

ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

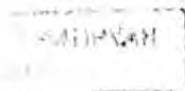
Садэтов Семен Тигранович



ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
И АЛГЕБРЫ ЛИ

01.02.01 — теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук



Ростов-на-Дону — 2004

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И АЛГЕБРЫ ЛИ

Введение	3
Глава 1. Доказательство гипотезы Мищенко – Фоменко (1981)	7
Глава 2. Случаи интегрируемости, гамильтоновости и представления уравнений механики в виде уравнений Эйлера – Пуанкаре на алгебрах Ли	18
§2.1. Симплектическая структура на орбитах коприсоединенного представления – дифференциал рациональной 1-формы	18
§2.2. О регулярной редукции n -мерной задачи $N + 1$ тел к уравнениям Эйлера – Пуанкаре на алгебре Ли $sp(2N)$	21
§2.3. Продолжение общих интегрируемых случаев уравнений вращения твердого тела вокруг центра инерции до интегрируемости поступательного движения при наложении постоянной в сопутствующих осях силы тяги	39
§2.4. Интегрируемость уравновешенных центрированных равночастотных упругих вибраций при свободном вращении	49
§2.5. Интегрируемое обобщение с дополнительным параметром	60
§2.6. Интегрируемый гравитационный потенциал в пространстве постоянной кривизны	70
§2.7. Классификация рациональных потенциалов, разделяющихся в эллиптических (сфероконических) координатах	76
§2.8. Интегрируемые случаи вращения твердого тела со связью	90
Глава 3. Необходимые условия существования дополнительного алгебраического интеграла	92
§3.1. Неинтегрируемость задачи Хилла и ограниченной круговой плоской задачи трех тел на уровне энергии	92
§3.2. Критерий интегрируемости в задаче Якоби о движении точки по n -мерному эллипсоиду в квадратичном потенциале	102
§3.3. Уравнения Кирхгофа движения твердого тела в идеальной жидкости	118
Тексты программ на языке MAPLE V	137
Рисунки	141
Литература	144

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА
МГУ

A7

Научная библиотека МГУ



17001390

ВВЕДЕНИЕ

Краткие формулировки полученных в диссертации результатов.

В главе 1 диссертации соискателем полностью доказана гипотеза Фоменко – Мищенко о коммутативных подалгебрах в алгебрах Пуассона алгебр Ли, поставленная в 1981 г. Доказанная формулировка: в алгебре Пуассона полиномов произвольной конечномерной алгебры Ли (над полем характеристики 0) конструктивно строится полный коммутативный набор. Полученные полные коммутативные наборы приводят к интегрируемым системам на алгебрах Ли. Из доказанной гипотезы о коммутативных подалгебрах вытекает полностью в исходной формулировке другая гипотеза Фоменко – Мищенко об эквивалентности коммутативной и некоммутирующей интегрируемости, поставленная в 1978 г.

Доказательство гипотезы Мищенко – Фоменко опирается на предложенную соискателем конструкцию. Рассматриваются пуассоновы бирациональные изоморфизмы сопряженных пространств к алгебрам Ли. Затем производится локализация по центру нильрадикала и подполе расширяется. Приведенная конструкция итерируется.

В главе 2 получен ряд результатов, связанных с представлением уравнений механики в виде уравнений Эйлера – Пуанкаре на алгебрах Ли, найдены интегрируемые случаи.

В §2.1 установлено, что симплектическая структура на орбитах коприсоединенного представления алгебраических алгебр Ли является дифференциалом рациональной 1-формы. Этот результат, в частности, свидетельствует в пользу того, что уравнения Эйлера – Пуанкаре на алгебрах Ли, могут оказаться глобально лагранжевыми в подходящих координатах.

В §2.2 построена редукция n -мерной задачи $N + 1$ тел при $n, N \geq 2$ по вращениям и сдвигам к уравнениям Эйлера – Пуанкаре на алгебре Ли $sp(2N)$ с редуцированным гамильтонианом. В отличие от известных построенная редукция является гомеоморфной. Вычислен гомотопический тип орбит редуцированного фазового пространства в плоской и пространственной задачах трех тел. Для пространственной задачи трех тел, а также для плоской и пространственной задачи $N + 1$ тел в окрестности относительных равновесий полученная редукция может быть использована для повышения эффективности численных вычислений.

В §2.3 получено продолжение общих интегрируемых случаев уравнений Эйлера – Пуассона при наложении постоянной в сопутствующих осях силы тяги. Обнаружена сохраняемая уравнениями движения гамильтонова структура, не являющаяся натуральной.

В §2.4 установлена интегрируемость уравнений, описывающих свободное вращение вокруг неподвижной оси системы колеблющихся твердых и линейно упругих тел, при естественных условиях центрированности, уравновешенности и равночастотности. Рассматриваемое явление смещения масс при вращении широко встречается в технике.

В §2.5 получено интегрируемое обобщение идеализации интегрируемой системы из §2.4. А именно, введен дополнительный искривля-

ющий параметр: прямолинейные траектории относительного движения колеблющихся материальных точек заменены коническими логарифмическими спиралями.

В §2.6 установлено обобщение интегрируемого потенциала Якоби – Дарбу со случая плоскости на случай двумерной сферы S^2 и двумерного пространства Лобачевского L^2 . Обобщение удовлетворяет уравнению Лапласа. При этом к 4 парам антиподальных центров на S^2 , обобщающим классические 4 гравитирующих центра Г.Дарбу, добавляются еще две пары. Все 6 пар гравитирующих центров (из которых 2 – вещественные и 4 – комплексные) лежат по две в главных ортогональных плоскостях сфероконических координат и являются двенадцатью особыми точками некоторой комплексной кривой на комплексификации сферы S^2 . Эта комплексная кривая – носитель дивизора ветвления комплексных сфероконических координат. Если ограничиться двумя парами антиподальных центров, данный потенциал интегрируем и удовлетворяет уравнению Лапласа на трехмерной сфере S^3 и в трехмерном пространстве Лобачевского L^3 .

В §2.7 найдены новые серии рациональных (в том числе, регулярных) разделяющихся потенциалов в $\mathbb{R}^n$, на $(n-1)$ -мерном эллипсоиде, на k -мерных конфокальных поверхностях при $2 \leq k \leq n-1$, на сфере S^{n-1} . Найден базис в пространстве рациональных разделяющихся потенциалов на указанных поверхностях.

В главе 3 получены необходимые условия существования дополнительного алгебраического интеграла в задачах:

(1) Кирхгофа о движении твердого тела в идеальной жидкости (§3.3),

(2) Якоби о движении точки по n -мерному эллипсоиду в квадратичном потенциале при наличии $n+1$ взаимно ортогональной гиперплоскости симметрии (§3.2).

Те же условия §3.1 на произвольном уровне энергии получены в задачах:

(3) Хилла и

(4) плоской круговой ограниченной трех тел.

В задаче Кирхгофа в частном случае (при наличии осевой симметрии и трех взаимно ортогональных плоскостей симметрии) получен критерий интегрируемости. То есть, полученные необходимые условия интегрируемости совпадают с достаточными, найденными классиками. Критерий интегрируемости получен и в задачах (2) – (4) в общей постановке. Попутно, в разделе 2 из §3.1, в разделе 2.3 из §3.2, в разделе 5 из §3.3 получены упрощения и развития метода Гюссона. В разделе 4 из §3.2 попутно установлена наследуемость интегрируемости по Лиувиллю на инвариантные 4-мерные симплектические многообразия в алгебраической категории. В разделе 3 из §3.1 попутно получено обобщение результатов Ж.Лиувилля о невозможности выражения в алгебраических функциях и экспонентах интеграла от произведения алгебраической функции и экспоненты.

Связь между результатами такова. Изначально были получены результаты главы 3 по неинтегрируемости. Затем, на основе по-

лученного опыта были найдены интегрируемые случаи главы 2. В частности, была получена производящая функция потенциалов, разделяющихся в эллиптических координатах и базис в пространстве рациональных разделяющихся потенциалов (§2.7). На их основе были получены интегрируемые случаи §2.4 и §2.6, в качестве обобщения первого из них был получен интегрируемый случай §2.5. В качестве обобщения изоморфизма §2.3, позволившего построить дополнительный интеграл в задаче о движении твердого тела в жидкости с постоянной в сопутствующих осях тягой, были получены рациональные изоморфизмы алгебр Ли, не вошедшие в диссертацию. В качестве их обобщений были получены:

- основное пуассоново отображение раздела 1 из §2.2,
- доказательство гипотезы Гельфанда – Кириллова (1966) после конечных расширений тел, не вошедшее в диссертацию, и
- результат §2.1.

В качестве следствия доказательства соискателем гипотезы Гельфанда – Кириллова (1966) после конечных расширений тел было получено доказательство гипотезы Фоменко – Мищенко (1981) §1.1.

Ряд других результатов соискателя в диссертацию также не вошел: например, результаты по резонансам на показатели Ковалевской как необходимым условиям существования дополнительного мероморфного интеграла, необходимые условия существования дополнительного мероморфного интеграла на четырехмерных инвариантных поверхностях в уравнениях Кирхгофа и др.

Актуальность темы. Начиная с работ Эйлера 1758 г., внимание математиков и механиков было привлечено проблемой интегрируемости в квадратурах. Ряд важнейших интегрируемых случаев уравнений вращения твердого тела вокруг неподвижной точки был найден Л.Эйлером [121], Ж.Л.Лагранжем [132], С.В.Ковалевской [130], Д.Н.Горячевым [31], Ф.Бруном [115]. В задаче о движении твердого тела в жидкости – Г.Кирхгофом [129], А.Клебшем [119], В.А.Стекловым [89], А.М.Ляпуновым [59], С.А.Чаплыгиным [99]. В ограниченной задаче трех тел был известен лишь интегрируемый случай Кеплера [5]. В задаче о движении точки по двумерному эллипсоиду в квадратичном потенциале при наличии трех взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии немецким ученым К.Г.Якоби [106] были получены достаточные условия разделения эллиптических координат.

В работах Брунса [116] и Пуанкаре [73, 147, 148] были получены первые препятствия, показывающие, что гамильтонова система общего положения с числом степеней свободы большим или равным двух является неинтегрируемой.

Тем не менее интерес к интегрируемым случаям не ослабел. Актуальность проблемы нахождения интегрируемых случаев в настоящее время состоит в следующем. Интегрируемые случаи и построенные на их основе теории возмущений позволяют качественно проанализировать динамику реальных систем на больших интервалах времени, что недоступно численным методам. Согласно теории Колмогорова – Арнольда – Мозера при гамильтоновом возмущении невырожденной интегрируемой гамильтоновой системы большинство нерезонансных торов не исчезает, а лишь немного деформируется. Кроме того, клас-

сические системы часто оказываются модельными для возникающих в приложениях задач совершенно другой физической природы.

В последние 30 лет были открыты новые механизмы, приводящие к интегрируемости, см. обзоры и монографии В.И.Арнольда, В.В.Козлова и А.И.Нейштадта [5]; В.В.Трофимова и А.Т.Фоменко [91]; О.И.Богоявленского [12]; А.М.Переломова [71]; М.А.Ольшанецкого, А.М.Переломова, А.Г.Реймана, М.А.Семенова-Тян-Шанского [68].

В рассматриваемых в главе 3 диссертации задачах аналитические методы доказательства неинтегрируемости либо не применимы ввиду вырожденности системы, либо позволяют охватить лишь малые области в пространстве параметров, близкие к невозмущенным интегрируемым системам. Используемые алгебраические методы позволили установить критерии интегрируемости.

Аппарат алгебр Ли гармонично отражает скрытые симметрии идеализированных задач механики и физики и поэтому проникает во все новые области математики и других наук, см. [71, 12, 16]. Представления в виде уравнений Эйлера – Пуанкаре на алгебрах Ли естественно возникают в задачах теории упругости, биологии и др.

Структура диссертации. Диссертация состоит из 12 параграфов, которые могут быть прочитаны независимо, и как правило, представляют собой отдельные статьи соискателя. Разбиение параграфов на разделы, нумерация в параграфах теорем, предложений, ..., формул, обозначения совпадают с использованными в соответствующей статье. (Исключение составляет §1.1, который отличается от соответствующей статьи более детальным изложением. В нем обозначения, все теоремы и предложения совпадают с приведенными в соответствующей статье [85], а 4 добавленных вспомогательных утверждения названы леммами.)

В целях лаконичности номер параграфа в указанной нумерации опущен. Ссылки между параграфами производятся с указанием номера параграфа и очень редки.

Каждый параграф, как правило, содержит краткий обзор предшествующих результатов, непосредственно связанных с результатами соискателя. Обзоры ни в коей мере не претендуют на полноту.

В каждом параграфе сначала следует раздел с формулировками всех основных результатов, затем – раздел доказательств, затем – раздел доказательств вспомогательных утверждений. Это сделано для сохранения целостности и максимальной отчетливости образов, возникающих при прочтении доказательств основных утверждений. При этом порядок, в котором утверждения формулируются, зачастую отличается от порядка, в котором они доказываются. В обоих случаях приоритет отдается внутренней логике изложения.

ГЛАВА 1 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ МИЩЕНКО – ФОМЕНКО (1981)

Пусть все объекты в главе 1, если не оговорено иное, определены над полем k характеристики 0. Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная алгебра Ли. Коммутатор $[\cdot, \cdot]$ в $\mathfrak{g}$ продолжается до скобки Пуассона на алгебре Пуассона $P(\mathfrak{g})$ полиномов от элементов $\mathfrak{g}$ с помощью тождества Лейбница. Пусть $\mathfrak{g}^*$ – сопряженное пространство к $\mathfrak{g}$, пусть $\text{ind } \mathfrak{g} = \min_{x \in \mathfrak{g}^*} \dim \text{ann}_{\mathfrak{g}} x$, где $\text{ann}_{\mathfrak{g}} x$ – аннулятор ковектора x в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Т.е., $\text{ind } \mathfrak{g}$ – коранг скобки Пуассона.

Гипотеза 1 (А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко, 1981, [62, 91]). Алгебра $P(\mathfrak{g})$ содержит $\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \text{ind } \mathfrak{g})$ алгебраически независимых полиномов, попарно коммутирующих относительно $[\cdot, \cdot]$.

ТЕОРЕМА. *Гипотеза 1 справедлива для произвольной конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

В основе доказательства теоремы лежат следующие два факта.

1) Пусть P_n – алгебра Пуассона полиномов от базиса $2n$ -мерного симплектического пространства. Тогда все дифференцирования алгебры Пуассона P_n – внутренние.

2) Пусть K – чисто трансцендентное расширение основного поля, $\tilde{\mathfrak{g}}$ – бесконечномерная алгебра Ли, допускающая дополнительную структуру линейного пространства над полем K , представленная дифференцированиями поля K так, что для $A \in \tilde{\mathfrak{g}}$ и $e, f \in K$ выполнена ассоциативность $(eA)f = e(Af)$. Тогда аннулятор $\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} K$ поля K – подалгебра Ли над полем K .

Далее производится индукция по размерности алгебры Ли независимо от поля, над которым она определена.

В следующих 7 абзацах предполагается, что $k = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$. В этом случае согласно предложению 10 главы X в [58] алгебраическая независимость набора в $P(\mathfrak{g})$ эквивалентна его функциональной независимости. Эта эквивалентность может быть также легко выведена с помощью теоремы о неявной функции.

Согласно [62, 91] из гипотезы 1 (в случае поля $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) вытекает гипотеза 2, в частности ради которой она и была сформулирована.

Гипотеза 2 (А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко, 1978, §5.1 в [64], [62, 91]). Пусть гамильтонова система на многообразии M интегрируема с помощью алгебры Ли $\mathfrak{g}$ первых интегралов, среди которых $\dim \mathfrak{g}$ функционально независимых на многообразии M , и $\dim \mathfrak{g} + \text{ind } \mathfrak{g} = \dim M$. Тогда существует набор $\frac{1}{2} \dim M$ функционально независимых интегралов, попарно коммутирующих относительно скобки Пуассона и являющихся полиномами от исходных.

В §5.3-4 в [64] гипотеза 2 была сформулирована в обобщенной формулировке, но позднее, в [62], [91] – приведенная основная формулировка.

Гипотеза 1 была доказана для 26 классов алгебр Ли, см. [91]:5.31.10-35.

В 11 из 26 и в неупомянутых в [91] классах, а именно, для компактных алгебр Ли, некоторых естественных полупрямых сумм $\mathbb{R}^N \rtimes so(n)$ А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко, А.В.Болсиновым, Ю.Н.Федоровым, О.И.Богоявленским, И.В.Микитюком, В.В.Трофимовым, А.М.Переломовым, А.Г.Рейманом, А.В.Браиловым, А.В.Беляевым были построены полные коммутативные наборы, содержащие гамильтониан, квадратичный положительно определенный по импульсам на соответствующей группе Ли, имеющий механическую интерпретацию.

В 6 из 26 классов, пересекающихся с упомянутыми 11, а именно, для полупростых алгебр Ли и некоторых их полупрямых сумм с абелевыми алгебрами Ли в наборе не содержится положительно определенный по импульсам гамильтониан, но содержится невырожденный квадратичный, см. работы А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко, А.В.Болсинова, В.В.Трофимова, А.В.Браилова.

В оставшихся 11 из 26 классов, а именно, для некоторых полупрямых сумм полупростых и абелевых алгебр Ли, всех нильпотентных алгебр Ли, некоторых разрешимых алгебр Ли, алгебр Ли малых размерностей, тензорных произведений интегрируемых алгебр Ли на фробениусовы алгебры А.В.Болсиновым, А.В.Браиловым, В.В.Трофимовым, М.Вернь (М. Vergne), В.А.Гинзбургом, Т.А.Архангельским, Ле Нгок Тьеуеном, С.Сяровым, Т.А.Певцовой просто построены полиномиальные, или даже рациональные, наборы.

1. Факторалгебра алгебры Пуассона.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Алгеброй Пуассона называется коммутативная ассоциативная алгебра со скобкой Пуассона.

Для конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{f}$ над полем F пусть $z\mathfrak{f}$ обозначает ее центр. Пусть Fract обозначает переход от алгебры Пуассона без делителей нуля к ее полю частных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Набор в поле Пуассона $\text{Fract } P(\mathfrak{f})$ называется полным, если он содержит $\frac{1}{2}(\dim_F \mathfrak{f} + \text{ind}_F \mathfrak{f})$ алгебраически независимых над F элементов, и коммутативным, если его элементы попарно коммутируют относительно скобки Пуассона.

Пусть $Z \in z\mathfrak{f} \setminus 0$ и $(Z - 1)$ – идеал в коммутативной ассоциативной алгебре $P(\mathfrak{f})$, порожденный элементом $Z - 1$. Так как $[Z - 1, P(\mathfrak{f})] = 0$, то идеал $(Z - 1)$ инвариантен относительно скобок Пуассона с элементами алгебры Пуассона $P(\mathfrak{f})$. И, следовательно, факторизация $\varphi : P(\mathfrak{f}) \rightarrow P(\mathfrak{f})/(Z - 1)$ – гомоморфизм алгебр Пуассона. За образом единицы после отображения факторизации сохраним обозначение 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем набор Q элементов из алгебры Пуассона $P(\mathfrak{f})$ полным после факторизации по идеалу $(Z - 1)$, если набор $\varphi(Q)$ содержит $\frac{1}{2}(\dim_F \mathfrak{f} + \text{ind}_F \mathfrak{f}) - 1$ алгебраически независимых элементов.

ЗАМЕЧАНИЕ. В лемме 4 из разд. 7 ниже указано треугольное рациональное отображение, которое содержащий $Z - 1$ полный набор в

алгебре Пуассона $P(f)$ переводит в набор в $P(f)$, полный после факторизации по идеалу $(Z - 1)$.

2. *Доказательство теоремы.* Не ограничивая общности можно предполагать, что $\mathfrak{g}$ не разлагается в прямую сумму ненулевых идеалов. Если $\mathfrak{g}$ – полупроста, то сдвиги инвариантов на элемент общего положения из $\mathfrak{g}^*$ образуют согласно [63, 15] полный набор, полиномиальный от элементов $\mathfrak{g}$, коммутативный согласно [61, 63, 64]. Пусть $\mathfrak{g}$ – не полупроста. Тогда она имеет нетривиальный нильрадикал согласно [35]:1.5. Пусть $\mathfrak{n}$ – произвольный ненулевой нильпотентный идеал в $\mathfrak{g}$, не являющийся одномерным подпространством центра. (В случае, если нильрадикал является одномерным центром, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ может быть разложена в прямую сумму идеалов ввиду существования подалгебры Леви, см. подпункт 1.3.1 в [22].)

Определим коммутативное подполе Пуассона формулой

$$K = \text{Fract } zP(\mathfrak{n}).$$

Определим K -линейное подпространство в поле Пуассона $\text{Fract } P(\mathfrak{g})$ формулой

$$\tilde{\mathfrak{g}} = P(\mathfrak{n}) \otimes_{zP(\mathfrak{n})} K + \mathfrak{g} K. \quad (1)$$

Тогда $\tilde{\mathfrak{g}}$ – сумма линейных комбинаций элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в коммутативном подполе Пуассона K и локализации подалгебры Пуассона $P(\mathfrak{n})$ по центру.

Предложение 1. а) $\tilde{\mathfrak{g}}$ – подалгебра Ли в $\text{Fract } P(\mathfrak{g})$,

б) $\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n}$ – подалгебра Ли над полем K в поле Пуассона $\text{Fract } P(\mathfrak{g})$.

Легко видеть, что единица 1 поля Пуассона $\text{Fract } P(\mathfrak{g})$ лежит в подалгебре Ли $\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n}$. Забывая про умножение в алгебре Ли $\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n}$ на элементы ее подполя $K \cdot 1$, рассмотрим ее алгебру Пуассона $P(\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n})$, определенную над полем K . Переобозначим единицу 1 поля $\text{Fract } P(\mathfrak{g})$ через 1_a , а за единицей поля коэффициентов K при построении алгебры Пуассона $P(\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n})$ сохраним обозначение 1.

Канонический гомоморфизм $\sigma : \text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n} \rightarrow P(\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n})$ является вложением, см., например, в §2.1 в [35] аналог теоремы Пуанкаре – Биркгофа – Витта для градуированных алгебр.

Лемма 1. а. Гомоморфизм алгебр Ли $\varphi \circ \sigma : \text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n} \rightarrow P(\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n}) / (1_a - 1)$ является вложением.

б. Изоморфизм τ абстрактной алгебры Ли $\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n}$ над полем K на подалгебру Ли $\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n} \subset \text{Fract } P(\mathfrak{g})$ однозначно продолжается до переводящего 1 в 1 изоморфизма τ_* факторалгебры Пуассона $P(\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n}) / (1_a - 1)$ на подалгебру Пуассона $p(\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n})$ в поле Пуассона $\text{Fract } P(\mathfrak{g})$, порожденную подалгеброй Ли $\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n}$.

Коммутативность. Если наборы $\mathcal{N} \subset P(\mathfrak{n})$ и $\mathcal{A} \subset P(\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n})$ – коммутативные, то, так как подалгебры Ли $\mathfrak{n}$ и $\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n}$ в поле Пуассона $\text{Fract } P(\mathfrak{g})$ коммутируют, а φ – гомоморфизм алгебр Пуассона, то объединение $\mathcal{N} \cup \varphi(\mathcal{A})$ – коммутативный набор.

Полиномиальность. Представим элементы алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ в виде рациональных функций от элементов базиса в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Знаменатели полученных рациональных функций лежат в поле K , коммутирующем с обеими подалгебрами $P(\mathfrak{n})$ и $P(\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n})$. Поэтому, умножая элементы набора в алгебре Пуассона $P(\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n})$ на общий знаменатель из поля K , набор можно выбрать полиномиальным от элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Полнота набора в алгебре Пуассона $P(\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n})$ над полем K при этом сохранится.

Полнота.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Пусть $\mathcal{N}$ – полный набор в алгебре Пуассона $P(\mathfrak{n})$, а $\mathcal{A}$ – набор в алгебре Пуассона $P(\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n})$, полный после факторизации φ . Тогда объединение $\mathcal{N} \cup \varphi(\mathcal{A})$ является полным набором в поле Пуассона $\text{Fract } P(\mathfrak{g})$.

Переход индукции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Размерности алгебр Ли при переходе индукции уменьшаются: $\dim_K \text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n} < \dim \mathfrak{g}$.

Следовательно, полные коммутативные полиномиальные наборы в подалгебре Пуассона $P(\mathfrak{n})$ и алгебре Пуассона $P(\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n})$ строятся по предположению индукции. Теорема доказана.

2. Упрощение доказательства и усиление теоремы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Алгеброй Гейзенберга H_n называется $(2n + 1)$ -мерная алгебра Ли с порождающими $z_1, \dots, z_{2n}, \kappa$ и коммутационными соотношениями $[z_i, z_{n+j}] = \kappa \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ содержит
либо а) коммутативный идеал V , $\dim V > 1$,
либо б) коммутативный идеал V , $\dim V = 1$ и $z \mathfrak{g} = 0$,
либо в) идеал Гейзенберга H_n для некоторого $n \geq 1$.

Для доказательства теоремы в случаях а), б) можно ограничиться возможностью $\mathfrak{n} = V$, в случае в) – возможностью $\mathfrak{n} = H_n$. Но при разных $\mathfrak{n}$ получаются, вообще говоря, различные коммутативные наборы.

4. Доказательство основной леммы. Пусть P_n – алгебра Пуассона на полиномах от базиса в $2n$ -мерном симплектическом пространстве. Тогда P_n – алгебра полиномов от элементов базиса $w_1, \dots, w_{2n}$ со скобкой Пуассона $[w_i, w_{n+j}] = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Согласно [124]:3.2, 2.6.iv,v имеет место переразложение Джозефа

$$P(\mathfrak{n}) \otimes_{zP(\mathfrak{n})} \text{Fract } zP(\mathfrak{n}) \cong P_n \otimes \text{Fract } zP(\mathfrak{n}), \quad (2)$$

где $2n = \dim \mathfrak{n} - \text{tr. deg } \text{Fract } zP(\mathfrak{n})$, а $\cong$ – изоморфизм алгебр Пуассона. В случаях а), б) выполнено

$$K = \text{Fract } P(V), \quad n = 0, \quad P_n = k,$$

в случае в) выполнено $K = k(\kappa)$ и можно выбрать

$$w_i = z_i, \quad w_{n+i} = z_{n+i}/\kappa, \quad 1 \leq i \leq n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Дифференцированием D алгебры Пуассона P называется линейное отображение $D: P \rightarrow P$, удовлетворяющее для всех $b, c \in P$ тождеству Лейбница

$$D(bc) = (Db)c + b(Dc) \quad (3)$$

и сохраняющее скобку Пуассона:

$$D[b, c] = [Db, c] + [b, Dc].$$

Для алгебры Пуассона P на поле F ее алгебра Ли дифференцирований обозначается через $\text{der}_F P$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.

- а) Все дифференцирования алгебры Пуассона P_n – внутренние.
- б) $\text{der}_K(P_n \otimes K) = (\text{der } P_n) \otimes K$,
- в) $z(P_n \otimes K) = (zP_n) \otimes K$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.

$$\tilde{\mathfrak{g}} \cong P_n \otimes K + \text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} P_n \quad (4)$$

– сумма K -линейных подпространств, пересекающихся по полю K .

Доказательство предложения 5. Центр $z(P_n \otimes K)$ идеала $P_n \otimes K$ в алгебре Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ является идеалом в $\tilde{\mathfrak{g}}$. Следовательно, для каждого $A \in \tilde{\mathfrak{g}}$ дифференцирование ad_A алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ сохраняет центр $1 \otimes K$ идеала. Кроме того, дифференцирование $\text{ad}_A|_{P_n \otimes K} = \text{ad}_A|_{P(n) \otimes_{zP(n)} K}$ удовлетворяет тождеству Лейбница (3), то есть, $\text{ad}_A|_{P_n \otimes K} \in \text{der}(P_n \otimes K)$.

Продолжим дифференцирование $\text{ad}_A|_{1 \otimes K}$ тривиально по множителю $P_n \otimes 1$ до линейного оператора $\delta \in \text{gl}(P_n \otimes K)$ по формуле $\delta(b \otimes e) = b \otimes \text{ad}_A e$, где $b \in P_n$, а $e \in K$. Иначе говоря, $\delta = 1 \otimes (\text{ad}_A|_{1 \otimes K})$. Легко проверить, что тогда $\delta \in \text{der}(P_n \otimes K)$. Действительно, для $p_\alpha, q_\beta \in P_n$, и $k_\alpha, l_\beta \in K$ выполнено

$$\begin{aligned} \delta\left(\left[\sum_{\alpha} p_{\alpha} k_{\alpha}, \sum_{\beta} q_{\beta} l_{\beta}\right]\right) &= \sum_{\alpha, \beta} [p_{\alpha}, q_{\beta}] \delta(k_{\alpha} l_{\beta}) = \\ &= \sum_{\alpha, \beta} [p_{\alpha}, q_{\beta}] ((\delta k_{\alpha}) l_{\beta} + k_{\alpha} \delta l_{\beta}) = \\ &= \left[\sum_{\alpha} p_{\alpha} \delta k_{\alpha}, \sum_{\beta} q_{\beta} l_{\beta}\right] + \left[\sum_{\alpha} p_{\alpha} k_{\alpha}, \sum_{\beta} q_{\beta} \delta l_{\beta}\right], \\ \delta\left(\left(\sum_{\alpha} p_{\alpha} k_{\alpha}\right) \sum_{\beta} q_{\beta} l_{\beta}\right) &= \sum_{\alpha, \beta} p_{\alpha} q_{\beta} \delta(k_{\alpha} l_{\beta}) = \end{aligned}$$

$$\sum_{\alpha, \beta} p_{\alpha} q_{\beta} ((\delta k_{\alpha}) l_{\beta} + k_{\alpha} \delta l_{\beta}) =$$

$$\left(\sum_{\alpha} p_{\alpha} \delta k_{\alpha} \right) \sum_{\beta} q_{\beta} l_{\beta} + \left(\sum_{\alpha} p_{\alpha} k_{\alpha} \right) \sum_{\beta} q_{\beta} \delta l_{\beta}.$$

Тогда и разность $\text{ad}_A - \delta$ принадлежит $\text{der}(P_n \otimes K)$. Но разность $\text{ad}_A - \delta$ тривиальна на подполе $1 \otimes K$ и потому является дифференцированием над полем K .

В силу предложений 4б), 4а) найдется элемент $a \in P_n \otimes K$ такой, что для всех $b \in P_n \otimes K$ выполнено

$$(\text{ad}_A - \delta)(b) = [a, b].$$

Следовательно, так как $\delta(P_n \otimes 1) = 0$, то $A - a \in \text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} P_n$.

Пересечение $(P_n \otimes K) \cap \text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} P_n$ коммутирует с полем K и, следовательно, с подалгеброй Пуассона $P_n \otimes K$. В силу предложения 4в), оно содержится в K . Но, очевидно, пересечение $(P_n \otimes K) \cap \text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} P_n$ содержит K . Предложение 5 доказано.

Продолжим доказательство основной леммы.

ЛЕММА 2. Имеет место отождествление алгебр Ли

$$(\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} P_n)/K = \tilde{\mathfrak{g}}/(P(\mathfrak{n}) \otimes_{zP(\mathfrak{n})} K) = (\mathfrak{g}K)/(\mathfrak{n}K) = (\mathfrak{g}/\mathfrak{n})K, \quad (5)$$

определяемое факторизацией подалгебр Ли в алгебре Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ по пересечению с подалгеброй Пуассона $P(\mathfrak{n}) \otimes_{zP(\mathfrak{n})} K$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Базисом в поле называется система порождающих в смысле поля, если она алгебраически независима.

Согласно подпунктам 4.7.18 и 4.8.12 в [35] поле K чисто трансцендентно.

Пусть S является некоторым K -линейным дополнением к K -линейному подпространству $\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n}$ в K -линейном пространстве $\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} P_n$. Рассмотрим объединение E базисов:

$w_1, \dots, w_{2n}$ в кольце P_n ,
 $t_1, \dots, t_{\text{tr. deg } K}$ в поле K ,
 $f_1, \dots, f_k$ над K в K -линейном дополнении к полю K в алгебре Ли $\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n}$,
 $s_1, \dots, s_l$ над K в K -линейном пространстве S .

Из разложения (4) в сумму вытекает, что E – система порождающих в поле Пуассона $\text{Fract } P(\mathfrak{g})$.

В силу переразложения Джозефа (2) набор $w_1, \dots, w_{2n}, t_1, \dots, t_{\text{tr. deg } K}$ связан с базисом в идеале $\mathfrak{n}$ бирациональным преобразованием со знаменателями в поле K . Пусть $e_1, \dots, e_{\dim \mathfrak{n}}$ – базис в идеале $\mathfrak{n}$ и $e_1, \dots, e_{\dim \mathfrak{g}}$ – его дополнение до базиса во всей алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Из леммы 2 вытекает $k + l = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{n}$ и связь в виде бирационального

преобразования

$$B \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \\ s_1 \\ \vdots \\ s_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{1+\dim \mathfrak{g}} \\ \vdots \\ e_{\dim \mathfrak{g}} \end{pmatrix} + b,$$

где $B \in GL(k+l, K)$, а $b_i \in P_n \otimes K$, $i = 1, \dots, k+l$. Следовательно, преобразование от объединения E к базису $e_1, \dots, e_{\dim \mathfrak{g}}$ – бирациональное. То есть, E – базис в поле Пуассона $\text{Fract } P(\mathfrak{g})$. Это – итог всей предыдущей части доказательства основной леммы и единственное из предыдущего, что, через равенство размерностей (6) ниже, будет использовано для ее доказательства.

Тогда матрица R скобки Пуассона в базисе E поля Пуассона $\text{Fract } P(\mathfrak{g})$ запишется в виде

$$R = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & R^1 & * \\ 0 & -A^T & * & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P_n \\ K \\ (\text{ann}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n}) - K \\ S \end{pmatrix},$$

где в столбце справа наминается в каком линейном пространстве или поле лежат соответствующие элементы базиса E , в котором записана матрица R . Здесь $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{2n \times 2n}$, R^1 – подматрица скобки Пуассона подалгебры Ли $\text{ann}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n}$ над полем K , получаемая выбрасыванием нулевой строки и столбца, отвечающих единице $1_a \in \text{ann}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n}$, а $*$ – некоторые матрицы, несущественные для дальнейшего.

Так как E – базис в поле Пуассона $\text{Fract } P(\mathfrak{g})$, то

$$\dim \mathfrak{g} = 2n + (\dim_K \text{ann}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n} - 1) + (\text{tr. deg } K + \dim_K S). \quad (6)$$

Предложение 6. Столбцы матрицы A линейно независимы над полем K .

Легко видеть, что матрица R скобки Пуассона имеет блочно-треугольный вид. Поэтому, в силу предложения 6 выполнено

$$\text{ind } \mathfrak{g} = (\text{ind}_K \text{ann}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n} - 1) + (\text{tr. deg } K - \dim_K S).$$

Пусть $q = \frac{1}{2}(\dim_K \text{ann}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n} + \text{ind}_K \text{ann}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n}) - 1$ и $R_1, \dots, R_q$ – алгебраически независимый поднабор набора $\mathcal{A}$ в алгебре Пуассона $P(\text{ann}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n})$, остающийся алгебраически независимым после факторизации по идеалу $(1_a - 1)$.

Лемма 3. Следующие элементы поля Пуассона $\text{Fract } P(\mathfrak{g})$ алгебраически независимы:

$$w_1, \dots, w_{2n}, \quad t_1, \dots, t_{\text{tr. deg } K}, \quad \varphi(R_1), \dots, \varphi(R_q).$$

Дополнение алгебраически независимого поднабора в наборе $\mathcal{N}$ элементами $\varphi(R_1), \dots, \varphi(R_q)$ поля Пуассона $\text{Fract } P(\mathfrak{g})$ является алгебраически независимым в силу леммы 3 и содержит

$$n + \text{tr. deg } K + \frac{1}{2}(\dim_K \text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} n + \text{ind}_K \text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} n) - 1 = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \text{ind } \mathfrak{g})$$

элементов. Полнота набора $\mathcal{N} \cup \varphi(\mathcal{A})$ в поле Пуассона $\text{Fract } P(\mathfrak{g})$ доказана. Основная лемма доказана.

5. *Конструкция полного коммутативного полиномиального набора в подалгебре Пуассона $P(n)$.* Так как $w_1, \dots, w_{2n}$ – базис над полем K в алгебре Пуассона, стоящей в правой части переразложения (2), то в силу переразложения (2) элементы $w_1, \dots, w_{2n}$ записываются в виде рациональных функций от элементов базиса $e_1, \dots, e_{\dim n}$ в алгебре Ли n со знаменателями из поля K . Поэтому, умножая на общий знаменатель из поля K , получаем базис алгебры Пуассона $P_n \otimes K$ над K , полиномиальный от $e_1, \dots, e_{\dim n}$. Дополняя умноженные таким образом элементы $w_1, \dots, w_n$ базисом транцендентности алгебры Пуассона $zP(n)$, получаем полный коммутативный набор в алгебре Пуассона $P(n)$.

6. *Доказательство предложения 1.* а) Так как $\tilde{\mathfrak{g}} \subset \text{Fract } P(\mathfrak{g})$, достаточно доказать лишь замкнутость подпространства $\tilde{\mathfrak{g}}$ относительно коммутатора. Так как $n \subseteq \mathfrak{g}$ – идеал, дифференцирования $\text{ad}_A, A \in \mathfrak{g}$ продолжаются на алгебру Пуассона $P(n)$. Так как центр $zP(n)$ идеала $P(n)$ относительно их инвариантен, они продолжаются на локализацию $P(n) \otimes_{zP(n)} K$. Кроме того, локализация $P(n) \otimes_{zP(n)} K$ – подалгебра Ли. В силу инвариантности центра $zP(n)$ относительно дифференцирований ad_A подпространство $\mathfrak{g} K$ – подалгебра Ли в $\text{Fract } P(\mathfrak{g})$.

б) Аннулятор подпространства в алгебре Ли – подалгебра Ли. Воспользуемся тем, что $\tilde{\mathfrak{g}} K = \tilde{\mathfrak{g}}$ и $[K, n] = [K, \text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} n] = 0$. Поэтому $K \text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} n = \text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} n$. Следовательно, $\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} n$ – подалгебра Ли над полем K .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. $(P(n) \otimes_{zP(n)} K) \cap (\mathfrak{g} K) = n K$.

Доказательство предложения 7. Пусть для некоторых $b_i \in K$ выполнено

$$\sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} b_i e_i \in P(n) \otimes_{zP(n)} K. \quad (7)$$

Существование номера i , удовлетворяющего неравенству $1 + \dim n \leq i \leq \dim \mathfrak{g}$ и такого, что $b_i \neq 0$ означало бы существование нетривиального полиномиального соотношения на $e_{1+\dim n}, \dots, e_{\dim \mathfrak{g}}$ над полем $\text{Fract } P(n) = k(e_1, \dots, e_{\dim n})$. Но расширение $P(\mathfrak{g}) = k(e_1, \dots, e_{\dim \mathfrak{g}})$ = чисто трансцендентно.

Доказательство леммы 2. Первое равенство в (5) вытекает из

предложения 5. Действительно, из

$$[g_1 + K, g_2 + K] = g_3 + K, \quad g_1, g_2, g_3 \in \text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} P_n$$

вытекает

$$[g_1 + P(n) \otimes_{zP(n)} K, g_2 + P(n) \otimes_{zP(n)} K] = g_3 + P(n) \otimes_{zP(n)} K.$$

Второе равенство в (5) вытекает из разложения (1) и предложения 7. Докажем третье равенство в (5). Рассмотрим вложение $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} K$. Линейная зависимость $e_{1+\dim n}, \dots, e_{\dim \mathfrak{g}}$ на поле K означала бы нетривиальное соотношение (8). Следовательно, $e_{1+\dim n}, \dots, e_{\dim \mathfrak{g}}$ — базис в $(\mathfrak{g} K)/(\mathfrak{n} K)$.

Доказательство предложения 2. Из сквозного тождества (5) вытекает второе неравенство в

$$\dim_K \text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \mathfrak{n} \leq \dim_K \text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} P_n \leq$$

$$1 + \dim(\mathfrak{g} / \mathfrak{n}) \leq \dim \mathfrak{g}.$$

Здесь строгость последнего неравенства эквивалентна $\dim \mathfrak{n} > 1$. Если $\dim \mathfrak{n} = 1$, то имеет место случай б) предложения 3, т.е., в частности,

$$\mathfrak{n} = 0, \quad \text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} P_n = \tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} K, \quad \mathfrak{n} \not\subseteq z\mathfrak{g} = 0.$$

Из последнего равенства вытекает существование элемента из алгебры Ли $\mathfrak{g} K$, не коммутирующего с подалгеброй Ли $\mathfrak{n}$. Тогда из $\text{ann}_{\tilde{\mathfrak{g}}} P_n = \mathfrak{g} K$ вытекает, что первое неравенство строгое.

Доказательство предложения 4. а) Пусть $D \in \text{der } P_n$. Положим $\nu = \sum_{i=1}^n [(Dw_{n+i})dw_i - (Dw_i)dw_{n+i}]$. Тогда ν — полиномиальная дифференциальная форма от $w_1, \dots, w_{2n}$. Она замкнута согласно [35]:4.6.8. Следовательно, так как характеристика основного поля k равна нулю, она интегрируема до полинома $a \in P_n$ такого, что $da = \nu$. Тогда

$$Dw_i = -\frac{\partial a}{\partial w_{n+i}} = [a, w_i], \quad Dw_{n+i} = \frac{\partial a}{\partial w_i} = [a, w_{n+i}].$$

б) Докажем включение $\text{der}_K(P_n \otimes K) \subseteq (\text{der } P_n) \otimes K$ (обратное очевидно). Пусть $\delta \in \text{der}_K(P_n \otimes K)$. Тогда $w_1, \dots, w_{2n}$ — базис ассоциативной алгебры $P_n \otimes K$ над K и $\delta(w_i) = \sum_{j=1}^t c_{ij} \otimes e_j$, $1 \leq i \leq 2n$ для некоторых $c_{ij} \in P_n$ и линейно независимых $e_1, \dots, e_t \in K$. Положим $\delta_j(w_i) = c_{ij}$. Тождество $0 = \delta[w_i, w_l] = [\delta w_i, w_l] + [w_i, \delta w_l]$, $1 \leq i, l \leq 2n$, линейно по $e_1, \dots, e_t$ над подкольцом P_n . Рассмотрим в нем тождество, возникающее как коэффициент при e_j . Полученное тождество означает, что $\delta_j \in \text{der } P_n$. Тогда $\delta = \sum_{j=1}^t \delta_j \otimes e_j \in (\text{der } P_n) \otimes K$.

в) Докажем включение $z(P_n \otimes K) \subseteq (zP_n) \otimes K$ (обратное очевидно). Если элементы $e_1, \dots, e_t \in K$ линейно независимы над k и элементы $b, b_1, \dots, b_t$ принадлежат P_n , то из $[\sum_{i=1}^t b_i \otimes e_i, b] = 0$, ввиду $[K, b] = 0$,

вытекает $[b_i, b] = 0$, $1 \leq i \leq 2n$, т.е. $b_i \in zP_n$. Тогда $\sum_{i=1}^t b_i \otimes e_i \in (zP_n) \otimes K$.

Доказательство предложения 6. а) Действительно, $\text{ann}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n} = \text{ann}_{\mathfrak{g}}(P_n \otimes K) = \text{Ker } \mu$, где $\mu: \text{ann}_{\mathfrak{g}} P_n \rightarrow \text{der } K$ является гомоморфизмом алгебр Ли и K -линейным отображением. Такие отображения использовались во вспомогательной лемме раздела 2 в [109]. Тогда $\mu|_S$ – вложение K -линейных пространств, переводящее элементы базиса $s_1, \dots, s_l$ в K -линейном пространстве S в дифференцирования поля K , значениями которых на базисе поля K являются столбцы матрицы A . Так как $\mu|_S$ – вложение, то полученные дифференцирования линейно независимы над K , и их значения – столбцы матрицы A – линейно независимы над K .

Доказательство предложения 3. Пусть V – центр нильрадикала алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Предположим, что $\dim V = 1$, иначе имеет место случай а). Очевидно, $z\mathfrak{g} \subseteq V$. Если $z\mathfrak{g} = 0$, то имеет место случай б). В противном случае выполнено $z\mathfrak{g} = V$, $\dim V = 1$. Используем предположение, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ не разлагается в прямую сумму идеалов, и воспользуемся существованием в конечномерной алгебре Ли подалгебры Леви, дополнительной к радикалу, см. [22]:1.4.1. В силу этого алгебра Ли $\mathfrak{g}/z\mathfrak{g}$ не полупроста. Пусть w – центр нильрадикала алгебры Ли $\mathfrak{g}/z\mathfrak{g}$. Прообраз $\mathfrak{n}$ центра w при факторотображении $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/z\mathfrak{g}$ является нильпотентным идеалом степени ≤ 2 и размерности ≥ 2 . Если $\dim z\mathfrak{n} \geq 2$, то имеет место случай а). Иначе коммутатор в $\mathfrak{n}$, деленный на ненулевой элемент из одномерного центра $z\mathfrak{n}$, определяет k -значную кососимметрическую форму на $\mathfrak{n}$. Ее можно над полем k привести к каноническому виду. Следовательно, $\mathfrak{n} = H_n$, где $n = \frac{\dim \mathfrak{n} - 1}{2}$, и имеет место случай в).

7. *Доказательство леммы 1.* Пункт а. вытекает из того, что гомоморфизм $\varphi \circ \sigma$ является вложением линейных пространств.

б. Покажем сначала, что τ_* – сюръективный гомоморфизм. Обозначим подалгебру Ли $\text{ann}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n}$ в поле Пуассона через e , ей изоморфную абстрактную алгебру Ли через $\hat{e}$. Продолжим по мультипликативности изоморфизм τ , отображающий абстрактную алгебру Ли $\hat{e}$ на подалгебру Ли e в алгебре Пуассона $\text{Fract } P(\mathfrak{g})$, до переводящего 1 в 1 гомоморфизма ассоциативной коммутативной подалгебры $P(\hat{e})$, порожденной абстрактной алгеброй Ли $\hat{e}$. Тот факт, что полученный гомоморфизм ассоциативных коммутативных алгебр сохраняет скобку Пуассона $[,]$, вытекает из того, что гомоморфизм алгебр Ли $\tau|_{\hat{e}}: \hat{e} \rightarrow e$ сохраняет коммутатор $[,]$ и того, что формула Лейбница $[bc, d] = [b, d]c + b[c, d]$ выполнена как для $b, c, d \in P(\hat{e})$, так и для $b, c, d \in \text{Fract } P(\mathfrak{g})$.

Покажем теперь, что τ_* – вложение. Пусть $0 \neq \Phi \in \text{Ker } \tau_*$. Тогда Φ – нетривиальный полином от базиса $f_1, \dots, f_k$ в линейном дополнении к K в абстрактной алгебре Ли $\text{ann}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n}$. И $\tau_*(\Phi) = 0$ является нетривиальным полиномиальным соотношением над полем K на подмножество $f_1, \dots, f_k$ в поле Пуассона $\text{Fract } P(\mathfrak{g})$. Это противоречит

тому, что объединение E является базисом в поле Пуассона и потому его подмножество $f_1, \dots, f_k$ алгебраически независимо.

ЛЕММА 4. Пусть алгебра Пуассона $P(f)$ содержит алгебраически независимый набор $Q_1, \dots, Q_q$. Тогда существуют полиномы R_i от $Q_1, \dots, Q_q$ с коэффициентами, полиномиальными от $Z, (Z-1)^{-1}$:

$$R_1(Z, Q_1), \quad R_2(Z, Q_1, Q_2), \quad \dots, \quad R_q(Z, Q_1, \dots, Q_q),$$

лежащие в $P(f)$ и разлагающиеся в полиномы Тейлора по $Z-1$ в аффинных координатах $Z-1, f_1, \dots, f_k$ на дуальном пространстве f^* к алгебре Ли f :

$$R_i = R_i^0(f_1, \dots, f_k) + (Z-1)R_i^1(f_1, \dots, f_k) + \dots, \quad i = 1, \dots, q$$

такие, что нулевые члены

$$R_1^0(f_1, \dots, f_k), \quad \dots, \quad R_q^0(f_1, \dots, f_k) \quad (8)$$

– алгебраически независимы.

Доказательство леммы 4. Обобщим формулировку для поля рациональных функций леммы разд. 1.2 в [38] на случай произвольного поля k нулевой характеристики. Итерируя полученный результат, получаем алгебраическую независимость набора (8). Так как $R_1, \dots, R_q$ – полиномы от $Q_1, \dots, Q_q$ с полиномиальными от $Z, (Z-1)^{-1}$ коэффициентами, а $Q_1, \dots, Q_q$ – полиномы от $f_1, \dots, f_k$ с полиномиальными от Z коэффициентами, то каждый коэффициент при степенях $Z-1$ в R_i полиномиален от $f_1, \dots, f_k$.

Доказательство леммы 3. Так как $1_a, f_1, \dots, f_k$ – базис в алгебре Ли $\text{ann}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{p}$ над полем K , то в силу леммы 4

$$\text{rk}_K \frac{\partial(1_a, R_1^0, \dots, R_q^0)}{\partial(1_a, f_1, \dots, f_k)} = 1 + q.$$

Но

$$\frac{\partial(1_a, R_1^0, \dots, R_q^0)}{\partial(1_a, f_1, \dots, f_k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \frac{\partial(R_1^0, \dots, R_q^0)}{\partial(f_1, \dots, f_k)} \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $w_1, \dots, w_{2n}, t_1, \dots, t_{\text{tr. deg } K}, f_1, \dots, f_k$ – алгебраически независимы как подмножество базиса в поле Пуассона $\text{Fract } P(\mathfrak{g})$.

Но

$$\frac{\partial(w_1, \dots, w_{2n}, t_1, \dots, t_{\text{tr. deg } K}, R_1^0, \dots, R_q^0)}{\partial(w_1, \dots, w_{2n}, t_1, \dots, t_{\text{tr. deg } K}, f_1, \dots, f_k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \frac{\partial(R_1^0, \dots, R_q^0)}{\partial(f_1, \dots, f_k)} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Следовательно, элементы числителя якобиана в левой части равенства (9) алгебраически независимы. Лемма 3 доказана.

ГЛАВА 2.

СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ, ГАМИЛЬТОНОВОСТИ И СЛУЧАИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ В ВИДЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА – ПУАНКАРЕ НА АЛГЕБРАХ ЛИ

§2.1. Симплектическая структура на орбитах коприсоединенного представления – дифференциал рациональной 1-формы

1. Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная алгебра Ли над полем характеристики 0, $\mathfrak{g}^*$ – сопряженное пространство. Для точки $\xi \in \mathfrak{g}^*$, элементов $\Xi, \Upsilon \in \mathfrak{g}$ и ковекторов $u = \text{ad}^*_{\Xi} \xi, v = \text{ad}^*_{\Upsilon} \xi$ определяется форма Кириллова – Березина – Костанта – Сурьо [9] $\omega_{\xi}(u, v) = \langle \xi, [\Xi, \Upsilon] \rangle$. На орбитах O^* коприсоединенного представления группы Ли G алгебры Ли $\mathfrak{g}$ она является симплектической структурой, см. [139]:§14.3, [95]:§15.4. Многие уравнения механики гамильтоновы относительно нее. Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ – алгебраическая. Пусть $M \subseteq \mathfrak{g}^*$ – произвольное неприводимое Ad^* -инвариантное алгебраическое подмногообразие.

ТЕОРЕМА. На подмногообразии M существует такая рациональная 1-форма μ , что в ограничении на произвольную орбиту $O^* \subseteq M$ выполнено $\omega = d\mu$.

ПРИМЕР. Если x, y, z – ортонормированный относительно формы Киллинга базис алгебры Ли $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ и $x = r \cos \theta \cos \varphi, y = r \cos \theta \sin \varphi, z = r \sin \theta$, где $r \geq 0, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, то $\omega = r \cos \theta d\theta \wedge d\varphi = dz \wedge d \arctg \frac{y}{x}$ – деленая на r форма площади на стандартной сфере радиуса $r > 0$ и может быть выбрано $\mu = r \sin \theta d\varphi = z \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.

Теорема и пример свидетельствуют в пользу того, что уравнения Эйлера – Пуанкаре на алгебрах Ли, см. [139], могут оказаться глобально лагранжевыми в подходящих координатах. Ср. с тем, что в [66] рассмотрена алгебра Ли $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ и уравнения Кирхгофа на орбите коприсоединенного представления общего положения представлены в виде системы на двумерной сфере, лагранжевой с "монополем Дирака".

Доказательство примера. Присоединенное представление Ad сохраняет форму Киллинга. Ее уровень в $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})^*$ формы Киллинга – стандартная сфера $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}$. Если отождествить $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ и $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})^*$ с помощью формы Киллинга и взять $|\xi| = r$ и пару u, v ортогональных единичных векторов из $T_{\xi}O^*$, то может быть выбрано $\Xi = \pm \frac{v}{r}, \Upsilon = \pm \frac{u}{r}$ для некоторой пары знаков. Тогда $\langle \xi, [\Xi, \Upsilon] \rangle = \pm r^{-2} \langle \xi, [v, u] \rangle = \pm r^{-1}$.

Не ограничивая общности, предположим, что k – подполе поля коэффициентов $\mathbb{C}$, и заменим $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g} \otimes_k \mathbb{C}$.

Доказательство теоремы основано на некоммутативной симплектической редукции, см. [2]:Дополнение 5А, [139]:§13.1–3, [95]:15.3. А

именно, рассматривается соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{g}$ связная алгебраическая группа G . Рассматриваются левое и правое действия группы G на кокасательном расслоении T^*G и их отображения моментов $\mu_l, \mu_r: T^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*$, см. [2]:Дополнение 5, эквивариантные и пуассоновые, см. также [139]:§12.4. Из коммутативности действий легко следует, что орбита левого действия является уровнем отображения момента правого действия: $\mu_r = \xi$. Пусть $\text{St}_\xi \subset G$ – стабилизатор точки ξ при индуцированном представлении Ad^* группы G на $\mathfrak{g}^*$. Фактормногообразие орбиты левого действия $\mu_r = \xi$ по правому действию подгруппы St_ξ является симплектическим и изоморфно орбите O_ξ^* коприсоединенного представления группы G , проходящей через точку ξ , см. [139]:§14.3, [95]:§15.4. Рассматривается расслоение орбиты левого действия группы по правому действию подгруппы и рациональное квазисечение S этого расслоения, см. [25]:§2.5. Пусть ν и Ω – канонические 1-форма и симплектическая структура на T^*G . Ограничение условия $\Omega = d\nu$ на орбиту левого действия допускает дополнительное ограничение на квазисечение S . Поэтому ограничение ω на обиту $O^* \omega|_{TO^*}$ является дифференциалом алгебраической 1-формы – образа 1-формы ν при накрытии $S \rightarrow O^*$. Аддитивно усредняя алгебраическую 1-форму по ветвям над O^* , получаем рациональную 1-форму с тем же дифференциалом.

2. *Доказательство теоремы.* Пусть ν – каноническая 1-форма на T^*G , см. [2]:§37Б, порождающая каноническую симплектическую структуру $d\nu$. Тогда $\nu = \langle x, dg \rangle$, где $g \in G$, $x \in T_g^*G$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – спаривание T_g^*G и T_gG . Пусть $L_\xi = \{b \in T^*G \mid \mu_r(b) = \xi\}$. Пусть η – ковектор общего положения в M , $N \subset M$ – неприводимое алгебраическое подмногообразие, содержащее η , размерности, дополнительной к размерности орбиты общего положения в M , трансверсальное орбите O_η^* . Пусть $S \subset \mu_r^{-1}(N)$ – неприводимое алгебраическое подмногообразие размерности, дополнительной к размерности орбиты правого действия подгруппы St_η , трансверсальное некоторой такой орбите.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Регулярное отображение $\mu_l|_S: S \rightarrow M$ определяет алгебраическое отображение $(\mu_l|_S)^{-1}: M \rightarrow S$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого $\xi \in \mathfrak{g}^*$ выполнено $\mu_l(L_\xi) = O_\xi^*$.

Пусть D – носитель дивизора ветвления и полюсов алгебраического отображения $(\mu_l|_S)^{-1}$. Пусть точка $\xi \in M \setminus (D \cup \text{sing } M)$ – общего положения, то есть такая, что $\dim N \cap O_\xi^* = 0$. Тогда $\cup_{\zeta \in N \cap O_\xi^*} L_\zeta \supset S \cap \cup_{\zeta \in O_\xi^*} L_\zeta = (\mu_l|_S)^{-1}(O_\xi^*)$, где равенство вытекает из предложения 2, так как объединение уровней L_ζ , являющееся μ_r -прообразом орбиты O_ξ^* , является μ_l -прообразом орбиты O_ξ^* . Из сквозного вложения и редукции разд.1 следует первое равенство в следующей цепочке равенств, имеющей место в ограничении на орбиту O_ξ^* :

$$\omega = (d\nu)|_{\cup_{\zeta \in N \cap O_\xi^*} TL_\zeta} \circ d[(\mu_l|_S)^{-1}] = (d\nu) \circ d(\mu_l|_S)^{-1} = d(\nu \circ (\mu_l|_S)^{-1}). \quad (1)$$

Обозначим через $\Phi \subset \mathfrak{g}$ произвольное линейное вложение факторпространства $\mathfrak{g} / \text{ann}_{\mathfrak{g}} \eta$ в виде линейного подпространства, дополнительного к аннулятору $\text{ann}_{\mathfrak{g}} \eta$. Рассмотрим семейство линейных отображений $\text{ad}^* \zeta : \Phi \ni \Xi \rightarrow u \in T_{\zeta} O_{\zeta}^*$, регулярно зависящее от $\zeta \in M$ и для ζ общего положения являющееся изоморфизмом. Обращая это семейство, получаем семейство линейных отображений $\Xi(\cdot, \zeta) : T_{\zeta} O_{\zeta}^* \rightarrow \Phi$, рационально зависящее от $\zeta \in M$. Следовательно, $\omega_{\xi}(u, v) = \langle \xi, [\Xi(u, \zeta), \Upsilon(v, \zeta)] \rangle$ – рациональная 2-форма на M .

Согласно [104] любое расширение поля вкладывается в расширение Галуа (всех ветвей). Ветви 1-формы $\nu \circ (\mu_l|_S)^{-1}$ на поверхности M записываются в избыточных координатах на M с коэффициентами из конечного расширения Галуа F поля $\mathbb{C}(M)$ рациональных функций на M . На множестве ветвей 1-формы действует группа Галуа $\text{Aut}(F/\mathbb{C}(M))$ расширения. По определению расширения Галуа, инварианты действия на F – в точности элементы поля $\mathbb{C}(M)$. Усредняя сквозное равенство (1) по $\text{Aut}(F/\mathbb{C}(M))$, получаем $\omega = d\mu$, где μ – требуемая рациональная 1-форма.

3. *Доказательство предложения 2.* В разд. 1 установлено, что орбита левого действия на кокасательном расслоении T^*G к группе Ли является уровнем L_{ξ} отображения момента правого действия. Тогда предложение 2 вытекает из эквивариантности отображения момента μ_l левого действия.

