпространству внутренних дифференцирований есть в точности $HH^1(A, M)$, где $HH^*(A, M)$ — когомологии Хохшильда алгебры A со значениями в M. В нашем случае алгебра $A = \mathcal{M}$, $M = \Omega^1(\mathcal{M})$. Напомним общее определение когомологий Хохшильда унитальных алгебр.

Пусть A — унитальная алгебра M — A-бимодуль. Рассмотрим коцепной комплекс

$$CH^\bullet(A, M) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, M) \tag{3.10}$$

с дифференциалом

$$\begin{aligned}\delta f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) = a_1 f(a_2 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) + \\ + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) + \\ + (-1)^{n+1} f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) a_{n+1}.\end{aligned}$$

Точно так же, как и выше, проверяется, что $\delta^2 = 0$. Когомологии этого коцепного комплекса назвываются когомологиями Хохшильда алгебры A со значениями в M. Несложно проверить (см. [10]), что

$$HH^0(A, M) = \{m \in M | ma = am, \forall a \in A\}$$

и что $HH^1(A, M)$ равно пространству

$$\{X : A \to M | X(aa') = X(a)a' + aX(a'), \forall a, a' \in A\}$$

— дифференцирований алгебры A со значениями в M, профакторизованному по подпространству внутренних дифференцирований

$$ad(M) = \{[m, \cdot] : A \to M | [m, a] = ma - am,\ m \in M\},$$

иначе-говоря, $HH^1(A, M)$ — пространство « внешних дифференцирований» алгебры A со значениями в M.

Таким образом, дифференцирование $\theta_\omega,\ \theta \in I^1_\otimes$ можно проинтерпретировать как элемент пространства $HH^1(\mathcal{M}, \Omega^1(\mathcal{M})) \subseteq HH^1(\mathcal{M}, \Omega(\mathcal{M}))$. На самом деле, для произвольных $\theta \in \Gamma_{inv}$ при помощи той же формулы (3.9) можно определить отображения $\theta_\omega : \Omega(\mathcal{M}) \to \mathfrak{hor}(P)$, которые тоже будут дифференцированиями, и при замене связности к дифференцированию θ_ω будет прибавляться внутреннее дифференцирование $[\lambda(\theta), \cdot],\ (\lambda = \omega' - \omega)$. Пусть $\tilde{\theta} = \sum_i \theta^1_i \otimes \ldots \otimes \theta^n_i \in I^n_\otimes$. Положим

$$\tilde{\theta}_\omega = \sum_i \theta^1_{i\ \omega} \otimes \ldots \otimes \theta^n_{i\ \omega} : (\Omega(\mathcal{M}))^{\otimes n} \to \mathfrak{hor}(P). \tag{3.11}$$

Теорема 3.8. (i) *$\tilde{\theta}_\omega(\Omega(\mathcal{M})^{\otimes n}) \subseteq \Omega(\mathcal{M})$, в частности $\tilde{\theta}_\omega(\mathcal{M}^{\otimes n}) \subseteq \Omega(\mathcal{M})$;*

(ii) *отображение $\tilde{\theta}_\omega$, рассматриваемое как элеменнт $CH^n(\mathcal{M}, \Omega(\mathcal{M}))$ является коциклом;*

(iii) *класс $[\tilde{\theta}_\omega] \in HH^n(\mathcal{M}, \Omega(\mathcal{M}))$ не зависит от выбора связности ω.*

Доказательство. Утверждение (i) очевидно. Докажем (ii): вычисляем

$$\begin{aligned}\delta(\tilde{\theta}_\omega)(m_1 \otimes \ldots \otimes m_{n+1}) = m_1\tilde{\theta}_\omega(m_2 \otimes \ldots \otimes m_{n+1}) + \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \tilde{\theta}_\omega(m_1 \otimes \ldots \otimes m_j m_{j+1} \otimes \ldots \otimes m_{n+1}) + \\ + (-1)^{n+1}\tilde{\theta}_\omega(m_1 \otimes \ldots \otimes m_n) m_{n+1}.\end{aligned}$$

Вспомним, что

$$\tilde{\theta}_\omega(m'_1 \otimes \ldots \otimes m'_n) = \sum_i \theta^1_{i\ \omega}(m'_1) \cdot \ldots \cdot \theta^n_{i\ \omega}(m'_n)$$

. Тогда для фиксированного i:

$$\begin{aligned}&m_1\theta^1_{i\ \omega}(m_2) \cdot \ldots \cdot \theta^n_{i\ \omega}(m_{n+1}) = \\ &= \theta^1_{i\ \omega}(m_1 m_2) \cdot \ldots \cdot \theta^n_{i\ \omega}(m_{n+1}) - \theta^1_{i\ \omega}(m_1) m_2 \theta^2_{i\ \omega}(m_3) \cdot \ldots \cdot \theta^n_{i\ \omega}(m_{n+1}) = \\ &= \theta^1_{i\ \omega}(m_1 m_2) \cdot \ldots \cdot \theta^n_{i\ \omega}(m_{n+1}) - \theta^1_{i\ \omega}(m_1)\theta^2_{i\ \omega}(m_2 m_3) \cdot \ldots \cdot \theta^n_{i\ \omega}(m_{n+1}) + \\ &+ \theta^1_{i\ \omega}(m_1)\theta^2_{i\ \omega}(m_2) m_3 \cdot \ldots \cdot \theta^n_{i\ \omega}(m_{n+1}) = \\ &= \ldots\ldots\ldots = \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i-1} \theta^1_{i\ \omega}(m_1) \cdot \ldots \cdot \theta^j_{i\ \omega}(m_2 m_3) \cdot \ldots \cdot \theta^n_{i\ \omega}(m_{n+1}) + \\ &+ (-1)^n \theta^1_{i\ \omega}(m_2) \cdot \ldots \cdot \theta^n_{i\ \omega}(m_n) m_{n+1}.\end{aligned}$$

Складывая эти равенства для всех i получаем $\delta(\tilde{\theta}_\omega) = 0$.

Докажем утверждение (iii). Для этого рассмотрим другую связность ω' и пусть

$$\omega_t = \omega + t\lambda,\ \lambda = \omega' - \omega,\ t \in [0; 1].$$

Тогда ω_t — семейство связностей на главном расслоении P, такое, что $\omega_0 = \omega,\ \omega_1 = \omega'$.

