

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ
РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 515.1

Селиванова Елена Николаевна

**Траекторная классификация геодезических потоков
лиувиллевых метрик на двумерных многообразиях**

01.01.04. - геометрия и топология

Научный руководитель —
д. ф.-м. н., академик РАН,
профессор А.Т. Фоменко

Москва 1995

Содержание

Введение.	4
Глава 1. Топологическая классификация лиувиллевых метрик на двумерном торе.	
§1. Условие невырожденности (боттовости).	20
§2. Построение топологического инварианта, мечной молекулы ИГС.	24
§3. Основная теорема. Способ дискретного кодирования лиувиллевых метрик на торе.	30
§4. Геодезические потоки лиувиллевых метрик на торе в молекулярной таблице сложности ИГС.	36
Глава 2. Траекторная классификация геодезических потоков лиувиллевых метрик на двумерном торе.	
§1. Построение траекторного инварианта. Основная теорема.	40
§2. Нетривиальность множеств классов траекторной эквивалентности, их топологические свойства.	47
§3. Свойства функции вращения: Примеры.	

§4. Теорема реализации.

60

§5. Приложения траекторной классификации геодезических потоков: свойства геодезических лиувиллевых метрик на двумерном торе, единственность лиувиллевого типа, геодезическая эквивалентность.

63

Список литературы.

80

Введение

Риманова метрика называется лиувиллевой, если в некоторых координатах она приводится к виду

$$ds^2 = (h(x+y) - f(x-y))dxdy.$$

Один из самых ранних результатов о свойствах таких метрик — это замечательная теорема Дини,[1], о том, что если существует диффеоморфизм конфигурационных многообразий, переводящий геодезические одной метрики в геодезические другой, то обе метрики являются лиувиллевыми и в некоторых координатах имеют вид

$$ds^2 = (U(u) - V(v))(U_1(u)du^2 + V_1(v)dv^2),$$
$$ds'^2 = \left(\frac{1}{V(v)} - \frac{1}{U(u)} \right) \left(\frac{U_1(u)}{U(u)} du^2 + \frac{V_1(v)}{V(v)} dv^2 \right).$$

Ранее Бельтрами решалась такая задача для поверхностей постоянной гауссовой кривизны.

Рассмотрим конформный вид линейного элемента в некоторых локальных координатах x, y :

$$ds^2 = \lambda(x, y)dxdy.$$

Если метрика лиувиллева, то

$$ds^2 = \lambda(x, y)dxdy = (h(x'+y') - f(x'-y'))dx'dy',$$

$$x' = \int \frac{dx}{\sqrt{X(x)}}, \quad y' = \int \frac{dy}{\sqrt{Y(y)}}.$$

Дарбу в [2] доказана теорема о том, что лиувиллевость эквивалентна следующему уравнению в частных производных:

$$2X\lambda_{xx} - 2Y\lambda_{yy} + 3X'\lambda_x -$$

$$-3Y'\lambda_y + (X'' - Y'')\lambda = 0$$

для некоторых функций $X(x)$ и $Y(y)$.

Теорема Дарбу является ответом (хотя и не совсем эффективным) на вопрос о существовании локальных лиувиллевых координат. В дальнейшем эта тематика нашла развитие в работах Бианки, см. [3]. Им был найден эффективный критерий существования лиувиллевых координат, когда одна из функций f или h равна константе. Этот критерий выражается в условии зависимости пары функций, определяемых гауссовой кривизной метрики и является следствием общего критерия Бианки о соответствии двух линейных элементов.

Рассмотрим линейный элемент в локальных координатах x, y в области U :

$$ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2).$$

Рассмотрим кокасательное расслоение T^*U — симплектическое многообразие со стандартной симплектической структурой.

Геодезический поток метрики $ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$ — это гамильтонова система $v = sgradH$ в кокасательном расслоении T^*U с гамильтонианом

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{\lambda(x, y)}.$$

Общеизвестно, что проекция решения системы v на конфигурационное многообразие — это решения уравнений геодезических данной метрики.

Дарбу в [2] доказана теорема о том, что метрика является лиувиллевой тогда и только тогда, когда ее геодезический поток обладает дополнительным интегралом, квадратичным по импульсам и независимым с интегралом энергии.

В классической литературе обсуждался и вопрос о том, сколькими способами данный линейный элемент можно привести к лиувиллевому виду. Дарбу в [2] рассматривалась такая задача для поверхностей постоянной кривизны и поверхностей вращения. Им был получен следующий ответ: линейный элемент вида

$$ds^2 = du^2 + \frac{1}{U''(u)} dv^2$$

имеет нестривиальный (не сводящийся к линейному) квадратичный по импульсам дополнительный интеграл независимый с интегралом энергии тогда и только тогда, когда для функции $U(u)$ выполнено следующее равенство:

$$du = \int \frac{dU'}{mU'^4 + nU'^2 + m'}$$

для произвольных констант m, n, m' .

Развивая результаты, полученные С. Ли и Дарбу, другой французский математик Раффи в [4] получил окончательный ответ на этот вопрос. Им доказана теорема о том, что линейный элемент приводится к лиувиллевому виду с помощью пар функций h, f и X, Y тогда и только тогда, когда выполнено следующее равенство:

$$\begin{aligned} & 2(X - Y)(h'' - f'') + 3X'(h' - f') - \\ & - 3Y'(h' + f') + (X'' - Y'')(h - f) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение Раффи удалось применить к некоторым специальным видам метрик и получить описание их классов изометрии. Однако это уравнение не дает ответа на вопрос в случае произвольной метрики, в частности, глобально определенной лиувиллевой метрики на торе и сфере.

Таким образом, различные свойства лиувиллевых метрик, главным образом локальные, активно изучались классиками прошлого и нынешнего веков, ими был получен ряд классических по своей красоте результатов.

Новый подход к изучению глобальных свойств лиувиллевых метрик на 2-многообразиях был предложен А.Т. Фоменко.

Рассматривается геодезический поток лиувиллевой метрики — гладкая динамическая система в кокасательном расслоении к многообразию. Эта система является интегрируемой гамильтоновой системой (наличие дополнительного квадратичного по импульсам интеграла было отмечено Дарбу в [2]). Таким образом, для геодезических потоков лиувиллевых метрик на 2-многообразиях применимы результаты теории классификации ИГС, активно изучаемой в работах А.Т. Фоменко и его учеников,[5]-[12].

Здесь важно отметить, что В.В. Козловым в [13] и В.Н. Колокольцовым в [14] было доказано несуществование аналитического по импульсам интеграла у геодезического потока римановой метрики на поверхностях рода $g > 1$.

Определение. Две гладкие динамические системы называются *непрерывно или топологически траекторно эквивалентными*, если существует гомеоморфизм одного многообразия на другое, который переводит траектории первой системы в траектории второй системы с сохранением их естественной ориентации, при этом не требуется, чтобы сохранялось время вдоль траекторий.

А.Т. Фоменко и А.В. Болсиновым была поставлена задача о траекторной классификации геодезических потоков лиувиллевых метрик на двумерных многообразиях. Заметим, что эта задача является в неко-

тором смысле двойственной к выполненной (уже более ста лет назад) геодезической классификации Дини, см. выше.

Основной результат настоящей диссертации — это классификация геодезических потоков лиувиллевых метрик на двумерном торе с точностью до непрерывной траекторной эквивалентности. (Далее всюду для краткости будем говорить просто о траекторной эквивалентности).

Как следствия траекторной классификации получены и условия Дини для геодезической эквивалентности рассматриваемых пространств, условия эквивалентности двух лиувиллевых метрик на торе (в смысле существования замены координат, переводящих одну метрику в другую) и необходимые условия эквивалентности геодезических потоков как гладких динамических систем в кокасательном раслоении к тору.

В диссертации применяется теория траекторной классификации ИГС, выполненная А.Т. Фоменко и А.В. Болсиновым в работах [11], [12]. Аппарат этой теории позволяет получить критерий траекторной эквивалентности рассматриваемых систем на торе и обнаружить интересные свойства множества классов эквивалентности потоков. Одним из таких свойств явилось существование в любой окрестности произвольной лиувиллевой метрики на торе в C^1 -топологии целого семейства метрик с траекторно эквивалентными геодезическими потоками. С другой стороны, обсуждаемая здесь задача может стать красивой и содержательной иллюстрацией к общей теории А.Т. Фоменко и А.В. Болсинова.

Введем здесь некоторые определения, необходимые при формулировке и доказательстве результатов диссертации.

Пусть M^4 — гладкое симплектическое многообразие и $v = sgradH$ гамильтонова система с гладким гамильтонианом H , интегрируемая по Лиувиллю на отдельной невырожденной компактной изоэнергетической поверхности $Q^3 = \{H = const\}$. Пусть функция $F : Q^3 \rightarrow \mathbf{R}$ — дополнительный интеграл на Q^3 , функционально независимый и коммутирующий с H . Известно, что связные невырожденные компактные поверхности уровня функции F на Q^3 являются двумерными торами Лиувилля.

Далее всюду будем предполагать боттовость дополнительного интеграла и нерезонансность системы v .

Определение. Гладкий интеграл F называется боттовским на Q^3 , если его критические многообразия невырождены.

Определение. Система $v = sgradH$ нерезонансна на Q^3 , если лиувиллевы торы с иррациональной обмоткой всюду плотны на Q^3 .

Определение. Лиувиллевым слоением системы $v = sgradH$ на Q^3 называется разбиение многообразия Q^3 на торы Лиувилля и связные компоненты критических поверхностей уровня интеграла F .

Определение. Две ИГС v_1 и v_2 на ориентируемых многообразиях Q_1, Q_2 соответственно, называются *тонко топологически эквивалентными*, если существует сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $h : Q_1 \rightarrow Q_2$, который переводит лиувиллево слоение системы v_1 в лиувиллево слоение системы v_2 с сохранением ориентации изолированных критических окружностей.

В работах [5]-[10] предложен эффективный алгоритм построения инварианта, классифицирующего нерезонансные ИГС с боттовским интегралом с точностью до тонкой топологической эквивалентности.

Рассмотрим интеграл F как функцию на изоэнергетической поверхности $Q^3 = \{H = const\}$. Неособые поверхности уровня функции

F на Q^3 являются по известной теореме торами Лиувилля, организованными в однопараметрические семейства. Рассмотрим окрестность U^3 критического значения с интеграла F на Q^3 . В большинстве случаев U^3 — это прямое произведение двумерной поверхности P^2 , являющейся сечением лиувиллего слоения в окрестности $F = c$ на окружность S^1 . Поверхность уровня $\{F = c\}$ пересекает P^2 по некоторой кривой K_c .

Атомом называется поверхность P^2 со вложенным в нее графом K_c . Полный список атомов, то есть всех возможных типов особенностей слоения Лиувилля, приведен в [10], где каждому атому ставится в соответствие некоторая буква-атом. Например, атом A обозначает всегда минимаксную особенность лиувиллего слоения, атом B обозначает простейшую особенность седлового типа.

Построим теперь граф W , ребра которого отвечают однопараметрическим семействам торов Лиувилля, вершины обозначены буквами-атомами. Граф W был назван молекулой ИГС. Две молекулы одинаковы, если соответствующие графы гомеоморфны. В нерезонансном случае граф W не зависит от выбора интеграла F .

Меченой молекулой W^* называется молекула W , оснащенная некоторыми числовыми метками, см. [10].

Основным итогом работ [5]–[10] является теорема о том, что две ИГС на изоэнергетических поверхностях тонко топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченные молекулы одинаковы.

В работах [11], [12] открыты новые инварианты, которые вместе с прежней меченой молекулой классифицируют системы указанного типа уже с точностью до топологической траекторной эквивалентности.

Траекторный инвариант был построен в [11], [12] и назван t -молекулой W^{*t} системы. Справедлива следующая

Теорема ([11],[12]). *Две ИГС топологически траекторно эквива-*

лентны, если и только если их t -молекулы совпадают.

Дадим здесь краткое описание этого инварианта.

Каждому ребру молекулы (графа) W ставится в соответствие специальная функция, так называемая функция вращения, — известное число вращения Пуанкаре. Инвариантом является класс сопряженности функций. При этом две функции называются сопряженными, если существует монотонная непрерывная замена, переводящая одну функцию в другую.

Введенная таким образом функция является определенной и непрерывной всюду, кроме точек, где она принимает значения равные бесконечности, и класс сопряженности функции вращения системы соответствует классу траекторной эквивалентности системы v на ребре молекулы W . Однако функции вращения оказалось недостаточно для траекторной классификации ИГС на всей изоэнергетической поверхности Q^3 .

Новые траекторные инварианты возникают при рассмотрении ИГС на особых слоях интеграла F . При этом в работах [11], [12] обнаружена возможность перейти от траекторной классификации исходной системы v на Q^3 к точной классификации некоторой гамильтоновой системы на двумерной поверхности.

Для этого рассматривается сечение окрестности особого слоя, так называемая трансверсальная 2-площадка P , являющаяся симплектическим подмногообразием в Q^3 , и гамильтоново векторное поле $u = sgradF^*$. Здесь F^* — это функция на площадке P , а поле u такое, что известное отображение Пуанкаре σ на площадке P есть сдвиг на единичное время вдоль траекторий этого поля.

Рассмотрим две тонко топологически эквивалентные системы v_1 и v_2 (их меченные молекулы W^* одинаковы). Пусть при этом седловому

атому S_1 системы v_1 соответствует седловой атом S_2 системы v_2 .

Предложение ([12]). *Если две системы v_1 и v_2 топологически траекторно эквивалентны в окрестности соответствующих седловых атомов S_1 и S_2 , то для любой трансверсальной 2-площадки P_1 системы v_1 существует трансверсальная 2-площадка P_2 системы v_2 такая, что потоки u_1 и u_2 топологически сопряжены. Обратно, если существуют трансверсальные 2-площадки P_1 и P_2 с топологически сопряженными потоками u_1 и u_2 , то системы v_1 и v_2 топологически траекторно эквивалентны в окрестности атомов S_1 и S_2 .*

Определение. Два потока на поверхностях топологически сопряжены, если существует гомеоморфизм поверхностей, сохраняющий поток.

Рассмотрим далее все особые точки векторного поля отвечающие данному седловому атому и положительные собственные значения λ_i матрицы линеаризации поля u в этих точках. Атомным инвариантом Λ является упорядоченный набор чисел λ_i с точностью до пропорциональности:

$$\Lambda = (\lambda_1 : \dots : \lambda_n).$$

При этом Λ не зависит от выбора 2-площадки.

Для построения следующих атомных инвариантов рассмотрим трансверсальную 2-площадку P , отвечающую данному седловому атому.

Тогда на положительных и отрицательных кольцах в окрестности критического уровня с интеграла F , отвечающим поверхностям уровня $F > c$, $F < c$ соответственно, выбираются отрезки раздела, подробности см. в [11]. Отрезки раздела отвечают условию $\varphi = const$, где

φ — переменная угол гамильтоновой системы $u = sgradF^*$. Тогда $X_i^+ = \sigma^{t_i}(X_i^-)$, $t_i \in \mathbf{R}$. Пусть $l = \sum t_i K_i$, см. рис. 1.

Рассмотрим $\Delta = \partial l$ и $Z \in H_1(V)$, где V — замкнутая поверхность, полученная из P заклеиванием всех "дырок".

Теорема ([12]). (Λ, Δ, Z) — инвариант, классифицирующий гамильтоновы потоки на 2-площадках (гладких компактных симплектических двумерных поверхностях с краем) с точностью до топологической сопряженности.

Рассмотрим $T^*T^2(x, y, p_1, p_2)$ — симплектическое многообразие со стандартной симплектической структурой, где (x, y) — локальные координаты на T^2 , а (p_1, p_2) — импульсы.

Определение. Риманова метрика на торе называется *лиувиллевой*, если существуют глобальные периодические координаты x и y на торе, в которых метрика имеет вид:

$$ds^2 = (f(x) + h(y))(dx^2 + dy^2), \quad x \in [0, T_x], \quad y \in [0, T_y],$$

где T_x и T_y — периоды решетки, задающей наш тор.

Рассматриваются гладкие функции f и h .

Геодезический поток лиувиллевой метрики на торе — это ИГС в T^*T^2 с гамильтонианом H и дополнительным интегралом F вида:

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{f(x) + h(y)},$$

$$F = \frac{h(y)p_1^2 - f(x)p_2^2}{f(x) + h(y)}.$$

В §1 первой главы диссертации устанавливается критерий невырожденности (бottовости) интеграла F . Доказана теорема о том, что

дополнительный интеграл F геодезического потока лиувиллевой метрики на торе является боттовским, если и только если функции f и h — тождественные константы или критические точки функций f и h невырождены.

Следовательно, в данной задаче боттовские потоки действительно являются потоками общего положения в том смысле, что они всюду плотны в множестве всех геодезических потоков лиувиллевых метрик на двумерном торе. Далее в диссертации рассматриваются лишь невырожденные системы, то есть геодезические потоки метрик с морсовскими функциями f и h .

В §2 предложен алгоритм построения топологического инварианта, меченой молекулы $W^*(f, h)$ рассматриваемых систем. Общий вид молекулы изображен на рис. 2. Графы $W(f)$, $W(h)$ строятся по графикам f , h соответственно, по следующему алгоритму, см. рис. 2. Вершины графа $W(f, h)$ — атомы A , P_m , V_k , см. рис. 3.

Основная теорема топологической классификации приведена в §3.

Теорема 1.3. *Геодезические потоки лиувиллевых метрик на двумерном торе тонко топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их молекулы $W(f, h)$ совпадают.*

В реальных физических задачах часто встречаются системы с простейшим видом функций f и h .

