



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

ПУСТОВОЙТОВ СЕРГЕЙ ЕВГЕНЬЕВИЧ

ТОПОЛОГИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ СЛОЕНИЙ ЛИУВИЛЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ
ВОЗМУЩЕНИЙ КЛАССИЧЕСКИХ И ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВИЛЛИАРДОВ

Специальность 1.1.3. Геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

доктор физико-математических наук, профессор,
академик РАН

Фоменко Анатолий Тимофеевич,
доктор физико-математических наук
Ведюшкина Виктория Викторовна

Москва–2025 г.

Оглавление

Введение	5
1 Основные определения	30
1.1 Элементы теории Морса	30
1.2 Интегрируемые гамильтоновы системы	32
1.2.1 Понятие интегрируемой системы	32
1.2.2 Слоение Лиувилля. Теорема Лиувилля	33
1.3 Инварианты слоения Лиувилля интегрируемых систем	33
1.3.1 Лиувиллево эквивалентные системы	33
1.3.2 Понятие 3-атома	34
1.3.3 Инвариант Фоменко–Цишанга. Критерий Лиувиллевой эквивалентности	35
1.4 Невырожденные особенности ранга 0 интегрируемых систем. Полулокальная структура	38
1.4.1 Понятие невырожденной особенности ранга 0	38
1.4.2 Локальная структура слоения	40
1.4.3 Полулокальная структура слоения. Особенности типа центр-центр и центр-седло	41
1.4.4 Особенности типа седло-седло	42
1.4.5 Особенности типа фокус-фокус	43
1.5 Вырожденные одномерные орбиты интегрируемых систем. Локальная структура слоения Лиувилля	44
1.5.1 Понятие вырожденной одномерной орбиты. Топологическая устойчивость	44
1.5.2 Типичные примеры вырожденных одномерных орбит	45
1.6 Классические интегрируемые билиарды и их обобщения	47
1.6.1 Классическое понятие математического билиарда	47
1.6.2 Интегрируемость математического билиарда	47
1.6.3 Билиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик	49
1.6.4 Билиарды на двумерных клеточных комплексах	50

2	Биллиарды с упругим потенциалом в областях, ограниченных софокусными квадриками	53
2.1	Постановка задачи и интегрируемость	53
2.2	Метод областей возможного движения. Переменные разделения	56
2.2.1	Общая формализация метода	56
2.2.2	Переменные разделения бильярда	57
2.3	Локальная структура слоения Лиувилля неособого уровня энергии	59
2.3.1	Явный вид областей возможного движения и их прообраз	59
2.3.2	Критические области возможного движения и 3-атомы	62
2.4	Инвариант Фоменко–Цишанга элементарного бильярда с потенциалом Гука при неособом уровне энергии	74
2.4.1	Бифуркационные диаграммы	74
2.4.2	Грубая молекула	78
2.4.3	Инвариант Фоменко–Цишанга	79
2.4.4	интегрируемые системы динамики твердого тела и бильярды с потенциалом	90
2.5	Бильярды, граница которых содержит дуги вырожденных квадрик	91
3	Интегрируемый эллиптический бильярд, снабженный полиномиальным потенциалом	96
3.1	Обобщение интегрируемого бильярда с потенциалом Гука	96
3.1.1	Полиномиальный потенциал в эллиптическом бильярде	97
3.1.2	Первые интегралы эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом	100
3.1.3	Разделение переменных бильярда с полиномиальным потенциалом. Области возможного движения	102
3.2	Критические значения первых интегралов. Бифуркационные диаграммы	104
3.2.1	Бифуркационные диаграммы бильярда с потенциалом четвертой степени	107
3.3	Бифуркации областей возможного движения и 3-атомы	113
3.4	Грубые молекулы и метки	122
3.5	Изоэнергетическое многообразие Q^3	126
4	Четырехмерные полулокальные особенности бильярдов с потенциалом	132
4.1	Полулокальные особенности эллиптического бильярда с потенциалом четвертой степени	132
4.1.1	Структура слоения Лиувилля невырожденных особенностей ранга 0	133
4.1.2	Структура слоения Лиувилля вырожденных особенностей ранга 1	154
4.2	Реализация фокальных особенностей бильярдными книжками, снабженными потенциалом Гука	167

4.2.1	Биллиард с потенциалом Гука в круге	167
4.2.2	Вычисление монодромии особенности биллиарда в круге \mathbf{D} и на книжке $\mathcal{B}_n = n\mathbf{D}$	170
5	Интегрируемые магнитные биллиарды	173
5.1	Постановка задачи. Траектории	173
5.2	Области возможного движения. Бифуркационные диаграммы	175
5.3	Инварианты Фоменко–Цишанга. Изоэнергетические многообразия	182
5.4	Изоинтегральное многообразие Q_R^3	183
5.5	Топологические магнитные биллиарды	186
5.6	Топологический магнитный биллиард лиувиллево эквивалентен геодезическому потоку на поверхностях вращения в потенциальном поле	198
	Заключение	201
	Литература	203
	Список литературы	203
	Список публикаций автора по теме диссертации	206

Введение

Актуальность темы

Диссертация относится к области дифференциальной геометрии и топологии. Исследование диссертационной работы лежит на стыке теории слоений интегрируемых систем и математических билиардов. Автором решается задача об описании структуры слоения Лиувилля неособых трехмерных изоэнергетических многообразий и четырехмерных полулокальных особенностей классических интегрируемых билиардов, снабженных действием потенциала или магнитного поля. Более точно, исследование посвящено пяти сюжетам: 1. топология слоения Лиувилля плоских билиардов, ограниченных дугами софокусных квадрик и снабженных упругим потенциалом Гука; 2. топология слоения эллиптического билиарда, снабженного полиномиальным потенциалом; 3. слоение четырехмерных окрестностей слоев, содержащих невырожденную точку ранга 0 или вырожденную орбиту, для эллиптического билиарда с потенциалом малой степени; 4. реализация произвольной полулокальной особенности типа фокус-фокус с помощью билиардных книжек, снабженных потенциалом Гука; 5. топология слоения Лиувилля магнитных топологических билиардов. Результаты, полученные в работе, описаны в терминах атомов и инвариантов Фоменко–Цишанга (см. [1]) и опираются на методы изучения слоений вполне интегрируемых систем.

Под понятием математического билиарда стоит обширный класс динамических систем. Классическое определение гласит, что математический билиард есть динамическая система, описывающая движение материальной точки по инерции в плоской области, ограниченной некоторым контуром, с абсолютно упругим отражением от границы. Одним из примеров служит билиард в прямоугольнике, хорошо известный по одноименной игре. Другим примером служит классический билиард, ограниченный эллипсом, который известен со времен Биркгофа [2]. Такой билиард может быть рассмотрен как предельный переход задачи Якоби о геодезических на трехосном эллипсоиде при устремлении одной из полуосей к нулю. Таким образом, в частности, была показана интегрируемость билиарда Биркгофа. В явном виде его гамильтониан и дополнительный первый интеграл были предложены, например, В. В. Козловым и Д. В. Трещевым в [3]. Также отметим, что интегрируемость непосредственно связана с теоремой Якоби-Шаля о системе касательных квадрик для геодезического потока на n -мерном эллипсоиде. Исходя

из своих наблюдений, Биркгоф выдвинул гипотезу, согласно которой бильярды, ограниченные гладким выпуклым контуром, являются интегрируемыми только в случае эллипса. В своей исходной формулировке вопрос остается открыт, однако были достигнуты значительные продвижения. Так, в случае, когда первые интегралы имеют форму многочленов, гипотеза была доказана А. А. Глуцкоком в [7]. В. Калошин и А. Соррентино в [8] показали, что малые интегрируемые возмущения граничного эллипса также должны быть эллипсами (т.е. доказана локальная гипотеза). Бильярд Биркгофа был изучен с самых разных точек зрения. Его динамика была описана в [3], где были изучены регулярные траектории, а также показана устойчивость критических движений. С точностью до лиувиллевой эквивалентности такой бильярд был изучен В. И. Драговичем и М. Раднович в [9], где был построен инвариант Фоменко–Цишанга этой эквивалентности. В [10] В. В. Ведюшкиной этот результат был продолжен до произвольного бильярда, который ограничен кусочно-гладким контуром, образованным дугами софокусных эллипсов и гипербол и содержащий только углы излома $\frac{\pi}{2}$. Напомним, что две интегрируемые системы, ограниченные на трехмерные неособые уровни гамильтонианов, называются лиувиллево эквивалентными, если существует диффеоморфизм этих уровней, сохраняющий структуру их слоений Лиувилля. Причем в регулярном случае почти все слои, являющиеся торами, нерезонансны, то есть любая траектория, лежащая на этом торе, есть его иррациональная обмотка. Лиувиллева эквивалентность есть эквивалентность замыканий почти всех решений уравнений Гамильтона, и, тем самым, слабее траекторной эквивалентности. Исследование диссертации лежит в области описания слоений Лиувилля бильярдов, и поэтому, в частности, идейно продолжает работы [9, 10].

С развитием теории математических бильярдов появилось множество новых конструкций и задач, расширяющих классическое понятие. Отметим конструкцию проективных бильярдов, введенную С. Л. Табачниковым в [11], конструкцию бильярдов с проскальзыванием, введенную А. Т. Фоменко в [12] и рассмотренную В. В. Ведюшкиной и В. Н. Завьяловым в [13], бильярды в пространстве Минковского, изученные Е. Каргиновой в [14] с точки зрения лиувиллевой эквивалентности, и работу Г. В. Белозерова [15] по изучению трехмерных бильярдов. Особое внимание заслуживает конструкция бильярдной книжки, введенная В. В. Ведюшкиной в [16]. Бильярдная книжка представляет собой обобщение классического понятия бильярда на движение по конечному клеточному комплексу. Материальная точка, двигаясь в двумерной клетке и попадая на ее границу, отражается и переходит на соседнюю клетку по заданному правилу. В частном случае, когда бильярдный комплекс является топологическим многообразием, эта конструкция называется топологическим бильярдом (впервые введена В. В. Ведюшкиной (Фокичевой) в [10]. В [19] было показано, что такие конструкции позволяют реализовать произвольную базу слоений Лиувилля, тем самым значительно расширяя класс интегрируемых бильярдов с точки зрения лиувиллевой эквивалентности. Тем не менее, у бильярдных книжек все еще есть ограничения к реализации произвольного инварианта Фоменко–Цишанга. Для пре-

одоления этих ограничений сделаем шаг назад и рассмотрим классические бильярды, добавив к ним интегрируемые возмущения. А именно, действие потенциала или магнитного поля.

Автором диссертации решается задача об описании структуры слоения Лиувилля интегрируемых возмущений классических бильярдных систем. Задача условно разделена на две части: описание слоения Лиувилля интегрируемых бильярдных систем, снабженных потенциалом, и бильярдных систем в магнитном поле. Первая часть диссертации посвящена потенциалу. С изучением классических систем возникает естественный вопрос: сохраняет ли добавление произвольного потенциала интегрируемость, например, классического бильярда Биркгофа. В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный. Так, в [21] было показано, что эллиптический бильярд, снабженный линейным потенциалом, имеет хаотическую динамику на некоторых уровнях полной энергии, то есть не является интегрируемым. Тем не менее, В. В. Козлов в [22] выявил критерий, согласно которому эллиптический бильярд имеет дополнительный первый интеграл определенного вида, если и только если потенциал удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных. Поиск решений этого уравнения занимался В. И. Драгович. Так, в [24] он описал решение в классе полиномов Лорана, а в [23] – в классе функций Аппеля. В частности, можно показать, что классический упругий потенциал Гука также является решением уравнения Козлова, то есть является интегрируемым. С точки зрения лиувиллевой эквивалентности бильярд Биркгофа, снабженный таким потенциалом, был изучен И. Ф. Кобцевым в [25]. В диссертации автором этот результат был продолжен в двух направлениях: 1. была изучена топология слоения Лиувилля всех плоских эллиптико-гиперболических бильярдных систем, снабженных потенциалом Гука, на неособых уровнях энергии, и 2. изучена топология слоения эллиптического бильярда, снабженного произвольным полиномиальным интегрируемым потенциалом. Отметим, что все подобные бильярды принадлежат классу алгебраически разрешимых систем, изученных М. П. Харламовым в [26]. Следовательно, можно применять уже разработанные методы исследований.

Кроме того, интересен вопрос устройства слоения Лиувилля полулокальных особенностей бильярдных систем. Отметим работы [27] и [28], в которых В. А. Кибкало и А. Т. Фоменко реализуют произвольную седловую особенность с помощью бильярдных книжек, снабженных потенциалом Гука. В диссертации автором этот результат дополнен реализацией произвольной фокусной особенности также бильярдными книжками с потенциалом Гука. Помимо этого, для эллиптических бильярдных систем с потенциалом малой степени была описана топология слоения Лиувилля полулокальных особенностей, соответствующих точкам седло-седло или содержащих вырожденную орбиту.