Доказательство предложения 1. Согласно предложению 2, $\mu_l : \mu_r^{-1}(N) \rightarrow \text{Ad}_G^* N$ – сюръекция. Ввиду трансверсальности, согласно [105]:§2.2.1 и теореме 3 в [105]:§2.1.4 подмножество $\mu_l(S)$ содержит открытое в M по Зарисскому подмножество U . Из сюръективности отображения $\mu_r : T^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*$ и из следствия 1 теоремы 5 в [105]:§1.6.2 вытекает, что $\text{codim}_{T^*G} \mu_r^{-1}(N) = \text{codim}_{\mathfrak{g}^*} N = \dim O_{\eta}^*$. Следовательно, $\text{codim}_{T^*G} S = \dim O_{\eta}^* + \dim \text{St}_{\eta} = \dim \mathfrak{g}^*$. Согласно теореме 7 о размерности слоев в [105]:§1.6, примененной к подмногообразию $\mu_l^{-1}(U) \cap S$ и отображению μ_l , отображение $(\mu_l|_S)^{-1} : M \rightarrow S$ – алгебраическое.

4. *Определение расширения Галуа.* Расширение поля рациональных функций $\mathbb{C}(M)$ на комплексном многообразии M называется расширением Галуа, если оно порождено над полем $\mathbb{C}(M)$ всеми корнями некоторого полинома с коэффициентами в рассматриваемом поле рациональных функций (т.е., локально – всеми ветвями отвечающей полиному рациональной функции на многообразии M). Группой Галуа расширения называется группа монодромии разветвленного накрытия, определяемого получающейся алгебраической функцией. В силу единственности аналитического продолжения алгебраической функции порядок группы монодромии равен числу листов алгебраической функции. (Последнее свойство берется в качестве определения расширения Галуа (среди всех конечных расширений) в случае произвольного поля, см. §18 в [104].)

§2.2. О регулярной редукции n -мерной задачи $N + 1$ тел к уравнениям Эйлера – Пуанкаре на алгебре Ли $sp(2N)$

После понижения порядка по положению центра инерции предлагаемая редукция осуществляется переходом на фазовом пространстве $T^*\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^N$ к полному набору инвариантов действия линейной группы вращений и отражений. В отличие от известных эта редукция является гомеоморфной. При $N + 1 = 3$, $n = 3, 2$ реализуемые орбиты коприсоединенного представления группы $Sp(4)$ имеют гомотопический тип: проективного пространства $\mathbb{R}P^3$, сферы S^2 , однородного пространства $(S^2 \times S^1)/\mathbb{Z}_2$.

1. Введение и основной результат

Рассмотрим движение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, \dots$ системы материальных точек $r_1, \dots, r_{N+1}$ с ненулевыми массами $m_1, \dots, m_{N+1}$ и потенциальной энергией, зависящей лишь от квадратов взаимных расстояний:

$$\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N+1} V_{ij}(r_{ij}^2), \quad r_{ij} = r_i - r_j, \quad V_{ij} = V_{ji}.$$

Известные автору [106, 94, 103, 93, 148, 116, 149, 5, 158, 159, 111] редукции уравнений движения по вращениям и сдвигам допускают ветвление и полюс, или нулевой якобиан новых переменных на исключительных поверхностях.

Соискателем предлагается композиция линейной конфигурационной замены, исключающей трансляции (переходом к центру масс x_c и относительным радиус-векторам тел $x_1, \dots, x_N$ и их сопряженным импульсам $y_c, y_1, \dots, y_N$, редуцированному фазовому пространству $(T^*\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{R}^N$), и отображения Грама, исключающего вращения, умноженного справа на симплектическую единицу:

$$M_{ij} = \langle y_i, x_j \rangle, \quad L_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle, \quad K_{ij} = -\langle y_i, y_j \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (1.2)$$

Здесь $\langle, \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Воспользуемся тем, что функции (1.2) образуют систему квадратичных порождающих кольца полиномиальных инвариантов для представления группы изометрий $O(n)$ на $(T^*\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n \otimes (T^*\mathbb{R}^N)$. Здесь представление ι – стандартное на первом множителе и тривиальное на втором, см. [25]. И тем, что представление сохраняет скобку Пуассона в алгебре Пуассона полиномов на симплектическом линейном пространстве $(T^*\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{R}^N$. И тем, что скобка Пуассона квадратичных инвариантов (1.2) является квадратичным инвариантом. Следовательно, их линейной комбинацией. То есть, инварианты (1.2) порождают подалгебру Ли. Легко проверяется, что (1.2) оказывается стандартным базисом алгебры Ли $sp(2N)$ в стандартном представлении, см. [24]. Инвариантно эта проверка произведена в доказательстве теоремы 1а), см. разд. 4.1. Изоморфизм между подалгеброй Ли, порожденной квадратичными функциями (1.2), и

алгеброй Ли $sp(2N)$ является обобщением изоморфизма [3] между квадратичными гамильтонианами и гамильтоновыми векторными полями со случая $n = 1$ на случай произвольного n .

Фиксируя полный набор координат $x_1, \dots, y_N$ и вычисляя новые по формулам (1.2), приходим к отображению $\varphi^* : (T^*\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{R}^N \rightarrow sp(2N)^*$. Его образ – подмногообразие с краем $s_{N,n}^*$ =

$$\{ \text{неотрицательно определенные симметрические матрицы ранга } \leq n \} \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right) \ni \left(\begin{array}{cc} -M^T & L \\ K & M \end{array} \right).$$

Здесь матрица в правой части составлена из элементов (1.2). По построению, отображение φ^* инвариантно относительно представления ι . Теорема 1б), см. разд. 3.1, 4.1, утверждает, что индуцированное отображением φ^* отображение факторпространства $(T^*\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{R}^N / \iota(O(n))$ является гомеоморфизмом на образ $s_{N,n}^*$.

Так как двойственное к φ^* отображение φ является вложением алгебры Ли $sp(2N)$ в алгебру Пуассона полиномов на линейном пространстве $(T^*\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{R}^N$, то φ^* – пуассоново.

Редуцированный гамильтониан имеет вид:

$$H = -\frac{1}{2} \text{tr} MK + \sum_{i=1}^N V_{iN+1}(L_{ii}) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} V_{ij}(L_{ii} + L_{jj} - 2L_{ij}) \quad (1.3)$$

где M – постоянная матрица масс, определяемая формулой (3.5). При $N+1 = 3$ и при произвольном N в окрестности относительных равновесий редуцированный гамильтониан H может быть использован для повышения эффективности численных расчетов.

При интерпретации φ^* как отображения момента [139], его группа – $Sp(2N)$ – пресечение централизаторов $C_\xi \subset GL(T^*\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^N)$ (линейных групп симметрий) всех однопараметрических подгрупп симметрий $\xi \subset \iota(O(n))$.

Отображение φ^* эквивариантно: сопряженное к стандартному представлению $Sp(2N)$ на множителе $T^*\mathbb{R}^N$ (отвечающее перенумерации $N+1$ тел) оно переводит в коприсоединенное на $sp(2N)^*$, см. разд. 4.1.

При $0 \leq n \leq N$ полуалгебраическое множество $s_{N,n}^*$ допускает *пуассонову бирациональную модель*, см. [105], меньшей коразмерности вложения в аффинное пространство – на (незамкнутом) полуалгебраическом множестве [2, 30] в $(gl(N) \ltimes_\rho S^2\mathbb{R}^N)^*$, подробнее см. в разд. 3.2. Здесь $\ltimes_\rho$ – полупрямая сумма по представлению ρ , эквивалентному симметрическому квадрату стандартного [24]. Напомним, что полуалгебраическим множеством в $\mathbb{R}^k$ называется объединение конечного числа подмножеств, заданных конечным числом алгебраических уравнений и неравенств вида $P \geq 0$, $P > 0$, где P – многочлен, см. [30] разд. 3.2, [2] разд. 3.2.2.

После исключения поверхностей, отвечающих совпадению положений 2-х из 3-х тел, симплектические листы $s_{2,3}^*$ гомотопически

эквивалентны $\mathbb{R}P^3 \setminus 3\mathbb{R}^0$. Здесь $3\mathbb{R}^0$ – три различные выколотые точки.

2. Сравнение с классическими и современными подходами

Локальное понижение порядка в задаче трех (многих) тел с потенциалом $V_{ij}(r_{ij}^2) = -\gamma \frac{m_i m_j}{|r_{ij}|}$ в пространстве и на плоскости с (и без) сохранения гамильтоновости (Шарлье, [103]) осуществлялось в классических работах, см. [106, 94, 103, 93]. Здесь γ – универсальная гравитационная постоянная.

Брунс при доказательстве теоремы о несуществовании дополнительного алгебраического интеграла в задаче трех тел, см. [116, 94], использовал исключение трансляций в форме Бертрана (1852, [149]), основанное на восходящей к Якоби идее введения последовательных барицентрических координат, ср. [148]. Это исключение было использовано также Радо.

Исключение вращательного движения было достигнуто Радо (1868, [149]) следующей канонической заменой. Им был произведен переход к полярным координатам в плоскости мгновенного движения каждого из двух относительных радиус-векторов и исключаемым углам в неизменяемой плоскости с линией узлов (и сопряженным импульсам). Напомним, что неизменяемой называется плоскость, ортогональная вектору ненулевого суммарного момента $\mathbf{M}$, вычисленного относительно центра масс, и проходящая через начало относительных координат. Линия узлов – прямая пересечения плоскостей мгновенного движения с неизменяемой, см. [94]. Отображение редукции Радо, редуцированные гамильтониан и скобка Пуассона становятся разветвленными алгебраическими после перехода к косинусам указанных полярных углов [94].

Следуя Пуанкаре, 1896, [148], исключение трансляций и вращений было осуществлено Уиттекером (1927, [94]) переходом к декартовым координатам двух относительных радиус-векторов в плоскости тел $Ox'y'$. Здесь Ox' лежит в неизменяемой плоскости. Редуцированный гамильтониан – рациональная функция координат двух относительных радиус-векторов и взаимных расстояний, квадратичная по импульсам, имеющая дополнительный полюс при прохождении тел через одну прямую [94]. Квадраты неисключаемых координат и их импульсов $q_i'^2, p_i'^2$, $i = 1, \dots, 4$, [94] рациональны в исходных переменных, но имеют неопределенности: при прохождении тел через прямую и при параллельности плоскости тел неизменяемой. Сами координаты $q'_1, \dots, p'_4$ допускают четырехлистное ветвление над редуцированным фазовым пространством, отвечающее выбору ортонормированного базиса в плоскости тел.

Ветвление и σ -процессы раздутия [105] при понижении порядка являются, по-видимому, некоторыми из причин, по которым топология и алгебраическая структура редуцированного фазового пространства и его симплектических листов классиками изучена не была.

Следуя [5, 50, 3, 91, 12, 68], в [111] получено представление плоской задачи трех тел на подалгебре Ли $\mathfrak{l}_7 = (\mathfrak{so}(1, 2) \oplus \mathbb{R}) \oplus_s \mathbb{R}^3$ алгебры квадратичных функций на фазовом пространстве $T^*\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$. Одна-

ко, в переменных, определяемых базисом в l_7 , редуцированный гамильтониан имеет полюс при прохождении тел через одну прямую (т.е. при $|L| = 0$). Подмножество $\{l_7^* \mid |L| = 0, |M| \neq 0\}$ не отвечает реальным движениям. Четырехмерная поверхность $\{l_7^* \mid |L| = |M| = M = 0\}$ получается из гиперповерхности $\{s_{2,2}^* \mid |L| = 0\} = \{s_{2,2}^* \mid |L| = |M| = 0\}$ редуцированного фазового пространства преобразованием, обратным к преобразованию раздутия. Ортогональная этой прямой компонента импульса игнорируется. Кроме того, в [16] методом цепочек подалгебр, введенным в [91], построены симплектические координаты на орбитах l_7^* , аналогичные переменным Андуайе – Дебри, см. [45]. Квадраты переменных действия [111] квадратичны на l_7^* и инвариантны при перенумерации 3-х тел, см. разд.4.0.

Ранее Смейлом в плоской задаче $N + 1$ тел была установлена топологическая структура симплектического листа редуцированного фазового пространства, отвечающего ненулевому значению момента: симплектический лист диффеоморфен $T^*(\mathbb{C}P^{N-1} \times \mathbb{R})$, см. [158]. В работе Смейла неявно использовалась лагранжева редукция по Раусу (возможная, ввиду коммутативности группы симметрии $SO(2)$). Кроме того, Смейлом использовалось, что неособый уровень интеграла имеет структуру локально тривиального расслоения над $(R^2 \otimes R^N) \setminus 0$ со стягиваемыми слоями. Смейлом рассматривалась гладкая потенциальная функция V , возрастающая на бесконечности, и было установлено существование N круговых траекторий на каждом ненулевом уровне момента.

В [117] было показано, что в плоской задаче трех тел на нулевом уровне момента для кривых, соединяющих равнобедренные и примыкающие к ним эйлеровы конфигурации, минимум функционала действия за фиксированное время T достигается на неоднородном движении без столкновений. Итерация последнего движения составила гладкую траекторию в форме восьмерки, р.887-888. При этом было использовано, что для кривых из столкновения в столкновение минимум действия имеет место на collision-ejection solution [123].)

3. Подробные формулировки

3.0 Линейная замена

Гамильтониан системы точек $r_1, \dots, r_{N+1}$ с ненулевыми массами $m_1, \dots, m_{N+1}$ и потенциальной энергией (1.1) (зависящей лишь от квадратов взаимных расстояний) имеет вид:

$$H = \sum_{i=1}^{N+1} \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq N+1} V_{ij}(r_{ij}^2), \quad (3.1)$$

где $p_1, \dots, p_{N+1}$ – соответствующие импульсы,

$$\{r_i^k, p_j^l\} = \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad 1 \leq i, j \leq N+1, \quad 1 \leq k, l \leq n, \quad (3.2)$$

δ_{ij} – символ Кронекера, $\dot{r}_i^k = \{r_i^k, H\}$, $\dot{p}_i^k = \{p_i^k, H\}$.

Произведем замену координат на конфигурационном многообразии

$$\begin{pmatrix} x_1^c \\ \vdots \\ x_N^c \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{N+1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1^c \\ \vdots \\ y_N^c \end{pmatrix} = A^{\top-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{N+1} \end{pmatrix},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_N & m_{N+1} \\ 1 & & 0 & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

r_i, p_j записаны как векторы-строки. Скобка Пуассона (3.2) перейдет в:

$$\{x_i^k, y_j^l\} = \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad 1 \leq i, j \leq N, \quad 1 \leq k, l \leq n.$$

Легко видеть, что линейная оболочка векторов $y_1, \dots, y_N$ порождается векторами $p_i/m_i - p_j/m_j$, для $1 \leq i < j \leq N+1$.

3.1. Уравнения Эйлера – Пуанкаре на $sp(2N)$

Рассмотрим алгебру Ли $sp(2N) \ni \begin{pmatrix} -\alpha^\top & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$, где α, β, γ – блоки размера $N \times N$ и $\beta^\top = \beta$, $\gamma^\top = \gamma$. Сопряженное пространство $sp(2N)^*$ отождествим с пространством, состоящим из матриц такого же вида, посредством невырожденной билинейной формы

$$\frac{1}{2} \text{tr} \begin{pmatrix} -M^\top & L \\ K & M \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} -\alpha^\top & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} = \text{tr} \alpha M^\top + \frac{1}{2} \text{tr}(L\beta + K\gamma). \quad (3.4)$$

Пусть $\delta_i^\top = (0 \dots \overset{i}{1} \dots 0)_{1 \times N}$. Следующие образующие алгебры Ли $sp(2N)$:

$$\begin{pmatrix} -\delta_j \delta_i^\top & 0 \\ 0 & \delta_i \delta_j^\top \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \delta_i \delta_j^\top + \delta_j \delta_i^\top \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta_i \delta_j^\top + \delta_j \delta_i^\top & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

являются, в силу (3.4), линейными функциями M_{ij}, L_{ij}, K_{ij} на $sp(2N)^*$. Они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\{M_{ij}, M_{kl}\} = \delta_{jk} M_{il} - \delta_{il} M_{kj},$$

$$\{M_{ij}, L_{kl}\} = -(\delta_{ik} L_{jl} + \delta_{il} L_{jk}), \quad \{M_{ij}, K_{kl}\} = -(\delta_{jk} K_{il} + \delta_{jl} K_{ik}),$$

$$\{L_{ij}, K_{kl}\} = -(\delta_{ik} M_{lj} + \delta_{il} M_{kj} + \delta_{jk} M_{li} + \delta_{jl} M_{ki}), \quad 1 \leq i, j, k, l \leq N.$$

ТЕОРЕМА 1. а) Уравнения движения (3.1), (3.2) посредством замены (3.3), (1.2) приводятся к уравнениям Эйлера – Пуанкаре $\dot{\xi} = \{\xi, H\}$ [50, 68] с гамильтонианом (1.3), где

$$\mathcal{M} = \text{diag}(m_2^{-1}, \dots, m_{N+1}^{-1}) + m_1^{-1} \delta \delta^\top, \quad \delta^\top = (1, \dots, 1). \quad (3.5)$$

Гамильтоновость имеет место на орбитах коприсоединенного представления группы Ли $Sp(2N)$, на которые расслоено Ad^* -инвариантное полуалгебраическое множество $s_{N,n}^*$.

Пусть топология на $(T^*\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^N)/O(n)$ определяется кольцом инвариантных гладких функций на $T^*\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^N$. Тогда

б) отображение φ^* индуцирует гомеоморфизм $\bar{\varphi}^*$ фактормножества $(T^*\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^N)/O(n)$ на образ $s_{N,n}^*$.

Пусть cl – замыкание в топологии Зарисского в вещественном аффинном пространстве $sp(2N)^*$, $\mathbb{R}[W]$ – кольцо ограничений полиномов на замкнутое алгебраическое множество W , $\mathbb{R}[T^*\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^N]^{O(n)}$ – подкольцо инвариантов [105, 30]. Тогда

в) вложение $\varphi: \mathbb{R}[cl(s_{N,n}^*)] \rightarrow \mathbb{R}[T^*\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^N]^{O(n)}$ является изоморфизмом колец согласно [26].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Матрица M в (3.5) может быть приведена к единичной (при $m_1 > 0, \dots, m_{N+1} > 0$) конфигурационной заменой $\tilde{x} = S^{-1\top}x$, $S \in Gl(N)$. Например, в качестве A в (3.3) можно взять матрицу Якоби [106, 94]. При этом L претерпит обратное к M преобразование.

3.2. Представление на подалгебре при $0 \leq n \leq N$. Бирациональный изоморфизм.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Подалгебра Ли $\gamma = 0$ в алгебре Ли $sp(2N)$ изоморфна алгебре Ли $gl(N) \wr_{\rho} S^2\mathbb{R}^N$.

Пусть $\pi: sp(2N)^* \rightarrow (gl(N) \wr_{\rho} S^2\mathbb{R}^N)^*$ – пуассоново факторотображение сопряженных пространств, отвечающее вложению алгебр Ли $gl(N) \wr_{\rho} S^2\mathbb{R}^N \subset sp(2N)$. При вложении сопряженного пространства $(gl(N) \wr_{\rho} S^2\mathbb{R}^N)^*$ в $sp(2N)^*$ посредством ограничения формы (3.4), построенное факторотображение π принимает вид

$$\begin{pmatrix} -M^{\top} & L \\ K & M \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -M^{\top} & L \\ 0 & M \end{pmatrix}.$$

Пусть $0 \leq n \leq N$. Положим $\mathcal{G}_{N,n}^* = \pi(s_{N,n}^*)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Обратное отображение $\nu: \mathcal{G}_{N,n}^* \rightarrow s_{N,n}^*$ определяется формулой

$$-K = ml^{-1}m^{\top},$$

где $m_{N \times n}, l_{n \times n}$ – миноры матриц M, L , отвечающие относительным радиус-векторам $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ для произвольного набора индексов $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq N$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Регулярное отображение $\pi: s_{N,n}^* \rightarrow \mathcal{G}_{N,n}^*$ является пуассоновым бирациональным изоморфизмом полуалгебраических множеств.

Здесь использовано

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Замкнутыми по Зарисскому множествами в вещественном аффинном пространстве называются совместные нули конечного числа многочленов, аналогично разд. 1.2 в [105]. Пересечения открытых по Зарисскому множеств с $s_{N,n}^*, \mathcal{G}_{N,n}^*$ назовем открытыми в $s_{N,n}^*, \mathcal{G}_{N,n}^*$. Аналогично парагр. 1.3 в [105] бирациональный изоморфизм, по определению, означает, что $s_{N,n}^*$ и $\mathcal{G}_{N,n}^*$ содержат изоморфные открытые подмножества, в данном случае, например, $\{s_{N,n}^* \mid |l| \neq 0\}$ и $\{\mathcal{G}_{N,n}^* \mid |l| \neq 0\}$. Аналогично парагр. 1.4 в [105], изоморфизм, определяется вещественным рациональным отображением, имеющим рациональное обратное, с ненулевым якобианом у обоих в каждой точке.

СЛЕДСТВИЕ 2. Уравнения с гамильтонианом (3.1) относительно скобки Пуассона (3.2) записываются в виде уравнений Эйлера–Пуанкаре на подалгебре $gl(N) \vdash_\rho S^2 \mathbb{R}^N$ с гамильтонианом (1.3) (после подстановки $-K = ml^{-1}m^T$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $N = n = 2$ отображение $\pi \circ \varphi^*$ определяет редукцию [111].

3.3. Геометрия и топология симплектических листов редукции

ТЕОРЕМА 2. В пространственной задаче трех тел симплектические листы редуцированного фазового пространства $s_{2,3}^*$ изоморфны однородным пространствам группы Ли $Sp(4)$, указанным в последнем столбце таблицы.

Страты редуцированного фазового пространства	Симплектическая вещественная жорданова форма χ_λ	$St(\chi_\lambda) \subset Sp(4)$	Тип орбиты коприсоединенного представления
III Неплоские пространственные движения отвечают страту $s_{2,3}^* \setminus s_{2,2}^*, 9(8)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ - M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \delta & 0 & \delta & 0 \\ -s & \delta & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta & \sigma \\ c^2 + s^2 = 1, \sigma = \pm 1 \end{pmatrix}$	$\frac{Sp(4)}{\tau(SO(2) \times (\mathbb{Z}_2 \vdash \mathbb{R}))} \sim \mathbb{R}P^3$
II Плоские движения с ненулевым моментом M отвечают страту $s_{2,2}^* \setminus \{\xi \in sp(4)^* \mid \text{tr } \xi^2 = 0\}, 7(6)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ - M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \delta & 0 & \delta & 0 \\ -s & \delta & \delta & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(2), \\ \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \in SO(2) \end{pmatrix}$	$\frac{Sp(4)}{\tau(SO(2) \times Sp(2))} = T^*(S^2 \times \mathbb{R})$
II ₀ Плоские неоднородные движения с нулевым моментом M отвечают страту $\{s_{2,2}^* \mid \text{tr } \xi^2 = 0\} \setminus s_{2,1}^*, 6(6)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$	$O \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 4},$ $O \in O(2), B^T = B$	$\frac{Sp(4)}{\tau(O(2) \vdash S^2 \mathbb{R}^2)} \stackrel{\text{bir}}{=} \mathbb{R}^6 \sim (S^2 \times S^1)/\mathbb{Z}_2$

Здесь в 1-ом столбце – страты редуцированного фазового пространства (открытые в индуцированной топологии Зарисского) и их размерность. В скобках – размерность изоморфных между собой

симплектических листов, на которые расслоены страты. Во 2-ом столбце – простейший вид ("симплектическая жорданова форма") произвольного элемента страта, к которой он приводится симплектическим преобразованием. В 3-ем – стабилизатор $St(\chi_\lambda)$ симплектической жордановой формы. В 4-ом – им определяемое вложение групп Ли τ .

Здесь $\mathbb{R}$ – группа вещественных чисел по сложению, $=$ – вещественная аналитическая эквивалентность, $\stackrel{bir}{=} \mathbb{R}^6$ – бирациональный изоморфизм на полуалгебраическое подмножество в $\mathbb{R}^6$ (разд. 3.2), в частности, индуцирующий изоморфизм колец вещественных рациональных функций, $\sim$ – гомотопическая эквивалентность [96],

$$\xi \in sp(4)^*, \quad -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \xi^2 = -\operatorname{tr}(LK + M^2) = \left(\sum_{i=1}^2 x_i \wedge y_i \right)^2 = |M|^2 \quad (3.6)$$

– квадрат момента системы тел относительно центра масс, $/\mathbb{Z}_2$
– факторизация по некоторой инволюции (действующей без неподвижных точек). (Одномерным движениям соответствует лист $((T^*\mathbb{R}^2) \setminus 0)/\{\pm 1\}$.)

СЛЕДСТВИЕ 3. Лист III является одной из связных компонент пересечения в $\mathbb{R}^{10}$ конуса 4-ой степени $\left| \begin{smallmatrix} -M^\top & L \\ K & M \end{smallmatrix} \right| = 0$ и сферы сигнатуры (4,6) $\operatorname{tr} \xi^2 = -2|M|^2 \neq 0$.

3.4. Представления и инварианты

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. а) Полный функционально независимый набор инвариантов на $s_{N,n}^* \ni \xi$ может быть выбран в виде $\operatorname{tr} \xi^{2k}$, $k = 1, \dots, [n/2]$,

б) $\dim s_{N,n}^* = (4N - n + 1)n/2$, $0 \leq n \leq 2N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Контраградиентное к присоединенному представлению группы $\exp(gl(N) \curvearrowright_\rho S^2 \mathbb{R}^N)$ на $(gl(N) \curvearrowright_\rho S^2 \mathbb{R}^N)^*$ имеет вид $\operatorname{Ad}_{g^{-1}}^* v = g^{-1\top} v g^\top$ [91], где

$$v = \begin{pmatrix} -M^\top & L \\ 0 & M \end{pmatrix} \in (gl(N) \curvearrowright_\rho S^2 \mathbb{R}^N)^*,$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} S^{-1\top} & S^{-1\top} Y \\ 0 & S \end{pmatrix} \in \exp(gl(N) \curvearrowright_\rho S^2 \mathbb{R}^N),$$

$Y \in S^2 \mathbb{R}^N$, $S \in GL(n)$. Или

$$\operatorname{Ad}_g^*(M, L) = (S^\top M S^{-1\top} + Y S^{-1} L S^{-1\top}, S^{-1} L S^{-1\top}). \quad (3.7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Полный функционально независимый набор инвариантов на $\mathcal{G}_{N,n}^*$, $0 \leq n \leq N$, может быть выбран в виде коэффициентов при λ^k , $1 \leq k \leq n$, $k = n \bmod 2$, в

$$(\det l)^{-1} \det(\lambda l + q) - \lambda^n \quad (3.8)$$

где $l_{n \times n}, q_{n \times n}$ – миноры матриц $L, LM - M^T L$, отвечающие относительным радиус-векторам $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq N$. Или, полный функционально независимый набор инвариантов на $\mathcal{G}_{N,n}^*$ может быть выбран в эквивалентном виде

$$\text{tr}(l^{-1}q)^{2k}, \quad k = 1, \dots, [n/2]. \quad (3.9)$$

4. Доказательства

4.0. *Рациональность, неопределенности и ветвление редукции Уиттекера.* Пусть $Ox'y'z'$ – подвижная ортонормированная система координат Уиттекера: O – положение 3-го тела, $Ox'y'$ – плоскость тел, Ox' – ее пересечение с неизменяемой, e_1, e_2 – единичные вектора вдоль Ox', Oy' , q_1, q_2 – радиус-вектора 1-го и 2-го тел в ней, p_1, p_2 – импульсы 1-го и 2-го тела в неподвижной системе координат. Отметим, что вместе с суммарным импульсом импульсы p_1, p_2 дополняют радиус-вектора q_1, q_2 и радиус-вектор 3-го тела O в неподвижной системе координат до линейной симплектической системы координат в $T^*\mathbb{R}^3$. Т.е., сопряжены им.

Тогда переменные Уиттекера, см. парагр. 157-158 в [94], имеют вид

$$q'_1 = \langle q_1, e_1 \rangle, \quad q'_2 = \langle q_1, e_2 \rangle, \quad q'_3 = \langle q_2, e_1 \rangle, \quad q'_4 = \langle q_2, e_2 \rangle,$$

$$p'_1 = \langle p_1, e_1 \rangle, \quad p'_2 = \langle p_1, e_2 \rangle, \quad p'_3 = \langle p_2, e_1 \rangle, \quad p'_4 = \langle p_2, e_2 \rangle,$$

$$e_1 = \pm M \times N / \sqrt{\langle M \times N, M \times N \rangle}, \quad e_2 = \mp e_1 \times N / \sqrt{\langle N, N \rangle}, \quad N = q_1 \times q_2,$$

где $\langle, \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, знаки $\pm, \mp$ берутся независимо. Легко видеть, что квадраты переменных Уиттекера рациональны и имеют неопределенности при $q_1 \parallel q_2$, $M \parallel N$.

В редукции Болсинова – Борисова – Мамаева [111] алгебра Ли l_7 совпадает с алгеброй Ли $(gl(2) \mid_\rho S^2\mathbb{R}^2)$; сопряженное пространство $(gl(2) \mid_\rho S^2\mathbb{R}^2)^*$ отождествляется с подмножеством $\left\{ \begin{pmatrix} -M^T & L \\ 0 & M \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -M^T & L \\ K & M \end{pmatrix} \in s_{2,2}^* \right\}$.

Подмножество $|L| = 0, |M| \neq 0$ не отвечает реальным движениям: из условий $|L| = 0, |M| \neq 0$ вытекало бы

$$2 = \text{rk} \begin{pmatrix} L & M^T \\ M & -K \end{pmatrix} = \text{rk} \begin{pmatrix} 0 & M^T \\ M - LM^{-1T}K & -K \end{pmatrix},$$

т.е. $M - LM^{-1T}K = 0$ и $\text{rk } M = \text{rk } LM^{-1T}K \leq \text{rk } L \leq 1$, что приводит к противоречию.

Преобразование, обратное раздутию подмногообразия редуцированного фазового пространства, происходящее при прохождении тел через прямую, порождает два множества неопределенностей на l_7^* . Это множества неопределенностей гамильтониана $(H)_0 \cap (H)_\infty$ и (единственной) функции Казимира. Действительно, гамильтониан не постоянен при добавлении компонент импульсов, ортогональных

прямой тел. Инвариантные уровни функции Казимира не являются орбитами (пересекаются по множеству неопределенности).

Переменные действие [111] инвариантны при перенумерациях тел. При линейном преобразовании относительных радиус-векторов $\tilde{x}_i = B_{ij}x_j$, $i, j = 1, \dots, N$, сопряженные импульсы испытывают контраградиентное преобразование $\tilde{y}_i = (B^{\top-1})_{ij}y_j$, $i, j = 1, \dots, N$, а порождающие $\|M_{ij}\|$ подалгебры – контраградиентное к присоединенному: $\|\langle \tilde{y}_i, \tilde{x}_j \rangle\| = B^{\top-1} \|\langle y_i, x_j \rangle\| B^{\top}$. Инварианты последнего – функции Казимира подалгебры $gl(N)$. Таковы при $N = 2$ в [111] 3-я и квадрат 2-ой переменных действия. Инвариантность 1-ой переменной действия (являющейся элементом алгебры Ли $so(1, 2)$) относительно циклических перестановок 3-х тел вытекает из формул (Н.3), (Н.5) в [111].

4.1. Пусть $symm_n(2N)$ ($symm_n^+(2N)$) – подмногообразие вещественных матриц ранга $\leq n$ (неотрицательно определенных).

ЛЕММА 1. А) Элементы $symm_n(2N)$ могут быть представлены в виде

$$A = \sum_{l=1}^n x^l (x^l)^{\top} = \|\langle x_i, x_j \rangle\|_{1 \leq i, j \leq 2N}, \quad \|x_i^l\| \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^{2N},$$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{l=1}^n (-1)^{s_l} u^l v^l, \quad s_l = 0, 1,$$

где нижние индексы нумеруют строки, верхние – столбцы; при $A \geq 0$ может быть выбрано $s_1 = \dots = s_n = 0$.

Б) $\dim symm_n(2N) = \dim symm_n^+(2N) = \sum_{s=2N-n+1}^{2N} s$.

Доказательство теоремы 1. а) Подставляя замену (3.3) в (3.1), имеем:

$$H = \frac{1}{2} [y_c^2 \sum_{i=1}^{N+1} m_i + \text{tr } y a \text{diag}(m_1^{-1}, \dots, m_{N+1}^{-1}) a^{\top} y^{\top}] + \sum_{1 \leq i < j \leq N+1} V_{ij}(r_{ij}^2),$$

где матрица a получается из A отбрасыванием первой строки, $y^{\top} = (y_i^1, \dots, y_i^n)_{N \times n}$.

Так как $\text{rk} \|x_1 \dots x_N y_1 \dots y_N\| \leq n$, то матрицы

$$\varphi^*(x, y) = \begin{pmatrix} -\langle x_i, y_j \rangle & \langle x_i, x_j \rangle \\ -\langle y_i, y_j \rangle & \langle y_i, x_j \rangle \end{pmatrix}_{1 \leq i, j \leq N} = \psi^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\psi^*(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} (x_1^{\top} \dots y_N^{\top}) \quad (4.1)$$

(а следовательно и $\|L, M\|_{N \times 2N}$) имеют ранг $\leq n$.

Пуассоновость φ^* может быть проверена непосредственным вычислением скобок Пуассона функций (1.2). Приведем более инвариантную интерпретацию этой проверки. Покажем, что инварианты (1.2) порождают именно алгебру Ли $sp(2N)$. Пусть $n = 1$. Пусть H_N – стандартная алгебра Гейзенберга, порожденная константами и линейными функциями на $T^*\mathbb{R}^N$ относительно стандартной скобки Пуассона $\{x_i, y_j\} = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq N$. Рассмотрим известный изоморфизм [3], переводящий гамильтоновы векторные поля в их квадратичные гамильтонианы. Т.е., элементы $M_{ij}, L_{ij}, K_{ij} \in sp(2N) = sp(T^*\mathbb{R}^N)$ – в квадратичные элементы алгебры Ли – Пуассона $P(H_N)$ полиномов на $T^*\mathbb{R}^N$: $y_i x_j, x_i x_j, -y_i y_j \in P^2(H_N)$. (Здесь $P^2(H_N)$ – подалгебра Ли квадратичных элементов в $P(H_N)$.) Обозначим полученный изоморфизм $sp(2N) \rightarrow P^2(H_N)$ через φ_1 .

Выбор ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$ приводит к разложению в прямую сумму $T^*\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^N = \bigoplus_{k=1}^n (T^*\mathbb{R}^N)$ и диагональному виду скалярного произведения $\langle y_i, x_j \rangle = \sum_{k=1}^n y_i^k x_j^k$, $1 \leq i, j \leq N$. Рассмотрим индуцированное отображением (1.2) многообразий $\varphi^* : \bigoplus_{k=1}^n (T^*\mathbb{R}^N) \rightarrow s_{N,n}^* \subset sp(2N)^*$ обратное отображение алгебр функций φ . Тогда φ – гомоморфизм алгебры Ли $sp(2N)$ в алгебру Пуассона $P(\bigoplus_{k=1}^n (T^*\mathbb{R}^N)^*)$. Из (1.2) следует, что гомоморфизм φ определяется диагональным отображением $\bigoplus_{k=1}^n P(H_N) \xrightarrow{(\varphi_1, \dots, \varphi_1)} sp(2N)$ для гомоморфизмов алгебр Ли (для каждого выбора ортонормированного базиса). Но диагональное отображение для гомоморфизмов алгебр Ли является гомоморфизмом алгебр Ли. Далее необходимо рассмотреть естественный гомоморфизм алгебры Пуассона $\bigoplus_{k=1}^n P(H_N)$ в алгебру Пуассона $P(\bigoplus_{k=1}^n (T^*\mathbb{R}^N)^*)$. Для этого необходимо отождествить единицы $1_1, \dots, 1_n$ – порождающие центров всех экземпляров $P(H_N)$. Последний гомоморфизм факторизации является продолжением гомоморфизма факторизации $\bigoplus_{k=1}^n H_N \rightarrow H_{N \times n}$. (Коммутационные соотношения в алгебре Ли $H_{N \times n}$ имеют вид (3.3).)

Но пуассоновость φ^* означает, по определению, что φ – гомоморфизм алгебр Ли – Пуассона, см. [68]. Следовательно, отображение $\varphi^* : T^*\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^N \rightarrow sp(2N)^*$ – пуассоново.

б) Сюръективность φ^* вытекает из пункта А) леммы 1.

Взаимнооднозначность $\bar{\varphi}^*$ вытекает из того, что конфигурация $(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N)$ определяется левой частью (1.2) однозначно, с точностью до конгруэнтности, т.е. с точностью до элемента группы Ли $O(n)$.

Гомеоморфность $\bar{\varphi}^*$. В силу непрерывности φ^* , для произвольного замкнутого шара $B \subset sp(2N)^*$ его прообраз $B' = \varphi^{*-1}(B \cap s_{N,n}^*)$ замкнут и инвариантен. А это – определение замкнутости $\bar{B} = B'/O(n, \mathbb{R})$ в топологии, индуцированной факторотображением. Следовательно, $\bar{\varphi}^*$ – непрерывно.

Из ограниченности L_{ii}, K_{ii} , $1 \leq i \leq N$ и (1.2) вытекает ограни-

ченность (компактность) B' . Тогда и образ $\bar{B}$ при факторотображении компактен в индуцированной топологии. Действительно, если U_α – произвольное открытое покрытие $\bar{B}$, то прообраз U_α при факторотображении – открытое инвариантное покрытие B' , из которого можно выбрать конечное подпокрытие.

Но непрерывное взаимно однозначное отображение компактного пространства – гомеоморфизм, см. [55]. Следовательно, $\bar{\varphi}^{*-1}$ непрерывно в произвольной точке полуалгебраического множества $S_{N,n}^*$.

в) Ввиду инвариантности φ^* , отображение φ является вложением, сюръективным, ввиду [25].

Покажем при $n < 2N$ непосредственно, что кольцо полиномиальных инвариантов $\mathbb{C}[T^*\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^N]^{O(n,\mathbb{C})}$ порождается образующими (1.2).

Из $\dim \text{symm}_n(2N, \mathbb{C}) = \dim T^*\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^N - \dim O(n)$ вытекает функциональная зависимость произвольного инварианта $P(x, y)$ с инвариантами (1.2). Так как $P(x, y)$ – полином, то найдется алгебраическая функция $a \in \overline{\mathbb{C}(\text{symm}_n(2N, \mathbb{C}))}$, что $P(x, y) = a(\psi^*(x, y))$.

ЛЕММА 2. А) Отображение $\psi^* : \mathbb{C}^n \otimes T^*\mathbb{C}^N \rightarrow \text{symm}_n(2N, \mathbb{C})$ эпиморфно.

Б) Оно эквивариантно относительно действия группы $GL(2N)$: стандартного на втором множителе тензорного произведения, являющегося представлением Sq , см. [24], на образе. Последнее действие транзитивно на подмногообразии $\text{symm}_n(2N, \mathbb{C}) \setminus \text{symm}_{n-1}(2N, \mathbb{C})$.

В) Образ множества падения ранга ψ^* есть $\text{symm}_{n-1}(2N, \mathbb{C})$.

Г) Коразмерность подмногообразия $\text{symm}_{n-1}(2N, \mathbb{C})$ в многообразии $\text{symm}_n(2N, \mathbb{C})$ равна $2N - n + 1 > 1$.

Д) При $0 \leq n < 2N$ алгебраическое многообразие $\text{symm}_n(2N, \mathbb{C})$ неособо в коразмерности 1.

Дивизор ветвления определен согласно [105] в силу леммы 2Д). В силу регулярности отображений $P(x, y)$ и $\psi^*(x, y)$ и эпиморфности отображения ψ^* , носитель $\text{Supp}(a)_b$ дивизора ветвления должен содержаться в образе множества падения ранга отображения $\psi^*(x, y)$ [102]. Так как коразмерность носителя дивизора равна 1, то он пуст (в силу леммы 2Г)). Из $(a)_b = 0$ в силу замкнутости $\text{symm}_n(2N, \mathbb{C})$ вытекает $a \in \mathbb{C}(\text{symm}_n(2N, \mathbb{C}))$ [105]. Аналогично, из эпиморфности ψ^* и $(a)_\infty \neq 0$ вытекало бы $(a(\psi^*))_\infty \neq 0$ [102]. Следовательно, $a \in \mathbb{C}[\text{symm}_n(2N, \mathbb{C})]$.

Доказательство леммы 2. А) Аналогично лемме 1, Б) вытекает из [24], Г) – из леммы 1б), Д) – из Б) и Г).

В) Образ множества падения ранга ψ^* содержится в $\text{symm}_{n-1}(2N, \mathbb{C})$, ввиду Б). В силу леммы 1А), прообраз $\text{symm}_{n-1}(2N, \mathbb{C})$ содержится в $\mathbb{C}^{n-1} \otimes T^*\mathbb{C}^N$ для некоторого линейного подпространства $\mathbb{C}^{n-1} \subset \mathbb{C}^n$, которое выбором базиса (т.е., действием группы $SO(n)$) можно считать последним координатным. В рассматриваемом базисе

из (4.1) видно, что на трансверсали к $\mathbb{C}^{n-1} \otimes T^* \mathbb{C}^N$ отображение $\bar{\varphi}^*$ однородно квадратично. Поэтому ранг ψ^* в этих точках не более $\dim \text{sym} m_{n-1}(2N, \mathbb{C})$.

4.2. Доказательство предложения 1. Из (3.8) следует, что действие $\langle y_i, x_j \rangle \in \mathfrak{gl}(N)$ на $y = (y_1, \dots, y_N)^T$ стандартно, а на $x = (x_1, \dots, x_N)^T$ контраградиентно. Но коммутативный идеал $\{L_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq N}$ порождается элементами $x_i x_j^T$. Следовательно, действие $\langle y_i, x_j \rangle \in \mathfrak{gl}(N)$ на коммутативном идеале $\{L_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq N}$ является симметрическим квадратом контраградиентного.

Доказательство формулы для K . Пусть, для краткости, $i_j = j$, $j = 1, \dots, n$, и пусть $|l| \neq 0$.

Приведем квадратичную форму $\begin{pmatrix} L & M^T \\ M & -K \end{pmatrix}$ ранга n к виду $\begin{pmatrix} l & 0 & m^T \\ 0 & 0 & -K \\ m & 0 & -K \end{pmatrix}$, заменяя базисные вектора на лежащие в ядре. Прибавим к третьему столбцу первый, умноженный справа на $-l^{-1}m^T$. Из условия на ранг получим $K + ml^{-1}m^T = 0$.

Доказательство следствия 1. Отображение $\pi|_{s_{N,n}^*}$ является пуассоновым как ограничение пуассонового на Ad^* -инвариантное подмногообразие.

Доказательство следствия 2. а) Ad^* -инвариантность $\mathcal{G}_{N,n}^*$ следует из пуассоновости π или из формул (3.7).

4.3. Доказательство теоремы 2. Формула (3.6) при $n = 3$ вытекает из

$$\sum_{i=1}^{N+1} r_i \times p_i = \sum_{i=1}^{N+1} \left(\sum_{j=0}^N (A^{-1})_{ij} x_j \right) \times \left(\sum_{k=0}^N (A^T)_{ik} y_k \right) = \sum_{i=0}^N x_i \times y_i$$

и того, что $x_0 \equiv x_c$ является центром масс.

Реализуемые орбиты коприсоединенного представления группы Ли $Sp(4)$ изоморфны однородным пространствам $Sp(4)/\text{St}(\xi)$, см. парагр. 3.1.7 в [24], по правому действию подгруппы $\text{St}(\xi)$.

Возможность приведения к жордановой форме таблицы симплектическим преобразованием. Как хорошо известно, ввиду $\xi I = -I \xi^T$, $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, выполнено $|\xi - \lambda| = |-\xi^T - \lambda| = |\xi + \lambda|$, $\lambda \in \mathbb{C}$, т.е., если λ – собственное значение $\xi \in \mathfrak{sp}(2N)^*$, то таково и $-\lambda$.

Так как при приведении к обычной жордановой форме над $\mathbb{C}$ сохраняется ранг, ранг симплектической жордановой формы равен 3 в случае III и 2 в случаях II, II₀. Поэтому кратность собственного значения 0 не меньше 2. Из сохранения формы $-\frac{1}{2} \text{tr} \xi^2 = -\text{tr}(LK + M^2) = |\mathbf{M}|^2$ при этом вытекает, что оставшееся собственное значение ξ равно $\pm i|\mathbf{M}|$.

Воспользуемся разложением $\mathbb{C}^{2N} = T_0 \oplus T_+ \oplus T_-$ в прямую сумму инвариантных подпространств, отвечающих собственным значениям оператора ξ : нулевым, в интервалах $0 \leq \arg \lambda < \pi$, и $-\pi \leq \arg \lambda < 0$. В силу инвариантности кососкалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ в $\mathbb{C}^{2N}$ выполнено

$$(\xi e_\lambda^i, e_\mu^j) + (e_\lambda^i, \xi e_\mu^j) = 0, \quad e_\lambda^i \in \text{Ker}(\xi - \lambda)^{i+1} \setminus \text{Ker}(\xi - \lambda)^i, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

Из (4.2) индукцией по $i + j$ получаем

$$(\lambda + \mu)(e_\lambda^i, e_\mu^j) = 0, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots,$$

т.е. подпространство $T_\pm$ – изотропно относительно $(\cdot, \cdot)$ и косоортogonalно подпространству T_0 , а подпространство $T_+ \oplus T_-$ – симплектическое. Приводя $\xi|_{T_+}$ к жорданову виду и дополняя полученный комплексный жорданов базис симплектически сопряженным в T_- , получаем требуемое комплексное приведение для оператора $\xi|_{T_+ \oplus T_-}$.

В случае $\lambda \in i\mathbb{R}_+$ выполнено $\xi \bar{e}_\lambda = \bar{\lambda} \bar{e}_\lambda$ и

$$e_\lambda + \bar{e}_\lambda, \quad i\kappa^{-1}(e_\lambda - \bar{e}_\lambda)$$

– вещественный симплектический базис в подпространстве $\{e_\lambda, \bar{e}_\lambda\}$, здесь $\kappa = (e_\lambda + \bar{e}_\lambda, i(e_\lambda - \bar{e}_\lambda)) \in \mathbb{R}$. В нем

$$\xi(e_\lambda + \bar{e}_\lambda) = |\lambda| i\kappa^{-1}(e_\lambda - \bar{e}_\lambda), \quad \xi(e_\lambda - \bar{e}_\lambda) = -|\lambda| \kappa^{-1}(e_\lambda + \bar{e}_\lambda),$$

т.е., вещественная симплектическая жорданова форма в случаях III, II имеет указанный вид.

Нильпотентный случай Π_0 . Так как $\text{rk } \xi = 2$, то присоединенных векторов ровно 2. Если бы они оба лежали в одном корневом подпространстве, то собственный вектор этого подпространства был бы косоортogonalен $\mathbb{R}^4$, что противоречило бы симплектичности $\mathbb{R}^4$. Следовательно, корневых подпространств два: $\mathbb{R}^2 + \mathbb{R}^2$. Если бы одно из них было изотропно, то дополняя базис в нем симплектически сопряженным до симплектического базиса в $\mathbb{R}^4$, мы получили бы, что симплектический оператор ξ в нем имел бы вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(ввиду условия на ранг), что противоречило бы неотрицательной определенности матрицы ξI^{-1} . Следовательно, корневое подпространство $\mathbb{R}^2$ симплектическое. Тогда его (инвариантное) косоортogonalное дополнение является трансверсальным дополнением и оператор ξ разлагается в прямую сумму нильпотентных операторов в них, т.е., имеет вид Π_0 .

Вычисление стабилизаторов жордановых форм. Для случая Π_0 условие $S\chi_\lambda S^{-1} = \chi_\lambda$ приводит к указанному в таблице треугольному виду стабилизатора $\text{St}(\chi_\lambda)$. Ввиду $\text{St}(\xi) \subseteq \text{St}(\xi^2)$, аналогично получаем блочный вид в случае II, и из $I_{2 \times 2} = S I_{2 \times 2} S^{-1} = S S^T I_{2 \times 2}$

– вид $\text{St}(\chi_\lambda)$ в случае II. Стабилизатор III содержится в II, ввиду $\text{St}(\xi) \subseteq \text{St}(\xi^2)$.

Бирациональная эквивалентность. Подмногообразие $\{s_{2,2}^* \setminus s_{2,1}^* | M = 0\}$ – гладкое в дифференцируемой топологии 6-мерное (как однородное пространство группы $Sp(4)$ со стабилизатором Π_0 , $\dim(\text{St}\chi_\lambda) = 4$). Оно связно, в силу связности $Sp(4)$, см. [72], и, как гладкое связное, неприводимо, см. [105].

Так как оно не содержится в $|L| = 0$, то пересекается с ним по алгебраическому подмножеству коразмерности ≥ 1 . Следовательно, ограничения

$$\pi|_{\{s_{2,2}^* \setminus s_{2,1}^* | M=0\}}, \quad \nu|_{\{\mathcal{G}_{2,2}^* | M=0, |L| \neq 0\}}$$

определяют бирациональный изоморфизм симплектического листа Π_0 на полуалгебраическое подмножество нулевого уровня функции Казимира

$$0 = |M|^2 \stackrel{(3.6)}{=} -\text{tr}(LK + M^2)|_{-K=ML^{-1}M^\top} = -\frac{1}{2} \text{tr}(M - L^{-1}M^\top L)^2 \stackrel{(3.9)}{=}$$

$$-\frac{1}{2} \text{tr}(l^{-1}q)^2 = -\frac{1}{2} \text{tr}(l^{-1/2}ql^{-1/2})^2 = \det(l^{-1/2}ql^{-1/2}) = \det(l^{-1}q),$$

$$l = L, \quad q = LM - M^\top L,$$

определяемое неравенством $L \geq 0$.

Но $0 = \det q = (LM - M^\top L)_{12}^2 = (L_{11}M_{12} - L_{12}(M_{11} - M_{22}) - L_{22}M_{21})^2$ определяет квадратичный конус сигнатуры (3,4) в $\mathbb{R}^7$, бирационально изоморфный $\mathbb{R}^6$ [105].

Гомотопическая эквивалентность.

а. Рассмотрим деформационную ретракцию, см. парагр. 3.4 в [24], групп Ли $\text{St}(\chi_\lambda)$ в случаях III, Π_0 к их максимальным самосопряженным подгруппам: $t \rightarrow \varepsilon t$, $B \rightarrow \varepsilon B$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

По теореме о полярном разложении см. парагр. 5.2 в [23], деформационным ретрактом самосопряженной линейной алгебраической группы $G \subset GL(4)$ является ее пересечение с $O(4)$ (стягивание происходит по линейному пространству $\text{symm}_4(4) \cap \ln G$).

Рассмотрим вложение групп $j : Sp(4) \cap O(4) \rightarrow Sp(4)$.

ЛЕММА 3. Определена коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Sp(4) \cap O(4) & \xrightarrow{j} & Sp(4) \\ \downarrow p_0 & & \downarrow p \\ [Sp(4) \cap O(4)]/[St(\chi_\lambda) \cap O(4)] & \xrightarrow{j_B} & Sp(4)/St(\chi_\lambda) \end{array},$$

где вертикальные стрелки – проекции на базу расслоения, а j_B – вложение связных гладких вещественных алгебраических многообразий.

Действительно, $p \circ j$ – регулярное отображение, постоянное на смежных классах по подгруппе $\text{St}(\chi_\lambda) \cap O(4)$. Следовательно, прообраз кольца регулярных функций при отображении $p \circ j$ содержится в прообразе при отображении p_0 .

Это определяет регулярное отображение баз j_B [105]. Легко проверить, что j_B – инъективно: если бы два класса $x[\text{St}(\chi_\lambda) \cap O(4)]$ и $y[\text{St}(\chi_\lambda) \cap O(4)]$ для $x, y \in Sp(4) \cap O(4)$ содержались в одном классе $x\text{St}(\chi_\lambda) \subset Sp(4)$, то они содержались бы и в классе $x[\text{St}(\chi_\lambda) \cap O(4)]$. Группы $Sp(4)$ и $Sp(4) \cap O(4) = U(2)$ связны [72].

б. Покажем, что j_B определяет гомотопическую эквивалентность.

Лемма 4. Для гомотопической последовательности расслоения, см. парагр. 8.7, 9.7 в [96],

$$\begin{array}{ccccc} \rightarrow \pi_i(\text{St}(\chi_\lambda) \cap O(4), 1) & \rightarrow & \pi_i(Sp(4) \cap O(4), 1) & \rightarrow & \pi_i([Sp(4) \cap O(4)]/[\text{St}(\chi_\lambda) \cap O(4)], 1) \\ & \downarrow j_* & \downarrow j_* & & \downarrow (j_B)_* \\ \rightarrow \pi_i(\text{St}(\chi_\lambda), 1) & \rightarrow & \pi_i(Sp(4), 1) & \rightarrow & \pi_i(Sp(4)/\text{St}(\chi_\lambda), 1) \end{array}$$

отображения j, j_B устанавливают изоморфизм гомотопических групп при всех $i = 0, 1, 2, \dots$ (Здесь образом отмеченной точки сферы S^i является единица группы 1 или ее образ в однородном пространстве.)

Действительно, первые две вертикальные стрелки – изоморфизмы деформационной ретракции, третья является изоморфизмом в силу "5-леммы" ([96], парагр. 8.8), вытекающей из точности последовательностей.

Так как многообразия являются клеточными пространствами, см. парагр. 5 в [96], то по теореме Уайтхеда для связных клеточных пространств см. парагр. 11.5 в [96], третья стрелка приводит к гомотопической эквивалентности j_B .

в. *Вычисление гомотопического типа соответствующих компактных однородных пространств.* Рассмотрим канонический изоморфизм $i: Sp(4) \cap O(4) \ni \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \rightarrow A - iB \in U(2)$. Воспользуемся разложением

$$U(2) = SU(2) \dashv U(1) = U(1) \vdash SU(2), \quad U(1) = \text{diag}(e^{i\zeta}, 1), \quad \zeta \in \mathbb{R},$$

в полупрямое произведение групп (топологически являющимся декартовым произведением). Образы стабилизаторов имеют следующий вид.

$$\text{III) } A = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A - iB = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \subset$$

$$U(1) \vdash SU(2), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$U(2)/i(\tau[SO(2) \times \mathbb{Z}_2]) \equiv [SU(2) \dashv U(1)]/[U(1) \times \{\pm 1\}] \equiv$$

$$SU(2)/\{\pm 1\} \equiv \mathbb{R} P^3.$$

Здесь $\equiv$ – изоморфизм вещественных алгебраических многообразий (и изоморфизм колец полиномов на этих многообразиях). Второе $\equiv$ здесь и ниже вытекает из того, что для произвольного действия группы, разлагающейся в произведение подгрупп GH , множество GH -инвариантных регулярных функций может быть представлено как множество H -инвариантных среди G -инвариантных. (Действительно, если GH является группой, то такова и HG , и $GH = HG$. Это представление вытекает из постоянства вдоль потоков действий.) Но однородное пространство (факторпространство по правому действию подгруппы G) определяется кольцом право G -инвариантных функций на группе, см. парагр. 3.1.7 в [24], с точностью до изоморфизма алгебраических многообразий [105]. Поэтому, внутренние множители в $[SU(2) \dashv U(1)]/[U(1) \times \{\pm 1\}]$ сокращаются.

$$\text{II)} \quad A = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

$$A - iB = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\beta)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\beta} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta} \end{pmatrix} = U(1) \times SO(2) \\ \subset U(1) \vdash SU(2), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$U(2)/i(\tau[SO(2) \times SO(2)]) \equiv [SU(2) \dashv U(1)]/[U(1) \times SO(2)] \equiv \\ SU(2)/SO(2) \equiv \mathbb{C} P^1 = S^2,$$

Здесь предпоследнее равенство $SU(2)/\left\{\begin{pmatrix} e^{i\beta} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta} \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{C} P^1$ – расслоение Хопфа, см. лекц. 1, в [72], [96].

$$\text{II}_0) \quad A \in O(2), \quad B = 0, \quad A - iB \in O(2),$$

$$U(2)/i(\tau(O(2))) \equiv [U(1) \vdash SU(2)]/[SO(2) \dashv \left\{\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}] \equiv$$

$$([U(1) \vdash SU(2)]/SO(2))/\left\{\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \equiv$$

$$(U(1) \times [SU(2)/SO(2)])/\left\{\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = (S^1 \times S^2)/\mathbb{Z}_2,$$

так как здесь $SU(2)/SO(2) = S^2$ – также расслоение Хопфа. Наличие у инволюции $/\mathbb{Z}_2$ неподвижных точек означало бы несвободность действия всей подгруппы $i(\tau(O(2)))$ на смежном классе.

III) При совпадении положений двух из трех тел т.е. при $x_1 = x_2$, или $x_1 = 0$, или $x_2 = 0$, пространственная конфигурация 3-х тел x_1, x_2, y_1, y_2 принимает вид некомпланарной тройки векторов (в $\mathbb{R}^3$, упорядоченной), с точностью до изометрий. Но однородное пространство таких троек имеет вид $GL(3)/O(3) = \mathbb{R}^6$ по теореме о полярном разложении (и стягиваемо к ортонормированной). На

трехмерном многообразии гладкие петли, вместе с их гомотопиями можно выбрать не задевающими выброшенных точек.

II) *Аналитическая эквивалентность* в случае II симплектических листов факторпространства (по действию группы Ли $SO(2)$) пространству $T^*(S^2 \times \mathbb{R})$ установлена в парагр. 6,7 в [158]. Остается заметить, что множитель $\mathbb{Z}_2$ в $O(2) = \mathbb{Z}_2 \ltimes SO(2)$ переставляет симплектические листы: $M \rightarrow -M$.

Доказательство следствия 3 вытекает из того, что листы, как однородные пространства группы, являются гладкими многообразиями. Действительно, неравенства неотрицательной определенности ξI^{-1} являются нестрогими, и, если бы какое-либо из них достигалось (на рассматриваемой компоненте пересечения конуса и сферы), лист имел бы край.

4.4. *Доказательство предложения 3. Инвариантность* доказана в [91]).

Функциональная независимость имеет место в ограничении на подпространство $\begin{pmatrix} 0 & q \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, где $a_{N \times N}$ — диагональная матрица ранга $[n/2]$.

Полнота. Размерность симплектических листов на $s_{N,n}^*$ общего положения равна $d_{N,n} = 2nN - (n(n-1)/2 + [n/2])$. Поэтому, в силу п. б) леммы, $\dim s_{N,n}^* = (4N - n + 1)n/2$, и число независимых инвариантов на $s_{N,n}^*$ равно $\dim s_{N,n}^* - d_{N,n} = [n/2]$.

Доказательство предложения 5. Инвариантность. Для симметрической и кососимметрической форм $L, LM - M^T L$ действие (3.7) эквивалентно переходу к новому базису преобразованием из $GL(N)$. Вследствие (1.2), $\text{Ker}(LM - M^T L) \supset \text{Ker } L$. Ограничимся открытым подмножеством $\text{rk } l = n$ в $\mathcal{G}_{N,n}^*$. На нем миноры $l_{n \times n}, q_{n \times n}$ матриц $L, LM - M^T L$ являются ограничениями этих форм $L, LM - M^T L$ (без потери ранга) на некоторую трансверсаль к $\text{Ker } L$. Но при линейном преобразовании S трансверсали, или при переходе S к другой трансверсали выполнено $l \rightarrow SlS^T, q \rightarrow SqS^T$. При этом $\det(SS^T)$ сокращается в числителе и знаменателе первого слагаемого (3.8). Следовательно, полином (3.8) инвариантен. Аналогично, S сокращается в $\text{tr}(l^{-1}q)^{2k}$ (3.9).

Функциональная независимость (3.8) имеет место, например, в ограничении на подпространство $l = 1$.

Полнота. Размерность симплектических листов на $\mathcal{G}_{N,n}^*$ общего положения равна $d_{N,n}$. Поэтому, число независимых инвариантов на $\mathcal{G}_{N,n}^*$ равно $\dim \mathcal{G}_{N,n}^* - d_{N,n} = [n/2]$, что совпадает с числом ненулевых коэффициентов в (3.8).