Следствие. *Класс тонкой топологической эквивалентности геодезического потока метрики с функциями f и h , имеющих один максимум на отрезке-периоде решетки, состоит из потоков метрик с функциями f' и h' также обладающими одним максимумом на отрезке-периоде решетки. Молекула $W(f, h)$ имеет в этом случае вид, изображенный на рис. 4.*

В диссертации предложен способ дискретного кодирования функций метрики так, что эквивалентным кодам отвечают тонко топологически эквивалентные системы. Код метрики (некоторая числовая последовательность) удобен тем, что он легко строится по графикам функций f и h и позволяет утверждать о топологической эквивалентности систем без построения меченой молекулы (графа).

Важно отметить, что рассмотренные здесь метрики на торе не исчерпывают всех метрик на торе с квадратично-интегрируемыми геодезическими потоками. И.К. Бабенко и А.А. Нехорошев доказали, что геодезический поток метрики на торе имеет квадратичный по импульсам интеграл тогда и только тогда, когда эта метрика является лиувиллевой на некотором конечнолистном накрытии исходного тора, то есть метрика является лиувиллевой в некоторых локальных координатах.

Пусть на плоскости \mathbf{R}^2 заданы две решетки — Γ_1 и Γ_2 , где решетка Γ_1 натянута на вектора e_1 и e_2 , а Γ_2 — на вектора E_1, E_2 . Γ_1 и Γ_2 связаны условием:

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix},$$

где p и q — взаимно-простые числа. Тогда тор \mathbf{R}^2/Γ_1 q -листно накрывает тор \mathbf{R}^2/Γ_2 . Рассмотрим на торе \mathbf{R}^2/Γ_1 лиувиллеву метрику

$$G = (f(X_1) + h(X_2))(dX_1^2 + dX_2^2)$$

определенна на торе, поэтому период f равен 1, а период h равен t . Координаты X_1 и X_2 взяты на плоскости \mathbf{R}^2 . Наложим дополнительные ограничения для того, чтобы G опускалась на тор \mathbf{R}^2/Γ_2 . Рассмотрим координаты $x_1 = X_1$, $x_2 = X_2/t$. В новых координатах функции f и h периодичны с периодом 1. Для того, чтобы метрика G была корректно определена на \mathbf{R}^2/Γ_2 , необходимо и достаточно, чтобы функции f и h были бы $1/q$ -периодичны.

В настоящей диссертации рассматривается случай, когда Γ_1 и Γ_2 совпадают, то есть

$$q = 1, p = 0.$$

В.В. Калашников в [15] обобщил приведенные в настоящей диссертации результаты топологической классификации на случай произвольной метрики на торе с квадратично-интегрируемым потоком. Им доказана следующая

Теорема, ([15]). *Слово-молекула квадратично-интегрируемого геодезического потока на торе имеет вид, указанный на рис. 2. При этом r -метки таковы:*

1. *Если ребро принадлежит дереву $W(h)$ или $W(f)$, то r -метка равна нулю, если это ребро примыкает к атому A и бесконечности в противном случае.*
2. *На ребрах a, b, c, d r -метка равна дробной части p/q .*

В главе 2 приведена траекторная классификация геодезических потоков лиувиллевых метрик на двумерном торе — основной результат настоящей диссертации — и установлены некоторые свойства множеств классов эквивалентности потоков.

Для классификации геодезических потоков лиувиллевых метрик на торе с точностью до *топологической траекторной эквивалентности* потребовалось ввести *функции* и специальные числовые *последовательности* на графе $W(f, h)$.

Каждому ребру e графа $W(f, h)$, отличному от $\{a, b, c, d\}$, см. рис. 2, ставится в соответствие функция вращения $\rho(F)$:

$$\rho_e(F) = \left(\int_{s_1}^{s_2} \frac{2ds}{\sqrt{u(s) - F}} \right) \left(\int_0^T \frac{ds}{\sqrt{v(s) + F}} \right)^{-1}, \quad F \in I_e,$$

$$u(s_1) = u(s_2) = F,$$

$$(u, v, T) = (h, f, T_x), \text{ если } e \in W(h),$$

$$(u, v, T) = (f, h, T_y), \text{ если } e \in W(f).$$

Обозначим $[\rho_e]$ класс сопряженности функции ρ_e на I_e . Обозначим $[\rho] = \{[\rho_e] \mid e \in W(h) \text{ или } e \in W(f)\}$.

Рассмотрим седловой атом S молекулы $W(f, h)$.

Ему однозначно соответствует последовательность a_1, a_2, \dots, a_n локальных минимумов функции u с одинаковым минимальным значением L так, что соединяющий их отрезок $L \in \{(s, u) \mid u(s) - L \geq 0\}$, $u = f, h$ см. рис. 2.

Каждой такой последовательности ставим в соответствие упорядоченный набор

$$\Lambda_S = (\lambda_1 : \dots : \lambda_n), \quad \lambda_i = \sqrt{u_{ss}(a_i)}.$$

Обозначим Λ полный набор Λ_S -инвариантов.

Теорема 2.1. $(W(f, h), [\rho], \Lambda)$ — инвариант, классифицирующий геодезические потоки лиувиллевых метрик на двумерном торе с точностью до топологической траекторной эквивалентности.

Содержание второй главы диссертации составляет так же изучение свойств множеств классов траекторной эквивалентности систем. Одним из таких свойств явилось существование в любой окрестности произвольной "неплоской" лиувиллевой метрики на торе в C^1 -топологии целого семейства метрик с траекторно эквивалентными потоками. Это предложение содержится в §2 второй главы диссертации. Утверждения, приведенные в §3 второй главы связаны с функцией вращения, как наиболее важной частью траекторного инварианта, особенно в случае, если функции f и h имеют не более одного локального

максимума на отрезке-периоде решетки, обсуждается условие монотонности функции вращения и приводится пример явного задания метрик с траекторно эквивалентными потоками.

Для линейно-интегрируемых систем удается доказать и теорему реализации для допустимых значений введенного траекторного инварианта.

В §5 второй главы диссертации обсуждаются некоторые приложения траекторной классификации геодезических потоков лиувиллевых метрик на 2-многообразиях: доказана единственность лиувиллевого типа метрики на торе, (для метрики на сфере единственность лиувиллевого типа была доказана В.Н. Колокольцовым в [16]); показано, как с помощью результатов из второй главы диссертации можно получить условия теоремы Дини о геодезической эквивалентности и критерий замкнутости и простоты произвольной геодезической лиувиллевой метрики на торе, выпущенной из некоторой точки тора с заданным начальным углом наклона.

В заключение автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору А.Т. Фоменко и А.В. Болсинову за постановку задачи, большое внимание и полезные замечания.

Глава 1

Топологическая классификация геодезических потоков

лиувиллевых метрик на двумерном торе

Рассмотрим $T^*T^2(x, y, p_1, p_2)$ — симплектическое многообразие со стандартной симплектической структурой, где (x, y) — локальные координаты на T^2 , а (p_1, p_2) — импульсы.

Определение. Риманова метрика на торе называется *лиувиллевой*, если существуют глобальные периодические координаты x и y на торе, в которых метрика имеет вид:

$$ds^2 = (f(x) + h(y))(dx^2 + dy^2), \quad x \in [0, T_x], \quad y \in [0, T_y],$$

где T_x и T_y — периоды решетки, задающей наш тор.

Рассматриваются гладкие функции f и h .

Геодезический поток лиувиллевой метрики на торе — это ИГС в T^*T^2 с гамильтонианом H и дополнительным интегралом F вида:

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{f(x) + h(y)},$$
$$F = \frac{h(y)p_1^2 - f(x)p_2^2}{f(x) + h(y)}.$$

Рассмотрим геодезический поток лиувиллевой метрики торе на отдельной изоэнергетической поверхности $Q^3 = \{H = \text{const}\}$. Очевидно, что Q^3 гомеоморфна T^3 .

Все результаты по классификации геодезических потоков лиувиллевых метрик на торе выполнены для систем, ограниченных на отдельную изоэнергетическую поверхность — поверхность уровня гамильтониана H .

§1. Условие невырожденности (бottовости)

Определение. Гладкий интеграл F называется боттовским на Q^3 , если его критические многообразия невырождены.

Теорема 1.1. Дополнительный интеграл геодезического потока лиувиллевой метрики на торе является боттовским тогда и только тогда, когда функции f и h — тождественные константы или критические точки функций f и h невырождены, то есть функции f и h — функции Морса.

Доказательство. Найдем множества критических точек отображения момента системы. Для этого построим бифуркационную диаграмму для рассматриваемых систем. Имеем систему

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{f(x) + h(y)},$$

$$F = \frac{h(y)p_1^2 - f(x)p_2^2}{f(x) + h(y)}.$$

Множество критических точек отображения момента — это множество таких точек, где $\text{grad}H$ и $\text{grad}F$ зависят на T^*T^2 . Итак, в нашем случае

$$\text{grad}H = \left(\frac{-f_x(p_1^2 + p_2^2)}{\lambda^2}, \frac{-h_y(p_1^2 + p_2^2)}{\lambda^2}, \frac{2p_1}{\lambda}, \frac{2p_2}{\lambda} \right),$$

$$\text{grad}F = \left(\frac{-f_xh(p_1^2 + p_2^2)}{\lambda^2}, \frac{-h_yf(p_1^2 + p_2^2)}{\lambda^2}, \frac{2hp_1}{\lambda}, \frac{2fp_2}{\lambda} \right).$$

Из выражения для $\text{grad}H$ получаем, что единственное нерегулярное значение интеграла энергии — это $H = 0$, что соответствует $p_1 = p_2 = 0$.

Рассмотрим изоэнергетическую поверхность $Q^3 = H = c > 0$. Тогда ограничение интеграла F на эту поверхность имеет вид:

$$F = \frac{h(y)(\lambda(x, y)c - p_1^2) - f(x)p_2^2}{\lambda(x, y)} = \\ = p_1^2 - cf(x) = ch(y) - p_2^2.$$

Отсюда очевидно, что ограничение $\text{grad}F$ на Q^3 равно нулю тогда и только тогда, когда

$$p_1 = 0, f_x(x) = 0$$

или

$$p_2 = 0, h_y(y) = 0.$$

Для случая f и h — тождественных констант бифуркационная диаграмма имеет вид, изображенный на рис. 5. Если $f, h \neq \text{const}$, то используя строгую положительность каждой из функций, получаем следующие бифуркационные диаграммы, см. рис. 6, где M, N — число локальных минимумов (или максимумов) функций f, h соответственно на отрезке-периоде решетки.

Для доказательства критерия боттовости интеграла F выясним, когда критические точки функции F на Q образуют невырожденные критические подмногообразия.

Критическое подмногообразие для F называется невырожденным, если гессиан d^2F невырожден на плоскостях, нормальных к подмногообразию.

Итак, будем действовать в следующей последовательности: находим три независимых вектора, ортогональных $\text{grad}H$, проектируем форму U , полученную из выражения для гессиана d^2F , ищем ее собственные значения, зная которые можно определить индексы критиче-

ских подмногообразий и удостовериться (или наоборот) в боттовости интеграла F .

Для критического подмногообразия вида $p_2 = 0, h_y(y) = 0$ форма U имеет вид:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{-hp_1^2(2f_x^2\lambda - f_{xx}\lambda^2)}{\lambda^4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{fp_1^2h_{yy}}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2h}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2f}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

В случае $h = const$ имеем вектор $e_1 = (0, 0, 0, p_1)$, ортогональный $gradH$. Проекция формы U имеет вид:

$$Y = \left(\frac{-2fp_1^2}{\lambda} \right) \neq 0.$$

Прообраз точки на бифуркационной диаграмме — максимальный тор.

В случае $h \neq const$ имеем два независимых вектора, ортогональных $gradH$:

$$e_1 = (0, 0, 0, p_1), \quad e_2 = (0, f_x, 0, 0).$$

Проекция формы U имеет вид:

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{-2fp_1^2}{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{h_{yy}fp_1^2f_x^2}{\lambda^2} \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения формы Y :

$$l_1 = \frac{-2fp_1^2}{\lambda}, \quad l_2 = \frac{h_{yy}fp_1^2f_x^2}{\lambda^2}.$$

Если $h_{yy} > 0$, локальный минимум функции $h(y)$, то

$$l_1 < 0, \quad l_2 > 0,$$

то есть индекс равен 1, имеем критическую седловую окружность.

Если $h_{yy} < 0$, локальный максимум функции $h(y)$, то

$$l_1 < 0, l_2 < 0,$$

то есть индекс равен 2, имеем максимум интеграла F .

Для критического подмногообразия вида $p_1 = 0, f_x(x) = 0$ форма U имеет вид:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{-hp_2^2 f_{xx}}{\lambda^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-fp_2^2(2h_y^2\lambda - h_{yy}\lambda^2)}{\lambda^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2h}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2f}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

В случае $f = const$ имеем вектор $e_1 = (0, 0, p_2, 0)$, ортогональный $gradH$. Проекция формы U имеет вид:

$$Y = \left(\frac{2hp_2^2}{\lambda} \right) \neq 0.$$

Прообраз точки на бифуркационной диаграмме — максимальный тор.

В случае $f \neq const$ имеем два независимых вектора, ортогональных $gradH$:

$$e_1 = (0, 0, p_2, 0), e_2 = (h_y, 0, 0, 0).$$

Проекция формы U имеет вид:

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{-f_{xx}hp_2^2h_y^2}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & \frac{2hp_2^2}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения формы Y :

$$l_1 = \frac{-f_{xx}hp_2^2h_y^2}{\lambda^2}, l_2 = \frac{2hp_2^2}{\lambda}.$$

Если $f_{xx} > 0$, локальный минимум функции $f(x)$, то

$$l_1 < 0, \quad l_2 > 0,$$

то есть индекс равен 1, имеем критическую седловую окружность.

Если $f_{xx} < 0$, локальный максимум функции $f(x)$, то

$$l_1 < 0, \quad l_2 < 0,$$

то есть индекс равен 0, имеем максимум интеграла F .

Итак, все критические подмногообразия интеграла F невырождены тогда и только тогда, когда функции f и h являются функциями Морса. Теорема доказана.

Далее всюду будем рассматривать лишь невырожденные системы, то есть геодезические потоки лиувиллевых метрик с морсовскими функциями f и h .

§2. Построение топологического инварианта, меченой молекулы ИГС

Рассмотрим график функции $r = f(x)$ на отрезке-периоде $[0, T]$ решетки и замкнутое множество $U = 0 \leq x \leq T, 0 \leq r \leq f(x)$. Без ограничения общности можно считать, что в точках 0, T функция $f(x)$ достигает глобального минимума (этого можно добиться сдвигом аргумента x).

Пусть C — это множество локальных минимумов функции f .

Обозначим множество отрезков $U \cap r = c \in C$ через D_c и рассмотрим множество $D = \bigcup d \in D_{c \in C}$, где d содержит хотя бы одну локально минимальную точку функции $f(x)$.

Теорема 1.2. Алгоритм построения меченой молекулы (топологического инварианта) $W^*(f, h)$ для геодезического потока лиувиллевой метрики

$$ds^2 = (f(x) + h(y))(dx^2 + dy^2)$$

на торе с отрезками-периодами решетки $[0, T_x], [0, T_y]$ таков:

1. Рассмотрим график функции $r = f(x)$ на отрезке-периоде $[0, T_x]$, множества U, C, D , описанные выше, и множество

$$U' = 0 \leq x \leq T_x, f_0 \leq r \leq f(x),$$

где f_0 — это глобальный минимум функции $f(x)$. Добавляя к D множество локально максимальных точек графика $r = f(x)$, получаем множество D' .

2. Заменяя отрезок $d \in D$, отвечающий значению $f(x) = f_0$, атомом P_n , где n равно кратности локального минимума, все остальные отрезки из D — атомами V_m , где $m+1$ равно числу точек пересечения графика $r = f(x)$ с отрезком d , каждую локально максимальную точку из D' — атомом A , каждую компоненту связности разности $U' \setminus D'$ — одним ребром между соответствующими атомами, а разность $U \setminus U'$ — двумя ребрами, получаем некоторый граф $W(f)$; граф $W(h)$ строится аналогично.

3. Замечая, что оба графа $W(f)$ и $W(h)$ имеют по два свободных ребра, склеиваем нашу молекулу $W(f, h)$ без меток из двух экземпляров $W(f)$ и $W(h)$, как это показано на рис. 2.

4. Меченая молекула $W^*(f, h)$ получается из $W(f, h)$ следующим образом: ребрам a, b, c, d , см. рис. 2, а также всем ребрам, содержащим атом A , приписывается метка $r = 0$, всем остальным ребрам — $r = \infty$. Метки n_k и ϵ_i триivialны: $n_k = 0, \epsilon_i = 1$.

Доказательство. Для доказательства теоремы применим общую теорию, разработанную в [5]-[10], к условиям нашей задачи. Без ограничения общности положить $H = 1$. По теореме Лиувилля связная компонента совместной поверхности уровня H и F гомеоморфна двумерному тору, тору Лиувилля. В нашем случае произвольный тор Лиувилля на изоэнергетической поверхности $H = 1$ имеет вид:

$$p_1^2 = F + f(x),$$

$$p_2^2 = -F + h(y).$$

При $F \in (-\min f, \min h)$ поверхность уровня интегралов F и H — это четыре тора Лиувилля:

$$p_1 = \sqrt{F + f(x)}, \quad p_2 = \sqrt{-F + h(y)},$$

$$p_1 = \sqrt{F + f(x)}, \quad p_2 = -\sqrt{-F + h(y)},$$

$$p_1 = -\sqrt{F + f(x)}, \quad p_2 = \sqrt{-F + h(y)},$$

$$p_1 = -\sqrt{F + f(x)}, \quad p_2 = -\sqrt{-F + h(y)},$$

которым на молекуле $W(f, h)$ соответствуют четыре ребра a, b, c, d см. рис. 2.