Вычислим:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\tilde{\theta}_{\omega_t}(m_1 \otimes \ldots \otimes m_n) = \\
&\qquad\qquad = \sum_i \big\{ [\lambda(\theta_i^1), m_1] \theta^2_{i\ \omega_t}(m_2) \cdot \ldots \cdot \theta^n_{i\ \omega_t}(m_n) + \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots + \theta^1_{i\ \omega_t}(m_1) \cdot \ldots \cdot \theta^{n-1}_{i\ \omega_t}(m_{n-1}) [\lambda(\theta_i^n), m_n] \big\} = \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = \delta\chi_t(m_1 \otimes \ldots \otimes m_n),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&\chi_t(m'_1 \otimes \ldots \otimes m'_{n-1}) = \\
&\quad = \sum_i \big\{ \lambda(\theta_i^1) \theta^2_{i\ \omega_t}(m'_1) \cdot \ldots \cdot \theta^n_{i\ \omega_t}(m'_{n-1}) + \ldots + \theta^1_{i\ \omega_t}(m'_1) \cdot \ldots \cdot \theta^{n-1}_{i\ \omega_t}(m'_{n-1}) \lambda(\theta_i^n) \big\}.
\end{aligned}$$

Интегрируя это равенство по t от 0 до 1 получаем

$$\tilde{\theta}_{\omega'} = \tilde{\theta}_\omega + \delta\Big(\int\limits_0^1 \chi_t dt \Big).$$

□

Замечание. Конструкцию когомологий Хохшильда можно распространить на случай, когда A — градуированная алгебра, а M — градуированный A-бимодуль. В этом случае полагают

$$CH^n(A,\, M) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes n+1},\, M) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} CH^{n,j}(A^{\otimes n+1},\, M).$$

Здесь

$$CH^{n,j}(A^{\otimes n+1},\, M) = \mathrm{Hom}^j(A^{\otimes n+1},\, M);$$

$$\mathrm{Hom}^j(A^{\otimes n+1},\, M) \overset{\mathrm{def}}{=} \{ f \in \mathrm{Hom}(A^{\otimes n+1},\, M) | f \text{ меняет градуировку на } j \}.$$

Дифференциал в этом случае задаётся следующей формулой, полностью аналогичной той, которой пользуются в неградуированном случае:

$$\begin{aligned}
&\delta\varphi(a_1, \ldots, a_{n+1}) = (-1)^{\partial\varphi\partial a_1} a_1 \varphi(a_2, \ldots, a_{n+1}) + \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^n (-1)^i \varphi(a_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_{n+1}) + \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + (-1)^{n+1} \varphi(a_1, \ldots, a_n) a_{n+1},
\end{aligned}$$

(мы полагаем $\partial\varphi = j$, если $\varphi \in CH^{n,j}(A,\, M)$).

В градуированном случае пространство $HH^1(A,\, M)$ тоже совпадает с пространством « внешних» (градуированных) дифференцирований алгебры A.

В свете всего вышеизложенного можно рассмотреть комплекс $CH^\bullet(\Omega(\mathcal{M}),\, \Omega(\mathcal{M}))$ и для произвольного $\theta = \sum_i \theta_i^1 \otimes \cdots \otimes \theta_i^{n+1} \in I_\otimes^{n+1}$ определить элемент $\tilde{\tilde{\theta}}_\omega \in CH^{n,n}(\Omega(\mathcal{M}),\, \Omega(\mathcal{M}))$ при помощи формулы

$$\tilde{\tilde{\theta}}_\omega(a_1, \ldots, a_{n+1}) = (-1)^\varepsilon \sum_i \theta^1_{i,\omega}(a_1) \cdot \ldots \cdot \theta^{n+1}_{i,\omega}(a_{n+1}),$$

где $\epsilon = n\partial a_1 + (n-1)\partial a_2 + \ldots + \partial a_n$.

Теорема 3.9. *(i)* $\delta\, \tilde{\tilde{\theta}}_\omega = 0$;

(ii) класс когомологий $[\tilde{\tilde{\theta}}_\omega]$ *не зависит от выбора связности* ω;

(iii) отображение $HH(\Omega(\mathcal{M}), \Omega(\mathcal{M})) \to HH(\mathcal{M}, \Omega(\mathcal{M}))$ *перводит класс* $[\tilde{\tilde{\theta}}_\omega]$ *в класс* $[\tilde{\theta}_\omega]$.

Доказательство. Совершенно аналогично доказательству теоремы 3.8. □

3.2 Случай векторных расслоениях

Препятствие, введённое в предыдущем параграфе вычислять чрезвычайно сложно. Поэтому мы попытаемся здесь разобраться несколько более простой задачей: ковариантное дифференцирование, заданное произвольной регулярной связностью задаёт на каждом градуированном модуле $\mathcal{F}_u$ дифференциальных форм на расслоении P антидифференцирование $D_{\omega,u} = D_u$ степени 1, причём все дифференцирования из набора $\{D_u\}_{u\in R(G)}$ согласованы между собой (см. теорему 1.18). Фиксируем теперь представление квантовой группы $u \in R(G)$ и попробуем ответить на вопрос: существует ли для модуля $\mathcal{F} = \mathcal{F}_u$ отображение $D : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, такое, что

$$\begin{aligned} D(\varphi\alpha) &= D(\varphi)\alpha + (-1)^{\partial\varphi}\varphi d_{\mathcal{M}}(\alpha), \\ D(\alpha\varphi) &= d_{\mathcal{M}}(\alpha)\varphi + (-1)^{\partial\alpha}\alpha D(\varphi), \end{aligned}$$

для любых $\varphi \in \mathcal{F},\ \alpha \in \Omega(\mathcal{M})$. Даже в таком виде задача достаточно сложная. Чтобы ещё более упростить её, рассмотрим ограничение D на $\mathcal{E} = \mathcal{F}^0 \subseteq \mathcal{F}$. Дифференцирование D задаёт тогда отображение $\nabla : \mathcal{E} \to \mathcal{F}^1$, такое, что

$$\nabla(em) = \nabla(e)m + ed_{\mathcal{M}}(m), \quad \nabla(me) = d_{\mathcal{M}}(m)e + m\nabla(e) \tag{3.12}$$

для любых $e \in \mathcal{E},\ m \in \mathcal{M}$. В частности, в случае полу-классического дифференциального исчисления на базе, когда алгебра горизонтальных дифференциальных форм на расслоении равна $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$, тогда $\mathcal{F}^1 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{Der}_h(\mathcal{M}), \mathcal{E})$ и, как показано в главе 2, условия (3.12) эквивалентны

$$\nabla_X(em) = \nabla_X(e)m + eX(m), \quad \nabla_X(me) = X(m)e + m\nabla_X(e), \tag{3.13}$$

для любых $m \in \mathcal{M},\ e \in \mathcal{E},\ X \in \mathfrak{Der}_h(\mathcal{M})$.