Вторая часть диссертации посвящена интегрируемым бильярдам в постоянном магнитном поле. Здесь также возникает аналогичный вопрос о сохранении интегрируемости классических бильярдных систем. М. Робником и М. Берри в [29] было показано, что эллиптический бильярд с разными полуосями, помещенный в постоянное магнитное поле, допускает хаотическую динамику при больших значениях энергии, то есть не является интегрируемым. В то же время известно,

что магнитный бильярд, ограниченный окружностью, уже является интегрируемым в силу симметрии относительно поворотов. Полный ответ на вопрос об интегрируемости магнитных бильярдов был дан А. Е. Мироновым и М. Бялым в [30]. Оказалось, что в случае выпуклой кусочно-гладкой границы интегрируемость достигается лишь для кругового бильярда. Таким образом, интегрируемыми оказываются лишь магнитные бильярды, ограниченные окружностью либо парой концентрических окружностей, и их траектории можно описать с помощью методов элементарной геометрии. Тем не менее, расширим класс магнитных бильярдов, склеив из круговых и кольцевых столов топологический бильярд, т.е. бильярдную книжку, гооморфную ориентируемому двумерному многообразию. Сложность таких систем достигается за счет формы бильярда, а не из физики движения. В диссертации автором алгоритмически изучены такие бильярды с точностью до лиувиллевой эквивалентности.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются плоские интегрируемые математические бильярды в потенциальном или магнитном поле, которые в рамках диссертации рассматриваются как вполне интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Предметом исследования является структура слоения Лиувилля таких бильярдов, а также способы ее описания: инварианты Фоменко–Цишанга, бифуркационные диаграммы, а также разнообразные методы описания четырехмерных особенностей.

Цели и задачи диссертации

Диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Описать структуру слоения Лиувилля плоских математических бильярдов, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол и снабженных упругим потенциалом Гука. А именно, вычислить все инварианты Фоменко–Цишанга и построить бифуркационные диаграммы;
2. Определить класс полиномиальных потенциалов, сохраняющих интегрируемость классического эллиптического бильярда. Для такого бильярда вычислить инвариант Фоменко–Цишанга на произвольном неособом уровне энергии H , построить бифуркационные диаграммы и описать топологию неособого изоэнергетического многообразия Q^3 ;
3. Изучить особенности слоения Лиувилля интегрируемого эллиптического бильярда, снабженного потенциалом малой степени. А именно, описать слоение в окрестности слоев, содержащих невырожденные точки ранга 0 или вырожденные орбиты;

4. Изучить особенности ранга 0 билиардных книжек, снабженных упругим потенциалом Гука;
5. Описать слоение Лиувилля интегрируемых плоских билиардов в постоянном магнитном поле, а также слоение топологических магнитных билиардов. А именно, вычислить все инварианты Фоменко–Цишанга и построить бифуркационные диаграммы.

Положения, выносимые на защиту

Следующие результаты являются основными и выносятся на защиту.

1. Любая неособая изоэнергетическая поверхность Q^3 плоского билиарда, ограниченного дугами софокусных эллипсов и гипербол и снабженного упругим потенциалом Гука, принадлежит одному из 18 различных классов лиувиллевой эквивалентности слоений Лиувилля.
2. Уравнение Козлова, задающее интегрируемые случаи билиарда с потенциалом, решено явно в классе полиномов. Общее решение взаимно однозначно определяется многочленом с вещественными коэффициентами.
3. Инвариант Фоменко–Цишанга интегрируемого эллиптического билиарда, снабженного полиномиальным потенциалом, строится алгоритмически, исходя из параметров системы и неособого значения энергии H . Причем граф инварианта обладает восьмью свойствами, а метки вычисляются явно.
4. Для эллиптического билиарда, снабженного интегрируемым потенциалом четвертой степени, существуют 18 неэквивалентных классов бифуркационных диаграмм. Эволюция бифуркационных диаграмм при росте значения $\frac{c_2}{c_3}$ зависит от соотношений на параметры a и b граничного эллипса и описывается эволюционными графами.
5. Вычисление типов слоений Лиувилля четырехмерных полулокальных особенностей для эллиптического билиарда с потенциалом четвертой степени.
 - Невырожденные особые точки ранга 0 имеют вид центр-центр, центр-седло либо седло-седло, а слоение Лиувилля в окрестности особого слоя имеет один из восьми типов.
 - Вырожденные орбиты ранга 1 потока первых интегралов принадлежат параболическому случаю, либо эллиптическому или гиперболическому удвоению периода. Слоение Лиувилля в окрестности слоев, содержащих вырожденные орбиты, имеет один из шести выявленных типов.

6. Числовая метка монодромии особенности в прообразе точки $(0, 0)$ равна n для бильярдной системы с отталкивающим потенциалом Гука на бильярдной книжке, склеенной из n экземпляров стола D плоского бильярда внутри круга по перестановке $(1, 2, \dots, n)$ на их окружности склейки.
7. Инвариант Фоменко–Цишанга интегрируемого топологического бильярда, склеенного из плоских магнитных бильярдов, строится алгоритмически, исходя из параметров системы и неособого значения энергии H . Причем граф инварианта обладает четырьмя свойствами, а метки вычисляются явно, исходя из топологического типа бильярда.
8. Список интегрируемых систем физики и механики, лиувиллево эквивалентных бильярдам, классифицированных в диссертации, состоит из интегрируемых случаев динамики твердого тела и геодезических потоков на поверхностях вращения с потенциалом.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются оригинальными, получены автором самостоятельно или при равноценном вкладе с соавторами, и заключаются в следующем:

1. Получен список из 18 инвариантов Фоменко–Цишанга, соответствующих математическим бильярдам, ограниченным дугами софокусных эллипсов и гипербол, снабженных упругим потенциалом Гука. Вместе с этим, построены бифуркационные диаграммы таких бильярдов, а также установлены лиувиллево эквивалентные им системы динамики твердого тела.
2. В явном виде найден класс полиномиальных потенциалов, сохраняющих интегрируемость классического бильярда, ограниченного эллипсом.
3. Для интегрируемого эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом были получены неявные формулы бифуркационных кривых, а также построен алгоритм, вычисляющий инвариант Фоменко–Цишанга на произвольном неособом уровне энергии H . Кроме того, было показано, что неособое изоэнергетическое многообразие Q^3 такого бильярда гомеоморфно либо трехмерной сфере, либо связной сумме декартовых произведений окружности на двумерную сферу.
4. В случае бильярда с потенциалом, степень которого не превосходит четырех, был получен список из 18 неэквивалентных бифуркационных диаграмм, а также описана их эволюция при изменении параметров потенциала. Кроме того, для такого бильярда были изучены особенности слоения Лиувилля. Было показано, что невырожденные особые точки ранга

- 0 имеют вид центр-центр, центр-седло либо седло-седло, а слоение Лиувилля в окрестности особого слоя имеет один из восьми типов. Слоение Лиувилля в окрестности слоев, содержащих вырожденные орбиты, имеет один из шести выявленных типов.
5. Реализована произвольная фокальная особенность с помощью бильярдных книжек, склеенных из круговых бильярдных, снабженных центральным отталкивающим потенциалом Гука. Количество листов книжки при этом должно совпадать с меткой монодромии особенности.
 6. Изучено слоение Лиувилля интегрируемых плоских бильярдных в постоянном магнитном поле, а также слоение их обобщений – ориентируемых топологических магнитных бильярдных. А именно, был построен алгоритм, определяющий по форме топологического бильярда соответствующий ему инвариант Фоменко–Цишанга, и обратный алгоритм, строящий топологический бильярд по инварианту.

Методология и методы исследования

В диссертации применяются методы и результаты теории интегрируемых систем и топологических инвариантов слоений Лиувилля, разработанной А. Т. Фоменко, Х. Цишангом, А. В. Болсиновым, С. В. Матвеевым, Н. Зунгом, Л. М. Лерманом и другими. Непосредственное значение имеет метод областей возможного движения, разработанный М. П. Харламовым, а также методы работы с математическими бильярдами, разработанные В. В. Ведюшкиной.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Метод областей возможного движения, адаптированный для рассмотренных в диссертации систем, может быть использован для дальнейшего изучения топологии слоений Лиувилля бильярдных и их обобщений. Например, ведется работа по обобщению результатов, полученных автором в главах 3 и 4 диссертации, от случая потенциалов четвертой степени до случая произвольного полиномиального потенциала, а также для произвольного эллиптического-гиперболического стола. Полученные результаты уже показывают большой скачок в разнообразии особенностей слоения при переходе от упругого потенциала второй степени к четвертой, и это разнообразие будет расти квадратично.

Кроме того, рассмотренные автором модификации классических бильярдных с добавлением потенциального или магнитного поля можно комбинировать с другими уже хорошо изученными бильярдными конструкциями, такими как бильярдные книжки. Полученные комбинированные системы сильно расширят динамику, а значит и структуру слоений Лиувилля. Примером такой комбинации можно привести результат А. Т. Фоменко и В. А. Кибкало о реализации

произвольной седловой особенностью бильярдными книжками, снабженными упругим потенциалом Гука. Комбинирование бильярдных систем значительно расширяет их класс, что дает надежду на доказательство гипотезы А. Т. Фоменко о реализации любого класса лиувиллевой эквивалентности интегрируемыми бильярдами.

В дополнении упомянем недавно обнаруженную связь уравнений разделения, приведенных автором в главе 3 диссертации, с уравнением Кортевега-де Фриза и его решениями. Это позволит, с одной стороны, применять методы теории решений КдФ для бильярдных, и, с другой стороны, применять наглядность динамики бильярдных для описания решений КдФ.

Степень достоверности

Все результаты диссертации являются оригинальными, обоснованы с помощью строгих математических доказательств и опубликованы в открытой печати.

Результаты других авторов, используемые в диссертации, отмечены соответствующими ссылками.

Апробация диссертации

Результаты диссертации опубликованы в семи статьях в журналах, удовлетворяющих положению о присуждении ученых степеней МГУ, а также прошли апробацию на следующих международных и российских конференциях:

- Студенческая школа-конференция «Математическая весна» 2023, НИУ ВШЭ Нижний Новгород, Россия, 27-30 марта 2023 с докладом «Топология особенностей эллиптического бильярда в потенциальном поле»;
- Dynamics in Siberia 2023, Новосибирск, Россия, 27 февраля - 4 марта 2023 с докладом «Structure of semilocal singularities of an elliptic billiard in a polynomial potential field»;
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2023», МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 10-21 апреля 2023 с докладом «Полулокальные особенности эллиптического бильярда с потенциалом малого порядка»;
- Международная конференция «Лобачевские чтения», г. Казань, Россия, 30 июня - 4 июля 2022 с докладом «Слоение Лиувилля эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом»;
- Научная школа «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы», Воронеж, 14 - 15 ноября 2022 с докладом «Исследование особенностей слоения Лиувилля эллиптического бильярда с потенциалом малого порядка»;

-
- Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2022, Воронеж, Россия, 22 - 26 января 2022 с докладом “Интегрируемый топологический бильярд в магнитном поле”;
 - Dynamics in Siberia-2022, Новосибирск, НГУ, институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия, 28 февраля-5 марта 2022 с докладом “Topology of the Liouville foliation of an integrable magnetic billiard”;
 - V-ая Международная молодежная научная школа «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы», Воронежский государственный педагогический университет, 15-17 ноября 2021 с докладом “Монодромия особенности типа фокус-фокус бильярда в потенциальном поле”;
 - Международная конференция “Классическая и современная геометрия”, Московский педагогический государственный университет, 1-4 ноября 2021 с докладом “Реализация особенностей фокус-фокус бильярдными книжками”;
 - The third International Conference on “Integrable Systems and Nonlinear Dynamics 2021”, Ярославский государственный университет, Ярославль, 4-9 октября 2021 с докладом “Monodromy of the focus-focus point of the circular billiard in the potential field”;
 - Конференция международных математических центров мирового уровня, математический центр Sirius, Сочи, 9-13 августа 2021 с докладом “Исследование слоения Лиувилля топологических магнитных бильярдов”;
 - XXVIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов 2021”, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 12-23 апреля 2021 с докладом “Интегрируемый бильярд в эллипсе в потенциальном поле высокой степени”;
 - Student Educational School-Conference Mathematical Spring 2021 Invitation to Dynamical Systems, National Research University Higher School of Economics, Россия, 30 марта - 2 апреля 2021 с докладом “Topology of the Liouville foliation of an integrable magnetic billiard”;
 - Dynamics in Siberia-2021, Новосибирск, НГУ, институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия, 1-6 марта 2021 с докладом “Integrable magnetic billiard in circular domain”;
 - Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2020», Москва, Россия, 10-27 ноября 2020 с докладом “Топологический анализ бильярда в поле потенциала четвертой степени”;
 - Ломоносовские чтения 2020, Москва, Россия, 19-28 октября 2020 с докладом “Интегрируемый бильярд в эллипсе с полиномиальным потенциалом малого порядка”;

- Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2020, Воронеж, Россия, 27 января - 4 февраля 2020 с докладом “ Интегрируемые математические бильярды в магнитном поле. Топологический анализ”;
- Workshop on Mathematical Billiards: 2019, Сидней, Австралия, 24-27 июня 2019 с докладом “ Integrable Planar Billiards with Potential”;
- Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы., Воронежский государственный педагогический университет., Россия, 13-16 ноября 2018 с докладом “Топология слоения бильярда на столе, ограниченном квадратами, в потенциальном поле”;

Также результаты излагались на известных научных семинарах:

- “Современные геометрические методы” под руководством профессора А.С. Мищенко и академика А.Т. Фоменко в МГУ (неоднократно с 2020 по 2024 год),
- Семинар кафедры дифференциальной геометрии и приложений под руководством академика А.Т. Фоменко в МГУ (неоднократно с 2020 по 2025 год),
- Заседание Нижегородского математического общества под руководством профессора О.В. Починки, НИУ ВШЭ Нижний Новгород, 19 марта 2025

Публикации автора по теме работы

Основные результаты диссертации представлены в 7 работах в научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 1.1.3. Геометрия и топология и индексируемых в международных базах Web of Science, Scopus, RSCI и РИНЦ.