Будем рассматривать расположение торов Лиувилля и их перестройки на $Q^3 = \{H = 1\}$ при возрастании значений F . Тогда совместная поверхность уровня интегралов — это несколько торов Лиувилля, причем их обязательно четное число, что соответствует обходу каждой геодезической в прямом и обратном направлении и является следствием квадратичности обоих интегралов. Условию $F = \min h$ соответствует n критических окружностей в пересечении ребер a и b, c

и d , где n — число точек глобального минимума функции h . Следовательно, имеем два атома P_n , см. рис. 3. Зависимость $p_2 = p_2(y)$ при различных F можно наглядно представить, если мысленно перенести на графике $h = h(y)$ ось Oy на уровень F вверх и симметрично отразить график $h = h(y)$ относительно перенесенной оси. Тогда каждому отрезку $d \in D$, см. выше, кроме нижнего, отвечает перестройка $T^2 \rightarrow mT^2$ для некоторого m , а следовательно, атом V_m , см. рис. 3. В случае $F < 0$ рассматриваем функцию f и рассуждаем аналогично.

Итак, мы построили молекулу $W(f, h)$ для геодезического потока лиувиллевой метрики на торе, которая в общем случае имеет вид, изображенный на рис. 2.

Этот инвариант классифицирует нерезонансные ИГС с точностью до грубой топологической эквивалентности. Напомним, что две системы называются грубо топологически эквивалентными, если отвечающие им лиувиллевы слоения получаются друг из друга скручиванием вдоль торов Лиувилля.

Построим теперь мечную молекулу W^* — инвариант, классифицирующий нерезонансные ИГС с точностью до тонкой топологической эквивалентности.

Две интегрируемые в боттовском смысле гамильтоновы системы v и v' на многообразиях Q и Q' называются тонко топологически эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, переводящий лиувиллево слоение системы v в лиувиллево слоение системы v' с сохранением ориентаций изолированных критических окружностей.

Меченая молекула W^* — это молекула W с некоторыми числовыми метками.

Для оснащения полученной выше молекулы нам понадобится сле-

дующая лемма.

Лемма. *Если $T^2 \in \{H = \text{const}, F = \text{const}\}$ — регулярная поверхность уровня, то $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ — стандартные образующие фундаментальной группы данного тора.*

Доказательство. Тор Лиувилля на изоэнергетической поверхности $Q = \{H = c, F = F_0\}$ задается следующей системой:

$$p_1 = F_0 + cf(x),$$

$$p_2 = -F_0 + ch(y).$$

Отсюда следует, что

$$p_1^2 = F_0 + cf(x), \quad y = \text{const}, \quad p_2 = \text{const}$$

эквивалентно

$$F = F_0, \quad H = c, \quad y = \text{const},$$

и

$$p_2^2 = -F_0 + ch(y), \quad x = \text{const}, \quad p_1 = \text{const}$$

эквивалентно

$$F = F_0, \quad H = c, \quad x = \text{const}.$$

Таким образом, линии уровня $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ расслаивают данный тор стандартным образом. Лемма доказана.

Используя доказанную лемму, выбираем базисные циклы на торах Лиувилля: $x = \text{const}$, $y = \text{const}$.

Найдем матрицы склейки, отвечающие каждому ребру графа молекулы $W(f, h)$. Рассмотрим следующие случаи.

Ребра a, b, c, d . Так как часть изоэнергетической поверхности, содержащая прообразы положительных значений интегала F расслоена со слоем $y = \text{const}$, а содержащая отрицательные значения интегала F расслоена со слоем $x = \text{const}$, то матрица склейки, отвечающая каждому из ребер равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ребра, содержащие букву-атом A . Прообраз окрестности максимального или минимального значения интегала F — это полноторие, поэтому меридиан и параллель меняются местами и матрица склейки имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Остальные ребра. Каждое такое ребро принадлежит $W(h)$ или $W(f)$ и не содержит атом A , поэтому матрица склейки имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, для каждого ребра e_i графа W известна матрица оснащения

$$A_i = (\alpha_i \quad \beta_i \quad \gamma_i \quad \delta_i).$$

По алгоритму из статьи получим оснащение r_i, ϵ_i, n_k имеющейся молекулы, где $r_i = 0$ на a, c, d и содержащих атом A , $r_i = \infty$ на остальных ребрах.

Метки n и ϵ имеют вид:

$$\epsilon_i = 1, n_k = 0.$$

Теорема доказана.

§3. Основная теорема. Способ дискретного кодирования лиувиллевых метрик на торе

Определение. Две интегрируемые в боттовском смысле гамильтоновы системы v и v' на многообразиях Q и Q' называются тонко топологически эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, переводящий лиувиллево слоение системы v в лиувиллево слоение системы v' с сохранением ориентаций изолированных критических окружностей.

Следующая теорема — это основная теорема топологической классификации геодезических потоков лиувиллевых метрик на торе.

Теорема 1.3. *Геодезические потоки двух лиувиллевых метрик на торе тонко топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их молекулы $W(f, h)$ совпадают. Произвольный граф, общий вид которого изображен на рис. 2, реализуется как топологический инвариант геодезического потока некоторой лиувиллевой метрики на торе.*

Доказательство. Найденная в предыдущем параграфе меченая молекула W^* строилась с помощью интеграла F , однако в нерезонансном случае, как это доказано в [9], является топологическим инвариантом.

Итак, в случае, когда рассматриваемая ИГС нерезонансна, меченая молекула $W^*(f, h)$, построенная выше, является инвариантом, классифицирующим системы с точностью до тонкой топологической эквивалентности. Из теоремы 2 сразу следует, что оснащение молекулы не зависит в нашем случае от выбора метрики, поэтому молекула $W(f, h)$ классифицирует рассматриваемые системы с точностью до тонкой топологической эквивалентности.

Геодезический поток лиувиллевой метрики на торе в общем случае не является нерезонансной ИГС, возможны множества ненулевой меры, состоящие из замкнутых орбит. Молекула $W(f, h)$ и в этом случае классифицирует рассматриваемые системы с точностью до тонкой топологической эквивалентности. В самом деле, предположим, что пара топологически эквивалентных геодезических потоков лиувиллевых метрик на торе имеет две различные молекулы $W(f, h)$, построенные по алгоритму из теоремы 1.2. Тогда хотя бы один из потоков имеет два независимых дополнительных интеграла. Без ограничения общности можно считать, что второй дополнительный интеграл совпадает с F в области их функциональной зависимости. Будем строить молекулу W' , отвечающую второму интегралу. Функция вращения на ребрах a, b, c, d строго монотонна, поэтому в области на изоэнергетической поверхности, отвечающей этим ребрам, дополнительные интегралы обязательно зависят. Итак, новая молекула W' может отличаться от исходной $W(f, h)$ добавлением новых ребер с постоянной функцией вращения на ребрах деревьях $W(f), W(h)$, иначе хотя бы на одном ребре молекулы $W(f, h)$ вблизи седлового критического значения интеграла F функция вращения — число вращения Пуанкаре — должно быть постоянным. Для геодезического потока лиувиллевой метрики на торе функция вращения на ребрах, отличных от a, b, c, d имеет вид:

$$\rho_e(F) = \left(\int_{s_1}^{s_2} \frac{2ds}{\sqrt{u(s) - F}} \right) \left(\int_0^T \frac{ds}{\sqrt{v(s) + F}} \right)^{-1}, \quad F \in I_e,$$

$$u(s_1) = u(s_2) = F,$$

$$(u, v, T) = (h, f, T_x), \text{ если } e \in W(h),$$

$$(u, v, T) = (f, h, T_y), \text{ если } e \in W(f).$$

доказательство приведено в следующей главе.

Из выражения для функции вращения и условия расходимости интеграла в числителе легко понять, что в боттовском случае функция вращения не может быть постоянной вблизи критического седлового значения интеграла F .

Таким образом, второй дополнительный интеграл обязательно зависит с интегралом F в окрестности седловой критической поверхности уровня. Однако появление новых ребер, растущих из внутренних точек исходной молекулы невозможно, так как наличие квадратичного интеграла у потока позволяет полностью описать структуру фазового пространства системы, где связная компонента неособой поверхности уровня интеграла F — это тор (тор Лиувилля).

Таким образом, молекула $W(f, h)$, построенная по алгоритму из теоремы 2, в боттовском случае действительно является инвариантом, классифицирующим геодезические потоки лиувиллевых метрик на торе с точностью до тонкой топологической эквивалентности.

На рис. 2 показан алгоритм построения дерева $W(f)$ по графику функции f . Действуя в обратном порядке, легко по заданному графу качественно построить график соответствующей функции. Теорема доказана.

В реальных физических задачах часто встречаются системы с простейшим видом функций f и h .

Следствие. *Класс тонкой топологической эквивалентности геодезического потока метрики с функциями f и h , имеющих один максимум на отрезке-периоде решетки, состоит из потоков метрик с функциями f' и h' также обладающими одним максимумом на*

отрезке-периоде решетки. Молекула $W(f, h)$ имеет в этом случае вид, изображенный на рис. 4.

Опишем здесь способ дискретного кодирования лиувиллевых метрик на торе так, что эквивалентным кодам двух метрик соответствуют топологически эквивалентные геодезические потоки.

Рассмотрим лиувиллеву метрику на торе

$$ds^2 = (f(x) + h(y))(dx^2 + dy^2),$$

где T_x и T_y — периоды решетки, задающей наш тор, и функции f и h — функции Морса.

Далее нужно рассмотреть локальные минимумы графиков f и h , как функций на окружности. Качественную картину взаимного расположения этих локальных минимумов на графиках можно задать некоторым целочисленным вектором. Оказалось, что потоки эквивалентны, если соответствующие им целочисленные векторы эквивалентны, то есть получаются друг из друга некоторой специальной перестановкой их координат. Этот факт сразу позволяет перечислить все различные топологические типы лиувиллевых геодезических потоков на торе. Теперь дадим точные определения.

Рассмотрим график функции $r = f(x)$ на отрезке-периоде $[0, T_x]$ решетки и замкнутое множество $U = 0 \leq x \leq T_x, 0 \leq r \leq f(x)$. Без ограничения общности можно считать, что в точках 0, T функция $f(x)$ достигает глобального минимума (этого можно добиться сдвигом аргумента x).

Пусть C — это множество локальных минимумов функции f .

Обозначим множество отрезков $U \cap r = c \in C$ через D_c и рассмотрим множество $D = \bigcup d \in D_{c \in C}$, где d содержит хотя бы одну локально минимальную точку функции $f(u)$.

Пусть $E = \{e_1, \dots, e_s\}$ — множество точек пересечения графика $r = f(x)$ с отрезками из D , а точки x_i , $i = 1, \dots, s$ — проекции точек e_i на ось $r = 0$, $x_1 < \dots < x_s$. Обозначим через a_i число точек пересечения отрезка $[x_i, e_i]$ с множеством D .

Положим $S(f) = (a_1, \dots, a_s)$, см. рис. 7. $S(h)$ определяется аналогично.

Определение. Кодом $T(f, h)$ лиувиллевой метрики

$$ds^2 = (f(x) + h(y))(dx^2 + dy^2)$$

на торе с периодами решетки T_x, T_y называется последовательность

$$T(f, h) = S(f), 0, S(h).$$

Определение. Пусть (b_1, \dots, b_k) — произвольная связная подпоследовательность в $T(f, h)$ такая, что $b_1 = b_k$, $b_i > b_1$. Пусть $(1, P_1, 1, \dots, 1, P_n, 1)$ — связная подпоследовательность в $T(f, h)$, где P_i — это связная подпоследовательность в $T(f, h)$, каждая компонента которой больше 1. Перестановки

$$(b_1, \dots, b_k) \rightarrow (b_k, \dots, b_1),$$

$$(1, P_1, 1, \dots, 1, P_n, 1) \rightarrow (1, P_2, 1, \dots, 1, P_1, 1),$$

$$S(f), 0, S(h) \rightarrow S(h), 0, S(f)$$

называются элементарными преобразованиями кода $T(f, h)$.

Определение. Два кода называются эквивалентными, если один получается из другого конечным числом элементарных преобразований.

Введем понятие допустимого значения кода $T(f, h)$.

Определение. Допустимым значением кода $T(f, h)$ является числовая последовательность вида $T_1, 0, T_2$, где T_1, T_2 — произвольные последовательности, состоящие из натуральных чисел так, что подпоследовательность a, \dots, a с внутренними членами большими a имеет вид

$$a, a+1, \dots, a+1, \dots, a+1, a.$$

Теорему 1.3 о топологической классификации можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1.3'. *Две лиувиллевы метрики на торе задают топологически эквивалентные потоки, если и только если их коды эквивалентны. Любое допустимое значение кода T реализуется как код некоторой лиувиллевой метрики на торе.*

Доказательство. Докажем эквивалентность двух формулировок теоремы о топологической классификации геодезических потоков лиувиллевых метрик на двумерном торе.

Совпадение молекул $W(f, h)$ означает гомеоморфизм графов W . Буквы-атомы имеют в нашем случае вид, изображенный на рис. 3.

Гомеоморфизм графа на поверхности, задающего атом V_{k-1} соответствует инверсии (или композиции инверсий) для подпоследовательности с (b_1, \dots, b_k) , $b_1 = b_k$, $b_i > b_1$:

$$(b_1, \dots, b_k) \rightarrow (b_k, \dots, b_1),$$

Гомеоморфизм графа на поверхности, задающего атом P_n , соответствует циклической перестановке (или композиции таких перестановок) для подпоследовательностей $(1, P_1, 1, \dots, 1, P_n, 1)$:

$$(1, P_1, 1, \dots, 1, P_n, 1) \rightarrow (1, P_2, 1, \dots, 1, P_1, 1),$$

Замена местами f и h также задает гомеоморфизм графа W и соответствует элементарному преобразованию кода

$$S(f), 0, S(h) \rightarrow S(h), 0, S(f).$$

Из общего вида молекулы $W(f, h)$ легко понять, что перечисленные гомеоморфизмы графа исчерпывают все возможные гомеоморфизмы, сохраняющие молекулу. Поэтому два кода соответствуют метрикам с топологически эквивалентными потоками тогда и только тогда, когда они получаются друг из друга преобразованиями, перечисленными выше, то есть путем элементарных преобразований кода, см. определение выше. Допустимые значения кода задают качественную картину взимного расположения локальных минимумов и максимумов функций f и h , которые далее легко восстановить. Очевидно, заданным значениям кода отвечает целое семейство функций f, h . Теорема доказана.

§4. Геодезические потоки лиувиллевых метрик на торе в молекулярной таблице сложности ИГС

Для формулировки следующей теоремы напомним важное понятие сложности интегрируемой гамильтоновой системы (введенное в работе [10]).

Пусть v — это гамильтонова система на замкнутом ориентированном многообразии Q , интегрируемая при помощи некоторого боттовского интеграла F .

Обозначим через t общее число всех минимальных, максимальных, седловых критических окружностей. Удалим из многообразия все

изолированные критические окружности и связные компоненты критических поверхностей уровня интеграла F , содержащие седловые критические окружности. В результате многообразие Q рассыпается в объединение конечного числа открытых многообразий, каждое из которых гомеоморфно $S^1 \times S^1 \times (0, 1]$. Число этих многообразий обозначим через n .

Определение. Пара неотрицательных чисел (m, n) называется сложностью данной интегрируемой гамильтоновой системы v .

Известно, что сложность — это топологический инвариант интегрируемой системы, то есть отвечающей ей молекулы. Сложность молекулы — пара (m, n) , где m — число вершин графа W и n — число ребер графа W . Таким образом, для каждой интегрируемой гамильтоновой системы определено ее место в таблице сложности или молекулярной таблице.

Сложность (m, n) имеет простую интерпретацию в терминах исходной гамильтоновой системы: m — число критических периодических решений данной системы, n — число однопараметрических семейств торов Лиувилля на изоэнергетической поверхности Q . Число этих семейств равно числу компонент связности открытого 3-многообразия $Q \setminus Z$, где Z — объединение всех особых слоев лиувиллевого слоения.

Теорема 1.4. *Множество всех геодезических потоков лиувиллевых метрик на торе изображается молекулярной таблице в виде объединения точки $(0, 1)$ и следующего множества:*

$$m = 4k, \quad k \in \mathbf{N},$$

$$\frac{m}{2} + 2 \leq n \leq m, n = 2(p+1), \quad p \in \mathbf{N}.$$

Доказательство. Итак, сложность интегрируемой системы — это пара (m, n) , где m — число критических окружностей, n — число ребер в графе $W(f, h)$. Очевидно, что $m = 4M + 4N$, где M, N — число локальных минимумов функций f, h соответственно.

Рассмотрим случай, когда $N > 0, M > 0$. Из проведенных рассуждений о построении графа $W(f, h)$ имеем, что для любых f и h часть графа, состоящая из ребер a, b, c, d , см. рис. 2, остается неизменной. Далее рассмотрим возможные соединения уже обозначенных вершин, см. рис. 8:

$$\begin{aligned} n &= 2(N+k) + 2(M+l) + 4 = 2N + 2M + 4 + 2(k+l) = \\ &= \frac{m}{2} + 4 + 2(k+l), \\ k &= 0, 1, \dots, N-1, \quad l = 0, 1, \dots, M-1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{m}{2} + 4 \leq n \leq \frac{m}{2} + 4 + 2(N+M-2), \quad n = 2(p+1), \quad p \in \mathbf{N}$$

или

$$\begin{aligned} m &= 4k, \quad k \in \mathbf{N}, \\ \frac{m}{2} + 2 &\leq n \leq m, \quad n = 2(p+1), \quad p \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Заметим, что все графы, изображенные на рис. 4, реализуются как поток некоторой метрики на торе, так как по алгоритму построения графа $W(f, h)$, действуя в обратной последовательности, получим пару функций f и h , графики каждой из которых удовлетворяют нужному соответствию.

Все проведенные рассуждения о сложности системы, где f и h — не тождественные константы, можно распространить и на боттовские случаи $f = const$ или $h = const$, в каждом формально полагая $M = 0$ или $N = 0$ соответственно.