§2.3. Продолжение общих интегрируемых случаев уравнений вращения твердого тела вокруг центра инерции до интегрируемости поступательного движения при наложении постоянной в сопутствующих осях силы тяги

Пусть трехмерное твердое тело шаровой формы движется в идеальной однородной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности, при безвихревом обтекании. Пусть O_s – центр шаровой формы тела, O – центр масс тела и присоединенной массы, мысленно закрепленной в точке O_s . Пусть на тело действуют сила тяжести и сила тяги $\kappa \overrightarrow{OO_s}$, где $\kappa \in \mathbb{R}$. Пусть вектор $\overrightarrow{OO_s}$ находится в условиях Лагранжа или Ковалевской [5] по отношению к тензору инерции системы "тело плюс жидкость", отвечающему вращениям относительно центра инерции O системы. Вращательное движение тела отделяется и такое же, как при $\kappa = 0$. Оно было проинтегрировано классиками, см. [5].

Установлена интегрируемость по Лиувиллю полного (вращательно-поступательного) движения тела благодаря представлению уравнений движения в виде уравнений Эйлера – Пуанкаре – Четаева [46, 12] на построенной в разд. 1 десятимерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и использованию метода цепочек подалгебр Трофимова [90].

Построение охватывает аналогичное расширение интегрируемых случаев Реймана – Семенова-Тян-Шанского (волчка Ковалевской в двух силовых полях) см. парагр. II.6 в [11], парагр. II.7.8 в [68]; Боголюбенского (полностью динамически симметричного тела в трех силовых полях), см. [10]; n -мерного волчка Лагранжа, см. [8, 91, 68]; n -мерного обобщенного волчка Ковалевской в m однородных силовых полях различной природы при $n \geq 2$, $m \leq n$, см. [70], [68]. Во все перечисленные интегрируемые случаи добавляется действующая в центре инерции постоянная в сопутствующих осях сила, являющаяся произвольной линейной комбинацией радиус-векторов центров полей с началом в центре инерции.

Конфигурационное пространство задачи – группа Ли $\mathbb{R}^n \rtimes SO(n)$ движений n -мерного евклидова пространства.

Предложение 1. а) Ненулевая сила тяги не является потенциальной на конфигурационном пространстве $\mathbb{R}^n \rtimes SO(n)$.

б) Пуассонова структура, сохраняемая уравнениями движения не является натуральной, если сила тяги отлична от нуля.

1. *Вывод уравнений и их представление.* Пусть для $n = 2, 3, \dots$ тяжелое n -мерное твердое тело шаровой формы совершает вращательно-поступательное движение в идеальной однородной несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности, при потенциальном обтекании.

Пусть v_b – скорость центра масс O_b тела, v_s – скорость центра O_s шаровой формы, $\omega = \|\omega_{kl}\|$ – тензор угловой скорости, m_b и m_s – массы тела и присоединенная, см. [88], J – коэффициент присоединенной массы, отвечающий вращениям шаровой формы тела относительно ее центра O_s , $\text{diag}(I_1, \dots, I_n)$ – гиперплоскостной тензор

инерции тела относительно точки O_b . То есть, I_i – интеграл по телу произведения плотности тела в текущей точке на квадрат расстояния от текущей точки до i -ой главной гиперплоскости в точке O_b . Тогда кинетические энергии тела и жидкости имеют вид:

$$T_b = \frac{1}{2}(m_b v_b^2 + \sum_{k < l}^n (I_k + I_l) \omega_{kl}^2), \quad T_f = \frac{1}{2} m_s v_s^2 - \frac{1}{4} J \operatorname{tr} \omega^2. \quad (1.1)$$

Пусть v – скорость центра инерции O . Перейдем в квадратичных формах (1.1) к скоростям (v, ω) . Для этого произведем в квадратичных формах (1.1) подстановки

$$v_b = v + \omega \overrightarrow{OO_b}, \quad v_s = v + \omega \overrightarrow{OO_s}.$$

Воспользуемся условием $m_b \overrightarrow{OO_b} + m_s \overrightarrow{OO_s} = 0$, вытекающим из определения центра инерции O . Из этого условия вытекает, что в $T_b + T_f$ билинейные по (v, ω) слагаемые обращаются в нуль. Положим $j_{kl,pq} := \frac{I_k + I_l + J}{2} \delta_{kp} \delta_{lq} + m_b (\overrightarrow{OO_b})_k (\overrightarrow{OO_b})_p \delta_{lq} + m_s (\overrightarrow{OO_s})_k (\overrightarrow{OO_s})_p \delta_{lq}$, где δ_{ip} – символ Кронекера. Тогда $j_{kl,pq}$ имеют смысл коэффициентов инерции тела с присоединенной массой, отвечающих вращениям относительно точки O . Отметим, что тензор инерции $j_{kl,pq} - \frac{J}{2} \delta_{kp} \delta_{lq}$ соответствует n -мерному твердому телу с присоединенной в точке O_s массой и в некоторых осях имеет стандартный диагональный вид [61]. Положим

$$M_{kl} = \sum_{1 \leq p \neq q \leq n} j_{kl,pq} \omega_{pq}, \quad p_k = (m_b + m_s) v_k, \quad M = \|M_{kl}\|, \quad p = (p_1, \dots, p_n).$$

Тогда M, p имеют смысл суммарных момента и импульса системы "тело плюс жидкость", момент рассматривается относительно точки O . Отметим, что силовые поля, не ограничивая общности, можно считать ортогональными, см. §3 главы 2 в [16]. Пусть $\gamma^1, \dots, \gamma^n$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, состоящий из единичных векторов направлений силовых полей. Не ограничивая общности, предполагаем, что 1-ое поле – γ^1 – силы тяжести. Пусть x_i – неподвижная координата центра инерции O вдоль направления i -го поля: $-\partial/\partial x_i = \gamma^i$. Пусть g_i – ускорение движения точки под действием i -го силового поля; m_i – суммарный "заряд" i -го силового поля, в том числе, $m_1 = m_b - m_f$, где m_f – масса вытесненного объема жидкости. Пусть $r^i = \overrightarrow{OO_i}$ – радиус-вектор центра O_i i -ых "зарядов", в том числе $m_1 r^1 = m_b \overrightarrow{OO_b} - m_f \overrightarrow{OO_s}$. Отметим, что первоначально определяется момент $m_i r^i$, и лишь при $m_i \neq 0$ – радиус-вектор r^i . Тогда сумма кинетических энергий тела и жидкости $T_b + T_f$ и потенциальной энергии тела в m однородных силовых полях различной природы при $m \leq n$ принимает вид:

$$H_{\text{мех}} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} M \omega + \frac{p^2}{2(m_b + m_s)} + \sum_{i=1}^m (m_i x_i - \langle m_i r^i, \gamma^i \rangle) g_i.$$

Пусть $[M, \omega] = M\omega - \omega M$ – коммутатор матриц, $r \wedge \gamma = r \otimes \gamma^T - \gamma \otimes r^T$. Тогда величина $(-m_i g_i r^i) \wedge \gamma^i$ есть момент i -го силового поля относительно точки O . Пусть на тело действует дополнительная постоянная в сопутствующих осях сила тяги $R = -\sum_{i=1}^m \kappa^i m_i g_i r^i$, где $\kappa^i = \text{const}$, приложенная в центре инерции O . Уравнения изменения "суммарных" момента и импульса системы "тело плюс жидкость", см. парагр. VIII.16 в [88], имеют вид:

$$\dot{M} = [M, \omega] - \sum_{i=1}^m m_i g_i r^i \wedge \gamma^i, \quad (1.2)$$

$$\dot{\gamma}^i = -\omega \gamma^i, \quad i = 1, \dots, m, \quad \dot{p} = -\omega p + R + \sum_{i=1}^m m_i g_i \gamma^i.$$

ТЕОРЕМА 1. Уравнения (1.2) представляются в виде уравнений Эйлера – Пуанкаре $\dot{\xi} = \{\xi, H\}$ с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4} \text{tr } M\omega + \sum_{i=1}^m \left(\frac{m_i (\gamma^i)^2}{\kappa^i} - \langle m_i r^i, \gamma^i \rangle \right) g_i$$

на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ с коммутационными соотношениями:

$$[M_{12}, M_{23}] = M_{13}, \dots, \quad [M_{12}, \gamma_2^i] = \gamma_1^i, \dots, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.3)$$

$$[M_{12}, p_2] = p_1, \dots, \quad [\gamma_1^i, p_1] = \kappa^i, \dots$$

Здесь многоточие обозначает всевозможные перестановки нижних индексов $1, \dots, n$; остальные коммутаторы равны нулю.

Доказательство теоремы 1 получается непосредственной подстановкой.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет вид полупрямой суммы

$$\mathfrak{g} = \left(\left(\bigoplus_{i=1}^{m+1} \mathbb{R}^n \right) + \mathbb{R}^m \right) \ltimes so(n),$$

в которой радикал разлагается в прямую сумму центра $\mathbb{R}^m$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и линейного дополнения $\bigoplus_{i=1}^{m+1} \mathbb{R}^n$ к центру в радикале, центр радикала совпадает с коммутантом. Представление подалгебры Леви $so(n)$ на радикале индуцируется стандартным на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

2. Интегралы движения. Инвариантами алгебры Ли будем называть инварианты коприсоединенного представления соответствующей группы Ли. Согласно [91] набор функций на сопряженном пространстве к алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется полным, если среди ограничений его элементов на орбиту O_g^* общего положения коприсоединенного представления найдется $\frac{1}{2} \dim O_g^*$ функционально независимых.

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Разложим по степеням λ определитель:

$$\det \begin{vmatrix} M - \lambda & p & \gamma^1 & \dots & \gamma^m \\ -p^\top & 0 & \kappa^1 & \dots & \kappa^m \\ -\gamma^{1\top} & -\kappa^1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\gamma^{m\top} & -\kappa^1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor} \lambda^{n-m+1-2k} f_k(M, \gamma, p, \kappa), \quad (2.1)$$

где $\kappa = (\kappa^1, \dots, \kappa^m)$.

Предложение 2. Полный функционально независимый набор инвариантов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ может быть выбран в виде

$$f_1(M, \gamma, p, \kappa), \dots, f_{\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor}(M, \gamma, p, \kappa) \quad (2.2)$$

$$\kappa^1, \dots, \kappa^m, \quad \langle \kappa^1 \gamma^i - \kappa^i \gamma^1, \kappa^1 \gamma^j - \kappa^j \gamma^1 \rangle, \quad 2 \leq i \leq j \leq m,$$

где $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^m)$.

Пусть $M_{ij} = -\sum_k \varepsilon_{ijk} M_k$, где ε_{ijk} – символ Леви-Чивита. При $n = 3$ набор (2.2) состоит из единственного инварианта

$$\text{при } m = 1: \quad (M - \gamma^1 \times p / \kappa^1)^2,$$

$$\text{при } m = 2: \quad \langle M, \kappa^1 \gamma^2 - \kappa^2 \gamma^1 \rangle - \langle p, \gamma^1 \times \gamma^2 \rangle.$$

ТЕОРЕМА 2. Для каждого интегрируемого во всем пространстве $((\bigoplus^m \mathbb{R}^n) \rtimes so(n))^*$ случая вращательного движения уравнений (1.2) полный коммутативный набор интегралов, дополненный инвариантами алгебры Ли $(\bigoplus^m \mathbb{R}^n) \rtimes so(n)$, приводит к полному коммутативному набору на пространстве $\mathfrak{g}^*$.

3. Пуассонов изоморфизм. Алгебру Пуассона рациональных функций от элементов алгебры Ли $\mathfrak{f}$ обозначим через $P(\mathfrak{f})$.

Предложение 3. Имеет место изоморфизм алгебр Ли – Пуассона $P(\mathfrak{g}) \cong P(\mathfrak{h})$, где

$$\mathfrak{h} = ((\bigoplus^{m-1} \mathbb{R}^n) \rtimes so(n)) \oplus H_n \oplus \mathbb{R}^{m-1}$$

– прямая сумма алгебр Ли, H_n является $(2n + 1)$ -мерной алгеброй Гейзенберга, $\mathbb{R}^{m-1}$ – коммутативная подалгебра Ли. Подалгебра $\mathfrak{h} \subset P(\mathfrak{g})$ может быть выбрана в виде прямой суммы алгебр Ли, порожденных наборами элементов в круглых скобках

$$(\{N_{kl}, \delta_k^2, \dots, \delta_k^m \mid 1 \leq k, l \leq n\}) \oplus (\{\gamma_k^1, p_k \mid 1 \leq k \leq n\}, \kappa^1) \oplus (\kappa^2, \dots, \kappa^m), \quad (3.1)$$

где элемент коалгебры $(N, \delta^2, \dots, \delta^m) \in ((\bigoplus^{m-1} \mathbb{R}^n) \rtimes so(n))^*$ определяется через элемент коалгебры $(M, \gamma^1, \dots, \gamma^m, p, \kappa) \in (((\bigoplus^{m+1} \mathbb{R}^n) +$

$\mathbb{R}^m) \dashv so(n))^*$ пуассоновым рациональным отображением коалгебр

$$N = M + \frac{\gamma^1 \wedge p}{\kappa^1}, \quad \delta^i = \gamma^i - \frac{\kappa^i}{\kappa^1} \gamma^1, \quad i = 2, \dots, m. \quad (3.2)$$

Первое прямое слагаемое в (3.1) – алгебра Ли $(\bigoplus^{m-1} \mathbb{R}^n) \dashv so(n)$:

$$\{N_{12}, N_{23}\} = N_{13}, \dots, \quad \{N_{12}, \delta_2^i\} = \delta_1^i, \dots$$

Изоморфизм используется при вычислении инвариантов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, являющихся дополнительными интегралами движения твердого тела. Обобщением изоморфизма $P(\mathfrak{g}) \cong P(\mathfrak{h})$ послужили доказательства гипотез Фоменко – Мищенко, см. гл. 1, и Гельфанда – Кириллова после конечных расширений тел, не вошедшее в диссертацию.

4. *Механические реализации.* Предположим, что в постановке разд. 1 твердое тело является

- а) непроводящим ферромагнетиком,
- б) непроводящим ферромагнетиком с сегнетоэлектрической поляризацией).

Предположим, что движение [возможно, в отсутствие жидкости] происходит

- а) в постоянном однородном магнитном поле,
- б) в постоянном однородном электромагнитном поле.

Рассматривается квазистатическое приближение. В случае б) квадратичная компонента интегральной по телу собственной свободной энергии поляризации предполагается шаровой, см. парагр. 10-11, 32, 63-64, 76, в [57]; [41]. Уравнения движения тела в предположениях а) или б) имеют вид (1.2), где $n = 3$; $m = 1$ или $m = 2$. Ограничимся случаем $m = 1$.

Пример 1. Движение заряженного твердого тела с нулевым суммарным зарядом в однородном электрическом поле $g_1 \gamma^1$ с силой тяги, приложенной в центре масс O параллельно дипольному моменту $m_1 r^1$. При этом слагаемое $(\gamma^1)^2 / \kappa^1$ в гамильтониане отсутствует: $m_1 = 0$. Динамика тела описывается гамильтоновой системой с четырьмя степенями свободы на уровне функций Казимира алгебры $\mathfrak{g}$, имеющих вид: $\kappa^1, (M - \gamma^1 \times p / \kappa^1)^2$.

Пример 2. Уравнения движения тяжелого твердого тела с приложенной в центре масс постоянной тягой в однородном поле силы тяжести получаются из (1.2) при $r^1 \rightarrow \varepsilon r^1, \quad \kappa^1 \rightarrow \varepsilon^{-1} \kappa^1, \quad \varepsilon \rightarrow 0$. При этом предельном переходе при $n \geq 3$ данная пуассонова структура (1.3) уравнений (1.2) разрушается, но функции Казимира алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пределе приводят к дополнительным интегралам, а пуассонова структура алгебры Ли $\mathfrak{g}$ вместе с функциями Казимира алгебры Ли $\mathbb{R}^n \dashv so(n)$ – к дополнительным полям симметрии. Полученные уравнения при $n = 3$ имеют инвариантную меру, интегралы $\langle aM, M \rangle, M^2, \gamma^2, \langle M, \gamma \rangle$, дополнительные поля симметрии

$\langle \gamma, \partial/\partial p \rangle$, $\langle M, \partial/\partial p \rangle$. Если $R \parallel r^1$ находится в условиях Лагранжа или Ковалевской по отношению к моментам инерции относительно центра инерции, уравнения являются предельными к интегрируемым по Лиувиллю. Они интегрируемы по Ли, см. разд. 4.1 в [5], на уровне 5-и интегралов посредством 3-х полей симметрии.

5. *Формулы для инвариантов.* Разложим по степеням λ определитель:

$$\det \begin{vmatrix} M - \lambda & \gamma^1 & \dots & \gamma^m \\ -\gamma^{1\top} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\gamma^{m\top} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} \lambda^{n-m-2k} e_k(M, \gamma). \quad (5.1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Полный функционально независимый набор инвариантов алгебры $(\bigoplus^m \mathbb{R}^n) \rtimes so(n)$ может быть выбран в виде

$$e_1(M, \gamma), \dots, e_{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor}(M, \gamma), \quad (5.2)$$

$$\langle \gamma^i, \gamma^j \rangle, \quad 1 \leq i \leq j \leq n. \quad (5.3)$$

Пусть π – ортогональное дополнение к $\{\gamma^1, \dots, \gamma^m\}$ в $\mathbb{R}^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Инварианты (5.1) могут быть записаны как инварианты кососимметрической формы $\langle Mx, y \rangle|_\pi$ относительно ограничения $\langle x, y \rangle|_\pi$ евклидовой структуры.

6. *Доказательство предложения 4. Инвариантность.* Коприсоединенное антипредставление группы Ли $(\bigoplus^m \mathbb{R}^n) \rtimes SO(n)$ записывается в виде

$$Ad_{T \rtimes S}^*(M, \gamma) = (S^{-1}(M + T \wedge \gamma)S, S^{-1}\gamma)$$

или

$$Ad_{T \rtimes S}^* \begin{pmatrix} M & \gamma \\ -\gamma^\top & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & \gamma \\ -\gamma^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из последней формулы и из

$$\begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

вытекает, что определитель (5.1) является инвариантом алгебры Ли $(\bigoplus^m \mathbb{R}^n) \rtimes so(n)$. В случае $m = 1$ другая форма записи инвариантов получена в [92, 14].

Функциональная независимость объединения наборов (5.3) и (5.2) вытекает из того, что в ограничении на подпространство

$$L = \left\{ \left(\bigoplus^m \mathbb{R}^n \right) \rtimes so(n) \right\}^* \mid \gamma_k^i = 0 \text{ при } k > m \}$$

определитель (5.1) – блочный и равен

$$|\gamma^1 \wedge \dots \wedge \gamma^m|^2 \det \|M - \lambda\|_{m < i, j \leq n}. \quad (6.1)$$

Функциональная независимость множества ненулевых коэффициентов при степенях λ в определителе (6.1) вытекает из приведения кососимметрической матрицы $M_{m < i, j \leq n}$ к каноническому виду ортогональным преобразованием, см. [61].

Полнота набора инвариантов (5.1) вытекает из теоремы Раиса [150], утверждающей, что число дополнительных к инвариантам (5.3) представления алгебры Ли $so(n)$ инвариантов алгебры $(\bigoplus^m \mathbb{R}^n) \rtimes so(n)$ – есть число инвариантов стационарной подалгебры общего элемента $\bigoplus^m \mathbb{R}^n$, изоморфной $so(n - m)$.

Доказательство замечания 2. Действием $Ad_{SO(n)}^*$ матрица γ приводится к виду, в котором

$\gamma_k^i = 0$ при $k > m$. Тогда определитель (5.1) принимает вид (6.1), инварианты которого допускают указанную в замечании интерпретацию.

Доказательство предложения 2. Инварианты первого слагаемого в (3.1) получаются из инвариантов (5.1) $_{m \rightarrow m-1}$ подстановкой (3.2):

$$\det \left\| \begin{array}{cc} M + \frac{\gamma^1 \wedge p}{\kappa^1} - \lambda & \delta \\ -\delta^\top & 0 \end{array} \right\| = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-m+1}{2} \rfloor} \lambda^{n-m+1-2k} \tilde{e}_k(M + \frac{\gamma^1 \wedge p}{\kappa^1}, \delta(\gamma, \kappa)), \quad (6.2)$$

где $\delta = (\delta^2, \dots, \delta^m)$, $\tilde{e}(\cdot, \cdot)$ – те же функции $e(\cdot, \cdot)$, но взятые для пары $(n, m-1)$ вместо (n, m) . Но определитель (2.1) после вычитания из k -го и $(n+1+i)$ -го ($1 \leq k \leq n$, $1 \leq i \leq m$) столбцов матрицы (2.1), $(n+2)$ -го, умноженного, соответственно, на $-p_k/\kappa^1$ и κ^i/κ^1 , и аналогичной операции над строками принимает вид

$$\det \left\| \begin{array}{cccccc} M + \frac{\gamma^1 \wedge p}{\kappa^1} - \lambda & 0 & \gamma^1 & \delta^2 & \dots & \delta^m \\ 0 & 0 & \kappa^1 & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma^{1\top} & -\kappa^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\delta^{2\top} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\delta^{m\top} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|$$

и разлагается в произведение определителя (6.2) и $(\kappa^1)^2$.

ЛЕММА 1.

$$\text{rk} \frac{\partial(\tilde{e}_1(M + \frac{\gamma^1 \wedge p}{\kappa^1}, \delta(\gamma, \kappa)), \dots, \tilde{e}_{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor}(M + \frac{\gamma^1 \wedge p}{\kappa^1}, \delta(\gamma, \kappa)))}{\partial(p_m, \dots, p_n)} = \lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor.$$

Доказательство леммы 1. В ограничении на подпространство $\gamma_k^i = 0$, $k > m$, определитель (6.2) – блочный и записывается в виде:

$$(\delta^2 \wedge \dots \wedge \delta^m)^2 \det \|\bar{M} + \bar{\gamma}^1 \wedge \bar{p}/\kappa^1 - \lambda\|. \quad (6.3)$$

Здесь $\bar{M}, \bar{\gamma}^1, \bar{p}$ – блоки матриц, отвечающие интервалу индексов $m \leq k, l \leq n$. Функциональная независимость по $p_m, \dots, p_n$ инвариантов определителя в (6.3) вытекает из линейной независимости векторов

$$\left. \frac{\partial \operatorname{tr}(\bar{M} + \bar{\gamma}^1 \wedge \bar{p}/\kappa^1)^{2k}}{\partial \bar{p}} \right|_{p=0} = \frac{2k}{\kappa^1} \frac{\partial \operatorname{tr}(\bar{M}^{2k-1}(\bar{\gamma}^1 \wedge \bar{p}))}{\partial \bar{p}} =$$

$$\frac{4k}{\kappa^1} \bar{M}^{2k-1} \bar{\gamma}^1, \quad k = 1, \dots, \left[\frac{n-m+1}{2} \right]$$

в $\mathbb{R}^{n-m+1}$ для $\bar{M}, \bar{\gamma}^1$ общего положения.

Доказательство теоремы 2. Дополним коммутативный полный функционально независимый набор алгебры Ли $(\bigoplus^m \mathbb{R}^n) \dashv so(n)$ частью инвариантов алгебры Ли $(\bigoplus^m \mathbb{R}^n) \dashv so(n)$: функциями (5.2),

$$\langle \gamma^1, \gamma^1 \rangle, \dots, \langle \gamma^1, \gamma^m \rangle. \quad (6.4)$$

Коммутативность пополненного набора вытекает из того, что $(\bigoplus^m \mathbb{R}^n) \dashv so(n)$ – подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$.

Функциональная независимость пополненного набора в ограничении на орбиту O_g^* общего положения в пространстве $\mathfrak{g}^*$ вытекает из независимости функций пополненного набора от $p_1, \dots, p_n$, леммы 1 и предложения 4.

Полнота пополненного набора на $\mathfrak{g}^*$ вытекает из того, что ввиду предложений 2 и 4

$$\frac{1}{2}(\dim O_g^* - \dim O_E^*) = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} - m - (\frac{(m-1)m}{2} + \left[\frac{n-m+1}{2} \right]) -$$

$$(\dim E - (\frac{m(m+1)}{2} + \left[\frac{n-m}{2} \right])) =$$

$$\frac{1}{2}(n + m + \left[\frac{n-m}{2} \right] - \left[\frac{n-m+1}{2} \right]) = \left[\frac{n-m}{2} \right] + m$$

– есть число добавленных инвариантов (5.2), (6.4).

7. Доказательство предложения 1. а) Элементарная работа силы тяги на возможном перемещении тела имеет вид $\langle dx, QR \rangle$, где $(x, Q) \in \mathbb{R}^n \times SO(n)$, и не является полным дифференциалом на конфигурационном многообразии $\mathbb{R}^n \times SO(n)$ при $R \neq 0$, $n \geq 2$.

б) В натуральной пуассоновой структуре выполнено $[\gamma_k^i, p_l] = 0$, $1 \leq k, l, i \leq n$,

8. Доказательство предложения 3.

ЛЕММА 1. Функции

$$-\frac{\gamma_k^1 p_l - \gamma_l^1 p_k}{\kappa^1}, \quad \gamma_q^1, \quad 1 \leq k, l, q \leq n$$

порождают подалгебру Ли $so(n) \dashv \mathbb{R}^n$ в пуассоновой алгебре $P(\mathfrak{g})$.

Действительно,

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\gamma_1^1 p_2 - \gamma_2^1 p_1}{\kappa^1}, \frac{\gamma_2^1 p_3 - \gamma_3^1 p_2}{\kappa^1} \right\} &= -\frac{\gamma_1^1 p_3 - \gamma_3^1 p_1}{\kappa^1}, \quad \dots \\ \left\{ -\frac{\gamma_1^1 p_2 - \gamma_2^1 p_1}{\kappa^1}, \gamma_2^i \right\} &= \frac{\kappa^i}{\kappa^1} \gamma_1^1, \quad \dots \quad 1 \leq i \leq m, \end{aligned} \quad (8.1)$$

где многоточие обозначает всевозможные перестановки нижних индексов, а остальные коммутаторы равны нулю.

ЛЕММА 2. Функции

$$M_{qr}, \quad \Gamma_{kl} = -\frac{\gamma_k^1 p_l - \gamma_l^1 p_k}{\kappa^1}, \quad 1 \leq k, l, q, r \leq n$$

(а) порождают подалгебру Ли $so(n) \dashv_{ad} so(n)$ – полупрямую сумму алгебр Ли по присоединенному представлению,

(б) изоморфную прямой сумме $so(n) \oplus so(n)$ при переходе к порождающим

$$N_{qr} = M_{qr} - \Gamma_{qr}, \quad \Gamma_{kl}, \quad 1 \leq k, l, q, r \leq n.$$

Доказательство. (а) Рассмотрим подгруппу $SO(n)$ группы Ли $\exp \mathfrak{g}$, отвечающую подалгебре, порожденной $\{M_{qr}, \quad 1 \leq q, r \leq n\}$ в $\mathfrak{g}$. Присоединенное представление Ad подгруппы Ли $SO(n)$ продолжается с $\mathfrak{g}$ на $P(\mathfrak{g})$:

$$\gamma^1 \wedge p \rightarrow (S\gamma^1) \wedge (Sp) = S(\gamma^1 \wedge p)S^{-1}, \quad S \in SO(n),$$

что, ввиду леммы 1, доказывает (а).

(б) Пользуясь (а), имеем

$$\{M_{12} - \Gamma_{12}, \Gamma_{23}\} = \Gamma_{13} - \Gamma_{13} = 0, \quad \dots$$

$$\{M_{12} - \Gamma_{12}, M_{23} - \Gamma_{23}\} = M_{13} - \Gamma_{13} - \Gamma_{13} + \Gamma_{13}, \quad \dots$$

что доказывает лемму 2 и, одновременно, первое коммутационное соотношение (3.2): $\{N_{12}, N_{23}\} = N_{13}$, ...

Вычитая из $\{M_{12}, \gamma_2^i\} = \gamma_1^i$ второе тождество (8.1), получаем

$$\{N_{12}, \gamma_2^i\} = \gamma_1^i - \frac{\kappa^i}{\kappa^1} \gamma_1^1 = \delta_1^i, \quad \dots, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (8.2)$$

В частности, $\{N_{12}, \gamma_2^1\} = 0, \dots$ То есть, $\gamma_l^1, 1 \leq l \leq n$ коммутирует с первой подалгеброй в прямой сумме (3.1). Отсюда и из (8.2) вытекает второе коммутационное соотношение: $\{N_{12}, \delta_2^i\} = \delta_1^i, \dots$

Аналогично, из $\{M_{12}, p_2\} = p_1$ и

$$\left\{-\frac{\gamma_1^1 p_2 - \gamma_2^1 p_1}{\kappa^1}, p_2\right\} = p_1, \dots$$

получаем, что $p_l, 1 \leq l \leq n$ коммутирует с первой подалгеброй в прямой сумме (3.1).

§2.4. Интегрируемость уравновешенных центрированных равночастотных упругих вибраций при свободном вращении

Установлена интегрируемость механической системы ниже, состоящей из твердых и линейно упругих тел. В этой системе после редукции по Раусу уравнение Гамильтона – Якоби разделяется в эллиптических координатах. Решения находятся в θ -функциях Римана от n переменных. Попутно получена формула для кинетической энергии цилиндра, упругого вдоль образующей и абсолютно жесткого в поперечном направлении с использованием теоремы Кенига для бесконечно-малых цилиндров при разбиении вдоль образующей.

1. *Постановка задачи и основной результат.* Аналогично понятию твердого тела введем понятие тела, линейно упругого в выделенном направлении с одной степенью свободы деформации и абсолютно жесткого в поперечном направлении. Так определенное линейно упругое тело может рассматриваться как бесконечная система материальных точек, на которые наложены голономные связи.

Пусть твердое тело ("турбина") допускает свободное вращение вокруг неподвижной вертикальной оси OE . Пусть в турбине имеется n гладких цилиндрических желобов со скользящими вдоль них твердыми телами, см. фиг. 1. Предположим выполнение следующих пяти условий.

1⁰. Возможные траектории центров масс тел относительно турбины – прямые $l_i, i = 1, \dots, n$, проходящие через прямую OE (*центрированность*).

2⁰. Движение происходит в однородном поле силы тяжести с ускорением g , в отсутствии других внешних сил.

3⁰. Каждое тело прикреплено к турбине однородным цилиндром с осью l_i , т.е. прямая l_i проходит через центр масс цилиндра параллельно образующей. Цилиндр является линейно упругим вдоль l_i и абсолютно жестким в поперечном направлении, имеет одну степень свободы.

При неподвижной турбине

4⁰. Частоты колебаний тел равны (*равночастотность*).

5⁰. Для каждого желоба равновесие тела с цилиндром достигается в том их положении, в котором минимален их суммарный момент инерции относительно OE (при мыслимом отсутствии оснований у цилиндрических желобов, *уравновешенность*).

Тогда

А. После редукции по Раусу по углу вращения вокруг OE лагранжиан данной системы имеет вид Якоби – Штеккеля, уравнение Гамильтона – Якоби разделяется в эллиптических координатах в $\mathbb{R}^n$.

Б. Угловая скорость вращения и квадраты расстояний центров масс тел до оси вращения выражаются в виде рациональных функций от θ -функций Римана с характеристиками от n переменных. Аргумент этих θ -функций – векторный полином первой степени от нового времени

$$\tau = \int \frac{dt}{I},$$

где t – исходное время, I – момент инерции системы относительно оси OE . Опорные реакции в подшипниках, действующие на ось OE выражаются в алгебраических функциях от этих θ -функций и производных этих θ -функций порядка ≤ 2 .

В. Интегрируемость обобщается на случай наличия в телах и турбине свободно вращающихся роторов при выполнении условия:

6⁰. Если роторы или сами тела допускают свободное вращение вокруг некоторых осей, они должны быть относительно этих осей уравновешены и динамически симметричны.

Данная модель линейно упругого тела с одной степенью свободы деформации применима для пружинящего цилиндра в предположении малости массы цилиндра по сравнению с массой тела. Ее применимость в предположении соизмеримых масс определяется тем, что для цилиндра, одно основание которого закреплено, а другое свободно, амплитуды колебаний собственных частот убывают обратно пропорционально квадратам нечетных чисел.

2. *Простейший случай.* Предположим сначала, что демпфирующие цилиндры невесомы и тела могут совершать лишь поступательное движение относительно турбины. Тогда, по теореме Кенига, кинетические энергии турбины и i -го тела имеют вид

$$\frac{1}{2}I_0\psi'^2, \quad \frac{1}{2}(m_i v_i^2 + I_i \psi'^2) \quad (2.1)$$

Штрих означает производную по времени t , ψ – угол поворота турбины, m_i – масса i -го тела, $v_i = \overrightarrow{OC'_i}$ – скорость его центра масс C_i , I_0 – момент инерции турбины относительно OE , I_i – тела относительно оси, проходящей через его центр масс параллельно OE .

Пусть β_i – угол между прямыми OE и l_i , удовлетворяющий условию $0 \leq \beta_i \leq \pi/2$, см. фиг. 1, пусть z_i – вертикальная координата центра масс C_i с началом в $l_i \cap OE$. Здесь предполагается, что направления векторов $\overrightarrow{OE}, \partial/\partial z_i$ противоположны направлению силы тяжести. Пусть ρ_i – горизонтальная координата центра масс C_i вдоль l_i , являющаяся ориентированным расстоянием до оси OE , где ориентация такова, что при движении тела координата z_i не убывает одновременно с ρ_i , см. фиг. 2, 3. Тогда $z_i = \rho_i \operatorname{ctg} \beta_i$,

$$v_i^2 = \frac{\rho_i'^2}{\sin^2 \beta_i} + \rho_i^2 \psi'^2 \quad (2.2)$$

Потенциальная энергия i -го тела с i -ым цилиндром имеет вид

$$\frac{k_i}{2} \left(\frac{\rho_i - B_i - A_i}{\sin \beta_i} \right)^2 + m_i g z_i, \quad (2.3)$$

где k_i – жесткость i -го цилиндра вдоль l_i , $0 \geq A_i$ – та же горизонтальная координата точки пересечения прямой l_i с ортогональной l_i плоскостью закрепления цилиндра в турбине, $\rho_i - B_i$ – та же горизонтальная координата точки пересечения прямой l_i с ортогональной l_i плоскостью закрепления цилиндра в теле. Здесь $0 \leq B_i$, см.

фиг. 2, 3. Суммарный момент инерции i -го тела и i -го цилиндра относительно OE достигает минимума при $\rho_i = 0$. В силу равенства $z_i = \rho_i \operatorname{ctg} \beta_i$ потенциальная энергия i -го тела с i -ым цилиндром является квадратичной формой от ρ_i . В силу условия 5⁰ эта квадратичная форма достигает минимума при $\rho_i = 0$, то есть, имеет вид

$$\frac{k_i}{2} \left(\frac{\rho_i}{\sin \beta_i} \right)^2,$$

где несущественная постоянная опущена.

Лагранжиан турбины с телами и цилиндрами записывается в виде

$$2L = \sum \frac{m_i \rho_i'^2}{\sin^2 \beta_i} + (I + \sum m_i \rho_i^2) \psi'^2 - \sum k_i \left(\frac{\rho_i}{\sin \beta_i} \right)^2, \quad (2.4)$$

где $I = I_0 + \sum I_i$. Здесь и всюду далее, если не оговорено иное, суммирование ведется от $i = 1$ до $i = n$.

3. *Учет массивности пружинящего цилиндра.* Пусть Λ_i – расстояние между основаниями i -го упругого цилиндра в свободном состоянии, пусть $0 \leq \xi_i \leq \Lambda_i$ – лагранжева координата вдоль образующей i -го упругого цилиндра, см. фиг. 2, пусть $S(\xi_i)$ – ортогональное образующей сечение i -го цилиндра, имеющее лагранжеву координату ξ_i , пусть $r_i(\xi_i, t)$ – горизонтальная координата точки пересечения $S(\xi_i)$ и l_i , являющаяся ориентированным расстоянием до оси OE , где ориентация такова, что совпадает с ориентацией координаты z_i при ортогональной проекции образующей i -го упругого цилиндра на ось OE .

В следующем предложении требования однородности и линейной упругости, касающиеся i -го цилиндра, могут быть опущены. Это предложение справедливо для произвольного цилиндра с, вообще говоря, бесконечным числом степеней свободы, абсолютно жесткого в поперечном направлении, с кусочно непрерывной плотностью.

Пусть η_i, ζ_i – декартовы ортогональные координаты в сечении $S(0)$, равные нулю в точке $S(0) \cap l_i$, такие, что координата η_i горизонтальна. Продолжим декартовы ортогональные координаты η_i, ζ_i в сечении $S(0)$ до лагранжевых декартовых ортогональных координат ξ_i, η_i, ζ_i в i -ом цилиндре. Пусть $\sigma_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ – плотность недеформированного i -го цилиндра, пусть $\sigma_i(\xi_i) = \int_{S(\xi_i)} \sigma_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) d\eta_i d\zeta_i$, тогда $\sigma_i(\xi_i)$ имеет смысл одномерной плотности цилиндра вдоль оси l_i , пусть $j_i(\xi_i) = \int_{S(\xi_i)} (\eta_i^2 + \zeta_i^2 \cos^2 \beta_i) \sigma_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) d\eta_i d\zeta_i$, тогда $j_i(\xi_i)$ имеет смысл момента инерции сечения $S(\xi_i)$ относительно оси, параллельной OE и проходящей через точку $S(\xi_i) \cap l_i$.

Предложение. Кинетическая энергия i -го упругого цилиндра имеет вид:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\Lambda_i} \left[\sigma_i(\xi_i) \left(\frac{\partial r_i(\xi_i, t)}{\partial t \sin \beta_i} \right)^2 + (j_i(\xi_i) + \sigma_i(\xi_i) r_i(\xi_i, t)^2) \psi'^2 \right] d\xi_i \quad (3.1)$$

Доказательство предложения. Разбивая цилиндр вдоль l_i на цилиндры с расстояниями между основаниями $\leq \varepsilon$ и считая их твердыми телами, получаем ε -приближение для кинетической энергии упругого цилиндра. Суммируя кинетическую энергию этих цилиндров разбиения, вычисленную аналогично (2.1), (2.2) переходом к осям Кенига, и устремляя ε к нулю, получаем интеграл (3.1).

В силу требования однородности в условии 3^0 величины $\sigma_i(\xi_i) = \sigma_i, j_i(\xi_i) = j_i$ в интеграле (3.1) постоянны. В силу требования линейной упругости в условии 3^0 имеют место формулы, см. фиг. 2:

$$r_i(\xi_i, t) - A_i = (\rho_i(t) - A_i - B_i) \frac{\xi_i}{\Lambda_i}, \quad \frac{\partial}{\partial t} r_i(\xi_i, t) = \rho'_i(t) \frac{\xi_i}{\Lambda_i} \quad (3.1a)$$

Подставим полученные формулы в интеграл (3.1). Дополнительное слагаемое в потенциальной энергии i -го линейно упругого цилиндра принимает вид

$$M_i \frac{\rho_i - B_i - A_i}{2} g \operatorname{ctg} \beta_i, \quad (3.2)$$

где $M_i = \sigma_i \Lambda_i$ — масса i -го цилиндра. Подставим формулы (3.1a) в интеграл (3.1) и проинтегрируем по ξ_i . Воспользуемся формулой $\frac{\sigma_i}{\Lambda_i^2} \int_0^{\Lambda_i} \xi_i^2 d\xi_i = \frac{M_i}{3}$. После добавления энергий (3.1), (3.2) лагранжиан турбины с телами и цилиндрами, определяемый формулами (2.1) — (2.3), принимает вид

$$2L = \sum \left(m_i + \frac{M_i}{3} \right) \frac{\rho_i'^2}{\sin^2 \beta_i} + \left(\bar{I} + \sum \left[\left(m_i + \frac{M_i}{3} \right) \rho_i^2 + M_i \left(\frac{A_i}{3} - \frac{2B_i}{3} \right) \rho_i \right] \right) \psi'^2 - \sum \left[k_i \left(\frac{\rho_i}{\sin \beta_i} \right)^2 - 2 \left(\left(m_i + \frac{M_i}{2} \right) g \operatorname{ctg} \beta_i - k_i \frac{A_i + B_i}{\sin^2 \beta_i} \right) \rho_i \right] - V^0, \quad (3.3)$$

где $\bar{I} = I + \sum [j_i \Lambda_i + M_i ((A_i + B_i)^2/3 - A_i B_i)]$, а V^0 — постоянная. Условием сведения лагранжиана (3.3) к виду (2.4) заменой $\rho_i \rightarrow \rho_i + E_i$, где $E_i = \text{const}$ и переобозначениями: $m_i + M_i/3$ через m_i , свободного члена при ψ'^2 через I является совпадение минимумов (для каждого i) квадратичных форм: при ψ'^2

$$\left(m_i + \frac{M_i}{3} \right) \rho_i^2 + M_i \left(\frac{A_i}{3} - \frac{2B_i}{3} \right) \rho_i$$

и в потенциальной энергии:

$$k_i \left(\frac{\rho_i}{\sin \beta_i} \right)^2 - 2 \left(\left(m_i + \frac{M_i}{2} \right) g \operatorname{ctg} \beta_i - k_i \frac{A_i + B_i}{\sin^2 \beta_i} \right) \rho_i$$

То есть, должен обращаться в нуль определитель

$$\det \begin{vmatrix} m_i + M_i/3 & M_i(A_i/6 - B_i/3) \\ k_i & (m_i + M_i/2)g \sin 2\beta_i/2 - k_i(B_i + A_i) \end{vmatrix} = 0, \\ i = 1, \dots, n$$

Но минимум первой из этих форм определяет сжатие или растяжение цилиндра, при котором минимален момент инерции цилиндра с телом относительно оси OE . Минимум второй при неподвижной турбине определяет равновесие цилиндра с телом.

При замене рассмотренного в данном разделе 3 упругого цилиндра на два симметричных, изображенных на фиг. 1 в нижнем желобе, лагранжиан (3.3) сохраняет свой вид (с точностью до сдвига $\rho_i \rightarrow \rho_i + D_i$, где $D_i = \text{const}$) с обозначением через k_n суммарной жесткости левого и правого цилиндров, обозначением через $0 \leq A_n$ рассмотренной выше горизонтальной координаты центра n -ого желоба, подстановкой $B_n = 0$, см. фиг. 3. Действительно, при этом, эти горизонтальные координаты центров масс левого и правого цилиндров с точностью до постоянной одинаковы и равны $\rho_n/2$. Поэтому относительная кинетическая энергия тела и пары цилиндров имеет тот же вид $(m_n + M_n/3)\rho_n^2 \sin^2 \beta_n$, где M_n – суммарная масса упругих цилиндров. Кроме того, суммарный момент инерции относительно OE тела и пары цилиндров, потенциальная энергия тела и пары цилиндров являются квадратичными формами от ρ_n с теми же коэффициентами при ρ_n^2 . Поэтому условие 5⁰ совпадения минимумов этих квадратичных форм также приводит лагранжиан к виду (2.4).

4. *Учет роторов в телах и турбине.* Предположим, что в i -ом теле имеется s_i свободно вращающихся роторов, удовлетворяющих условию 6⁰. Тогда кинетическая энергия i -го тела приобретает дополнительное слагаемое

$$L_i = \sum_{k=1}^{s_i} (\psi' b_{ik} \psi'_{ik} + \frac{1}{2} c_{ik} \psi'^2_{ik}), \quad b_{ik}, c_{ik} = \text{const}, \quad (4.1)$$

где ψ_{ik} – угол поворота ik -го ротора.

Действительно, пусть $\mathbf{r}_{ik} = (r_{ik}^1, r_{ik}^2, r_{ik}^3)$ – декартова ортогональная система координат с началом в центре масс C_{ik} ik -ого ротора, жестко связанная с i -ым телом, см. фиг. 4, где $\mathbf{v}_{ik}^{tr}(0) = \vec{OC'_{ik}}$, $\mathbf{e} = \partial/\partial z_i$, $\mathbf{w}_{ik}$ – единичный вектор угловой скорости ψ'_{ik} вращения ik -го ротора. Тогда для переносной и относительной скоростей произвольной точки ротора T_{ik} имеют место формулы

$$\mathbf{v}_{ik}^{tr}(\mathbf{r}_{ik}) = \mathbf{v}_{ik}^{tr}(0) + \psi' \mathbf{e} \times \mathbf{r}_{ik}, \quad \mathbf{v}_{ik}^{rel}(\mathbf{r}_{ik}) = \psi'_{ik} \mathbf{w}_{ik} \times \mathbf{r}_{ik}$$

и кинетическая энергия ik -ого ротора записывается в виде:

$$\int_{T_{ik}} \sigma_{ik}(\mathbf{r}_{ik}, \psi_{ik}) [\mathbf{v}_{ik}^{tr}(\mathbf{r}_{ik}) + \mathbf{v}_{ik}^{rel}(\mathbf{r}_{ik})]^2 d\mathbf{r}_{ik}, \quad (4.2)$$

где $d\mathbf{r}_{ik} = dr_{ik}^1 dr_{ik}^2 dr_{ik}^3$, $\sigma_{ik}(\mathbf{r}_{ik}, \psi_{ik})$ – плотность ротора T_{ik} в системе координат, жестко связанной с i -ым телом. В силу динамической симметричности и уравновешенности ik -ротора относительно его оси вращения его моменты инерции и центр масс при вращении постоянны относительно i -го тела. Поэтому в (4.2) может быть положено $\sigma_{ik} = \sigma_{ik}(\mathbf{r}_{ik}, \psi_{ik}(0))$. Слагаемое $\int_{T_{ik}} \sigma_{ik}(\mathbf{r}_{ik}, \psi_{ik}(0)) (\mathbf{v}_{ik}^{tr}(\mathbf{r}_{ik}))^2 d\mathbf{r}_{ik}$ в (4.2) может быть отнесено к неподвижному ротору. Оно предполагается учтенным в кинетической энергии i -го тела в разделе 2: в (2.4) величины m_i предполагаются массами тел с роторами. Так как центр масс ik -го ротора определяется условием $\mathbf{r}_{ik} = 0$, линейное по $\mathbf{v}_{ik}^{tr}(0)$ слагаемое среди оставшихся в (4.2)

$$\begin{aligned} & \int_{T_{ik}} \sigma_{ik}(\mathbf{r}_{ik}, \psi_{ik}(0)) \mathbf{v}_{ik}^{rel}(\mathbf{r}_{ik}) [2\mathbf{v}_{ik}^{tr}(\mathbf{r}_{ik}) + \mathbf{v}_{ik}^{rel}(\mathbf{r}_{ik})] d\mathbf{r}_{ik} = \\ & \int_{T_{ik}} \sigma_{ik}(\mathbf{r}_{ik}, \psi_{ik}(0)) [\psi'_{ik} \mathbf{w}_{ik} \times \mathbf{r}_{ik}] [2(\mathbf{v}_{ik}^{tr}(0) + \psi' \mathbf{e} \times \mathbf{r}_{ik}) + \psi'_{ik} \mathbf{w}_{ik} \times \mathbf{r}_{ik}] d\mathbf{r}_{ik} \end{aligned} \quad (4.3)$$

обращается в нуль. Оставшиеся слагаемые в (4.3) после суммирования по k образуют добавку (4.1) в лагранжиан, и углы ψ_{ik} являются циклическими для $L + \sum L_i$. Тогда функция Рауса, см. [5]: 3. §2.1, исключаяющая угловые скорости ψ'_{ik} , записывается в виде

$$\bar{L} = L + \sum (L_i - \sum_{k=1}^{s_i} p_{\psi_{ik}} \psi'_{ik})|_{\psi'_{ik} \rightarrow p_{\psi_{ik}}} = L - \sum_{k=1}^{s_i} \frac{(p_{\psi_{ik}} - b_{ik} \psi')^2}{2c_{ik}}, \quad (4.4)$$

где $p_{\psi_{ik}} = \partial L_i / \partial \psi'_{ik}$. Из (4.4) следует, что она имеет вид $L + \psi' D$ с заменой I на J , $0 < J < I$, $J, D = \text{const}$.

В случае свободного вращения i -го тела относительно его центра масс C_i оно, в силу 6⁰, должно быть уравновешено и полностью динамически симметрично относительно C_i . Тогда его вращение и движение связки полностью разделяются, см. главу 3 в [5].

5. *Исключение вращения вокруг оси ОЕ.* Пусть $p_\psi = \partial \bar{L} / \partial \psi'$ – (постоянный) кинетический момент связки относительно вертикальной оси ОЕ. Производя преобразование Лежандра по ψ' , получаем

$$\begin{aligned} 2\hat{L} &= 2(\bar{L} - p_\psi \psi')|_{\psi' \rightarrow p_\psi} = \\ & \sum \frac{m_i \rho_i^2}{\sin^2 \beta_i} - \frac{(p_\psi - D)^2}{J + \sum m_i \rho_i^2} - \sum k_i \left(\frac{\rho_i}{\sin \beta_i} \right)^2, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\psi' \rightarrow p_\psi$ обозначает выражение ψ' из интеграла момента p_ψ .

6. *Штекелев вид лагранжиана.* Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i \rho_i^2}{1 + \lambda \sin^2 \beta_i} = -J$$

Его корни определяют эллиптические координаты в $\mathbb{R}^n$, см. [34, 46], [65]:§6. (В случае, когда среди углов β_i , $\pi - \beta_i$ есть равные, вводятся вырожденные эллиптические координаты, см. [34, 128].) Эти корни удовлетворяют

$$\lambda_1 < -\sin^{-2} \beta_1 < \dots \lambda_n < -\sin^{-2} \beta_n \leq -1$$

В них лагранжиан (5.1) принимает штеккелев вид, см. [65]:§7.5, [34, 46, 163]:

$$2L = -\frac{J}{4} \sum_{\nu=1}^n \frac{\Gamma_{\nu} \lambda_{\nu}^2}{A(\lambda_{\nu})} + \delta \frac{(p_{\psi} - D)^2}{J} \sum_{\nu=1}^n \Gamma_{\nu}^{-1} \lambda_{\nu}^{-1} +$$

$$J\omega^2 \sum_{\nu=1}^n \Gamma_{\nu}^{-1} [(\sum a_i) \lambda_{\nu}^{n-1} - \lambda_{\nu}^n],$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}, \quad a_i = -\sin^{-2} \beta_i, \quad \delta = (-1)^n a_1 \dots a_n,$$

$$\Gamma_{\nu} = (\lambda_{\nu} - \lambda_1) \dots (\lambda_{\nu} - \lambda_n), \quad A(w) = (w - a_1) \dots (w - a_n)$$

Следующие формулы известны в обезразмеренных координатах. Они получаются из (6.1) сравнением вычетов по λ в $a_i = -\sin^{-2} \beta_i$:

$$2T^{\text{отн}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \rho_i'^2}{\sin^2 \beta_i} = -\frac{J}{4} \sum_{\nu=1}^n \Gamma_{\nu} \lambda_{\nu}^2 / A(\lambda_{\nu}), \quad (6.2)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{k_i \rho_i^2}{\sin^2 \beta_i} = J\omega^2 \sum_{\nu=1}^n \Gamma_{\nu}^{-1} [(\sum a_i) \lambda_{\nu}^{n-1} - \lambda_{\nu}^n], \quad \omega = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}, \quad (6.3)$$

$$\Gamma_{\nu} = (\lambda_{\nu} - \lambda_1) \dots (\lambda_{\nu} - \lambda_n) = \frac{d\Lambda(w)}{dw} \Big|_{w=\lambda_{\nu}},$$

$$\Lambda(w) = \prod_{\nu=1}^n (w - \lambda_{\nu}), \quad A(w) = \prod_{i=1}^n (w - a_i).$$

В правой части формул (6.3) и (6.4) ниже использованы формулы для сумм вычетов $\sum_{\nu=1}^n \text{res}_{w=\lambda_{\nu}} \frac{w^j}{\Lambda(w)}$, где $j = n-1, n, -1$; в (6.4) – также формула для $\sum_{i=1}^n \text{res}_{w=a_i} \frac{w^{-1} \Lambda(w)}{A(w)}$:

$$J + \sum_{i=0}^n m_i \rho_i^2 = J \frac{\lambda_1 \dots \lambda_n}{a_1 \dots a_n}, \quad \frac{(-1)^{n-1}}{\lambda_1 \dots \lambda_n} = \sum_{\nu=1}^n \Gamma_{\nu}^{-1} \lambda_{\nu}^{-1}. \quad (6.4)$$

Пусть $\mu_{\nu} = \partial T^{\text{отн}} / \partial \lambda'_{\nu}$ – импульсы. Штеккелевость согласно §3 главы 4 в [5], см. также [34], лагранжиана означает, что его гамильтониан представляется в виде $\sum_{\nu=1}^n \Gamma_{\nu}^{-1} H_{\nu}(\lambda_{\nu}, \mu_{\nu})$.

Замечание. Если в формулах (6.1), (6.4) перейти к безразмерным эффективным расстояниям

$$x_i = \sqrt{\frac{m_i}{J}} \frac{\rho_i}{\sin \beta_i}$$

и a_i , воспользоваться *диагональным сдвигом эллиптических координат вдоль их линий*:

$$x_i \rightarrow x_i, \quad a_i \rightarrow a_i - \zeta, \quad \lambda_i \rightarrow \lambda_i - \zeta, \quad i = 1, \dots, n$$

и вернуться к исходным переменным, получим потенциал

$$\frac{J}{J + \sum_{i=0}^n [m_i \rho_i^2 / (1 + \zeta \sin^2 \beta_i)]} = (\zeta - a_1) \dots (\zeta - a_n) \sum_{\nu=1}^n \Gamma_{\nu}^{-1} (\zeta - \lambda_{\nu})^{-1}. \quad (6.5)$$

Также имеют вид Якоби – Штекеля его вычеты и производные по ζ . Они приводят к новым сериям таких рациональных потенциалов. После того как они были найдены (в 1999 г.), автору стало известно о работе [163]. В [163] установлено разделение переменных в потенциале (6.5) при ограничении $\zeta = 0$ (в других переменных) без интерпретации как производящей функции, механической интерпретации и формул в θ -функциях ниже.

7. *Разделение переменных* [34, 46]. Подставим формулы (6.2), (6.3), (6.5)| $_{\zeta=0}$ в (5.1). Произведем в полученном натуральном лагранжиане преобразование Лежандра по $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$, переходя к импульсам $\mu_{\nu} = \partial T^{\text{отн}} / \partial \lambda'_{\nu} = \partial \hat{L} / \partial \lambda'_{\nu}$. Подставляя в полученный гамильтониан $\mu_{\nu} = \partial S / \partial \lambda_{\nu}$, приходим к уравнению Гамильтона – Якоби

$$\sum_{\nu=1}^n \Gamma_{\nu}^{-1} \left[-\frac{4}{J} (A(\lambda_{\nu})) \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_{\nu}} \right)^2 - \delta \frac{(p_{\psi} - D)^2}{J} \lambda_{\nu}^{-1} - 2P(\lambda_{\nu}) \right] = 0, \quad (6.6)$$

где $\delta = (-1)^n a_1 \dots a_n$,

$$P(\lambda) = F_0 + F_1 \lambda + \dots + F_{n-1} \lambda^{n-1} - J \omega^2 [(\sum a_i) \lambda^{n-1} - \lambda^n] / 2,$$

$F_0, \dots, F_{n-1}$ – произвольные постоянные, последняя – энергии. Здесь использовано тождество (5.1). Выражение в квадратных скобках в (6.6) зависит лишь от одной переменной λ_{ν} . Приравнявая нулю коэффициенты при Γ_{ν}^{-1} , получаем

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda_{\nu}} = J \frac{\sqrt{\Phi(\lambda_{\nu})}}{2 \lambda_{\nu} A(\lambda_{\nu})}, \quad (6.7)$$

$$\Phi(\lambda) = \frac{2J\lambda P(\lambda) + \delta(p_{\psi} - D)^2}{J^2} (-\lambda) A(\lambda),$$

где $\deg \Phi(\lambda) \leq 2n+2$. То есть, уравнение Гамильтона – Якоби допускает разделяющееся решение $\sum_{i=1}^n S_i(\lambda_i, F_0, \dots, F_{n-1})$. Так как это решение зависит от n произвольных постоянных, последняя из которых – гамильтониан, оно является производящей функцией симплектического преобразования, выпрямляющего траектории (5.1).

8. *Уравнения Абеля – Якоби.* Подставим импульсы $\mu_\nu(\lambda_\nu, F_0, \dots, F_{n-1})$ выраженные из (6.7) в формулы

$$\mu_\nu = -\frac{J}{4} \Gamma_\nu \lambda'_\nu / A(\lambda_\nu). \quad (6.8)$$

Произведем замену времени

$$d\tau = -\delta dt \left(\sum_{\nu=1}^n \Gamma_\nu^{-1} \lambda_\nu^{-1} \right) \stackrel{(6.5)}{=} \frac{J dt}{J + \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2},$$

где $\delta = (-1)^n a_1 \dots a_n = \prod_{i=1}^n \sin^{-2} \beta_i$. Уравнения (6.8) примут вид уравнений Абеля

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\lambda_\nu^{j-1} d\lambda_\nu}{\sqrt{\Phi(\lambda_\nu)}} = \delta_{j1} \frac{2}{\delta} d\tau, \quad j = 1, \dots, n, \quad (6.9)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

9. *Формулы в θ -функциях.* Рассмотрим возникающую выше при разделении переменных компактную риманову поверхность $\mathcal{R}$ алгебраической функции

$$w^2 = \Phi(\lambda).$$

При $(\omega, F_{n-1}) \neq 0$ при отсутствии кратных корней у многочлена $\Phi(\lambda)$ она – неособая рода n . Пусть $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ – ее базис циклов

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

стандартный согласно [60]:III.§5 по отношению к нумерации точек ветвления $a_1, \dots, a_{2n+2}$. В случае $\omega = 0, F_{n-1} \neq 0$ степень $\deg \Phi(\lambda) = 2n+1$ нечетна и предполагается, что $a_{2n+2} = \infty$. Положим

$$\eta_i = \frac{(\lambda - 1)^{i-1} d\lambda}{\sqrt{\Phi(\lambda)}}, \quad A_{ij} = \oint_{a_j} \eta_i, \quad \eta_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \omega_j.$$

Тогда ω_j – нормированные голоморфные дифференциалы. Умножая векторное тождество (6.9) на $\|A_{ij}\|^{-1}$ и интегрируя, получаем линеаризацию уравнений (6.9) на якобиане $\text{Jac } \mathcal{R}$, см. [60]:

$$\sum_{\nu=1}^n \int_{a_{2n+2}}^{P_\nu} \omega_i = \zeta_i, \quad \zeta_i = \|A^{-1}\|_{i1} \frac{2\tau}{\delta} + C_i,$$

$$C_i = \text{const}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $P_\nu = (\lambda_\nu, \sqrt{\Phi(\lambda_\nu)})$ – точки $\mathcal{R}$. Путь интегрирования от P_0 до P одинаков для всех ω_i . Здесь первое равенство отождествляет n -ую симметрическую степень $S^n \mathcal{R}$ с якобианом $\text{Jac } \mathcal{R}$ посредством голоморфного бимероморфного отображения $(P_1, \dots, P_n) \rightarrow \zeta$, см. §3 главы II в [60]. По формулам обращения отображения Абеля, см. §5 главы III в [60], выражаем $\Lambda(a_i)$ через ζ :

$$\frac{m_i \alpha_i}{J \sin^2 \beta_i} \rho_i^2 = \prod_{\nu=1}^n (a_i - \lambda_\nu) = d_i \times \begin{cases} \left[\frac{\theta[\delta + \delta_i](\zeta)}{\theta[\delta](\zeta)} \right]^2 \\ \frac{\theta[\delta + \delta_i](\zeta)^2}{\theta[\delta](\zeta - \Delta) \theta[\delta](\zeta + \Delta)} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, 2n, \quad (6.10)$$

где $\alpha_i = \frac{d}{dz}|_{z=a_i} A(z)$ и d_i – безразмерная постоянная, верхняя формула отвечает случаю $\omega = 0$, $F_{n-1} \neq 0$, нижняя – случаю $\omega \neq 0$; где $\theta[\delta](\zeta)$ – θ -функция Римана римановой поверхности $\mathcal{R}$ с единичной матрицей а-периодов и матрицей б-периодов $B_{ij} = \oint_{b_j} \omega_i$, с $2 \times n$ -матрицей δ полуцелых ($\text{mod } \mathbb{Z}$) характеристик. Здесь $\Delta_i = \int_{a_{2n+2}}^{+\infty} \omega_i$,

$$\delta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \\ \frac{n}{2} & \frac{n-1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \delta_{2i-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{i}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\delta_{2i} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{i}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n,$$

– $2 \times n$ -матрицы полуцелых характеристик (верхняя строка соответствует б-периодам, нижняя – а-периодам, во второй и третьей матрицах в первой строке $\frac{1}{2}$ стоит на i -ом месте), см. [60]:III.§5.