Структура и объем

Диссертация состоит из введения, пяти глав, списка литературы и заключения. Текст диссертации изложен на 207 страницах и содержит 178 иллюстраций. Список литературы содержит 43 наименования.

Содержание работы

Во **введении** излагаются цели работы, ее результаты и краткое содержание. Также приведена краткая история развития теории математических бильярдов и контекст диссертационного исследования в ней.

Первая глава посвящена основным положениям теории интегрируемых систем и математических бильярдов. Бильярд, заданный в плоской замкнутой области \mathcal{B} , рассматривается как гамильтонова система на фазовом пространстве $M^4 = \{(\mathbf{x}, p) : \mathbf{x} \in \mathcal{B}, p \in T_{\mathbf{x}}^*\mathbb{R}^2\} / \sim$, где отношение эквивалентности $(\mathbf{x}_1, p_1) \sim (\mathbf{x}_2, p_2)$ подчиняется закону отражения на границе бильярда. Иными словами, точки (\mathbf{x}_1, p_1) и (\mathbf{x}_2, p_2) объявляются эквивалентными, если $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \in \partial\mathcal{B}$, а ковекторы импульсов p_1 и p_2 переходят друг в друга при абсолютно упругом отражении в точке \mathbf{x}_1 . Симплектическая структура ω на M^4 полагается канонической. Гамильтонианом такой системы является полная механическая энергия $H(\mathbf{x}, p) = \frac{|p|^2}{2} + W(\mathbf{x}, p)$, где W есть потенциал. Функция H сохраняется на всех траекториях бильярда в силу абсолютной упругости отражения, и, следовательно, является *первым интегралом*. В случае, если существует еще одна функция $F(\mathbf{x}, p)$, функционально независимая с H почти всюду и сохраняющаяся вдоль траекторий системы, бильярд \mathcal{B} будем называть *вполне интегрируемым по Лиувиллю* (или просто *интегрируемым*). Предметом изучения диссертации является *слоение Лиувилля* таких бильярдов, то есть слоение фазового пространства M^4 на совместные поверхности уровней первых интегралов $T_{h,f} = \{(\mathbf{x}, p) \in M^4 : H(\mathbf{x}, p) = h, F(\mathbf{x}, p) = f\}$.

Определение. *Отображением момента* называется отображение $\mathcal{F} : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $\mathcal{F}(\mathbf{x}, p) = (H(\mathbf{x}, p), F(\mathbf{x}, p))$. *Бифуркационной диаграммой* $\Sigma(\mathcal{F})$ называется образ всех особых точек отображения момента (точек, в которых дифференциалы dH и dF линейно зависимы).

Для гладких вполне интегрируемых систем с двумя степенями свободы справедлива известная *теорема Лиувилля*, локально описывающая слоение в регулярном случае.

Теорема (Лиувилль). *Пусть на M^4 задана вполне интегрируемая система с гамильтонианом H . Пусть значение интегралов $H = h, F = f$ не принадлежит бифуркационной диаграмме, то есть слой $T_{h,f}$ регулярный. Рассмотрим компактную связную компоненту \hat{T} этого слоя. Тогда:*

1. \hat{T} диффеоморфно двумерному тору T^2 (этот тор называется *тором Лиувилля*);
2. слоение Лиувилля в некоторой окрестности тора Лиувилля диффеоморфно прямому произведению тора на двумерный диск D^2 ;
3. в окрестности тора Лиувилля $T^2 \times D^2$ существуют координаты (s_1, s_2, t_1, t_2) (координаты действие-угол) такие, что $s_i = s_i(H, F)$, t_i – координаты на торе T^2 , и в этих координатах структура ω принимает канонический вид, а векторное поле $v = \text{sgrad } H$ выпрямляется.

Отметим, что эта теорема справедлива и в общем случае произвольного конечного количества степеней свободы. Однако, в приведенном определении бильярдная система является не гладкой, но кусочно-гладкой. Гладкость нарушается в точках фазового пространства M^4 ,

соответствующих границе бильярда. Таким образом, теорему Лиувилля нельзя применять в ее исходной формулировке. Тем не менее будет показано, что ее утверждения справедливы для всех бильярдных систем, рассмотренных в диссертации, т.е. будет доказан кусочно-гладкий аналог теоремы Лиувилля в каждом конкретном случае.

Важнейшим понятием теории интегрируемых систем с двумя степенями свободы является понятие *лиувиллевой эквивалентности* двух систем. Ограничим систему на поверхность уровня гамильтониана $Q_h^3 = \{(\mathbf{x}, p) \in M^4 : H(\mathbf{x}, p) = h\}$. Потребуем, чтобы эта поверхность была компактной и неособой, т.е. $\forall (\mathbf{x}, p) \in Q_{h_0}^3 : dH(\mathbf{x}, p) \neq 0$. Полученное трехмерное многообразие называется *изоэнергетическим*.

Определение. Вполне интегрируемые системы $(M_1^4, \omega_1, H_1, F_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, H_2, F_2)$, ограниченные на неособые изоэнергетические многообразия Q_1^3 и Q_2^3 соответственно, называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный диффеоморфизм $Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$, сохраняющий ориентацию как самих изоэнергетических многообразий, так и ориентацию критических окружностей (заданных потоками гамильтонианов).

Иными словами, эквивалентными называются системы, имеющие одну и ту же структуру слоения Лиувилля на неособых изоэнергетических многообразиях. Инвариантом такой эквивалентности служит *инвариант Фоменко–Цишанга*, или *меченая молекула*. Он представляет собой граф – базу слоения Лиувилля, – вершинам которого сопоставлены т.н. *3-атомы*, то есть классы лиувиллевой эквивалентности расслоенных окрестностей нерегулярных слоев. Кроме того, построенный граф снабжен числовыми метками r , ε и n , задающими диффеоморфизм склейки граничных торов Лиувилля смежных 3-атомов. Подробнее об инварианте Фоменко–Цишанга и 3-атомах см. в [1] и первой главе диссертации.

Построенный инвариант является полным инвариантом лиувиллевой эквивалентности. Иными словами, справедлива теорема.

Теорема (Фоменко–Цишанг). *Вполне интегрируемые системы $(M_1^4, \omega_1, H_1, F_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, H_2, F_2)$, ограниченные на неособые изоэнергетические многообразия Q_1^3 и Q_2^3 соответственно, лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

Классическим примером интегрируемого бильярда служит бильярд Биркгофа, т.е. плоский бильярд, ограниченный эллипсом. Дополнительный первый интеграл F приходит из геометрических соображений. А именно, все прямолинейные сегменты траектории касаются квадрики, софокусной с граничным эллипсом, а в качестве интеграла возьмем функцию Λ , равную параметру этой квадрики в однопараметрическом семействе. Для такого бильярда соответствующий инвариант Фоменко–Цишанга был построен В. И. Драговичем и М. Раднович в [9]. Этот пример может быть расширен на любой плоский бильярд, ограниченный дугами софокусных эллипсов и гипербол и содержащий углы излома $\frac{\pi}{2}$. Оказывается, та же самая функция Λ остается первым интегралом. Такие системы с точностью до лиувиллевой эквивалентности

были классифицированы В. В. Ведюшкиной в [10]. Так же, как и в случае эллиптического бильярда, были построены все меченые молекулы для каждого бильярда. Сами плоские эллиптико-гиперболические бильярды в дальнейшем будем называть *элементарными*.

В работе [16] В. В. Ведюшкиной вводится понятие *бильiardной книжки*. Рассмотрим несколько элементарных бильiardов B_1, \dots, B_n , имеющих попарно совпадающие дуги границ, и склеим их вдоль этих дуг в один конечный двумерный CW -комплекс. Полученный комплекс $K = K_0 \cup K_1 \cup K_2$ назовем *бильiardным комплексом*. Занумеруем двумерные клетки этого комплекса. Рассмотрим произвольную дугу склейки $e \in K_1$, входящую в границы клеток с номерами i_1, \dots, i_k , и сопоставим ей перестановку $\sigma_e = (i_1, \dots, i_k)$. Зададим бильiardное движение следующим образом: при движении бильiardного шара в клетке B_j он, попадая на дугу e , отражается от нее, переходя на следующую клетку $B_{\sigma_e(j)}$ согласно перестановке. Как было показано, такая бильiardная система задает корректно определенную кусочно-гладкую интегрируемую систему. Так, И. С. Харчевой в [20] было показано, что пространство M^4 является топологическим кусочно-гладким многообразием, а функция Λ остается первым интегралом. В свою очередь, множество бильiardных книжек заметно расширяет класс интегрируемых бильiardов с точки зрения Лиувиллевой эквивалентности. Так, В. В. Ведюшкиной и И. С. Харчевой в [19] было показано, что бильiardными книжками можно реализовать любую наперед заданную грубую молекулу, то есть инвариант Фоменко–Цишанга без числовых меток. Более подробно про бильiardные книжки см. в работе В. В. Ведюшкиной и И. С. Харчевой [16] и первой главе диссертации.

Дополнительно к вышесказанному, в первой главе освещается часть теории интегрируемых систем, посвященная четырехмерным особенностям слоения Лиувилля. Именно, обозначается понятие *невыврожденной особой точки ранга 0* интегрируемой системы, а также понятие *вырожденной орбиты ранга 1*. Приводится локальная структура слоения Лиувилля в окрестности точек типа центр-центр, центр-седло, седло-седло и фокус-фокус, а также конструкция *почти прямого произведения*, предложенная Н. Зунгом, как способ описания полулокальной структуры слоения. Кроме того, приведены типичные примеры вырожденных орбит потоков первых интегралов, появляющиеся в известных интегрируемых системах, и соответствующие им четырехмерные особенности.

Вторая глава диссертации посвящена изучению топологии слоения Лиувилля плоских эллиптико-гиперболических бильiardов, снабженных потенциалом Гука. Исследование является идейным продолжением работы [10] В. В. Ведюшкиной о классификации классических бильiardов в областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, и работы [25] И. Ф. Кобцева о топологическом анализе бильiardа в эллиптической области с упругим потенциалом. Более подробно, заострим внимание на двенадцати областях, приведенных на рис. 1. Список областей был получен на основе классификации в [10], учитывая также пересечение области с осью, ортогональной к фокальной прямой. Гладкие дуги границ принадлежат софокусным

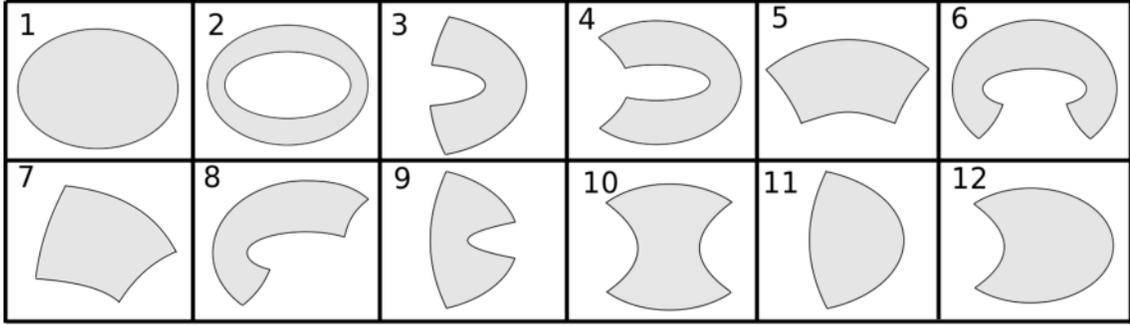


Рис. 1: Элементарные бильярдные столы

эллипсам и гиперболам, заданным в декартовых координатах параметрическим уравнением

$$x^2(b + \lambda) + y^2(a + \lambda) = (a + \lambda)(b + \lambda),$$

где $a > b > 0$ – параметры семейства, число λ – параметр квадрики. Также положим, что внешний граничный эллипс имеет параметр $\lambda = 0$. Зададим в таких областях бильярдное движение материальной точки (в дальнейшем, бильярдного шара), полагая, что на шар действует упругий потенциал Гука $W = \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$, который притягивает или отталкивает его от центра координат. Продолжая терминологию работы [10], будем называть такие бильярды *элементарными с потенциалом Гука*.