Для $f = \text{const}$, $h = \text{const}$ получим $m = 0$, $n = 1$.

Для $f \neq \text{const}$, $h = \text{const}$ получим

$$N = 0, m = 4M, n = 2(M + l) + 2, l = 0, 1, \dots, M - 1$$

или

$$m = 4k, \quad k \in \mathbf{N},$$

$$\frac{m}{2} + 2 \leq n \leq m, n = 2(p + 1), p \in \mathbf{N}.$$

Для $h \neq \text{const}$, $f = \text{const}$ получим

$$M = 0, m = 4N, n = 2(N + k) + 2, k = 0, 1, \dots, N - 1$$

или

$$m = 4k, \quad k \in \mathbf{N},$$

$$\frac{m}{2} + 2 \leq n \leq m, n = 2(p + 1), p \in \mathbf{N}.$$

Итак, молекулярная таблица имеет вид, изображенный на рис. 9.
Теорема доказана.

Глава 2. Траекторная классификация геодезических потоков

лиувиллевых метрик на двумерном торе

§1. Построение траекторного инварианта. Основная теорема

Рассмотрим $T^*T^2(x, y, p_1, p_2)$ — симплектическое многообразие со стандартной симплектической структурой, где (x, y) — локальные координаты на T^2 , а (p_1, p_2) — импульсы.

Риманова метрика на торе называется *лиувиллевой*, если существуют глобальные периодические координаты x и y на торе, в которых метрика имеет вид:

$$ds^2 = (f(x) + h(y))(dx^2 + dy^2), \quad x \in [0, T_x], \quad y \in [0, T_y],$$

где T_x и T_y — периоды решетки, задающей наш тор.

Рассматриваются гладкие функции f и h .

Геодезический поток лиувиллевой метрики на торе — это ИГС в T^*T^2 с гамильтонианом H и дополнительным интегралом F вида:

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{f(x) + h(y)},$$

$$F = \frac{h(y)p_1^2 - f(x)p_2^2}{f(x) + h(y)}.$$

В дальнейшем всюду будем предполагать, что f и h функции Морса. Как установлено в предыдущей главе, это составляет критерий невырожденности (бottовости) соответствующего геодезического потока.

В главе 1 предложен алгоритм построения топологического инварианта, молекулы $W(f, h)$, рассматриваемых систем. Общий вид молекулы $W(f, h)$ изображен на рис. 2. Графы $W(f)$, $W(h)$ строятся по графикам $f(x)$, $h(y)$ соответственно, по следующему алгоритму, см. рис. 2. Вершины графа $W(f, h)$ — атомы P_n , V_m , A , см. рис. 3.

В §3 первой главы доказана теорема о том, что две лиувиллевы метрики на торе тонко топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их молекулы $W(f, h)$ совпадают.

Для классификации систем с точностью до *топологической траекторной эквивалентности* потребовалось ввести *функции* и специальные *числовые последовательности* на графе $W(f, h)$.

Каждому ребру e графа $W(f, h)$, отличному от $\{a, b, c, d\}$, см. рис. 2, ставится в соответствие функция вращения $\rho(F)$:

$$\rho_e(F) = \left(\int_{s_1}^{s_2} \frac{2ds}{\sqrt{u(s) - F}} \right) \left(\int_0^T \frac{ds}{\sqrt{v(s) + F}} \right)^{-1}, \quad F \in I_e,$$

$$u(s_1) = u(s_2) = F,$$

$$(u, v, T) = (h, f, T_x), \text{ если } e \in W(h),$$

$$(u, v, T) = (f, h, T_y), \text{ если } e \in W(f).$$

Обозначим $[\rho_e]$ класс сопряженности функции ρ_e на I_e . Обозначим $[\rho] = \{[\rho_e] \mid e \in W(h) \text{ или } e \in W(f)\}$.

Рассмотрим седловой атом S молекулы $W(f, h)$.

Ему однозначно соответствует последовательность a_1, a_2, \dots, a_n локальных минимумов функции u с одинаковым минимальным значением L так, что соединяющий их отрезок $L \in \{(s, u) \mid u(s) - L \geq 0\}$, $u = f, h$ см. рис. 2.

Каждой такой последовательности ставим в соответствие упорядоченный набор

$$\Lambda_S = (\lambda_1 : \dots : \lambda_n), \quad \lambda_i = \sqrt{u_{ss}(a_i)}.$$

Обозначим Λ полный набор Λ_S -инвариантов.

Теорема 2.1. $(W(f, h), [\rho], \Lambda)$ — инвариант, классифицирующий геодезические потоки лиувиллевых метрик на двумерном торе с точностью до топологической траекторной эквивалентности.

Доказательство. В главе 1 доказано, что граф $W(f, h)$ классифицирует рассматриваемые системы с точностью до тонкой топологической эквивалентности. Для доказательства теоремы 5 найдем остальные траекторные инварианты, введенные в [11], [12].

Лемма 1. В каноническом базисе функция вращения на ребре e молекулы $W(f, h)$ имеет вид :

$$\rho(F) = \left(\int_{s_1}^{s_2} \frac{2ds}{\sqrt{u(s) - F}} \right) \left(\int_0^T \frac{ds}{\sqrt{v(s) + F}} \right)^{-1}, \quad F \in I_e,$$

$$u(s_1) = u(s_2) = F,$$

$$(u, v, T) = (h, f, T_x), \text{ если } e \in W(h),$$

$$(u, v, T) = (f, h, T_y), \text{ если } e \in W(f).$$

Доказательство. Из определения функции вращения следует, что

$$\rho(F) = (\partial H / \partial I_1) / (\partial H / \partial I_2) = -(\partial I_2 / \partial F) / (\partial I_1 / \partial F),$$

где I_1, I_2 — переменные действия интегрируемой по Лиувиллю системы, H, F — гамильтониан и дополнительный интеграл соответственно.

Рассмотрим геодезический поток лиувиллевой метрики на торе. В силу интегрируемости этой задачи инвариантными многообразиями являются, по известной теореме, торы Лиувилля, которые в T^*T^2 аналитически задаются :

$$p_1^2 = Hf(x) + F, \quad p_2^2 = Hh(y) - F.$$

Без ограничения общности можно положить $H = 1$. Итак, торы Лиувилля имеют вид:

$$p_1^2 = f(x) + F, \quad p_2^2 = h(y) - F.$$

Отсюда легко видеть, что переменные действия можно задать следующим образом:

$$I_1 = \int_0^{T_x} dx \sqrt{f(x) + F}, \quad I_2 = \int_{y_1}^{y_2} 2dy \sqrt{h(y) - F}, \quad p_1 > 0, \quad F > h_0,$$

где $h_0 = \min h$.

Из выражения

$$\rho(F) = (\partial H / \partial I_1) / (\partial H / \partial I_2) = -(\partial I_2 / \partial F) / (\partial I_1 / \partial F)$$

после несложных вычислений для функции вращения получим выражение из условия леммы.

Случай $F < -f_0$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Легко заметить, что на ребрах a, b, c, d переменные действия можно задать в виде

$$I_1 = \int_0^{T_x} dx \sqrt{f(x) + F}, \quad I_2 = \int_0^{T_y} dy \sqrt{h(y) - F}, \quad p_1 > 0, \quad p_2 > 0.$$

Таким образом, функция вращения при подходящем выборе базисных циклов имеет вид :

$$\rho(F) = \pm \left(\int_0^{T_y} \frac{ds}{\sqrt{h(s) - F}} \right) \left(\int_0^{T_x} \frac{ds}{\sqrt{f(s) + F}} \right)^{-1},$$

$$F \in (-\min f, \min h).$$

Все такие функции непрерывно сопряжены, так как являются строго монотонными с одинаковыми пределами на концах. Поэтому в траекторный инвариант, классифицирующий рассматриваемые системы, входят лишь функции вращения на ребрах деревьев $W(f)$ и $W(h)$, см. рис. 2.

Лемма 2. *Атомный инвариант Λ имеет вид $\Lambda = (\lambda_1 : \dots : \lambda_n)$, где $\lambda_i = \sqrt{u_{ss}(a_i)}$ и a_i , $i = 1, \dots, n$ — упорядоченный набор локальных минимумов с одинаковым минимальным значением L так, что соединяющий их отрезок $L \in \{(s, u) \mid u(s) - L \geq 0\}$, $u = f, h$, см. рис. 2*

Доказательство. Рассмотрим седловой атом P_n или V_m молекулы $W(f, h)$, отвечающий положительному значению интеграла F . Тогда $p_1^2 = f(x) + F > 0$ и система $\{x = const, H = 1\}$ задает трансверсальную 2-площадку на Q^3 .

Как доказано в работе [12], гамильтониан Пуанкаре является функцией, зависимой с интегралом F , ограниченном на 2-площадку, и симплектическая форма получается ограничением исходной на 2-площадку.

Итак, гамильтониан Пуанкаре в нашей задаче имеет вид:

$$F^* = \phi(p^2 - h(y)) = \phi(R)$$

для некоторой функции ϕ и $\omega^* = dp \wedge dy$.

Рассмотрим гамильтоново векторное поле $u = sgradF^*$. Система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\dot{y} = \phi_R(R)2p,$$

$$\dot{p} = \phi_R(R)h_y(y).$$

Рассмотрим матрицу линеаризации этого векторного поля в особых точках $p = 0, y = a_i$, где $h(a_i) = L, h_y(a_i) = 0$. Имеем разложение в окрестности каждой такой точки:

$$\phi_R(R) = \phi_R(-L) + \phi_{RR}(-L)(p^2 - h_{yy}(a_i)(y - a_i)^2 + \dots) + \dots$$

Отсюда матрица линеаризации имеет вид:

$$\dot{y} = \phi_R(-L)2p,$$

$$\dot{p} = \phi_R(-L)h_{yy}(a_i)(y - a_i).$$

и ее положительные собственные значения :

$$\lambda_i = |\phi_R(-L)|\sqrt{2h_{yy}(a_i)}.$$

Лемма доказана.

Заметим, что все седловые атомы молекулы лиувиллевой метрики на торе сферические, то есть замкнутая поверхность V , полученная после заклеивания дырок в окрестности атома, гомеоморфна двумерной сфере.

По определению $Z \in H_1(V)$. Отсюда получаем, что Z – инвариант для потоков лиувиллевых метрик на торе тривиален, и он не входит в траекторный инвариант рассматриваемых систем.

Лемма 3. При каноническом выборе трансверсальной 2-площадки Δ -инвариант рассматриваемых систем тривиален.

Доказательство. Рассмотрим седловой атом, соответствующий положительному критическому значению интеграла F . Выберем трансверсальную 2-площадку в виде $\{x = \text{const}, H = 1\}$. Для вычисления Δ -инварианта на этой 2-площадке достаточно заметить, что гамильтониан Пуанкарэ, см. доказательство леммы 2, задает поток, симметричный относительно инволюции $p \mapsto -p$. Отсюда отрезки раздела, при подходящем выборе начальных отрезков, зададим их условием $p = 0$, имеют вид, изображенный на рис. 10. По определению Δ -инварианта: $\Delta = \partial l, l = \sum t_i K_i, X_i^+ = \sigma^{t_i}(X_i^-)$. Отсюда сразу получаем, что при таком выборе 2-площадки $\Delta = 0$. Лемма доказана.

Таким образом, для потока произвольной лиувиллевой метрики на торе можно выбрать трансверсальную 2-площадку в $Q^3 = \{H = 1\}$ так, что $\Delta = 0$. Поэтому Δ -инвариант так же не входит в траекторный инвариант, классифицирующий потоки лиувиллевых метрик на торе.

Теперь утверждение теоремы 2.1 непосредственно следует из результатов, полученных в [11], [12] и приведенных во введении.

Следствие. Класс траекторной эквивалентности геодезического потока лиувиллевой метрики $ds^2 = (f(x) + h(y))(dx^2 + dy^2)$, где функции f и h имеют по одному максимуму на отрезке-периоде решетки, состоит из потоков метрик с функциями f' и h' , имеющих также один максимум на отрезке-периоде решетки так, что $[\rho'] = [\rho]$.

Для доказательства этого следствия достаточно привести следствие теоремы тонкой топологической классификации для потоков метрик "простейшего вида" и заметить, что Λ -инвариант таких потоков всегда тривиален.

Комментарий. В предыдущей главе был найден удобный способ дискретного кодирования функций f и h метрики так, что эквивалентным кодам отвечают топологически эквивалентные потоки.

В случае, когда функция вращения на ребре молекулы имеет невырожденные особые точки, класс сопряженности $[\rho]$ задается упорядоченным набором критических значений функции, так называемым R -вектором, то есть множество классов эквивалентности дискретно и можно было бы дополнить "топологический код" до "траекторного".

В общем случае найденный инвариант, классифицирующий рассматриваемые системы с точностью до траекторной эквивалентности, не является дискретным объектом, см. предложение 2.2, поэтому здесь не удается разумно переформулировать теорему классификации в терминах функций метрики f и h .

§2. Нетривиальность классов траекторной эквивалентности, их топологические свойства

Содержание этого параграфа составляет изучение различных свойств множеств классов эквивалентности геодезических потоков лиувиллевых метрик на двумерном торе.

Предложение 2.1. *В любой окрестности произвольной лиувиллевой метрики на двумерном торе, за исключением "плоской" метрики, существует семейство метрик, зависящее от функционального параметра, принадлежащих одному классу траекторной эквивалентности.*

Доказательство. Рассмотрим случай, когда функции f , h имеют по одному максимуму на отрезке-периоде решетки. Молекула $W(f, h)$ имеет вид, изображенный на рис.4. Траекторный инвариант — это пара функций вращения — на ребре e_1 и на ребре e_2 , см. рис.4.

Пусть α_1, α_2 — функции, обратные к функции h на интервалах монотонности, аналогично β_1, β_2 — для функции f .

Тогда для функций вращения на каждом ребре будем иметь:

$$\int_F^{h_1} \frac{2\alpha(s)ds}{\sqrt{s-F}} = \rho_1(F) \int_{f_0}^{f_1} \frac{\beta(s)ds}{\sqrt{s+F}},$$

где $F \in (h_0, h_1)$.

$$\rho_2(F) \int_{h_0}^{h_1} \frac{\alpha(s)ds}{\sqrt{s+F}} = \int_F^{f_1} \frac{2\beta(s)ds}{\sqrt{s-F}},$$

где $F \in (f_0, f_1)$. Здесь $\alpha = \alpha_1' - \alpha_2'$, $\beta = \beta_1' - \beta_2'$. Отсюда фиксированным α и β отвечает зависящее от функционального параметра семейство функций f и h , то есть зависящее от функционального параметра семейство метрик на торе, задающих траекторно эквивалентные геодезические потоки. При этом, очевидно, в любой окрестности метрики в C^1 -топологии существует такое семейство.

В общем случае рассмотрим фрагмент графика функции h , см. рис. 11. Обозначим $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ функции обратные к функции h на интервалах монотонности. Рассмотрим функции вращения, соответствующие ребрам 1, 2, 3, см. рис. 11. Пусть

$$a(F) = \int_0^{T_*} \frac{ds}{\sqrt{f(s)+F}}.$$

Тогда

$$\rho_1(F) = \int_F^{h_1} \frac{2(\alpha_1' - \alpha_2')ds}{\sqrt{s-F}} a(F)^{-1}, \quad F \in (h_3, h_1),$$

$$\rho_2(F) = \int_F^{h_2} \frac{2(\alpha_3' - \alpha_4')ds}{\sqrt{s-F}} a(F)^{-1}, \quad F \in (h_3, h_2),$$

$$\rho_3(F) = \int_F^{h_1} \frac{2(\alpha_1' - \alpha_2')ds}{\sqrt{s-F}} a(F)^{-1} +$$

ненад, т.к.
 d_2 не
определено
не всем
стороне.

$$\begin{aligned}
& + \int_F^{h_2} \frac{2(\alpha_3 t - \alpha_4 t) ds}{\sqrt{s - F}} a(F)^{-1}, \quad F \in (h_0, h_3). \\
\int_F^{h_1} \frac{2(\alpha_1 t - \alpha_2 t) ds}{\sqrt{s - F}} a(F)^{-1} & = \int_F^{h_3} \frac{2(\alpha_1 t - \alpha_2 t) ds}{\sqrt{s - F}} a(F)^{-1} + \\
& + \int_{h_3}^{h_1} \frac{2(\alpha_1 t - \alpha_2 t) ds}{\sqrt{s - F}} a(F)^{-1}.
\end{aligned}$$

Будем изменять функции α_1 и α_2 так, чтобы $\alpha_1' - \alpha_2'$ не изменялась при $s \in (h_3, h_1)$. Тогда ни одна из функций ρ_i , $i = 1, 2, 3$ не изменится. На остальных ребрах молекулы функции вращения, очевидно, также не изменятся. Таким образом, для потока лиувиллевой метрики на торе получаем семейство траекторно эквивалентных потоков, причем в любой окрестности этой метрики в C^1 -топологии такое семейство существует. Предложение 1 доказано.

Следствием этого предложения и теоремы 2.1 является

Теорема 2.2. *Класс траекторной эквивалентности лиувиллевой метрики на торе, за исключением "плоской" метрики, нетривиален, то есть состоит из множества метрик, не сводящихся одна к другой заменой переменных.*

Доказательство. В самом деле, произвольная "неплоская" метрика даже локально имеет не более двух различных лиувиллевых систем координат, которые нельзя получить путем растяжения и сдвига. Это следует, в частности, из результатов Дарбу и Раффи, см. [2], [4]. Таким образом, семейство метрик с траекторно эквивалентными потоками, построенное в предложении 1, содержит метрики, не сводящиеся одна к другой заменой переменных. Теорема доказана.

Траекторная классификация геодезических потоков лиувиллевых метрик на торе позволяет легко доказать следующее свойство множеств классов эквивалентности потоков.