Точно так же, как по лифту дифференцирований $l : \mathfrak{Der}_h(\mathcal{M}) \to \mathfrak{Der}_h(\mathcal{B})$ можно восстановить дифференцирование алгебры $\mathfrak{hor}^*_{sc}(P)$ (см. главу 2), можно показать, что по отображению $\nabla : \mathcal{E} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{Der}_h(\mathcal{M}), \mathcal{E})$, удовлетворяющему условиям (3.13) можно восстановить дифференцирование D градуированного модуля $\mathcal{F} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{E})$. Автору неизвестно, верно ли подобное утверждение в случае произвольного дифференциального исчисления. Очевидно, необходимым и достаточным условием продолжимости отображения ∇ до дифференцирования градуированного модуля $\mathcal{F}$ является коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "d_{\mathcal{M}}\otimes 1 + (-1)^{\partial\cdot}\otimes\nabla"] & \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) \arrow[d, "\nabla\otimes 1 + 1\otimes d_{\mathcal{M}}"] \\ \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E} \arrow[r, "\sigma"] & \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}), \end{tikzcd} \tag{3.14}$$

где $\sigma : \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M})$ — канонический изоморфизм и мы отождествляем $\Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{F}^1 = \mathcal{F} = \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}$ (см. §1.5). С другой стороны, из изоморфизмов $\mathcal{F} \cong \Omega(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}$ и $\mathcal{F} \cong \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M})$ следует, что, если такое продолжение существует, то оно единственное.

Замечание. Вообще говоря, для того, чтобы справиться с вышеуказанными затруднениями, нам следовало бы рассматривать дифференцирование D, как отображение $\mathcal{F} \xrightarrow{D} \mathcal{F}$ степени 1 и работать в дальнейшем в градуированной категории. То есть, везде, где далее речь будет идти об алгебре, её надо было бы рассматривать как градуированную алгебру, соответственно модуль должен был бы каждый раз быть градуированным, и т. п., см. Замечание в конце предыдущего параграфа. Все результаты этого параграфа можно без затруднений перенести на градуированный случай, при этом, правда, во всех формулах надо будет правильно расставить знаки. Это сильно загромождает текст, тогда как все основные идеи вполне проявляются уже в случае обычных ассоциативных алгебр. Поэтому мы ограничимся указщанным выше упрощённым случаем.

Ниже мы будем исследовать вопрос существования для произвольного бимодуля $\mathcal{E}$ отображений ∇, удовлетворяющих условиям (3.12). Прежде всего, разберём более простой случай, именно. Пусть E — произвольный *правый* модуль над унитальной алгеброй $\mathcal{M}$. По аналогии с (3.12) мы будем называть связностью на E со значениями в дифференциальном исчислении $\Omega(\mathcal{M})$ на базе $\mathcal{M}$ такое отображение $\nabla : E \to E \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M})$, для которого выполняется условие

$$\nabla(em) = \nabla(e)m + ed_{\mathcal{M}}(m). \tag{3.15}$$

В частности, если дифференциальное исчисление на базе $\mathcal{M}$ — полуклассическое, то есть $\Omega(\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda_{\mathcal{Z},h}(\mathcal{M}), \mathcal{M})$, то отображение $\nabla : E \to E \otimes_{\mathcal{M}} \Omega^1(\mathcal{M}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{Der}_h(\mathcal{M}), E)$ становится связностью на E в смысле работ [18, 19].(Вместо алгебры Ли эрмитовых дифференцирований, $\mathfrak{Der}_h(\mathcal{M})$, можно в этом случае использовать алгебру Ли всех дщифференцирований алгебры $\mathcal{M}$, и в качестве $\mathcal{Z}$ можно взять весь центр алгебры $\mathcal{M}$.)

Как явствует из работ [19, 18], если модуль E проективный и конечно-порождённый, то на нём всегда существуют связности, если дифференциальное исчисление — полуклассическое. Аналогичным путём можно показать (см. [22]), что на таком модуле E будут существовать связности со значениями в произвольном дифференциальном исчислении на базе. Мы же предъявим необходимое и достаточное условие существования связности на произвольном правом модуле E и покажем, что в случае, если E — проективен и конечно-порождён, это условие автоматически выполнено.

Обозначим $\mathcal{N} = E \otimes_{\mathcal{M}} \Omega^1(\mathcal{M})$ (или, в полуклассическом случае, $\mathcal{N} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{Der}(\mathcal{M}), E)$). Тогда $\mathcal{N}$ — правый модуль над $\mathcal{M}$. Рассмотрим цепной комплекс

$$\begin{aligned} C^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) &= \bigoplus_{n \geqslant 0} C^n(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}), \\ C^n(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) &= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E \otimes \mathcal{M}^{\otimes n}, \mathcal{N}) \end{aligned} \tag{3.16}$$

с дифференциалом

$$\begin{aligned} \delta\varphi(e \otimes m_1 \otimes \ldots \otimes m_{n+1}) = \varphi(em_1 \otimes m_2 \otimes \ldots \otimes m_{n+1}) + \\ + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \varphi(e \otimes m_1 \otimes \ldots \otimes m_i m_{i+1} \otimes \ldots \otimes m_{n+1}) + \\ + (-1)^{n+1} \varphi(e \otimes m_1 \otimes \ldots \otimes m_n) m_{n+1}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Точно так же, как и выше доказывается, что $\delta^2 = 0$. Рассмотрим коцепь $1\otimes d_{\mathcal{M}} \in C^1(E,\mathcal{M};\mathcal{N})$, $[1\otimes d_{\mathcal{M}}](e\otimes m) = e\,d_{\mathcal{M}}m$ (или $(1\otimes d_{\mathcal{M}})_X(e\otimes m) = eX(m)$, для любого $X \in \mathfrak{Der}(\mathcal{M})$).

Предложение 3.10. *$\delta(1\otimes d_{\mathcal{M}}) = 0$, и класс $[1\otimes d_{\mathcal{M}}] \in H^1(E,\mathcal{M};\mathcal{N})$ равен нулю тогда и только тогда, когда на модуле E существует связность ∇ со значениями в $\Omega(\mathcal{M})$.*

Доказательство. Проводится прямым вычислением: для любых $e\in E$, $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$

$$\delta(1\otimes d_{\mathcal{M}})(e\otimes m_1\otimes m_2) = em_1 d_{\mathcal{M}}(m_2) - \\ - ed_{\mathcal{M}}(m_1m_2) + ed_{\mathcal{M}}(m_1)m_2 = 0,$$

так как $d_{\mathcal{M}}(m_1m_2) = dmc(m_1)m_2 + m_1d_{\mathcal{M}}(m_2)$ (или

$$\delta(1\otimes d_{\mathcal{M}})_X(e\otimes m_1\otimes m_2) = em_1X(m_2) - eX(m_1m_2) + eX(m_1)m_2 = 0,$$