Рассмотрим их как гамильтоновы системы на своих четырехмерных фазовых многообразиях. Гамильтонианом таких систем является полная энергия, которая имеет вид

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \frac{k}{2}(x^2 + y^2).$$

Как оказалось, заданные бильярды являются интегрируемыми. Впервые интегрируемость гармонического осциллятора внутри эллипса была показана Биркгофом, который свел аналогичную задачу на эллипсоиде, устремив одну из полуосей к нулю. Тем не менее, это справедливо и для любой из двенадцати приведенных областей.

Утверждение. *Элементарный бильярд с потенциалом Гука допускает дополнительный первый интеграл вида*

$$F = \frac{p_x^2}{a} + \frac{p_y^2}{b} - \frac{(xp_y - p_x y)^2}{ab} + k\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}\right)$$

Более того, было показано, что элементарные бильярды с потенциалом Гука являются алгебраически разрешимыми системами (термин, введенный М. П. Харламовым в [26]). Это означает, что система редуцируется к системе уравнений разделения

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{dt} = \pm \frac{\sqrt{8}}{\lambda_2 - \lambda_1} \sqrt{(-\frac{k}{2}\lambda_1^2 + H\lambda_1 + F)(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)} \\ \frac{d\lambda_2}{dt} = \pm \frac{\sqrt{8}}{\lambda_2 - \lambda_1} \sqrt{(-\frac{k}{2}\lambda_2^2 + H\lambda_2 + F)(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}, \end{cases}$$

где (λ_1, λ_2) задают эллиптические координаты, для которых гладкие сегменты границ билиардов лежат на координатных линиях. Следовательно, применим метод областей возможного движения, позволяющий изучать слоения Лиувилля интегрируемых систем с помощью проекций слоев на конфигурационное пространство переменных разделения.

Определение. Зафиксируем значения первых интегралов $H = h$ и $F = f$, то есть слой слоения Лиувилля. *Областью возможного (допустимого) движения* называется замыкание объединения всех билиардных траекторий, соответствующих фиксированным значениям первых интегралов. Иными словами, это замкнутая область на билиарде, в которой билиардный шар может находиться при фиксированных значениях интегралов h и f .

Очевидно, что любая область возможного движения есть образ слоя слоения Лиувилля при естественной проекции на билиардный стол. Бифуркации торов Лиувилля задают бифуркацию областей возможного движения. И наоборот, из вида бифуркаций областей можно восстановить бифуркацию торов Лиувилля, то есть 3-атом. Из уравнений разделения следует, что область возможного движения определяется положением корней ξ и η многочлена $V(z) = -\frac{k}{2}z^2 + hz + f$ относительно значений $hyp_1, hyp_2, ell_1, ell_2 = 0$, задающих параметры граничных дуг билиарда. Таким образом, топологический анализ слоения сводится к анализу поведения функций $\xi(h, f)$ и $\eta(h, f)$. Результатом этого анализа служат следующие две теоремы.

Теорема. *Бифуркационная диаграмма элементарного билиарда с потенциалом Гука (т.е. плоского билиарда, ограниченного дугами софокусных квадрик) имеет следующий вид.*

1. При $k > 0$ она включает в себя

- луч $f = -hyp_1h + \frac{k}{2}hyp_1^2$, где $h \geq \frac{k}{2}(hyp_1 + ell_1)$,
- дугу параболы $f = -\frac{h^2}{2k}$, где $h \in [k ell_1, 0]$,
- отрезок прямой $f = -ell_1h + \frac{k}{2}ell_1^2$, где $h \in [\frac{k}{2}(hyp_1 + ell_1), k ell_1]$,
- луч $f = 0$ при $h \geq 0$,
- луч $f = bh + \frac{k}{2}b^2$, где $h \geq \frac{k}{2}(-b + ell_1)$, если $ell_1 = -b$ или $hyp_2 = -b$.

2. При $k < 0$ она включает в себя

- луч $f = -hyp_1h + \frac{k}{2}hyp_1^2$, где $h \geq k hyp_1$,
- дугу параболы $f = -\frac{h^2}{2k}$, где $h \in [k hyp_2, k hyp_1]$,
- отрезок прямой $f = -hyp_2h + \frac{k}{2}hyp_2^2$, где $h \in [\frac{k}{2}hyp_2, k hyp_2]$,
- луч $f = 0$ при $h \geq \frac{k}{2}hyp_2$,
- луч $f = bh + \frac{k}{2}b^2$, где $h \geq \frac{k}{2}(-b + hyp_2)$, если $ell_1 = -b$ или $hyp_2 = -b$,
- отрезок $f = ah + \frac{k}{2}a^2$, где $h \in [-\frac{k}{2}a, -ka]$, если $hyp_1 = -a$.

Теорема. Рассмотрим элементарные бильярды с потенциалом Гука, т.е. плоские бильярды, ограниченные дугами софокусных эллипсов и гипербол. Тогда любая неособая изоэнергетическая поверхность Q^3 каждого такого бильярда принадлежит одному из 18 различных классов ливиллевой эквивалентности слоений Ливилля. Полный список инвариантов Фоменко–Цишанга представлен на рис. 2.

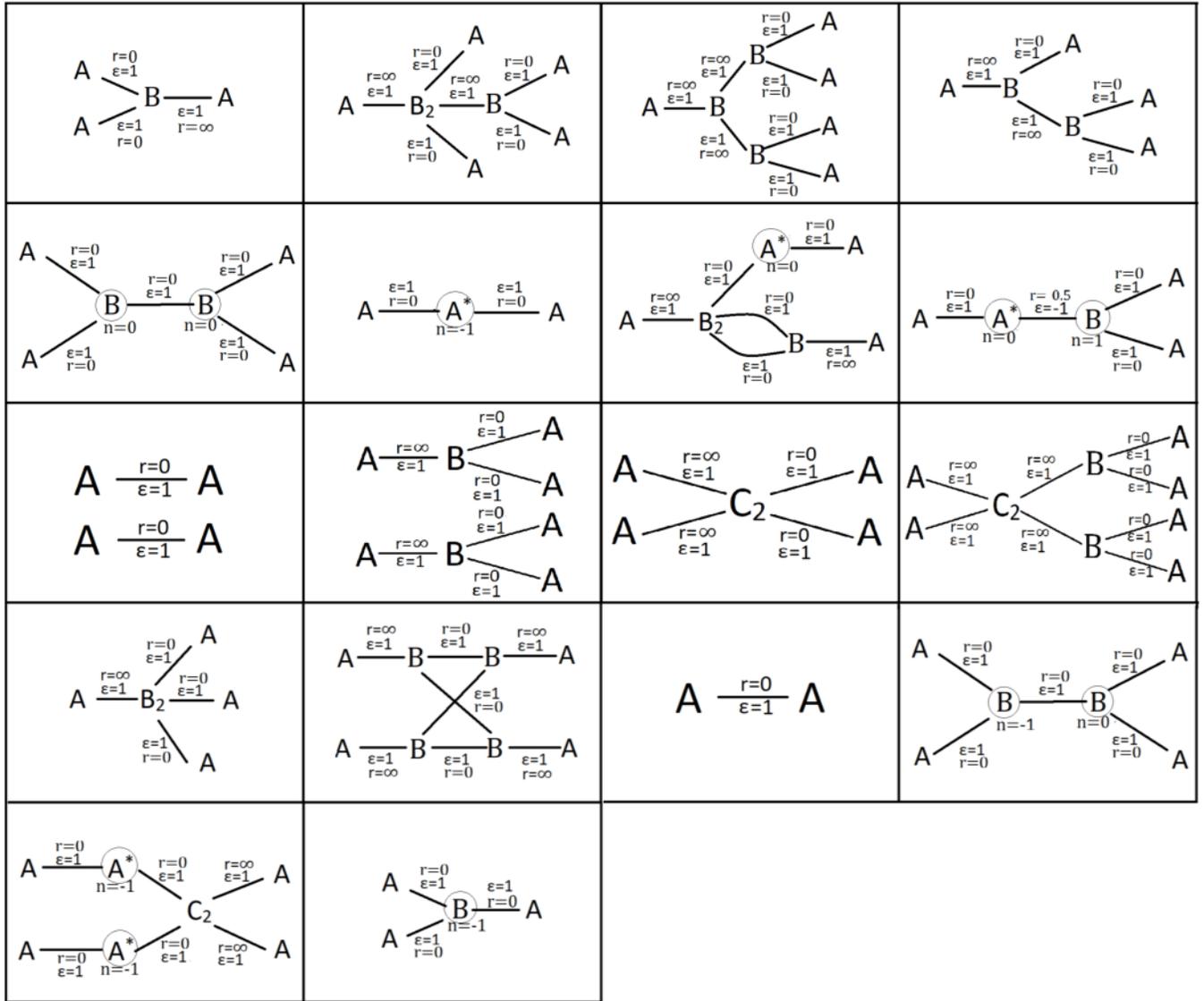


Рис. 2: Список инвариантов Фоменко–Цишанга элементарных бильярдов с потенциалом Гука

Третья глава диссертации посвящена вопросу интегрируемости эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом и топологическому анализу такого бильярда. Как известно, бильярд Биркгофа (как классический, так и с добавлением упругого потенциала) допускает дополнительный первый интеграл, то есть является интегрируемым. Возникает естественный вопрос: является ли эллиптический бильярд, снабженный произвольным потенциалом, интегрируемым. В общем случае это оказалось неверным. Тем не менее, В. В. Козловым в [22] был

предложен критерий интегрируемости потенциала.

Утверждение (В.В.Козлов). *Биллиард в эллипсе с полуосями \sqrt{a} и \sqrt{b} , снабженный потенциалом $W \in C^\infty(\mathcal{B})$, допускает первый интеграл вида*

$$F = -2\left(\frac{p_x^2}{a} + \frac{p_y^2}{b} - \frac{(xp_y - p_x y)^2}{ab}\right) + f(x, y),$$

если и только если потенциал W удовлетворяет следующему уравнению:

$$(a - b)W_{xy} + 3(yW_x - xW_y) + W_{xy}(y^2 - x^2) + xy(W_{xx} - W_{yy}) = 0$$

Остается открытой задача поиска общего решения этого уравнения в классе гладких функций. Однако, оно решено при некоторых ограничениях. Так, В. И. Драгович в [24] предложил общее решение в классе многочленов Лорана, а в [23] – в классе функций Аппеля. Одним из результатов диссертации является явный вид полиномиального решения.

Теорема. *Уравнение Козлова в эллиптических координатах имеет следующий вид:*

$$x(\lambda_1, \lambda_2)y(\lambda_1, \lambda_2)\left(\frac{W_1 - W_2}{\lambda_1 - \lambda_2} - W_{12}\right) = 0,$$

где W_i – частная производная функции W по λ_i .

Общее решение уравнения в классе полиномов имеет следующий вид:

$$W = \frac{P(\lambda_1) - P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

где P – произвольный многочлен.

Таким образом, интегрируемый полиномиальный потенциал полностью определяется многочленом P . В частности, потенциал Гука является таким потенциалом с соответствующим многочленом $P(z) = \frac{k}{2}z^2$. Оказывается, эллиптический биллиард, снабженный описанным потенциалом, также является алгебраически разрешимой системой. Уравнения разделения, записанные в эллиптических координатах, примут следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{dt} = \pm \frac{\sqrt{8}}{\lambda_2 - \lambda_1} \sqrt{(-P(\lambda_1) + H\lambda_1 + F)(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)} \\ \frac{d\lambda_2}{dt} = \pm \frac{\sqrt{8}}{\lambda_2 - \lambda_1} \sqrt{(-P(\lambda_2) + H\lambda_2 + F)(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}, \end{cases}$$

Так же, как и для элементарных биллиардов с потенциалом Гука, применим метод областей возможного движения, который позволяет сводить описание бифуркаций торов Лиувилля к анализу многочлена $V(z) = -P(z) + hz + f$ на отрезке $[-a, 0]$. А именно, критическим значениям первых интегралов $H = h$, $F = f$ соответствуют следующие условия на многочлен V :

- C1) существует точка $z = e \in (-a, -b)$, которая является точкой экстремума многочлена V , и $V(e) = 0$;

- C2) существует точка $z = e \in (-b, 0)$, которая является точкой экстремума многочлена V , и $V(e) = 0$;
- C3) $V(0) = 0$, и V возрастает в окрестности нуля;
- C4) $V(-a) = 0$;
- C5) $V(-b) = 0$.