Теорема 2.3 . *Классы непрерывной траектонаой эквивалентности линейно-интегрируемых геодезических потоков метрик на торе являются линейно-связными множествами.*

Доказательство. Линейный элемент метрики на торе с линейным по импульсам интегралом имеет в некоторых координатах вид

$$ds^2 = h(y)(dx^2 + dy^2),$$

где l, T_y — периоды решетки, задающей наш тор.

Из приведенных выше рассуждений функция вращения имеет вид

$$\rho(F) = 2\sqrt{F} \int_0^{T_y} \frac{dy}{\sqrt{h(y) - F}}.$$

Обозначим $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ функции, обратные к функции h , на интервалах монотонности.

Рассмотрим функции вращения, соответствующие ребрам 1,2,3, см. рис. 6.

Тогда

$$\rho_1(F) = 2\sqrt{F} \int_F^{h_1} \frac{(\alpha_1' - \alpha_2')ds}{\sqrt{s - F}}, \quad F \in (h_3, h_1),$$

$$\rho_2(F) = 2\sqrt{F} \int_F^{h_2} \frac{(\alpha_3' - \alpha_4')ds}{\sqrt{s - F}}, \quad F \in (h_3, h_2),$$

$$\rho_3(F) = 2\sqrt{F} \int_F^{h_1} \frac{(\alpha_1' - \alpha_2')ds}{\sqrt{s - F}} +$$

$$+2\sqrt{F} \int_F^{h_2} \frac{(\alpha_3' - \alpha_4')ds}{\sqrt{s-F}}, \quad F \in (h_0, h_3),$$

$$\begin{aligned}\rho_3(F) = & 2\sqrt{F} \int_F^{h_3} \frac{(\alpha_1' - \alpha_4')ds}{\sqrt{s-F}} + \\ & + 2\sqrt{F} \int_{h_3}^{h_1} \frac{(\alpha_1' - \alpha_2')ds}{\sqrt{s-F}} + \\ & + 2\sqrt{F} \int_{h_1}^{h_2} \frac{(\alpha_3' - \alpha_4')ds}{\sqrt{s-F}}.\end{aligned}$$

Используя формулу решения интегрального уравнения Абеля: если

$$\int_0^t \frac{\varphi(s)ds}{\sqrt{t-s}} = f(t), \quad f \in C^1,$$

то

$$\varphi(t) = \frac{f(0)}{\pi\sqrt{t}} + \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{f'(s)ds}{\sqrt{t-s}},$$

можно понять, как по функциям α_i , $i = 2n + 1$ и заданным функциям вращения можно восстановить функции α_i , $i = 2n$, причем единственным образом.

Теперь две метрики на торе с функциями h и h^* и траекторно эквивалентными потоками будем соединять в классе их траекторной эквивалентности так, чтобы совпали α_i , $i = 2n+1$ и функции вращения. Тогда совпадут и α_i , $i = 2n$, то есть функция h перейдет в функцию h^* . Теорема доказана.

§3. Свойства функции вращения. Примеры

Предложение 2.2. *Функция вращения $\rho(F)$ является гладкой функцией на интервале I_ϵ , см. рис. 2. Седловому атому соответствует асимптотика*

$$\rho(x) \rightarrow -p \log x, \quad x \rightarrow 0, p > 0. \quad (1)$$

Атому A соответствует предельное значение

$$\lim_{F \rightarrow h(a)} \rho(F) = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{|h_{yy}(a)|}} \left(\int_0^{T_x} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + h(a)}} \right)^{-1}.$$

Обратно, любая гладкая функция на интервале с асимптотикой (1) на концах реализуется как функция вращения потока некоторой лиувиллевой метрики на торе.

Доказательство. Рассмотрим ребро $e \in W(h)$. Функция вращения имеет вид

$$\begin{aligned} \rho(F) &= b(F)a^{-1}(F), \\ b(F) &= \int_{s_1}^{s_2} \frac{2ds}{\sqrt{h(s) - F}}, \quad h(s_1) = h(s_2) = F, \\ a(F) &= \int_0^{T_x} \frac{ds}{\sqrt{f(s) + F}}. \end{aligned}$$

Пусть α_1, α_2 — функции, обратные к $h = h(y)$ на интервалах монотонности, см. рис. 4. Тогда

$$b(F) = \int_F^{h_1} \frac{2(\alpha_1 t - \alpha_2 t)ds}{\sqrt{s - F}}, \quad F \in (h_0, h_1).$$

Отсюда очевидно, что функция вращения — это гладкая функция на интервале I_e . Найдем асимптотику для функции вращения при F , стремящемся к седловому критическому значению.

Рассмотрим предел функции $b(F)$ при $F \rightarrow h(a)$, где a — это точка локального минимума функции h . Имеем

$$b(F) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{2ds}{\sqrt{h(s) - F}}, \quad h(s_1) = h(s_2) = F,$$

Так как $h_y(a) = 0$, то асимптотика для $b(F)$ при $F \rightarrow h(a)$ имеет вид:

$$b(x) \rightarrow -b \log x, \quad x \rightarrow 0, \quad b > 0.$$

Поэтому асимптотика для функции вращения имеет вид:

$$\rho(x) \rightarrow -p \log x, \quad x \rightarrow 0, p > 0.$$

Вычислим предел функции вращения при F , стремящемся к минимуму критическому значению, что соответствует атому A .

Рассмотрим $\lim \rho(F)$, $F \rightarrow h(a)$, где a — точка локального максимума функции h . Имеем

$$b(F) = 2 \int_0^{\pi/2} 2\phi(F \sin^2 s + h(a) \cos^2 s) ds,$$

где

$$\phi(t) = \frac{\sqrt{h(a) - t}}{h_y(h^{-1}(t))}.$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$\int_a^b \frac{\phi(s) ds}{\sqrt{(s-a)(b-s)}} = 2 \int_0^{\pi/2} \phi(a \sin^2 s + b \cos^2 s) ds.$$

Таким образом,

$$b(h(a)) = 2\pi \lim_{y \rightarrow a} \frac{2\sqrt{h(a) - h(y)}}{h_y(y)} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{|h_{yy}(a)|}}.$$

Отсюда

$$\lim_{F \rightarrow h(a)} \rho(F) = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{|h_{yy}(a)|}} \left(\int_0^{T_x} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + h(a)}} \right)^{-1}.$$

Обратное утверждение сразу следует из решения интегрального уравнения Абеля: если

$$\int_0^t \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{t-s}} = f(t), \quad f \in C^1,$$

то

$$\varphi(t) = \frac{f(0)}{\pi\sqrt{t}} + \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{f'(s)ds}{\sqrt{t-s}}.$$

Таким образом, для произвольной гладкой функции ρ на некотором интервале с асимптотикой (1) на концах и произвольно выбранной периодической функции f существует функция h так, что функция ρ является функцией вращения соответствующей лиувиллевой метрики. Предложение доказано.

Предложение 2.3. Для лиувиллевой метрики на торе

$$ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2), \quad \lambda(x, y) = f(x) + h(y),$$

где функции f и h имеют не более одного максимума на отрезке периода решетки, существует константа c_0 такая, что для любой константы $c > c_0$ поток метрики $ds^2 = (\lambda(x, y) + c)(dx^2 + dy^2)$ имеет монотонные функции вращения на всех ребрах, тогда и только тогда, когда функции

$$b(F) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{2ds}{\sqrt{u(s) - F}}, \quad u(s_1) = u(s_2) = F, \quad u = f, h$$

монотонны.

Доказательство. Молекулы таких систем имеют вид, изображенный на рис.4. Рассмотрим ребро $e_1 \in W(h)$. Функция вращения здесь имеет вид:

$$\rho(F) = b(F)a^{-1}(F),$$

$$b(F) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{2ds}{\sqrt{h(s) - F}}, \quad h(s_1) = h(s_2) = F,$$

$$a(F) = \int_0^{T_x} \frac{ds}{\sqrt{f(s) + F}}.$$

Пусть функция вращения монотонна, то есть $\rho_F(F) < 0$. Тогда $b_F a < b a_F$. Легко заметить, что $a_F < 0$. Поэтому

$$b_F a a_F^{-1} > b > 0. \quad (2)$$

Отсюда необходимо $b_F < 0$. Пусть $b_F < 0$. Для потоков метрик с конформным множителем $\lambda(x, y) + c$ функция $a(F)$ имеет вид:

$$a(F) = \int_0^{T_x} \frac{ds}{\sqrt{f(s) + F + c}}.$$

Найдем условие на константу c так, чтобы выполнялось (2): $a a_F^{-1} < b b_F^{-1}$. Функция $b b_F^{-1}$ непрерывна на $[h_0, h_1]$ (доопределяется нулем при $h = h_0$, так как функция b имеет асимптотику (1) при F , стремящемся к h_0). Поэтому существует константа

$$M = \min_{[h_0, h_1]} b b_F.$$

Найдем условие на константу c , чтобы $a a_F < M$. Из выражения для функции $a(F)$ легко следует, что $a a_F^{-1} \leq -f_0 - c - h_0$. Отсюда при $c > -M - f_0 - h_0$ выполняется (2), то есть функция вращения на ребре e_1 монотонна.

Аналогичные рассуждения проведем для функции вращения на ребре $e_2 \in W(f)$, при этом вместо константы M возникнет константа M' . Пусть $N = \min(M, M')$. Тогда для $c > -N - f_0 - h_0$ функция вращения на обоих ребрах e_1 и e_2 монотонна. Предложение доказано.

Из принципа Монпертои и предложения 2.3 вытекает

Следствие. Для потенциальной системы на торе с потенциалом вида $U(x, y) = f(x) + h(y)$, где f и h периодичны и имеют не более одного максимума на отрезке-периоде решетки, на поверхностях достаточно больших энергий функция вращения монотонна тогда и только

тогда, когда функции

$$b(F) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{2dx}{\sqrt{u(s) - F}}, \quad u(s_1) = u(s_2) = F, \quad u = f, h$$

многоточны.

Приведенные выше утверждения иллюстрирует следующий пример.

Предложение 2.4. *Рассмотрим семейство метрик*

$$ds^2 = (\sin y + k \sin^2 y + c)(dx^2 + dy^2), \quad T_x, T_y = 2\pi,$$

$$k, c - \text{const}, \quad k \in [\epsilon, 1/2 - \epsilon], \quad \epsilon > 0$$

Существует константа c_0 такая, что для любого $c > c_0$ потоки метрик данного семейства топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$(2 + k + c)/(1 + 2k) = \text{const.}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(y) = \sin y + k \sin^2 y + 1$. Для ее производной имеем выражение

$$h'_y(y) = \cos y + 2k \sin y \cos y = (1 + 2k \sin y) \cos y.$$

При $0 < k < 1/2$ график функции h имеет вид, изображенный на рис. 12. Таким образом, функция h имеет единственный максимум на отрезке-периоде решетки. Докажем, что функция $b(F)$ строго убывает при $F \in [k, k + 2]$. Обозначим

$$t = \sin y,$$

$$kt^2 + t + 1 - F = k(t - F_1)(t - F_2),$$

где $F_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{1 - 4k(1 - F)})/2k$.

Заметим, что $F_2 < -1$.

Итак,

$$\begin{aligned} b(F) &= 2 \int_{F_1}^1 \frac{2dt}{\sqrt{(1-t)(t-F_1)(1+t)(t-F_2)}} = \\ &= \frac{8}{\sqrt{k}} \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{\phi(F_1 \cos^2 s + \sin^2 s)}}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$\int_a^b \frac{\phi(s)ds}{\sqrt{(s-a)(b-s)}} = 2 \int_0^{\pi/2} \phi(a \sin^2 s + b \cos^2 s) ds.$$

Имеем

$$b_F = \frac{-8}{\sqrt{k}} \int_0^{\pi/2} \frac{\phi_F ds}{\phi^{3/2}}, \quad (3)$$

где

$$\phi = (1 + F_1 \cos^2 s + \sin^2 s)(F_1 \cos^2 s + \sin^2 s - F_2).$$

Обозначим

$$\phi_1 = (1 + F_1 \cos^2 s + \sin^2 s) = (2 \sin^2 s + (F_1 + 1) \cos^2 s).$$

$$F_1 = (-1 + \sqrt{1 - 4k(1 - F)})/2k > (-1 + 1 + 2k)/2k > 1,$$

так как $F > k$. Поэтому $\phi_1 > 0$. Обозначим

$$\phi_2 = (F_1 \cos^2 s + \sin^2 s - F_2) = (F_1 - F_2) \cos^2 s + (1 - F_2) \sin^2 s > 0.$$

Тогда $\phi = \phi_1 \phi_2$. Имеем $\phi_F = \phi_{1,F} \phi_2 + \phi_1 \phi_{2,F}$. Получим

$$\phi_{1,F} = 2 \cos^2 s (1 - 4k + 4kF)^{-1} \geq 0,$$

$$\phi_{2,F} = (4 \cos^2 s + 2 \sin^2 s)(1 - 4k + 4kF)^{-1} > 0.$$

Отсюда $\phi_F > 0$. Тогда из (3) следует, что $b_F < 0$. Таким образом, мы находимся в условии предложения 3. Для каждого $k \in [\epsilon, 1/2 - \epsilon]$ существует $c_0(k)$. Выберем

$$c_0 = \max_k c_0(k).$$

Тогда для $c > c_0$ функция вращения на ребре e монотонна. Рассмотрим предельное значение для функции вращения при $F = k + 2$.

С помощью предложения 2.2 легко получим критерий траекторной эквивалентности для метрик этого семейства. Предложение доказано.

Следующим следствием траекторной классификации лиувиллевых метрик на торе является

Предложение 2.5. *Геодезические потоки лиувиллевых метрик на торе*

$$ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2) \text{ и } ds^2 = (\lambda(x, y) + c)(dx^2 + dy^2), \quad c > 0$$

топологически траекторно не эквивалентны.

Доказательство. Предположим, что лиувиллевы метрики на торе с конформными множителями λ и $\lambda + c$ топологически траекторно эквивалентны. Тогда из теоремы 2.1 следует, что необходимо должны совпадать пределы функции вращения, соответствующие атомам A молекулы W , см. рис. 2.

Обозначим

$$h_i \left(\int_0^{T_x} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + F'_i}} \right)^{-1}, \quad i = 1, \dots, n$$

пределы функции $\rho(F)$, соответствующие атомам A графа $W(h)$ и

$$f_i \left(\int_0^{T_y} \frac{dx}{\sqrt{h(x) + F_i}} \right)^{-1}, i = 1, \dots, m$$

пределы функции ρ , соответствующие атомам A графа $W(f)$.

Тогда для потока метрики $ds^2 = (f(x) + h(y) + c)(dx^2 + dy^2)$ эти пределы будут иметь вид

$$h_i \left(\int_0^{T_x} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + F'_i + c}} \right)^{-1}, i = 1, \dots, n$$

и

$$f_i \left(\int_0^{T_y} \frac{dx}{\sqrt{h(x) + F_i + c}} \right)^{-1}, i = 1, \dots, m,$$

см. предложение 2.2.

Возможны следующие два случая.

Дерево $W(h)$ молекулы $W(f, h)$ соответствует дереву $W(h)$ молекулы $W(f, h + c)$. Тогда

$$h_i \left(\int_0^{T_x} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + F'_i}} \right)^{-1} = h_l \left(\int_0^{T_x} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + F'_l + c}} \right)^{-1}, i, l = 1, \dots, n.$$

Перемножив все такие равенства, получим :

$$\prod_{i=1}^n h_i \left(\int_0^{T_x} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + F'_i}} \right)^{-1} = \prod_{i=1}^n h_i \left(\int_0^{T_x} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + F'_i + c}} \right)^{-1}.$$

Итак, получили противоречие.

Пусть теперь дерево $W(h)$ молекулы $W(h, f)$ соответствует дереву $W(f)$ молекулы $W(h, f + c)$ и, следовательно, дерево $W(f)$ молекулы $W(f, h)$ соответствует дереву $W(h)$ молекулы $W(f, h + c)$. Тогда имеют место равенства:

$$h_i \left(\int_0^{T_y} \frac{dy}{\sqrt{h(y) + F_i}} \right)^{-1} = f_m \left(\int_0^{T_x} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + F'_m + c}} \right)^{-1},$$

$$f_i \left(\int_0^{T_x} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + F'_i}} \right)^{-1} = h_l \left(\int_0^{T_y} \frac{dy}{\sqrt{h(y) + F_l + c}} \right)^{-1},$$

$$i, l, m = 1, \dots, n.$$

Перемножив все эти равенства, получим опять противоречие:

$$\prod_{i=1}^n h_i f_i \left(\int_0^{T_x} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + F'_i}} \right)^{-1} \left(\int_0^{T_y} \frac{dy}{\sqrt{h(y) + F_i}} \right)^{-1} = \\ \prod_{i=1}^n h_i f_i \left(\int_0^{T_x} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + F'_i + c}} \right)^{-1} \left(\int_0^{T_y} \frac{dy}{\sqrt{h(y) + F_i + c}} \right)^{-1}.$$

Предложение доказано.

§4. Теорема реализации

Рассмотрим лиувиллеву метрику на торе с линейно-интегрируемым геодезическим потоком:

$$ds^2 = h(y)(dx^2 + dy^2),$$

где $1, T_y$ — периоды решетки, задающей наш тор.

В §2 введено понятие оснащенного графа $(W(h), [\rho], \Lambda)$ и доказано, что это инвариант, классифицирующий потоки с точностью до непрерывной тракторной эквивалентности.

Введем понятие допустимого значения этого инварианта.

Граф $W(h)$ имеет вид произвольного дерева, которое растет из вершины типа P_n , со внутренними вершинами типа V_k , $k \geq 2$ и конечными вершинами типа A .

Функция $\rho(F)$ обладает следующими свойствами:

1. $\rho(F) \in C^1(I_e)$,
2. Седловому атому соответствует асимптотика

$$\rho \rightarrow -p \log x, \quad x \rightarrow 0, p > 0.$$

3. Атому A соответствует конечное значение функции вращения.