так как $X(m_1m_2) = X(m_1)m_2 + m_1X(m_2)$). Значит $\delta(1\otimes d_{\mathcal{M}}) = 0$. С другой стороны, если на E существует связность $\nabla \in \mathrm{Hom}(E,\mathcal{N}) = C^0(E,\mathcal{M};\mathcal{N})$ то из (3.15) следует, что $\delta\nabla = 1\otimes d_{\mathcal{M}}$. И наоборот, если класс когомологий $[1\otimes d_{\mathcal{M}}]$ равен нулю, то есть коцикл $1\otimes d_{\mathcal{M}}$ является кограницей, то в качестве связности на E можно взять любую 0-коцепь, кограница которой равна $1\otimes d_{\mathcal{M}}$. □

Пусть $\mathcal{M}$-модуль E проективен и конечно-порождён. Покажем, что построенное препятствие равно нулю. На самом деле, мы докажем больше

Предложение 3.11. *Если модуль E проективный и конечно-порождённый, то для любого правого $\mathcal{M}$-модуля $\mathcal{N}$:*

$$H^n(E,\mathcal{M};\mathcal{N}) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(E,\mathcal{N}), & n=0 \\ \qquad 0, & n\neq 0. \end{cases}$$

Доказательство. Во-первых, из формулы (3.17) очевидно, что для любого модуля E, $H^0(E,\mathcal{M};\mathcal{N}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(E,\mathcal{N})$. Докажем, что при указанных условиях $H^n(E,\mathcal{M};\mathcal{N}) = 0$, $n > 0$. Пусть для начала $E = \mathcal{M}$ — свободный модуль с одной образующей. Рассмотрим отображение

$$s : C^n(E,\mathcal{M};\mathcal{N}) \to C^{n-1}(E,\mathcal{M};\mathcal{N}),\ n \geqslant 1 \\ s(\varphi)(m_0\otimes m_1\otimes\ldots\otimes m_{n-1}) = \varphi(1\otimes m_0\otimes m_1\otimes\ldots\otimes m_{n-1}). \tag{3.18}$$

Тогда

$$\delta s(\varphi)(m_0\otimes m_1\otimes\ldots\otimes m_n) = \\ = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i s(\varphi)(m_0\otimes\ldots\otimes m_im_{i+1}\otimes\ldots\otimes m_n) + (-1)^n s(\varphi)(m_0\otimes\ldots\otimes m_{n-1})m_n = \\ = \sum_{i=0}^{n-1}\varphi(1\otimes m_0\otimes\ldots\otimes m_im_{i+1}\otimes\ldots\otimes m_n) + \\ + (-1)^n\varphi(1\otimes m_0\otimes\ldots\otimes m_{n-1})m_n$$

и аналогично

$$s\delta(\varphi)(m_0 \otimes m_1 \otimes \ldots \otimes m_n) = \varphi(m_0 \otimes m_1 \otimes \ldots \otimes m_n) + \\ + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \varphi(1 \otimes m_0 \otimes \ldots \otimes m_i m_{i+1} \otimes \ldots \otimes m_n) + \\ + (-1)^{n+1} \varphi(1 \otimes m_0 \otimes \ldots \otimes m_{n-1}) m_n.$$

Складывая эти два равенства получаем, что $\delta s + s\delta = \mathrm{id}$, то есть s — стягивающая цепная гомотопия. Значит, $H^n(\mathcal{M}, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = 0,\ n \geqslant 1$. Заметим теперь, что если модуль E распадается в прямую сумму модулей: $E = E_1 \oplus E_2$, то соответствующий коцепной комплекс также распадается в прямую сумму

$$C^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = C^\bullet(E_1, \mathcal{M}; \mathcal{N}) \oplus C^\bullet(E_2, \mathcal{M}; \mathcal{N}),$$

и следовательно аналогичное разложение справедливо и для пространств когомологий:

$$H^*(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = H^*(E_1, \mathcal{M}; \mathcal{N}) \oplus H^*(E_2, \mathcal{M}; \mathcal{N}).$$

Таким образом доказываемое утверждение справедливо для произвольных свободных конечно-порождённых модулей $\mathcal{M}^n$.

Наконец, заметим, что любой морфизм модулей $f : E_1 \to E_2$ индуцирует отображение коцепных комплексов

$$f^\bullet : C^\bullet(E_2, \mathcal{M}; \mathcal{N}) \to C^\bullet(E_1, \mathcal{M}; \mathcal{N}),$$

причём $(fg)^\bullet = g^\bullet f^\bullet$ для любых $E_1 \xrightarrow{f} E_2 \xrightarrow{g} E_3$. Следовательно, любой морфизм модулей f задаёт отображение пространств когомологий $f^* : H^*(E_2, \mathcal{M}; \mathcal{N}) \to H^*(E_1, \mathcal{M}; \mathcal{N})$, причём $(fg)^* = g^* f^*$.

Пусть теперь E — проективный, конечно-порождённый модуль над $\mathcal{M}$. Это значит, что существует свободный конечно-порождённый модуль $\mathcal{M}^n$ и пара морфизмов модулей

$$i : E \to \mathcal{M}^n,\ p : \mathcal{M}^n \to E, \quad p \circ i = \mathrm{id}_E.$$

Тогда для произвольного элемента $h \in H^k(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$ при $k \geqslant 1$ имеем

$$h = \mathrm{id}_E^*(h) = (p \circ i)^*(h) = i^* p^*(h) = 0,$$

так как $p^*(h) \in H^k(\mathcal{M}^n, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = 0$ при $k \geqslant 1$. □

Займёмся теперь бимодулями. Мы будем рассматривать следующие случаи: или $E = \mathcal{E}_u$ — ассоциированноек векторное расслоение для некоторого квантового главного расслоения P, и тогда мы будем искать связность ∇ как отображение из E в $\mathcal{F}_u^1 = \mathcal{N}$, удовлетворяющее условиям (3.12), или, для произвольного бимодуля E, мы будем искать « полу-классические связности» то есть отображения $\nabla : E \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{Der}(\mathcal{M}), E) = \mathcal{N}$, удовлетворяющие уравнениям (3.13). Тогда вышеописанная конструкция может быть обобщена на бимодули двумя способами.