Отметим, что значение точки экстремума многочлена V не зависит от переменной f и является неявной функцией от переменной h : $e = e(h)$. Условия C1-C5 позволяют неявно определить критические значения первых интегралов и, тем самым, найти бифуркационные кривые.

Теорема. Пусть $e_i(h)$ – неявные функции точек экстремумов многочлена V . Тогда бифуркационная диаграмма эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом состоит из дуг следующих кривых (возможно, не всех):

- d1_i) $V(e_i(h)) = 0$ при $e_i(h) \in [-a, -b]$
- d2_i) $V(e_i(h)) = 0$ при $e_i(h) \in [-b, 0]$;
- d3) $f = 0$ при $h \geq 0$;
- d4) $V(-a) = 0$;
- d5) $V(-b) = 0$.

В случае, когда многочлен P имеет третью степень $P = c_3 z^3 + c_2 z^2$, экстремумы многочлена V можно выразить явно в радикалах. Опираясь на теорему выше, для этого случая автором были построены всевозможные бифуркационные диаграммы в зависимости от значений параметров потенциала c_2 и c_3 и параметров бильярдного стола a и b . В частности, доказаны следующие теоремы.

Теорема. Для эллиптического бильярда, снабженного интегрируемым потенциалом четвертой степени с параметром $c_3 < 0$, существуют 16 неэквивалентных классов бифуркационных диаграмм. Эволюция бифуркационных диаграмм при росте значения $\frac{c_2}{c_3}$ зависит от соотношений на параметры a и b граничного эллипса и описывается эволюционным графом 3.

Теорема. Для эллиптического бильярда, снабженного потенциалом четвертой степени с параметром $c_3 > 0$, существуют 4 неэквивалентных класса бифуркационных диаграмм. Эволюция бифуркационных диаграмм при росте значения $\frac{c_2}{c_3}$ описывается линейным графом-путем

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4.$$

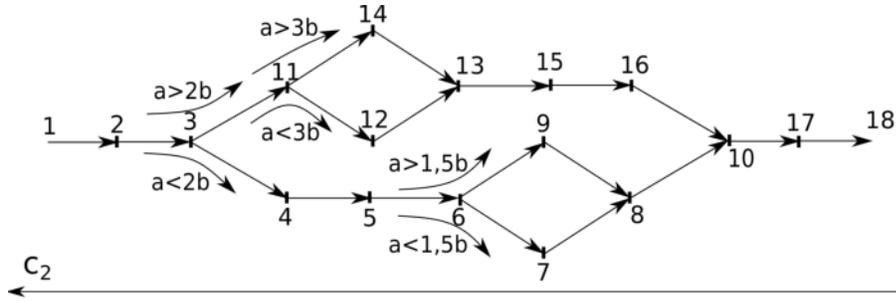
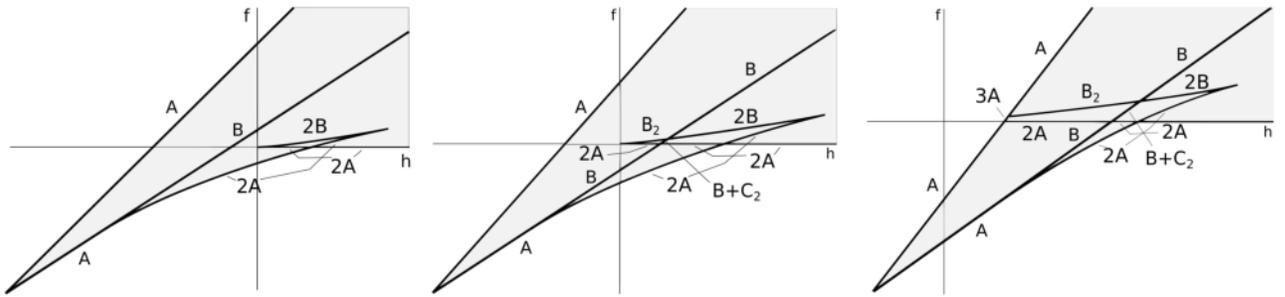
Рис. 3: Эволюционный граф бифуркационных диаграмм при $c_3 > 0$ 

Рис. 4: Примеры бифуркационных диаграмм

Вернемся к общему случаю потенциала произвольной степени. Метод областей возможного движения позволяет определить как локальные бифуркации торов Лиувилля (то есть, 3-атомы), так и глобальную структуру слоения Лиувилля на неособом изоэнергетическом многообразии Q_h^3 , исходя из вида многочлена P . В работах И. Ф. Кобцева [25] и С. Е. Пустовойтова [42] представлен список инвариантов Фоменко–Цишанга, соответствующих многочленам степени 2 и 3 соответственно. Однако, с ростом степени многочлена P количество соответствующих инвариантов растет экспоненциально. В связи с этим автором был разработан алгоритмический подход построения инварианта. Результатом построенного алгоритма служит частичное описание грубой молекулы.

Теорема. *Алгоритмически построенная грубая молекула неособого изоэнергетического многообразия эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом удовлетворяет следующим свойствам:*

- вершинам молекулы соответствуют 3-атомы A , A^* , 3-атомы серии B_k , C_{2k} , где k есть положительное целое числ;
- существует расположение молекулы в плоскости, при котором она является симметричной относительно некоторой оси, причем 3-атомы, переходящие друг в друга под действием этой симметрии, соответствуют одинаковому уровню интеграла F ;

- все 3-атомы вида C_{2k} лежат на некотором одном уровне интеграла F (обозначим его $F = f_C$), причем число k для всех них одинаковое;
- ниже уровня $F = f_C$ молекула является непересекающимся объединением нескольких симметричных деревьев с корнями в вершине C_{2k} ;
- на фокальном уровне интеграла F , при котором $V(-b) = 0$ (обозначим его $F = f_F$), лежат либо несколько минимаксных 3-атомов A , либо два атома A^* и несколько 3-атомов B_k , либо один 3-атом B и несколько атомов C_{2k} ;
- в общем случае молекула не является деревом, т.е. могут существовать циклы;
- молекула может содержать кратные ребра, причем они могут соединять только 3-атомы C_{2k} с 3-атомами B_k , расположенными не ниже фокального уровня;
- если $V(z_1) < V(-b) < V(z_2)$ для любых $z_1 \in [-a, -b)$ и $z_2 \in (-b, 0]$, молекула является деревом.

Метки грубой молекулы могут быть вычислены также алгоритмически. Для этого разобьем 3-атомы на шесть групп.

1. минимальные 3-атомы A ;
2. максимальные 3-атомы A ;
3. седловые 3-атомы, соответствующие бифуркациям области возможного движения типа “слияние”;
4. седловые 3-атомы, соответствующие бифуркациям типа “разрыв”;
5. 3-атомы A^* ;
6. 3-атом B , соответствующий бифуркации через два фокуса.

Тогда числовые метки описываются следующей теоремой.

Теорема. *Зафиксируем ориентацию изоэнергетического многообразия Q_h^3 таким образом, чтобы все циклы λ на минимальных 3-атомах A стали согласованными. Рис. 5 полностью описывает метки, соответствующие ребрам построенной выше грубой молекулы.*

Таким образом, автором было приведено алгоритмическое построение инварианта Фоменко–Цишанга интегрируемого эллиптического билиарда с полиномиальным потенциалом. Дополнительно был определен топологический тип неособого изоэнергетического многообразия, слоение которого описывается построенным инвариантом.

Верхний атом Нижний атом	2	3	4	5	6
1	$r=0 \quad \varepsilon=1$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=\infty \quad \varepsilon=1$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=0$
3	$r=\infty \quad \varepsilon=1$	$r=\infty \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=0 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=0$	$r=0.5 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=-1$	$r=0.5 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=-1$
4	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=\infty \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=2 \quad \Theta'=0$	—————
5	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=2 \quad \Theta'=0$	$r=0.5 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=-1$	—————	—————
6	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=1$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=1 \quad \Theta'=1$	$r=0 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=0$	—————	—————

Рис. 5: Метки инварианта Фоменко–Цишанга. Ячейка соответствует ребру, соединяющего атомы из обозначенных групп. Здесь Θ обозначает вклад ребра в метку n семьи, не содержащей атомов 5 и 6, а Θ' обозначает вклад в метку n семьи 3-атома из группы 5 или 6.

Теорема. *Изоэнергетическое многообразие Q^3 эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом состоит из нескольких компонент связности, каждая из которых гомеоморфна либо трехмерной сфере S^3 , либо связной сумме $(S^1 \times S^2) \# \dots \# (S^1 \times S^2)$ нескольких многообразий $S^1 \times S^2$.*

Четвертая глава посвящена описанию слоения Лиувилля четырехмерных полулокальных особенностей бильярдов с потенциалом. Глава условно разделена на две части. В первой части рассматривается интегрируемый эллиптический бильярд с полиномиальным потенциалом четвертой степени, бифуркационные диаграммы которого были построены в явном виде в предыдущей главе. Были вычислены всевозможные невырожденные особые точки фазового пространства, в которых ранг дифференциала отображения момента становится равным нулю, и определены типы этих точек. Как оказалось, реализуются случаи центр-центр, центр-седло и седло-седло. Затем с помощью метода областей возможного движения была установлена топология слоения Лиувилля четырехмерных окрестностей особых слоев, содержащих полученные особые точки. Результатом анализа является следующая теорема.

Теорема. *Невырожденные особые точки ранга 0 эллиптического бильярда с потенциалом четвертого порядка имеют тип центр-центр, центр-седло или седло-седло. Слоение Лиувилля четырехмерной окрестности точек центр-центр послойно гомеоморфно прямому произведению двух 2-атомов A . Слоение Лиувилля окрестностей слоев, содержащих точки центр-седло, послойно гомеоморфно прямому произведению 2-атома A и одного из 2-атомов B , B_2 , C_2 или C_4 . Слоение Лиувилля окрестностей слоев, содержащих точки седло-седло, послойно гомеоморфно почти прямому произведению $B \times C_2/\mathbb{Z}_2$, $B_2 \times C_2/\mathbb{Z}_2$ или $B \times C_4/\mathbb{Z}_2$.*

Отметим, что для почти прямого произведения фактор берется на всем прямом произведе-

нии под действием некоторой послойной инволюции. Кроме того, для того же бильярд автором были установлены вырожденные критические траектории движения бильярдного шара и вычислены уровни первых интегралов, для которых эти траектории достигаются. И опять, была установлена топология слоения Лиувилля четырехмерных окрестностей соответствующих особых слоев. А именно, доказана теорема.

Теорема. *Вырожденные орбиты потоков первых интегралов, встречающиеся в эллиптическом бильярде с потенциалом четвертого порядка, соответствуют перестройкам параболического типа или типам эллиптического или гиперболического удвоения периода невырожденных окрестностей. Четырехмерные окрестности слоев слоения Лиувилля, содержащих такие орбиты, лиувиллево эквивалентны одному из шести типов, изображенных на рис. 6.*

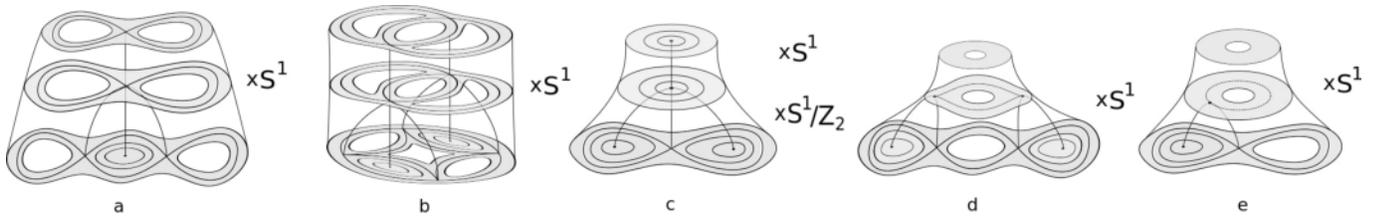


Рис. 6: Шесть типов слоений Лиувилля в окрестности вырожденных слоев ранг 1. На рис. c изображены два типа слоения, соответствующие ориентируемому и неориентируемому случаю эллиптического удвоения периода. Здесь фактор по действию группы \mathbb{Z}_2 берется на всем прямом произведении изображенной базы и окружности S^1 .