Инвариант Λ — это произвольный набор положительных чисел $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ с точностью до пропорциональности.

Теорема 2.4. Любое допустимое значение оснащенного графа $(W(h), [\rho], \Lambda)$ реализуется как траекторный инвариант геодезического потока некоторой лиувиллевой метрики на торе.

Доказательство. Граф $W(h)$ строится по графику $h = h(y)$, как это показано на рис. 2. Очевидно, что для любого допустимого графа легко качественно построить соответствующую функцию h .

Далее воспользуемся решением интегрального уравнения Абеля: если

$$\int_0^t \frac{\varphi(s)ds}{\sqrt{t-s}} = f(t), \quad f \in C^1,$$

то

$$\varphi(t) = \frac{f(0)}{\pi \sqrt{t}} + \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{f'(s)ds}{\sqrt{t-s}},$$

Таким образом, по функции вращения можно восстановить исходную функцию h . При этом рассматриваются сначала ребра молекулы, содержащие букву-атом A , и далее двигаемся "вниз" по графу W . Очевидно, что не изменения класса непрерывной траекторной эквивалентности, можно заменить значения асимптотики в седловых атомах так,

чтобы оно соответствовало заранее заданному набору Λ . (Значения p и Λ связаны, так как выражаются через вторые производные функции h в точках локальных минимумов.) Теорема доказана.

§5. Приложения траекторной классификации геодезических потоков: свойства геодезических лиувиллевых метрик на двумерном торе, единственность лиувиллевого типа, геодезическая эквивалентность

В предыдущих параграфах настоящей главы подробно изучались свойства геодезических потоков лиувиллевых метрик на двумерном торе. Общеизвестно, что проекция решения системы дифференциальных уравнений, задающей геодезический поток, из кокасательного расслоения на конфигурационное многообразие — это геодезическая данной метрики. Поэтому для изучения свойств геодезических удобно применить результаты исследования свойств геодезических потоков.

Предложение 2.6. *Замыкание множества, заметаемого незамкнутой геодезической лиувиллевой метрики*

$$ds^2 = (f(x) + h(y))(dx^2 + dy^2)$$

на торе, имеет вид $a \leq x \leq b, y$ — любое или $c \leq y \leq d, x$ — любое, см. рис. 13.

Доказательство. Проекция тора Лиувилля с иррациональной обмоткой — это замыкание множества, заметаемого незамкнутой геодезической. Тор Лиувилля на изоэнергетической поверхности $\{H = 1\}$ в нашем случае имеет вид:

$$p_1^2 = f(x) + F,$$

$$p_2^2 = h(y) - F,$$

где F — это значение дополнительного интеграла системы.

Если $F > 0$, то искомая проекция определяется условием

$$h(y) - F \geq 0,$$

где x — любое, так как $f(x) + F > 0$.

Аналогично, если $F < 0$, то искомая проекция определяется условием $f(x) + F \geq 0$, y — любое, так как $h(y) - F > 0$.

Отсюда замыкание множества, замкнутого незамкнутой геодезической лиувиллевой метрики

$$ds^2 = (f(x) + h(y))(dx^2 + dy^2)$$

на торе, имеет вид $a \leq x \leq b$, y — любое или $c \leq y \leq d$, x — любое. Предложение доказано.

Пример. Рассмотрим "плоскую" метрику на торе: линейный элемент приводится к виду

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

где T_x, T_y — периоды решетки, задающей наш тор. Тогда геодезический поток — система дифференциальных уравнений — имеет вид:

$$\dot{p}_1 = 0,$$

$$\dot{p}_2 = 0,$$

$$\dot{x} = 2p_1,$$

$$\dot{y} = 2p_2.$$

Геодезические, очевидно, имеют вид $ax = by + l$, $a, b, l — const.$

Геодезические замкнуты тогда и только тогда, когда $maT_x = bnT_y$, где $m, n \in Z$.

Рассмотрим геодезическую произвольной лиувиллевой метрики на торе, выпущенную из точки x^*, y^* под углом α . Обозначим

$$f_0 = \min f, \quad h_0 = \min h, \quad f^* = f(x^*), \quad h^* = h(y^*),$$

$$A = \frac{h_0 + f^*}{h^* - h_0},$$

$$B = \frac{-f_0 + f^*}{h^* + f_0}.$$

Предложение 2.7. *Произвольная геодезическая, выпущенная под углом*

$$B < \tan^2 \alpha < A$$

не имеет самопересечений.

Доказательство. Рассмотрим геодезический поток данной метрики — гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{\lambda(x, y)}.$$

Эта система интегрируема, дополнительный интеграл имеет вид:

$$F = \frac{h(y)p_1^2 - f(x)p_2^2}{\lambda(x, y)}.$$

Тор Лиувилля на изоэнергетической поверхности $\{H = 1\}$ имеет вид:

$$p_1^2 = f(x) + F,$$

$$p_2^2 = h(y) - F,$$

Отсюда легко заметить, что при $-f_0 < F < h_0$ геодезическая не имеет самопересечений.

Заметим, что

$$\tan \alpha = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \pm \sqrt{\frac{f(x) + F}{h(y) - F}}.$$

Отсюда

$$F = h(y) \sin^2 \alpha - f(x) \cos^2 \alpha.$$

Подставляем теперь вместо $x, y — x^*, y^*$.

Докажем, что условие $-f_0 < F < h_0$ эквивалентно $B < \tan^2 \alpha < A$.

Итак,

$$F = h^* \sin^2 \alpha - f^* \cos^2 \alpha = \frac{h^* \tan^2 \alpha - f^*}{1 + \tan^2 \alpha}.$$

Отсюда F является дробно-линейной функцией относительно $\tan^2 \alpha$ и, следовательно, монотонно-возрастающей, так как $h^* + f^* > 0$.

Если $F = -f_0$, то

$$-f_0(1 + \tan^2 \alpha) = h^* \tan^2 \alpha - f^*,$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{-f_0 + f^*}{h^* + f_0} = B.$$

Если $F = h_0$, то

$$h_0(1 + \tan^2 \alpha) = h^* \tan^2 \alpha - f^*,$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{h_0 + f^*}{h^* - h_0} = A.$$

Поэтому условие $-f_0 < F < h_0$ эквивалентно $B < \tan^2 \alpha < A$.

Предложение доказано.

Предложение 2.8. Для произвольной "неплоской" лиувиллевой метрики на торе любая точка тора — это точка однократного пересечения некоторой незамкнутой геодезической. Биссектрисы двух смежных углов, образованных касательными к двум отрезкам такой геодезической — это касательные к линиям уровня лиувиллевых координат, см. рис. 13.

Доказательство. Рассмотрим функцию вращения для геодезического потока лиувиллевой метрики на торе, выражение для нее было найдено выше:

$$\rho(F) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{2dy}{\sqrt{h(y) - F}} \left(\int_0^{T_x} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + F}} \right)^{-1},$$

если $\tan^2 \alpha > A$.

Пусть $h \neq \text{const}$. Тогда существует незамкнутая геодезическая, заметающая множество, замыкание которого имеет вид:

$$a \leq y \leq b, \quad x \in [0, T_x], \quad a > 0, \quad b < T_y.$$

В самом деле, рассмотрим значение интеграла системы $F > h_0$.

Имеем, что

$$\lim_{F \rightarrow h_0} \rho(F) = \infty.$$

При этом $\rho(F) = \infty$ тогда и только тогда, когда $h_y(h^{-1}(F)) = 0$.

Отсюда существует такое δ , что функция $\rho(F)$ не локально постоянна на $(h_0, h_0 + \delta)$, то есть незамкнутые решения всюду плотны при F из интервала $(h_0, h_0 + \delta)$.

Имеем

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \pm \sqrt{\frac{h(y) - F}{f(x) + F}}.$$

Каждая точка множества

$$a < y < b, \quad x \in [0, T_x], \quad a > 0, \quad b < T_y.$$

— это точка однократного самопересечения незамкнутой геодезической. При этом касательная к линии уровня лиувиллевой координаты — это биссектриса угла, образованного касательными к двум отрезкам геодезической, пересекающимся в данной точке, см. рис. 13.

Далее из-за всюду плотности незамкнутых решений при $F \in (h_0, h_0 + \delta)$ следует, что можно перейти к пределу при $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow T_y$. Предложение доказано.

Следствие 1. *Все лиувиллевы координаты данной "неплоской" метрики на торе получаются друг из друга путем сдвига и растяжения, другими словами, если конформный множитель линейного элемента — двоякопериодическая положительная функция, то лиувиллев вид этого линейного элемента единственен.*

Доказательство. Из доказанного выше предложения вытекает, что линии уровня лиувиллевых координат — инвариантны для произвольной "неплоской" метрики на торе.

Докажем, что все лиувиллевы координаты данной "неплоской" метрики на торе получаются друг из друга путем сдвига и растяжения. Лиувиллев вид "плоской" метрики на торе тогда, очевидно, единственен.

В самом деле, пусть

$$ds^2 = (X(x) + Y(y))(dx^2 + dy^2)$$

и

$$ds^2 = (U(u) + V(v))(du^2 + dv^2).$$

Тогда, используя доказанное выше предложение, без ограничения общности можно считать, что

$$x = x(u),$$

$$y = y(v).$$

Имеем

$$\begin{aligned}
ds^2 &= (U(u) + V(v))(du^2 + dv^2) = \\
&= (U(u(x)) + V(v(y)))(u_x^2(x)dx^2 + v_y^2(y)dy^2) = \\
&= (X(x) + Y(y))(dx^2 + dy^2),
\end{aligned}$$

$$u_x^2(x) = v_y^2(y) = \text{const} = k^2,$$

$$u(x) = e_1 kx + a, \quad v(y) = e_2 ky + b, \quad e_1, e_2 = \pm 1.$$

Следствие доказано.

Комментарий. Итак, если лиувилева метрика на торе имеет две пары лиувиллевых координат x, y и u, v так, что

$$ds^2 = (X(x) + Y(y))(dx^2 + dy^2)$$

и

$$ds^2 = (U(u) + V(v))(du^2 + dv^2),$$

то

$$k^2 U(e_1 kx + a) = X(x) + c,$$

$$k^2 V(e_2 ky + b) = Y(y) - c,$$

где $a, b, c = \text{const}$, $e_i = \pm 1$, $k = T_u/T_x = T_v/T_y$

или

$$k^2 U(e_1 ky + a) = Y(y) + c,$$

$$k^2 V(e_2 kx + b) = X(x) - c,$$

где $a, b, c = \text{const}$, $e_i = \pm 1$, $k = T_u/T_y = T_v/T_x$.

Существование констант e_i, a, b, c легко выяснить с помощью коэффициентов Фурье функций X, Y, U, V .

Рассмотрим функции $U(u)$ и $X(x)$.

Проверим, имеет ли место тождество

$$k^2 U(e_1 kx + a) = X(x) + c, \quad k = T_u/T_x$$

для некоторых констант $e_1 = \pm 1, a, c$.

Положим $e_1 = 1$.

Обозначим $t_u = \frac{2\pi}{T_u}, t_x = \frac{2\pi}{T_x}$.

Очевидно $t_x = kt_u$.

Имеем разложение в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} k^2(U_0 + U_n^1 \cos nt_u u + U_n^2 \sin nt_u u) &= \\ &= X_0 + c + X_n^1 \cos nt_x x + X_n^2 \sin nt_x x. \end{aligned}$$

Подставляем в это равенство $u = kx + a$.

Получим

$$\begin{aligned} k^2(U_0 + U_n^1 \cos nt_u(kx + a) + U_n^2 \sin nt_u(kx + a)) &= \\ k^2(U_0 + U_n^1 \cos n(t_x x + t_u a) + U_n^2 \sin n(t_x x + t_u a)) &= \\ &= X_0 + c + X_n^1 \cos nt_x x + X_n^2 \sin nt_x x. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$k^2 U_0 = X_0 + c,$$

$$k^2(U_n^1 \cos nt_u a + U_n^2 \sin nt_u a) = X_n^1,$$

$$k^2(-U_n^1 \sin nt_u a + U_n^2 \cos nt_u a) = X_n^2,$$

Отсюда

$$\frac{-U_1^1 \tan t_u a + U_1^2}{U_1^1 + U_1^2 \tan t_u a} = \frac{X_1^2}{X_1^1} = X.$$

и

$$\tan t_u a = \frac{U_1^2 - XU_1^1}{XU_1^2 + U_1^1} = R.$$

Из последнего выражения находим a :

$$a = \frac{1}{t_u} \arctan R.$$

Аналогично действуем после подстановки $e_1 = -1$.

Из разложения функций V, Y найдем b .

Далее необходимым и достаточным условием выполнения тождества

$$k^2 U(e_1 kx + a) = X(x) + c, \quad k = T_u/T_x$$

является совместность системы

$$k^2 U_0 = X_0 + c,$$

$$k^2(U_n^1 \cos nt_u a + U_n^2 \sin nt_u a) = X_n^1,$$

$$k^2(-U_n^1 \sin nt_u a + U_n^2 \cos nt_u a) = X_n^2$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

В предложении 2.4 построено семейство лиувиллевых метрик на торе с траекторно эквивалентными потоками.

Рассмотрим семейство метрик

$$ds^2 = (\sin y + l \sin^2 y + c)(dx^2 + dy^2), \quad T_x, T_y = 2\pi,$$

$$l, c - const, \quad l \in [\epsilon, 1/2 - \epsilon], \quad \epsilon > 0$$

Существует константа c_0 такая, что для любого $c > c_0$ потоки метрик данного семейства топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$(2 + l + c)/(1 + 2l) = const.$$

Применим рассуждения, приведенные выше и докажем, что при различных значениях констант l , с метрики данного семейства не сводятся одна к другой путем замены переменной.

В обозначениях, принятых выше:

$$k = 1, t_u = t_x = 1.$$

Из единственности разложения в ряд Фурье сразу получаем, что при различных значениях констант l , с метрики данного семейства не сводятся одна к другой путем замены переменной.

Следствие 2 (условия Дини). Рассмотрим тор и лиувиллеву метрику на нем:

$$ds^2 = (f(x) - h(y))(dx^2 + dy^2),$$

где x, y — периодические координаты.

Тогда геодезически эквивалентное пространство на данном торе задает метрика, которая в периодических координатах x, y имеет вид:

$$ds'^2 = \left(\frac{1}{h(y) + c} - \frac{1}{f(x) + c} \right) \left(\frac{dx^2}{f(x) + c} + \frac{dy^2}{h(y) + c} \right), \quad c = \text{const.}$$

Доказательство. Из доказанного выше предложения следует, что если φ — это отображение тора в себя, устанавливающее геодезическую эквивалентность рассматриваемых пространств, то оно переводит α в α' и $-\alpha$ в $-\alpha'$, см. рис. 13.

Перейдем к пределу при $\alpha \rightarrow 0$. Отсюда отображение φ переводит линии уровня лиувиллевых координат первой метрики в линии уровня лиувиллевых координат второй метрики.

Геодезическая эквивалентность означает зависимость функций $F/H(x, y, \dot{x}/\dot{y})$. Используя это, сразу получим условия Дини для геодезически эквивалентных пространств. Следствие доказано.

Заметим здесь, что кроме оригинального доказательства Дини, см. [1], существует еще несколько различных доказательств, использующих совершенно различную технику. В частности, теорема Дини является следствием теоремы Дубнова из теории сетей, см. А.П. Норден, [17]. Леви-Чивита было дано обобщение теоремы Дини на многомерный случай, формулировка и доказательство его теоремы приведено, например, в [18].

С помощью результатов по траекторной классификации лиувиллевых метрик на торе, полученных в настоящей главе, удается полностью ответить на вопрос о замкнутости и простоте произвольной геодезической рассматриваемой метрики. Напомним, что замкнутая геодезическая является простой, если она не имеет самопресечений. Для геодезических на эллипсоиде такая задача была решена в [19].

Обозначим

$$f_0 = \min f, \quad h_0 = \min h, \quad f^* = f(x^*), \quad h^* = h(y^*),$$

$$\Lambda = \frac{h_0 + f^*}{h^* - h_0},$$

$$B = \frac{-f_0 + f^*}{h^* + f_0}.$$

Предложение 2.9. *Рассмотрим лиувилеву метрику*

$$ds^2 = (f(x) + h(y))(dx^2 + dy^2)$$

на торе. Обозначим $F = h^ \sin^2 \alpha - f^* \cos^2 \alpha$. Тогда геодезическая, выпущенная из точки x^*, y^* под углом α замкнута тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1.

$$\rho(F) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{2dx}{\sqrt{f(x) + F}} \left(\int_0^{T_y} \frac{dy}{\sqrt{h(y) - F}} \right)^{-1} = \frac{m}{n},$$

где m, n — взаимнопростые натуральные числа, если $\tan^2 \alpha < B$. Эта геодезическая является простой тогда и только тогда, когда $\rho(F) = 1/N$, $N \in \mathbf{N}$.

Длина этой геодезической равна

$$l(F) = m \int_0^{T_y} \sqrt{h(y) - F} dy + 2n \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{f(x) + F} dx.$$

2.

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{2dy}{\sqrt{h(y) - F}} \left(\int_0^{T_x} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + F}} \right)^{-1} = \frac{m}{n},$$

где m, n — взаимопростые натуральные числа, если $\tan^2 \alpha > A$. Эта геодезическая является простой тогда и только тогда, когда $\rho(F) = 1/N$, $N \in \mathbf{N}$.

Длина этой геодезической равна

$$l(F) = m \int_0^{T_x} \sqrt{f(x) + F} dx + 2n \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{h(y) - F} dy.$$

3.

$$\int_0^{T_y} \frac{dy}{\sqrt{h(y) - F}} \left(\int_0^{T_x} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + F}} \right)^{-1} = \frac{m}{n},$$

где m, n — взаимопростые натуральные числа, если $B < \tan \alpha < A$.