В случае нечетной степени многочлена $\Phi(\lambda)$ формула обращения непосредственно содержится в [60]:III.§5, в случае четной получается сравнением порядков нулей и полюсов мероморфных на $\text{Jac } \mathcal{R}$ левой и правой частей. Действительно, множество полюсов в левой части есть $\lambda_\nu = \pm\infty$, то есть, отвечает $\sum_{\nu=1}^n P_\nu - (\pm\infty)$ – произвольному эффективному дивизору степени $n - 1$ на $\mathcal{R}$. При отображении Абеля он переходит в $(\sum_{\nu=1}^n \int_{a_{2n+2}}^{P_\nu} \omega) - \int_{a_{2n+2}}^{\pm\infty} \omega$ – гиперповерхность в $\text{Jac } \mathcal{R}$. Но инволюция меняет знак дифференциалов η_i, ω_i гиперэллиптической римановой поверхности, следовательно, $\int_{a_{2n+2}}^{-\infty} \omega = - \int_{a_{2n+2}}^{+\infty} \omega$. Поэтому и в силу теоремы Римана [60] III.3 полученная гиперповерхность в $\text{Jac } \mathcal{R}$ получается из гиперповерхности нулей θ -функции $\theta[\delta](\zeta)$ сдвигом на вектор $\pm\Delta$. Проверка порядков гиперповерхностей нулей совпадает с проведенной в §3 главы III в [60].

Согласно [60]:II.3 функция $\theta(\zeta)^2 / \theta(\zeta - \Delta) \theta(\zeta + \Delta)$ однозначна на якобиане $\text{Jac } \mathcal{R}$. Но при сдвиге на квазипериоды θ -функции $\theta(\zeta)$

приобретаемые множители в $\theta(\zeta)^2$ и в $\theta[\delta + \delta_i](\zeta)^2$ совпадают (квадратный корень из 1 сокращается). Также совпадают множители у $\theta[\delta](\zeta - \Delta)\theta[\delta](\zeta + \Delta)$ и у $\theta(\zeta - \Delta)\theta(\zeta + \Delta)$.

10. *Реакции в подшипниках.* Угловая скорость вращения турбины затем находится из интеграла момента, см. (5.1):

$$\psi' = -\frac{\partial \hat{L}}{\partial p_\psi} = \frac{p_\psi - D}{J + \sum m_i \rho_i^2}$$

Выражения в θ -функциях для сил реакции $\tilde{R}$ и R в верхнем и нижнем подшипниках, см. фиг. 1, при невесомых пружинящих цилиндрах находятся из системы уравнений

$$\frac{d}{dt}[\psi' \mathbf{e} \times (M \vec{OC} + \sum m_i \rho_i \mathbf{e}_i) \sum m_i \rho'_i \mathbf{e}_i] = \tilde{R} + R,$$

$$\frac{d}{dt}[\sum m_i \vec{OE}^i \times \rho'_i \mathbf{e}_i + \sum_{k=1}^{s_i} \sum d_{ik} \mathbf{w}_{ik} (p_{\psi_{ik}} - b_{ik} \psi')] = \vec{OE} \times \tilde{R},$$

В первом уравнении первое слагаемое – суммарный импульс переносного вращения относительно OE , второе – суммарный импульс движения тел относительно турбины. Здесь C – центр масс турбины без тел, M – ее масса, $\mathbf{e}_i$ – единичный вектор вдоль l_i , направленный от OE к C_i . Во втором уравнении выражение в квадратных скобках – полный момент импульса связки относительно точки O без постоянного момента переносного вращения относительно OE , первое слагаемое в квадратных скобках отвечает относительному перемещению тел с неподвижными роторами, $O^i = OE \cap l_i$, второе слагаемое в квадратных скобках – момент импульса относительно вращения роторов. Здесь $d_{ik} = c_{ik}^{-1}(m_{ik} l_{ik}^2(\rho_i) + c_{ik})$ и здесь $l_{ik}(\rho_i)$ – расстояние от оси ротора T_{ik} с массой m_{ik} до ей параллельной оси, проходящей через O . Момент импульса относительного вращения ротора T_{ik} относительно его оси равен $c_{ik} \psi'_{ik} = p_{\psi_{ik}} - b_{ik} \psi'$.

Уравнения, описывающие изменение единичных векторов $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{w}_{ik}$ имеют вид

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_i = \psi' \mathbf{e} \times \mathbf{e}_i, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{w}_{ik} = \psi' \mathbf{e} \times \mathbf{w}_{ik}$$

S2.5. Обобщение с дополнительным параметром.

0. Описание результатов. 0.1. Найдена новая система, интегрируемая по Лиувиллю и в θ -функциях. Рассматривается жестко соосно соединенная система n конических логарифмических спиралей, допускающая свободное вращение вокруг общей вертикальной оси. По кривым движутся точки, упруго взаимодействующие с центрами на оси в естественных предположениях равночастотности и уравниваемости.

После редукции по Раусу квадратичная по скоростям компонента лагранжиана системы точек на спиральях является суммой стандартной метрики в $\mathbb{R}^n$ и метрики, вещественно эквивалентной метрике Лобачевского.

0.2. Рассмотрен диагональный сдвиг эллиптических координат вдоль их линий. Он приводит к производящим функциям для рациональных (в исходных декартовых координатах) потенциалов и метрик. Их интегрируемость осуществляется разделением переменных в уравнении Гамильтона – Якоби после перехода к эллиптическим координатам. В постановке 0.1 выражение решения в θ -функциях осуществляется затем после замены времени. Формула для последней также получается указанным диагональным сдвигом эллиптических координат вдоль их линий.

1. Коническая логарифмическая спираль. Пусть OE – вертикальная прямая в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, ρ – расстояние до нее, ψ – угловая координата вокруг OE , z – натуральная координата на вертикальной прямой OE , продолженная до вертикальной координаты в $\mathbb{R}^3$. Тогда ρ, ψ, z – цилиндрические координаты вокруг OE

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Кривую в $\mathbb{R}^3$, определяемую уравнениями

$$\psi - \psi_0 = (\operatorname{ctg} \alpha) \ln \rho, \quad z - z_0 = \rho \operatorname{ctg} \beta \quad (1)$$

для произвольных значений параметров

$$0 < \alpha, \beta < \pi, \quad \psi_0 \bmod 2\pi, \quad z_0 \in \mathbb{R},$$

назовем конической логарифмической спиралью.

Тогда α – угол, отсчитываемый от бесконечно-малого луча спирали, выходящего из горизонтального круга с центром на оси OE до окружности круга, отсчитываемый в том же направлении, что и ψ , см. фиг. 6. И тогда β – угол от положительного направления оси z до полы конуса, соответствующей спирали, см. фиг. 6.

Коническая логарифмическая спираль с выброшенной предельной точкой на оси z выделяется среди произвольных гладких кривых следующим свойством.

Свойство. Пусть OC и $\widetilde{OC}$ хорда и дуга спирали от некоторой точки C до предельной точки O на оси OE , пусть ρ – расстояние от C до оси OE . Тогда постоянны отношения:

$$\frac{|OC|^2}{|\widetilde{OC}|^2} = \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}, \quad \frac{|OC|}{\rho} = \frac{1}{\sin \beta} \quad (2)$$

Свойство легко следует из уравнений (1).

2. *Интегрируемая система.* Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ жестко соосно (вдоль оси OE) соединенную систему конических логарифмических спиралей l_i , $i = 1, \dots, n$, определяемых параметрами

$$0 < \alpha, \beta_i < \pi, \quad \psi_{0i} \bmod 2\pi, \quad z_{0i} \in \mathbb{R},$$

соответственно, см. фиг. 6.

Пусть эта жестко соединенная система спиралей допускает свободное вращение вокруг оси OE в поле силы тяжести с потенциалом $-gz$, где g — абсолютная величина ускорения свободного падения. Пусть по кривой l_i движется точка C_i с массой m_i , упруго взаимодействующая с фиксированной точкой $A_i \in OE$ с потенциалом $\frac{k_i}{2}|A_i C_i|^2$, $i = 1, \dots, n$. Пусть O_i — предельная точка спирали l_i на оси OE .

ТЕОРЕМА. Пусть

(j) $\sqrt{\frac{k_i}{m_i}} = \omega$ — постоянная частота;

(jj) при положении массы m_i в точке O_i упругая сила и сила тяжести уравновешены.

Тогда

А) после редукции по Раусу по углу вращения вокруг OE лагранжиан данной системы имеет вид Якоби — Штеккеля, уравнение Гамильтона — Якоби разделяется в эллиптических координатах в $\mathbb{R}^n$.

Б) Квадраты расстояний ρ_i^2 и угловая скорость вращения системы спиралей вокруг OE выражаются в виде рациональных функций от θ -функций Римана с характеристиками от n переменных. Аргумент этих θ -функций — векторный полином первой степени от нового времени

$$\int \frac{dt}{\tilde{I}},$$

где t — исходное время, $\tilde{I}$ — момент инерции системы относительно OE с заменой масс m_i на эффективные $\tilde{m}_i = m_i \frac{|O_i C_i|^2}{|O_i \tilde{C}_i|^2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие (jj) может быть опущено, если считать $g = 0$, $A_i = O_i$.

Действительно, добавление линейного слагаемого в потенциал силового поля эквивалентно сдвигу центра упругого взаимодействия A_i .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Потенциал $\frac{k_i}{2}|O_i C_i|^2$ может быть также реализован невесомой линейно упругой нитью (с одной степенью свободы, с жесткостью $\tilde{k}_i = k_i \frac{|O_i C_i|^2}{|O_i \tilde{C}_i|^2}$ и не обязательно нулевой свободной длиной), натянутой вдоль l_i и закрепленной на оси OE так, что нить недеформирована тогда, когда масса m_i находится в точке O_i .

3. *Регуляризованное расстояние на конусе.* Ограничимся сначала случаем $0 < \beta_i \leq \pi/2$. Тогда уравнения (1) определяют коническую логарифмическую спираль на верхней поле конуса. Продолжим расстояние ρ на нижнюю полу конуса симметрично с изменением знака. Так определенную координату на двуполом конусе назовем ориентированным расстоянием до оси OE . Координаты ρ и z являются регуляризирующими на спирали в предельной точке на оси OE . Тогда двупольный конус определится уравнением $z = z_0 + \rho \operatorname{ctg} \beta$, а коническая логарифмическая спираль на его верхней поле – уравнением $\psi = \psi_0 + (\operatorname{ctg} \alpha) \ln |\rho|$.

Обозначим через $z_i(\rho_i), \psi_i(\rho_i)$ правые части соответствующих уравнений для конической логарифмической спирали l_i . Тогда $z_i(\rho_i), \psi_i(\rho_i)$ определяют положение точки C_i на спирали l_i .

4. *Вывод функции Лагранжа.* Пусть $s_i(\rho_i)$ – натуральная параметризация спирали l_i , удовлетворяющая условию $s_i(0) = 0$. Кинетическая энергия системы спиралей, точки C_i имеет вид:

$$\frac{1}{2} I_0 \dot{\psi}^2, \quad \frac{m_i}{2} \vec{OC}_i'^2.$$

Здесь штрих обозначает производную по времени t , а I_0 – момент инерции системы кривых относительно OE . Рассмотрим ортонормированный репер $\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \psi}, \frac{\partial}{\partial z}$ цилиндрической системы координат ρ, ψ, z .

На верхней поле конуса разложение в этом репере скорости $\vec{OC}_i'$ на переносную (вращательную) и относительную (вдоль кривой l_i) принимает вид

$$(0, \rho_i \dot{\psi}', 0) + (\dot{\rho}_i', \rho_i \frac{d\psi_i}{d\rho}(\rho_i) \dot{\rho}_i', \frac{dz_i}{d\rho}(\rho_i) \dot{\rho}_i'),$$

см. фиг. 7. Поэтому $\vec{OC}_i'^2 = \dot{s}_i'^2 + \rho_i^2 \dot{\psi}'^2 + 2\rho_i^2 \frac{d\psi_i}{d\rho}(\rho_i) \dot{\psi}' \dot{\rho}_i', \quad i = 1, \dots, n$. Суммируя кинетическую и потенциальную энергии по точкам и учитывая уравнения (1), соотношения (2) и замечание 1, приходим к лагранжиану системы:

$$2L = \sum_{i=1}^n m_i \left((1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta_i) \dot{\rho}_i'^2 - \omega^2 \frac{\rho_i^2}{\sin^2 \beta_i} \right) + \\ (I_0 + \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2) \dot{\psi}'^2 + 2\dot{\psi}' \left(\sum_{i=1}^n m_i \rho_i \dot{\rho}_i' \right) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Полученный лагранжиан инвариантен относительно замен $\rho_i \rightarrow -\rho_i, t \rightarrow -t$. Поэтому, сохраняющее его вид продолжение i -ой спирали через плоскость $z_i = z_{i0}$ может быть выбрано в виде зеркального отражения с поворотом вокруг OE на произвольный угол. Например, посредством формул $z_i(\rho_i), \psi_i(\rho_i)$ раздела 3. Тем самым, случай $\pi/2 \leq \beta_i < \pi$ сводится к рассматриваемому заменой $\beta_i \rightarrow \pi - \beta_i$.

При этом, при возрастании координаты z направление вращения спирали вокруг оси OE меняется в точке O_i на противоположное.

5. *Исключение по Раусу угла ψ .* Пусть $p_\psi = \partial L / \partial \psi'$ – постоянный суммарный кинетический момент системы относительно оси OE . Производя преобразование Лежандра по ψ' , получаем

$$2\hat{L} = 2(L - p_\psi \psi')|_{\psi' \rightarrow p_\psi} = \sum_{i=1}^n m_i \left((\operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \beta_i}) \rho_i'^2 - \omega^2 \frac{\rho_i^2}{\sin^2 \beta_i} \right) - \frac{(p_\psi - (\operatorname{ctg} \alpha) \sum_{i=1}^n m_i \rho_i \rho_i')^2}{I_O + \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2}. \quad (3)$$

где $\psi' \rightarrow p_\psi$ обозначает выражение ψ' из интеграла момента p_ψ . Линейное по p_ψ слагаемое $\operatorname{ctg} \alpha \frac{d}{dt} [\ln(I_O + \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2)]$ является полной производной по t и, поэтому, не влияет на уравнения Лагранжа, см. разд. 1.2.3 в [5].

6. *Введение эллиптических координат.* При $I_O \neq 0$ разложим на множители по z рациональную по $z \in \mathbb{R}$ дробь

$$f(z) = I_O + \sum_{i=1}^n \frac{m_i \rho_i^2}{1 + z \operatorname{ctg}^2 \alpha \sin^2 \beta_i} = I_O \frac{\prod_{\nu=1}^n (z - \lambda_\nu)}{\prod_{i=1}^n (z - a_i)} \equiv I_O \frac{\Lambda(z)}{A(z)}. \quad (4)$$

Тогда $a_i = -\operatorname{ctg}^{-2} \alpha \sin^{-2} \beta_i$ и корни λ_ν многочлена $\Lambda(z)$ в числителе дроби определяют эллиптические координаты в $\mathbb{R}^n$, см. [65]:

$$\lambda_1 < -\operatorname{ctg}^{-2} \alpha \sin^{-2} \beta_1 < \dots < \lambda_n < -\operatorname{ctg}^{-2} \alpha \sin^{-2} \beta_n.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $\operatorname{ctg} \alpha = 0$ спирали l_i вырождаются в прямые. Эллиптические координаты в этом случае вводятся иначе, посредством уравнения $\sum_{i=1}^n \frac{m_i \rho_i^2}{1 + \lambda \sin^2 \beta_i} = -I_O$, см. §2.4 или [84]. Там же при $\operatorname{ctg} \alpha = 0$ рассмотрены другие механические интерпретации этой задачи. В случае, когда среди величин $\sin^2 \beta_i$, $i = 1, \dots, n$ есть равные, вводятся вырожденные эллиптические координаты согласно [34, 128].

7. *Штеккелев вид лагранжиана.* Будем говорить, что натуральный лагранжиан имеет вид Якоби – Штеккеля согласно §3 главы 4 в [5] или [34], если он записывается в виде $\sum_{\nu=1}^n (\Gamma_\nu L_\nu^2(\lambda_\nu) \lambda_\nu'^2 + \Gamma_\nu^{-1} L_\nu^0(\lambda_\nu))$, где $\Gamma_\nu = \frac{d}{dz}|_{z=\lambda_\nu} \Lambda(z)$.

Тогда соответствующий лагранжиану гамильтониан представляется в виде $\sum_{\nu=1}^n \Gamma_\nu^{-1} H_\nu(\lambda_\nu, \mu_\nu)$, где $\mu_1, \dots, \mu_n$ – сопряженные импульсы. Очевидно, такие гамильтонианы (лагранжианы) порождают линейное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Представим функцию Рауса в виде суммы 3-х слагаемых и перейдем в каждом из них к эллиптическим координатам:

$$2\hat{L} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i (\rho_i'^2 - \omega^2 \rho_i^2)}{\sin^2 \beta_i} + \operatorname{ctg}^2 \alpha \left(\sum_{i=1}^n m_i \rho_i'^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n m_i \rho_i \rho_i')^2}{I_O + \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& \frac{p_\psi^2}{I_0 + \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2} = \\
& -\frac{I_0}{4} \operatorname{ctg}^2 \alpha \left(\sum_{\nu=1}^n \Gamma_\nu \frac{\lambda_\nu'^2}{A(\lambda_\nu)} + \omega^2 \sum_{\nu=1}^n \Gamma_\nu^{-1} \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \lambda_\nu^{n-1} - \lambda_\nu^n \right] \right) + \\
& \frac{I_0}{4} \operatorname{ctg}^2 \alpha \sum_{\nu=1}^n \Gamma_\nu \frac{\lambda_\nu'^2}{A(\lambda_\nu) \lambda_\nu} + \frac{p_\psi^2}{I_0} (-1)^n a_1 \dots a_n \sum_{\nu=1}^n \Gamma_\nu^{-1} \lambda_\nu^{-1},
\end{aligned} \tag{5}$$

Первое из трех слагаемых в левой части (5) – гармонический осциллятор. Это кинетическая и потенциальная энергия удаления m_i от O_i (и по ρ_i , и по z_i). Третье напоминает кинетическую энергию вращения системы как единого целого вокруг OE . Второе – разность вращательной компоненты относительной кинетической энергии (точек относительно системы кривых) и слагаемого Рауса. Это слагаемое Рауса – квадрат "смешанной" кинетической энергии (т.е. суммы скалярных произведений скоростей относительного и импульсов переносного вращений), деленный на настоящую кинетическую энергию вращения системы как единого целого.

Через 3 абзаца будет показано, что это второе слагаемое в левой части (5), связанное с относительным вращением, – метрика Лобачевского.

Доказательство приведения каждого из трех слагаемых лагранжиана к штеккелеву виду производится в подразделах а), б) и конце раздела 8 соответственно.

а) Действительно, преобразование первого слагаемого в (5) получается сравнением вычетов в (4) с использованием тождества Якоби

$$\sum_{\nu=1}^n \Gamma_\nu^{-1} \lambda_\nu^i = \delta_{n-1,i}, \quad i = 0, \dots, n-1, \tag{6}$$

сводящегося к $\sum_{\nu=1}^n \operatorname{res}_{z=\lambda_\nu} \frac{z^i}{\Lambda(z)} = -\operatorname{res}_{z=\infty} \frac{z^i}{\Lambda(z)}$, где δ_{ji} – символ Кронекера.

б) Штеккелев вид множителя $2T_2 = \sum_{i=1}^n m_i \rho_i'^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n m_i \rho_i \rho_i')^2}{I_0 + \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2}$ во втором слагаемом в левой части (5) получается переходом от эллиптических координат в $\mathbb{R}^n$ к координатам на псевдосфере и, затем, к эллиптическим сферическим координатам на сфере S^n с использованием представления Штеккеля работы Мозера [65].

Действительно, рассмотрим при $I_0, m_i > 0$ псевдосферу сигнатуры $(1, n)$

$$L^n = \{(\rho_1, \dots, \rho_n, \psi) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -\sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2 + I_0 \psi^2 = I_0\}.$$

Подъем на псевдосферу метрики $2T_2$ имеет вид

$$2T_2 = \sum_{i=1}^n m_i \rho_i'^2 - \frac{(I_O \psi \psi')^2}{I_O \psi^2} \equiv \sum_{i=1}^n m_i \rho_i'^2 - I_O \psi'^2.$$

Это – метрика Лобачевского, постоянной отрицательной римановой кривизны $-I_O^{-1}$ по всем двумерным направлениям. Замена (*мнимый поворот*)

$$\psi \rightarrow \psi, \quad \rho_1 \rightarrow i\rho_1, \quad \dots, \quad \rho_n \rightarrow i\rho_n \quad (7)$$

переводит псевдосферу L^n с метрикой $2T_2$ и координатами (4) в сферу S^n , определяемую уравнением

$$\sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2 + I_O \psi^2 = I_O, \quad (8)$$

с отрицательно определенной метрикой

$$-(\sum_{i=1}^n m_i \rho_i'^2 + I_O \psi'^2) \quad (9)$$

и координатами

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i \rho_i^2}{1 + \lambda \operatorname{ctg}^2 \alpha \sin^2 \beta_i} = I_O. \quad (10)$$

Сфера (8) с метрикой (9) стандартна: имеет постоянную риманову кривизну I_O^{-1} .

Приравнивая левые части уравнений (8) и (10), получаем уравнение

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i \rho_i^2}{-\operatorname{ctg}^{-2} \alpha \sin^{-2} \beta_i - \lambda} + \frac{I_O \psi^2}{-\lambda} = 0. \quad (11)$$

Оно определяет эллиптические сферические координаты на сфере (8).

Действительно, заменой

$$y_1 = \sqrt{\frac{m_1}{I_0}} \rho_1, \quad \dots, \quad y_n = \sqrt{\frac{m_n}{I_0}} \rho_n, \quad y_{n+1} = \psi$$

уравнения (8), (11) и формула (9) для $2T_2$ приводятся к рассмотренному в разд. 6.4 в [65] виду:

$$\sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_i^2}{a_i - \lambda} = 0, \quad -I_0 \left(\sum_{i=1}^{n+1} y_i'^2 \right),$$

в котором $a_{n+1} = 0$. Впервые разделение переменных в этих координатах было установлено, по-видимому, в [143].

В полученных координатах отрицательно определенная метрика (9) согласно разд. 6.4 в [65] записывается в виде Якоби – Штеккеля

$$2T_2 = \frac{I_0}{4} \sum_{\nu=1}^n \Gamma_{\nu} \frac{\lambda_{\nu}^2}{A(\lambda_{\nu}) \lambda_{\nu}}. \quad (12)$$

Определение 2. Так как после мнимого поворота координаты (4) на псевдосфере L^n переходят в эллиптические сферические на сфере S^n (8), то координаты (4) на псевдосфере L^n естественно назвать *эллиптическими псевдосферическими*.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. После мнимого поворота координаты $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ остаются вещественными, но меняются содержащие их интервалы. Если сохранить нумерацию у корней, принадлежащих неизменным интервалам, получим

$$-\operatorname{ctg}^{-2} \alpha \sin^{-2} \beta_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < -\operatorname{ctg}^{-2} \alpha \sin^{-2} \beta_n < \lambda_1 < 0.$$

СЛЕДСТВИЕ. Мнимый поворот (7) сферы S^n с проекцией на гиперплоскость вдоль единственного главного направления положительной сигнатуры переводит эллиптические сферические координаты (11) в эллиптические (4) в $\mathbb{R}^n$.

8. *Диагональный сдвиг эллиптических координат вдоль их линий.* Вычисляя $\sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{z=a_i} \frac{z^{-1} \Lambda(z)}{A(z)}$ и $\sum_{\nu=1}^n \operatorname{res}_{z=\lambda_{\nu}} \frac{z^{-1}}{\Lambda(z)}$, получаем формулы

$$I_0 + \sum_{i=0}^n m_i \rho_i^2 = I_0 \frac{\lambda_1 \dots \lambda_n}{a_1 \dots a_n}, \quad \frac{(-1)^{n-1}}{\lambda_1 \dots \lambda_n} = \sum_{\nu=1}^n \Gamma_{\nu}^{-1} \lambda_{\nu}^{-1}. \quad (12a)$$

После перехода к эффективным расстояниям

$$x_i = \sqrt{\frac{m_i}{I_0}} \frac{\rho_i}{\operatorname{ctg} \alpha \sin \beta_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

уравнение, определяющее эллиптические координаты, и первая формула в (12a) запишутся в виде

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 1, \quad 1 - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i} = \frac{\lambda_1 \dots \lambda_n}{a_1 \dots a_n}.$$

Производя подстановку

$$x_i \rightarrow x_i, \quad a_i \rightarrow a_i - z, \quad \lambda_i \rightarrow \lambda_i - z, \quad i = 1, \dots, n, \quad (13)$$

и возвращаясь к исходным переменным ρ_i , получаем

$$\frac{I_0}{I_0 + \sum_{i=1}^n \frac{m_i \rho_i^2}{1 + z \operatorname{ctg}^2 \alpha \sin^2 \beta_i}} = (z - a_1) \dots (z - a_n) \sum_{\nu=1}^n \Gamma_{\nu}^{-1} (z - \lambda_{\nu})^{-1}. \quad (14)$$

При $z = 0$ эта формула определяет представление Якоби – Штеккеля для 3-го слагаемого в лагранжиане (5). Отметим, что потенциал $(14)|_{z=0}$ разделен Войцеховским в [163] (в безразмерных переменных, без интерпретации как производящей функции и без механической интерпретации), тождество $(14)|_{z=1}$ использовано при замене времени ниже в разделе 10, значение $z = 1$ отвечает замене масс m_i на эффективные $\tilde{m}_i$.

Замечание 5. Координаты $\{x_i\}$ и $\{\lambda_i\}$ связаны формулами

$$\lambda_i(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_n),$$

обладающими следующим свойством. Если значения a_i равномерно сдвинуть на величину z , то значения координат λ_i и содержащие их интервалы $a_{i-1} < \lambda_i < a_i$ равномерно сдвинутся на ту же величину z (здесь положено $a_0 = -\infty$). Это преобразование сохраняет функции $\Gamma_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и штеккелев вид лагранжиана. В частности, штеккелев вид имеют вычеты и производные по z потенциала (14). Они приводят к новым сериям и базису в пространстве всех таких рациональных потенциалов, см. §2.7. Аналогично, подстановка диагонального сдвига (13) эллиптических координат вдоль их линий в метрику (12) приводит к новым сериям разделяющихся метрик.

9. *Разделение переменных.* Произведем преобразование Лежандра $\hat{L}$ по $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$, переходя к сопряженным импульсам $\mu_\nu = \partial \hat{L} / \partial \lambda'_\nu$. Производя в полученном гамильтониане $\hat{H}$ подстановку $\mu_\nu = \partial S / \partial \lambda_\nu$, приходим к уравнению Гамильтона – Якоби:

$$\sum_{\nu=1}^n \Gamma_\nu^{-1} \left[-\frac{4}{I_O \operatorname{ctg}^2 \alpha} \left(\frac{A(\lambda_\nu)}{-\lambda_\nu^{-1} + 1} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_\nu} \right)^2 - \delta \frac{p_\psi^2}{I_O} \lambda_\nu^{-1} - 2P(\lambda_\nu) \right] = 0, \quad (15)$$

где $\delta = (-1)^n a_1 \dots a_n$,

$$P(\lambda) = F_0 + F_1 \lambda + \dots + F_{n-1} \lambda^{n-1} - I_O \omega^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha [(\sum a_i) \lambda^{n-1} - \lambda^n] / 2,$$

– полином от λ , в котором $F_0, \dots, F_{n-1}$ – произвольные постоянные, последняя – энергии. Здесь использовано тождество (6). Выражение в квадратных скобках в (15) зависит лишь от одной переменной λ_ν . Приравнявая нулю коэффициенты при Γ_ν^{-1} , получаем

$$\mu_\nu = \frac{\partial S}{\partial \lambda_\nu} = I_O \operatorname{ctg} \alpha \frac{\sqrt{\Phi(\lambda_\nu)}}{2\lambda_\nu A(\lambda_\nu)}, \quad (16)$$

$$\Phi(\lambda) = \frac{2I_O \lambda P(\lambda) + \delta p_\psi^2}{I_O^2} (1 - \lambda) A(\lambda),$$

где $\deg \Phi(\lambda) \leq 2n + 2$.

10. Переход к уравнениям Абеля – Якоби. Из (9) и (16) вытекает

$$\lambda'_\nu = \partial \hat{H} / \partial \mu_\nu = -\frac{4}{I_0 \operatorname{ctg}^2 \alpha} \Gamma_\nu^{-1} \left(\frac{A(\lambda_\nu)}{-\lambda_\nu^{-1} + 1} \right) \mu_\nu = -\frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha} \Gamma_\nu^{-1} \frac{\sqrt{\Phi(\lambda_\nu)}}{\lambda_\nu - 1},$$

$$\nu = 1, \dots, n. \quad (17)$$

Умножая ν -ое уравнение (17) на $(\lambda_\nu - 1)^j \sqrt{\Phi(\lambda_\nu)}$, $j = 1, \dots, n$, и складывая их, в силу (6) приходим к системе в полных дифференциалах

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{(\lambda_\nu - 1)^{j-1} d\lambda_\nu}{\sqrt{\Phi(\lambda_\nu)}} = -\frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha} \delta_{j1} dt \left(\sum_{\nu=1}^n \Gamma_\nu^{-1} (\lambda_\nu - 1)^{-1} \right),$$

где использовано (6). Переходя к новому времени τ по формуле

$$d\tau = -\varepsilon dt \left(\sum_{\nu=1}^n \Gamma_\nu^{-1} (\lambda_\nu - 1)^{-1} \right) \stackrel{(14)}{=} \frac{I_0 dt}{I_0 + \sum_{i=1}^n \tilde{m}_i \rho_i^2},$$

где $\varepsilon = \prod_{i=1}^n (1 - a_i)$, приходим к уравнениям Абеля

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{(\lambda_\nu - 1)^{j-1} d\lambda_\nu}{\sqrt{\Phi(\lambda_\nu)}} = \frac{2}{\varepsilon \operatorname{ctg} \alpha} \delta_{j1} d\tau, \quad j = 1, \dots, n. \quad (18)$$

11. Интегрирование в θ -функциях. Рассмотрим компактную риманову поверхность $\mathcal{R}$ алгебраической функции $w^2 = \Phi(\lambda)$. При $(\omega, F_{n-1}) \neq 0$ при отсутствии кратных корней у полинома $\Phi(\lambda)$ она – неособая рода n . Пусть $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ – ее базис циклов

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

стандартный согласно [60]: III.5 по отношению к нумерации точек ветвления $a_1, \dots, a_{2n+2}$. (В случае $\omega = 0$, $F_{n-1} \neq 0$ степень $\deg \Phi(\lambda) = 2n+1$ нечетна и предполагается $a_{2n+2} = \infty$). Положим

$$\eta_i = \frac{(\lambda - 1)^{i-1} d\lambda}{\sqrt{\Phi(\lambda)}}, \quad A_{ij} = \oint_{a_j} \eta_i, \quad \eta_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \omega_j.$$

Тогда ω_j – нормированные голоморфные дифференциалы. Умножая векторное тождество (18) на матрицу $\|A_{ij}\|^{-1}$ и интегрируя, получаем линеаризацию уравнений (18) на якобиане $\operatorname{Jac} \mathcal{R}$, см. [37, 60]:

$$\sum_{\nu=1}^n \int_{a_{2n+2}}^{P_\nu} \omega_i = \zeta_i, \quad \zeta_i = \|A^{-1}\|_{i1} \frac{2\tau}{\varepsilon \operatorname{ctg} \alpha} + C_i,$$

$$C_i = \text{const}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $P_\nu = (\lambda_\nu, \sqrt{\Phi(\lambda_\nu)})$ – точки $\mathcal{R}$. Здесь первое равенство отождествляет n -ую симметрическую степень $S^n \mathcal{R}$ с $\text{Jac } \mathcal{R}$ посредством голоморфного бимероморфного отображения $(P_1, \dots, P_n) \rightarrow \zeta$ [60]. По формулам обращения отображения Абеля, см. [162, 60] выражаем $\Lambda(a_i)$ через ζ :

$$\frac{m_i \alpha_i}{I_O \text{ctg}^2 \alpha \sin^2 \beta_i} \rho_i^2 = \prod_{\nu=1}^n (a_i - \lambda_\nu) = d_i \times \begin{cases} \left[\frac{\theta[\delta + \delta_i](\zeta)}{\theta[\delta](\zeta)} \right]^2 \\ \frac{\theta[\delta + \delta_i](\zeta)^2}{\theta[\delta](\zeta - \Delta) \theta[\delta](\zeta + \Delta)} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, 2n, \quad (19)$$

где $\alpha_i = \frac{d}{dz}|_{z=a_i} A(z)$ и d_i – безразмерная постоянная, верхняя формула отвечает случаю $\omega = 0$, $F_{n-1} \neq 0$, нижняя – случаю $\omega \neq 0$; здесь $\theta[\delta](\zeta)$ – θ -функция Римана римановой поверхности $\mathcal{R}$ с единичной матрицей a -периодов, матрицей b -периодов $B_{ij} = \oint_{b_j} \omega_i$ и $2 \times n$ -матрицей δ полуцелых (mod $\mathbb{Z}$) характеристик. Здесь $\Delta = \int_{a_{2n+2}}^{+\infty} \omega$,

$$\delta = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \\ \frac{n}{2} & \frac{n-1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \delta_{2i-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\delta_{2i} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n,$$

– $2 \times n$ -матрицы полуцелых характеристик (верхняя строка соответствует b -периодам, нижняя – a -периодам, во второй и третьей матрицах в первой строке $\frac{1}{2}$ стоит на i -ом месте).

Доказательство второго равенства в формуле (19) повторяет последние два абзаца раздела 9 в §2.4.

12. Опорные реакции, действующие на ось в двух точках при вращении, – рациональные функции от $\rho_i, \ln \rho_i, d\rho_i/dt, d^2\rho_i/dt^2$.

Рассмотрим обобщение движения частицы в гравитационном поле на случай пространства постоянной кривизны K^3 . В.Киллингом [39] и, затем, независимо, В.В.Козловым и А.О.Хариным [131] в качестве аналога потенциала гравитирующего центра предложен потенциал на K^3 , удовлетворяющий уравнению Лапласа и инвариантный относительно вращений вокруг некоторой точки K^3 . Такой потенциал единственен с точностью до умножения на константу и прибавления константы. Ими была установлена полная интегрируемость аналога в пространстве постоянной кривизны задачи Якоби двух гравитирующих центров.

В настоящем §2.6 установлена интегрируемость аналога для пространства постоянной кривизны K^3 потенциала Дарбу – Гребенникова – Аксенова – Демина [120, 1, 54]. Потенциал Дарбу – Гребенникова – Аксенова – Демина используется для приближения гравитационного потенциала осесимметричных сплюснутых тел. Полученный потенциал также удовлетворяет уравнению Лапласа и допускает группу симметрии $O(2)$. В случае сферы S^3 либо а) комплексно сопряженные массы должны быть помещены на комплексификации плоскости $\mathbb{R}^2$, относительно которой потенциал допускает группу симметрии $O(2)$, в комплексно сопряженные точки $G, \bar{G}$, лежащие на комплексификации окружности $S^1 = S^3 \cap \mathbb{R}^2$. Одна координата точек $G, \bar{G}$ вещественна и по модулю больше радиуса окружности, другая – чисто мнимая.

В §2.6 также установлена интегрируемость произвольной линейной комбинации потенциалов 6-и гравитирующих центров на двумерной поверхности постоянной кривизны K^2 . В случае стандартной сферы S^2 гравитирующие центры должны быть помещены в особые точки носителя D дивизора ветвления подходящих сфероконических координат на комплексификации S^2 . Двенадцать особых точек комплексной кривой D лежат по четыре в пересечении с главными гиперплоскостями сфероконических координат и определяют суперпозицию потенциала Киллинга – Козлова – Харина и двух аналогов потенциала Дарбу – Гребенникова – Аксенова – Демина.

Когда работа соискателя [86], содержащая результаты данного §2.6 поступила в печать, соискателю стало известно о том, что в работе [17] независимо был получен частный случай результата данного параграфа: интегрируемый потенциал 4-х гравитирующих центров в пространстве постоянной кривизны K^2 .

1. *Гравитационный потенциал Киллинга – Козлова – Харина.* Пусть $F \in S^3$. Пусть θ_F – многозначная координата на S^3 , являющаяся длиной дуги геодезической на S^3 от F до текущей точки. Тогда координата $\text{ctg } \theta_F$ имеет две противоположные однозначные ветви над S^3 . С точностью до аффинного преобразования координата $\text{ctg } \theta_F$ является единственным решением уравнения Лапласа на S^3 , инвариантным относительно вращений, оставляющих непо-

движной точку F , см. [131]. По этой причине $\text{ctg } \theta_F$ была предложена В.Киллингом, а затем, независимо В.В.Козловым и А.О.Хариным в качестве аналога на S^3 потенциала гравитирующего центра. Ими была установлена интегрируемость потенциала $m^1 \text{ctg } \theta_{H^1} + m^2 \text{ctg } \theta_{H^2}$ для $H^1, H^2 \in S^3$, $m^1, m^2 \in \mathbb{R}$, являющегося аналогом потенциала Якоби двух гравитирующих центров, см. [131].

2. Аналог потенциала Дарбу – Гребенникова – Аксенова – Демина. Пусть $y = (y_1, \dots, y_4) \in \mathbb{R}^4$, $S^3 = \{y \in \mathbb{R}^4 \mid y_1^2 + \dots + y_4^2 = 1\}$, $S^2 = \{y \in S^3 \mid y_4 = 0\}$.

Пусть $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^4 x_i y_i$. Для точки F на комплексификации $\mathbb{C} S^3$ сферы S^3 положим

$$\theta_F = \arccos \langle F, x \rangle. \quad (1)$$

В случае, если точка F вещественна, определение координаты θ_F на S^3 совпадает с данным в разделе 1.

Пусть $s = (s_1, s_2, s_3)$, $s_i = \pm 1$. Пусть $c_1 < c_2 < c_3$. Пусть

$$G_{ij}^{sj} = -s_j \sqrt{\frac{c_j - c_i}{c_j - c_k}}, \quad k \neq i, j, \quad i \neq j, \quad (2)$$

где радикал в (2) берется либо положительным, либо с положительной мнимой частью. Пусть

$$G_1^s = (0, G_{12}^{s2}, G_{13}^{s3}), \quad G_2^s = (G_{21}^{s1}, 0, G_{23}^{s3}), \quad G_3^s = (G_{31}^{s1}, G_{32}^{s2}, 0) \in \mathbb{C} S^2, \quad (3)$$

в координатах (y_1, y_2, y_3) в гиперплоскости $y_4 = 0$. Легко проверить, что G_i^s , $i = 1, 2, 3$ являются 6-ю парами особых точек носителя дивизора ветвления сферо-конических координат на $\mathbb{C} S^2$, в том числе G_2^s – четыре вещественные фокальные точки.

ТЕОРЕМА. Разделяющийся гравитационный потенциал на S^2 может быть выбран в виде суммы 6 пар слагаемых

$$2V = \sum_{i=1}^3 \sum_s m_i^s \text{ctg } \theta_{G_i^s}. \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Потенциал (4) удовлетворяет уравнению Лапласа.

Так как $\theta_{-F} = \pi - \theta_F$, $\text{ctg } \theta_{-F} = -\text{ctg } \theta_F$, не ограничивая общности, можно предположить, что при $s = -t$ выполнено $m_i^s = -m_i^t$. Положим $s^{(2)} = (s_1, -s_2, s_3)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для вещественности V необходимо положить

$$m_2^s \in \mathbb{R}, \quad \bar{m}_1^s = -m_1^{s^{(2)}}, \quad \bar{m}_3^s = m_3^{s^{(2)}},$$

где черта обозначает комплексное сопряжение.

3. *Разделение сферо-конических координат.* Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^3 \frac{y_i^2}{c_i - \lambda} = 0, \quad y^2 = 1, \quad y \in \mathbb{R}^3. \quad (5)$$

Ее корни определяют сферо-конические координаты $c_1 \leq \lambda_1 \leq c_2 \leq \lambda_2 \leq c_3$ на S^2 , см. [143, 65, 53].

Тогда

$$y_i^2 = \frac{(c_i - \lambda_1)(c_i - \lambda_2)}{(c_i - c_1)(c_i - c_2)(c_i - c_3)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Уравнение Гамильтона – Якоби для лагранжиана $L = (\dot{y}^2 - V(y))|_{TS^2}$ имеет вид

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (g^{ii})^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} \right)^2 + V(\lambda_1, \lambda_2) = h,$$

где

$$\sum_{i=1}^k g^{ii} (d\lambda_i)^2 = (dy)^2|_{TS^2}, \quad V(\lambda_1, \lambda_2) = V(y)|_{S^2},$$

h – постоянная энергии, см. [143, 65, 53]. Условием аддитивного разделения переменных λ_1, λ_2 в нем является наличие зависящего от двух постоянных решения

$$S = \sum_{i=1}^2 S_i(\lambda_i, C_1, C_2), \quad \det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_i \partial C_j} \right\| \neq 0. \quad (7)$$

Из (6) вытекает $\frac{dy_i^2}{y_i^2} = \sum_{\nu=1}^2 \frac{d\lambda_\nu}{\lambda_\nu - c_i}$ и

$$(dy)^2|_{TS^2} =$$

$$-\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{8} [(\lambda_1 - c_1)(\lambda_1 - c_2)(\lambda_1 - c_3)d\lambda_1^2 - (\lambda_2 - c_1)(\lambda_2 - c_2)(\lambda_2 - c_3)d\lambda_2^2].$$

Поэтому необходимым и достаточным условием наличия решения (7) является представление потенциала в виде Штеккеля – Якоби:

$$V(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{W_1(\lambda_1) - W_2(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (8)$$

где $W_i(\lambda_i)$ – алгебраические функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Потенциал $V(y)$, удовлетворяющий условию (8), называется разделяющимся в сферо-конических координатах (5) на сфере S^2 .

Разделение потенциала y_i^{-2} в сферо-конических координатах (5) установлено в [131].

4. *Доказательство теоремы.* Имеют место представления потенциалов $\text{ctg } \theta_{G_i^s}$, $i = 1, 2, 3$ в виде (8):

$$\text{ctg } \theta_{G_1^s}|_{S^2} = \frac{\langle G_1^s, y \rangle}{\sqrt{1 - \langle G_1^s, y \rangle^2}} = \frac{s_3 \sqrt{(\lambda_1 - c_2)(\lambda_1 - c_3)} + s_2 \sqrt{(\lambda_2 - c_2)(\lambda_2 - c_3)}}{i(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad (9)$$

$$\text{ctg } \theta_{G_2^s}|_{S^2} = \frac{\langle G_2^s, y \rangle}{\sqrt{1 - \langle G_2^s, y \rangle^2}} = \frac{s_1 \sqrt{(\lambda_1 - c_1)(\lambda_1 - c_3)} + s_3 \sqrt{(\lambda_2 - c_1)(\lambda_2 - c_3)}}{i(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad (10)$$

$$\text{ctg } \theta_{G_3^s}|_{S^2} = \frac{\langle G_3^s, y \rangle}{\sqrt{1 - \langle G_3^s, y \rangle^2}} = \frac{s_2 \sqrt{(\lambda_1 - c_1)(\lambda_1 - c_2)} + s_1 \sqrt{(\lambda_2 - c_1)(\lambda_2 - c_2)}}{i(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad (11)$$

где в формуле (10) для $y \in S^2$ и $(\lambda_1, \lambda_2) \in [c_1, c_2] \times [c_2, c_3]$ выбираются вещественная положительная ветвь у радикала $\sqrt{1 - \langle G_2^s, y \rangle^2}$ и чисто мнимая с положительной мнимой частью у радикалов $\sqrt{(\lambda_1 - c_1)(\lambda_1 - c_3)}$ и $\sqrt{(\lambda_2 - c_1)(\lambda_2 - c_3)}$. Правильный выбор однозначных ветвей над прямоугольником $(\lambda_1, \lambda_2) \in [c_1, c_2] \times [c_2, c_3]$ в равенствах (9) и (11) многозначных алгебраических функций требует отдельного исследования.

Первое равенство в формулах (9) – (11) вытекает из определения угла (1). Ввиду $G_2^s \in \mathbb{R}$, второе равенство в формуле (10) установлено в [131]:§4.

Подставим в среднее выражение формулы (10) зависимость y_i от λ_1, λ_2 в силу (6) и зависимость G_2^s от c_1, c_2, c_3 в силу (2). Получим тождество двух четырехзначных алгебраических функций от переменных $\lambda_1, \lambda_2, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$. Это тождество остается тождеством четырехзначных алгебраических функций и после циклической перестановки c_1, c_2, c_3 при неизменных λ_1, λ_2 . Циклическая перестановка c_1, c_2, c_3 отвечает циклической перестановке y_1, y_2, y_3 в силу (6) и циклической перестановке G_1^s, G_2^s, G_3^s с циклической перестановкой s_1, s_2, s_3 в силу (2), (3). Следовательно, из представления (10) вытекают представления (9) и (11).

Доказательство замечания 1. Выполнение уравнения Лапласа для потенциала $\text{ctg } \theta_{G_2^s}$ установлено в [131]. Но уравнение Лапласа на $\mathbb{C}S^3$, см. [131]:§1, инвариантно относительно стандартного действия группы Ли $O(4, \mathbb{C})$ на $\mathbb{C}S^3$:

$$y \rightarrow Ay, \quad y \in \mathbb{C}S^3, \quad A \in O(4, \mathbb{C}).$$

Индукцируемое действие на линейных формах имеет вид: $\langle F, y \rangle \rightarrow \langle A^{-1*}F, y \rangle$, $F \in \mathbb{C}S^3$. Но $\mathbb{C}S^3$ является орбитой относительно действия группы Ли $O(4, \mathbb{C})$: $F \rightarrow A^{-1*}F$, см. [25]:0.5. Следовательно, найдется элемент $A \in O(4, \mathbb{C})$, переводящий G_2^s в G_1^s . Поэтому из выполнения уравнения Лапласа для $\frac{\langle G_2^s, y \rangle}{\sqrt{1-\langle G_2^s, y \rangle^2}}$ вытекает выполнение уравнения Лапласа для преобразованной функции $\frac{\langle G_1^s, y \rangle}{\sqrt{1-\langle G_1^s, y \rangle^2}}$.

Доказательство замечания 2. Пусть $m_1^s = a + ib$, $m_1^{s(2)} = a^2 + ib^2$, где $a, b, a^2, b^2 \in \mathbb{R}$.

В формуле (9) выполнено:

$$\sqrt{(\lambda_1 - c_2)(\lambda_1 - c_3)} \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{(\lambda_2 - c_2)(\lambda_2 - c_3)} \in i\mathbb{R}.$$

Из вещественности слагаемого в $2V$, пропорционального, соответственно, $\sqrt{(\lambda_1 - c_2)(\lambda_1 - c_3)}$, $\sqrt{(\lambda_2 - c_2)(\lambda_2 - c_3)}$, вытекает $m_1^s \operatorname{ctg} \theta_{G_1^s} + m_1^{s(2)} \operatorname{ctg} \theta_{G_1^{s(2)}} \in \mathbb{R}$. То есть,

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im}[(a + ib)i^{-1}(s_3\sqrt{(\lambda_1 - c_2)(\lambda_1 - c_3)} + s_2\sqrt{(\lambda_2 - c_2)(\lambda_2 - c_3)}) + \\ & (a^2 + ib^2)i^{-1}(s_3\sqrt{(\lambda_1 - c_2)(\lambda_1 - c_3)} - s_2\sqrt{(\lambda_2 - c_2)(\lambda_2 - c_3)})] = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $a + a^2 = 0$, $b - b^2 = 0$. То есть, выполнено $\bar{m}_1^s = -m_1^{s(2)}$.

Пусть $m_3^s = a + ib$, $m_3^{s(2)} = a^2 + ib^2$, где $a, b, a^2, b^2 \in \mathbb{R}$.

В формуле (11) выполнено:

$$\sqrt{(\lambda_1 - c_1)(\lambda_1 - c_2)} \in i\mathbb{R}, \quad \sqrt{(\lambda_2 - c_1)(\lambda_2 - c_2)} \in \mathbb{R}.$$

Из вещественности слагаемого в $2V$, пропорционального, соответственно, $\sqrt{(\lambda_1 - c_1)(\lambda_1 - c_2)}$, $\sqrt{(\lambda_2 - c_1)(\lambda_2 - c_2)}$, вытекает $m_3^s \operatorname{ctg} \theta_{G_3^s} + m_3^{s(2)} \operatorname{ctg} \theta_{G_3^{s(2)}} \in \mathbb{R}$. То есть,

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im}[(a + ib)i^{-1}(s_2\sqrt{(\lambda_1 - c_1)(\lambda_1 - c_2)} + s_1\sqrt{(\lambda_2 - c_1)(\lambda_2 - c_2)}) + \\ & (a^2 + ib^2)i^{-1}(-s_2\sqrt{(\lambda_1 - c_1)(\lambda_1 - c_2)} + s_1\sqrt{(\lambda_2 - c_1)(\lambda_2 - c_2)})] = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $a + a^2 = 0$, $b - b^2 = 0$. То есть, $\bar{m}_3^s = m_3^{s(2)}$.

5. Понижение по Раусу. Пусть y_1, y_2 – ортогональные декартовы координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$ $O(2)$ -симметрии потенциала, пусть r, φ – полярные координаты в ортогональном дополнении к $\mathbb{R}^2$, проходящем через центр сферы S^3 . Предположим, что масса частицы равна 1. Кинетическая энергия частицы имеет вид

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + C^2r^{-2} + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2),$$

где C – интеграл момента при вращении вокруг $\mathbb{R}^2$. Так как потенциал $m \operatorname{ctg} \theta_G + \bar{m} \operatorname{ctg} \theta_{\bar{G}}$ допускает группу изометрий с векторным полем $\partial/\partial\varphi$, он является потенциалом на геометрическом факторе $S^3/O(2)$, изоморфном полусфере $r \geq 0$ двумерной сферы $\{(r, y_1, y_2) \mid r^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1\}$. Но фактор $S^3/O(2)$ допускает изометричное вложение $S^3/O(2) \rightarrow S^2 = \{S^3 \mid y_4 = 0\} \subset S^3$, согласованное с проекцией $S^3 \rightarrow S^3/O(2)$. То есть, при котором факторпотенциал совпадает с ограничением потенциала.

Но, согласно (9) – (11), ограничение потенциала $m \operatorname{ctg} \theta_G + \bar{m} \operatorname{ctg} \theta_{\bar{G}}$ на S^2 разделяется в сфероконических координатах (5). Слагаемое Рауса $C^2 r^{-2}|_{S^2} = y_3^{-2}$ разделяется в тех же сфероконических координатах (5).

§2.7. Классификация потенциалов, разделяющихся в эллиптических координатах

1. Рассматривается k -мерный совместный уровень E эллиптических (сферо-конических) координат в $\mathbb{R}^n$ при $k = 2, \dots, n$. Рассматриваются механические системы с лагранжианом $L = (\dot{x}^2 - V(x))|_E$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $V(x)$ – рациональная функция, а TE – касательное расслоение к E . Пусть $\mathcal{H}$ – уравнение Гамильтона – Якоби, отвечающее лагранжиану L . Найдена производящая функция, приводящая к базису в пространстве рациональных потенциалов $V(x)|_E$, для которых уравнение Гамильтона – Якоби $\mathcal{H}$ разделяется в эллиптических (сферо-конических) координатах на уровне E . Найдены ранее не известные серии таких, в том числе, регулярных потенциалов. Попутно установлено, что на поверхности фиксированных $n - 2$ эллиптических (сферо-конических) координат в $\mathbb{C}^n$ дивизор ветвления двух остальных распадается в симметричную конфигурацию прямых.

1.1. *Случай эллиптических координат.* Пусть $a_1 < \dots < a_n$. Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 1, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Его корни определяют эллиптические координаты $\lambda_1 \leq a_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq a_n$ в $\mathbb{R}^n$, см. [34, 65, 46]. Тогда

$$x_i^2 = \frac{(a_i - \lambda_1) \dots (a_i - \lambda_n)}{(a_i - a_1) \dots (a_i - a_n)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Рассмотрим произвольную поверхность фиксированных $n - k$ из них: перенумеровывая $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, можно считать, что она определяется уравнениями $\lambda_{k+1} = b_{k+1}, \dots, \lambda_n = b_n$ для некоторых вещественных $b_{k+1}, \dots, b_n$, лежащих не более чем по одному в интервалах $(-\infty, a_1)$, (a_1, a_2) , $\dots$, (a_{n-1}, a_n) . Обозначим полученную поверхность через E_B^k , где $B = \{b_{k+1}, \dots, b_n\}$, а k – ее размерность. Уравнение Гамильтона – Якоби $\mathcal{H}$ для лагранжиана $L = (\dot{x}^2 - V(x))|_{TE_B^k}$ имеет вид

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^k (g^{\nu\nu})^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_\nu} \right)^2 + V(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = h,$$

где функция $V(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ и компоненты $g^{\nu\nu}$ метрического тензора определяются из

$$\sum_{i=1}^k g^{\nu\nu} (d\lambda_\nu)^2 = (dx)^2|_{TE_B^k}, \quad V(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = V(x)|_{E_B^k},$$

а h – постоянная энергии, см. [34, 65, 46]. Согласно определению [128] выписанное уравнение Гамильтона – Якоби допускает аддитивное разделение переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, если имеет зависящее от полного набора постоянных $C_1, \dots, C_k$ решение

$$S = \sum_{\nu=1}^k S_{\nu}(\lambda_{\nu}, C_1, \dots, C_k), \quad \det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda_i \partial C_j} \right\| \neq 0. \quad (1.3)$$

Из формулы (1.2) вытекает $\frac{dx_i^2}{x_i^2} = \sum_{\nu=1}^k \frac{d\lambda_{\nu}}{\lambda_{\nu} - a_i}$ и

$$(dx)^2|_{TE_B^k} = -\frac{1}{8} \sum_{\nu=1}^k \gamma_{\nu}(\lambda_{\nu} - b_{k+1}) \dots (\lambda_{\nu} - b_n)(\lambda_{\nu} - a_1) \dots (\lambda_{\nu} - a_n)(d\lambda_{\nu})^2,$$

где $\gamma_{\nu} = (\lambda_{\nu} - \lambda_1) \dots (\lambda_{\nu} - \lambda_k)$. Поэтому достаточным условием наличия решения (1.3) у уравнения $\mathcal{H}$ является представление

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_k) := \sum_{\nu=1}^k \gamma_{\nu}^{-1} W_{\nu}(\lambda_{\nu}), \quad (1.4)$$

где $W_{\nu}(\lambda_{\nu})$ – алгебраические функции от λ_{ν} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Потенциал $V(x)$, удовлетворяющий условию (1.4), называется разделяющимся на поверхности E_B^k в эллиптических координатах (1.1).

Линейное пространство ограничений рациональных функций из $\mathbb{R}^n$ на E_B^k , разделяющихся на E_B^k в эллиптических координатах (1.1), зависящее от набора параметров $a = (a_1, \dots, a_n)$, B , обозначим через $J_a(E_B^k)$. Положим $e_{a,w}(x) = [1 - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i - w}]^{-1}$, где $w \in \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 1.

a) Условие $V(x) \in J_a(E_B^k)$ эквивалентно тому, что $W_1(\lambda) = \dots = W_k(\lambda)$ – рациональная функция от λ .

b) $e_{a,w}(x) \in J_a(E_B^k)$ при $w \notin B$.

Отметим, что при $w \in B$ функция $e_{a,w}(x)$ содержит поверхность E_B^k в своем полярном множестве. Пусть $E_b^{n-1} = E_B^{n-1}$ при $B = \{b\}$.

В частности, разложения функции $e_{a,w}(x)$ имеют вид и

в точке $w = \infty$ приводит к полиномам Богоявленского – Войцеховского, см. §3 в [10], [163]:

$$1 - w^{-1}x^2 + w^{-2}[x^4 - \langle ax, x \rangle] - w^{-3}[x^6 - 2x^2 \langle ax, x \rangle + \langle a^2 x, x \rangle] + \dots = \quad (1.5)$$

$$= (1 - \frac{a_1}{w}) \dots (1 - \frac{a_n}{w}) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{w^j} \sum_{\nu=1}^n \Gamma_{\nu}^{-1} \lambda_{\nu}^{j+n}, \quad \Gamma_{\nu} = (\lambda_{\nu} - \lambda_1) \dots (\lambda_{\nu} - \lambda_n)$$

(третье слагаемое в (1.5) было введено Чудновскими в [118] и разделено Войцеховским в [164]);

в точке $w = a_1$ — к рациональным потенциалам:

$$\frac{w_0}{x_1^2} \left(1 - w_0 \frac{1 + \langle \bar{a}^{-1} \bar{x}, \bar{x} \rangle}{x_1^2} + w_0^2 \frac{(1 + \langle \bar{a}^{-1} \bar{x}, \bar{x} \rangle)^2 + x_1^2 \langle \bar{a}^{-2} \bar{x}, \bar{x} \rangle}{x_1^4} + \dots \right) = \quad (1.6)$$

$$= -(\bar{a}_2 + w_0) \dots (\bar{a}_n + w_0) \sum_{j=0}^{\infty} w_0^{j+1} \sum_{\nu=1}^n \Gamma_{\nu}^{-1} (\lambda_{\nu} - a_0)^{-1-j},$$

где $w_0 = w - a_1$, $\bar{a} = a_1 - \text{diag}(a_2, \dots, a_n)$, $\bar{x} = \text{diag}(x_2, \dots, x_n)$ (первое слагаемое в (1.6) было введено Е.Росохатиусом в [151] и исследовано В.В.Козловым и Ю.Н.Федоровым [46, 53]);

в точках $w = a_i$, $i = 2, 3, \dots, n$ разложения аналогичны;

в точке $w = 0$ приводит к рациональным потенциалам:

$$\frac{1}{1 - \langle a^{-1} x, x \rangle} \left(1 - w \frac{\langle a^{-2} x, x \rangle}{1 - \langle a^{-1} x, x \rangle} - w^2 \frac{\langle a^{-3} x, x \rangle}{1 - \langle a^{-1} x, x \rangle} + \dots \right)^{-1} =$$

$$-(w - a_1) \dots (w - a_n) \sum_{j=0}^{\infty} w^j \sum_{\nu=1}^n \Gamma_{\nu}^{-1} \lambda_{\nu}^{-1-j}, \quad (1.7)$$

(начальный член см. у Войцеховского в [163]);

в точках $w \in \mathbb{C} \setminus B$ разложения аналогичны;

в точке $w = 0$ в ограничении на E_0^n приводит к регулярным потенциалам:

$$-\frac{w^{-1}}{\langle a^{-2} x, x \rangle} \left(1 + w \frac{\langle a^{-3} x, x \rangle}{\langle a^{-2} x, x \rangle} + w^2 \frac{\langle a^{-4} x, x \rangle}{\langle a^{-2} x, x \rangle} + \dots \right)^{-1} =$$

$$-w^{-1} (w - a_1) \dots (w - a_n) \sum_{j=0}^{\infty} w^j \sum_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}^{-1} \lambda_{\nu}^j,$$

$$\gamma_{\nu} = (\lambda_{\nu} - \lambda_1) \dots (\lambda_{\nu} - \lambda_{n-1}), \quad (1.8)$$

где начальный член может быть интерпретирован как потенциал обратных квадратов анизотропного расстояния в $\mathbb{R}^{n+1}$. Этот член может быть записан также в виде $-a_1 \dots a_n \lambda_1^{-1} \dots \lambda_{n-1}^{-1}$.