Вторая часть четвертой главы посвящена реализации произвольной фокальной особенности бильярдными книжками с потенциалом Гука. Вопрос реализации различных структур, появляющихся в теории интегрируемых систем, с помощью бильярдов был поставлен А. Т. Фоменко в свете появления конструкции бильярдных книжек. Например, в работах [27] и [28] В. А. Кибкало и А. Т. Фоменко были реализованы произвольные полулокальные особенности типа седло-седло с помощью бильярдных книжек, склеенных из элементарных бильярдов с потенциалом Гука. Однако, до сих пор оставался открытым вопрос реализации особенностей типа фокус-фокус. Напомним, что с точностью до лиувиллевой эквивалентности такие особенности определяются числовой меткой монодромии, которая полностью задает диффеоморфизм тора Лиувилля, возникающий при обходе по контуру вокруг изолированного особого значения первых интегралов. Рассмотрим плоский бильярд, ограниченный окружностью, в центр которого помещен отталкивающий потенциал Гука. Такой бильярд есть вырожденный случай эллиптического бильярда, рассмотренного во второй главе. Таким образом, он является интегрируемым. Неустойчивое положение равновесия в центре бильярда, как оказалось, является невырожденной особой точкой ранга 0, которая имеет тип фокус-фокус. Ее матрица монодромии имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тем самым было показано, что числовая метка монодромии равняется

1.

Теперь рассмотрим n копий кругового бильярда с отталкивающим потенциалом Гука и склеим из них бильярдную книжку по общей граничной окружности (перестановку на единственном корешке книжки положим циклической $(1, 2 \dots n)$). Таким образом, полученная система допускает n точек типа фокус-фокус, которые, в свою очередь, лежат на одном слое слоения Лиувилля, соответствующем значениям $H = 0$, $F = 0$. Матрица монодромии в этом случае имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$. Тем самым, была доказана следующая теорема.

Теорема. *Числовая метка монодромии особенности в прообразе точки $(0, 0)$ равна n для бильярдной системы с отталкивающим потенциалом Гука на книжке \mathcal{B}_n , склеенной из n экземпляров стола D плоского бильярда внутри круга по перестановке $(1, 2, \dots, n)$ на их окружности склейки.*

Таким образом, с помощью бильярдных книжек была получена произвольная метка монодромии. Иными словами, была реализована произвольная фокальная особенность.

Последняя **пятая глава** диссертации посвящена исследованию топологических магнитных бильярдов с точки зрения лиувиллевой эквивалентности. Рассмотрим сначала плоские бильярды, помещенные в постоянное магнитное поле индукции β , ортогональное к плоскости бильярдного стола. Магнитное поле действует на бильярдный шар единичного заряда, отклоняя его траекторию по окружности Лармора. Эта система гамильтонова на своем фазовом пространстве со стандартной симплектической структурой и гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \left(\left(p_x - \frac{\beta}{2} y \right)^2 + \left(p_y + \frac{\beta}{2} x \right)^2 \right)$$

В [30] А. Е. Миронов и М. Бялый доказали следующую теорему, отвечающую на вопрос интегрируемости такого бильярда.

Теорема (Миронов, Бялый). *Пусть магнитный бильярд задан в выпуклой области \mathcal{B} , ограниченной кусочно-гладкой кривой, и магнитное поле имеет индукцию β . Если граница $\partial\mathcal{B}$ не есть окружность, магнитный бильярд не является алгебраически интегрируемым для любых значений индукции β , кроме, быть может, конечного числа таких значений.*

В связи с этим рассмотрим интегрируемые магнитные бильярды, ограниченные окружностью или парой концентрических окружностей (будем называть их круговым и кольцевым бильярдом). Их траектории представляют собой кусочно-гладкие кривые, состоящие из дуг окружностей Лармора общего радиуса, центры которых равноудалены от центра бильярда. Геометрическое описание траекторий позволяет определить области возможного движения и, тем самым, описать слоение Лиувилля на неособых изоэнергетических многообразиях. Результатом анализа служит следующая теорема.

Теорема. Для кругового магнитного бильярда изоэнергетическое многообразие Q^3 гомеоморфно трехмерной сфере S^3 при любом значении интеграла L . Соответствующий инвариант Фоменко–Цишанга имеет вид $A - A$ с метками $r = 0$ и $\varepsilon = 1$.

Для кольцевого магнитного бильярда изоэнергетическое многообразие Q^3 гомеоморфно произведению $S^1 \times S^2$ при любом значении интеграла L . Инвариант Фоменко–Цишанга имеет вид $A - A$ с метками $r = \infty$ и $\varepsilon = 1$.

Теперь рассмотрим круговые и кольцевые магнитные бильярды как элементарные и построим с помощью них топологический бильярд, т.е. бильярдную книжку, бильярдный комплекс которой является ориентируемым компактным двумерным многообразием. Возможны четыре случая: конфигурационное пространство бильярда гомеоморфно диску (бильярд bD), замкнутому цилиндру (bC), сфере (bS) или тору (bT). Конструкция топологического бильярда (как и общая конструкция бильярдной книжки) сохраняет дополнительный первый интеграл, т.е. система является интегрируемой. Для таких систем автором был разработан алгоритмический подход, который позволяет строить инвариант Фоменко–Цишанга, исходя из формы топологического бильярда. Результатом построенного алгоритма служит частичное описание грубой молекулы.

Теорема. Алгоритмически построенная грубая молекула неособого изоэнергетического многообразия топологического магнитного бильярда удовлетворяет следующим свойствам.

- Вершинам молекулы соответствуют 3-атомы A , 3-атомы серии B_τ (или атомы с плюсами и минусами в терминологии работы Е. А. Кудрявцевой и А. А. Ошемкова [35]), а также 3-атомы из серии C_τ в случае бильярда bT , где τ есть последовательность положительных целых чисел.
- Бильярд bT может допускать лишь два 3-атома серии C_τ , лежащих на соседних уровнях дополнительного интеграла F . Причем эти 3-атомы единственные на своих уровнях.
- Граф грубой молекулы бильярдов bC , bD и bS является деревом. Граф бильярда bT допускает кратные ребра (которые образуют единственные циклы) между 3-атомами серии C_τ .
- При достаточно больших значениях энергии грубая молекула имеет симметричный вид $W - W$, где W – это корневое поддерево, причем обе симметричные части в молекуле соединены ребром (либо кратными ребрами), инцидентным обоим корням. В такой молекуле 3-атомы имеют вид A , B_n и C_n .

Теперь вычислим числовые метки, которые вместе с построенной грубой молекулой определяют инвариант Фоменко–Цишанга. Как оказалось, они зависят только от топологического типа

бильярда. Разобьем 3-атомы на две группы: **1)** минимальный атом A , 3-атом B_k , перестраивающий (склеивающий) $k + 1$ тор Лиувилля в один тор, и 3-атом C_k , перестраивающий (склеивающий) k торов Лиувилля в два тора; **2)** максимальный атом A , 3-атом B_k , перестраивающий (разделяющий) один тор Лиувилля в $k + 1$ тор, и 3-атом C_k , перестраивающий (разделяющий) два тора Лиувилля в k торов.

Теорема. *Инвариант Фоменко–Цишанга, задающий класс лиувиллевой эквивалентности неособой изоэнергетической поверхности топологического магнитного бильярда, имеет следующий вид:*

- 1) *грубая молекула строится по алгоритму, приведенному в теореме 5.7 в случае бильярдов bC , bD и bS , или алгоритму, приведенному в теореме 5.9 в случае бильярда bT ;*
- 2) *метка r равна нулю на всех ребрах, инцидентных 3-атомам A , и бесконечности на остальных ребрах (и следовательно, существует лишь одна семья);*
- 3) *метка ε равна $+1$ на всех ребрах, соединяющих два 3-атома из одной группы либо два 3-атома A , и -1 в остальных случаях;*
- 4) *метка n единственной семьи равна нулю в случае бильярдов bC и bT , ± 1 в случае бильярда bD и ± 2 в случае бильярда bS .*

Таким образом, автором были классифицированы топологические магнитные бильярды с точки зрения их слоений Лиувилля на неособых изоэнергетических поверхностях. Кроме того, был приведен алгоритм, обратный к алгоритму построения инварианта Фоменко–Цишанга. А именно, алгоритм строит топологический магнитный бильярд по представленному инварианту, удовлетворяющему определенным свойствам. С помощью этого алгоритма было доказано, что топологическими магнитными бильярдами реализуются интегрируемые системы на поверхностях вращения в потенциальном поле, рассмотренные Е. О. Кантонистой в [36], с точностью до лиувиллевой эквивалентности.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям академику РАН, профессору А. Т. Фоменко и профессору В. В. Ведюшкиной за постановку задач и многократные обсуждения. Автор выражает благодарность В. И. Драговичу за обсуждения и важные комментарии. Автор выражает благодарность доценту А. Ю. Коняеву и доценту В. А. Кибкало за важные обсуждения. Автор искренне благодарит коллектив кафедры дифференциальной геометрии и приложений за дружелюбную атмосферу, а также за предоставленные возможности реализации творческой деятельности.

Глава 1

Основные определения

1.1 Элементы теории Морса

Определение 1.1. Пусть $f \in C^2(M)$ – некоторая дважды дифференцируемая функция, заданная на гладком многообразии M . Точка $x \in M$ называется *особой*, если $df(x) = 0$. Особая точка называется *невырожденной*, если матрица вторых частных производных в этой точке невырождена. Функция f называется *функцией Морса*, если все ее особые точки невырождены. Функция Морса называется *простой*, если разным ее особым точкам соответствуют разные значения функции.

Теорема 1.1 (Лемма Морса). Пусть f – функция Морса, и x_0 – ее особая точка. Тогда в достаточно малой окрестности этой точки существует система координат, в которой точка x_0 имеет нулевые координаты, а функция примет вид

$$f(x_1, \dots, x_n) = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

Число λ называется *индексом* особой точки x_0 .

Рассмотрим функцию Морса на двумерном компактном многообразии M^2 . Индекс особой точки может принимать три значения: он равен нулю для локального минимума функции, равен двум для локального максимума, и равен единице в случае точки типа седло $-x_1^2 + x_2^2$. Глобально же функция разбивает многообразие M^2 на свои линии уровня, образуя слоение с особенностями. В случае, когда каждая точка слоя является регулярной, его связная компонента диффеоморфна окружности в силу компактности M^2 . Слоение в окрестности регулярного слоя устроено тривиально. Слоение же в окрестности особых слоев устроено сложнее и определяется понятием атома.

Определение 1.2. Функции Морса f и g на многообразиях M^2 и N^2 назовем *послойно эквивалентными*, если существует диффеоморфизм $M^2 \rightarrow N^2$, переводящий слои функции f в слои функции g .

Определение 1.3. Пусть f – функция Морса и x_0 – особая точка. *Атомом* называется достаточно малая окрестность особого слоя P^2 , заданная неравенствами $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, которая расслоена на линии уровня функции f и определена с точностью до послойной эквивалентности.

Иными словами, атом есть класс послойной эквивалентности полулокальных особенностей слоения функции Морса. Несложно заметить, что в случае, когда индекс особой точки x_0 равен нулю или двойке, сама эта точка является слоем, и в силу теоремы 1.1 локальная структура слоения устроена как разбиение диска на группу концентрических окружностей. Такой атом имеет обозначение A (рис. 1.1, а). В случае, когда особый слой атома (P^2, f) содержит седловую точку, сам атом также называется *седловым*. Полная классификация всех атомов была получена А. В. Болсиновым, А. А. Ошемковым и А. Т. Фоменко и описана в [1]. Например, простые атомы (содержащие лишь одну особую точку) имеют лишь два типа: ориентированный атом B и неориентированный атом \tilde{B} (рис. 1.1, б и в).

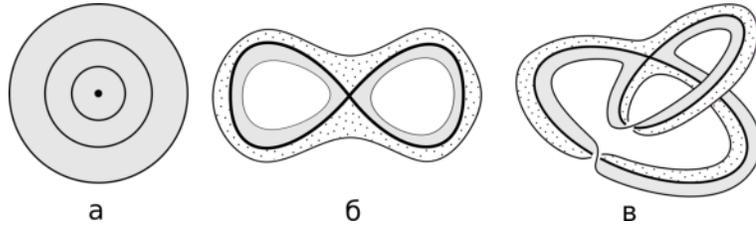


Рис. 1.1: Примеры атомов. На рис. а изображен атом A , на рис. б – атом B , на рис. в – атом \tilde{B} .

Определение 1.4. Пусть f – функция Морса на многообразии M^2 . Стянем каждый слой слоения функции f в точку и на полученном множестве введем естественную фактор-топологию. Полученное пространство Γ является графом и называется *графом Рибба*. Вершинам этого графа соответствуют особые слои. Сопоставим каждой вершине соответствующий ей атом. Полученный оснащенный граф называется *молекулой* функции f .

Граф Рибба можно рассматривать как базу слоения. При этом молекула несет в себе полную информацию о структуре слоения. Наконец, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2 (Фоменко, [1] т. I гл. 2). Пусть (M^2, f) и (N^2, g) – две ориентированные поверхности с фиксированной ориентацией, снабженные функциями Морса. Тогда функции f и g послойно эквивалентны тогда и только тогда, когда их молекулы изоморфны.

Стоит отметить, что при замене ориентации молекула тоже изменяется. А именно, каждый атом заменяется на его зеркальное отражение. Причем полученная молекула, вообще говоря, перестает быть изоморфной исходной в силу неравноправности концов атомов.