Длина этой геодезической равна

$$l(F) = n \int_0^{T_y} \sqrt{h(y) - F} dy + m \int_0^{T_x} \sqrt{f(x) + F} dx.$$

4. f^* — критическое значение функции f , $\alpha = 0$ или h^* — критическое значение функции h , $\alpha = \pi/2$.

Длина этой геодезической равна соответственно

$$l(F) = \int_0^{T_x} \sqrt{f(x) + h^*} dx$$

или

$$l(F) = \int_0^{T_y} \sqrt{h(y) + f^*} dy.$$

В случаях 3 и 4 любая замкнутая геодезическая проста.

Доказательство. Геодезическая замкнута тогда и только тогда, когда замкнуто соответствующее решение геодезического потока, то есть при регулярном значении интеграла функция вращения принимает рациональное значение. Используем результаты главы 2, где получено выражение для функции вращения рассматриваемых систем:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{2dx}{\sqrt{f(x) + F}} \left(\int_0^{T_y} \frac{dy}{\sqrt{h(y) - F}} \right)^{-1},$$

если $F < -f_0$, F — регулярное значение интеграла,

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{2dy}{\sqrt{h(y) - F}} \left(\int_0^{T_x} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + F}} \right)^{-1},$$

если $F > h_0$, F — регулярное значение интеграла,

$$\int_0^{T_y} \frac{dy}{\sqrt{h(y) - F}} \left(\int_0^{T_x} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + F}} \right)^{-1},$$

если $-f_0 < F < h_0$ и связь между углом наклона геодезической и значением интеграла F , установленную выше: $F = h^* \sin^2 \alpha - f^* \cos^2 \alpha$.

Первый случай из условия предложения соответствует графу $W(f)$ и регулярному значению интеграла $F < -f_0$.

Второй случай из условия предложения соответствует графу $W(h)$ и регулярному значению интеграла $F > h_0$.

Третий случай из условия предложения соответствует ребрам a, b, c, d молекулы $W(f, h)$ и значению интеграла $-f_0 < F < h_0$.

Рассмотрим теперь критические значения интеграла F .

Начальным данным $x^*, y^*, \alpha = 0$, где x^* — критическая точка функции f или $x^*, y^*, \alpha = \pi/2$, где y^* — критическая точка функции h соответствуют замкнутые решения $x = x^*$ или $y = y^*$ соответственно.

Остальные решения, соответствующие критическому значению интеграла, где x^*, y^* не являются критическими точками функций f и h соответственно, — незамкнуты, так как \dot{x}, \dot{y} знакопостоянны вдоль такого решения и геодезическая заключена в некоторой открытой полосе, принадлежащей исходному тору. Предположим, что $\dot{x} = 0$ в некоторой точке такой геодезической, но таким начальным данным отвечает геодезическая с регулярным значением интеграла $F = f(x_0)$, где $f(x_0)$ — некритическое значение функции f . Иначе данная геодезическая — это просто окружность $x = x_0$, где x_0 — критическая точка функции f .

Установим теперь, какие из найденных замкнутых геодезических прости.

Рассмотрим случаи 1 и 2 из условия предложения.

Рассмотрим положительные значения интеграла $F > h_0$.

Имеем

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \pm \sqrt{\frac{f(x) + F}{h(y) - F}}.$$

Отсюда

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{2dy}{\sqrt{h(y) - F}} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + F}},$$

см. рис. 14.

Легко попытать, что необходимым и достаточным условием простоты геодезической является условие:

$$N \int_{y_1}^{y_2} \frac{2dy}{\sqrt{h(y) - F}} = \int_0^{T_x} \frac{dx}{\sqrt{f(x) + F}},$$

где $N \in \mathbf{N}$.

Аналогично рассматривается случай $F < -f_0$.

Из предложения 2.6 следует, что все замкнутые геодезические при

$$-f_0 < F < h_0$$

просты (не имеют самопересечений).

Проекции критических окружностей из кокасательного расслоения на наш тор являются, очевидно, так же простыми замкнутыми геодезическими.

Найдем длину замкнутой геодезической.

Из уравнений движения имеем

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \pm \sqrt{\frac{h(y) - F}{f(x) + F}}.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{\sqrt{h(y) - F}} = \pm \frac{dx}{\sqrt{f(x) + F}}.$$

Введем новые координаты

$$du = \sqrt{f(x) + F} \pm \sqrt{h(y) - F},$$

$$dv = \frac{dx}{\sqrt{f(x) + F}} \mp \frac{dy}{\sqrt{h(y) - F}},$$

В них метрика примет вид

$$ds^2 = du^2 + (f(x) + F)(h(y) - F)dv^2.$$

Уравнения геодезических имеют тогда вид

$$\frac{dv}{dt} = 0,$$

где t — параметр, пропорциональный элементу длины данной метрики.

Отсюда длина дуги замкнутой геодезической имеет вид

$$l(F) = m \int_0^{T_y} \sqrt{h(y) - F} dy + 2n \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{f(x) + F} dx,$$

если

$$\rho(F) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{2dx}{\sqrt{f(x) + F}} \left(\int_0^{T_y} \frac{dy}{\sqrt{h(y) - F}} \right)^{-1} = \frac{m}{n},$$

где m, n — взаимно простые натуральные числа, если $\tan^2 \alpha < B$.

Аналогично рассматриваются случаи 2 и 3 из условия предложения.

Для критических окружностей имеем

$$\dot{x} = \frac{2p}{\lambda(x, y)} = \frac{2}{\sqrt{f(x) + h^*}}.$$

Длина этой геодезической равна соответственно

$$l(F) = \int_0^{T_x} \sqrt{f(x) + h^*} dx.$$

Предложение доказано.

Комментарий. Доказанное выше предложение позволяет установить необходимые условия эквивалентности геодезических потоков лиувиллевых метрик на двумерном торе как гладких динамических систем в кокасательном расслоении к тору.

В предложении 2.4 приведен пример траекторно эквивалентных систем.

Рассмотрим семейство метрик

$$ds^2 = (\sin y + k \sin^2 y + c)(dx^2 + dy^2), \quad T_x, T_y = 2\pi,$$

$$k, c - \text{const}, k \in [\epsilon, 1/2 - \epsilon], \epsilon > 0$$

Существует константа c_0 такая, что для любого $c > c_0$ потоки метрик данного семейства топологически траектории эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$(2 + k + c)/(1 + 2k) = \text{const.}$$

Применим рассуждения, приведенные выше и докажем, что при различных значениях констант k, c геодезические потоки метрик данного семейства — неэквивалентные системы.

Допустим противное. Пусть геодезические потоки метрик с параметрами k_1, c_1 и k_2, c_2 — эквивалентны.

Длина замкнутой геодезической — критической окружности — для метрик этого семейства имеет вид

$$l_1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{k + c - 1} dx,$$

$$l_2 = \int_0^{2\pi} \sqrt{k + c + 1} dx.$$

Отсюда

$$\frac{k_1 + c_1 - 1}{k_1 + c_1 + 1} = \frac{k_2 + c_2 - 1}{k_2 + c_2 + 1},$$

$$\frac{2 + k_1 + c_1}{1 + 2k_1} = \frac{2 + k_2 + c_2}{1 + 2k_2}.$$

Из первого уравнения сразу получим, что $k_1 + c_1 = k_2 + c_2$.

Подставляя это равенство во второе уравнение, сразу получаем, что $k_1 = k_2, c_1 = c_2$.

Список литературы

1. Dini U. Sopra un problema che si presenta nella theoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un'altra// Ann. di Math. Ser.2, T.3, 1869, 269–293.
2. Darboux G. Lecons sur la théorie generale des surfaces et les applications géometriques du calcul infinitesimal. Paris, Gautier, Villar, 1891.
3. Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию. М.: Гостехиздат, 1957.
4. Raffy M.L. Determination des éléments linéaires doublement harmoniques. // J. de Math., 4 ser., 10(1894).
5. Фоменко А. Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю.//Функцион. анализ и его прил. 1988. Т. 22, Вып. 4. С. 38–51.
6. Фоменко А. Т. Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем. // УМН. 1989. Т. 44, вып. 1. С. 145–173.
7. Фоменко А. Т., Цишанг Х. Критерий топологической эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. в.4. №3. С. 546 – 575.
8. Фоменко А.Т., Цишанг Х. О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем.// Изв. АН СССР, сер, матем., 1988, Т.52, №2, с.378–407.
9. Fomenko A.T. In: The Geometry of Hamiltonian systems. Proceedings of a workshop held June 5-16, 1989. Berkeley, N.Y.: Springer Verlag, 1991, p.131–339.

10. Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности. // УМН, 1990, Т.45, вып.2, с.49-77.
11. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. I // Мат. Сб., 1994, Т.185, N4, с.27-80.
12. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. II // Мат. Сб., 1994, Т.185, N5, с.28-78.
13. Козлов В.В. Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // ДАН СССР. 1979. Т. 249, N6, с.1299-1302.
14. Колокольцов В. Н. Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом. // Изв. АН СССР, Сер. матем., 1982. Т. 46, N5. С. 994-1010.
15. Калашников В.В. Топологическая классификация квадратично-интегрируемых геодезических потоков на двумерном торе. // УМН, Т.50, N2, 1995.
16. Колокольцов В.Н. Полиномиальные интегралы геодезических потоков на компактных поверхностях. Дисс. на соиск. уч. ст. канд. ф.-м. наук, 1984.
17. Норден А.П. Пространства аффинной связности. Наука. М., 1976.
18. Схоутен И.А., Стройк Д.Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Гос. изд-во ИЛ, М., 1948.

19. Klingenberg W. Riemannian Geometry. 1982, Walter de Gruyter.
20. Arnold V.I. Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag, 1983.
21. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Геодезический поток эллипсоида траекторно эквивалентен интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела// Доклады РАН, 1994, т. 339.
22. Arthur L. Besse. Manifolds all of whose Geodesics are Closed. Springer-Verlag, 1978.
23. Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1988.
24. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
25. Парс Л. Аналитическая динамика. М.:Наука, 1971.
26. Степин А.М. Интегрируемые гамильтоновы системы.— В книге Качественные методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений и нелинейных колебаний. Киев, Инст. математики АН УССР. 1981.
27. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. М.-Л., ОГИЗ, 1941.
28. E. N. Selivanova Topological Classification of Integrable Bott Geodesic Flows on the Two-Dimensional Torus.// AMS, Adv. in Sov. Math., V. 6, 1991, pp 209-228.
29. Alkier H. Über geodätische Linien auf Flächen zweiten Grades. Diss. Leipzig, 1925.
30. Thimm A. Integrität beim geodätischen Fluss. Bonn Math. Schr. N103, 1978.

31. Viesel H. Über einfach geschlossene Geodätische auf dem Ellipsoid.// Arch. Math., 22, 106–112, 1971.
32. Селиванова Е.Н. Классификация геодезических потоков лиувиллевых метрик на двумерном торе с точностью до топологической эквивалентности.// Матем. Сб., 183, N4, 1992, С. 69-86.
33. Егоров Д.В. Работы по дифференциальной геометрии. М. Наука. 1970.
34. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. Наука, 1975.
35. Татаринов Я.В. Лекции по классической динамике. М: МГУ, 1981.
36. Нгуен Тьен Зунг, Полякова Л.С., Селиванова Е.Н. Топологическая классификация интегрируемых геодезических потоков на двумерных многообразиях. //Функц. анализ и его прилож., 1993, Т. 27, вып. 3, С. 42-56.
37. Levi-Chivita T. Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche.// Ann. di Math., 1896, V.2, N24.
38. Уиттекер Э.Т., Ватсон Д.Н., Курс современного анализа. М. Физматиз, 1963.
39. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. Мир М., 1971.
40. Клингенберг В. Лекции о замкнутых геодезических. Мир, М., 1982.
41. Буземан Г. Геометрия геодезических. Государственнос изд-во физ.-мат. лит., М., 1962.
42. Селиванова Е.Н. Траекторные изоморфизмы лиувиллевых систем на двумерном торе. // Матем. Сб., 1995, N10.