В точках $b \in B$ в ограничении на E_b^n разложения аналогичны.

Пусть $\mathcal{E}$ — объединение:

системы коэффициентов разложения производящей функции $e_{a,w}(x)$ в ряд Лорана по $w - w_0$ в точках $w_0 \in \mathbb{C} \setminus B$ и

системы коэффициентов разложения производящей функции $e_{a,w}(x)|_{1=\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i - w_0}}$ в ряд Лорана по $w - w_0$ в точках $w_0 \in B$.

Отметим, что если для $w_0 \in B$ предварительно не ограничить $e_{a,w}(x)$ на квадрату $1 = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i - w_0}$, то каждый коэффициент разложения $e_{a,w}(x)$ по $w - w_0$ содержит поверхность $E_{w_0}^k$ в своем полярном множестве, см. разложение (1.7).

ТЕОРЕМА 1'.

с) Пусть $k \geq 2$. Тогда $\mathcal{E}|_{E_B^k}$ является базисом над $\mathbb{C}$ в пространстве $J_a(E_B^k) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

1.2. Случай сферо-конических координат. Пусть $c_1 < \dots < c_n$. Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{c_i - \tilde{\lambda}} = 0, \quad y^2 = 1, \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (1.9)$$

Ее корни определяют сферо-конические координаты $c_1 \leq \tilde{\lambda}_1 \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_n \leq c_n$ на $S^{n-1} := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^2 = 1\}$, см. [34, 65, 46]. Перейдем в потенциале $V(y)|_{S^{n-1}}$ к сфероконическим координатам: пусть $V(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_k) := V(y)|_{S^{n-1}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Потенциал $V(y)$, удовлетворяющий условию

$$V(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{n-1}) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \gamma_{\nu}^{-1} W_{\nu}(\lambda_{\nu}), \quad \tilde{\gamma}_i = (\tilde{\lambda}_i - \tilde{\lambda}_1) \dots (\tilde{\lambda}_i - \tilde{\lambda}_{n-1}), \quad (1.9a)$$

где $W_{\nu}(\lambda_{\nu})$ – алгебраические функции от λ_{ν} , называется разделяющимся на сфере S^{n-1} в сферо-конических координатах (1.9).

Линейное пространство рациональных функций на S^{n-1} , разделяющихся на S^{n-1} в сферо-конических координатах (1.9), обозначим через $J_c(S^{n-1})$. Положим $s_{c,w}(y) = [-\sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{c_i - w}]^{-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 0. Аналогично разд. 1.1 доказывается, что условие (1.9a) является достаточным условием наличия зависящего от k постоянных решения уравнения гамильтона – Якоби $\mathcal{H}$, отвечающего лагранжиану $(\dot{y}^2 - V(y))|_{TS^{n-1}}$.

СЛЕДСТВИЕ 1.

а) Условие $V(y) \in J_c(S^{n-1})$ эквивалентно тому, что $W_1(\tilde{\lambda}) = \dots = W_{n-1}(\tilde{\lambda})$ – рациональная функция от $\tilde{\lambda}$.

б) $s_{c,w}(y) \in J_c(S^{n-1})$.

В частности, разложения функции $s_{c,w}(y)$ имеют вид и в точке $w = \infty$ приводят к рациональным функциям Богоявленского [10]

$$w \frac{1}{y^2} - \frac{\langle cy, y \rangle}{y^4} + w^{-1} \frac{\langle cy, y \rangle^2 - y^2 \langle c^2 y, y \rangle}{y^6} + \dots,$$

в точке $w = 0$ имеют вид

$$-\frac{1}{\langle c^{-1}y, y \rangle} + w \frac{\langle c^{-2}y, y \rangle}{\langle c^{-1}y, y \rangle^2} - w^2 \frac{\langle c^{-1}y, y \rangle^2 - \langle c^{-1}y, y \rangle \langle c^{-3}y, y \rangle}{\langle c^{-1}y, y \rangle^3} + \dots,$$

где первое слагаемое разделено Браденом в [114];

в точках $w \in \mathbb{C} \setminus \{c_1, \dots, c_n\}$ разложения аналогичны.

Следствие 1'.

с) Система ограничений на S^{n-1} коэффициентов разложения производящей функции $s_{c,w}(y)$ в ряд Лорана по $w - w_0$ в точках $w_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ является базисом над $\mathbb{C}$ в пространстве $J_c(S^{n-1}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

1.3. Дивизор ветвления на двумерных конфокальных поверхностях.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.

а. Дивизор ветвления эллиптических координат на комплексификации $\mathbb{C} E_B^2$ двумерной конфокальной поверхности E_B^2 распадается в конфигурацию $\mathbb{C} P_n$, состоящую из 2^n однократных комплексных прямых $\mathbb{C} l^s$. Для произвольного $j = 1, \dots, n$ прямая $\mathbb{C} l^s$ задается пересечением $n - 1$ гиперплоскости:

$$\mathbb{C} l^s = \bigcap_{l=1, l \neq j}^n \pi_{jl}^{s_j s_l}, \quad (1.10)$$

где $s = (s_1, \dots, s_n)$, $s_j \in \{-1, +1\}$. Здесь гиперплоскость $\pi_{jl}^{s_j s_l}$ в $\mathbb{C}^n$ определяется уравнением

$$s_j \sqrt{\alpha_j} x_j - s_l \sqrt{\alpha_l} x_l = a_j - a_l, \quad 1 \leq j \neq l \leq n. \quad (1.11)$$

где

$$\alpha_j = \frac{(a_j - a_1) \dots (a_j - a_n)}{(a_j - b_1) \dots (a_j - b_n)},$$

б. При $a_1 < \dots < a_n$ конфигурация $\mathbb{C} P_n$ является комплексификацией вещественной конфигурации P_n , состоящей из 2^n вещественных прямых $l^s = \mathbb{C} l^s \cap (\bigoplus_{j=1}^n \frac{\mathbb{R}}{\sqrt{\alpha_j}})$. На вещественной конфигурации P_n группа отражений $(\mathbb{Z}_2)^n$, порождаемая инволюциями

$$x_j \rightarrow -x_j, \quad s_j \rightarrow -s_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

действует свободно и транзитивно. Прямые конфигурации P_n имеют простые пересечения в $2^{n-1}n$ точках

$$F_i^s = (F_{i1}^{s_1}, \dots, F_{in}^{s_n}),$$

где

$$F_{ij}^{s_j} = s_j \frac{a_i - a_j}{\sqrt{\alpha_j}}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

по n точек на каждой прямой: $F_i^s = l^s \cap l^{i(s)}$. Здесь набор знаков $i(s)$ получается из набора s заменой i -го знака на противоположный.

Прямая $l^{i(s)}$ получается из прямой l^s отражением относительно гиперплоскости $x_i = 0$. При $t \neq s, i(s)$ прямые l^s и l^t не пересекаются.

в. Пусть L является $(n - k)$ -элементным подмножеством множества $\{1, \dots, \hat{j}, \dots, n\}$, где крышка означает, что индекс j исключен. Тогда k -мерная плоскость $\cap_{l \in L} \pi_{jl}^{s_j s_l}$ содержит все прямые $\mathbb{C} l^t$ со знаками, совпадающими: $t_l = s_l$ для индексов l из подмножества $L \cup \{j\}$.

Пусть $\mathbb{C} S_j^{s_j n-1} = \{x \in \mathbb{C}^n \mid (r_j^{s_j})^2 = \beta_j\}$, где

$$(r_j^{s_j})^2 = (x_j - s_j \sqrt{\alpha_j})^2 + \sum_{i=1, i \neq j}^n x_i^2, \quad -\beta_j = 2a_j - \alpha_j + \sum_{\nu=3}^n b_\nu - \sum_{i=1}^n a_i. \quad (1.12)$$

г. Конфигурация $\mathbb{C} P_n$, лежащая на конфокальной поверхности $\mathbb{C} E_B^2$, является касательной к паре сфер $\cup_{s_j} S_j^{s_j n-1}$ в 2^{n-1} точках F_j^s .

д. Случай эллиптических координат в $\mathbb{C}^2$. Конфигурация $\mathbb{C} P_2$ имеет вид $ix_1 \pm x_2 = \pm \sqrt{a_2 - a_1}$. В пересечении с вещественным подпространством $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in i\mathbb{R}$ она порождена сторонами квадрата.

е. Случай квадрики $\mathbb{C} E_b^2$ в $\mathbb{C}^3$. Восемь прямых конфигурации $\mathbb{C} P_3$ имеют вид

$$s_2 \sqrt{\alpha_2} x_2 = s_1 \sqrt{\alpha_1} x_1 + a_2 - a_1 = s_3 \sqrt{\alpha_3} x_3 + a_2 - a_3,$$

где $\alpha_j = (a_j - a_i)(a_j - a_k)/(a_j - b)$ для всех перестановок (ijk) индексов 1, 2, 3. Вещественная конфигурация P_3 получается из комплексной $\mathbb{C} P_3$, если ограничиться значениями $x_1, x_3 \in \mathbb{R}, x_2 \in i\mathbb{R}$, и представляет собой 8 прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (четыре – одного семейства, четыре – другого, каждая прямая одного семейства пересекает три прямых другого семейства и одной параллельна). При $a_1 \leq b \leq a_2 < a_3$ конфигурация P_3 порождена диагоналями четырех конгруэнтных равнобедренных трапеций с вершинами F_2^s, F_3^s и попарно общими, параллельными прямой $x_2 = x_3 = 0$ основаниями. Трапеции переставляются отражениями $x_2 \rightarrow -x_2, x_3 \rightarrow -x_3$, диагонали в них – отражениями $x_2 \rightarrow -x_2$, точки F_1^s являются точками пересечения диагоналей.

1.4. Изоморфизмы пространств разделяющихся потенциалов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Эллиптические координаты (1.1) на комплексификации $\mathbb{C} E_b^{n-1}$ поверхности E_b^{n-1} в $\mathbb{C}^n$ при $b \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ переходят

а) в сферо-конические координаты $(1.9)|_{c_i=a_i, \bar{\lambda}_i=\lambda_i}$ на комплексификации $\mathbb{C} S^{n-1}$ сферы S^{n-1} при линейной комплексной замене $y_i = x_i / \sqrt{a_i - b}$:

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 1 \right) |_{\mathbb{C} E_B^{n-1}} \rightarrow \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{c_i - \bar{\lambda}} = 0, \quad y^2 = 1 \right\}; \quad (1.13)$$

эта замена индуцирует изоморфизм линейных пространств рациональных разделяющихся потенциалов $J_a(E_b^{n-1}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow J_c(S^{n-1}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ и связывает производящие функции:

$$e_{a-b, w-b}(x)|_{E_b^{n-1}} = -(w-b)^{-1} s_{c-b, w-b}(y)|_{c_i=a_i}, \quad y_i = x_i / \sqrt{a_i - b};$$

б) в эллиптические координаты в $\mathbb{C}^{n-1}$ при проекции квадрики вдоль полуоси a_j и линейном растяжении $z_i = \sqrt{\frac{a_i - a_j}{a_i - b}} x_i$:

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 1 \right) |_{\mathbb{C} E_b^{n-1}} \rightarrow \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{z_i^2}{a_i - \lambda} = 1$$

(для каждого $j = 1, 2, \dots, n$); последняя замена индуцирует изоморфизм линейных пространств рациональных разделяющихся потенциалов $J_a(E_b^{n-1}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow J_{\hat{a}}(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, где $\hat{a} = \text{diag}(a_1, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_n)$, и связывает производящие функции:

$$e_{a, w}(x)|_{\mathbb{C} E_b^{n-1}} = \frac{a_j - w}{b - w} e_{\hat{a}, w}(z).$$

2. Доказательства.

2.4. Доказательство предложения 1.

б) Подставляя $x_j^2 = (a_j - b)(1 - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i - b})$, выраженное из уравнения (1.1)| $_{\lambda=b}$, получаем

$$\begin{aligned} e_{a, \lambda}^{-1}(x) &= 1 - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = \\ &= \left(1 - \frac{a_j - b}{a_j - \lambda} \right) - \sum_{i=1, i \neq j}^n \left(\frac{1}{a_i - \lambda} - \frac{a_j - b}{(a_i - b)(a_j - \lambda)} \right) x_i^2 = \\ &= \frac{b - \lambda}{a_j - \lambda} \left(1 - \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{1}{a_i - \lambda} \frac{(a_i - a_j)x_i^2}{a_i - b} \right) = \frac{b - \lambda}{a_j - \lambda} e_{\hat{a}, \lambda}^{-1}(z). \end{aligned}$$

а) Формула (1.13) доказывается аналогично случаю б).

Диагональный сдвиг сферо-конических координат на сфере вдоль их линий

$$y_i \rightarrow y_i, \quad c_i \rightarrow c_i - w, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\tilde{\lambda}_\nu \rightarrow \tilde{\lambda}_\nu - w, \quad \nu = 1, \dots, n-1,$$

в формулах [143, 65] на $y^2 = 1$

$$c^{-1} y^2 = \frac{\tilde{\lambda}_1 \dots \tilde{\lambda}_{n-1}}{c_1 \dots c_n}, \quad \frac{(-1)^n}{\tilde{\lambda}_1 \dots \tilde{\lambda}_{n-1}} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \tilde{\gamma}_\nu^{-1} \tilde{\lambda}_\nu^{-1}$$

приводит к представлению потенциала $s_{c,w}(y)$ в виде Штеккеля – Якоби на $y^2 = 1$:

$$-s_{c,w}(y) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{c_i - \tilde{\lambda}} \right)^{-1} =$$

$$-(w - c_1) \dots (w - c_n) \sum_{\nu=1}^{n-1} \tilde{\gamma}_\nu^{-1} (w - \tilde{\lambda}_\nu)^{-1} = we_{a,w}(x)|_{E_0^{n-1}}$$

Последнее равенство доказывает вторую часть предложения 1а.

2.1. Доказательство теорем 1 и 1'.

б) Диагональный сдвиг эллиптических координат вдоль их линий. Вычисляя $\sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{w=a_i} \frac{w^{-1}\Lambda(w)}{A(w)}$ и $\sum_{\nu=1}^n \operatorname{res}_{w=\lambda_\nu} \frac{w^{-1}}{\Lambda(w)}$, получаем формулы [34] в $\mathbb{R}^n$:

$$1 - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i} = \frac{\lambda_1 \dots \lambda_n}{a_1 \dots a_n}, \quad \frac{(-1)^{n-1}}{\lambda_1 \dots \lambda_n} = \sum_{\nu=1}^n \Gamma_\nu^{-1} \lambda_\nu^{-1}. \quad (2.1)$$

После подстановки

$$x_i \rightarrow x_i, \quad a_i \rightarrow a_i - w, \quad i = 1, \dots, n, \quad \lambda_\nu \rightarrow \lambda_\nu - w, \quad \nu = 1, \dots, n$$

они приводят к представлению $e_{a,w}(x)$ в виде Штеккеля – Якоби в $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i - w}} = (w - a_1) \dots (w - a_n) \sum_{\nu=1}^n \Gamma_\nu^{-1} (w - \lambda_\nu)^{-1}. \quad (2.2)$$

Представление Штеккеля – Якоби для конфокальной поверхности E_B^k выводится из данного итерацией замены предложения 1б.

Вывод теоремы 1'с) из теоремы 1а).

Лемма 1. Пусть $k \geq 2$. Комплексификации поверхностей

i) $E_B^k \cap \{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i - w_0} = 1\}$ при $\mathbb{C} \ni w_0 \notin B$,

ii) $E_B^k \cap \{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{(a_i - w_0)^2} = 1\}$ при $w_0 \in B$,

iii) $E_B^k \cap \{x_j = 0\}$

различны при различных $w_0 \in \mathbb{C}$.

Доказательство леммы 1 получается с помощью предложения 1б) последовательностью проекций, приводящей к проекции $\mathbb{C} E_B^k \rightarrow \mathbb{C}^k$.

Докажем линейную независимость элементов множества $\mathcal{E}|_{E_B^k}$. При различных $w_0 \in \mathbb{C}$ на комплексификации $\mathbb{C} E_B^k$ поверхности E_B^k носители дивизоров полюсов комплексификаций элементов $\mathcal{E}|_{E_B^k}$ нетривиальны и различны.

Действительно, для $E_B^k = \mathbb{C}^n$ при $B = \emptyset$ это видно непосредственно из разложений (1.6), (1.7). При $B = \{b\}$, $w_0 \neq b$ это вытекает из тех же разложений (1.6), (1.7), при $w_0 = b$ – из разложения (1.8).

Для доказательства линейной независимости полученной в результате указанных разложений совокупностей достаточно воспользоваться леммой 1 при $B = \{b\}$.

Случай $(n-k)$ -элементного подмножества B рассматривается аналогично.

При одинаковых w_0 различны порядки дивизоров. Следовательно, элементы системы $\mathcal{E}|_{E_B^k}$ линейно независимы.

Докажем, что пространство разделяющихся потенциалов $J_a(E_B^k)$, удовлетворяющих условию " $W_1(\lambda) = \dots = W_k(\lambda)$ – рациональная функция от λ ", порождается системой коэффициентов $\mathcal{E}|_{E_B^k}$.

Действительно, разлагая рациональную функцию $W_1(\lambda) = \dots = W_{n-1}(\lambda)$ от λ на простые дроби, получаем, что потенциал $V(x)$ на E_B^k является конечной линейной комбинацией от

$$\sum_{\nu=1}^k \gamma_{\nu}^{-1} \lambda_{\nu}^s, \quad \sum_{\nu=1}^k \gamma_{\nu}^{-1} (\lambda_{\nu} - w_0)^{-s},$$

где $s = 0, 1, 2, \dots$, $w_0 \in \mathbb{C}$. Но первые из этих функций – ограничения полиномов Богоявленского – Войцеховского (1.5). Из разложения (1.7) следует, что $\sum_{\nu=1}^n \Gamma_{\nu}^{-1} \lambda_{\nu}^{-s}$, $s = 1, 2, \dots$ – линейные комбинации коэффициентов при целых неотрицательных степенях w при разложении функции $e_{a,w}(x)$ в $\mathbb{C}^n$ в ряд Тейлора по w в точке $w_0 = 0$. Следовательно, $\sum_{\nu=1}^n \Gamma_{\nu}^{-1} (\lambda_{\nu} - w_0)^{-s}$, $s = 1, 2, \dots$ – линейные комбинации коэффициентов при целых неотрицательных степенях $w - w_0$ при разложении функции $e_{a,w}(x)$ в $\mathbb{C}^n$ в ряд Тейлора по $w - w_0$ в точке w_0 . При $w_0 \in \{a_1, \dots, a_n\}$ из разложения (1.6) вытекает, что $\sum_{\nu=1}^n \Gamma_{\nu}^{-1} (\lambda_{\nu} - w_0)^{-s}$, $s = 1, 2, \dots$ – линейные комбинации коэффициентов при целых неотрицательных степенях $w - w_0$ при разложении функции $e_{a,w}(x)$ в $\mathbb{C}^n$ в ряд Тейлора по $w - w_0$ в точке w_0 .

Итерация предложения 1б) сводит выражения $\sum_{\nu=1}^k \gamma_{\nu}^{-1} (\lambda_{\nu} - w_0)^{-s}$, $s = 1, 2, \dots$ к рассмотренным в предыдущем абзаце линейным комбинациям коэффициентов при целых степенях $w - w_0$ при разложении функции $e_{a,w}(x)|_{E_B^k}$ в ряд Лорана по $w - w_0$ в точке $w_0 \in \mathbb{C}$.

Следовательно, из теоремы 1а) вытекает теорема 1'с)

Доказательство теоремы 1а). Действительно, фиксируя в формулах (1.4) и (1.2) все, кроме одной, эллиптические координаты на E_B^k получаем, что

$$W_{\nu}(\lambda_{\nu}) - \text{рациональная функция от } \lambda_{\nu}, \sqrt{\lambda_{\nu} - a_1}, \dots, \sqrt{\lambda_{\nu} - a_n}. \quad (2.3)$$

Случай E_B^2 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. $W_1(\lambda) = W_2(\lambda)$.

Доказательство предложения 2. Пусть U – односвязная окрестность точки $x \in \mathbb{C}P_n$ на комплексификации $\mathbb{C}E_B^2$ поверхности E_B^2 , не пересекающая гиперповерхности $x_1 \dots x_n = 0$. Тогда корень $\lambda(x)|_U$ не принимает значение a_j для $j = 1, \dots, n$ и возможен выбор однозначной ветви алгебраической функции $\sqrt{\lambda - a_j}$, а следовательно, и алгебраической функции $W_\nu(\lambda(x))$, над римановой поверхностью $\{x \in U, w \in \mathbb{C}^1 \mid w = \lambda(x)\}$. Так как эта риманова поверхность двулистно накрывает окрестность U и имеет гиперповерхностью ветвления гиперповерхность $\mathbb{C}P_n \cap U$, то при обходе гиперповерхности $\mathbb{C}P_n \cap U$ в U листы $\lambda_1(x)$ и $\lambda_2(x)$ меняются местами и равенство

$$V(x) = \frac{W_1(\lambda_1) - W_2(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (2.4)$$

переходит в равенство

$$V(x) = \frac{W_1(\lambda_2) - W_2(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Из однозначности функции $V(x)|_U$ вытекает $W_1(\lambda) = W_2(\lambda)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Функция $W_1(\lambda) = W_2(\lambda)$ однозначна в точке $\lambda = a_j$, $j = 1, \dots, n$.

Доказательство предложения 3. Пусть, для наглядности $j = 2$. При $n = 3$, $a_1 < a_2 < a_3 \in \mathbb{R}$ значение $\lambda(x) = a_2$ соответствует четырем омбилическим точкам эллипсоида.

Из представления (2.3) вытекает разложение Лорана

$$W(\lambda) = A_p(\lambda - a_2)^p + A_{p+1/2}(\lambda - a_2)^{p+1/2} + \dots, \quad (2.5)$$

где $p \in \mathbb{Z}/2$ и $A_p \neq 0$. Из выражений величин $\sum_{i=1}^n a_i^j x_i^2$, $j = 0, 1, \dots$ через симметрические функции эллиптических координат в $\mathbb{C}^{n+1}$ [34] легко следуют формулы на E_B^2

$$\sigma_1 := \lambda_1 + \lambda_2 = -x^2 + \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{\nu=3}^n b_\nu, \quad (2.6)$$

$$\sigma_2 := \lambda_1 \lambda_2 = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \right) +$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \left(\sigma_1 + \sum_{\nu=3}^n b_\nu \right) - \left(\sigma_1 \sum_{\nu=3}^n b_\nu + \sum_{3 \leq \nu < \mu \leq n} b_\nu b_\mu \right)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_1(x) \pm \sqrt{D(x)}), \quad D(x) = \sigma_1^2 - 4\sigma_2.$$

Пусть, согласно замечанию 1б), F_2^t – одна из особых точек конфигурации прямых P_n . Здесь

$$t = (t_1, \dots, t_n), \quad t_i \in \{-1, +1\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $t_2 = \pm 1$ – произвольно.

Так как носитель дивизора нулей на $\mathbb{C} E_B^2$ квадратичной по x функции $\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - a_2$ проходит через точку F_2^t , а $\frac{\partial}{\partial x}|_{F_2^t}$ от правой части (2.6) есть $-F_2^t$, то младшая однородная форма по $x - F_2^t$ от координат $\lambda_1 - a_2$, $\lambda_2 - a_2$ на поверхности $\mathbb{C} E_B^2$ приводит к координатам μ_1, μ_2 в касательной плоскости $\pi = T_{F_2^t} \mathbb{C} E_B^2 = \cap_{l=3}^n \pi_{1l}^{t_l t_l}$, определяемой формулой:

$$\mu_{1,2} = \left(- \sum_{i=1}^n (x_i - F_{2i}^t) F_{2i}^t \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{D^0(x)}, \quad (2.7)$$

где $D^0(x)$ – младшая однородная форма от $D(x)$ по $x - F_2^t$ в ограничении на π .

Из замечания 1б) вытекает, что на двумерной плоскости π форма $D^0(x)$ разлагается в произведение двух линейных форм $L_{\pm}(x)$, которые определяют прямые $\mathbb{C} l'$ из конфигурации $\mathbb{C} P_n$ с $t_2 = \pm 1$ соответственно, проходящие через точку F_2^t .

Младшая однородная форма от $V(x)|_{\pi}$ по $x - F_2^t$ раскладывается в композицию младшей однородной формы по $(\lambda_1 - a_2, \lambda_2 - a_2)$ от правой части представления Якоби – Штеккеля (1.4) и формы $(\mu_1, \mu_2)(x)$ на плоскости π , то есть, на плоскости π после подстановки разложения Лорана (2.5) в представление (2.4) выполнено

$$V^0(x) = A_p \frac{\mu_1^p - \mu_2^p}{\mu_1 - \mu_2}(x) = A_p \sqrt{\frac{M(x)}{D^0(x)}},$$

$$M(x) = (\mu_1^{2p} + \mu_2^{2p})(x) - 2(\mu_1 \mu_2)^p(x),$$

где $\mu_1 - \mu_2 = \sqrt{D^0(x)}$ в силу формулы (2.7). Разложим однородную по $x - F_2^t$ рациональную функцию $M(x)$ на плоскости π на простые однородные множители. Тогда из разложения $D^0(x) = L_+(x)L_-(x)$ и рациональности функции $V^0(x)$ вытекает, что разложение функции $M(x)$ на простые однородные множители содержит линейные формы $L_+(x)$ и $L_-(x)$ в целых нечетных степенях. И носитель дивизора однородной рациональной функции $M(x)$ на плоскости π содержит прямые $\mathbb{C} l'$ в целой нечетной степени для каждого из значений $t_2 = \pm 1$. Подставим в $M(x)$ выражения

$$\mu_1 \mu_2 = (\lambda_1 - a_2)(\lambda_2 - a_2) \stackrel{(1.2), (1.11)a}{=} \alpha_2 x_2^2, \quad (2.8)$$

$$\mu_1 + \mu_2 \stackrel{(2.7)}{=} - \sum_{i=1}^n (x_i - F_{2i}^t) F_{2i}^t. \quad (2.9)$$

Воспользуемся тождеством

$$\mu_1^{2p} + \mu_2^{2p} = \sum_{s=0}^{[p]} Q_{2s}(\mu_1 + \mu_2)^{2(p-s)}(\mu_1\mu_2)^s, \quad (2.10)$$

в котором Q_{2s} постоянные. В силу системы уравнений (1.11) вдоль прямой l^t выполнено $x_l = \frac{t_2\sqrt{\alpha_2}}{t_l\sqrt{\alpha_l}}x_2 + C_l$, $1 \leq l \leq n$, $l \neq 2$, где $C_l = \text{const}$. Следовательно, ввиду однородности, правая часть формулы (2.9) в ограничении на прямую l^t принимает вид $t_2A\sqrt{\alpha_2}x_2$, где $A = -(\sum_{i=1}^n \frac{F_{2i}^t}{t_i\sqrt{\alpha_i}})$. Подставляя $\mu_1 + \mu_2 = t_2A\sqrt{\alpha_2}x_2$, $\mu_1\mu_2 \stackrel{(2.8)}{=} \alpha_2x_2^2$ в (2.10), а затем, полученные выражения для $\mu_1^{2p} + \mu_2^{2p}$, $\mu_1\mu_2$ в $M(x)$, получаем

$$M(x)|_{l^t} = [\sum_{s=1}^{[p]} Q_{2s}(t_2A)^{2(p-s)} - 2](\alpha_2x_2^2)^p.$$

Здесь выражение в квадратных скобках отлично от нуля при $p \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ хотя бы для одного из значений $t_2 = \pm 1$, а координата x_2 не равна тождественно нулю на прямой $\mathbb{C}l^t$. Получаем противоречие с тем, что прямая $\mathbb{C}l^t$ содержится в носителе дивизора функции $M(x)$. Следовательно, $p \in \mathbb{Z}$ и в главном порядке в точке a_2 ветвления нет. Вычитая из $V(x)$ рациональную функцию $\frac{(\lambda-a_2)^p - (\lambda-a_2)^p}{\lambda_1 - \lambda_2}(x)$ и итерируя приведенное рассуждение, получаем, что ветвления нет и в последующих порядках, то есть, функция $W_1(\lambda) = W_2(\lambda)$ мероморфна в точке $\lambda = a_2$. Отсутствие ее ветвления в точках $a_1, \dots, a_n$ доказывается циклической перестановкой индексов декартовых координат. Предложение 3 доказано.

Тогда из представления (2.3) следует, что функция $W_1(\lambda) = W_2(\lambda)$ рациональна.

Случай E_B^k , $k = 3, 4, \dots, n$.

Подстановка $\lambda_3 = b_3, \dots, \lambda_k = b_k$ сводит k -мерное представление Якоби – Штеккеля (1.4) к двумерному

$$V(x)|_{E_B^2} = \frac{\check{W}_\nu(\lambda_\nu) - \check{W}_\mu(\lambda_\mu)}{\lambda_\nu - \lambda_\mu} + \check{W}_{\nu\mu}(\lambda_\nu, \lambda_\mu),$$

где $\check{W}_\nu(\lambda) = \frac{W_\nu(\lambda)}{(\lambda-b_3)\dots(\lambda-b_k)}$, а $\check{W}_{\nu\mu}$ является рациональной симметрической функцией от λ_ν, λ_μ и, следовательно, рациональной функцией от x . Из утверждения теоремы в случае E_B^2 вытекает, что $\check{W}_\nu(\lambda) = \check{W}_\mu(\lambda)$ – рациональная функция от λ . Следовательно, $W_\nu(\lambda) = W_\mu(\lambda)$ – рациональная функция от λ . Рассматривая ограничения потенциала $V(x)$ на двумерные поверхности фиксированных других эллиптических координат, получаем, что $W_1(\lambda) = \dots = W_n(\lambda)$ – рациональная функция от λ .

Доказательство следствия 1 и 1'. Так как уравнение Гамильтона – Якоби в сферо-конических координатах (1.9) в $\mathbb{C}^n$ принимает вид

$$\frac{4}{\tilde{\lambda}_0 - 1} \sum_{\nu=1}^{n-1} \tilde{\gamma}_\nu^{-1} (c_1 - \tilde{\lambda}_\nu) \dots (c_n - \tilde{\lambda}_\nu) \left(\frac{\partial S}{\partial \tilde{\lambda}_\nu} \right)^2 + 4(1 - \tilde{\lambda}_0) \left(\frac{\partial S}{\partial \tilde{\lambda}_0} \right)^2 = h,$$

разделяющийся в них потенциал может быть записан в виде

$$V(y) = \frac{1}{\tilde{\lambda}_0 - 1} \sum_{\nu=1}^{n-1} \tilde{\gamma}_\nu^{-1} W_\nu(\tilde{\lambda}_\nu) + V_0(\tilde{\lambda}_0),$$

где независимое от $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{n-1}$ слагаемое постоянно на S^{n-1} , а зависящее однородно по y степени -2 . Отсюда и из предложения 1а) вытекает, что подпункты а), б), с) следствия 1 и 1' следуют из подпунктов а), б), с) теоремы 1 и 1'.

Доказательство замечания 1.
Выражение

$$\sqrt{\lambda_1 - a_j} \pm \sqrt{\lambda_2 - a_j} = \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2 - 2a_j \pm \sqrt{(\lambda_1 - a_j)(\lambda_2 - a_j)}} \quad (2.11)$$

после подстановки формулы (2.6) и формулы $\sqrt{(\lambda_1 - a_j)(\lambda_2 - a_j)} \stackrel{1.2}{=} \pm \sqrt{\alpha_j} x_j$ принимает вид

$$\sqrt{-x^2 \pm 2\sqrt{\alpha_j} x_j - 2a_j + \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{\nu=3}^n b_\nu} = i \sqrt{(x^2 \mp 2\sqrt{\alpha_j} x_j + \alpha_j) - \beta_j} \quad (2.12)$$

а. Разложение носителя дивизора в объединение прямых. Для каждого $j = 1, \dots, n$ носитель дивизора ветвления $\lambda_1(x) = \lambda_2(x)$ эллиптических координат на $\mathbb{C} E_B^2$ представляется в виде объединения

$$\cup_{\pm} \{x \in E_B^2 \mid \sqrt{\lambda_1(x) - a_j} = \mp \sqrt{\lambda_2(x) - a_j}\}.$$

Ввиду уравнения (1.12) для сферы и формул (2.11), (2.12) это объединение представляется в виде пересечения

$$\mathbb{C} E_B^2 \cap (\cup_{s_j} \mathbb{C} S_j^{s_j n-1}). \quad (2.13)$$

Поэтому, носитель (2.13) дивизора ветвления содержится в пересечении $(\cup_{s_1} \mathbb{C} S_1^{s_1 n-1}) \cap \dots \cap (\cup_{s_n} \mathbb{C} S_n^{s_n n-1})$. Но пересечение двух комплексных сфер $\mathbb{C} S_j^{s_j n-1}$ и $\mathbb{C} S_l^{s_l n-1}$ при $j \neq l$ лежит в гиперплоскости $\pi_{jl}^{s_j s_l}$. Группируя все сферы с одной (j -ой), получаем, что носитель (2.13) дивизора ветвления содержится в

$$\cup_s (\cap_{l=1, l \neq j}^n \pi_{jl}^{s_j s_l}) = \cup_s \mathbb{C} l^s$$

– конфигурации $\mathbb{C}P_n$ комплексных прямых в $\mathbb{C}^n$. Ввиду уравнений (1.12) носитель (2.13) дивизора ветвления инвариантен относительно действия группы $(\mathbb{Z}_2)^n$ отражений относительно координатных гиперплоскостей. Так как в уравнениях (1.11) все коэффициенты α_j отличны от нуля, действие группы $(\mathbb{Z}_2)^n$ на объединении прямых происходит без неподвижных точек. Следовательно, действие содержит единственную орбиту. То есть, носитель (2.13) совпадает с конфигурацией прямых $\mathbb{C}P_n$.

Так как ветвление эллиптических координат на E_B^2 – второго порядка, то, согласно определению §1 главы 2 в [32], дивизор ветвления содержит каждую прямую с кратностью 1.

б. Точки пересечения прямых. После подстановки условия $x_j = 0$ в уравнения (1.11) прямой $\mathbb{C}l^s$ получаем 2^{n-1} точек F_j^s пересечения $P_n \cap \{x_j = 0\}$, отвечающих произвольному выбору знаков s_l при x_l для $l \neq j$. Действительно, в уравнениях (1.11) все коэффициенты α_j отличны от нуля. Поэтому, на множестве 2^{n-1} точек F_j^s свободно действует группа $(\mathbb{Z}_2)^{n-1}$. Так как каждая точка F_j^s лежит на двух прямых

$$\bigcap_{l=1, l \neq j}^n \pi_{jl}^{s_j s_l},$$

определяемых выбором знака $s_j = \pm 1$, то точки F_j^s являются точками не менее чем двукратного пересечения. То есть, $F_j^s = l^s \cap l^{j(s)}$, $j = 1, \dots, n$. Но на множестве прямых l^s свободно и транзитивно действует группа $(\mathbb{Z}_2)^n$. Остается показать, что прямые l^s и l^t , у которых наборы $s = (s_1, \dots, s_n)$ и $t = (t_1, \dots, t_n)$ различаются более чем в одном знаке, не пересекаются. Действительно, в силу (1.11) прямые l^s и l^t при $s = -t$ параллельны. Кроме того, для фиксированных индексов j и l пересечение гиперплоскостей $\pi_{jl}^{s_j s_l}$ с одинаковыми значениями s_j и разными s_l лежит в гиперплоскости $x_l = 0$. А подпространство $x_l = x_k = 0$, $1 \leq l < k \leq n$ не пересекается с конфигурацией $\mathbb{C}P_n$ прямых в силу уравнений (1.11).

Пункт в. вытекает из того, что $\mathbb{C}l^s \subset \pi_{jl}^{s_j s_l}$.

Пункт г. вытекает из того, что объединение сфер $\bigcup_{s_j} S_j^{s_j n-1}$ содержит конфигурацию $\mathbb{C}P_n$ и, в частности, две прямые, порождающие базис касательного пространства в F_j^s к E_B^2 .

е. Ввиду инвариантности P_3 относительно отражений $x_2 \rightarrow -x_2$ отрезки прямых l^s от каждой из точек F_2^s до пересечения с плоскостью $x_1 = 0$ ($x_2 = 0$) равны и, поэтому, складываются в диагонали равнобокой трапеции.

§2.8. Интегрируемые случаи вращения твердого тела со связью в квадратичном потенциале

Интегрируемость свободного вращения n -мерного твердого тела вокруг неподвижной точки была установлена С.В.Манаковым [61]. А.М.Переломовым [70] $L-A$ пара Манакова была расширена до $L-A$ пары n -мерного случая Клебша, вкладываемого в качестве подсистемы в систему, описывающую вращение твердого тела вокруг неподвижного центра масс в силовом поле с квадратичным неоднородным потенциалом, см. §2, §4 в [11].

В данном параграфе исследуются условия, при которых последний случай остается интегрируемым при наложении линейной голономной связи: некоторое неподвижное в теле подпространство, проходящее через неподвижную точку, предполагается неподвижным в неподвижном пространстве. Будем называть это подпространство инвариантным подпространством.

ТЕОРЕМА 1. *Вращение тела остается интегрируемым при наложении такой связи, если либо инвариантное подпространство – главное подпространство инерции тела, либо потенциал раскладывается в сумму потенциала в инвариантном подпространстве и потенциала в его ортогональном дополнении.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При этом, вращение тела разлагается в декартово произведение вращений в двух ортогональных инвариантных подпространствах. В каждом из них тело вращается так, как его проекция в ограничении потенциала на инвариантное подпространство.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Такая связь возникает, например, например в задачах о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в пространствах постоянной кривизны [49, 157], например, на S^3 . Роль инвариантного подпространства играет касательная гиперплоскость к сфере в неподвижной точке.

1. Доказательство теоремы. Пусть $\mathbb{R}^{m+n} = \pi \oplus \pi^\perp$ – разложение в прямую сумму двух ортогональных подпространств размерностей m и n соответственно, неподвижных как в теле T , так и в пространстве. Введем две ортогональные системы координат с началом в неподвижной точке. Пусть одна из них,

$$x = (x^1, \dots, x^{m+n}), \quad (x^1, \dots, x^m) \in \pi, \quad (x^{m+1}, \dots, x^{m+n}) \in \pi^\perp$$

жестко связана с неподвижным пространством, другая –

$$\rho = (\rho^1, \dots, \rho^{m+n}), \quad (\rho^1, \dots, \rho^m) \in \pi, \quad (\rho^{m+1}, \dots, \rho^{m+n}) \in \pi^\perp$$

– с телом. Пусть $\sigma(\rho)$ – плотность тела T , $J^{ij} = \int_T \rho^i \rho^j \sigma(\rho) d\rho$, $1 \leq i, j \leq m+n$ – тензор инерции тела.

Пусть в данном абзаце по повторяющимся индексам производится суммирование. Лагранжиан вращения тела в массовом поле сил с потенциалом $V = \frac{1}{2} A_{kl} x^k x^l + B_k x^k$, где A_{kl}, B_k – постоянные, имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \int_T \dot{x}(\rho)^2 \sigma(\rho) d\rho - \int_T V(x(\rho)) \sigma(\rho) d\rho$$

Связь неподвижных координат с подвижными осуществляется ортогональной матрицей $Q_j^k : x^k = Q_j^k \rho^j$, $1 \leq k \leq m+n$, поэтому лагранжиан запишется в виде

$$2L = J^{ij} \dot{Q}_i^k \dot{Q}_j^k - J^{ij} Q_i^k Q_j^l A_{kl},$$

где линейные по матрице перехода слагаемые отсутствуют ввиду того, что $\rho = 0$ – центр масс. Считая верхний индекс у матрицы Q_i^k первым, нижний – вторым, получаем:

$$2L = \text{tr } J \dot{Q}^\top \dot{Q} - \text{tr } Q J Q^\top A.$$

Подставляя $\dot{Q}^\top = -Q^{-1} \dot{Q} Q^{-1}$, получаем

$$-2L = \text{tr } J Q^{-1} \dot{Q} Q^{-1} \dot{Q} + \text{tr } J Q^{-1} A Q.$$

Условие инвариантности подпространства π принимает вид

$$Q = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix},$$

где $q \in SO(m), p \in SO(n)$. Записывая матрицы J и A в соответствующем блочном виде,

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{12}^\top & J_{22} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^\top & A_{22} \end{pmatrix},$$

получаем

$$\begin{aligned} -2L = & 2 \text{tr } J_{12} p^\top A_{12}^\top q + \\ & \text{tr } J_{11} q^{-1} \dot{q} q^{-1} \dot{q} + \text{tr } J_{11} q^{-1} A_{11} q + \text{tr } J_{22} p^{-1} \dot{p} p^{-1} \dot{p} + \text{tr } J_{22} p^{-1} A_{22} p. \end{aligned} \quad (1)$$

В условиях теоремы первое слагаемое в лагранжиане (1) пропадает, что доказывает замечание 1. Действительно, тензор инерции проекции тела на подпространство π ($\pi^\perp$) есть J_{11} (J_{22}). $\pi, \pi^\perp$ тело движется так, как его проекция в ограничении потенциала.

ГЛАВА 3.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА

§3.1. Об алгебраических интегралах задачи Хилла и ограниченной круговой плоской задачи трех тел на уровне энергии

Установлено, что плоская ограниченная круговая задача трех тел [5, 156, 33] допускает непостоянный алгебраический интеграл на некотором уровне энергии только в случаях, когда она сводится к задаче Кеплера. Установлено, что также не допускает непостоянного алгебраического интеграла ни на каком уровне энергии задача Хилла [5, 126, 33], получающаяся как предельный случай ограниченной круговой плоской задачи трех тел, если в аналогии с движением Луны вокруг Земли считать массу Солнца и расстояние от Солнца до Земли бесконечно большими величинами. Доказательство опирается на усовершенствованный автором метод Гюссона [127, 6, 82, 152]. Попутно получено обобщение результатов Ж.Лиувилля [136] о невозможности выражения через алгебраические функции и экспоненты интегралов от произведений алгебраических функций и экспонент.

1. Введение и основной результат

В задаче трех тел в случае положительных масс Брунсом [116] и Пуанкаре [148] установлено несуществование независимого с классическими алгебраического интеграла. В этом же случае Пенлеве [145] установлено несуществование независимого с классическими интеграла, алгебраического лишь по скоростям, см. [94].

Однако, при стремлении одной из масс к нулю такой интеграл появляется. Это – третий алгебраический интеграл отделяющейся интегрируемой задачи Кеплера. Он позволяет понизить порядок системы с трех до двух степеней свободы (с сохранением автономности в рассматриваемом случае круговых орбит двух тел). Аналог теоремы Брунса – Пуанкаре для ограниченной круговой задачи трех тел получен Зигелем [155]. В [147] Пуанкаре исследованием векового множества ограниченной круговой задачи трех тел установлено отсутствие интеграла, аналитически зависящего от масс двух планет и аналитического в окрестности невозмущенной эллиптической траектории, см. [45]; этот результат был обобщен в [146, 45]. Отсутствие двух мероморфных интегралов в плоской задаче трех тел доказано в [98]. В [133, 134, 135] в задаче трех тел, ограниченной задаче трех тел и в ограниченной плоской задаче трех тел при различных возмущениях обнаружены эффекты, связанные с расщеплением асимптотических поверхностей, в частности, устанавливающие несуществование мероморфного по параметру возмущения интеграла.

В [133, 134] в плоской и пространственной ограниченных задачах трех тел методами символической динамики установлено существо-

вание осциллирующих решений при малом отношении масс массивных тел и достаточно больших значениях энергии, и, как следствие, несуществование аналитического интеграла при этих значениях параметров. В [135] существование квазислучайных движений в ограниченной круговой плоской задаче трех тел установлено для малого отношения масс массивных тел и значений энергии, больших, но близких значения энергии, отвечающего относительному равновесию Эйлера L_2 .

Отметим, что из результатов [116, 148, 145, 155, 135] затруднительно получить информацию о наличии дополнительных интегралов на выделенном уровне энергии.

В [13] с использованием вариационных методов показано, что в близкой задаче n притягивающих центров при $n \geq 3$ на неотрицательных уровнях энергии отсутствует аналитический интеграл.

Предположим, что две материальные точки S и E вращаются в плоскости вокруг общего центра масс O по круговым орбитам и в их гравитационном поле движется третья точка A малой массы, влиянием которой на движение S и E можно пренебречь. Пусть (X, Y) – правая ортогональная система координат с центром в O , жестко связанная с большими телами, и такая, что E лежит на положительной полуоси OX , пусть t – время, ω – угловая скорость вращения SE вокруг O , отсчитываемая против часовой стрелки, m_E и m_S – массы E и S . Тогда $m_S|OS| = m_E|OE|$. Пусть $\mu = m_E/(m_S + m_E)$. Пусть $(x, y) = (X, Y)/|SE|$, $\tau = \omega t$, точка сверху обозначает производную по τ .

Тогда динамика точки A определяется лагранжевой системой с лагранжианом

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + (x\dot{y} - y\dot{x}) - V(x, y) \quad (1.1)$$

и потенциалом [5, 156]

$$V = -\frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{1 - \mu}{\sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x + \mu - 1)^2 + y^2}}, \quad (1.2)$$

Здесь учтено тождество $\gamma(m_E + m_S) = |SE|^3\omega^2$, вытекающее из определения гравитационной постоянной γ .

Задача Хилла, см. [5, 126, 33] описывается лагранжианом (1.1), в котором потенциал имеет V вид

$$V = -\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (1.3)$$

Уравнения Лагранжа для лагранжиана (1.1) имеют вид

$$\ddot{x} = 2\dot{y} - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \ddot{y} = -2\dot{x} - \frac{\partial V}{\partial y} \quad (1.4)$$

Согласно [5] система (1.1) гамильтонова с гамильтонианом $H = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + V(x, y)$ и симплектической структурой $dx \wedge d(\dot{x} - y) + dy \wedge d(\dot{y} + x)$.

Теорема 1. Уравнения

1⁰ плоской ограниченной круговой задачи трех тел (1.4), (1.2) при $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0, 1$;

2⁰ задачи Хилла (1.4), (1.3)

на уровне $H = h$ интеграла энергии ни для какого $h \in \mathbb{R}$ не допускают непостоянного алгебраического интеграла $F(x, \dot{x}, y, \dot{y})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Значение $\mu = 0$ в задаче 1⁰ отвечает нулевой массе точки E . Тело S при этом неподвижно и задача (1.4), (1.2) сводится к задаче о движении точки пренебрежимо малой массы в поле неподвижного гравитирующего центра S , см. [5]. Исключительное значение $\mu = 1$ аналогично отвечает нулевой массе точки S .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В рассматриваемой задаче размерность произвольного уровня интеграла энергии равна 3. Следовательно, существование непостоянного алгебраического интеграла на таком уровне эквивалентно существованию непостоянного алгебраического интеграла на комплексификации этого уровня. Последнее вытекает из продолжения алгебраической функции с вещественного многообразия на его комплексификацию.

2. *Доказательство теоремы 1.* Предположим противное, на уровне $(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 + V = h$, где h – некоторое вещественное значение, существует непостоянный алгебраический интеграл $F(x, \dot{x}, y, \dot{y})$. Произведем в системе с лагранжианом (1.1) и потенциалом (1.2), (1.3) подстановку $(x, y) \rightarrow \varepsilon^{-1}(x, y)$. Эта подстановка эквивалентна рассмотрению системы (1.4) как гамильтонового возмущения линейной гамильтоновой системы, возникающей при удалении точки пренебрежимо малой массы в бесконечность. Гравитационные слагаемые в потенциале при этом исчезают, остаются лишь инерционные квадратичные члены. Уровень энергии стремится к нулевому.

2.1. Случай задачи Хилла. После введения ε уравнения (1.4) с потенциалом (1.3) принимают вид:

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + 3x - \varepsilon^3 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}, \quad \ddot{y} = -2\dot{x} - \varepsilon^3 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}, \quad (2.1)$$

уровень энергии – вид:

$$H^0(x, \dot{x}, \dot{y}) + \varepsilon^3 H^3(x, y) = \varepsilon^2 h, \quad (2.2)$$

где

$$2H^0 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 3x^2, \quad H^3 = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

а непостоянный алгебраический интеграл на уровне энергии – вид:

$$F(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-1}\dot{x}, \varepsilon^{-1}y, \varepsilon^{-1}\dot{y})|_{H^0 + \varepsilon^3 H^3 = \varepsilon^2 h}. \quad (2.3)$$

Предложение 1. Общее решение системы (2.1) при $\varepsilon = 0$ имеет вид

$$x^0(\tau) = 2D + A \cos \tau + B \sin \tau, \quad y^0(\tau) = -3D\tau + C - 2A \sin \tau + 2B \cos \tau, \quad (2.4)$$

где A, B, C, D – независимые постоянные. Невозмущенный гамильтониан выражается через постоянные интегрирования по формуле $2H^0 = A^2 + B^2 - 3D^2$.

Предложение 2. Любой алгебраический интеграл невозмущенной системы на нулевом уровне гамильтониана H^0 алгебраически зависит с интегралом $u(x, \dot{y}) = 2x + \dot{y}$.

Доказательство предложения 2. Действительно, если бы на нулевом уровне энергии существовало два алгебраически независимых интеграла, то для произвольных A, B, C, D , удовлетворяющих условию $2H^0 = A^2 + B^2 - 3D^2 = 0$, невозмущенное решение $(x^0(\tau), \dot{x}^0(\tau), y^0(\tau), \dot{y}^0(\tau))$ определяло бы алгебраическую кривую в $\mathbb{C}^4$. Следовательно, координата $y^0(\tau)$ была бы алгебраической функцией от координаты $x^0(\tau)$. Воспользуемся тем, что $x^0(\tau)$ – алгебраическая функция от $v = \sin \tau$. Но координата $y^0(\tau) = -3D \arcsin v + C - 2Av + 2B\sqrt{1-v^2}$ при $D \neq 0$ не является алгебраической функцией от величины $v = \sin \tau$.

Перейдем в возмущенной системе (2.1) на зависящем от ε уровне (2.2) к новым рациональным переменным $u(x, \dot{y}) = 2x + \dot{y}$, x , y . Для наглядности выпишем полученную систему:

$$\dot{u} = -\varepsilon^3 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \dot{x} = \sqrt{3x^2 - (u - 2x)^2 + 2\varepsilon^2 h - 2\varepsilon^3 H^3(x, y)},$$

$$\dot{y} = u - 2x. \quad (2.5)$$

Продолжим постоянные интегрирования B, C, D невозмущенной системы до постоянных интегрирования системы (2.5) при произвольном ε . Это может быть сделано неоднозначно. Например, следующим образом. Рассмотрим определяемый решением (2.4) невозмущенной системы при $\tau = 0$ диффеоморфизм пространства $\mathbb{C}^4$ с координатами A, B, C, D в пространство $\mathbb{C}^4$ с координатами $x, \dot{x}, y, \dot{y}$. Обозначим через h_0^0 ограничение указанного диффеоморфизма на нулевой уровень энергии $A^2 + B^2 - 3D^2 = 0$, записанное в локальных координатах B, C, D в прообразе и в локальных координатах u, x, y в образе. Получим двузначное алгебраическое отображение $(u, x, y) = h_0^0(B, C, D) : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$. Пользуясь им, определим двузначное алгебраическое отображение $(u, x, y) = h_0^\varepsilon(B, C, D) : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$ по формуле $\partial h_0^\varepsilon(B, C, D) / \partial \varepsilon = 0$. Пусть $(u, x, y) = g_\tau^\varepsilon(u, x, y) : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ – зависящее от пути на комплексной плоскости времени τ решение за время τ в силу системы (2.5). Положим

$h_\tau^\varepsilon = g_\tau^\varepsilon \circ h_0^\varepsilon$. В силу теоремы Коши – Ковалевской о локальной голоморфной зависимости решения от времени и начальных условий, $(u, x, y) = h_\tau^\varepsilon(B, C, D) : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ – локально голоморфное, но, вообще говоря, разветвленное отображение. Продолжение постоянных B, C, D до постоянных интегрирования системы (2.5) эквивалентно рассмотрению решения $h_\tau^\varepsilon(B, C, D)$. Разложим $h_\tau^\varepsilon(B, C, D)$ в ряд по ε :

$$\begin{aligned} u(B, C, D, \tau, \varepsilon) &= D + \varepsilon u^1(B, C, D, \tau) + \dots, \\ x(B, C, D, \tau, \varepsilon) &= x^0(B, C, D, \tau) + \varepsilon x^1(B, C, D, \tau) + \dots, \\ y(B, C, D, \tau, \varepsilon) &= y^0(B, C, D, \tau) + \varepsilon y^1(B, C, D, \tau) + \dots, \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя решение $h_\tau^\varepsilon(B, C, D)$ в систему (2.5) и приравнявая в координатах $B, C, D, \varepsilon, \tau$ коэффициенты при степенях ε , находим:

$$\dot{u}^1 = \dot{u}^2 = 0, \quad \dot{u}^3 = -\frac{y^0(B, C, D, \tau)}{\sqrt{R^0(B, C, D, \tau)^3}}, \quad (2.7)$$

где $R^0(B, C, D, \tau) = x^0(B, C, D, \tau)^2 + y^0(B, C, D, \tau)^2$. Рассмотрим разложение Пуанкаре непостоянного при общем значении ε алгебраического интеграла (2.3) системы (2.5):

$$F(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-1}\dot{x}, \varepsilon^{-1}y, \varepsilon^{-1}\dot{y})|_{H^0 + \varepsilon^3 H^3 = \varepsilon^2 h} = \varepsilon^S \left(\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/s} F^m(u, x, y) \right), \quad (2.8)$$

где $s \in N$, $S \in Q$. Тогда $F^m(u, x, y)$ – алгебраические функции от u, x, y . Ввиду непостоянства интеграла считаем, что $F^0(u, x, y) \not\equiv \text{const}$, возможно отбрасывая постоянные начальные члены. Рассмотрим составляющие интеграла (2.8) при степенях переменной ε , показатели которых отличаются на целое число. Ввиду голоморфности по ε правой части системы (2.5), эти составляющие также будут интегралами системы (2.5). То есть, не ограничивая общности, считаем, что $s = 1$. Из предложения 2 вытекает, что $F^0(u, x, y) \equiv F^0(u)$; взяв от интеграла (2.8) алгебраическую функцию, обратную к F^0 , не ограничивая общности считаем, что $F^0 \equiv u$. Таким образом, интеграл принимает вид

$$u + \varepsilon F^1(u, x, y) + \dots \quad (2.9)$$

Подставляя в него решение (2.6), рассматриваем коэффициент при ε^1 :

$$u^1(B, C, D) + F^1(D, x^0(B, C, D, \tau), y^0(B, C, D, \tau)) = \text{const}(B, C, D). \quad (2.10)$$

Из (2.10) вытекает, что функция $F^1(u, x, y)$ постоянна на решениях невозмущенной системы. В силу предложения 2, функция F^1 не

зависит от x, y . Взяв от интеграла (2.9) алгебраическую функцию, обратную к функции $u + \varepsilon F^1(u)$ от u , имеющую вид $u - \varepsilon F^1(u) + \dots$, приходим к интегралу, в котором $F^1 \equiv 0$. Далее, аналогично подставляя в полученный интеграл решение (2.6) и рассматривая коэффициенты при ε^2 , считаем, что $F^2 \equiv 0$. Коэффициент при ε^3 приводит к алгебраической зависимости

$$u^3(B, C, D, \tau) + F^3(D, x^0(B, C, D, \tau), y^0(B, C, D, \tau)) = \text{const}(B, C, D),$$

из которой в силу предложения 1 получаем, что $u^3(B, C, D, \tau)$ должна быть алгебраической функцией от $\tau, \sin \tau$ для произвольных значений параметров B, C, D .

Выберем параметры задачи так, чтобы подкоренное выражение $R^0(B, C, D, \tau)$ в (2.7) имело кратный корень в точке $\tau = \tau_0$ (ввиду автономности системы (1.4), (1.3), не ограничивая общности, полагаем $\tau_0 = 0$). Для этого полагаем $D = iB, C = -2B$. Посредством аналитических вычислений в MAPLE V получаем:

$$R^0(B, -2B, iB, \tau) = O(\tau^4), \quad \text{res}_{\tau=0} \dot{u}^3(B, -2B, iB, \tau) = \mp \frac{1329i}{4480B^2} \neq 0,$$

что противоречит тому, что $u^3(B, -2B, iB, \tau)$ как функция от τ является алгебраической функцией от $\tau, \sin \tau$.

2.2. СЛУЧАЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ. После введения ε уравнения (1.4) с потенциалом (1.2) принимают вид:

$$\ddot{x} = x - 2\dot{y} - \frac{\partial V^>}{\partial x}, \quad \ddot{y} = y - 2\dot{x} - \frac{\partial V^>}{\partial y},$$

где

$$V^>(x, y, \varepsilon) = \varepsilon^3 V^3 + \varepsilon^4 V^4 + \varepsilon^5 V^5 + \dots, \quad (2.11)$$

$$V^3 = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad V^4 = 0, \quad V^5 = \frac{\mu(\mu - 1)}{2} \frac{2x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^5},$$

уровень энергии – вид:

$$H^0(x, \dot{x}, y, \dot{y}) + V^>(x, y, \varepsilon) = \varepsilon^2 h,$$

где

$$2H^0 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - x^2 - y^2, \quad (2.12)$$

а непостоянный алгебраический интеграл на уровне энергии – вид:

$$F(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-1}\dot{x}, \varepsilon^{-1}y, \varepsilon^{-1}\dot{y})|_{H^0+V^>(x,y,\varepsilon)=\varepsilon^2 h}. \quad (2.13)$$

Предложение 3. Общее вещественное решение системы (2.11) при $\varepsilon = 0$ имеет вид:

$$x^0(\tau) = \text{Re}[(C + C_1\tau)e^{i\tau}], \quad y^0(\tau) = -\text{Im}[(C + C_1\tau)e^{i\tau}],$$

где $C = A + iB$, $C_1 = A_1 + iB_1$, а A, A_1, B, B_1 — независимые вещественные постоянные. Невозмущенный гамильтониан выражается через постоянные интегрирования по формуле $2H^0 = A_1^2 + B_1^2 + 2(B_1A - A_1B) = C_1\bar{C}_1(1 - 2\operatorname{Im}(C/C_1))$, где черта обозначает комплексное сопряжение.