Во-первых, можно рассмотреть коцепной комплекс

$$C_{bi}^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = \bigoplus_{n \geqslant 0} C_{bi}^n(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}),$$
$$C_{bi}^n(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\Big(\sum_{i+j=n}^{\oplus} \mathcal{M}^{\otimes i} \otimes E \otimes \mathcal{M}^{\otimes j}, \mathcal{N}\Big), \qquad (3.19)$$

с дифференциалом

$$\begin{aligned}\delta_{bi}\varphi(m_1 \otimes \ldots \otimes m_1 \otimes e \otimes m'_1 \otimes \ldots \otimes m'_j) = \\ = m_1\varphi(m_2 \otimes \ldots \otimes m_i \otimes e \otimes m'_1 \otimes \ldots \otimes m'_j) + \\ + \sum_{l=1}^{i-1}(-1)^l\varphi(m_1 \otimes \ldots \otimes m_l m_{l+1} \otimes \ldots \otimes m_i \otimes e \otimes m'_1 \otimes \ldots \otimes m'_j) + \\ + (-1)^i\varphi(m_1 \otimes \ldots \otimes m_i e \otimes m'_1 \otimes \ldots \otimes m'_j) + \\ + (-1)^{i+1}\varphi(m_1 \otimes \ldots \otimes m_i \otimes e m'_1 \otimes \ldots \otimes m'_j) + \\ + \sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{i+k+1}\varphi(m_1 \otimes \ldots \otimes m_i \otimes e \otimes m'_1 \otimes \ldots \otimes m'_k m'_{k+1} \otimes \ldots \otimes m'_j) + \\ + (-1)^{n+2}\varphi(m_1 \otimes \ldots \otimes m_i \otimes e \otimes m'_1 \otimes \ldots \otimes m'_{j-1})m'_j, \quad (3.20)\end{aligned}$$

где $i + j = n + 1$. Точно так же, как и раньше проверяем, что $\delta_{bi}^2 = 0$. Вместо коцепи $1 \otimes d_{\mathcal{M}}$ рассмотрим коцепь

$$1 \otimes d_{\mathcal{M}} - d_{\mathcal{M}} \otimes 1 \in C^1_{bi}(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}), \tag{3.21}$$

$$(1 \otimes d_{\mathcal{M}} - d_{\mathcal{M}} \otimes 1)(m_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes m_2) = d_{\mathcal{M}}(m_1)e_1 - e_2 d_{\mathcal{M}}(m_2), \tag{3.22}$$

(соответственно,

$$(1 \otimes d_{\mathcal{M}} - d_{\mathcal{M}} \otimes 1)_X(m_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes m_2) = X(m_1)e_1 - e_2 X(m_2),$$

если $\mathcal{N} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathfrak{der}(\mathcal{M}), E)$).

Точно так же, как и раньше доказываем, что $\delta_{bi}(1 \otimes d_{\mathcal{M}} - d_{\mathcal{M}} \otimes 1) = 0$, и что $0 = [1 \otimes d_{\mathcal{M}} - d_{\mathcal{M}} \otimes 1] \in H^1_{bi}(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$ тогда и только тогда, когда на бимодуле E существует связность ∇ со значениями в $\mathcal{N}$.

Предложение 3.12. *Если для бимодуля E существует такой свободный конечно-порождённый бимодуль $\mathcal{M}^n$, что определены морфизмы* **би***модулей $i : E \to \mathcal{M}^n$, $p : \mathcal{M}^n \to E$ такие, что $p \circ i = \mathrm{id}_E$, то для любого бимодуля $\mathcal{N}$*

$$H^n_{bi}(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathcal{M},\mathcal{M}}(E, \mathcal{N}), & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

(здесь $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M},\mathcal{M}}$ обозначает пространство морфизмов бимодулей).

Доказательство. Совершенно аналогично доказательству предложения 3.11, только вместо гомотопии s следует рассмотреть $s_{bi} : C^n_{bi}(\mathcal{M}, \mathcal{M}; \mathcal{N}) \to C^{n-1}_{bi}(\mathcal{M}, \mathcal{M}; \mathcal{N})$:

$$\begin{aligned}s_{bi}(\varphi)(m_{-i} \otimes \ldots \otimes m_0 \otimes \ldots \otimes m_j) = \\ = \sum_{k=-i}^{j+1}(-1)^{k+i}\varphi(m_{-i} \otimes \ldots \otimes m_{k-1} \otimes 1 \otimes m_k \otimes \ldots \otimes m_j).\end{aligned}$$

если $i + j = n - 1$. □

Мы видим, что для существования связности на *би*-модуле E, вообще говоря. недостаточно, чтобы он был проективным и конечно-порождённым как левый (или правый) модуль над $\mathcal{M}$.

Описанный критерий существоания связностей на бимодулях не очень удобен: комплекс $C^\bullet_{bi}(E,\mathcal{M};\mathcal{N})$ очень громоздкий и вычислять его когомологии достаточно сложно. Однако, нетрудно заметить, что он, на самом деле равен тотальному сомплексу $\mathrm{Tot}(C^{p,q}(E,\mathcal{M};\mathcal{N}))$, где

$$C^{p,q}(E,\mathcal{M};\mathcal{N})=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}^{\otimes p}\otimes E\otimes\mathcal{M}^{\otimes q},\mathcal{N}) \tag{3.23}$$

с дифференциалами

$$\delta' : C^{p,q}(E,\mathcal{M};\mathcal{N})\to C^{p+1,q}(E,\mathcal{M};\mathcal{N}),$$
$$\delta'' : C^{p,q}(E,\mathcal{M};\mathcal{N})\to C^{p,q+1}(E,\mathcal{M};\mathcal{N})$$

задаваемыми формулами

$$\begin{aligned}\delta'\varphi(m_1\otimes\ldots\otimes m_p\otimes m_{p+1}\otimes e\otimes m'_1\otimes\ldots\otimes m'_q) &=\\ &= m_1\varphi(m_2\otimes\ldots\otimes m_{p+1}\otimes e\otimes m'_1\otimes\ldots\otimes m'_q)+\\ &+\sum_{i=1}^{p}(-1)^i\varphi(m_1\otimes\ldots\otimes m_im_{i+1}\otimes\ldots\otimes m_{p+1}\otimes e\otimes m'_1\otimes\ldots\otimes m'_q)+\\ &+(-1)^{p+1}\varphi(m_1\otimes\ldots\otimes m_p\otimes m_{p+1}e\otimes m'_1\otimes\ldots\otimes m'_q)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(-1)^{p+1}\delta''\varphi(m_1\otimes\ldots\otimes m_p\otimes e\otimes m'_1\otimes\ldots\otimes m'_q\otimes m'_{q+1}) &=\\ &=\varphi(m_1\otimes\ldots\otimes m_p\otimes em'_1\otimes m'_2\otimes\ldots\otimes m'_{q+1})+\\ &+\sum_{j=1}^{q}(-1)^j\varphi(m_1\otimes\ldots\otimes m_p\otimes e\otimes m'_1\otimes\ldots\otimes m'_jm'_{j+1}\otimes\ldots\otimes m'_{q+1})+\\ &+(-1)^{q+1}\varphi(m_1\otimes\ldots\otimes m_p\otimes e\otimes m'_1\otimes\ldots\otimes m'_q)m'_{q+1}.\end{aligned}$$