1.2 Интегрируемые гамильтоновы системы

1.2.1 Понятие интегрируемой системы

Определение 1.5. Четномерное многообразие M^{2n} называется *симплектическим*, если на нем задана невырожденная замкнутая 2-форма ω . Косым градиентом функции $f \in C^1(M^{2n})$ называется вектор $\text{sgrad } F = \omega^{-1}df$.

Симплектическая структура ω задает *структуру Пуассона* на пространстве непрерывно дифференцируемых функций $C^1(M^{2n})$. А именно, скобка Пуассона $\{.,.\} : C^1(M^{2n}) \times C^1(M^{2n}) \rightarrow C(M^{2n})$, примененная к двум функциям f и g , примет вид

$$\{f, g\} = \text{sgrad } F(g) = -\text{sgrad } g(f) = \omega_{ij}^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad (1.2.1)$$

где x_i – некоторая система координат.

Определение 1.6. Гладкая динамическая система v , заданная на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) , называется *гамильтоновой*, если существует функция $H \in C^1(M^{2n})$, такая что $v = \text{sgrad } H$. Функция H называется гамильтонианом системы.

Говорят, что функция f является *первым интегралом* динамической системы v , если она сохраняет свое значение вдоль траекторий системы. Иными словами, выполняется условие $v(f) = 0$. В случае гамильтоновой системы это условие трансформируется в условие коммутирования функций f и H относительно пуассоновой структуры $\{H, f\} = 0$. Отметим, что $\{H, H\} = 0$ в силу косои симметрии структуры ω . Таким образом, любая гамильтонова система имеет первый интеграл – ее гамильтониан.

Определение 1.7. Пусть гамильтонова система с гамильтонианом H , заданная на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) , имеет набор функционально независимых первых интегралов f_1, \dots, f_n . Потребуем, что любые две функции из этого набора коммутируют относительно скобки Пуассона, и все векторные поля $\text{sgrad}(f_i)$ полны. Такую гамильтонову систему назовем *вполне интегрируемой по Лиувиллю*.

Определение 1.8. *Отображением момента* называется отображение $\mathcal{F} : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $\mathcal{F}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. *Бифуркационной диаграммой* $\Sigma(\mathcal{F})$ называется образ всех особых точек отображения момента (точек, в которых система дифференциалов (df_1, \dots, df_n) линейно зависима).

Отметим, что в силу функциональной независимости бифуркационная диаграмма имеет нулевую меру. В случае систем с двумя степенями свободы $n = 2$ она, как правило, состоит из дуг кривых и конечного числа изолированных точек.

1.2.2 Слоение Лиувилля. Теорема Лиувилля

Функции f_1, \dots, f_n , отвечающие вполне интегрируемой системе, разбивают многообразие M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей своих уровней

$$T_{\xi_1, \dots, \xi_n} = \{X \in M^{2n} : f_1(X) = \xi_1, \dots, f_n(X) = \xi_n\}.$$

Полученное таким образом слоение называется *слоением Лиувилля*. Отметим, что каждый слой этого слоения инвариантен относительно потока динамической системы $v = \text{sgrad } H$, т.к. $\{H, f_i\} = 0$. *Регулярным слоем* слоения Лиувилля называется слой T_ξ , в каждой точке которого система дифференциалов (df_1, \dots, df_n) является линейно независимой. В противном случае слой называется *особым*, а *ранг особой точки* на этом слое определяется рангом системы дифференциалов в ней. Структура слоения Лиувилля в окрестности особого слоя устроена просто и описывается знаменитой теоремой Лиувилля.

Теорема 1.3 (Лиувилль). *Пусть на M^{2n} задана вполне интегрируемая система с гамильтонианом H и T_ξ -регулярная, компактная, связная компонента поверхности уровней интегралов f_1, \dots, f_n . Можно считать, что $f_1 = H$. Тогда:*

1. T_ξ диффеоморфно n -мерному тору T^n (этот тор называется *тором Лиувилля*);
2. слоение Лиувилля в некоторой окрестности тора Лиувилля диффеоморфно прямому произведению тора на n -мерный диск D^n ;
3. в окрестности тора Лиувилля $T^n \times D^n$ существуют координаты $(s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_n)$ (координаты действие-угол) такие, что $s_i = s_i(f_1, \dots, f_n)$, t_i – координаты на торе T^n , и в этих координатах структура ω принимает канонический вид, а векторное поле $v = \text{sgrad } H$ выпрямляется.

Отметим, что в силу функциональной независимости первых интегралов почти все слои слоения Лиувилля являются регулярными. Тем не менее, слоение Лиувилля в окрестности особых слоев полностью определяет как локальную структуру слоения, так и глобально топологию тотального многообразия, и поэтому вызывает большой интерес.

1.3 Инварианты слоения Лиувилля интегрируемых систем

1.3.1 Лиувиллево эквивалентные системы

В дальнейшем будем полагать, что интегрируемая система имеет две степени свободы, т.е. $n = 2$. В качестве набора первых интегралов будем рассматривать пару функций (H, F) , содержащий гамильтониан H и дополнительный первый интеграл F , независимый от гамильтониана. Ограничим слоение Лиувилля на поверхность уровня гамильтониана $Q_{h_0}^3 = \{X \in M^4 :$

$H(X) = h_0\}$. Потребуем, чтобы эта поверхность была компактной и неособой, т.е. $\forall X \in Q_{h_0}^3: dH(X) \neq 0$. Таким образом, поверхность является компактным многообразием, называемым *изоэнергетическим*. Также потребуем, чтобы функция F на $Q_{h_0}^3$ являлась *функцией Ботта*, т.е. все ее особые точки организовывались в *критические подмногообразия*, причем в каждой точке этих многообразий ограничение функции F на трансверсаль являлось функцией Морса. В силу компактности $Q_{h_0}^3$ и того, что $\text{sgrad } H \neq 0$, есть три возможности: критическое подмногообразие диффеоморфно окружности, двумерному тору или бутылке Клейна. В дальнейшем ограничимся только случаем критических окружностей. Это связано с тем, что определенными заменами можно избавиться от критических торов и бутылок Клейна. Так, критический тор можно перевести в регулярный заменой дополнительного первого интеграла F (как правило, замена на \sqrt{F}). От критической бутылки Клейна можно избавиться переходом к новой системе $(\tilde{Q}^3, \tilde{H}, \tilde{F})$, которая двулистно накрывает исходную систему. Отметим, что изоэнергетическое многообразие $Q_{h_0}^3$ всегда ориентированное.

Определение 1.9. Вполне интегрируемые системы $(M_1^4, \omega_1, H_1, F_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, H_2, F_2)$, ограниченные на неособые изоэнергетические многообразия Q_1^3 и Q_2^3 соответственно, называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует диффеоморфизм $Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$, который переводит слои одного слоения Лиувилля в слои другого слоения, при этом сохраняющий ориентацию как самих изоэнергетических многообразий, так и ориентацию критических окружностей (заданных потоками гамильтонианов).

1.3.2 Понятие 3-атома

Определение 1.10. Пусть (M^4, ω, H, F) – вполне интегрируемая система, $Q_{h_0}^3$ – неособое компактное изоэнергетическое многообразие, $L \subset Q_{h_0}^3$ – слой в его слоении Лиувилля, содержащий критическую окружность. *3-атомом* называется достаточно малая окрестность особого слоя $U(L)$ в $Q_{h_0}^3$, заданная неравенствами $F(L) - \varepsilon < F(X) < F(L) + \varepsilon$, которая расслоена на поверхности уровня функции F и определена с точностью до лиувиллевой эквивалентности.

Классификация 3-атомов также была предложена А. В. Болсиновым, А. А. Ошемковым и А. Т. Фоменко (см. [1]) и опирается на классификацию 2-атомов, т.е. ориентированных атомов. А именно, верна следующая теорема.

Теорема 1.4 (Фоменко, теорема 3.3 [1] т. I гл. 3). • *Трехмерное многообразие $U(L)$, соответствующее 3-атому, является многообразием Зейферта, особые слои которого (если они существуют) имеют один и тот же тип $(2, 1)$. При этом эти особые слои являются критическими окружностями интеграла F , лежащими на особом слое L .*

- *Если особых слоев у этого расслоения Зейферта нет, то многообразие $U(L)$ является прямым произведением $P^2 \times S^1$, где P^2 – двумерная ориентируемая поверхность с краем.*

- Структура расслоения Зейферта и структура слоения Лиувилля на $U(L)$ согласованы в том смысле, что каждый слой расслоения Зейферта (окружность) лежит на слое слоения Лиувилля

Кроме того, из боттовости первого интеграла F может быть установлена связь 3-атомов с 2-атомами.

Теорема 1.5 (Фоменко, теорема 3.4 [1] т. I гл. 3). *Рассмотрим проекцию $\pi : U(L) \rightarrow P^2$ расслоения Зейферта окрестности особого слоя слоения Лиувилля на базу. Назовем звездочками образы особых слоев расслоения Зейферта на P^2 .*

- Образ слоения Лиувилля при проекции π задает структуру ориентированного атома на P^2 .
- Проекция π задает взаимно однозначное соответствие между 3-атомами и 2-атомами, снабженными звездочками.

Из последней теоремы вытекает следующая конструкция построения 3-атомов.

1. Минимаксный 3-атом A отвечает локальным экстремумам функции F на $Q_{h_0}^3$ и имеет структуру прямого произведения 2-атома A на окружность.
2. Седловой 3-атом без звездочек устроен как прямое произведение седлового 2-атома на окружность.
3. Седловой 3-атом со звездочками может быть получен из некоторого 3-атома $P^2 \times S^1$ без звездочек при помощи факторизации под свободным действием группы \mathbb{Z}_2 . Группа действует на каждом из сомножителей. На S^1 она устроена как центральная симметрия. На P^2 она должна сохранять ориентацию P^2 и переводить слои в слои, при этом неподвижными точками такого действия могут выступать только особые точки 2-атома (они и станут звездочками нового 3-атома). Здесь исходный 3-атом без звездочек называется *дублем* полученного 3-атома со звездочками. Отметим, что дубль определен неоднозначно.

Кроме того отметим, что 3-атомы описывают перестройки торов Лиувилля при переходе через особый слой с ростом значения первого интеграла F . В нашей работе 3-атомы, появляющиеся в натуральных системах, будут рассмотрены исключительно с этой точки зрения. Примеры 3-атомов приведены на рис. 1.2.

1.3.3 Инвариант Фоменко–Цишанга. Критерий Лиувиллевой эквивалентности

Как и в случае слоения линиями уровня функции Морса, определим *граф Роба* как базу слоения Лиувилля изоэнергетического многообразия и *грубую молекулу* как пополнение графа

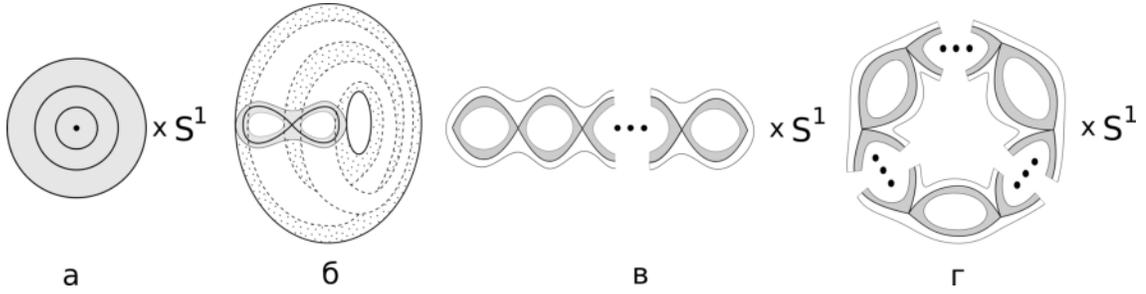


Рис. 1.2: Примеры 3-атомов. На рис. а изображен 3-атом A , на рис. б – 3-атом A^* , на рис. в – 3-атом из бесконечной серии B_k , на рис. д – 3-атом из серии C_k

Риба информацией о 3-атомах. Полученный инвариант лиувиллевой эквивалентности также называется *инвариантом Фоменко*. Однако, в отличие от двумерного случая, такой инвариант перестает быть полным. А именно, для определения глобальной структуры слоения Лиувилля необходимо знать, как связаны друг с другом торы Лиувилля, отвечающие точкам одного ребра графа Рыба. Для этого введем понятие допустимого базиса.

Пусть V – некоторый 3-атом. Ориентируем его граничные торы согласно глобальной ориентации на 3-атоме. *Допустимый базис* (λ, μ) на граничном торе Лиувилля определим следующим образом.