Предложение 4. Любой алгебраический интеграл невозмущенной системы на нулевом уровне гамильтониана H^0 алгебраически зависит с интегралом

$$G(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = (x\dot{y} - y\dot{x}) + (x^2 + y^2),$$

который выражается через постоянные интегрирования по формуле $G = C_1\bar{C}_1 \operatorname{Im}(C/C_1)$.

Доказательство предложения 4. Действительно, в противном случае невозмущенное решение $x^0(\tau), \dot{x}^0(\tau), y^0(\tau), \dot{y}^0(\tau)$ определяло бы алгебраическую кривую в $\mathbb{C}^4$ для произвольных комплексных постоянных C, C_1 , удовлетворяющих одному вещественному условию

$$A_1^2 + B_1^2 + 2(B_1A - A_1B) = 0. \quad (2.14)$$

Но при $\tau \in \mathbb{R}$ функции $x^0(\tau)^2 + y^0(\tau)^2 = |C + C_1\tau|^2$ и $x^0(\tau) + \dot{y}^0(\tau) = -\operatorname{Im}(C_1 e^{i\tau})$ от τ алгебраически независимы при $C_1 \neq 0$.

Перейдем в системе (2.11) на поверхности (2.12) к новым алгебраическим переменным $G(x, \dot{x}, y, \dot{y}), x, y$. Полученную систему обозначим для ссылок через (2.15).

Продолжим постоянные интегрирования B, A_1, B_1 невозмущенной системы на нулевом уровне энергии (2.14) до постоянных интегрирования системы (2.15) при произвольном ε . Это может быть сделано следуя конструкции, изложенной после формулы (2.5). Ограничим полученное локально голоморфное отображение $h_\tau^\varepsilon(B, A_1, B_1)$ на вещественную часть пространства $\mathbb{C}^3$ постоянных интегрирования B, A_1, B_1 , то есть на $\{C, C_1 \in \mathbb{C}^2 \mid C_1\bar{C}_1(1 - 2\operatorname{Im}(C/C_1)) = 0\}$. Разложим $h_\tau^\varepsilon(B, A_1, B_1)$ в ряд по ε :

$$\begin{aligned} G(C, C_1, \tau, \varepsilon) &= G^0(C, C_1) + \varepsilon G^1(C, C_1, \tau) + \dots, \\ x(C, C_1, \tau, \varepsilon) &= x^0(C, C_1, \tau) + \varepsilon x^1(C, C_1, \tau) + \dots, \\ y(C, C_1, \tau, \varepsilon) &= y^0(C, C_1, \tau) + \varepsilon y^1(C, C_1, \tau) + \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

Подставляя в систему (2.15) полученные ряды и приравнивая коэффициенты при степенях ε , используя аналитические вычисления в MAPLE V, находим

$$\dot{G}^0 = \dot{G}^1 = \dots = \dot{G}^4 = 0, \quad \dot{G}^5 = 3\mu(\mu - 1) \frac{x^0(C, C_1, \tau)y^0(C, C_1, \tau)}{\sqrt{R^0(C, C_1, \tau)}^5}. \quad (2.17)$$

Рассмотрим разложение Пуизе непостоянного при общем значении ε алгебраического интеграла (2.13) системы (2.15):

$$F(\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-1}\dot{x}, \varepsilon^{-1}y, \varepsilon^{-1}\dot{y})|_{H^0+V^>}(x,y,\varepsilon)=\varepsilon^2h = \varepsilon^S \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/s} F^m(G, x, y), \quad (2.18)$$

где $s \in \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{Q}$. Следовательно, $F^m(G, x, y)$ – алгебраические функции от G, x, y . Аналогично случаю 2^0 , не ограничивая общности, считаем, что $s = 1$. Кроме того, аналогично, в силу предложения 4 и формул (2.17) считаем, что выполнено $F^0 = G$, $F^1 = F^2 = F^3 = F^4 = 0$.

Аналогично подставляя в интеграл (2.18) общее решение (2.16), приравниваем постоянные коэффициенты при степенях ε . Коэффициент при ε^5 приводит к равенству

$$G^5(C, C_1, \tau) + F^5(G^0(C, C_1), x^0(C, C_1, \tau), y^0(C, C_1, \tau)) = \text{const}(C, C_1).$$

Из него вытекает, что функция $G^5(C, C_1, \tau)$ должна быть алгебраической функцией от $\tau, e^{i\tau}$ для произвольных комплексных C, C_1 , удовлетворяющих условию (2.14). Следовательно, за исключением интегрируемых случаев Кеплера $\mu(\mu - 1) = 0$, алгебраическим от $\tau, e^{i\tau}$ должен быть и интеграл

$$I = \int \frac{x^0(C, C_1, \tau) y^0(C, C_1, \tau)}{\sqrt{R^0(C, C_1, \tau)^5}} d\tau = -\frac{1}{2} \int \frac{\text{Im}[(C + C_1\tau)^2 e^{2i\tau}]}{|C + C_1\tau|^5} d\tau$$

для произвольных комплексных C, C_1 , удовлетворяющих условию (2.14). Подставляя $C_1 = -2iC$, $|C| = 1$, удовлетворяющие условию $1 - 2 \text{Im}(C/C_1) = 0$, получаем, ввиду произвольности $\arg C^2$, что алгебраическим от $\tau, e^{i\tau}$ должен быть и интеграл

$$\int \frac{(1 - 2i\tau)^2 e^{2i\tau}}{\sqrt{1 + 4\tau^2}^5} d\tau.$$

Полагая $z = 2i\tau$, получаем, что интеграл

$$\int \frac{(1 - z)^2}{\sqrt{1 - z^2}^5} e^z dz = -\frac{e^z}{\sqrt{1 - z^2}^3} + \int \frac{z + 2}{\sqrt{1 - z^2}^5} e^z dz$$

должен являться алгебраической функцией от z, e^z , что невозможно, ввиду следующего предложения.

Предложение. Пусть r – число различных корней полинома $P(z)$, $p(z)$ – ненулевой полином степени не более $r - 1$.

Тогда $\int \frac{p(z)}{\sqrt{P(z)}} e^z dz$ не является алгебраической функцией от z, e^z .

Предложение вытекает из леммы 2β) в разд. 3 (см. ниже через 2 абзаца), представляющей самостоятельный интерес.

3. Интегралы от произведений алгебраических функций на экспоненту. Пусть $f(z)$ – локально мероморфная, вообще говоря, разветвленная функция от $z \in \mathbb{C}$, имеющая не более чем конечное ветвление в точке $\alpha \in \mathbb{C}$. Пусть $\text{ord}_{z=\alpha} f(z)$ обозначает порядок нуля функции $f(z)$ в точке α .

Лемма 1.

А) Если $\text{ord}_{z=\alpha} f(z) \neq 0$, то $\text{ord}_{z=\alpha} df(z)/dz = \text{ord}_{z=\alpha} f(z) - 1$.

Б) Если $\text{ord}_{z=\alpha} f(z) = 0$, то $\text{ord}_{z=\alpha} df(z)/dz \geq \text{ord}_{z=\alpha} f(z)$.

Лемма 2. Пусть $f(z)$ – алгебраическая функция, $\int f(z)e^z dz$ – алгебраическая функция от z, e^z .

а) Тогда $\int f(z)e^z dz = F(z)e^z + \text{const}$, где $F(z)$ – алгебраическая функция (Ж. Лиувиль [136], см. [27], гл. 6, разд. 2.5, 2.4).

б) Пусть дополнительно $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ – различные комплексные числа,

$$Q(z) = (z - \alpha_1)^{k_1} \dots (z - \alpha_s)^{k_s}, \quad k_1, \dots, k_s \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{N}_0,$$

$p(z)$ – полином, не обращающийся в нуль в точках $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, пусть

$$f(z) = p(z)\sqrt{Q(z)}.$$

Тогда

$$k_1 \neq -2, \dots, k_s \neq -2, \quad (3.1)$$

$$F(z) = \tilde{p}(z)(z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_s)\sqrt{Q(z)}, \quad (3.2)$$

где $\tilde{p}(z)$ – полином, $\deg \tilde{p}(z) + s = \deg p(z)$.

Доказательство леммы 2б). Рассмотрим риманову поверхность $\mathfrak{R} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = Q(z)\}$. Из конечности функции $F(z)e^z$ при $z \in \mathbb{C}$ вытекает тривиальность периодов и вычетов дифференциала $f(z)e^z dz = p(z)\sqrt{Q(z)}e^z dz$ на римановой поверхности $\mathfrak{R}$, см. [102]. Следовательно, $F(z)e^z$ – однозначная функция на $\mathfrak{R}$ и $F(z)$ – однозначная алгебраическая функция на $\mathfrak{R}$. Аналогично пункту а) доказывается, что тогда $F(z)$ является рациональной функцией от z и $w(z)$ (или см. предложение 3 в [87]). То есть,

$$F(z) = \tilde{R}(z) + R(z)p(z)\sqrt{Q(z)}, \quad (3.3)$$

где $R(z)$ и $\tilde{R}(z)$ – рациональные функции от z .

Действуя инволюцией $w \rightarrow -w$ на равенство $f(z)e^z = \frac{d}{dz}[F(z)e^z]$, записываемое в виде

$$p(z)\sqrt{Q(z)}e^z = \frac{d}{dz}[(\tilde{R}(z) + R(z)p(z)\sqrt{Q(z)})e^z],$$

получаем $\frac{d}{dz}[\tilde{R}(z)e^z] = 0$, откуда $\tilde{R} = 0$ и

$$p(z)\sqrt{Q(z)}e^z = \frac{d}{dz}[(R(z)p(z)\sqrt{Q(z)})e^z]. \quad (3.4)$$

Для произвольного $\alpha \in \mathbb{C}$ положим $\text{ord}_{z=\alpha} Q(z) = q$, $\text{ord}_{z=\alpha} p(z) = p$, $\text{ord}_{z=\alpha} R(z) = r$. Из равенства (3.4) в силу леммы 1 получаем:

- а) при $r + p + q/2 \neq 0$ выполнено $r = 1$;
- б) при $r + p + q/2 = 0$ выполнено $r \leq 0$.

Следовательно,

1) вне нулей и полюсов функции $p(z)Q(z)$ функция $R(z)$ имеет нуль кратности 0 или 1;

2) в нулях функции $Q(z)$ нечетной кратности или полюсах функции $Q(z)$ нечетной кратности случай б) невозможен и функция $R(z)$ имеет простой нуль;

3) в полюсах функции $Q(z)$ четной кратности полином $p(z)$ не обращается в нуль по условию, следовательно, $p = 0$ и случай б) невозможен, поэтому $r = 1$, функция $R(z)$ имеет простой нуль и в силу неравенства в а) выполнено $q \neq -2$;

4) в нулях полинома $p(z)$ по условию леммы 2β) выполнено $q = 0$ и функция $R(z)$ имеет либо а) простой нуль, либо б) полюс кратности p .

Из 3) вытекает утверждение (3.1) леммы 2β). Из 1) – 4) следует, что $R(z)p(z)$ – полином. В силу 2), 3) полином $R(z)p(z)$ имеет простые нули в нулях или полюсах функции $Q(z)$. То есть,

$$R(z)p(z) = \tilde{p}(z)(z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_s), \quad (3.5)$$

где $\tilde{p}(z)$ – полином, не обращающийся в нуль в $\alpha_1, \dots, \alpha_s$. Подставляя представление (3.5) в формулу (3.3), ввиду $\tilde{R} = 0$, получаем формулу (3.2) леммы 2β). Запишем равенство (3.4) в виде

$$p(z)\sqrt{Q(z)} = \frac{d}{dz}[R(z)p(z)\sqrt{Q(z)}] + R(z)p(z)\sqrt{Q(z)}. \quad (3.6)$$

Так как порядок полюса алгебраической функции в точке $z = \infty$ при дифференцировании снижается ($\text{ord}_{z=\infty}$ возрастает), то из (3.6) следует, что $\text{ord}_{z=\infty}(p(z)\sqrt{Q(z)}) = \text{ord}_{z=\infty}(R(z)p(z)\sqrt{Q(z)})$. Поэтому $\text{ord}_{z=\infty} R(z) = 0$.

Следовательно, сравнивая порядки нуля $\text{ord}_{z=\infty}$ в равенстве (3.5), получаем последнее условие леммы 2β):

$$0 + \deg p(z) = \deg \tilde{p}(z) + s.$$

4. Замечание о методе работы Зигеля.

Зигелем [155] система (1.4) рассматривалась как возмущение движения по инерции в $\mathbb{R}^2$ (неявной заменой $t \rightarrow \varepsilon^{-1}t$). Сначала устанавливалось, что дополнительный интеграл сводится к полиному по скоростям: $g^m + \varepsilon g^{m-1} + \dots + \varepsilon^m g^0$ (это делалось подсчетом порядков полюсов). Затем, из отсутствия ветвления g^{m-3} над плоскостью (x, y) выводилось, что g^m должна быть функцией лишь от $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$. Затем вычиталась степень интеграла энергии H .

§3.2. Критерий интегрируемости в задаче Якоби о движении точки по n -мерному эллипсоиду в квадратичном потенциале

Рассматривается движение точки по n -мерной невырожденной квадрике в однородном квадратичном потенциале при наличии $n+1$ взаимно ортогональной плоскости симметрии задачи. Установлено, что все случаи существования полного коммутативного алгебраического набора интегралов исчерпываются классическими.

Изучается вопрос: наследуется ли интегрируемость по Лиувиллю на инвариантные симплектические подмногообразия? В алгебраической категории для подмногообразий размерности 4 такая наследуемость установлена.

1. Основной результат.

1.1. Критерий интегрируемости. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n+1}$. Рассмотрим движение точки единичной массы по квадрике

$$\langle a^{-1}x, x \rangle = L, \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad a = \text{diag}(a_1, \dots, a_{n+1}), \quad L = 0, 1 \quad (1.1)$$

в квадратичном потенциале

$$2V = \langle cx, x \rangle, \quad c = \text{diag}(c_1, \dots, c_{n+1}). \quad (1.2)$$

Уравнения Лагранжа с множителем этой задачи имеют вид:

$$\ddot{x} = -(c + \lambda(x, \dot{x})a^{-1})x, \quad \lambda = (\langle a^{-1}\dot{x}, \dot{x} \rangle - \langle a^{-1}cx, x \rangle) / \langle a^{-2}x, x \rangle, \quad (1.3)$$

$$\langle a^{-1}x, x \rangle = L, \quad \langle a^{-1}x, \dot{x} \rangle = 0, \quad (1.4)$$

гамильтониан (полная энергия) в избыточных переменных $(x, \dot{x})$ записывается в виде $2H = \dot{x}^2 + \langle cx, x \rangle$.

Задача допускает интегрируемые случаи: Якоби [34] $c_1 = \dots = c_{n+1}$, когда при $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$, $L = 1$ разделяются эллиптические координаты [5], и Неймана [143] $a_1 = \dots = a_{n+1}$, когда при $L = 1$ разделяются сферо-конические координаты [143, 5].

Интегрируемые случаи Неймана и Якоби удовлетворяют условию

$$c_i(a_j^{-1} - a_k^{-1}) + c_j(a_k^{-1} - a_i^{-1}) + c_k(a_i^{-1} - a_j^{-1}) = 0, \quad 1 \leq i < j < k \leq n+1. \quad (1.5)$$

Условие (1.5) может быть переписано в виде: матрицы $1, a^{-1}, c$ линейно зависимы. Так как добавление к c слагаемого, пропорционального a^{-1} , не влияет на движение точки, см. [46], то подмногообразие (1.5) в пространстве параметров исчерпывается случаями Неймана и Якоби.

Следуя [151, 46, 53], рассмотрим потенциал $V_* = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k / x_k^2$. В [49, 53] установлено, что он разделяется в $\mathbb{R}^{n+1}$ и в эллиптических, и в сферо-конических координатах. Потенциал V_* имеет смысл обобщенного потенциала Гука на S^n : при движении в нем точки в случае $\alpha_k \geq 0, \quad k = 0, \dots, n$ все траектории замкнуты и период обращения

по ним зависит лишь от полной энергии. В $\mathbb{R}^{n+1}$ аналогичным свойством обладает потенциал $V_* + kx^2$.

Теорема 1. Все случаи существования полного коммутативного алгебраического набора интегралов $F_1(x, \dot{x}), \dots, F_n(x, \dot{x})$ движения точки по квадрике (1.1) в потенциале $V + V_$ исчерпываются классическими (1.5) и удовлетворяют условию $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n+1} = 0$.*

1.2. Наследуемость интегрируемости. Из относительной теоремы Дарбу, см. [3], вытекает, что векторное поле гамильтониана на инвариантном симплектическом подмногообразии совпадает с векторным полем ограничения гамильтониана на это симплектическое подмногообразие. Воспользуемся тем, что пересечение n -мерной квадрики с трехмерным главным инвариантным подпространством $\{x_l = 0, \quad l = 1, \dots, n+1, \quad l \neq i, j, k\}$ является инвариантным относительно системы (1.3) конфигурационным подмногообразием. Назовем его главным ijk -ым. Техническая трудность заключается в том, что все интегралы из априори неизвестного набора в n -мерном случае могут оказаться зависимыми с гамильтонианом на главном ijk -ом симплектическом подмногообразии, либо содержать это подмногообразие в полярном множестве или во множестве неопределенности. Следующая теорема 2 позволяет по гипотетическому полному коммутативному алгебраическому набору в n -мерном случае построить дополнительный рациональный интеграл для ограничения системы на главное ijk -ое подмногообразие. В разд. 3, 4 теорема 1 будет доказана при $n = 2$. Тогда из существования дополнительного алгебраического интеграла для системы в ограничении будет вытекать соответствующее тройке индексов ijk условие из (1.5) на параметры задачи.

Теорема 2. Пусть M – неприводимое аффинное вещественное или комплексное многообразие размерности $2n + 2$ с регулярной симплектической структурой. Пусть на M задан полный коммутативный алгебраический набор $F_0, \dots, F_n$. Пусть симплектическое четырехмерное подмногообразие N в M инвариантно относительно потока с гамильтонианом F_0 . Тогда ограничение F_0 на N имеет дополнительный рациональный интеграл.

2. Конструкция дополнительного рационального интеграла на N . Рассмотрим комплексификацию многообразий M, N и полного коммутативного набора на M . Предположим, что $\mathcal{G}^{2n+1}$ – уровень некоторого интеграла G из поля $\mathbb{C}(F_0, \dots, F_n)$, содержащий подмногообразие N . Пусть $\mathcal{L}^{2n}$ – произвольная неприводимая симплектическая алгебраическая (возможно, с особенностями) гиперповерхность в $\mathcal{G}^{2n+1}$, содержащая подмногообразие N . Предположим, что гиперповерхность $\mathcal{G}$ в M не содержится в полярном множестве интегралов набора на M . Пусть $F_0, P_1(F_0, F_1), \dots, P_n(F_0, \dots, F_n)$ – полиномы от $F_0, \dots, F_n$ такие, что младшие формы на гиперповерхности $\mathcal{G}$ от функций $F_0, P_1(F_0, F_1), \dots, P_n(F_0, \dots, F_n)$ функционально независимы. Пусть $0, k_1, \dots, k_n$ – кратности нуля младших форм на $\mathcal{G}$. В разд. 5 будет показано, что тогда $k_i \geq 0, \quad k_i \in \mathbb{Q}, \quad i = 1, \dots, n$

и повторные ограничения

$$F_0|_{\mathcal{L}}, \left(\frac{P_i(F_0, \dots, F_i)^{k_j}}{P_j(F_0, \dots, F_j)^{k_i}} \Big|_{\mathcal{G}} \right) \Big|_{\mathcal{L}}, \quad 1 \leq i < j \leq n \quad (2.1)$$

образуют полный коммутативный алгебраический набор на $\mathcal{L}$.

Докажем коммутативность полученного набора в простейшем случае, когда dG регулярно и отлично от нуля в некоторой точке гиперповерхности $\mathcal{G}$. Дополним в этой точке функцию G до локальной симплектической системы координат $(z_0, \dots, z_n, G, w_1, \dots, w_n)$ на $\mathcal{M}$. Тогда симплектическая структура на $\mathcal{M}$ запишется в виде

$$dz_0 \wedge dG + \sum_{i=1}^n dz_i \wedge dw_i. \quad (2.2)$$

Из

$$0 = \{F_i(z_0, \dots, z_n, G, w_1, \dots, w_n), G\} = \frac{\partial F_i}{\partial z_0}, \quad i = 0, \dots, n \quad (2.3)$$

вытекает, что добавка Дирака [36, 95] $\frac{\partial F_i}{\partial z_0} \frac{\partial F_j}{\partial G} - \frac{\partial F_i}{\partial G} \frac{\partial F_j}{\partial z_0}$ обращается в нуль, $0 \leq i, j \leq n$, ср. с подходом [141]. Поэтому, для функций из поля $\mathbb{C}(F_0, \dots, F_n)$ скобки Пуассона многообразия $\mathcal{M}$, гиперповерхности $\mathcal{G} = \{\mathcal{M} \mid G = 0\}$ и трансверсалей к характеристикам на $\mathcal{G}$ совпадают. Но из того, что $\mathcal{L}$ – симплектическое, следует, что оно трансверсально характеристикам на $\mathcal{G}$.

Далее рассматривается нормализация $\mathcal{L}^\nu$ многообразия $\mathcal{L}^{2n}$ [105] и ограничение гамильтониана на $\mathcal{L}^\nu$. Вышеприведенная процедура раскрытия неопределенности интегралов повторяется. Нормализация обеспечивает выполнение условия $dG \neq 0$ на следующем шаге. Возникает цепочка вложений коразмерности 2: $\mathcal{M}^{2n+2} \supset \mathcal{L}^{2n} \supset \dots \supset \mathcal{N}^4$. К деталям доказательства теоремы 2 в разд. 5 сейчас можно обратиться непосредственно.

3. *Препятствия к интегрируемости при $n = 2$.* За исключением случая Неймана $a_1 = a_2 = a_3$ в системе (1.3), (1.4) возможен регулярный предельный переход

$$x \rightarrow \delta^{-1}x, \quad \delta \rightarrow 0 \quad (2.5)$$

при сжатии квадрики к конусу. Добавка V_* в гамильтониане исчезает. Полный коммутативный алгебраический набор в пределе переходит в полный коммутативный алгебраический набор, см. [48]. Изменяя при необходимости нумерацию осей координат, предположим, что $a_1 \neq a_3$. Воспользуемся тем, что главная образующая $x_2 = 0$ конуса $\langle a^{-1}x, x \rangle = 0$ является инвариантным конфигурационным подпространством предельной системы и ее в свою очередь можно рассмотреть как возмущение уравнений в вариациях вдоль

подпространства $\langle a^{-1}x, x \rangle = 0$, $x_2 = 0$. Последнее осуществляется введением малого параметра: $x_2 \rightarrow \sqrt{\varepsilon}x_2$, $\varepsilon \rightarrow 0$. При $\varepsilon = 0$ система распадается в декартово произведение двух одномерных гармонических осцилляторов: вдоль главной образующей конуса и в ортогональном направлении.

Так как невозмущенные уравнения интегрируемы, появляется возможность учесть первые препятствия Гюссона см. [127, 6], порождаемые членами первого порядка по ε в интеграле и правой части системы (1.3), (1.4). Приведем получаемые препятствия в случае, когда невозмущенный бигармонический осциллятор резонансен.

В рассматриваемом случае на уровне энергии имеются оскулирующие алгебраические переменные D, E, v , вводимые в разд. 4. В них система (1.3), (1.4) принимает вид:

$$dD/dv = \varepsilon f^1(D, E, v) + \varepsilon^2 f^2(D, E, v) + \dots,$$

$$dE/dv = \varepsilon g^1(D, E, v) + \varepsilon^2 g^2(D, E, v) + \dots,$$

где $f^1, g^1, f^2, g^2, \dots$ – некоторые алгебраические функции. Тогда, если $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0(D, E) + \varepsilon \mathcal{F}^1(D, E, v) + \dots$ – интеграл, имеющий не более, чем конечное ветвление над комплексным пространством $\mathbb{C}^3$ с координатами (D, E, v) , то

$$-\frac{\partial \mathcal{F}^1}{\partial v} = \frac{\partial \mathcal{F}^0}{\partial D} f^1 + \frac{\partial \mathcal{F}^0}{\partial E} g^1.$$

Следовательно, должны быть линейно зависимы вычеты

$$\text{res}_{v=v_j} f^1(D, E, v), \quad \text{res}_{v=v_j} g^1(D, E, v)$$

для каждого полюса $v_j(D, E)$ функций f^1 и g^1 . Но f^1 и g^1 имеют нетривиальные полюса лишь в точках $v = \pm 1, \infty$, см. разд. 4. Условия линейной зависимости вычетов, взятые для всех допустимых перестановок осей координат x_1, x_2, x_3 , и приводят к условиям (1.5).

Все аналитические вычисления: дифференцирования в силу системы, разложения в ряды по ε и времени t , нахождение коэффициентов полиномов и разложения на множители – проведены с использованием пакета программ MAPLE V release 3.

4. *Неинтегрируемость в двумерном случае.* Пусть $F^0(x, \dot{x})$ – дополнительный алгебраический интеграл системы (1.3) на поверхности

$$\langle a^{-1}x, x \rangle = \langle a^{-1}x, \dot{x} \rangle = 0. \quad (4.2)$$

Изменяя при необходимости нумерацию осей координат, предположим, что

$$\text{либо (i) } a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_1, \quad \text{либо (ii) } a_1 \neq a_2 = a_3$$

и введем параметр ε регулярной заменой: $x_2 \rightarrow \sqrt{\varepsilon}x_2$. Перейдем в системе (1.3), (4.2) к переменным $x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2$. Выражая $x_3, \dot{x}_3$ из

соотношений (4.2):

$$x_3^2 = -\left(\frac{a_3}{a_1}x_1^2 + \varepsilon\frac{a_3}{a_2}x_2^2\right), \quad \dot{x}_3^2 = -\frac{(a_3a_1^{-1}x_1\dot{x}_1 + \varepsilon a_3a_2^{-1}x_2\dot{x}_2)^2}{a_3a_1^{-1}x_1^2 + \varepsilon a_3a_2^{-1}x_2^2}, \quad (4.3)$$

запишем систему (1.3) на поверхности (4.2) в виде:

$$\ddot{x}_i = -x_i[c_i + (\lambda^0 + \varepsilon\lambda^1 + \varepsilon^2\lambda^2 + \dots)a_i^{-1}], \quad i = 1, 2, \quad (4.4)$$

где

$$\lambda^0 = -\frac{c_1 - c_3}{a_1^{-1} - a_3^{-1}}, \quad \lambda^1 = \frac{a_1^2 a_3}{(a_3 - a_1)a_2} \left(\frac{(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1)^2}{x_1^4} - \frac{Sx_2^2}{a_2(a_3 - a_1)x_1^2} \right),$$

$$S = a_1(a_2 - a_3)c_1 + a_2(a_3 - a_1)c_2 + a_3(a_1 - a_2)c_3,$$

а интеграл энергии – в виде

$$H = H^0(x_1, \dot{x}_1) + \varepsilon H^1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) + \dots, \quad (4.5)$$

$$2H^0 = \alpha^2 \dot{x}_1^2 + \beta x_1^2, \quad \alpha^2 = 1 - a_3 a_1^{-1}, \quad \beta = c_1 - c_3 a_3 / a_1.$$

Будем искать общее решение системы (4.4) в виде ряда по ε :

$$x_i(t, \varepsilon) = \tilde{x}_i(t) + \varepsilon x'_i(t) + \dots, \quad i = 1, 2. \quad (4.6)$$

При $\varepsilon = 0$ система (4.4) принимает вид:

$$\ddot{x}_1 = -l_2^2 x_1, \quad \ddot{x}_2 = -m_2^2 x_2,$$

где

$$l_2 = \sqrt{(a_1 c_1 - a_3 c_3) / (a_1 - a_3)}, \quad m_2 = \sqrt{c_2 - a_2^{-1} a_3 a_1 (c_3 - c_1) / (a_1 - a_3)}, \quad (4.7)$$

$l_2^2 = \beta / \alpha^2$, а ее общее решение – вид

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \frac{\sqrt{2h^0}}{\alpha} \sin \tau / l_2, \quad \dot{\tilde{x}}_1 = \frac{\sqrt{2h^0}}{\alpha} \cos \tau, \\ \tilde{x}_2 &= \sqrt{D} \sin \tau_1 / m_2, \quad \dot{\tilde{x}}_2 = \sqrt{D} \cos \tau_1, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$\tau = l_2(t - t_0), \quad \tau_1 = m_2(t - t_1).$$

Здесь постоянные интегрирования h^0, D, t_0, t_1 невозмущенной системы выбраны так, чтобы ее общее решение выдерживало предельные переходы $l_2 \rightarrow 0$ и $m_2 \rightarrow 0$ при постоянных остальных параметрах задачи a_1, a_2, a_3, c_1 . В том числе h^0 – постоянная интеграла невозмущенной задачи H^0 .

Рассмотрим разложение Пуизе по ε дополнительного интеграла $F^0(x_1, \dot{x}_1, x_2/\sqrt{\varepsilon}, \dot{x}_2/\sqrt{\varepsilon})$ системы (4.4):

$$F^0(x_1, \dot{x}_1, x_2/\sqrt{\varepsilon}, \dot{x}_2/\sqrt{\varepsilon}) = \varepsilon^S \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/s} f^m(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2). \quad (4.9)$$

Тогда $s \in \mathbb{N}$, $S \in \mathbb{Q}$, f^m – алгебраические функции. Ввиду голоморфности системы (4.4) по ε , не ограничивая общности, предполагаем, что $s = 1$. Кроме того, предполагаем, что f^0 функционально независим с H^0 .

Будем говорить, что система (4.4) допускает дополнительный ε^k -интеграл

$$f^0(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) + \varepsilon^1 f^1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) + \dots + \varepsilon^k f^k(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2),$$

если в силу нее выполнено $(f^0 + \dots + \varepsilon^k f^k)' = o(\varepsilon^k)$ и f^0 функционально независим от $H^0(x_1, \dot{x}_1)$.

В разд. 4.1 – 4.5 разбиением на 5 случаев доказывается, что при невыполнении условий (1.5) у системы (4.4) отсутствует дополнительный алгебраический ε^1 -интеграл.

4.1. Случай $m_2/l_2 \notin \mathbb{Q}$

Лемма 1. Функции $e^{il_2 t}$, $e^{im_2 t}$ как функции переменной t алгебраически зависимы тогда и только тогда, когда m_2 и l_2 рационально соизмеримы.

Из леммы 1 вытекает, что в условиях случая 4.1 дополнительный алгебраический интеграл при $\varepsilon = 0$ с точностью до функциональной зависимости единственен: $D = m_2^2 x_2^2 + \dot{x}_2^2$. Следовательно,

$$f^0 = \mathcal{F}^0(H^0, D), \quad (4.10)$$

где $\mathcal{F}^0$ – некоторая алгебраическая функция. Пусть h – постоянная интеграла H . Подставим в формулу (4.10) равенство $H^0 = h - \varepsilon H^1 + o(\varepsilon)$, вытекающее из разложения (4.5). Подставляя в ε^1 -интеграл (4.9) полученную формулу (4.10) и ряды (4.6) и приравнивая коэффициенты при ε^1 , получаем:

$$\frac{\partial \mathcal{F}^0}{\partial D}(h^0, D) D'(t) + \left(f^1 - \frac{\partial \mathcal{F}^0}{\partial H} H^1 \right) (\tilde{x}_1(t), \dot{\tilde{x}}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dot{\tilde{x}}_2(t)) = \text{const}.$$

Следовательно, $D'(t) := \partial D(t, \varepsilon)/\partial \varepsilon|_{\varepsilon=0}$ как функция времени t – алгебраическая функция от $\cos \tau$ и $\cos \tau_1$.

Дифференцируя переменную D в силу системы (4.4) и подставляя ряды (4.6), получаем уравнение для D' :

$$dD'(t)/dt = -2\tilde{x}_2(t)\dot{\tilde{x}}_2(t)\tilde{\lambda}_1(t)/a_2.$$

Вычет правой части этого уравнения имеет вид

$$\operatorname{res}_{t=n\pi/l_2+t_0} \frac{dD'(t)}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{a_3 a_1 S}{a_2^3 (a_3 - a_1) m_2^2 h^0} \frac{D^2}{h^0} \sin^2 P_n (4 \cos^2 P_n - 1), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.11)$$

где $P_n = m_2 n \pi / l_2 + m_2 (t_0 - t_1)$. Так как $D'(t)$ – алгебраическая функция от $\cos \tau$, $\cos \tau_1$, вычет (4.11) должен обращаться в тождественный нуль, т.е. должно выполняться $S = 0$.

4.2. Случай $m_2/l_2 \in \mathbb{Q} \setminus 0$

Тогда при $\varepsilon = 0$ имеются два дополнительных независимых алгебраических интеграла: D и $u = (\dot{x}_1 + i l_2 x_1)^{-m_2/l_2} (\dot{x}_2 + i m_2 x_2)$. Положим $P = \operatorname{Im} \ln u$, тогда $e^{iP} = u/|u|$, $P|_{\varepsilon=0} = m_2(t_0 - t_1)$.

Определим функцию $\tau(x, H^0)$ как неявную из первого соотношения (4.8). Тогда $\sin \tau = \alpha l_2 x_1 / \sqrt{2H^0(x_1, \dot{x}_1)}$ и переменные $H, D, e^{iP}, \sin \tau$ – алгебраические оскулирующие. Перейдем в системе (4.4) к переменным

$$H(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \varepsilon), \quad D(x_2, \dot{x}_2), \quad P(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2), \quad \tau(x_1, H^0(x_1, \dot{x}_1)).$$

Их производные в силу системы (4.4) запишутся в виде:

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad \frac{dD}{dt} = \varepsilon g_1(x_2, \dot{x}_2) [\lambda^1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) + \varepsilon \lambda^2(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) + \dots],$$

$$\frac{dP}{dt} = \varepsilon g_2(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) [\lambda^1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) + \varepsilon \lambda^2(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) + \dots],$$

$$\frac{d\tau}{dt} = l_2 + \varepsilon g_3(x_1, \dot{x}_1) [\lambda^1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) + \varepsilon \lambda^2(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) + \dots], \quad (4.12)$$

где

$$g_1 = \frac{-2x_2 \dot{x}_2}{a_2}, \quad g_2 = m_2 \left(\frac{x_2^2}{a_2 D} - \frac{\alpha x_1^2}{2a_1 h^0} \right).$$

Переходя в правой части (4.12) от $x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2$ к h^0, D, P, τ посредством преобразования (4.8), в которое подставлено $\tau_1 = m_2 \tau / l_2 + P$, получим:

$$\frac{dD}{dt} = \varepsilon G_1(D, \tau_1) [\Lambda^1(h^0, D, P, \tau) + \varepsilon \Lambda^2(h^0, D, P, \tau) + \dots],$$

$$\frac{dP}{dt} = \varepsilon G_2(\tau, \tau_1) [\Lambda^1(h^0, D, P, \tau) + \varepsilon \Lambda^2(h^0, D, P, \tau) + \dots],$$

$$\frac{d\tau}{dt} = l_2 + \varepsilon G_3(h^0, \tau) [\Lambda^1(h^0, D, P, \tau) + \varepsilon \Lambda^2(h^0, D, P, \tau) + \dots], \quad (4.13)$$

где

$$\Lambda^j(h^0, D, P, \tau) = \lambda^j(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2), \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$G_i(h^0, D, P, \tau) = g_i(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$G_1 = -\frac{D \sin 2\tau_1}{a_2 m_2}, \quad G_2 = \frac{\sin^2 \tau_1}{a_2 m_2} - \frac{m_2 \sin^2 \tau}{a_1 l_2^2}, \quad \Lambda^1 =$$

$$-\frac{a_1 a_3 D}{a_2} \frac{l_2^4}{2h^0 \sin^4 \tau} \left[\left(\frac{\sin \tau \cos \tau_1}{l_2} - \frac{\cos \tau \sin \tau_1}{m_2} \right)^2 - \frac{S}{a_2(a_3 - a_1)} \frac{\sin^2 \tau \sin^2 \tau_1}{l_2^2 m_2^2} \right]$$

Из формулы (1.2) вытекает соотношение $2\varepsilon^{-1}H = (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2)/\varepsilon + \dot{x}_2^2 + 2V(x_1/\sqrt{\varepsilon}, x_2, x_3/\sqrt{\varepsilon})$. Из формулы (4.2) следует, что на поверхности (4.2) интеграл $2\varepsilon^{-1}H$ является функцией от $x_1/\sqrt{\varepsilon}$, $\dot{x}_1/\sqrt{\varepsilon}$, x_2 , $\dot{x}_2$. Поэтому $H^j(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = h_j(D, P, \tau)/(h^0)^{j-1}$, $j = 1, 2, \dots$ и интеграл энергии (4.5) приводится к виду:

$$H = h^0 + \varepsilon h^1(D, P, \tau) + \frac{\varepsilon^2}{h^0} h^2(D, P, \tau) + \dots, \quad (4.14)$$

где $h^j(D, P, \tau)$ для $j = 1, 2, \dots$ в силу (4.5), (4.8) являются алгебраическими функциями от $D, \cos \tau, \cos \tau_1$.

Обращая при $h^0 \neq 0$ функцию (4.14) как функцию от h^0 , переходим в правой части (4.13) от h^0, D, P, τ к h, D, P, τ .

Дифференцируя ε^1 -интеграл $\mathcal{F}^0(h, D, P) + \varepsilon \mathcal{F}^1(h, D, P, \tau)$ в силу (4.13), получаем:

$$-\frac{\partial \mathcal{F}^1}{\partial \tau} l_2 = \left[\frac{\partial \mathcal{F}^0}{\partial D}(h, D, P) G_1(D, P, \tau) + \frac{\partial \mathcal{F}^0}{\partial P} G_2 \right] \Lambda^1(h, D, P, \tau). \quad (4.15)$$

Так как $\mathcal{F}^1(h, D, P, \tau)$ является алгебраической функцией по $\cos \tau$, правая часть равенства (4.15) должна иметь нулевые вычеты по t . Но вычеты по переменной t функции $dD'/dt \equiv G_1 \Lambda^1$ определяются формулой (4.11), а функции $dP'/dt \equiv G_2 \Lambda^1$ – формулой

$$\operatorname{res}_{t=n\pi/l_2+t_0} \frac{dP'(t)}{dt} = \frac{2}{3} \frac{a_3 a_1 S}{a_2^3 (a_3 - a_1) m_2^2 h^0} \sin^2 P_n \sin 2P_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, за исключением случая Якоби $S = 0$, в случае существования дополнительного алгебраического ε^1 -интеграла, ввиду произвольности величины $P_n = m_2 n \pi / l_2 + P$, должно быть выполнено

$$D \frac{\partial \mathcal{F}^0}{\partial D} (4 \cos^2 P_n - 1) - \frac{\partial \mathcal{F}^0}{\partial P} \sin 2P_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \left(\frac{\partial \mathcal{F}^0}{\partial D}, \frac{\partial \mathcal{F}^0}{\partial P} \right) \neq 0. \quad (4.16)$$

Подслучай $m_2/l_2 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Уравнения системы (4.16) относительно $\mathcal{F}^0$ должны быть зависимы, в частности, при $n = 0, 1$. Поэтому величина $m_2 \pi / l_2$ должна быть периодом функции $(4 \cos^2 P - 1) / \sin 2P$. Следовательно, $m_2/l_2 \in \mathbb{Z}$, противоречие с условием подслучая.

Пусть формулы для $l_i, m_i, \quad i = 1, 2, 3$ получаются из формул (4.7) для l_2, m_2 циклической перестановкой индексов. Тогда

$$S = a_2(a_1 - a_3)(l_2^2 - m_2^2) = a_3(a_2 - a_1)(l_3^2 - m_3^2) = a_1(a_3 - a_2)(l_1^2 - m_1^2). \quad (4.17)$$

4.3. Случай $l_2 \neq 0, \quad m_2 = 0$

Тогда дополнительный алгебраический от $x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2$ ε^0 -интеграл единственен: D . При предельном переходе $m_2 \rightarrow 0$ в переменных $(a_1, a_2, a_3, l_2, m_2, c_1; h, D, P, t_0; t, \varepsilon)$ решение (4.8) системы (4.4) при $\varepsilon = 0$ переходит в

$$\tilde{x}_1 = \frac{\sqrt{2h}}{\alpha} \sin \tau/l_2, \quad \tilde{x}_2 = \sqrt{D}(t - t_1),$$

а вычет (4.11), ввиду первой формулы (4.17), переходит в

$$\operatorname{res}_{t=n\pi/l_2+t_0} \frac{dD'(t)}{dt} = 2 \frac{a_3 a_1}{a_2^2} l_2^2 \frac{D^2}{h^0} \left(\frac{n\pi}{l_2} + t_0 - t_1 \right)^2. \quad (4.18)$$

Равенство (4.18) противоречит существованию алгебраического ε^1 -интеграла $D + \varepsilon \mathcal{F}^1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)$ системы (4.4) ввиду того, что в правой части возмущенной системы коммутируют два предельных перехода:

$$\lim_{m_2 \rightarrow 0} D'(t, m_2) = \partial [\lim_{m_2 \rightarrow 0} D(t, \varepsilon, m_2)] / \partial \varepsilon|_{\varepsilon=0}$$

при фиксированных остальных из переменных $(a_1, a_2, a_3, l_2, m_2, c_1; h, D, P, t_0; t, \varepsilon)$. Перестановочность двух предельных переходов вытекает из следующего.

Возмущенная система (4.4) регулярна на подмногообразии $\{\varepsilon = m_2 = 0\}$ в пространстве переменных и параметров $(a_1, a_2, a_3, l_2, m_2, c_1; x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2; t, \varepsilon)$. Преобразование (4.8) от системы координат $(a_1, a_2, a_3, l_2, m_2, c_1; x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2; t, \varepsilon)$ к системе координат $(a_1, a_2, a_3, l_2, m_2, c_1; h, D, P, t_0; t, \varepsilon)$ регулярно на подмногообразии $\{\varepsilon = m_2 = 0\}$. В возмущенной системе в переменных $(a_1, a_2, a_3, l_2, m_2, c_1; h, D, P, t_0; t, \varepsilon)$ необходимо воспользоваться теоремой об аналитической зависимости решения от начальных условий, см. [2].

Замечание 2. В случае (i), если параметры задачи не удовлетворяют условиям ни случаев 4.1, 4.3, ни подслучая 4.2 ни условию $m_2/l_2 = \pm 1$ ни после какой перенумерации осей координат x_i , то этот случай рассматривается в разд. 4.4.

В случае (ii), если параметры задачи не удовлетворяют условиям ни случаев 4.1, 4.3, ни подслучая 4.2 ни условию $m_2/l_2 = \pm 1$ ни для какой перестановки осей x_2, x_3 то этот случай рассматривается в разд. 4.5.

4.4. Случай, когда для каждого $i = 1, 2, 3$ выполнено либо $l_i = 0$, либо $m_i/l_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$ и выполнено $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_1$.

Подслучай $m_i/l_i = n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, $i = 1, 2, 3$. Но тогда из (4.17) и первой формулы (4.7) вытекает

$$\begin{aligned} a_2(a_1c_1 - a_3c_3) &= -S/(n_2^2 - 1), \quad a_3(a_2c_2 - a_1c_1) = -S/(n_3^2 - 1), \\ a_1(a_3c_3 - a_2c_2) &= -S/(n_1^2 - 1). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Суммируя равенства (4.19), получаем $S(1 + \sum_{i=1}^3 (n_i^2 - 1)^{-1}) = 0$, откуда $S = 0$, ввиду $(n_i^2 - 1)^{-1} > 0$. Тогда из (4.17) следует $l_2^2 - m_2^2 = 0$, что противоречит условию подслучая.

Подслучай $l_1 = 0$, $m_2/l_2, m_3/l_3 \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$. Аналогично,

$$\begin{aligned} a_2(a_1c_1 - a_3c_3) &= -S/(n_2^2 - 1), \quad a_3(a_2c_2 - a_1c_1) = -S/(n_3^2 - 1), \\ a_1(a_3c_3 - a_2c_2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Суммируя равенства (4.20), получаем $S(1 + \sum_{i=2}^3 (n_i^2 - 1)^{-1}) = 0$. Тогда из (4.17) следует $l_2^2 - m_2^2 = 0$, что противоречит условию подслучая.

Подслучай $l_1 = l_2 = 0$, $m_3/l_3 \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$. Тогда $S(1 + (n_3^2 - 1)^{-1}) = 0$, откуда $l_3^2 - m_3^2 = 0$, что аналогично противоречит условию подслучая.

Подслучай $l_1 = l_2 = l_3 = 0$. Тогда, из (4.7) получаем $a_1c_1 = a_2c_2 = a_3c_3$, откуда $a^{-1} \parallel c$. Поэтому $S = 0$ и из (4.7) вытекает $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ (подслучай случая Якоби).

Случай 4.4 сводится к одному из перечисленных подслучаев после возможной перенумерации осей координат. Первым трем подслучаям разд. 4.4 соответствуют пустые множества параметров задачи.

4.5. Случай, когда для каждого $i = 1, 2, 3$ выполнено либо $l_i = 0$, либо $m_i/l_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$ и выполнено условие $a_1 \neq a_2 = a_3$.

Подслучай $m_2/l_2 = n_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$. Тогда интеграл $\mathcal{F}^0$ условием (4.16) определяется однозначно, с точностью до функциональной зависимости: $\mathcal{F}^0 = D^2(\sin 4P/2 - \sin 2P)$. И уравнение (4.15) принимает вид:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{l_2} \frac{\partial \mathcal{F}^1}{\partial t} &= \frac{a_1 D^3}{h^0} \left\{ \frac{(2 \sin 2P - \sin 4P) \sin \tau_1 \cos \tau_1}{a_2 n_2} + \left(\frac{-n_2}{a_1} \sin^2 \tau + \frac{\sin^2 \tau_1}{a_2 n_2} \right) \right. \\ &\times \frac{1}{\sin^4 \tau} \left\{ \left(\sin \tau \cos \tau_1 - \frac{\cos \tau \sin \tau_1}{n_2} \right)^2 - \left(\frac{1}{n_2^2} - 1 \right) \sin^2 \tau \sin^2 \tau_1 \right\} \Big|_{\tau_1 = n_2 \tau + P} \\ &\left. + \frac{2D^3}{a_2 h^0} \left(\sum_{k=0}^2 \mathcal{F}_k^1(\tau) \cos^{2k} P + \sum_{k=0}^1 \tilde{\mathcal{F}}_k^1(\tau) \cos^{2k+1} P \sin P \right) \frac{\sin^2 P}{\sin^4 \tau} \right\}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Так как функция $\mathcal{F}^1(h, D, P, \tau)$ как функция переменной τ является алгебраической функцией от $\cos \tau$, то первообразные от коэффициентов при $\cos^{2k} P$, $\cos^{2k+1} P \sin P$ в (4.21) для $k = 0, 1, 2$, должны

иметь нулевые вековые члены по τ . Но для $\mathcal{F}_*^1 :=$

$$\frac{5}{2}\mathcal{F}_2^1 + 4\mathcal{F}_1^1 + 4\mathcal{F}_0^1 = 6n_2^{-3}a_1 \cos^2 n_2\tau - \frac{3}{2}n_2^{-1}(-2(a_1 + 2a_2) \sin^2 \tau + 5a_1 n_2^{-2})$$

выполнено

$$\int \mathcal{F}_*^1 \sin^{-4} \tau d\tau = \frac{3a_1}{n_2^3} \int \frac{\cos 2n_2\tau}{\sin^4 \tau} d\tau = \frac{4}{3}n_2(n_2^2 - 1)\tau \neq 0 \pmod K,$$

при $n_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, где $K = \mathbb{C}[\sin^{-2} \tau, \sin 2\tau]$, противоречие. Здесь использована следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для $m, n \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$\int^\tau \cos 2n\tau \sin^{-2m} \tau d\tau = \varphi_{n,m}(\tau) + c_{n,m}\tau, \quad \varphi_{n,m} \in K,$$

$$\int^\tau \sin(2n+1)\tau \sin^{1-2m} \tau d\tau = \psi_{n,m}(\tau) + s_{n,m}\tau, \quad \psi_{n,m} \in K,$$

где

$$s_{n,0} = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}, \quad s_{-1,0} = -1/2, \quad s_{0,0} = 1/2, \quad c_{n,0} = \delta_{n,0}$$

δ_{ij} – символ Кронекера;

$$s_{n,1} = 1, \quad c_{n,1} = -2n, \quad n \in \mathbb{N}_0;$$

$$s_{n,2} = -2n(n+1), \quad c_{n,2} = 4n(n^2 - 1)/3, \quad n \in \{-1 \cup \mathbb{N}_0\}.$$

Доказательство предложения 2. Указанные интегралы имеют вид $\sum_{k=-m}^{n-m+1} A_k \int^v (1-v^2)^{k-1/2} dv$, где $v = \cos \tau$, $A_k = \text{const}$, и являются, с точностью до слагаемого $A\tau$, $A = \text{const}$, тригонометрическими рациональными функциями от 2τ . Из тригонометрических формул понижения вытекают следующие рекуррентные соотношения:

$$s_{n,m} = s_{n-1,m} - 2s_{n-1,m-1} + c_{n,m-1} + c_{n-1,m-1},$$

$$c_{n,m} = c_{n-1,m} - 2s_{n-1,m}, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Подслучай $l_2 = l_3 = 0$. Тогда из первой формулы (4.7) вытекает $a_2(c_2 - c_3) = 0$ и имеет место осевая симметрия задачи (подслучай случая Якоби).

Теорема 1 при $n = 2$ доказана. Фактически она доказана для произвольных $a_i \in \mathbb{C} \setminus 0$, $c_i \in \mathbb{C}$, для которых формально определены уравнения Лагранжа (1.3). То есть, она доказана за исключением подмножества $a_1 = \dots = a_{n+1}$, $L = 0$ в пространстве параметров задачи.

5. Наследуемость интегрируемости по Лиувиллю на инвариантные симплектические подмногообразия размерности 4

Все многообразия в разд. 5 будем предполагать неприводимыми комплексными аффинными алгебраическими, не оговаривая это дополнительно. В терминологии и обозначениях будем следовать [105]. От вещественного случая необходимо перейти к комплексному, рассмотрев комплексификацию многообразий и продолжив на комплексификацию многообразий рациональную симплектическую структуру и алгебраические интегралы.

Пусть $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$ – кольцо регулярных функций на многообразии $\mathcal{M}$, т.е. кольцо ограничений полиномов, если $\mathcal{M}$ реализовано как замкнутое подмножество аффинного пространства. Пусть $\mathbb{C}(\mathcal{M})$ – поле рациональных функций на $\mathcal{M}$. Через (f) ($(f)_0$, $-(f)_\infty$) обозначен дивизор (нулей, полюсов) функции $f \in \mathbb{C}(\mathcal{M})$, через Supp – его носитель.

Нам потребуются следующие факты из бирациональной геометрии алгебраических многообразий, подробнее см. [105].

Функция $f \in \mathbb{C}(\mathcal{M})$ называется регулярной в точке x замкнутого подмножества $\mathcal{M}$, если она может быть записана в виде P/Q , где P, Q – полиномы и $Q(x) \neq 0$.

Лемма 2 ([105], гл.1, парагр.3). Функция из $\mathbb{C}(\mathcal{M})$, регулярная в каждой точке неприводимого замкнутого подмножества $\mathcal{M}$, принадлежит $\mathbb{C}[\mathcal{M}]$.

Лемма 3. ([105], гл.2 парагр.5). Нормальное многообразие неособо в коразмерности 1.

Лемма 4. ([105], гл. 3 парагр. 1, стр.187). Если неприводимое многообразие $\mathcal{M}$ нормально, то из $f \in \mathbb{C}(\mathcal{M})$, $(f) \geq 0$ вытекает $f \in \mathbb{C}[\mathcal{M}]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\mathcal{N}$ – неприводимое подмногообразие нормального многообразия $\mathcal{M}$ и $f \in \mathbb{C}(\mathcal{M})$. Тогда либо

А) $\text{Supp}(f) \supset \mathcal{N}$, либо Б) f регулярна в некоторой точке подмногообразия $\mathcal{N}$.

Действительно, если не имеет места А), то для $U = \mathcal{M} \setminus \text{Supp}(f)$ (являющегося многообразием ввиду [105], гл.1 парагр. 4.2) выполнено $\mathcal{N} \cap U \neq \emptyset$. В силу леммы 4, примененной к подмногообразию U , из $f \in \mathbb{C}(U)$, $(f|_U) \geq 0$ вытекает $f \in \mathbb{C}[U]$. Т.е. f регулярна в точках подмногообразия $\mathcal{N} \cap U \neq \emptyset$, а следовательно, в некоторой точке подмногообразия $\mathcal{N}$.

5.1. В коразмерности 2

Предложение 4. Пусть $F_0, \dots, F_n$ – полный коммутативный набор рациональных функций на нормальном симплектическом многообразии $\mathcal{M}^{2n+2}$, содержащем симплектическое подмногообразие $\mathcal{N}$ коразмерности 2, не лежащее в $\text{Supp}(F_0)$.

Предположим, что либо

А) после некоторой перенумерации интегралов $F_1, \dots, F_n$ выполнено $\mathcal{N} \subset \text{Supp}(F_n)_0$, либо

Б) интегралы $F_0, \dots, F_n$ регулярны в некоторой точке $X \in \mathcal{N}$ и их ограничения на $\mathcal{N}$ функционально зависимы: $\text{rk}\{d(F_0|_{\mathcal{N}}), \dots, d(F_n|_{\mathcal{N}})\} <$

$n + 1$.

Тогда выполнены следующие 4 утверждения:

1) Найдется полином $P \neq 0$ такой, что $\mathcal{N} \subset (P(F_0, \dots, F_n))_0$.

Положим $G = P(F_0, \dots, F_n)$. Для любой гиперповерхности $\mathcal{G}$ в $\mathcal{M}$, являющейся содержащей $\mathcal{N}$ неприводимой компонентой уровня $\{\mathcal{M} | G = 0\}$, положим $k = \text{ord}_{\mathcal{G}} G$ и дополним алгебраическую функцию $\tilde{G} = G^{1/k}$ рациональными функциями до системы локальных параметров, см. парагр. 2.1 гл.2 в [105], $(x_1, \dots, x_{2n+1}, \tilde{G})$ на $\mathcal{M}$ в общей точке гиперповерхности $\mathcal{G}$. Тогда

2) найдутся полиномы от $F_0, \dots, F_n$:

$$P_0 = F_0, \quad P_1(F_0, F_1), \quad P_2(F_0, F_1, F_2), \quad \dots, \quad P_n(F_0, F_1, \dots, F_n) \quad (4.0)$$

такие, что их младшие однородные формы по $\tilde{G}$ в координатах $(x_1, \dots, x_{2n+1}, \tilde{G})$ функционально независимы.

3) Младшие однородные формы по $\tilde{G}$ в координатах $(x_1, \dots, x_{2n+1}, \tilde{G})$ от функций из набора (4.0) имеют вид $P_i^0 = p_i(x_1, \dots, x_{2n+1})\tilde{G}^{k_i}$, где $k_i = \text{ord}_{\mathcal{G}} P_i \in \mathbb{Z}$, не все $k_1, \dots, k_n$ равны нулю, p_i^k – рациональные функции на гиперповерхности $\mathcal{G}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, и среди алгебраических функций

$$\frac{p_i(x_1, \dots, x_{2n+1})^{k_j}}{p_j(x_1, \dots, x_{2n+1})^{k_i}} = \frac{P_i(F_0, \dots, F_i)^{k_j}}{P_j(F_0, \dots, F_j)^{k_i}} \Big|_{\mathcal{G}}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad (4.1)$$

имеется ровно $n - 1$ функционально независимых.

4) Функции (4.1) регулярны в некоторой точке $Y \in \mathcal{N}$ и k -ые степени их ограничений на $\mathcal{N}$:

$$\left(\frac{P_i(F_0, \dots, F_i)^{k_j}}{P_j(F_0, \dots, F_j)^{k_i}} \Big|_{\mathcal{G}} \right) \Big|_{\mathcal{N}}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad (4.2)$$

дополняют $F_0|_{\mathcal{N}}$ до полного коммутативного рационального набора на многообразии $\mathcal{N}$.

Доказательство предложения 4.

1) В случае А) положим $P = F_n$.

В случае Б) построение многочлена P следующее. Предположим, что $\text{rk}\{d(F_0|_{\mathcal{N}}), \dots, d(F_{r-1}|_{\mathcal{N}})\} = \text{rk}\{d(F_0|_{\mathcal{N}}), \dots, d(F_r|_{\mathcal{N}})\} = r$. Дополняя рациональные функции $F_0, \dots, F_{r-1}$ до системы локальных параметров $(F_0, \dots, F_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_{2n})$ на $\mathcal{N}$ в общей точке подмногообразия $\mathcal{N}$ (см. [105], параграф 2 главы 2), получаем, что $F_r = \varphi(F_0, \dots, F_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_{2n})$. Так как замена является алгебраической, то φ – алгебраическая функция. Из условия на ранг вытекает, что $\partial\varphi/\partial x_i \equiv 0$, $i = r + 1, \dots, 2n$. Следовательно,

$$a_0(F_0, \dots, F_{r-1}) + a_1(F_0, \dots, F_{r-1})F_r + \dots + a_N(F_0, \dots, F_{r-1})F_r^N = 0$$

где $N \in \mathbb{N}$ и $a_0, \dots, a_N$ – полиномы от $F_0, \dots, F_r$.

2) Лемма раздела 1.2 в [38] обобщается с поля рациональных функций в $\mathbb{C}^m$ на поле рациональных функций на многообразии $\mathcal{M}$ (при этом локальным параметрам $\mathcal{M}$ приписываются также неотрицательные веса). Действительно, младшие квазиоднородные формы [38] в этом случае являются алгебраическими на $\mathcal{M}$, и в случае их функциональной зависимости аннулирующий их полином существует (и строится аналогично пункту 1)).

Если приписать локальным параметрам $(x_1, \dots, x_{2n+1}, \tilde{G})$ веса $(0, \dots, 0, 1)$, получим 2).

Пункт 3) вытекает из

$$p_i^k = \frac{P_i(F_0, \dots, F_i)^k}{G^{k_i}}|_{\mathcal{G} \in \mathbb{C}(\mathcal{G})}$$

в силу предложения 3. Если бы было $k_1 = \dots = k_n = 0$, то, ввиду $k_0 = 0$, в силу 2) ограничения рациональных функций $P_0, \dots, P_n$ на гиперповерхность $\mathcal{G}$ в $\mathcal{M}$ были бы функционально независимы, что противоречило бы определению $\mathcal{G}$ как поверхности уровня некоторого полинома от $F_0, \dots, F_n$.

4) Обозначим рациональные функции $P_i^{kk_j}/P_j^{kk_i}$, соответствующие $n-1$ независимому среди отношений (4.1), через $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_{n-1}$, (извлекая из них корень максимальной натуральной степени, оставляющий их рациональными), положим $\tilde{F}_0 = F_0$.

а) СЛУЧАЙ, КОГДА $\mathcal{N} \not\subset \text{sng } \mathcal{M}$, $\mathcal{N} \not\subset \text{sng Supp}(G)$.

Тогда точка общего положения в подмногообразии $\mathcal{N}$ имеет малую окрестность U в $\mathcal{M}$, аналитически эквивалентную полидиск в $\mathbb{C}^{2n+2}$, в которой функция $\tilde{G}$ является аналитической, $d\tilde{G} \neq 0$ и ее можно дополнить до аналитической симплектической системы координат $(z_0, \dots, z_n, \tilde{G}, w_1, \dots, w_n)$ такой, что в окрестности U выполнено $\mathcal{N} = \{\mathcal{M} | z_0 = \tilde{G} = 0\}$. Выбор окрестности U возможен в силу комплексного аналога гамильтонового варианта теоремы о выпрямлении траекторий, см. п. 2.2. главы 3 в [5].