Несложно проверить, что $\delta'^2=\delta''^2=\delta'\delta''+\delta''\delta'=0$. Рассмотрим фильтрацию F_r тотального комплекса $C^\bullet_{bi}(E,\mathcal{M};\mathcal{N})$ бикомплекса $C^{p,q}(E,\mathcal{M};\mathcal{N})$

$$F_r(C^\bullet_{bi}(E,\mathcal{M};\mathcal{N}))=\mathrm{Tot}(C^{p,q}(E,\mathcal{M};\mathcal{N}),p\geqslant r).$$

Заметим, что первый член спектральной последовательности, ассоциированной с этой фильтрацией равен $E_1^{p,q}=H^p(C^{\cdot,q}(E,\mathcal{M};\mathcal{N}),\delta')$. В частности, если модуль E конечнопорождён и проективен как левый $\mathcal{M}$-модуль, то рассуждения, аналогичные доказательству предложения 3.11 показывают, что $E_1^{0,q}=\mathrm{Hom}_{\mathcal{M},\cdot}(E\otimes\mathcal{M}^{\otimes q},\mathcal{N})$, и $E_1^{p,q}=0$, $p\neq 0$ (здесь $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M},\cdot}$ обозначает пространство морфизмов левых $\mathcal{M}$-модулей). Рассмотрим коцепной комплекс

$$\tilde{C}^\bullet(E,\mathcal{M};\mathcal{N})=\bigoplus_{n\geqslant 0}\tilde{C}^n(E,\mathcal{M};\mathcal{N}),$$
$$\tilde{C}^n(E,\mathcal{M};\mathcal{N})=\mathrm{Hom}_{\mathcal{M},\cdot}(E\otimes\mathcal{M}^{\otimes n},\mathcal{N}), \tag{3.24}$$

с дифференциалом, задаваемым формулой

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}\varphi(e\otimes m_1\otimes\ldots\otimes m_{n+1}) &=\varphi(em_1\otimes\ldots\otimes m_{n+1})+\\ &+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\varphi(e\otimes m_1\otimes\ldots\otimes m_im_{i+1}\otimes\ldots\otimes m_{n+1})+\\ &+(-1)^{n+1}\varphi(e\otimes m_1\otimes\ldots\otimes m_n)m_{n+1}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Тогда, очевидно, $E_2^{p,q} = \begin{cases} \tilde{H}^q(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}), p = 0, \\ \qquad 0, \qquad p \neq 0 \end{cases}$

Рассматриваемая спектральная последовательность вырождается на втором члене и когомологии $H^*_{bi}(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$ равны $\tilde{H}^*(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$. Найдём, во что переходит при этом изоморфизме класс $1 \otimes d_{\mathcal{M}} - d_{\mathcal{M}} \otimes 1$.

Как следует из предложения 3.11, если бимодуль E конечно-порождён и проективен как левый модуль, то на нём существуют « левые связности» то есть существуют отображения $\nabla : E \to \mathcal{N}$, удовлетворяющие второму из соотношений (3.12) (или (3.13)). Тогда, очевидно, коцикл $d_{\mathcal{M}} \otimes 1 \in C^{1,0}(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$ переходит в

$$\tilde{\nabla} \in \tilde{C}(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}), \ \tilde{\nabla}(e \otimes m) = \nabla(em) - \nabla(e)m. \tag{3.26}$$

Поэтому, так как коцикл $1 \otimes d_{\mathcal{M}} \in C^{0,1}(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) \bigcap \tilde{C}^1(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$ выживает без изменений в члене E^1 спектральной последовательности, получаем, что класс $1 \otimes d_{\mathcal{M}} - d_{\mathcal{M}} \otimes 1$ превращается в

$$[1 \otimes d_{\mathcal{M}} - \tilde{\nabla}] \in \tilde{H}^1(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}). \tag{3.27}$$

Замечание. На самом деле, полученный критерий равенства нулю класса $[1 \otimes d_{\mathcal{M}} - \tilde{\nabla}]$ работает в более общем случае: достаточно, чтобы на модуле E существовала « односторонняя связность», то есть отображение $\nabla : E \to \mathcal{N}$, удовлетворяющее одному из условий (3.12) (или (3.13)). В самом деле, для любого бимодуля E у которого существует « левая связность», то есть отображение ∇, удовлетворяющее второму из уравнений (3.12) (или (3.13)), можно рассмотреть комплекс $\tilde{C}^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$ и прямым вычислением можно проверить, что $\tilde{\delta}(1 \otimes d_{\mathcal{M}} - \tilde{\nabla}) = 0$ и что класс $[1 \otimes d_{\mathcal{M}} - \tilde{\nabla}] \in \tilde{H}^1(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$ не зависит от выбора односторонней связности ∇. С другой стороны, если связность ∇ удовлетворяет обоим условиям (3.12) (или (3.13)) то $1 \otimes d_{\mathcal{M}} - \tilde{\nabla} = 0$. В случае, когда существует « правая связность», то есть отображение ∇, для которого выполняется первое из равенств (3.12) (или (3.13)), вместо комплекса $\tilde{C}^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$ следует рассмотреть

$$\tilde{\tilde{C}}^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \tilde{\tilde{C}}^n(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}),$$

$$\tilde{\tilde{C}}^n(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) = \mathrm{Hom}_{\cdot, \mathcal{M}}(\mathcal{M}^{\otimes n} \otimes E, \mathcal{N}) \tag{3.28}$$

и соответствующим дифференциалом $\tilde{\tilde{\delta}}$. При этом роль коцепи $1 \otimes d_{\mathcal{M}} - \tilde{\nabla}$ из (3.26) будет играть $\tilde{\tilde{\nabla}} - d_{\mathcal{M}} \otimes 1$, где

$$\tilde{\tilde{\nabla}} : \mathcal{M} \otimes E \to \mathcal{N}, \ \tilde{\tilde{\nabla}}(m \otimes e) = m\nabla(e) - \nabla(me).$$

Так же, как и прежде, эта конструкция получается, в случае, если E — проективен и конечно-порождён как правый модуль, из анализа бикомплекса (3.23).