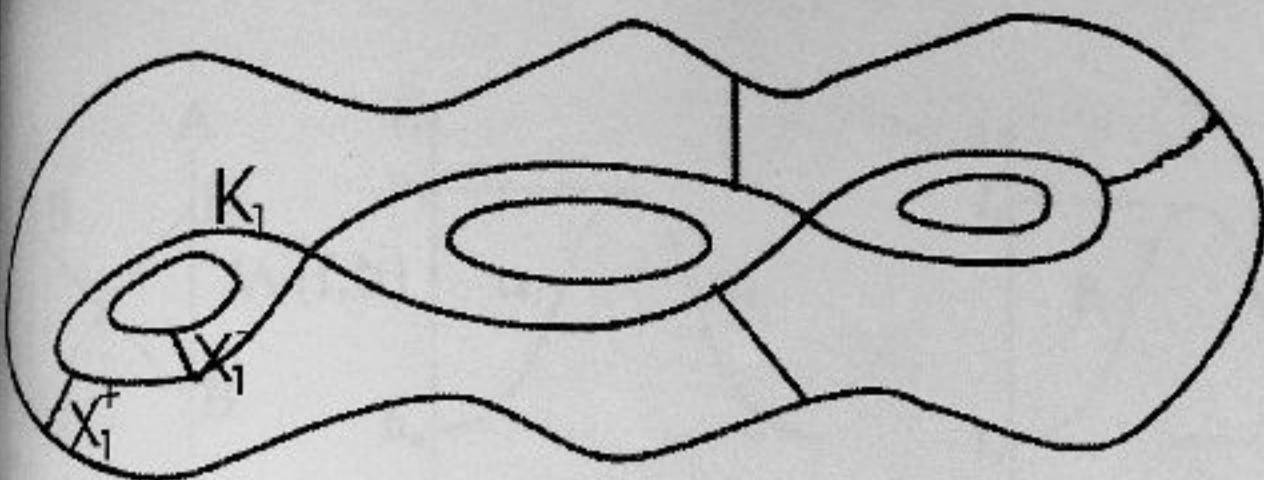


рис. 1

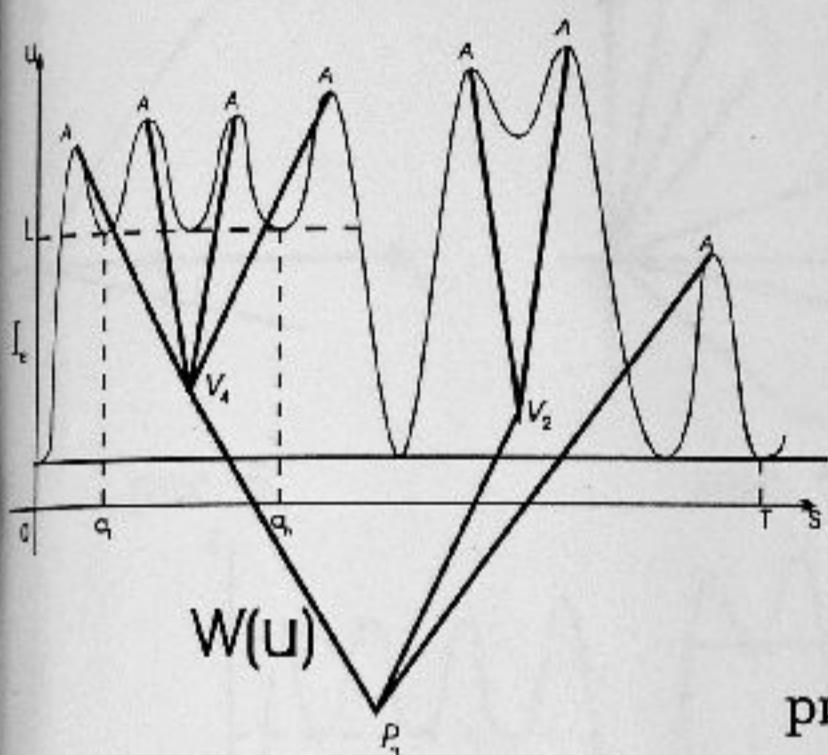


рис. 2

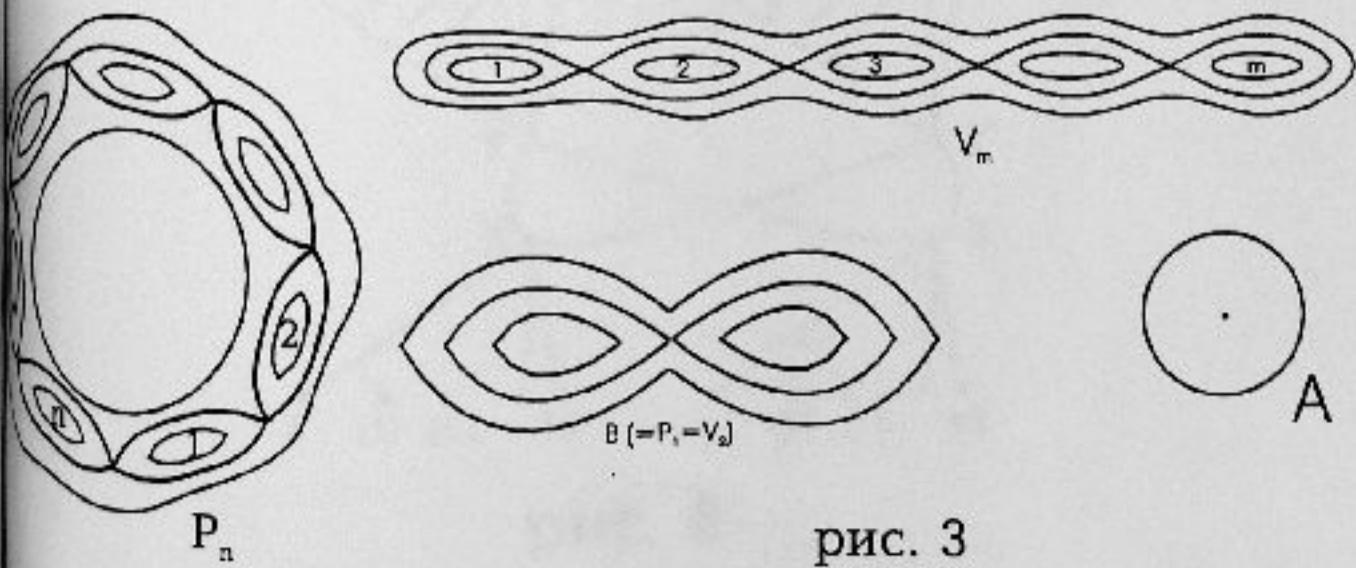


рис. 3

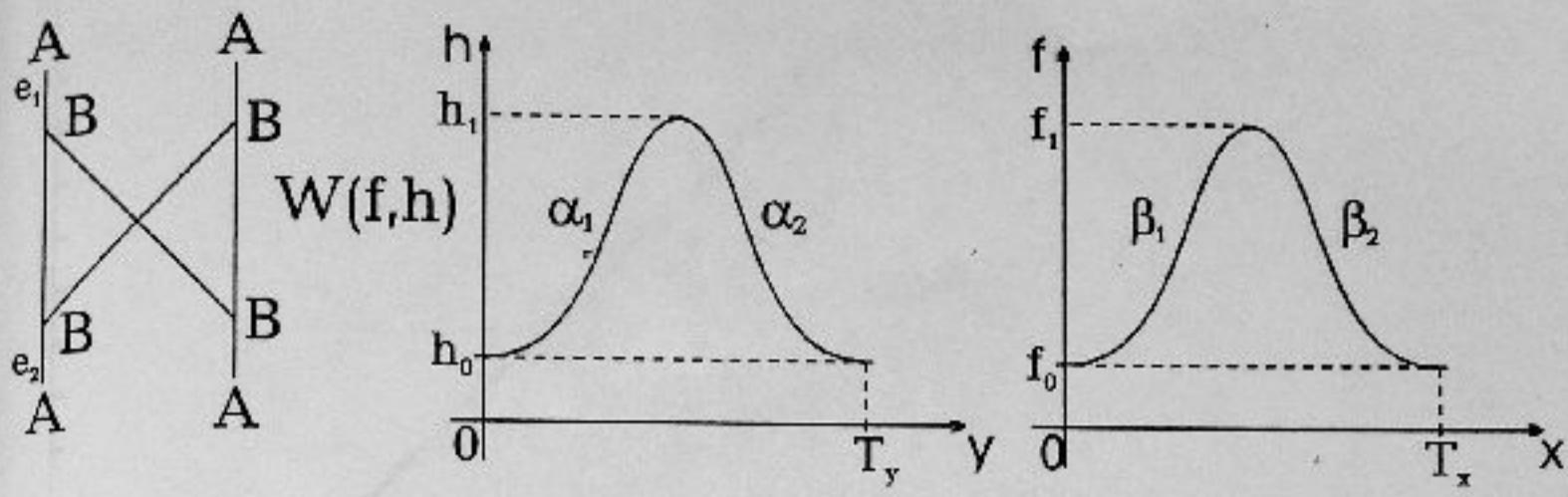


рис. 4

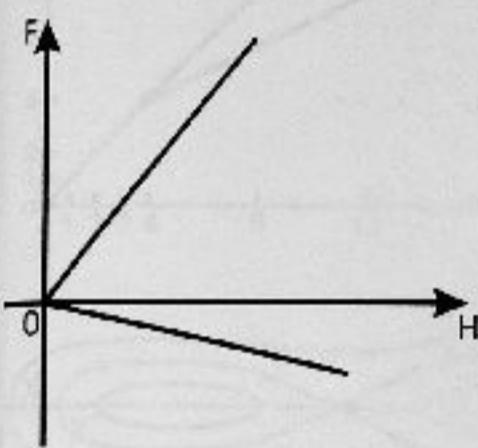


рис. 5

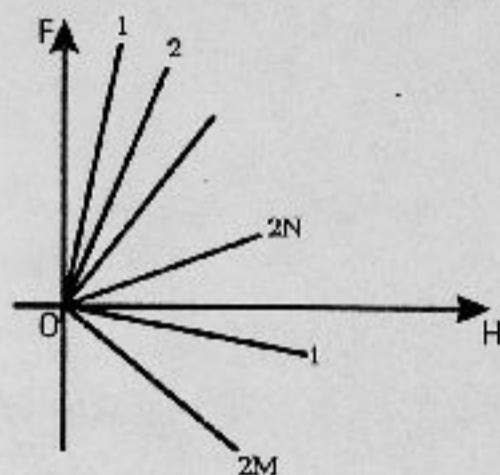


рис. 6

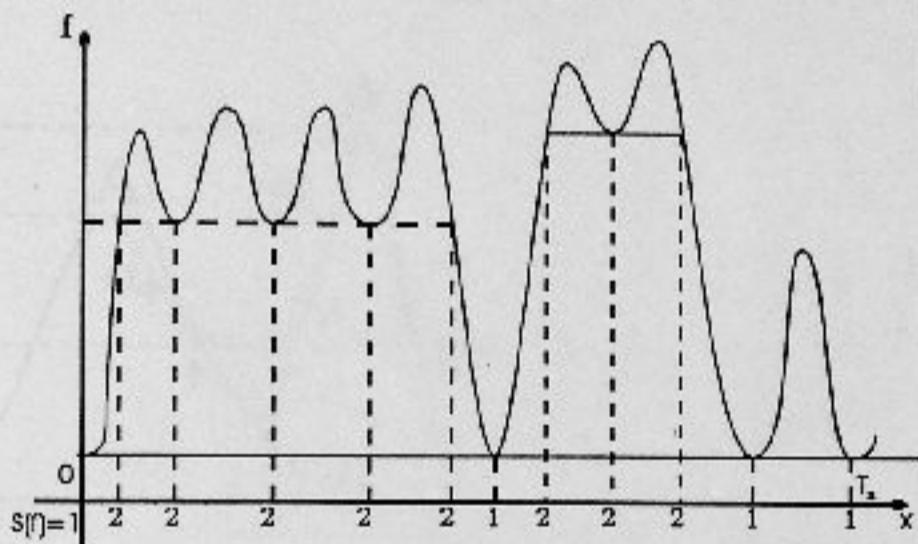


рис. 7

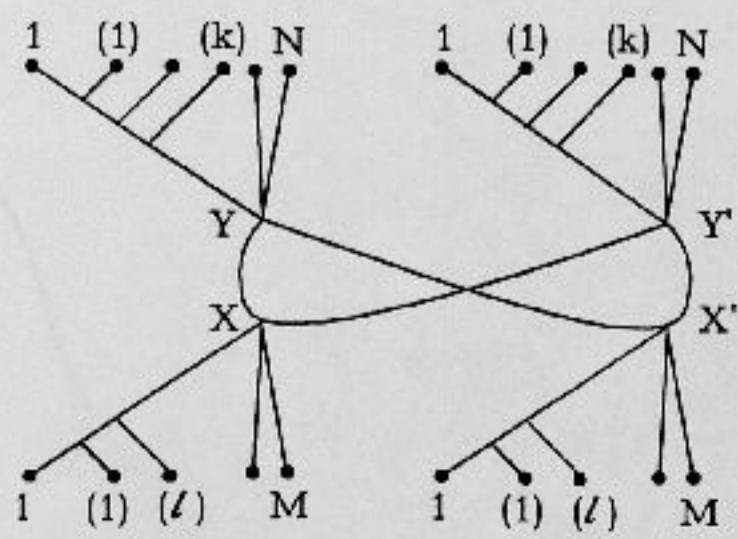


рис. 8

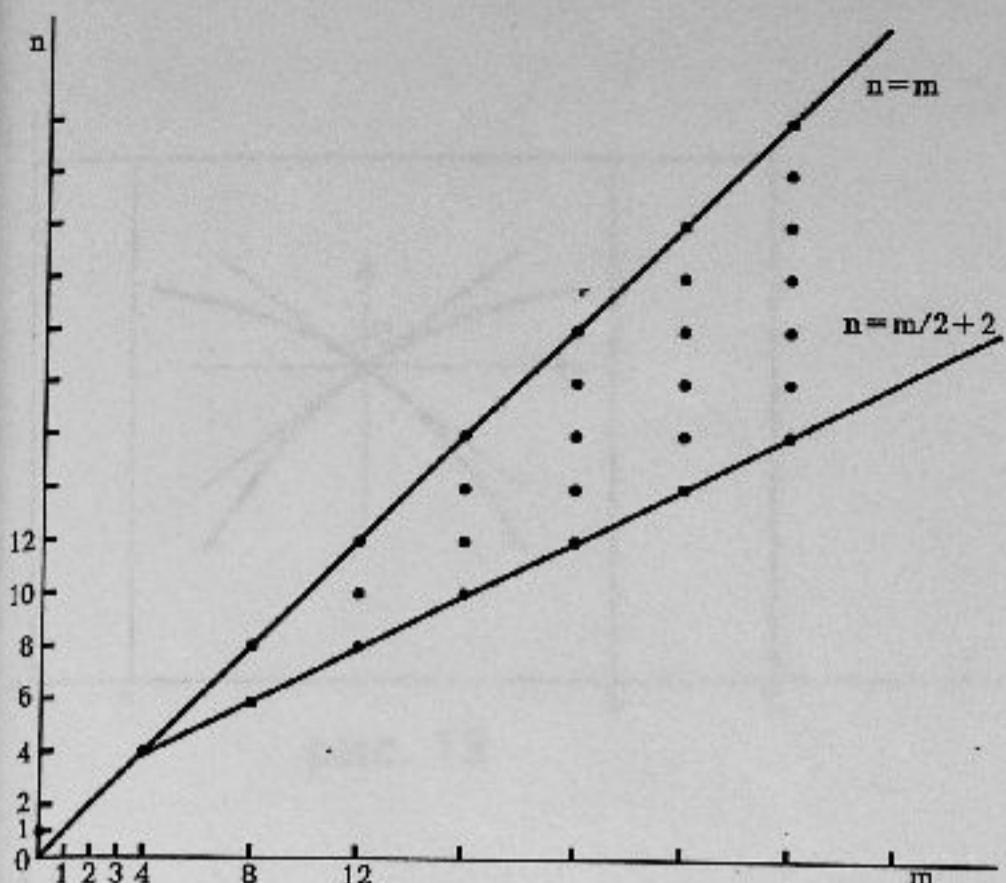


рис. 9



рис. 10

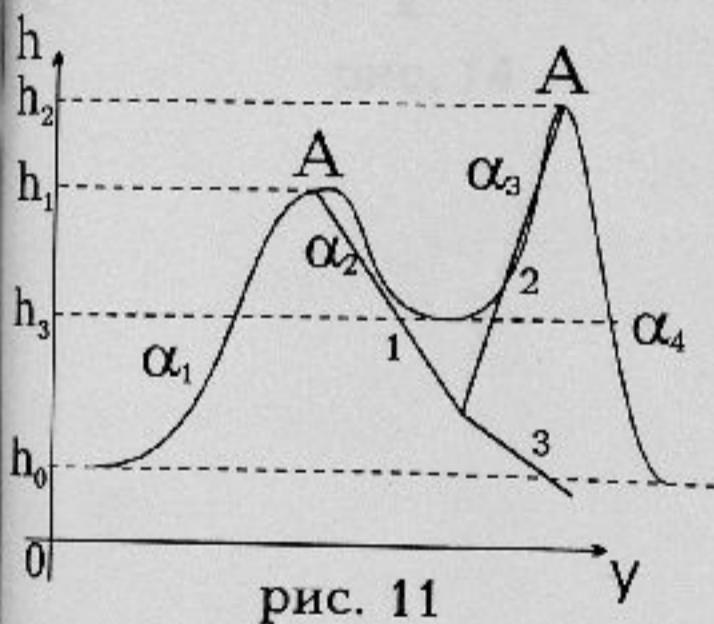


рис. 11

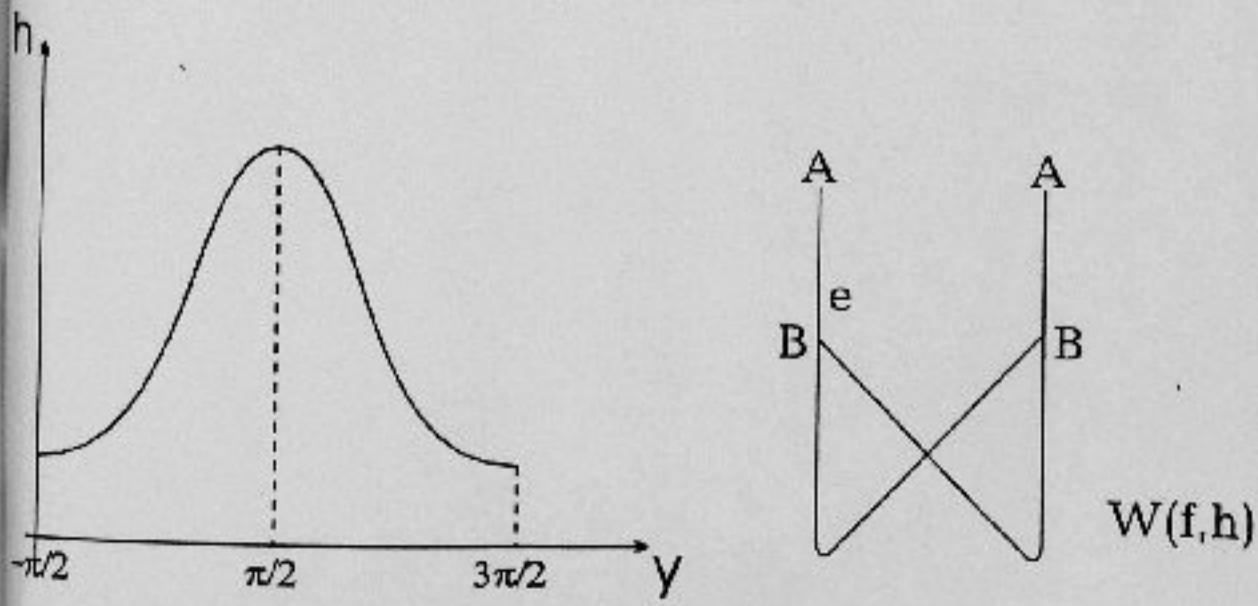


рис. 12

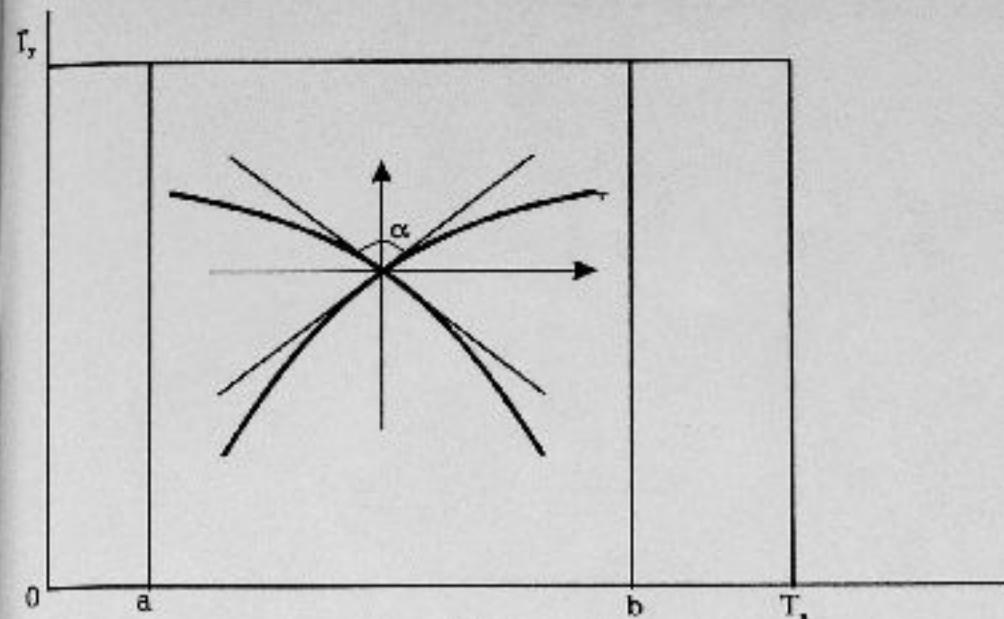


рис. 13

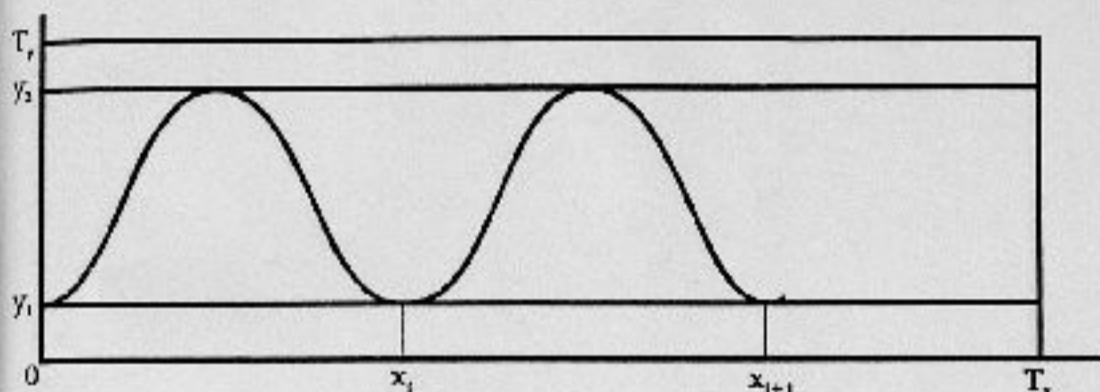


рис. 14