В координатах $(z_0, \dots, z_n, \tilde{G}, w_1, \dots, w_n)$ симплектическая структура принимает вид (2.2) и ограничения интегралов (2.3) на симплектические подмногообразия $z_0 = \text{const}$, $\tilde{G} = \text{const}$ образуют полный коммутативный набор.

Но в силу (2.3), рациональные на гиперповерхности $\mathcal{G}$ функции $\tilde{F}_i$, $0 \leq i \leq n-1$, не зависят от z_0 и, поэтому, регулярны на $\mathcal{N}$.

б) СЛУЧАЙ, ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ К а). ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД. Отметим, что в этом случае подмногообразие $\mathcal{N}$ инвариантно относительно потока.

Подмногообразие $\mathcal{N}$ может, вообще говоря, содержаться во множестве неопределенности интегралов $\tilde{F}_i$, но из (2.3) следует, что функции $\tilde{F}_i|_{\mathcal{G}}$ постоянны вдоль характеристик гиперповерхности $\mathcal{G}$. Характеристики $\mathcal{G}$ косоортогональны $\mathcal{G}$, следовательно, их замыкания косоортогонально пересекают $\mathcal{N}$; ввиду симплектичности $\mathcal{N}$,

они трансверсально пересекают $\mathcal{N}$ в общей точке $\mathcal{N}$. Поэтому $\tilde{F}_i|_{\mathcal{G}}$ регулярны на $\mathcal{N}$, $0 \leq i \leq n-1$.

Пусть $s_{\mathcal{N}} : T^*\mathcal{N} \rightarrow T\mathcal{N}$ – отождествление кокасательного и касательного расслоений, осуществляемое симплектической структурой на $\mathcal{N}$. Необходимо доказать

$$s_{\mathcal{N}}d((\tilde{F}_i|_{\mathcal{G}})|_{\mathcal{N}})(\tilde{F}_j|_{\mathcal{G}}) = 0, \quad 0 \leq i, j \leq n-1, \quad (4.3)$$

Если $\mathcal{N} \not\subset \text{sng } \mathcal{G}$, рассмотрим подмногообразие $\hat{\mathcal{N}} \subset \mathcal{G}$, близкое с касательным расслоением к $\mathcal{N}$. На нем (4.3) выполнено в силу подслучая а) (так как $\mathcal{M}$ неособо в коразмерности 1, то можно выбрать $\hat{\mathcal{N}} \not\subset \text{sng } \mathcal{M}$). Остается воспользоваться непрерывной зависимостью $s_{\mathcal{N}}$ от $\mathcal{N}$ и C^1 -гладкостью $\tilde{F}_i|_{\mathcal{G}}$ в $\mathcal{G}$ -окрестности общей точки подмногообразия $\mathcal{N}$.

В случае $\mathcal{N} \subset \text{sng } \mathcal{G}$ достаточно провести этот предельный переход на нормализации многообразия $\mathcal{G}$, неособой в коразмерности 1. Действительно, пусть $\nu : \mathcal{G}'' \rightarrow \mathcal{G}$ – нормализация $\mathcal{G}$, $\mathcal{N}''$ – одна из неприводимых компонент $\nu^{-1}(\mathcal{N})$. Так как $\nu \in \mathbb{C}[\mathcal{G}'']$ и конечно, $\dim \mathcal{N}'' = 2n$, симплектическая структура на $\mathcal{N}$ поднимается до симплектической структуры на $\mathcal{N}''$. Так как $\mathcal{N}'' \not\subset \text{sng } \mathcal{G}''$, равенство (4.3) выполнено для $\mathcal{N}''$ на $\mathcal{G}''$, т.е. $(\tilde{F}_i|_{\mathcal{G}'})|_{\mathcal{N}''}$ коммутируют. Но отображение $\nu : \mathcal{N}'' \rightarrow \mathcal{N}$ конечно, как ограничение конечного (см. парагр.5 гл.1 в [105]), и обратное к нему задается алгебраическими функциями. Поэтому из коммутативности на $\mathcal{N}''$ вытекает коммутативность на $\mathcal{N}$ набора (4.2).

Предложение 4 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. В лемме Мозера (см. раздел 5а в [141]) рассматривается косоортогональная проекция гамильтонового векторного поля на гладкое симплектическое подмногообразие, половина определяющих функций которого входит в коммутативный набор:

$$\mathcal{N} : F_1 = \dots = F_r = G_1 = \dots = G_r = 0, \quad \{F_i, F_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, r, \\ \text{rk}\{dF_1, \dots, dF_r, dG_1, \dots, dG_r\} = 2r \quad \text{в точках } \mathcal{N}. \quad (4.4)$$

Предложение 4 является аналогом леммы Мозера в отсутствии условия невырожденности (4.4).

5.2. Последовательные ограничения

Доказательство теоремы 2. Пусть $p : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$ – такое конечное регулярное отображение, что прообразы алгебраических функций $F_1, \dots, F_n$ рациональны на $\tilde{\mathcal{M}}$. Пусть $\nu : \mathcal{M}'' \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ – нормализация многообразия $\tilde{\mathcal{M}}$. Положим $\pi = p \circ \nu$, тогда $\pi : \mathcal{M}'' \rightarrow \mathcal{M}$ регулярно и конечно и $\omega \circ \pi$ рациональна и невырождена. Пусть $\mathcal{N}''$ одна из неприводимых компонент прообраза $\pi^{-1}(\mathcal{N})$, тогда $\dim \mathcal{N}'' = 4$, $\mathcal{N}''$ – симплектическое подмногообразие и $\mathcal{N}'' \not\subset \text{Supp}(F_0 \circ \pi)_{\infty}$. Сохраним за прообразами интегралов $F_0, \dots, F_n$ прежние обозначения.

В силу предложения 3 имеют место две возможности.

Если после возможной замены $F_n \rightarrow F_n^{-1}$ имеет место расположение А) подмногообразия $\mathcal{N}^\nu \subset \mathcal{M}^\nu$, тогда положим $G = F_n$.

В противном случае все интегралы регулярны в некоторой точке $\mathcal{N}^\nu$.

Если хотя бы один из них в ограничении на $\mathcal{N}^\nu$ функционально независим от $F_0|_{\mathcal{N}^\nu}$, он приводит к дополнительному рациональному интегралу на $\mathcal{N}$. В противном случае, ввиду $n \geq 1$ имеет место расположение Б) подмногообразия $\mathcal{N}^\nu \subset \mathcal{M}^\nu$ и, аналогично пункту 1) предложения 4 найдется рациональная функция $G = P(F_0, \dots, F_n) \in \mathbb{C}(\mathcal{M}^\nu)$ такая, что P – полином, удовлетворяющий условию $P(F_0|_{\mathcal{N}^\nu}, \dots, F_n|_{\mathcal{N}^\nu}) = 0$.

В обоих случаях пусть $\mathcal{G}$ – неприводимая компонента уровня $\{\mathcal{M}^\nu \mid G = 0\}$, содержащая $\mathcal{N}^\nu$. Проведем на $\mathcal{G}$ гиперповерхность $\mathcal{L}$, содержащую $\mathcal{N}^\nu$, (не обязательно инвариантную) через некоторую точку общего положения в $\mathcal{G}$ трансверсально характеристике гиперповерхности $\mathcal{G}$ в этой точке. Тогда $\mathcal{L}$ будет симплектической.

Применяя к $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}^\nu$ предложение 4, получаем, что рациональные функции

$$F_0|_{\mathcal{L}}, (\tilde{F}_1|_{\mathcal{G}})|_{\mathcal{L}}, \dots, (\tilde{F}_{n-1}|_{\mathcal{G}})|_{\mathcal{L}} \quad (4.5)$$

образуют полный коммутативный набор на многообразии $\mathcal{L}$.

Пусть $\mathcal{L}^{2n} = \pi(\mathcal{L})$. Тогда проекция $\pi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^{2n}$ конечна. И произвольная ветвь проекции над образом определяется алгебраическими функциями. Поэтому прообраз набора (4.5) при локальном сечении π^{-1} является полным коммутативным алгебраическим набором на $\mathcal{L}^{2n}$.

Итерируя рассуждения разд. 5.2 и понижая на каждом шаге размерность подмногообразия $\mathcal{L}$ на 2, получаем дополнительный алгебраический интеграл на $\mathcal{N}$. Тогда каждая его ветвь над $\mathcal{N}$ будет интегралом на $\mathcal{N}$ и одна из симметрических функций его ветвей над $\mathcal{N}$ – дополнительным рациональным интегралом. Теорема 2 доказана.

5.3. Контрпример

Отметим, что требование аналитичности интегралов в этой теореме, по-видимому, по существу. По крайней мере, в [112] в аналитической категории построен пример метрики на компактном многообразии $\mathcal{M}^{2n+2}$, $n \geq 2$, интегрируемой всюду, за исключением инвариантного подмногообразия $\mathcal{N}^{n+1}$. На уровнях $\{\mathcal{N}^{n+1} \mid H = \text{const}\}$ она является системой Аносова. Правда, полный коммутативный набор [112] имеет существенную особенность на $\mathcal{N}$ и может быть выбран лишь класса $C^\infty(\mathcal{M})$.

§3.3. О четвертом алгебраическом интеграле уравнений Кирхгофа

Рассматривается поставленная Стекловым [89] задача о нахождении всех случаев, когда уравнения движения твердого тела в идеальной жидкости допускают четвертый интеграл в виде однородного полинома произвольной степени. При наличии определенной симметрии, когда не работают другие методы [51, 66, 42, 47, 52], эта задача решена, в том числе для частного интеграла: все случаи существования дополнительного алгебраического интеграла на нулевом уровне постоянной площадей исчерпываются классическими. В разд. 5 предложено усовершенствование подхода Гюссона [127], начиная со второго шага.

1. *Введение и формулировка результата.* Уравнения движения по инерции твердого тела при безвихревом обтекании идеальной однородной несжимаемой жидкостью, покоящейся на бесконечности, имеют вид [129]

$$\begin{aligned} \dot{M} &= M \times \omega + p \times v, \quad \dot{p} = p \times \omega, \quad \omega = \partial T / \partial M, \quad v = \partial T / \partial p \\ 2T &= \langle aM, M \rangle + 2\langle bM, p \rangle + \langle cp, p \rangle \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь M имеет смысл суммарного момента системы "тело плюс жидкость", p – суммарного импульса; дифференцирование по времени производится в системе координат, вмороженной в тело; a, b, c – постоянные матрицы 3×3 , составляющие матрицу $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$, обратную к матрице коэффициентов инерции при учете присоединенных масс, T – суммарная кинетическая энергия; ω – угловая скорость тела; v – скорость начала координат [88].

Уравнения (1.1) имеют инвариантную меру и три квадратичных закона сохранения, обнаруженные Кирхгофом: T , $\langle M, p \rangle$, p^2 .

Уравнения (1.1) возникают и в других физических задачах. Например, они описывают вращение вокруг неподвижной точки электрически заряженного твердого тела в однородном магнитном поле и осесимметричном силовом поле с квадратичным потенциалом при пренебрежении эффектом самоиндукции [12, 107].

В обеих постановках квадратичная форма $\langle aM, M \rangle$ положительно определена.

Будем говорить, что функция $F(x)$, $x \in \mathbb{C}^n$ на алгебраическом подмножестве $\mathfrak{M}$ в $\mathbb{C}^n$ допускает не более, чем конечное ветвление в точке $x = a$, см. [102], если существуют аналитические в точке $x = a$ функции $A_0(x), \dots, A_k(x)$ в $\mathbb{C}^n$, что на алгебраическом подмножестве $\mathfrak{M}$ выполнено $A_k(x) \neq 0$ и $A_0(x) + A_1(x)F(x) + \dots + A_k(x)F^k(x) \equiv 0$.

Интеграл системы (1.1) называется дополнительным [89, 129], если он независим с классическими; частным [99, 38], если он сохраняется лишь при $\langle M, p \rangle = 0$. Усреднением по ветвям с использованием однородности системы (1.1) можно показать, что дополнительный алгебраический в точке $M = p = 0$ (общий либо частный) интег-

рал системы (1.1) сводится к соответствующему однородному рациональному [137, 51].

Стекловым [89] и Ляпуновым [59] были найдены все случаи существования дополнительного линейного и квадратичного интеграла системы (1.1) при условии положительной определенности квадратичной формы T , в [74] это сделано для произвольной формы T .

Теорема. При значениях параметров

$$a = \text{diag}(a_1, a_1, a_3), \quad a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad b = \text{diag}(b_1, b_1, b_3), \quad c = \text{diag}(c_1, c_2,$$

все случаи существования дополнительного алгебраического общего или частного интеграла системы (1.1) исчерпываются классическими: Кирхгофа [129], Клебша [119], Чаплыгина [99].

Следствие. Интеграл четвертой степени Чаплыгина [99] не продолжается до алгебраического интеграла вне поверхности $\langle M, p \rangle = 0$.

При $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ и произвольных b, c эта задача была исследована в [51] заменой $p \rightarrow \varepsilon p$ и расщеплением сепаратрис случая Эйлера, причем существенно использовалась гамильтоновость возмущенной задачи (1.1), см. [66, 42].

При $a_1 = a_2$ в невозмущенном случае регулярной прецессии Эйлера – Лагранжа сепаратрисы отсутствуют. Следующие три утверждения имеют место за исключением классических интегрируемых случаев. Расщепление других сепаратрис при другом введении малого параметра установлено либо при малых $c_1 - c_2 \neq 0$ [47], либо при достаточно больших a_3/a_1 [52]; плотность векового множества установлена при почти всех $a_3/a_1 > 2$ в [52].

Замечание. В важнейшем случае, когда тело имеет три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии

$$a = \text{diag}(a_1, a_2, a_3), \quad a_i > 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad b = 0, \quad c = \text{diag}(c_1, c_2, c_3)$$

теорема данной работы вместе с результатом [51] завершает поставленную Стекловым [89] проблему.

Доказательство теоремы опирается на метод Гюссона [127] разложения дополнительного интеграла по малому параметру и использует технику анализа алгебраических зависимостей абелевых интегралов. Последняя техника восходит к классическим результатам Абеля и Чебышева [29] и опирается на оценки определяемой в разд. 2 алгебраической кратности нуля.

В рассматриваемом в разд. 5 случае, когда невозмущенная система имеет полный набор алгебраических интегралов, производится переход к оскулирующим алгебраическим переменным и в них препятствия к интегрируемости сводятся к вычетам и периодам на невозмущенном решении у некоторых интегро-дифференциальных операторов от векторного поля, ср. [48, 38]. Эти операторы содержат интегрирование вдоль невозмущенного решения и дифференцирование по оскулирующим переменным и параметру возмущения.

2. *Алгебраическая кратность нуля.* Пусть $\kappa \in \mathbb{Q}$. Обозначим $w = s^2 - 1$, $\vartheta = (s - 1)/(s + 1)$, $\mathbb{M} = \mathbb{N}_0 \cup (-3/2 - \mathbb{N}_0)$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Лемма Абеля [100]. Интеграл $\int w^\kappa ds$ является алгебраической функцией $s, \ln \vartheta$ тогда и только тогда, когда $\kappa \in \mathbb{Z}/2$. В частности, он будет алгебраической функцией s тогда и только тогда, когда $\kappa \in \mathbb{M}$.

Доказательство леммы Абеля вытекает из результатов [100, 108].

Пусть кольцо K порождено над $\mathbb{C}$ функциями s , $w^{-1/2}$, кольцо L над K — функцией $\ln \vartheta$. Для

$$f = \sum_{l=0}^n f_l (\ln \vartheta)^l, \quad f_l \in K + w^{1/4} K, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

положим $\nu_\infty f := \min_l \text{ord}_\infty f_l$.

Тогда

$$\nu_\infty s = -1, \nu_\infty w = -2, \nu_\infty \vartheta = 0, \nu_\infty \ln \vartheta = 0 < 1 = \text{ord}_\infty \ln \vartheta$$

Следующие два свойства ord_∞ обобщаются на ν_∞ .

Свойство 1.

$$\nu_\infty(f + g) \geq \min\{\nu_\infty f, \nu_\infty g\}$$

При $\nu_\infty f \neq \nu_\infty g$ имеет место равенство.

Свойство 2.

$$\nu_\infty(fg) = \nu_\infty f + \nu_\infty g$$

Лемма 1. Пусть $g(s)$ — функция, алгебраическая в точке $s = \infty$.

Тогда

а) если $\text{ord}_\infty g \neq 0$, то $\text{ord}_\infty g' = \text{ord}_\infty g + 1$;

б) если $\text{ord}_\infty g = 0$, то $\text{ord}_\infty g' > 1$.

Свойство 3. Пусть $f \in L$. Тогда

а) $\nu_\infty f' \geq 1 + \nu_\infty f$;

б) если $\nu_\infty f' \leq 1$, то $\nu_\infty f' = 1 + \nu_\infty f$.

Критерий 1. Пусть $f \in L$, $\nu_\infty f \geq 2$. Тогда

$$\int f ds \in L, \quad \nu_\infty \left(\int f ds \right) \geq 0$$

Критерий 2. Пусть

$$J_{lm} = \int (w^l \int w^m ds) ds, \quad l, m \in \mathbb{Z}$$

Тогда условие $J_{lm} \notin L$ эквивалентно $\min\{l, m\} \leq -1 \leq l + m$.

Доказательства свойств 1, 2, 3, леммы 1 и критериев 1, 2 приведены в разд. 6.

3. *Переменные Гюссона.* Произведем замену

$$(M, p) \rightarrow (y_1, y_2, r, z_1, z_2, p_3), \quad t \rightarrow it$$

$$\omega = (p, q, r), \quad p = (p_1, p_2, p_3)$$

$$y_1 = p + iq, \quad y_2 = p - iq, \quad z_1 = p_1 + ip_2, \quad z_2 = p_1 - ip_2$$

использованную Гюссоном для симметричного тяжелого твердого тела (см. [6]). Получим

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\alpha r y_1 + p_3(\beta_3 z_1 + \beta_2 z_2)/2 - \beta(1 - \alpha)(r z_1 + y_1 p_3) + 2\beta_1 r z_2 \\ \dot{y}_2 &= \alpha r y_2 - p_3(\beta_2 z_1 + \beta_3 z_2)/2 + \beta(1 - \alpha)(r z_2 + y_2 p_3) - 2\beta_1 r z_1 \\ \dot{r} &= \frac{\beta_2}{4(1 - \alpha)}(z_1^2 - z_2^2) + \frac{\beta}{2}(y_2 z_1 - y_1 z_2) - \frac{\beta_1}{1 - \alpha}(y_2 z_2 - y_1 z_1) \\ \dot{z}_1 &= y_1 p_3 - r z_1, \quad \dot{z}_2 = r z_2 - y_2 p_3, \quad \dot{p}_3 = (y_2 z_1 - y_1 z_2)/2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$1 - \alpha = a_1/a_3, \quad 2\beta = 2b_3 - b_1 - b_2, \quad 2\beta_1 = b_1 - b_2$$

$$\beta_2 = a_1(c_1 - c_2), \quad \beta_3 = a_1(c_1 + c_2 - 2\bar{c}_3), \quad \bar{c}_3 = c_3 - \beta^2/a_3 + \beta_1^2/a_1$$

Линейные комбинации исходных интегралов

$$H = 2a_1 T + (\beta_1^2 - a_1(c_1 + c_2)/2)p^2, \quad H_1 = 2a_1 \langle M, p \rangle - 2\beta p^2, \quad H_2 = p^2$$

запишутся в виде

$$\begin{aligned} H &= y_1 y_2 + (1 - \alpha)r^2 + \beta_2(z_1^2 + z_2^2)/4 - \beta_3 p_3^2/2 \\ H_1 &= y_1 z_2 + y_2 z_1 + 2(1 - \alpha)r p_3 - \beta_1(z_1^2 + z_2^2) - 2\beta z_1 z_2 - 2(2 - \alpha)\beta p_3^2 \\ H_2 &= z_1 z_2 + p_3^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

При $\beta_2 \neq 0$ (т. е. за исключением интегрируемого случая Кирхгофа), не ограничивая общности, можно положить $\beta_2 = 1$, предполагая, что либо $p, b \in \mathbb{R}^3$, либо $p, b \in i\mathbb{R}^3$ (последнее эквивалентно замене p, b, c на $p/\sqrt{\beta_2}, b\sqrt{\beta_2}, c\beta_2$).

4. *Замена* $(y_1, z_1, p_3) \rightarrow \varepsilon(y_1, z_1, p_3)$. Следуя Гюссону, введем при $\beta_1 = 0$ в систему малый параметр ε посредством указанной замены. Система и интегралы примут вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\alpha r y_1 + p_3(\varepsilon\beta_3 z_1 + z_2)/2 - \beta(1 - \alpha)(r z_1 + \varepsilon y_1 p_3) \\ \dot{y}_2 &= \alpha r y_2 - p_3(\varepsilon z_1 + \beta_3 z_2)/2 + \beta(1 - \alpha)(r z_2 + \varepsilon y_2 p_3) \\ \dot{r} &= \frac{1}{4(1 - \alpha)}(\varepsilon^2 z_1^2 - z_2^2) + \frac{1}{2}\varepsilon\beta(y_2 z_1 - y_1 z_2) \\ \dot{z}_1 &= \varepsilon y_1 p_3 - r z_1, \quad \dot{z}_2 = r z_2 - \varepsilon y_2 p_3, \quad \dot{p}_3 = (y_2 z_1 - y_1 z_2)/2 \\ & z_2^2/4 + (1 - \alpha)r^2 + \varepsilon y_1 y_2 + \varepsilon^2(z_1^2/4 - \beta_3 p_3^2/2) = h \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$y_1 z_2 + y_2 z_1 + 2(1 - \alpha) r p_3 - 2\beta h_2 - 2\varepsilon(1 - \alpha)\beta p_3^2 = h_1 \quad (4.2)$$

$$z_1 z_2 + \varepsilon p_3^2 = h_2$$

Здесь h, h_1, h_2 – постоянные интегралов.

Предположим, что система (1.1), а следовательно и (4.1) при $\varepsilon = 1$, имеет дополнительный однородный рациональный интеграл $\mathcal{F}(y_1, y_2, r, z_1, z_2, p_3)$ (возможно, только на поверхности $\langle M, p \rangle = 0$, т. е. при $(H_1 + 2\beta H_2)(y_1, y_2, r, z_1, z_2, p_3) = 0$). Тогда $\mathcal{F}(\varepsilon y_1, y_2, r, \varepsilon z_1, z_2, \varepsilon p_3)$ – однородный рациональный интеграл системы (4.1) при произвольном ε (на поверхности

$$\varepsilon^{-1}(H_1 + 2\beta H_2)(\varepsilon y_1, y_2, r, \varepsilon z_1, z_2, \varepsilon p_3) = 0)$$

На постоянные интегралов в последнем случае накладывается условие $h_1 + 2\beta h_2 = 0$.

В силу соотношений (4.2) последовательно выражаем

$$z_2 = 2[w - \varepsilon y_1 y_2 - \varepsilon^2(z_1^2/4 - \beta_3 p_3^2/2)]^{1/2}, \quad z_1 = (h_2 - \varepsilon p_3^2)z_2^{-1} \quad (4.3)$$

$$y_1 = -(y_2 z_1 + 2(1 - \alpha) r p_3 - h_1 - 2\beta h_2 - 2\varepsilon(1 - \alpha)\beta p_3^2)z_2^{-1}$$

где $w = h - (1 - \alpha)r^2$. Поэтому в переменных

$$u = (y_2 - \beta z_2)z_2^{-\alpha}, \quad R = w^{(\alpha-1)/2}p_3$$

система (4.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= \frac{\varepsilon}{\rho} p_3 \left[\frac{1}{2} \beta_4 z_2^{1-\alpha} + \alpha u^2 z_2^{\alpha-1} + 2\beta u - \frac{1}{2} \varepsilon (h_2 - \varepsilon w^{1-\alpha} R^2) z_2^{-1-\alpha} \right] = \\ &= \varepsilon f_1(h, h_1, h_2, u, R, r) + \varepsilon^2 f_2(h, h_1, h_2, u, R, r) + \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$w^{(1-\alpha)/2} \frac{dR}{dr} = \frac{S}{\rho} + (1 - \alpha)^2 r w^{-1} p_3 =$$

$$= g_0(h, h_1, h_2, u, r) + \varepsilon g_1(h, h_1, h_2, u, R, r) + \dots$$

$$\rho = -\frac{z_2^2}{4(1 - \alpha)} + \varepsilon \beta S + \varepsilon^2 \frac{(h_2 - \varepsilon p_3^2)^2 z_2^{-2}}{4(1 - \alpha)}, \quad \beta_4 = 2(2 - \alpha)\beta^2 - \beta_3$$

$$S = h_2 u z_2^{\alpha-1} + (1 - \alpha) r p_3 - h_1/2 - \varepsilon p_3^2 [(2 - \alpha)\beta + u z_2^{\alpha-1}]$$

Из соотношений (4.4) и рекуррентных формул (4.3) вытекает следующее предложение.

Предложение 1. Функции f_i, g_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) являются полиномами от h_1, h_2, u, R .

Доказательство. Функции ρ, S и члены разложения числителей и знаменателей правых частей системы (4.4) и правых частей рекуррентных формул (4.3) в ряд по степеням ε могут быть записаны

в виде полиномов от $h_1, h_2, u, R, y_2, p_3, y_1, z_1$ с коэффициентами, зависящими от h, r, z_2, w . Зависимости $y_2(u, z_2), p_3(h, R, r)$ линейны по u, R . Но $z_2|_{\varepsilon=0} = 2w = 2(h - (1 - \alpha)r^2) \neq 0$, поэтому, члены разложения по ε правых частей системы (4.4) могут быть записаны в виде полиномов от h_1, h_2, u, R, y_1, z_1 с коэффициентами, зависящими от h, r, z_2, w . Индукция по i завершает доказательство.

Интегрируя систему (4.4) при $\varepsilon = 0$, получаем

$$\tilde{u} = 2^{-\alpha}C, \quad \tilde{R} = D + I + CJ \quad (4.5)$$

$$I = \frac{1}{2}(1 - \alpha)h_1 \int w^{(\alpha-3)/2} dr, \quad J = -\frac{1}{2}(1 - \alpha)h_2 \int w^{\alpha-2} dr$$

где C, D – постоянные интегрирования. Выберем C, D в качестве постоянных интегрирования системы (4.4) при произвольном ε . Возможность выбора вытекает из конструкции, изложенной в §4.1 после формулы (2.5).

Во всех случаях $1^0 - 10^0$ разд. 4 и в случае разд. 5 дополнительно к выписанным условиям предполагается $h \neq 0$.

1^0 . Случай $\alpha \notin \mathbb{Q}$, $(h_1, h_2) \neq 0$. Из существования четырех независимых алгебраических интегралов системы (4.1) вытекает алгебраическое соотношение на $\tilde{y}_2(r), \tilde{p}_3(r), r$ – компоненты решения системы (4.1) при $\varepsilon = 0$. Из полученного соотношения вытекает алгебраическая зависимость функций $r, w^\alpha, \tilde{R}$ от r для произвольных C, D . Из алгебраической зависимости и первой леммы Абеля ([6], 9.2) вытекает $\alpha \in \mathbb{Q}$, противоречие.

2^0 . Случай $\alpha \in \mathbb{Q}$. Тогда $u(y_2, z_2), R(p_3, r)$ – алгебраические функции и интеграл

$$\mathcal{F}(\varepsilon y_1, y_2, r, \varepsilon z_1, z_2, \varepsilon p_3) = \sum_{l=l_0}^{\infty} \varepsilon^l F^l(h, h_1, h_2, u, R, r)$$

– алгебраическая функция от $h, h_1, h_2, u, R, r, \varepsilon$. Пусть l_1 – минимальное такое, что коэффициент F^{l_1} функционально независим от h, h_1, h_2 . Тогда интеграл $\sum_{l=l_0}^{\infty} \varepsilon^l F^l$ можно заменить на $\sum_{l=l_1}^{\infty} \varepsilon^{l-l_1} F^l$, функционально независимый с h, h_1, h_2 при $\varepsilon = 0$.

Определение. Функцию

$$F(h, h_1, h_2, u, R, r, \varepsilon) = F^0(h, h_1, h_2, u, R, r) + \dots + \varepsilon^n F^n(h, h_1, h_2, u, R, r)$$

будем называть ε^n -интегралом системы (4.4), если в силу нее $dF/dr = o(\varepsilon^n)$. Будем называть ε^1 -интеграл дополнительным, если F^0 – функция не только от h, h_1, h_2 .

При $\alpha \in \mathbb{Q}$ система (4.4) имеет дополнительный алгебраический ε^0 -интеграл u .

Предложение 2. За исключением случаев

$$1) \alpha \in 1/2 - \mathbb{N}_0, h_1 = 0; \quad 2) \alpha \in -2\mathbb{N}_0, h_2 = 0; \quad 3) h_1 = h_2 = 0 \quad (4.6)$$

дополнительный алгебраический ε^0 -интеграл определен однозначно, с точностью до функциональной зависимости.

Доказательство. В случае двух дополнительных независимых алгебраических ε^0 -интегралов все решения (4.5) должны быть алгебраическими кривыми в пространстве u, R, r для произвольных C, D . Следовательно, I и J должны быть алгебраическими функциями r . Отсюда, используя лемму Абеля, имеем одну из следующих возможностей:

$$1) \alpha = 1; \quad 2) h_1 = h_2 = 0; \quad 3) h_1 = 0, \quad \alpha - 2 \in \mathbb{M}$$

$$4) h_2 = 0, \quad (\alpha - 3)/2 \in \mathbb{M}; \quad 5) \alpha - 2, \quad (\alpha - 3)/2 \in \mathbb{M}$$

Учитывая $\alpha < 1$, получаем требуемое.

В случаях 3^0-9^0 разд. 4 условие единственности дополнительного алгебраического ε^0 -интеграла выполнено.

Ищем общее решение системы (4.4) в виде рядов

$$u(h, h_1, h_2, C, D, r, \varepsilon) = \tilde{u} + \varepsilon u' + \varepsilon^2 u'' + \dots,$$

$$R(h, h_1, h_2, C, D, r, \varepsilon) = \tilde{R} + \varepsilon R' + \varepsilon^2 R'' + \dots$$

Интегрируя систему, получающуюся, если приравнять коэффициенты при ε^1 , получаем

$$u' = \int^r \kappa \tilde{R} dr, \quad (4.7)$$

$$\kappa = \sum_{i=0}^2 \kappa_i C^i \equiv (\alpha - 1)2^{-\alpha} \{ \beta_4 w^{-\alpha} + 2\beta w^{-(\alpha+1)/2} C + \frac{1}{2} \alpha w^{-1} C^2 \}$$

$$\begin{aligned} \frac{du''}{dr} = & \frac{\partial f_1}{\partial u}(h, h_1, h_2, \tilde{u}, \tilde{R}, r) u' + \frac{\partial f_1}{\partial R}(h, h_1, h_2, \tilde{u}, \tilde{R}, r) R' + \\ & + f_2(h, h_1, h_2, \tilde{u}, \tilde{R}, r) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Предложение 3. Функции $u'(h, h_1, h_2, C, D, r), R', u'', R'', \dots$ являются полиномами от h_1, h_2, C, D .

Доказательство вытекает из треугольности системы (4.4), формул для нее и предложения 1.

Подслучай единственности дополнительного алгебраического интеграла при $\varepsilon = 0$. Подставляя в дополнительный алгебраический ε^1 -интеграл

$$u + \varepsilon F^1(h, h_1, h_2, u, R, r)$$

разложение общего решения по ε , получаем алгебраическую зависимость

$$u' + F^1(h, h_1, h_2, \tilde{u}, \tilde{R}, r) = \text{const}(h, h_1, h_2, C, D) \quad (4.9)$$

аналогично, наличие ε^2 -интеграла

$$u + \varepsilon F^1(h, h_1, h_2, u, R, r) + \varepsilon^2 F^2(h, h_1, h_2, u, R, r)$$

эквивалентно дополнительной алгебраической зависимости

$$\begin{aligned} u'' + \frac{\partial F^1}{\partial u}(h, h_1, h_2, \tilde{u}, \tilde{R}, r)u' + \frac{\partial F^1}{\partial R}(h, h_1, h_2, \tilde{u}, \tilde{R}, r)R' + F^2(h, h_1, h_2, \tilde{u}, \tilde{R}, r) \\ = \text{const}(h, h_1, h_2, C, D) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Предложение 4. Имеет место формула

$$F^1 = \lambda(u)R^2 + \mu(u, r)R + \nu(u, r)$$

где λ, μ, ν – алгебраические функции от u, r (зависимость от h, h_1, h_2 до конца разд. 4 для краткости не указывается).

Доказательство. Функции $\tilde{R}(C, D, r)$, $u'(C, D, r)$ являются многочленами не выше первой степени по D . Дифференцируя тождество Гюссона (4.9) в переменных C, D, r по D , получаем

$$\int \kappa dr + \frac{\partial F^1}{\partial R}(\tilde{u}, \tilde{R}, r) = \text{const}(C, D), \quad \frac{\partial^2 F^1}{\partial R^2}(\tilde{u}, \tilde{R}, r) = \text{const}(C, D) \quad (4.11)$$

Из второго тождества (4.11) вытекает, что $\partial^2 F^1(u, R, r)/\partial R^2$ – алгебраический ε^0 -интеграл системы (4.4), функционально зависимый с h, h_1, h_2, u . Предложение 4 доказано.

Подставляя выражение для F^1 в первое тождество (4.11), получаем

$$\sum_{i=0}^2 C^i \int \kappa_i dr + 2\lambda(2^{-\alpha}C)(I + CJ) + \mu = \text{const}(C) \quad (4.12)$$

3⁰. *Случай* $\mathbb{Q} \ni \alpha \notin \mathbb{Z}/2$, $(h_1, h_2) \neq 0$.

Подставим в (4.12) ряды Пюизе функций λ и μ в точке $C = \infty$

$$2\lambda(2^{-\alpha}C) = \sum_{l=-\infty}^{l_0} \lambda_l C^l, \quad \mu(2^{-\alpha}C, r) = \sum_{m=-\infty}^{m_0} \mu_m(r) C^m$$

где $\lambda_{l_0} \neq 0$ при $\lambda \neq 0$.

При $\lambda \equiv 0$, или $l_0 \leq 0$, или $h_2 = 0$, $l_0 \leq 1$, рассматривая в (4.12) коэффициент при C^2 , получаем, что $\int \kappa_2 dr$ – алгебраическая функция от r . Следовательно, $\alpha = 0$. Противоречие.

Пусть δ_{ij} – символ Кронекера. При $l_0 \geq 1$, $h_2 \neq 0$, рассматривая коэффициент при C^{l_0+1} , получаем, что $\delta_{l_0 1} \int \kappa_2 dr + \lambda_{l_0} J$, – алгебраическая функция от r . Следовательно, в силу леммы Абеля выполнено $\alpha - 2 \in \mathbb{Z}/2$. Противоречие.

При $l_0 \geq 2$, $h_2 = 0$, $h_1 \neq 0$ аналогично приводит к противоречию рассмотрение коэффициента при C^{l_0} .

4⁰. Случай $\alpha \in 1/2 - \mathbb{N}_0$, $h_1 \neq 0$. Согласно лемме Абеля все слагаемые в левой части тождества (4.12), кроме второго и четвертого, берутся в алгебраических функциях и логарифмах; но по отдельности, ни второе, ни четвертое – не берутся. Следовательно, либо $\beta = h_1 = 0$ (что противоречит условию случая), либо $2\lambda = \lambda_1 C$. Но последняя возможность исключена, ибо тогда коэффициент при C^2 в тождестве (4.12) имел бы вид

$$2^{-\alpha-1} \alpha(\alpha-1) \int w^{-1} dr + \lambda_1 J + \mu_2(r) = \text{const}$$

где $\alpha \neq 0$, а второй интеграл – алгебраическая функция от r .

Следовательно, случай Чаплыгина не продолжается до случая общей интегрируемости.

5⁰. Случай $\alpha \in -2\mathbb{N}_0$, $h_2\beta \neq 0$. Пусть в разд. 4 $s = -r\sqrt{(1-\alpha)/h}$, $\vartheta = (s-1)/(s+1)$, $\sigma = \sqrt{\alpha-1}r + w^{1/2}$. Тогда все слагаемые в левой части тождества (4.12), кроме $\int \kappa_1 dr$, представляются в виде суммы мономов $\ln \vartheta$, rw^l , $rw^{l+1/2}$, $l \in \mathbb{Z}$ с постоянными коэффициентами, а слагаемое $\int \kappa_1 dr$ не принадлежит L (содержит $\beta \ln \sigma$). Противоречие.

6⁰. Случай $\alpha \in -1 - 2\mathbb{N}_0$, $h_1\beta_4 \neq 0$. Воспользуемся тем, что $\tilde{R} \in L$, а коэффициент при $D^0 C^0$ в u' равен

$$2^{-\alpha}(\alpha-1)\beta_4 \int w^{-\alpha} I dr$$

и не принадлежит L (содержит $\ln w$). Последнее вытекает из критерия 2 в силу того, что -1 содержится в целочисленном интервале $[(\alpha-3)/2, -(\alpha+3)/2]$. Получаем противоречие с первым равенством Гюссона (4.9).

7⁰. Случай, когда $\alpha \in -\mathbb{N}_0$ либо $\{\alpha \in -1/2 - \mathbb{N}_0, \beta = h_1 = 0\}$. Для $f(h, h_1, h_2, u, R, r, \varepsilon)$ через $\tilde{f}, f', f'', \dots$ в разд. 4 обозначены производные по ε общего решения:

$$\frac{1}{i!} \frac{\partial^i f}{\partial \varepsilon^i}(h, h_1, h_2, u(h, h_1, h_2, C, D, r, \varepsilon), R(h, h_1, h_2, C, D, r, \varepsilon), r, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}$$

при $i = 0, 1, 2, \dots$. В случае 7⁰ будем обозначать $\tau \sim \hat{\tau}$, если $\hat{\tau}, \tau - \hat{\tau} \in L$ и $\nu_\infty(\tau - \hat{\tau}) \geq 1 - \alpha + \nu_\infty(\hat{\tau})$. То есть, при переходе от выражения

τ к выражению $\hat{\tau}$ опущены слагаемые с пренебрежимо завышенной алгебраической кратностью нуля по r в точке $r = \infty$. Положим $L_2 = \{f \in L | \nu_\infty f \geq 2\}$. Из формул (4.5), (4.7) для решений и рекуррентных формул (4.3) находим

$$\begin{aligned} \bar{z}_2 &= 2w^{1/2}, \quad \bar{u} = C2^{-\alpha}, \quad \bar{y}_2 \bar{z}_2^{-1} \sim \beta, \quad \bar{R} = D + I + CJ \\ -\bar{y}_1 \bar{z}_2 &\sim 2(1 - \alpha)rw^{(1-\alpha)/2} \bar{R} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\bar{z}_2 z'_2 / 2 = -\bar{y}_1 \bar{y}_2 \sim 2\beta(1 - \alpha)rw^{(1-\alpha)/2} \bar{R}, \quad u' \sim (\alpha - 1)2^{-\alpha} \beta_4 \int w^{-\alpha} \bar{R} dr$$

Здесь для u' соответствующее выражение получено при учете критерия 2; использованы выражения величины z'_2, z'_1, y'_1 из соотношений (4.3).

Дифференцируя по ε при $\varepsilon = 0$ второе соотношение (4.4) и подставляя в его правую часть выражения (4.13), получаем

$$dR'/dr \sim (\alpha - 1)\beta w^{-(\alpha+1)/2} \bar{R}^2 [\alpha - 2 - (1 + \alpha)(1 - \alpha)^2 r^2 w^{-1}] \quad (4.14)$$

Следовательно, $\nu_\infty(dR'/dr) \geq \alpha + 1$ и отброшенные в (4.14) слагаемые лежат в L_2 .

8⁰. Случай $\alpha \in -1 - 2\mathbb{N}_0$, $\beta_4 = 0$. Из критериев 1 и 2 вытекает $\bar{R}, u' \in L$, и следовательно, существует дополнительный алгебраический ε^1 -интеграл $u + \varepsilon F^1(u, R, r)$.

Предложение 5. В условиях случая 8⁰ величина R' принадлежит L .

Доказательство. Из формулы (4.14), согласно критерию 2, ввиду $-1 \notin [(\alpha - 3)/2, -2 - j]$ ($j = 0, 1$), получаем, что линейные по D члены в R' принадлежат L . Очевидно, коэффициенты при D^2 в R' принадлежат L . Для коэффициентов при h_1^2 , интегрируя по частям, получаем

$$\int w^{-j-(\alpha+1)/2} \left(\int w^{(\alpha-3)/2} dr \right)^2 dr = J_j \int w^{(\alpha-3)/2} dr - \int w^{(\alpha-3)/2} J_j dr \quad (4.15)$$

$$J_j = \int w^{-j-(\alpha+1)/2} \left(\int w^{(\alpha-3)/2} dr \right) dr$$

Согласно критерию 2 имеем $J_j \in L$; $\nu_\infty(dJ_j/dr) = 2j + (\alpha + 1)$. За исключением $\{j = 1, \alpha = -1\}$, по свойству 3,6 $\nu_\infty J_j = 2j + \alpha$ и, согласно критерию 1, ввиду $\nu_\infty(w^{(\alpha-3)/2} J_j) \geq 3$, последний интеграл в (4.15) принадлежит L . При $\alpha = -1$, согласно лемме 1, $\nu_\infty J_1 = 0$ и, в силу критерия 1,

$$\int w^{-2} J_1 dr \in L$$

Для коэффициентов при $h_1 h_2$, h_2^2 эти оценки тем более выполняются.

Подслучай $\alpha \neq -1$, $h_1 h_2 \neq 0$. Ввиду предложений 1 и 3 коэффициент при $C^0 D^0$ в u'' вычисляется подстановкой $u = 0$ в первое уравнение системы (4.4). Он равен

$$2^{-\alpha-2}(1-\alpha)h_2 \int w^{-1-\alpha} I dr$$

Согласно критерию 2 этот интеграл не принадлежит L (содержит $\ln w$) тогда и только тогда, когда $-1 \in [(\alpha-3)/2, -1-(\alpha+3)/2]$. В условиях данного подслучая -1 принадлежит указанному интервалу. Получаем противоречие со вторым тождеством Гюссона (4.10).

9^0 . *Случай $\alpha \in -\mathbb{N}_0$.* Подставляя в правую часть уравнения (4.8) члены максимальной степени по D (что и означает в случае 9^0 значок $\simeq$) в величинах:

$$\bar{u} = 2^{-\alpha} C, \quad \bar{R} \simeq D, \quad u' \simeq (\alpha-1)2^{-\alpha} D(\beta_4 I_0 + 2\beta C I_1 + \frac{1}{2}\alpha C^2 I_2)$$

$$R' \simeq (\alpha-1)D^2\beta\{(\alpha-2)I_1 - (\alpha+1)(\alpha-1)^2 I_3\} - \\ - \frac{1}{2}D^2 C(\alpha-1)\{(1-\alpha)rw^{-1} + \alpha I_2\}, \quad I_0 = \int w^{-\alpha} dr,$$

$$I_1 = \int w^{-(\alpha+1)/2} dr, \quad I_2 = \int w^{-1} dr, \quad I_3 = \int r^2 w^{-(\alpha+5)/2} dr$$

находим, ввиду предложений 1 и 3, коэффициент при D^2 в du''/dr в двух подслучаях, используя аналитические вычисления в MAPLE V release 3.

Подслучай $\alpha = -1$, $\beta_4 = 0$, $\beta \neq 0$, $(h_1, h_2) \neq 0$. Коэффициент при $D^2 C^2$ в du''/dr равен $-12\beta r w^{-1}$. Это противоречит алгебраической зависимости (4.10), ибо $\bar{u}, \bar{R}, u', R' \in L$, см. случай 8^0 .

Подслучай $\alpha \in -\mathbb{N}_0$, $\beta = 0$, $\beta_4 \neq 0$, $h_2 \neq 0$. Из (4.7) вытекает включение $u' \in L$, а из (4.14) – включение $R' \in L$. Коэффициент при $D^2 C$ в du''/dr , ввиду соотношения

$$\int w^{-\alpha} I_2 dr = I_0 I_2 - \int w^{-1} I_0 dr$$

равен

$$2^{-\alpha}\alpha(\alpha-1)^2\beta_4 \left(\int r w^{-1-\alpha} dr + \frac{3}{2} \int w^{-1} I_0 dr \right)$$

где первый интеграл – алгебраический при $\alpha \neq 0$, второй не принадлежит L (содержит слагаемое $\ln w$ с ненулевым постоянным множителем) при $\alpha \in -\mathbb{N}_0$. При $\alpha \neq 0$ это противоречит второму

равенству Гюссона (4.10) (здесь выделяется третий случай Клебша $\alpha = 0$).

10⁰. Случай $\beta = h_1 = 0$, $\alpha \in 1/2 - \mathbb{N}_0$. В этом случае выполняется условие неединственности 3 в (4.6), поэтому имеются два функционально независимых дополнительных алгебраических ε^0 -интеграла: u , $v := R - 2^\alpha u J$. Перейдем в системе (4.4) к переменным u, v, r . Из существования дополнительного алгебраического ε^1 -интеграла $F^0(u, v) + \varepsilon F^1(u, v, r)$ вытекает, что

$$\frac{\partial F^0}{\partial u}(2^{-\alpha}C, D)u' + \frac{\partial F^0}{\partial v}(2^{-\alpha}C, D)v' + F^1(2^{-\alpha}C, D, r) = \text{const} \quad (4.16)$$

$$\left(\frac{\partial F^0}{\partial u}, \frac{\partial F^0}{\partial v} \right) \neq 0$$

Подслучай $\beta_3 \neq 0$. Разложение (4.7) принимает вид

$$\frac{u'}{\alpha - 1} = 2^{-\alpha} \int \left(-\beta_3 w^{-\alpha} + \frac{\alpha}{2} C^2 w^{-1} \right) (D + C J) dr \quad (4.17)$$

где лишь коэффициент при $D^1 C^0$ не принадлежит L (содержит слагаемое $\ln \sigma$ с ненулевым постоянным множителем); коэффициенты при D^0 принадлежат $K \subset L$. Из (4.4) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha - 1} \frac{d\omega'}{dr} &= w^{-2} C \left(\frac{h_2}{4} (\alpha - 3) C w^{\alpha-1} + (\alpha - 1) r \tilde{R} \right) \times \\ &\times \left(\frac{h_2}{4} C w^{\alpha-1} - (\alpha - 1) r \tilde{R} \right) - \frac{C}{2} w^{-1} \tilde{R}^2 - \frac{2^\alpha}{\alpha - 1} J \frac{du'}{dr}, \quad \tilde{R} = D + C J \end{aligned} \quad (4.18)$$

где u' определяется формулой (4.17). Все слагаемые в правой части равенства (4.18), за исключением последнего, и коэффициенты при $DC^2, D^0 C^3$ в последнем принадлежат L_2 . Поэтому

$$\frac{1}{\alpha - 1} \frac{d\omega'}{dr} = \beta_3 w^{-\alpha} J (D + C J) \mod L_2 \quad (4.19)$$

Согласно критерию 1 первообразная коэффициента при D в равенстве (4.19) $\mod L$ равна

$$\beta_3 A_0 \int r w^{-1} dr$$

первообразная коэффициента при $C \mod L$ равна

$$-\frac{1}{\alpha - 1} \beta_3 A_0 A_n \int w^{-1/2} dr,$$

где $\alpha = \frac{1}{2} - n$, коэффициенты A_0, A_n определяются из разложения

$$\int w^{\alpha-2} dr = r \sum_{i=0}^n A_i w^{i-n-1/2} : \quad A_0 = \frac{1}{2n+1}, \quad A_n = \frac{2^n n! h^{-n}}{(2n+1)!!}$$

Пусть $\tilde{B}$ – коэффициент при $\int w^{-1/2} dr$ в $\int w^{n-1/2} dr$. Коэффициенты при $\int r w^{-1} dr$ и $\int w^{-1/2} dr$ в левой части тождества (4.16) равны, соответственно,

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha-1)^2}{2} \beta_3 A_0 h_2 D \frac{\partial F^0}{\partial v} (2^{-\alpha} C, D) \\ & - (\alpha-1) \beta_3 \left[\frac{1}{2^\alpha} \tilde{B} D \frac{\partial F^0}{\partial u} + \frac{\alpha-1}{4} A_0 A_n h_2^2 C \frac{\partial F^0}{\partial v} \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

и должны обращаться в нуль.

Воспользуемся произвольностью постоянных C, D . При $h h_2 \neq 0$ получаем $\beta_3 = 0$. При $h_2 = 0$, $\beta_3 h \neq 0$ имеем $\partial F^0 / \partial u \equiv 0$, а уравнение (4.18) сводится к

$$\frac{\omega'}{\alpha-1} = -D^2 C \int \left(\frac{(1-\alpha)^2 r^2}{w^2} + \frac{w^{-1}}{2} \right) dr \equiv -\frac{\alpha}{2} D^2 C \int \frac{dr}{w} \pmod{K} \quad (4.21)$$

откуда $\partial F^0 / \partial w \equiv 0$, т.е. получаем противоречие с (4.16).

Подслучай $\beta_3 = 0$. Из (4.17), (4.19) и тривиальности коэффициентов (4.20) вытекает $u', \omega' \in L$.

Последовательно доказываем принадлежность следующих функций кольцу L , либо множеству $w^{1/4} L$ и оцениваем их алгебраическую кратность нуля ν_∞ : $\nu_\infty r = \nu_\infty w^{1/2} = \nu_\infty \tilde{z}_2 = -1$, $\nu_\infty \tilde{u} = \nu_\infty J = \nu_\infty \tilde{v} = \nu_\infty \tilde{R} = 0$ в силу [19], $\nu_\infty \tilde{z}_1 = 1$; применяя свойства 1,2, имеем $\nu_\infty \tilde{p}_3 = \nu_\infty \tilde{y}_1 = \alpha - 1$; из (4.3) $\nu_\infty z'_2 = \nu_\infty u' = 0$, $\nu_\infty y'_2 = -\alpha$; в силу (4.19) и критерия 1 $\nu_\infty v' \geq 0$; так как коэффициент при $D^2 C$ в v' равен (4.21), а в u' нулю, то выполнено

$$\nu_\infty \omega' = \nu_\infty R' = 0, \quad \nu_\infty p'_3 = \nu_\infty y'_1 = \alpha - 1, \quad \nu_\infty z'_1 = 2\alpha - 1, \quad \nu_\infty z''_2 \geq 0$$

Из второго уравнения (4.4) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4(\alpha-1)} \frac{dR''}{dr} &= h_2 w^{(\alpha-1)/2} (u z_2^{\alpha-3})'' + (1-\alpha) r [R(z_2^{-2} - \frac{1}{4} w^{-1})]'' - \\ & - w^{(1-\alpha)/2} (R^2 u z_2^{\alpha-3})' + [h_2 w^{(\alpha-1)/2} \tilde{u} \tilde{z}_2^{\alpha-1} + (1-\alpha) r \tilde{R}] h_2^2 \tilde{z}_2^{-6} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Так как в правой части равенства (4.22) все слагаемые, кроме $h_2 w^{(\alpha-1)/2} u'' \tilde{z}_2^{\alpha-3}$, принадлежат L_2 , то величина

$$\frac{d\omega''}{dr} + 2^\alpha J \frac{du''}{dr} = \frac{dR''}{dr} - 2^\alpha \frac{dJ}{dr} u'' = \frac{dR''}{dr} - 4(\alpha-1) h_2 w^{(\alpha-1)/2} \tilde{z}_2^{\alpha-3} u''$$

принадлежит L_2 .

Подслучай $\beta_3 = 0$, $h_2 \neq 0$. Из системы (4.4) следует, что

$$\frac{1}{\alpha - 1} \frac{du''}{dr} - 2h_2 w^{(1-\alpha)/2} \tilde{R} \tilde{z}_2^{-\alpha-3} = 4\alpha w^{(1-\alpha)/2} (u^2 R z_2^{\alpha-3})' \in L_2$$

откуда, в силу критерия 1,

$$u'' = -2^{-2-\alpha}(\alpha - 1)h_2 \int w^{-1-\alpha}(D + CJ)dr \mod L$$

$$\omega'' = \frac{(\alpha - 1)h_2}{4} \int w^{-1-\alpha}J(D + CJ)dr \mod L$$

Из существования дополнительного алгебраического ε^2 -интеграла $F^0(u, v) + \varepsilon F^1(u, v, r) + \varepsilon^2 F^2(u, v, r)$ вытекало бы

$$\frac{\partial F^0}{\partial u}(2^{-\alpha}C, D)u'' + \frac{\partial F^0}{\partial v}(2^{-\alpha}C, D)\omega'' \in \mathbb{C}(\bar{r})[\ln v], \quad \left(\frac{\partial F^0}{\partial u}, \frac{\partial F^0}{\partial v} \right) \neq 0 \quad (4.23)$$

где $\mathbb{C}(\bar{r})[\ln v]$ – кольцо над полем $\mathbb{C}(\bar{r})$ алгебраических функций от r , порожденное элементом $\ln v$.

Но интегрирование по частям с использованием формул [19] показывает, что

$$\frac{u''}{h_2} = -2^{-\alpha-2} \{ (\alpha - 1)DB \ln \sigma + C \frac{A_1 \ln w}{2} \} \mod L$$

$$\frac{\omega''}{h_2} = \frac{1}{4} \{ D \frac{A_1 \ln w}{2} + C \frac{A_1 A_n \ln \sigma}{(\alpha - 1)^{1/2}} \} \mod L$$

$$B = \begin{cases} 0 & , \quad n = 0 \\ (\alpha - 1)^{-1/2} 2^{1-n} (2n - 3)!! h^{n-1} / (n - 1)! & , \quad n \in N \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{2n}{h(4n^2 - 1)}$$

Из (4.23) вытекает, что

$$\begin{vmatrix} CA_1/(\alpha - 1) & DB \\ DA_1/(2(\alpha - 1)) & CA_1 A_n / (\alpha - 1)^{3/2} \end{vmatrix} = 0$$

откуда, ввиду произвольности C и D , следует, что $A_1 A_n = A_1 B = 0$, т.е. $A_1 = 0$ (здесь выделяется случай Чаплыгина $\alpha = 1/2$, $\beta_1 = \beta = \beta_3 = h_1 = 0$) или $A_n = B = 0$, что соответствует пустому множеству параметров задачи.

5. Замена $(y_1, y_2, p_3) \rightarrow \sqrt{\varepsilon}(y_1, y_2, p_3)$. В оставшемся случае $\beta_1 = \beta = \beta_3 = H_1 = H_2 = 0$, $\alpha \in -\mathbb{N}_0$ введем в систему (3.1), (3.2)

малый параметр ε посредством замены $(y_1, y_2, p_3) \rightarrow \sqrt{\varepsilon}(y_1, y_2, p_3)$.
Имеем

$$\frac{dy_1}{dz_1} = \frac{\alpha r y_1 - p_3 z_2 / 2}{r z_1 - \varepsilon y_1 p_3}, \quad \frac{dy_2}{dz_1} = \frac{-\alpha r y_2 + p_3 z_1 / 2}{r z_1 - \varepsilon y_1 p_3} \quad (5.1)$$

$$p_3 = \frac{y_1 z_2 + y_2 z_1}{2(\alpha - 1)r}, \quad (\alpha - 1)r^2 = h + \frac{1}{4}(z_1^2 + z_2^2) - \varepsilon y_1 y_2, \quad z_2 = -\varepsilon p_3^2 z_1^{-1}$$

где h – постоянная интеграла H .

Так как система (5.1) имеет два алгебраических ε^0 -интеграла

$$u = y_1 z_1^{-\alpha}, \quad v = y_2 z_1^\alpha w^{-1/2}, \quad (5.2)$$

где $w = 4h + z_1^2$, можно перейти к оскулирующим алгебраическим координатам (h, u, v, z_1) :

$$\frac{du}{dz_1} = \varepsilon f_1(h, u, v, z_1) + \varepsilon^2 f_2(h, u, v, z_1) + \dots$$

$$\frac{dv}{dz_1} = \varepsilon g_1(h, u, v, z_1) + \varepsilon^2 g_2(h, u, v, z_1) + \dots \quad (5.3)$$

$$f_1 = \frac{v}{\alpha - 1} [v^2 z_1^{1-4\alpha} + 2\alpha(\alpha - 1)u^2 z_1^{-1}] w^{-1/2}$$

$$g_1 = \frac{uv^2}{1 - \alpha} [2\alpha^2 w - 8\alpha w + 24\alpha h + 7(w - 4h)] z_1^{-1} w^{-3/2}, \quad \dots$$

Выражения для f_1, g_1, f_2, g_2 вычислены в MAPLE V.

Пусть $\mathcal{F}(y_1, y_2, r, z_1, z_2, p_3)$ – дополнительный алгебраический интеграл системы (3.1) при $H_1 = H_2 = 0$. Тогда

$$\mathcal{F}(\sqrt{\varepsilon}y_1, \sqrt{\varepsilon}y_2, r, z_1, z_2, \sqrt{\varepsilon}p_3) = \sum_{l=l_0}^{\infty} \varepsilon^{l/s} F^{l/s}(h, u, v, z_1), \quad l_0 \in \mathbb{Z}, \quad s \in \mathbb{N}$$

– алгебраический интеграл (5.1) при произвольном ε . Пусть l_1 – минимальное число такое, что величина $F^{l_1/s}$ функционально независима от h . Тогда интеграл $\sum_{l=l_0}^{\infty} \varepsilon^{l/s} F^{l/s}$ можно заменить на $\sum_{l=l_1}^{\infty} \varepsilon^{(l-l_1)/s} F^{l/s}$. В силу рациональности по ε системы (5.1) его составляющая при целых степенях ε также будет интегралом (5.1).

Из существования дополнительного алгебраического ε^2 -интеграла $F^0(u, v) + \varepsilon F^1(u, v, z_1) + \varepsilon^2 F^2(u, v, z_1)$ системы (5.1) вытекает

$$-\frac{\partial F^1}{\partial z_1} = \frac{\partial F^0}{\partial u}(u, v) f_1(u, v, z_1) + \frac{\partial F^0}{\partial v}(u, v) g_1(u, v, z_1), \quad \left(\frac{\partial F^0}{\partial u}, \frac{\partial F^0}{\partial v} \right) \neq 0 \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial F^2}{\partial z_1} &= \frac{\partial F^0}{\partial u}(u, v)f_2(u, v, z_1) + \frac{\partial F^0}{\partial v}(u, v)g_2(u, v, z_1) + \\
&+ \frac{\partial F^1}{\partial u}(u, v, z_1)f_1(u, v, z_1) + \frac{\partial F^1}{\partial v}(u, v, z_1)g_1(u, v, z_1)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Здесь и ниже зависимость от h для краткости не указывается.

Из соотношений (5.3) и (5.4) следует, что

$$\operatorname{res}_{z_1=0} \left(-\frac{\partial F^1}{\partial z_1} \right) = -\alpha h^{-1/2} uv \left(v \frac{\partial F^0}{\partial v} - u \frac{\partial F^0}{\partial u} \right) \equiv 0$$

откуда при $\alpha \neq 0$ (здесь выделяется третий случай Клебша $\alpha = 0$) вытекает, что $F^0 = F^0(uv)$. Не ограничивая общности, положим $F^0 = uv$. Тогда, ввиду (5.4),

$$\begin{aligned}
F^1 &= \frac{v^2}{1-\alpha} \left[v^2 w^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{-2\alpha} \frac{C_{-2\alpha}^k}{2k+1} (-4h)^{-2\alpha-k} w^k \right) - u^2 (6\alpha - 7) w^{-1/2} \right] + \\
&\quad \varphi^1(u, v),
\end{aligned}$$

где $\varphi^1(u, v)$ – алгебраическая функция.