Приведём два примера

Пример 3.2.1. Пусть $\mathcal{M} = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, тогда $\mathfrak{Der}(\mathcal{M}) = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}$ и все дифференцирования —внутренние, а центр алгебры $\mathcal{M}$ изоморфен $\mathbb{C}$, он состоит из скалярных матриц. Пусть $R \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$ — произвольная невырожденная матрица. Рассмотрим бимодуль E над $\mathcal{M}$, такой, что, как векторное пространство над $\mathbb{C}$, E совпадает с $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, причём структура левого модуля над $\mathcal{M}$ задаётся стандартным умножением матриц, а структура правого модуля определена как $\cdot B = ARBR^{-1}$. Мы будем искать связности в смысле (3.13). Поэтому положим

$$\mathcal{N} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{Der}(\mathcal{M}), E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})) \cong$$
$$\cong \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \cong \mathrm{Mat}_n(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})).$$

Так как модуль E — свободный модуль с одной образующей, как левый (и как правый) модуль над $\mathcal{M}$, то для него, конечно, существуют односторонние (левые) связности. Например, такой связностью будет тривиальное отображение $\nabla : E \to \mathcal{N}$, $\nabla_X(A) = [A, X]$ (здесь $[,]$ обычный коммутатор матриц). С другой стороны, прямое вычисление показывает, что отображение

$$T : \tilde{C}^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) \to CH^\bullet(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), \mathcal{N}),$$
$$T\varphi(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n) = \varphi(1 \otimes R^{-1}A_1R \otimes \ldots \otimes R^{-1}A_nR)$$

задаёт изоморфизм между комплексом $\tilde{C}^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$ и комплексом для вычисления когомологий Хохшильда $CH^\bullet(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), \mathcal{N})$. При этом коцепь $\tilde{\nabla} - 1 \otimes d_{\mathcal{M}}$ переходит в

$$\Phi : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{N},\ \Phi_X(A) = [R^{-1}AR, X] - R^{-1}[A, X]R.$$

Однако, из теоремы Мориты об эквивалентности следует, что

$$HH^n(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), \mathcal{N}) = HH^n(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Mat}_n(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}))) \cong$$
$$\cong HH^n(\mathbb{C}, \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})) = \begin{cases} \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Значит препятствие равно нулю и связность на E существует.

Пример 3.2.2. Пусть $\mathcal{M} = \mathrm{Mat}_n(C^\infty(M))$, где M некоторое гладкое многообразие, $E = \mathrm{Mat}_n(C^\infty(M))$, причём структура левого модуля на E задано обычным умножением матриц, а структура правого модуля — формулой $A(x) \cdot B(x) = A(x)R(x)B(x)R^{-1}(x)$, где $R(x)$ — семейство невырожденных матриц на многообразии. Пусть $\mathcal{N} = \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathrm{Vect}(M), \mathrm{Mat}_n(C^\infty(M))) \cong \mathrm{Mat}_n(\Omega^1(M))$, где $\mathrm{Vect}(M)$ — пространство гладких векторных полей на M, а $\Omega^1(M)$ пространство гладких дифференциальных один-форм на M.

Опять, так как модуль E — свободный модуль с одной образующей, как левый (и правый) модуль над $\mathcal{M}$, то на нём существуют односторонние связности. Например, такой связностью будет отображение

$$\nabla : E \to \mathcal{N},\ \nabla_\xi(A(x)) = \xi(A(x))$$

для любого гладкого поля ξ на M.

С другой стороны, точно так же, как и выше, отображение

$$T : \tilde{C}^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N}) \to CH^\bullet(\mathrm{Mat}_n(C^\infty(M)), \mathcal{N}),$$

$$T\varphi(A_1(x) \otimes \ldots \otimes A_n(x)) =$$
$$= \varphi(1 \otimes R^{-1}(x)A_1(x)R(x) \otimes \ldots \otimes R^{-1}(x)A_n(x)R(x))$$

задаёт изоморфизм между $\tilde{C}^\bullet(E, \mathcal{M}; \mathcal{N})$ и $CH^\bullet(\mathrm{Mat}_n(C^\infty(M)), \mathcal{N})$, причём коцепь $\tilde{\nabla} - 1 \otimes d_{\mathcal{M}}$ переходит в

$$\Phi \in CH^1(\mathrm{Mat}_n(C^\infty(M)), \mathcal{N}),$$
$$\Phi_\xi(A(x)) = \xi(R(x))R^{-1}(x)A(x) - A(x)\xi(R(x))R^{-1}(x).$$

Далее, согласно теореме Мориты об эквивалентности

$$HH^*(\mathrm{Mat}_n(C^\infty(M)), \mathcal{N}) = HH^*(\mathrm{Mat}_n(C^\infty(M)), \mathrm{Mat}_n(\Omega^1(M))) \cong$$
$$\cong HH^*(C^\infty(M), \Omega^1(M)).$$

Эта эквивалентность задаётся отображением (см. [10])

$$\mathrm{inc}^* : CH^n(\mathrm{Mat}_n(C^\infty(M)), \mathrm{Mat}_n(\Omega^1(M))) \to CH^n(C^\infty(M), \Omega^1(M)),$$
$$\mathrm{inc}^* F(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = F(E_{11}^{f_1} \otimes \ldots \otimes E_{11}^{f_n})_{11}, \tag{3.29}$$

где E_{11}^f — матрица, в которой все элементы, кроме элемента (1,1) равны нулю, а этот элемент равен f, и $F(\cdot)_{11}$ — (1,1)-элемент матрицы $F(\cdot)$. Нетрудно проверить, что $\mathrm{inc}^*\Phi = 0$. Значит на E существуют связности. Например, связностью будет отображение $\nabla'_\xi(A(x)) = \xi((A(x)) + A(x)\xi(R(x))R^{-1}(x)$.

Пример бимодуля, для которого найденное нами препятствие (в случае полуклассического дифференциального исчисления) отлично от нуля можно найти в работе [24]. В заключение, опишем связь между препятствиями, построенными в этом параграфе и дифференцированиями θ_ω из предыдущего. Для этого нам потребуется следуещее простое предложение:

Предложение 3.13. *Ограничение оператора ковариантного дифференцирования D_ω, построенного по произвольной связности ω на главном расслоении P на произвольное векторное расслоение $\mathcal{E}$, ассоциированное с P, будет левой связностью (то есть для него будет выполняться второе из равенств* (3.12)*).*

Доказательство. Напомним, что, так как D_ω — $\mathcal{A}$-эквивариантное отоьражение, его композиция с произвольным морфизмом $f : H_u \to \mathcal{B}$ будет морфизмом $D_\omega f : H_u \to \mathfrak{hor}(P)$. Именно эту композицию мы и называем ограничением ковариантной производной на $\mathcal{E} = \mathcal{E}_u$. Поэтому нам достаточно проверить анлогичное свойство D_ω как отображения из $\mathfrak{hor}(P)$ в $\mathfrak{hor}(P)$. Пусть $\psi \in \mathfrak{hor}(P)$ — произвольный элемент, и пусть $\varphi \in \Omega(\mathcal{M})$. Вычислим:

$$D_\omega(\varphi\psi) = d(\varphi\psi) - (-1)^{\partial\varphi + \partial\psi} \sum_l \varphi\psi_l \omega(\pi(d_l)) =$$
$$= d_{\mathcal{M}}(\varphi)\psi + (-1)^{\partial\varphi}\varphi D_\omega(\psi). \tag{3.30}$$

В частности, для любого $m \in \mathcal{M}, \psi \in \mathcal{E}_u,\ D_\omega(m\psi) = d_{\mathcal{M}}(m)\psi + mD_\omega(\psi)$. ☐

Аналогично равенству (3.30) получаем

$$D_\omega(\psi\varphi) = D_\omega(\psi)\varphi +$$
$$+ (-1)^{\partial\psi}\psi d_{\mathcal{M}}(\varphi) + (-1)^{\partial\psi} \sum_l \psi_l l_\omega(\pi(d_l) \otimes \varphi). \tag{3.31}$$

для любых $\psi \in \mathfrak{hor}(P),\ \varphi \in \Omega(\mathcal{M})$. В частности, из этого следует, что ковариантное дифференцирование D_ω можно использовать для построения препятствия $\tilde{\nabla} - 1 \otimes d_{\mathcal{M}}$ для модуля $\mathcal{E}_u$ и это препятствие оказывается равно отображению

$$a_\omega : \mathcal{E}_u \otimes \mathcal{M} \to \mathcal{F}_u^1,$$
$$\mathrm{Mor}(u, F) \otimes \mathcal{M} = \mathcal{E}_u \otimes \mathcal{M} \ni f \otimes m \mapsto a_\omega(f \otimes m) \in \mathcal{F}_u^1 = \mathrm{Mor}(u, \mathfrak{hor}^1(P)),$$
$$\big(a_\omega(f \otimes m)\big)(e_i) = \sum_{k=1}^{n_u} f(e_k) l_\omega(\pi(u_{ki} \otimes m), \tag{3.32}$$

где e_i базис в H_u, а u_{ij} — матричные элементы представления u.

Рассмотрим диаграмму, определяющую « канонический след» отображения a_ω (ср. §1.5):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_{\bar{u}} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_u \otimes \mathcal{M} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes a_\omega"] & \mathcal{E}_{\bar{u}} \otimes_{\mathcal{M}} \mathcal{E}_u \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) \arrow[d, "\langle\rangle_u^-"] \\
\mathcal{M} \otimes \mathcal{M} \arrow[u, "\gamma_*^u \otimes \mathrm{id}"] \arrow[r, "\widetilde{tr_{\mathcal{M}}}(a_\omega)"] & \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{M}} \Omega(\mathcal{M}) = \Omega(\mathcal{M})
\end{tikzcd}$$

Предложение 3.14. $\widetilde{tr_{\mathcal{M}}}(a_\omega)(1 \otimes m) = (tr(C_u^{-1}\tilde{u}))_\omega(m)$ *(здесь C_u — канонический морфизм, и $\tilde{u}$ — матрица представления u).*

Доказательство. Это — прямое следствие формул (3.32), (1.46) и (1.45). ☐

Литература

[1] Woronowicz S. L.: Twisted $SU(2)$ group. An example of noncommutative differential calculus. RIMS, Kyoto University 23, 117-181 (1987)

[2] Woronowicz S. L. Compact Matrix Pseudogroups. Commun. Math. Phys. **111**, 613-665 (1987)

[3] Woronowicz S. L. Differential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups (Quantum Groups). Commun. Math. Phys. **122**, 125-170 (1989)

[4] Woronowicz S. L. Tannaka-Krein Duality for Compact Matrix Pseudogroups. Twisted $SU(n)$ groups. Invent. Math. **93**, 35-76 (1988)

[5] Durdevic M. Geometry of Quantum Principal Bundles I. Commun. Math. Phys. **175**, 457-520 (1996)

[6] Durdevic M. Geometry of Quantum Principal Bundles II. Rev. Math. Phys. **9**, (5) 531-603 (1997)

[7] Durdevic M. Characteristic Classes of Quantum Principal Bundles. Preprint, Institute of Mathematics, UNAM, Mexico (1995)

[8] Durdevic M. Quantum Principal Bundles and Tannaka-Krein Duality Theory. Rep. Math. Phys. **38**, (3) 313-324 (1996)

[9] Durdevic M. Differential Structures on Quantum Principal Bundles. Rep. Math. Phys. **41**, (1) 91-115 (1998)

[10] Loday J-L. Cyclic Homology. A series of Comprehensive Studies in Mathematics **301**, Springer-Verlag (1992)

[11] Kreimer H. F., Takeuchi M. Hopf Algebras and Galois Extension of an Algebra. Indiana Univ. Mathematics Journal, **30**, (5) 675-692 (1981)

[12] Sweedler M. E. Hopf Algebras. W. A. Benjamin, Inc., New-YorK, 1969

[13] Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев Квантование групп Ли и алгебр Ли. Алгебра и Анализ, том 1, вып. 1, 178-206 (1989)

[14] Schmüdgen K., Schüler A. Classification of Bicovariant Differerntial Calculi on Quantum Groups of Type A, B, C and D. Commun. Math. Phys. **167** (2) 635-670 (1995)

[15] Garow-Watamura U., Schlieker M., Watamura S., Weich W. Bicovariant Differential Calculi on Quantum Groups $SU_q(n)$ and $SO_q(n)$. Commun. Math. Phys. **142**, 605-641 (1991)

[16] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основания дифференциальной геометрии. т.2, Наука, М. 1981

[17] Majid S., Brzezinski T. Quantum Goroup Gauge Theory on Quantum Spaces. Commun. Math. Phys. **157**, 591-638 (1993)

[18] Жураев Ю. Й. Характеристические классы модулей над некоммутативными алгебрами. Диссертация на соискание учёной степени канд. физ.-мат. наук, Москва, 1988

[19] Жураев Ю. Й., Мищенко А. С., Соловьёв Ю. П. О характеристических классах в алгебраической K-теории. Вестник Моск. ун-та. сер. 1. матем. механ., N 1, с. 75-76 (1986)

[20] Schupp P. Quantum Groups, Non-Commutative Differential Geometry and Applications. Dissertation, submitted,. . . , Univ. of California, Berkeley, 1993

[21] Connes A. Géométrie non-commutative. Publ. Math. IHES **62**, 41 (1986)

[22] Karoubi M. Homologie ciclique et K-théorie. Astérisque **149**, 1987

[23] Шарыгин Г. И. Образ гомоморфизма Вейля в случае квантового главного расслоения. Вестник Моск. ун-та. сер. 1. матем. механ. N 4, с. 21-27 (2000)

[24] Шарыгин Г. И. Препятствие для существования связности на бимодуле. Вестн. Моск. ун-та. сер. 1. матем. механ. N 6, с. 63-65 (2000)

[25] Шарыгин Г. И. Квантовые главные расслоения, связности и характеристические классы. Тезисы доклада на международной конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения Г. Ф. Лаптева. Москва, изд. мех.-мат. ф-та МГУ, с. 58, (1999).