Пусть $\mathbb{C}(z_1, w^{1/2})$ – пространство рациональных функций от $z_1, w^{1/2}$, $\delta = 2h^{1/2} + w^{1/2}$. Пусть N – линейное пространство над $\mathbb{C}$, порожденное $\mathbb{C}(z_1, w^{1/2})$, $\ln z_1$, $\ln \delta$.

Ввиду того, что первообразные $\int f_1 dz_1, \int g_1 dz_1$ принадлежат N , слагаемое φ^1 не дает вклада в $-F^2 \bmod N$. Ввиду формул [19], для вычисления $-F^2 \bmod N$ можно отбросить при подстановке в (5.5) слагаемые достаточно больших степеней по w :

$$\frac{\partial(F^1 - \varphi^1)}{\partial u} = \frac{2(6\alpha - 7)}{\alpha - 1} \frac{uv^2}{w^{1/2}} (1 + O(w))$$

$$\frac{\partial(F^1 - \varphi^1)}{\partial v} = \frac{2vw^{-1/2}}{\alpha - 1} [(6\alpha - 7)u^2 - 2v^2(4h)^{-2\alpha}w + O(w^2)]$$

Невыписанные члены не дают вклада в вычеты в точке $w = 0$. Учитывая, что

$$vf_2 + ug_2 = \frac{2}{(\alpha - 1)^2} uv^3 z_1 w^{-2} [6(3\alpha^2 - 7\alpha + 4)u^2 + ((5\alpha - 6)w + 2h)v^2]$$

из соотношений (5.5) получаем, что $-F^2 \bmod N$ полиномиален по u, v и его коэффициент при uv^5 равен $(4h)^{-2\alpha}(\alpha - 1)^{-2} \ln w$, что противоречит алгебраичности F^2 .

Замечание. Упрощение подхода Гюссона в разд. 5 по сравнению с основано на наличии оскулирующих алгебраических переменных

и состоит в следующем. Рассмотрим в $\mathbb{C}^3$ с координатами (z_1, y_1, y_2) совместный уровень интегралов (5.2). Он определяет риманову поверхность невозмущенного решения системы (5.1). Тогда поле рациональных функций на $\mathfrak{R}R$ есть $\mathbb{C}(z_1, \sqrt{4h + z_1^2})$. Ограничение правой части системы (5.3) на $\mathfrak{R}R$ принадлежит $\mathbb{C}(z_1, \sqrt{4h + z_1^2})$. В разд. 5 вместо препятствий к интегрируемости Гюссона вида (4.16); (4.10), (4.23); ... использованы эквивалентные препятствия – вычеты и периоды рациональных дифференциальных 1-форм на $\mathfrak{R}R$ – умноженных на dz_1 правых частей (5.4); (5.5); Вычисление вычетов и периодов, в частности, требует меньшего числа квадратур: i – для ε^i -интеграла.

6. Доказательства утверждений разд. 2.

Доказательство свойства 1. Пусть

$$g = \sum_{l=0}^{n_1} g_l \ln^l \vartheta$$

Тогда

$$\begin{aligned} \nu_\infty(f + g) &= \min_l \operatorname{ord}_\infty(f_l + g_l) \geq \\ &\geq \min_l \{\operatorname{ord}_\infty f_l, \operatorname{ord}_\infty g_l\} = \min\{\nu_\infty f, \nu_\infty g\} \end{aligned}$$

Доказательство свойства 2. Очевидно,

$$\operatorname{ord}_\infty(f_l g_m) = \operatorname{ord}_\infty f_l + \operatorname{ord}_\infty g_m \geq \nu_\infty f + \nu_\infty g, \quad 0 \leq l \leq n, \quad 0 \leq m \leq n_1$$

Пусть l_0, m_0 – минимальные неотрицательные целые числа, такие, что

$$\operatorname{ord}_\infty f_{l_0} = \nu_\infty f, \quad \operatorname{ord}_\infty g_{m_0} = \nu_\infty g$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_\infty \left(\left(\sum_{l=0}^n f_l \ln^l \vartheta \right) \left(\sum_{l=0}^{n_1} g_m \ln^m \vartheta \right) \right)_{l_0+m_0} &= \operatorname{ord}_\infty \sum_{l=-l_0}^{m_0} f_{l_0+l} g_{m_0-l} = \\ &= \operatorname{ord}_\infty(f_{l_0} g_{m_0}) = \nu_\infty f + \nu_\infty g \end{aligned}$$

Доказательство леммы 1. Пользуясь разложением Пуизе

$$g'(s) = s^{-k}(a_0 + a_1 s^{-1/t} + \dots), \quad a_0 \neq 0, \quad t \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{Q} \setminus 1$$

имеем

$$g(s) = C + s^{1-k} [a_0/(1-k) - a_1 s^{-1/t}/(1-k - \frac{1}{t}) + \dots], \quad C = \text{const}$$

откуда

$$\operatorname{ord}_\infty g = \min\{\operatorname{ord}_\infty C, \operatorname{ord}_\infty g' - 1\}, \quad \operatorname{ord}_\infty 0 = +\infty$$

Следовательно, при $\text{ord}_\infty g < 0$ получаем утверждение *a*, при $\text{ord}_\infty g = 0$ имеем $\text{ord}_\infty g' > 1$ и $C \neq 0$ *б*, при $\text{ord}_\infty g > 0$ имеем $C = 0$ *a*.

Доказательство свойства 3,а. Действительно,

$$\nu_\infty f' = \min_l \text{ord}_\infty (f'_l + 2(l+1)w^{-1}f_{l+1}) \geq$$

$$\geq \min_l \{\text{ord}_\infty f'_l, \text{ord}_\infty (w^{-1}f_{l+1})\} \geq 1 + \min_l \text{ord}_\infty f_l = 1 + \nu_\infty f$$

где первое равенство вытекает из определения ν_∞ , первое неравенство – из свойства 1, второе – из леммы 1.

Доказательство свойства 3,б. Пусть число l таково, что $\nu_\infty f = \text{ord}_\infty f_l$. Тогда

$$\nu_\infty f' \leq \text{ord}_\infty (f'_l + 2(l+1)w^{-1}f_{l+1}) =$$

$$= \text{ord}_\infty f'_l = 1 + \text{ord}_\infty f_l = 1 + \nu_\infty f$$

где неравенство вытекает из определения ν_∞ ; второе равенство – из леммы 1, ибо возможность *б* в ней исключена; первое равенство – из второго и соотношения

$$\text{ord}_\infty (f_{l+1}w^{-1}) = 2 + \text{ord}_\infty f_{l+1} \geq 2 + \text{ord}_\infty f_l$$

Доказательство критерия 1. Пусть либо $j = 0$, $k = -1, -3/2, -2, \dots$ либо $j = 1$, $k = -3/2, -2, -5/2, \dots$. Положим

$$I_{jkl} = \int s^j w^k \ln^l \vartheta ds, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда $I_{jk0} - \delta_{0j} B_k \ln \vartheta \in K$ для некоторой постоянной B_k , и поэтому $I_{jk0} \in L$. Заменой $s = 1/z$ устанавливается, что I_{jkl} – аналитическая функция в точке $s = \infty$. Следовательно, $\nu_\infty I_{jk0} \geq 0$.

Интегрируя по частям

$$I_{jkl} = I_{jk0} \ln^l \vartheta - 2l \int w^{-1} I_{jk0} \ln^{l-1} \vartheta ds \quad (6.1)$$

воспользуемся индукцией по l , а внутри нее – индукцией по k . Рассматриваются четыре случая четности величин j и $2k$. Например, если $j = 0$, а k – целое число, имеем

$$I_{0k0} = B_k \ln \vartheta + s \sum_{m=k+1}^{-1} A_m w^m, \quad A_m = \text{const}$$

Подставляя выражение для I_{0k0} в равенство (6.1), получаем

$$(1 + 2lB_{-1})I_{0-l1} = I_{0-10} \ln^l \vartheta - 2l \sum_{m=k+1}^{-1} A_m I_{1,m-1,l-1}$$

где второе слагаемое принадлежит $L_0 = \{f \in L | \nu_\infty f \geq 0\}$ по предположению индукции.

Доказательство критерия 2. Если $l, m < 0$, то $J_{lm} \in L$ ввиду критерия 1. Если $l < 0 \leq m$, то

$$J_{lm} = - \sum_{i=l}^{m+l} A_i \int w^i dw \notin L \Leftrightarrow l \leq -1 \leq m+l$$

Случай $m < 0 \leq l$ сводится к предыдущему интегрированием по частям.


```

> restart;
> M:=simplify(x*yt-y*xt);
> R:=simplify(x^2+y^2);
> G:=simplify(M+R);
> V1:=- (x^2+y^2)/2-
e^2*( (1-m)/sqrt((x/e+m)^2+(y/e)^2)+m/sqrt((x/e+m-1)^2+(y/e)^2) );
> V1T:=simplify(series(V1,e=0,7));
> xttT:=2*yt-diff(V1T,x);
> yttT:=-2*xt-diff(V1T,y);
> GtT:=
simplify(series(diff(G,x)*xt+diff(G,y)*yt+diff(G,xt)*xttT+diff(G,yt)*yttT,e=0,8));
> restart;
> x:=2*D+A*cos(t)+B*sin(t);
> y:=-3*D*t+C+2*diff(x,t);
> H:=simplify(diff(x,t)^2+diff(y,t)^2-3*x^2);
> R:=(x^2+y^2);
> assume(B>0);
> RB:=simplify( subs(A=-2*I*B,C=-2*B,D=I*B,R) );
> HB:=simplify( subs(A=-2*I*B,C=-2*B,D=I*B,H) );
> yB:=simplify( subs(A=-2*I*B,C=-2*B,D=I*B,y) );
> RBT:=series(RB,t=0,10);
> yBT:=series(yB,t=0,3);
> u3te:=simplify( subs(A=-2*I*B,C=-2*B,D=I*B,-y*RBT^(-3/2)) );
> u3tT:=series(u3te,t=0,11);

```

[illegible]

137

```

> DD:=k2^2*y^2+yt^2;
> u;
> Dt:=diff(DD,xt)*(-x/a)+diff(DD,yt)*(-y/b);
> Pt:=coeff(evalc(diff(Pc,xt)*(-x/a)+diff(Pc,yt)*(-y/b)),1);
> Pt:=subs(k2^2*y^2+yt^2=d,k1^2*x^2+xt^2=EE^2,Pt_);
> hT:=series(H,e=0,1);
> al:=sqrt(1-c/a);
> EE:=h0^(1/2)/al;
> x:=EE*sin(t)/k1;
> xt:=EE*cos(t);
> y:=d^(1/2)*sin(t1)/k2;
> yt:=d^(1/2)*cos(t1);
> Dte:=subs(t=tt, t1=k2/k1*tt+Pn, Dt*11);
> DteT:=simplify(series(Dte,tt=0,5),trig);
> Dter:=factor(coeff(DteT,tt,-1));
> Flt:=(F0d*Dt+F0P*Pt)*11;
> FltT:=simplify(series(subs(t=tt, t1=k2/k1*tt+Pn, Flt), tt=0, 5),trig);
> Fltr:=factor(coeff(FltT,tt,-1));
> F0:=d^2*(sin(4*P)/2-sin(2*P));
> FltZ:=subs(c=b,F0d=diff(F0,d), F0P=diff(F0,P), Flt);
> Flu:=factor(expand(simplify(subs(
S=b*(a-b)*(k1^2-k2^2), t=tt, t1=k2/k1*tt+P,FltZ/cos(tt)/k1))));
> op(1,Flu);
> nops(Flu);
> Flu5:=collect(simplify(op(5,Flu),trig),cos(P));
> Flu54:=factor(coeff(Flu5,cos(P)^4));
> nops(Flu54);
> Flu54p:=collect(Flu54,cos(k2*tt/k1));
> % Flu544:=factor(coeff(Flu54p,cos(k2*tt/k1)^4));
> % Flu540:=factor(Flu54-coeff(Flu54,cos(k2*tt/k1)^4)*cos(k2*tt/k1)^4
> % -coeff(Flu54,cos(k2*tt/k1)^3)*cos(k2*tt/k1)^3
> % -coeff(Flu54,cos(k2*tt/k1)^2)*cos(k2*tt/k1)^2
> % -coeff(Flu54,cos(k2*tt/k1)^1)*cos(k2*tt/k1)^1 );
> % Flu53p:=collect(factor(coeff(Flu5,cos(P)^3)), cos(k2*tt/k1));
> % nops(Flu53p);
> % Flu531:=factor(coeff(Flu53p,cos(k2*tt/k1)^1));
> % Flu530:=factor(Flu53p-coeff(Flu53p,cos(k2*tt/k1)^4)*cos(k2*tt/k1)^4
> % -coeff(Flu53p,cos(k2*tt/k1)^3)*cos(k2*tt/k1)^3
> % -coeff(Flu53p,cos(k2*tt/k1)^2)*cos(k2*tt/k1)^2
> % -coeff(Flu53p,cos(k2*tt/k1)^1)*cos(k2*tt/k1)^1 );
> Fp:=simplify(Flu54p+2*Flu52_);
> % Fp2:=factor(coeff(Fp,cos(k2*tt/k1)^2));
> % Fp0:=factor(Fp-coeff(Fp,cos(k2*tt/k1)^4)*cos(k2*tt/k1)^4
> % -coeff(Fp,cos(k2*tt/k1)^3)*cos(k2*tt/k1)^3
> % -coeff(Fp,cos(k2*tt/k1)^2)*cos(k2*tt/k1)^2
> % -coeff(Fp,cos(k2*tt/k1)^1)*cos(k2*tt/k1)^1 );
> Flu52:=factor(coeff(Flu5,cos(P)^2));
> nops(Flu52);
> Flu52p:=collect(Flu52,cos(k2*tt/k1));
> % Flu524:=factor(coeff(Flu52p,cos(k2*tt/k1)^3));
> % Flu520:=factor(Flu52p-coeff(Flu52p,cos(k2*tt/k1)^4)*cos(k2*tt/k1)^4
> % -coeff(Flu52p,cos(k2*tt/k1)^3)*cos(k2*tt/k1)^3
> % -coeff(Flu52p,cos(k2*tt/k1)^2)*cos(k2*tt/k1)^2
> % -coeff(Flu52p,cos(k2*tt/k1)^1)*cos(k2*tt/k1)^1 );
> % Flu51:=factor(coeff(Flu5,cos(P)^1));
> % Flu51p:=collect(Flu51,cos(k2*tt/k1));
> % Flu514:=factor(coeff(Flu51p,cos(k2*tt/k1)^1));

```

```

> % Flu510:=factor(Flu51p-coeff(Flu51p,cos(k2*tt/k1)^4)*cos(k2*tt/k1)^4
      -coeff(Flu51p,cos(k2*tt/k1)^3)*cos(k2*tt/k1)^3
      -coeff(Flu51p,cos(k2*tt/k1)^2)*cos(k2*tt/k1)^2
      -coeff(Flu51p,cos(k2*tt/k1)^1)*cos(k2*tt/k1)^1);
> % Flu50:=factor(Flu5-coeff(Flu5,cos(P)^1)*cos(P)^1 -coeff(Flu5,cos(P)^2)*cos(P)^2
      -coeff(Flu5,cos(P)^3)*cos(P)^3 -coeff(Flu5,cos(P)^4)*cos(P)^4);
> Flu50p:=collect(Flu50,cos(k2*tt/k1));
> % Flu504:=factor(coeff(Flu50p,cos(k2*tt/k1)^1));
> % Flu500:=factor(Flu50p-coeff(Flu50p,cos(k2*tt/k1)^4)*cos(k2*tt/k1)^4
      -coeff(Flu50p,cos(k2*tt/k1)^3)*cos(k2*tt/k1)^3
      -coeff(Flu50p,cos(k2*tt/k1)^2)*cos(k2*tt/k1)^2
      -coeff(Flu50p,cos(k2*tt/k1)^1)*cos(k2*tt/k1)^1);
> Gp:=simplify(Flu52p-4*Flu50p);
> % Gp2:=factor(coeff(Gp,cos(k2*tt/k1)^2));
> % Gp0:=factor(Gp-coeff(Gp,cos(k2*tt/k1)^4)*cos(k2*tt/k1)^4
      -coeff(Gp,cos(k2*tt/k1)^3)*cos(k2*tt/k1)^3
      -coeff(Gp,cos(k2*tt/k1)^2)*cos(k2*tt/k1)^2
      -coeff(Gp,cos(k2*tt/k1)^1)*cos(k2*tt/k1)^1 );
> FpG:=simplify(-5/2*Fp+Gp);
> factor(FpG-op(6,FpG));
> FpGp2:=simplify(-5/2*Fp2+Gp2);
> F1:=simplify(int(subs(k2=1,k1=1, Flu*cos(tt)),tt),trig);
> F1p:=collect(F1,[arctan(tan(tt/2)),ln(tan(tt/2)),ln(tan(tt/2)^2+1)],distributed);
> factor(simplify(coeff(F1p,arctan(tan(tt/2)),1),trig));
> factor(simplify(coeff(F1p,ln(tan(tt/2)),1),trig));
> factor(simplify(coeff(F1p,ln(tan(tt/2)^2+1),1),trig));

```

Тексты программ на языке MAPLE V release 3 к \S4.3

К случаю S_9^0 раздела 4. Вычисление коэффициентов в $S_d u^{(\prime\prime\prime\prime)}/dr$:
 при $S_9^2 C^2$ -- в первом подслучае;
 при $S_9^2 C$ -- во втором подслучае:

К разделу 5. Вычисление

$f_1, g_1, -\partial F^1/\partial z_1, F^1, v f_2 + u g_2,$
 $-\partial F^2/\partial z_1$:

```

> restart;
> z20:=2*w^(1/2);
> z21:=simplify(series( 2*w^(1/2)*(1+e*2*(1-a)*r*w^(-(1+a)/2)*R*u*z20^(a-1)-
> e^2*w^(-a)*R^2*u^2*z20^(2*a-2)-
> e^4*w^(1-2*a)*R^4*z20^(-2)/4 )^(1/2),e=0,2));
> z22:=simplify(series( 2*w^(1/2)*(1+e*2*(1-a)*r*w^(-(1+a)/2)*R*u*z21^(a-1)-
> e^2*w^(-a)*R^2*u^2*z21^(2*a-2)-
> e^4*w^(1-2*a)*R^4*z21^(-2)/4 )^(1/2),e=0,3));
> z23:=simplify(series( 2*w^(1/2)*(1+e*2*(1-a)*r*w^(-(1+a)/2)*R*u*z22^(a-1)-
> e^2*w^(-a)*R^2*u^2*z22^(2*a-2)-
> e^4*w^(1-2*a)*R^4*z22^(-2)/4 )^(1/2),e=0,4));
> z24:=simplify(series( 2*w^(1/2)*(1+e*2*(1-a)*r*w^(-(1+a)/2)*R*u*z23^(a-1)-
> e^2*w^(-a)*R^2*u^2*z23^(2*a-2)-
> e^4*w^(1-2*a)*R^4*z23^(-2)/4 )^(1/2),e=0,5));
> z2T:=simplify(series( 2*w^(1/2)*(1+e*2*(1-a)*r*w^(-(1+a)/2)*R*u*z24^(a-1)-
> e^2*w^(-a)*R^2*u^2*z24^(2*a-2)-
> e^4*w^(1-2*a)*R^4*z24^(-2)/4 )^(1/2),e=0,6));
> Z:=simplify(series( z2T^2-e^4*w^(2-2*a)*R^4*z2T^(-2),e=0,6));
> f:=simplify(series(

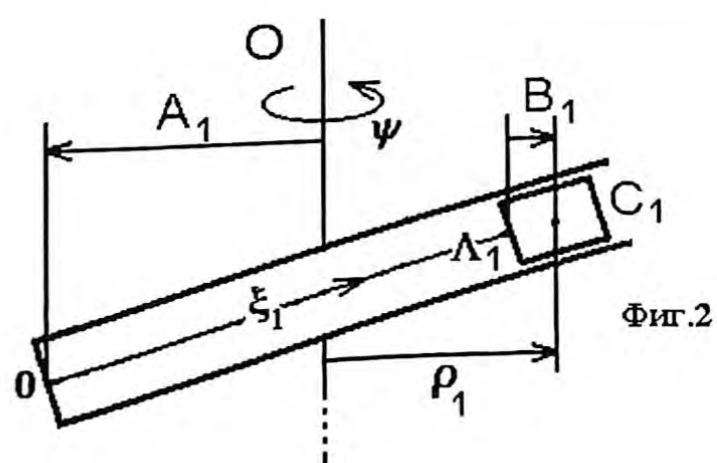
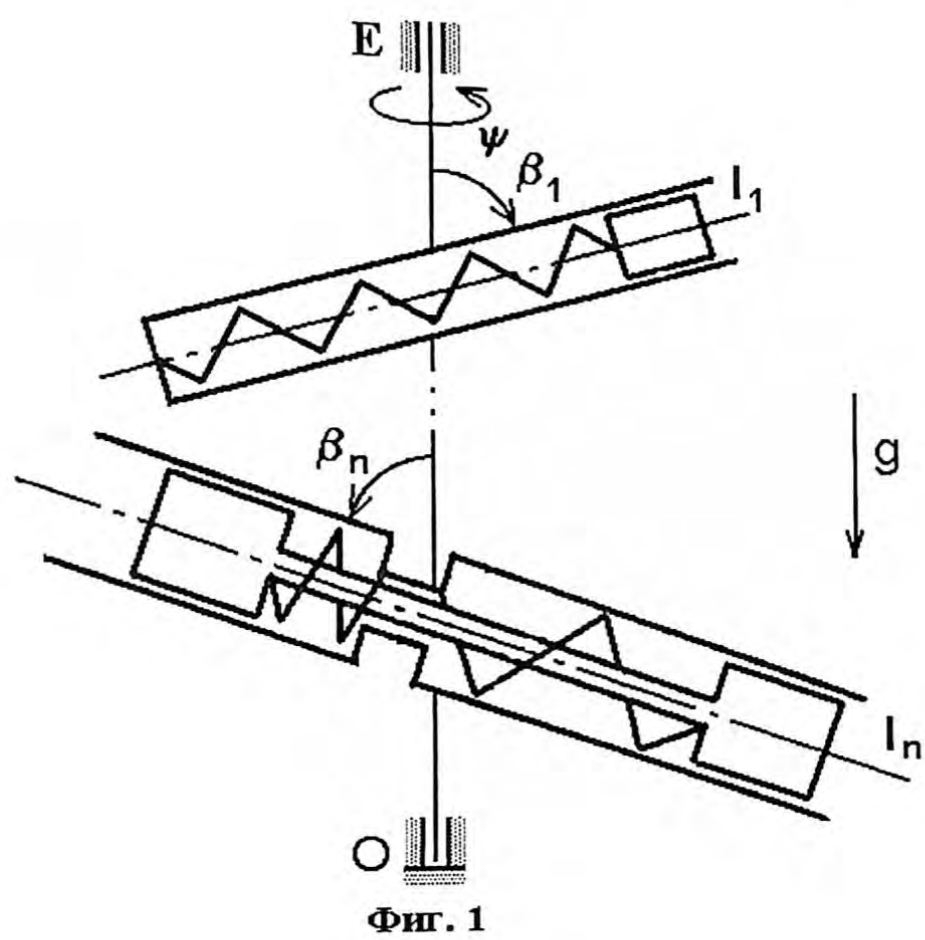
```

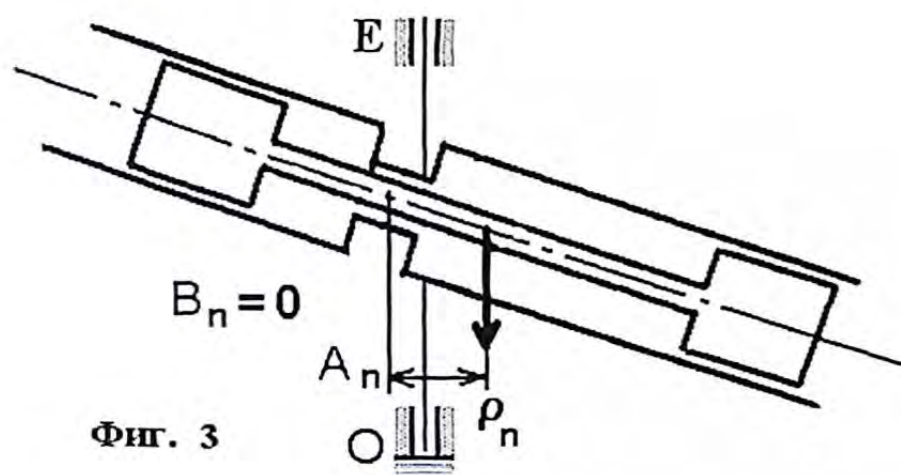


```

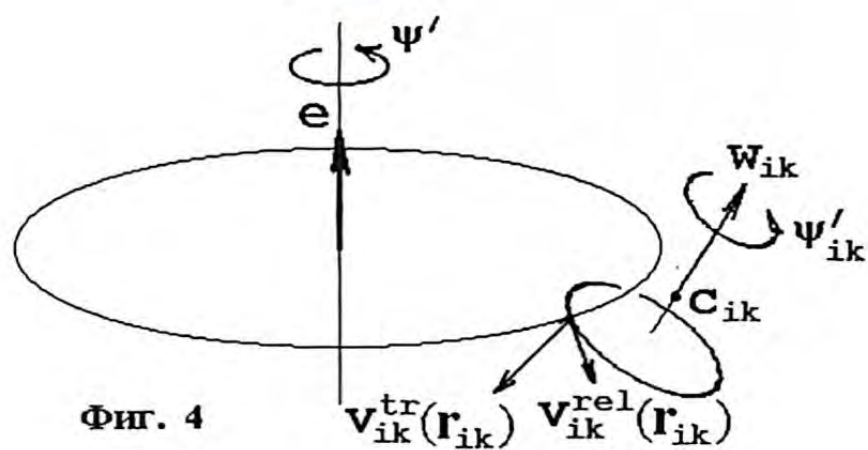
( e*a*w^((1-a)/2)*R*u^2*z2T^(a-1) + e^3*w^(3*(1-a)/2)*R^3*( z2T^(-a-1) )/2 ) /Z,
> e=0,6),power);
> g:=simplify(series( simplify(series(
(1-a)*r*R-e*w^((1-a)/2)*R^2*u*z2T^(a-1),e=0,6 ) ) / Z -(1-a)*r*w^(-1)*R/4,e=0,6));
> f1:=coeff(f,e,1);
> f2:=factor(coeff(f,e,2));
> f3:=factor(coeff(f,e,3));
> f4:=factor(coeff(f,e,4));
> f5:=factor(coeff(f,e,5));
> g1:=coeff(g,e,1);
> g2:=factor(coeff(g,e,2));
> g3:=factor(coeff(g,e,3));
> g4:=factor(coeff(g,e,4));
> g5:=factor(coeff(g,e,5));
> F1r:=factor(simplify( 4*(a-1)*(R*f1+u*g1) ));
> w:=h-(1-a)*r^2;
> F1:=simplify(-int(F1r,r));
> F2r:=simplify( 4*(a-1)*(R*f2+u*g2+diff(F1,u)*f1+diff(F1,R)*g1) );
> F2:=factor(simplify(-int(F2r,r) ));
> F3r:=factor( simplify( 4*(a-1)*
(R*f3+u*g3+diff(F1,u)*f2+diff(F1,R)*g2+diff(F2,u)*f1+diff(F2,R)*g1) ) );
> F3r3:=collect(op(3,F3r),u);
> F3r3u0:=factor(coeff(F3r3,u,0));
> F3r3u4:=factor(simplify(coeff(F3r3,u,4)/8^a) );
> F3r3u44:=collect(op(3,F3r3u4),r);
>
> F3u4:=factor(simplify(-int(F3r3u44/w^4,r) ));
> F3:=R^4/8*(2^(1-a)*(a-1)* int(-w^(-2*a),r )- u^4*8^a*(2*a-3)*(a-1)^2*F3u4);
> F4r:=factor(simplify( 4*(a-1)* (R*f4+u*g4+
diff(F1,u)*f3+diff(F1,R)*g3+
diff(F2,u)*f2+diff(F2,R)*g2+
diff(F3,u)*f1+diff(F3,R)*g1)));
> F4r5:=collect(op(5,F4r),u);
> F4r5u0:=factor(coeff(F4r5,u,0));
> F4r5u4:=factor(coeff(F4r5,u,4));
> F4r5u04:=op(4,F4r5u0);
> F4:=factor(simplify(-int(F4r,r) ));
> w:=h-(1-a)*r^2;
> F5r:=factor(simplify( 4*(a-1)* (R*f5+u*g5+
diff(F1,u)*f4+diff(F1,R)*g4+diff(F2,u)*f3+diff(F2,R)*g3+
diff(F3,u)*f2+diff(F3,R)*g2+diff(F4,u)*f1+diff(F4,R)*g1) ));
> F5r2:=op(2,F5r);
> F5r3:=collect(F5r2,u);
> F5ru2:=simplify(coeff(F5r3,u,0),power);
> F5r3u6:=simplify(coeff(F5r3,u,4));
> F5ru6_:=factor(simplify(F5r3u6 ));
> F5ru64:=simplify( subs(w=h-(1-a)*r^2, op(4,F5ru6_)/w^6) );
> r:=(h/(1-a))^(1/2)+T;
> F5ru62:=series(-op(2,F5ru61)/((h/(1-a))^(1/2)+r)^6,T,7);
> F5ru6res:=simplify(coeff(F5ru62,T,5));

```

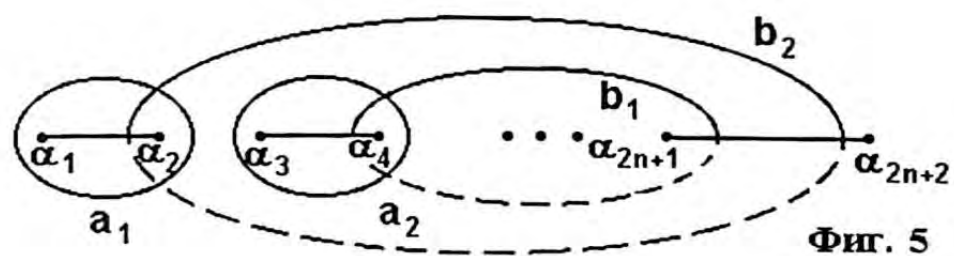




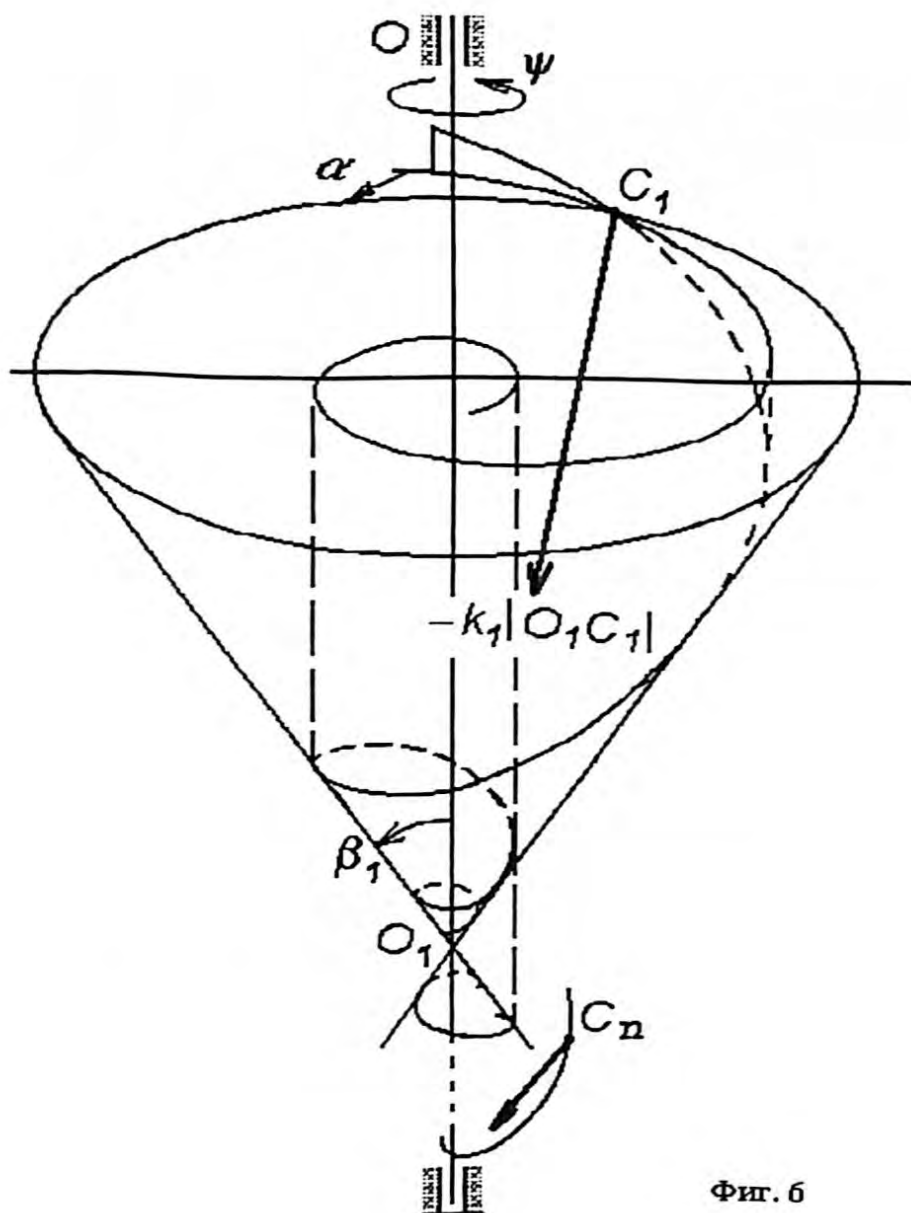
Фиг. 3



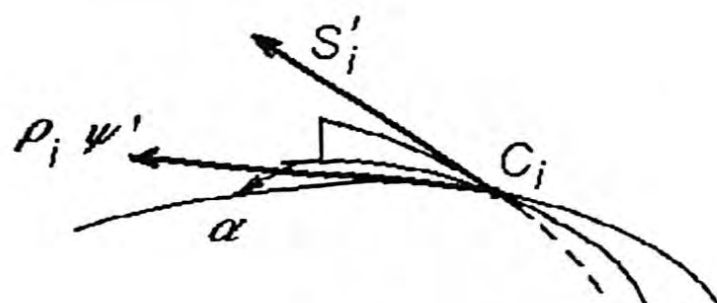
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

к §2.5

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Аксенов Е.П., Гребенников Е.А., Демин В.Г. Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. – В кн.: Искусственные спутники Земли., вып. 8. –М. 1961.
- [2] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М., Наука, 1989, 472 с.
- [3] Арнольд В.И., Гивенталь А.В. Симплектическая геометрия. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления. Т.4 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР). М.: 1985. 7- 139.
- [4] Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. I // Соврем. пробл. матем. Фундам. направл. Т. 1, М., 1985, 7–149.
- [5] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики // Соврем. пробл. матем. Фундам. направл. Т.3, М., 1985, 5–304.
Arnold V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I. Mathematical aspects of classical and celestial mechanics // Dynamical systems 3, Springer – Verlag, 1988.
- [6] Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
- [7] Бахтурин Ю.А. Основные структуры современной алгебры. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1990. 320 с.
- [8] Беляев А.В. О движении многомерного тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести // Мат. сб. 1981. Т. 114, N 3. С. 465–470.
- [9] Березин Ф.А. Несколько замечаний об ассоциативной оболочке алгебры Ли // Функцион. анализ и его прилож. 1967. Т. 1, N 2, с. 1-14.
- [10] Богоявленский О.И. Интегрируемые случаи динамики твердого тела и интегрируемые системы на сферах S^n // Известия АН СССР, серия математическая, 1985. Т.49, N 5. С. 899-915.
- [11] Богоявленский О.И. Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики // Известия АН СССР. Сер. математич. (1984) Т. 48, N 5 С. 883–938.
- [12] Богоявленский О.И. Уравнения Эйлера на конечномерных коалгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики // Успехи матем. наук. 1992. Т. 47, вып.1 (283). С. 107–146.

- [13] *Болотин С.В.* Неинтегрируемость задачи n центров при $n > 2$. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984, № 3, с. 65–68.
- [14] *Болсинов А.В.* Вполне интегрируемые системы на сжатиях алгебр Ли // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ. 1985. Вып. 22. С. 8–16.
- [15] *Болсинов А.В.* О полноте семейств функций в инволюции, связанных с согласованными скобками Пуассона // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М. Изд-во МГУ, 1988, вып. 23. С. 18–38.
- [16] *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Ижевск: РХД, 1999, 464 стр.
- [17] *Борисов А. В., Мамаев И.* Обобщенная задача двух и четырех центров в пространствах постоянной кривизны. В сб. "Классическая динамика в неевклидовых пространствах". Изд-во Института компьютерных исследований. Ижевск. 2004. С. 183 – 193.
- [18] *Браилов А.В.* Полная интегрируемость некоторых геодезических потоков и интегрируемые системы с некоммутирующими интегралами // ДАН, 1983, т. 271, N 2, с. 273–276.
- [19] *Брычков Ю.А., Маричев О.И., Прудников А.П.* Таблицы неопределенных интегралов // М.: Наука. 1986. 192 с.
- [20] *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1988. 342 с.
- [21] *Винберг Э.Б.* Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия // УМН. 2001. Т. 56. N 1. С. 3–62.
- [22] *Винберг Э.Б., Горбачевич В.В., Онищик А.Л.* Строение групп и алгебр Ли. // Соврем. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 41 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР) М.: 1990. С. 5–258.
- [23] *Винберг Э.Б., Онищик А.Л.* Основы теории групп Ли. // Соврем. пробл. матем. Фундам. напр. Т.20 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР) М.: 1988. С. 5–101.
- [24] *Винберг Э.Б., Онищик А.Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам// М.: Наука. 1988. 344 с.
- [25] *Винберг Э.Б., Попов В.Л.* II. Теория инвариантов // Современ. пробл. матем. Фундам. направления. 1989. 55. С. 137 – 314.
- [26] *Виро О.Я., Фукс Д.В.* Введение в теорию гомотопий. Соврем. пробл. матем. Фундам. напр. Т.24 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР) М.: 1988. С. 5–121.

- [27] *Гарди Г.* Интегрирование элементарных функций. 1935, 81 с.
- [28] *Гельфанд И.М., Кириллов А.А.* Структура тела Ли, связанного с полупростой расщепимой алгеброй Ли // Функц. анализ и его прилож. 1969. Т.3, вып. 1. С. 7–26.
- [29] *Голубев В.В.* Работы П.Л.Чебышева по интегрированию алгебраических функций // Научное наследие П.Л.Чебышева. М.; Л.: Изд-во АН СССР. 1945. Вып.1. С. 88-121.
- [30] *Горбачевич В.В. Онищик А.Л.* Группы Ли преобразований. // Современ. пробл. матем. Фундам. направл. Т.20. (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР) М., 1988, 103–204.
- [31] *Горячев Д.Н.* О движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$ // Матем. сб. 1900б т. 21, N 3, с. 431–438.
- [32] *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. Т. 1. М. Мир, 1982, 496 с.
- [33] *Демин В.Г., Косенко И.И., Красильников П.С., Фурта С.Д.* Избранные задачи небесной механики. РХД, Ижевск, 1999, 211 стр.
- [34] *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. М. Мир. 1964. 355 с.
- [35] *Диксмье Ж.* Универсальные обертывающие алгебры. М.: Мир. 1978. 407 с.
- [36] *Дирак Л.М.* Обобщенная гамильтонова динамика // Вариационные принципы механики. – М.: Физматгиз. 1959.
- [37] *Дубровин Б.А.* Тэта-функции и нелинейные уравнения // Успехи матем. наук. 1981. Т. 36. С.11-80.
- [38] *Зиглин С.Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике. I,II // Функц. анализ и его прилож. 1982. Т.16. N 3. С.30-41; 1983. Т. 17. N 1. С. 8-23.
- [39] *Киллинг В.* Механика в неевклидовых пространствах. В сб. "Классическая динамика в неевклидовых пространствах". Изд-во Института компьютерных исследований. Ижевск. 2004. С. 1 – 40. Пер. с нем. Killing W. Die Mechanik in den Nicht-Euklidischen Raumformen. J. Reine Angew. Math, 1885, Vol. 98, p. 1–48.
- [40] *Кириллов А.А.* Элементы теории представлений. М.: Наука, 1984. 336 с.
- [41] *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. М.: Физматгиз. 1978. 792 с.

- [42] *Козлов В.В.* Две интегрируемые задачи классической динамики // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика. 1981. Вып. 4. С.80–83.
- [43] *Козлов В.В.* Интегрируемые случаи задачи о движении точки по трехмерной сфере в силовом поле с потенциалом четвертой степени // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Матем. Механ., 1985. N 3. С.93-95.
- [44] *Козлов В.В.* К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Известия АН СССР, МТТ, 1985. N 6. С. 28–33.
- [45] *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М. Изд-во МГУ, 1980, 232 с.
- [46] *Козлов В.В.* Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде // ПММ, 1995. Т. 59. В. 1. С.3-9.
- [47] *Козлов В.В.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Short communications ICM. Sect. 13. Warszawa. 1982. P.41.
- [48] *Козлов В.В.* Несуществование однозначных интегралов и ветвление решений в динамике твердого тела // ПММ. 1978. Т.42. N 3. С. 400-406.
- [49] *Козлов В.В.* О динамике в пространствах постоянной кривизны // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1994. N 2. С. 28–35.
- [50] *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск. 1995. 432 с.
- [51] *Козлов В.В., Онищенко Д.А.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Докл. АН СССР. 1982. Т.266. N 6. С. 1298-1300.
- [52] *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Неинтегрируемость общей задачи о вращении динамически симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. II // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1986. Вып.1. С.39-44.
- [53] *Козлов В.В., Федоров Ю.Н.* Интегрируемые системы на сфере с потенциалами упругого взаимодействия // Матем. заметки, 1994. Т. 56. В. 3. С. 74-79.
- [54] *Козлов И.С.* Задача четырех неподвижных центров и ее приложения к теории движения небесных тел. Астрон. ж. 1974, т. 51, вып. 1, с. 191–198.
- [55] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1981. 542 с.

- [56] Колокольцов В.Н. Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом // Известия АН СССР, сер. матем., 1982. Т. 46. N 5. С. 994-1010.
- [57] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. М.: Наука. Т.2. 1988. 512 с. Т.8. 1992. 664 с.
- [58] Ленг С. Алгебра. М. Мир. 1968. 564 с.
- [59] Ляпунов А.М. Новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР. 1954. Т.1. С.320-324.
- [60] Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях. М. Мир. 1988. 446 с.
Mamford D. Tata lectures on theta I, II, III. Progress in mathematics. V. 28, 43, 97. Birkhäuser. Boston, Basel, Stuttgart 1983, 1984, 235 p., 272 p., 230 p.
- [61] Манаков С.В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела // Функц. анализ и его прилож. 1976. Т. 10, вып. 4. С. 93-94.
Manakov S.V. Note on the rotation of the n -dimensional rigid body // Funct. Anal. Appl. 1985. V.16. 71- 73 p.
- [62] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М. Изд-во МГУ, 1981, вып. 20. С. 5-54.
- [63] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Об интегрировании уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли // ДАН СССР, 1976, Т. 231, N 3. С. 536-538.
- [64] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем // Функц. анализ и его прилож. 1978. Т. 12, вып. 2. С. 46-56.
- [65] Мозер Ю. Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем // УМН 1981. Т. 36. В. 5. С. 109-151. Moser J. // Gukenheimer J., Moser J., Sheldon E. Newhouse 'Dynamical systems'. -С.И.М.Е. Lectures, Bressanone, Itali, 1978, Progress in Mathematics: 8.=
- [66] Новиков С.П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи матем. наук, 1982, 37, N 5, 3-49.
- [67] Новиков С.П., Шмельцер И. Периодические решения уравнений Кирхгофа для свободного движения твердого тела в жидкости и расширенная теория Люстерника-Шнирельмана-Морса (ЛШМ).I // Функц. анализ и его прилож. 1981. Т. 15. N 3. С. 54-66.

- [68] *Ольшанецкий М.А., Переломов А.М., Рейман А.Г., Семенов-Тянь-Шанский М.А.* Интегрируемые системы. II. // *Соврем. пробл. матем. Фундам. напр.* Т.16. (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР) М.: 1987. С. 86–226.
- [69] *Переломов А.М.* Представление Лакса для систем типа С.Ковалевской // *Функцион. анализ и его прил.* 1982. Т. 16, N 2. С. 80–81.
- [70] *Переломов А.М.* // *Функцион. анализ и его прил.* 1981. Т. 15, N 2. С. 83–85.
- [71] *Переломов А.М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М., Наука. 1990. 238 с.
- [72] *Постников М.М.* Группы и алгебры Ли. М., Наука, 1982. 448 с.
- [73] *Пуанкаре А.* Избр. труды. Т.1–2.: Наука, 1971, 771 с., 1972, 9–356.
- [74] *Рубановский В.Н.* О квадратичных интегралах уравнений движения твердого тела в жидкости // *ПММ.* Т.52. 1988. Вып. 3. С. 402–414.
- [75] *Румянцев В.В.* Об уравнениях Пуанкаре – Четаева. Прикл. матем. и мех., т. 58, 1994, N 3, с. 3–15.
- [76] *Садэтов С.Т.* Условия интегрируемости уравнений Кирхгофа // *Вестник МГУ. Сер. Мат. Мех.* 1990. № 3. С. 56–62.
- [77] *Садэтов С.Т.* Необходимые условия существования дополнительного мероморфного интеграла уравнений Кирхгофа на четырехмерных инвариантных поверхностях // В сб. Математические методы в механике. М.:Изд-во Моск. ун-та. 1990. С. 75–81.
- [78] *Садэтов С.Т.* О резонансах на показатели Ковалевской // *Матем. заметки*, 1993, Т. 54, С. 152–153.
- [79] *Садэтов С.Т.* Резонансы на показатели Ковалевской и их память о некоторых тензорных законах сохранения // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1.* 1994. № 1. С. 82–87.
- [80] *Садэтов С.Т.* Алгебраические интегралы и адиабатические инварианты уравнений Кирхгофа // *ДАН РАН* 342, 1995, N 2, 172–174.
- [81] *Садэтов С.Т.* Интегрируемые случаи движения твердого тела со связью // *ДАН РАН* 348, 1996, № 6, 733–735.
- [82] *Садэтов С.Т.* О четвертом алгебраическом интеграле уравнений Кирхгофа // *ПММ*, т. 64, 2000, 2, 237–251.

- [83] *Садэтов С.Т.* Расширение общих интегрируемых случаев уравнений Эйлера-Пуассона с постоянной в сопутствующих осях силой тяги // Доклады РАН, 2002. Т. 386, № 4. С. 461–463.
- [84] *Садэтов С.Т.* Интегрируемость уравновешенных центрированных равночастотных упругих вибраций при свободном вращении // ДАН РАН 389, 2003, № 4, 474–477.
- [85] *Садэтов С.Т.* Доказательство гипотезы Мищенко – Фоменко (1981) // ДАН РАН 397, 2004, № 6. С. 1–4.
- [86] *Садэтов С.Т.* Интегрируемый гравитационный потенциал в пространстве постоянной кривизны. В сб. "Классическая динамика в неевклидовых пространствах". Изд-во Института компьютерных исследований. Ижевск. 2004. С. 195 – 200.
- [87] *Садэтов С.Т.* Симплектическая структура на орбитах коприсоединенного представления – дифференциал рациональной 1-формы // УМН, 2005. Т. 60, вып. 4. С. 179-180.
- [88] *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.
- [89] *Стеклов В.А.* О движении твердого тела в жидкости. Харьков: Тип. Дарре, 1893. 234 с.
- [90] *Трофимов В.В.* Уравнения Эйлера на борелевских подалгебрах полупростых алгебр Ли // Изв. АН СССР, 1979, т. 43, N 3, С. 714–732.
- [91] *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995. 448 с.
- [92] *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Динамические системы на орбитах линейных представлений групп Ли и полная интегрируемость некоторых гидродинамических систем // Функциональный анализ и его приложения. 1983, т. 17, вып. 1. С. 31–39.
- [93] *Уинтнер А.* Аналитические основы небесной механики. М.: Физматгиз. 1967.
Wintner A. The analitical foundation of celesyial mechanics, Princeton Univ. Press, 1941.
- [94] *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.-Л.: Гостехиздат, 1937, 500 с.
Whittaker E.T., A treatise on the analytical dynamics. Ed. 3-d. Cambridge: Univ. Press, 1927, 456 p.
- [95] *Фоменко А.Т.* Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы // М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. 216 с.

- [96] *Фоменко А.Т., Фукс Д.Б.* Курс гомотопической топологии. М.: Наука. 1989. – 528 с.
- [97] *Фукс Д.Б.* Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. М.: Наука, 1984. 272 с.
- [98] *Цыгвинцев А.В.* La non-integrabilite meromorphe du probleme plan des trois corps, Comptes Rendus des Seances de l'Academie des Sciences Paris, 2000, t.331, Serie I, p. 241 – 244.
- [99] *Чаплыгин С.А.* Избранные труды. М.: Наука. 1976. 495 с.
- [100] *Чебышев П.Л.* Об интегрировании иррациональных дифференциалов // *Чебышев П.Л.* Полн. собр. соч. Т.2. 1947. С. 52-70.
- [101] *Четаев Н.Г.* Об уравнениях Пуанкаре. Прикл. матем. и мех., т.5, 1941, N 2, с. 253-262.
- [102] *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. В 2-х т. М.: Наука. 1985. Т.1. С.336. Т.2. С.464.
- [103] *Шарлье К.* Небесная механика. М.: Наука. 1966.
Charlier C.L. Die Mechanik des Himmels. Wwalter de Gruyter. Berlin, Leipzig. 1927.
- [104] *Шафаревич И.Р.* Основные понятия алгебры. Соврем. пробл. матем. Фундам. напр. Т.11 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР) М.: 1986. С. 5–289.
- [105] *Шафаревич И.Р.* Основы алгебраической геометрии: В 2-х т. Т.1, Т.2. М.: Наука. 1988, 352 с, 304 с.
- [106] *Якоби К.* Лекции по динамике. М.-Л.: ОНТИ, 1936.
Jacobi C.G.J. Vorlesungen über Dynamik. G.Reimer Verlag. 1884.
- [107] *Яхья Х.М.* Новые решения задачи о движении гиростата в потенциальном и магнитном полях // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика. 1985. С.60-63.
- [108] *Abel N.* Oeuvres completes. V. 2. Cristiania, Gröndahe, 1881. 338 p.
- [109] *Alev J., Ooms A. Van den Bergh M.* A class of counterexamples to the Gel'fand-Kirillov conjecture// Trans. Amer. Math. Soc., V. 348, N 5, (1996) P. 1709–1716.
- [110] *Alev J., Ooms A. Van den Bergh M.* The Gel'fand- Kirillov conjecture for Lie algebras of dimension at most eight// J. Algebra, V. 227, (2000) P. 549–581.

- [111] *Bolsinov A.V., Borisov A.V., Mamaev I.S.* Lie algebras in vortex dynamics and celestial mechanics – IV. Regular and Chaotic Mechanics, v.4, 1999, N.1, 23–51.
- [112] *Bolsinov A.V., Taimanov I.A.* Integrable geodesic flows with positive topological entropy, math.DG/9905078
- [113] *Borho W., Gabriel P., Rentschler R.* Primideale in Einhüllenden auflösbarer Lie Algebren, Lecture Notes in Math., vol. 357, Springer, 1973.
- [114] *Braden H.W.* // Lett. Math. Phys. 1982. Vol.6, P.449.
- [115] *Brun F.* Rotation kring fix punkt // Öfversigt at Kongl. Svenska Veteskaps Akad. Förhadl. Stokholm, 1983, v.7, p. 455–468.
- [116] *Bruns H.* Über die Integrale des Vielkörper-Problems. 'Acta math.', 1888, v. 11, S. 25–96.
- [117] *Chenciner A., Montgomery R.* A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses// Annals of Mathematics, 152 (2000), 881-901.
- [118] *Choodnovsky D.V., Choodnovsky G.V.*//Lett. Nuovo Cimento, 1978. Vol. 22. P. 31.
- [119] *Clebsch A.* Ueber die Bewegung eines Koerpers in eines Flussigkeit // Mat. Ann. 1870. B. 3. S. 238–262.
- [120] *Darboux G.* Sur un probleme de mecanique. Archives Neerlandaises de Sciences. 1901. Ser. 2, Vol. VI, p. 371–376.
- [121] *Euler L.* Decouverte d'une nouveau principe de Mecanique // Memoires de l'Acad. des Sc. de Berlin, 1758, v. 14, p. 154-193.
- [122] *Gelfand I.M. and Kirillov A.A.* Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie// IHES, Publications Mathematiques, 31, 1967, pp. 5–19.
- [123] *Gordon W.B.* A minimizing property of Keplerian orbits// Amer. J. Math. 99 (1970), 961-971.
- [124] *Joseph A.* A generalization of Gelfand–Kirilov conjecture. // American Journal of mathematics, V. 99. No. 6, (1977) P. 1151–1165.
- [125] *Joseph A.* Proof of the Gelfand-Kirillov conjecture for solvable Lie algebras // Proc. Amer. Math. Soc., V. 45, N 1, July, (1974) P. 1-10.
- [126] *Hill G.W.* Researches in the Lunar Theory. // American Journal of Mathematics, 1878, V.1, N.1-2, P. 5-26, 129-147, 245-260.

- [127] *Husson E.* Recherche des integrales algebratique dans les mouvement d'un solide pesant autor d'un point fixe // Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse. Sci. math. et sci. phys. V. 8, 1906, 73-152.
- [128] *Kalnins E.G., Miller W.Jr.* Separation of variables on n -dimensional Riemannian manifolds. I. The n -sphere S_n and Eucledian n -space $\mathbb{R}_n$ // J.Math.Phys. 1986. V. 27(7), P. 1721-1736.
- [129] *Kirchhoff G.R.* Über die Bewegung eines Rotationskörpers in eines Flussigkeit// J. Reine und angew. Math. 1870, B.71. S.237-262.
- [130] *Kowalevski S.V.* Sur la probleme de la rotation d'un corps solide autor d'un point fixe // Acta Math., 1889, v. 12, p. 177-232.
- [131] *Kozlov V.V., Harin A.O.* Kepler's problem in constant curvature spaces // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 54, 1992, p. 393-399.
- [132] *Lagrange J.* Mecanique analytique. Paris, 1788.
- [133] *J. Llibre, C. Simó.* Homoclinic phenomena in the three-body problem. *J. Diff. Eq.*, 37: 444-465, 1980.
- [134] *J. Llibre, C. Simó.* Oscillatory solutions in the planar restricted three-body problem. *Math. Ann.*, 248: 153-184, 1980.
- [135] *J. Llibre, R. Martínez, C. Simó.* Transversality of the invariant manifolds associated to the Lyapunov family of periodic orbits near L_2 in the Restricted Three Body Problem. *J. Diff. Eq.*, 58: 104-156, 1985.
- [136] *Liouville J.* Memoire sur l'integration d'une classe de fonctions transcendentes, Journal für Mathematik, Bd. 13, 1835, p. 93-118
- [137] *Liouville R.* Sur le mouvement d'un corps solide pesant suspendu par l'un de ses points. Acta math. XX, 1896. C. 239-284.
- [138] *Malcolmson P.* Enveloping algebras of simple three-dimensional Lie algebras // J.Algebra 146 (1992), 210-218.
- [139] *Marsden J.E., Ratiu T.S.* Introduction to mechanics and symmetry. Springer, 1999, 582 p.
- [140] *J.J.Morales-Ruiz, C.Simo, S.Simon* Algebraic proof of the non-integrability of Hills problem. In Internet: www.maia.ub.es/dsg/2004/
- [141] *Moser J.* Geometry of Quadrics and Spectral Theory // The Chern Symposium 1979. Berkeley, June.

- [142] *McConnell J.C.* Representations of solvable Lie algebras and the Gelfand-Kirillov conjecture // *Proceedings of London Math. Soc.*, V. 29, N 3, (1974) P. 453-484.
- [143] *Neumann J.* De problemate quado mechanico, quad ad priman integralium ultraellipticorum classem revocatur // *J. Reine Angew. Math.*, 1859. V.56. P.46-63.
- [144] *Nghiem-Huan Hai* Reduction de produits semi-directs et conjecture de Gelfand et Kirillov // *Bull. Soc. math. France*, V. 107, (1979) P. 241-267.
- [145] *Painleve P.M.* *Bull. Astr.*, 1898, V.15, p.81.
- [146] *Painleve P.* Sur les integrales, uniformes du probleme des n corps // *Compt. Rendus*, 1900, V.130, p. 1699-1701.
- [147] *Poincare H.* non-existence des integraes niformes // In work: *Poincare H. Sur le Probleme des Trois Corps et le Equations de la Dynamique Acta Math.* 1890, V.13. P. 259-265.
- [148] *Poincare H.* Sur le methode de Bruns // *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1896, V. 123, p. 1224-1228.
- [149] *Radau R.* *Ann. de l'ecole Norm. Sup.* 5, 1868, P. 311.
- [150] *Rais M.* L'indice des produits semi-directs $E \times G$. // *C. r. Acad. Sci. Paris*. 1978. V. 287, № 4. P. 195-197.
- [151] *Rosochatius E.* Ueber die Bewegung eines Punktes. Inaugural Dissertation, Univ., Gottingen. Gebr. Unger, Berlin. 1877.
- [152] *Sadetov S.T.* On algebraic integrals of the motion of a point over a quadric in quadratic potential // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2000, V. 5, N 2. P . 201-212.
- [153] *Sadetov S.T.* On the reduction of n-dimensional problem of N+1 bodiesto Euler – Poincare equations on Lie algebra $sp(2N)$ // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2002, v.7, N 3, 337-350.
- [154] *Sadetov S.T.* On algebraic integrals of Hill problem and restricted circular planar three-body problem on a level of energy // *Regular and Chaotic Dynamics*, 2005, v.10, N 3. P.323-332.
- [155] *Siegel C.L.* Über die algebraischen Integrale des restringierten Dreikörperproblems // *Trans. Am. Math. Soc.* 1936, v. 39, p. 225-233.
- [156] *Siegel C.L., Moser J.K.* *Lectures on celestial mechanics*, Springer-Verlag, 1971.

- [157] *Slawianowski I.I.*// Bul.Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math., Astron., Phys. 1980, vol. 28, no. 2, pp. 83-94.
- [158] *Smale S.* Topology ang Mechanics; I//Invent. Math. 10:4, 1970, 305-331.
- [159] *Smale S.* The Planar n-body Problem I//Invent. Math. 11:1, 1970, 45-64.
- [160] *Uhlenbeck K.* Minimal 2-spheres and tori in S^k , informal preprint. 1975.
- [161] *Veselov A.P.* Two remarks about the connection of Jacobi and Neumann integrable systems// J. Mathem. Zeitschrift., 1994. V. 216. P.337-345.
- [162] *Weierstrass K.* Uber die geodätischen Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid // In: Mathematischen Werke I, 257–266.
- [163] *Wojciechowcki S.* Integrable one-particle potentials to the Neumann system and the Jacobi problem of geodesic motion on an ellipsoid. //Phys. Lett. A, 1985. V.107, no.3. P.106–111.
- [164] *Wojciechowski S.* On a Lax-type representation and separability of the anisotropic harmonic oscillator in a radial quartic potential// Lett. Nuovo Cimento (2). 1984. V. 41, no. 11. P. 361–369.