1. Если V является минимаксным атомом A (т.е. полноторием), в качестве цикла λ на его границе возьмем цикл, стягивающийся на этом полнотории. В качестве цикла μ возьмем дополняющий к циклу λ до базиса, и ориентируем циклы, чтобы пара (λ, μ) была положительно ориентированной.
2. Пусть V является седловым 3-атомом без звездочек $P^2 \times S^1$ (т.е. имеет тривиальную структуру расслоения на окружности). В качестве цикла λ выберем некоторый слой этого расслоения (он гомологичен критической окружности на 3-атоме), а в качестве цикла μ возьмем пересечение граничного тора с некоторым глобальным трансверсальным сечением 3-атома, пересекающим каждый слой-окружность ровно в одной точке (это трансверсальное сечение – база расслоения, т.е. вложение 2-атома P^2). Как и в прошлом случае, полученные циклы ориентируем положительно. Ясно, что цикл μ зависит от выбора сечения, и поэтому задан неоднозначно. Тем не менее, два допустимых базиса связаны друг с другом следующими соотношениями (с точностью до гомологичности):

$$\begin{cases} \lambda' = \lambda, \\ \mu' = \mu + k\lambda, \end{cases}$$

где k есть целое число, причем сумма этих коэффициентов по всем граничным торам 3-атома равна нулю.

3. Пусть V является седловым 3-атомом со звездочками $P^2 \times S^1/\mathbb{Z}_2$. Цикл λ выберем аналогичным способом как некоторый слой расслоения Зейферта на граничном торе. Однако в этом случае уже не существует глобального сечения, пересекающего каждый слой расслоения в одной точке. Тем не менее, существует сечение, пересекающее каждый неособый слой расслоения Зейферта (в том числе и λ) в двух точках. Это сечение – вложение дубля \hat{P}^2 . Рассмотрим пересечение дубля с граничным тором и обозначим его $\hat{\mu}$. Существуют две возможности: либо цикл $\hat{\mu}$ состоит из двух непересекающихся циклов, каждый из которых имеет с циклом λ одну общую точку; либо цикл $\hat{\mu}$ связан. В первом случае в качестве цикла μ возьмем одну из компонент связности $\hat{\mu}$. Во втором случае положим цикл μ следующим образом: $\mu = \frac{1}{2}(\lambda + \hat{\mu})$. Полученные циклы действительно являются базисными на торе. Последним шагом к построению допустимого базиса добавим к циклам μ_i на каждом граничном торе 3-атома циклы, кратные λ , так, чтобы было верно равенство

$$\sum_i \mu_i = \frac{1}{2}(\partial P^2 + s\lambda),$$

где s – количество звездочек, т.е. неподвижных точек действия \mathbb{Z}_2 на P^2 . И опять, цикл μ задан с точностью до выбора трансверсального сечения, и два допустимых базиса связаны теми же соотношениями:

$$\begin{cases} \lambda' = \lambda, \\ \mu' = \mu + k\lambda. \end{cases}$$

Определение 1.11. Пусть грубая молекула содержит ребро, концы которого соответствуют 3-атомам V_1 и V_2 . Выберем допустимые базисы на граничных торах этих 3-атомов и перенесем их на тор Лиувилля, соответствующий середине ребра. Полученные два базиса на этом торе задают целочисленную матрицу перехода. Она называется *матрицей склейки*, соответствующей ребру.

Отметим, что матрица склейки определена неоднозначно и зависит от выбора допустимого базиса. Таким образом грубая молекула, оснащенная матрицами склейки, является хоть и более точным инвариантом, но при этом сложно сопоставимым. Поэтому вместо матрицы склейки определим числовые метки, по которым матрицу можно восстановить с точностью до выбора допустимого базиса. Пусть матрица имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Определим метки r и ε по формулам

$$r = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta}, & \beta \neq 0 \\ \infty, & \beta = 0 \end{cases} \quad \varepsilon = \begin{cases} \text{sign}(\beta), & \beta \neq 0 \\ \text{sign}(\alpha), & \beta = 0 \end{cases}$$

Разрежем теперь молекулу по ребрам с конечной меткой r и назовем полученные подграфы, не содержащие атомов A , *семьями*. Для каждого ребра в семье определим его вклад следующим образом: $\Theta = \left[\frac{\alpha}{\beta} \right]$, если ребро выходящее, $\Theta = \left[-\frac{\delta}{\beta} \right]$, если ребро входящее, $\Theta = \left[-\frac{\gamma}{\alpha} \right]$, если ребро внутреннее. Ориентация ребер выбирается произвольно для всей молекулы. Метку n семьи определим как сумму вкладов ее ребер.

Лемма 1.6. *Метки r , ε и n не зависят от выбора допустимого базиса на границах 3-атомов.*

Определение 1.12. *Меченой молекулой (инвариантом Фоменко–Цишанга) называется грубая молекула, снабженная метками r , ε и n .*

Построенный выше инвариант уже дает информацию о глобальном устройстве слоения Лиувилля, а также позволяет определять лиувиллево эквивалентные системы.

Теорема 1.7 (Фоменко–Цишанг). *Вполне интегрируемые системы $(M_1^4, \omega_1, H_1, F_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, H_2, F_2)$, ограниченные на неособые изоэнергетические многообразия Q_1^3 и Q_2^3 соответственно, лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

Более подробно о классификации атомов и интегрируемых гамильтоновых системах см. в книге [1], а также в оригинальных работах А.Т.Фоменко и Х.Цишанга [4], [5] и [6].

1.4 Невырожденные особенности ранга 0 интегрируемых систем. Полулокальная структура

1.4.1 Понятие невырожденной особенности ранга 0

Помимо структуры слоения Лиувилля в ограничении на неособые уровни энергии интересен вопрос о его локальном устройстве в окрестности особых слоев меньшего ранга. Точку $X \in M^4$ назовем *особой точкой ранга ноль*, если в этой точке дифференциалы первых интегралов dH и dF обращаются в ноль. Особый слой, содержащий точку ранга ноль, также назовем *слоем ранга ноль*. В этом случае точка X остается неподвижной точкой потоков $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } F$. Иными словами, точка является неподвижной при пуассоновом действии группы \mathbb{R}^2 на M^4 . Следовательно, оно действует и на касательном пространстве $T_X(M^4)$. Вследствие того, что потоки интегралов сохраняют симплектическую структуру и коммутируют, полученное действие определяется некоторой абелевой группой $G(H, F)$, лежащей в симплектической группе $Sp(4, \mathbb{R})$.

Определение 1.13. Пусть X – особая точка ранга 0, $G(H, F)$ – группа, задающая пуассоновое действие интегрируемой системы на $T_X(M^4)$. Пусть $K(H, F)$ – алгебра Ли этой группы, причем она является картановской подалгеброй в $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$. Тогда точка X называется *невырожденной*.

Напомним, что подалгебра \mathfrak{h} полупростой алгебры \mathfrak{g} называется *картановской*, если это максимальная коммутативная подалгебра, состоящая из полупростых элементов (для которых присоединенный оператор ad_x диагонализуем). Определить, является ли подалгебра $K(H, F)$ картановской, можно следующим способом. Она порождена линеаризацией потоков первых интегралов $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } F$. Они имеют следующий вид: $A_H = \omega^{-1}d^2H$ и $A_F = \omega^{-1}d^2F$, где

$d^2 = (\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j})$ – матрица двойных производных в некоторой системе координат. Тогда подалгебра $K(H, F)$ является картановской, если ее образующие линейно независимы (т.о. она двумерна), и существует их линейная комбинация $\lambda A_H + \mu A_F$, которая имеет различные собственные значения.

Теорема 1.8. *Существуют четыре типа подалгебр Картана в $sp(4)$ с точностью до сопряжения над \mathbb{R} :*

$$\begin{array}{ll}
 1: \begin{pmatrix} 0 & 0 & -A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B \\ A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \end{pmatrix} & 2: \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 3: \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{pmatrix} & 4: \begin{pmatrix} -A & -B & 0 & 0 \\ B & -A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & -B \\ 0 & 0 & B & A \end{pmatrix},
 \end{array}$$

где A, B – вещественные коэффициенты.

Тип подалгебр 1 называется *центр-центр*, тип 2 – *центр-седло*, тип 3 – *седло-седло*, тип 4 – *фокус-фокус*. невырожденная особая точка, имеющая одну из приведенных подалгебр Картана, имеет соответствующее название. Следствием этой теоремы является локальное устройство функций H и F в окрестности особой точки.

Теорема 1.9. *Пусть многообразие M^4 , симплектическая структура ω и функции H и F являются вещественно-аналитическими. Тогда в окрестности невырожденной особой точки существует каноническая система координат (p_1, p_2, q_1, q_2) , в которой функции H и F имеют вид $H = H(\alpha, \beta)$, $F = F(\alpha, \beta)$. При этом*

1. в случае *центр-центр*

$$\alpha = p_1^2 + q_1^2, \quad \beta = p_2^2 + q_2^2$$

2. в случае *центр-седло*

$$\alpha = p_1 q_1, \quad \beta = p_2^2 + q_2^2$$

3. в случае *седло-седло*

$$\alpha = p_1 q_1, \quad \beta = p_2 q_2$$

4. в случае *фокус-фокус*

$$\alpha = p_1 q_1 + p_2 q_2, \quad \beta = p_1 q_2 - p_2 q_1$$

1.4.2 Локальная структура слоения

Из теоремы 1.9 вытекает локальное устройство слоения Лиувилля в четырехмерной окрестности особой точки в M^4 . Так, в окрестности точки типа центр-центр оно устроено как прямое произведение двух центральных особенностей двумерной функции Морса, т.е. 2-атомов A . Иными словами, эта окрестность с проколотой особой точкой расслоена на концентрические трехмерные сферы, каждая из которых в свою очередь расслоена на двумерные торы Лиувилля и две зацепленные критические окружности (см. рис. 1.3, а). Слоение в окрестности центр-седло устроено как прямое произведение центральной особенности на седловую, а слоение в окрестности седло-седло – как произведение двух седловых особенностей (рис. 1.3, b и c). Наконец, зададим в окрестности точки фокус-фокус комплексную структуру $\mathbb{C}^2 = (p_1 + iq_1, p_2 + iq_2)$. Тогда слоение Лиувилля этой окрестности задается уровнями энергии функции $f(u, v) = uv$, и слой, содержащий особую точку, диффеоморфен круговому конусу.

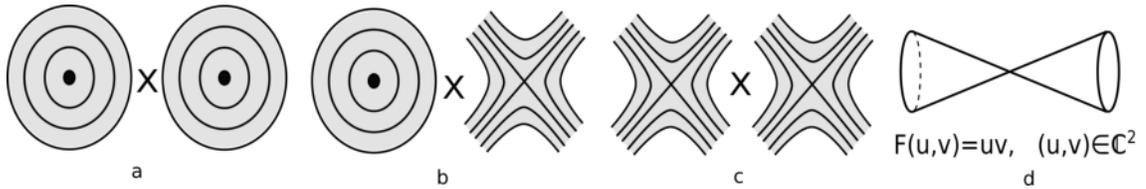


Рис. 1.3: Локальная структура слоения в невырожденной точке ранга 0. На рис. а, b, c, d изображены случаи центр-центр, центр-седло, седло-седло и фокус-фокус соответственно

Кроме того, из теоремы 1.9 следует локальное устройство образа отображения момента в окрестности точки $(H(X), F(X))$. Так, на плоскости значений первых интегралов $\mathbb{R}^2(H, F)$ перейдем к координатам (α, β) . Если особая точка X имеет тип не фокус-фокус, и функция α (или β) отвечает центральной особенности, то образ лежит в полуплоскости $\alpha \geq 0$ (либо $\beta \geq 0$), при этом ее граница лежит в бифуркационной диаграмме. Если функция отвечает седловой особенности, критическим значениям интегралов отвечает прямая $\alpha = 0$ ($\beta = 0$). Если же точка X фокальная, ей соответствует изолированное критическое значение $(H(X), F(X))$ на плоскости $\mathbb{R}^2(H, F)$. Рис. 1.4 иллюстрирует приведенные случаи.

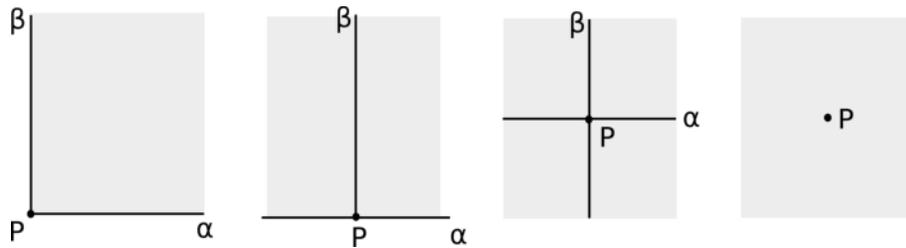


Рис. 1.4: Локальная структура бифуркационной диаграммы в окрестности значения центр-центр, центр-седло, седло-седло и фокус-фокус соответственно

Однако, возможны случаи, когда несколько особенностей накладываются друг на друга,

давая, например, два “крестика” в случае седло-седло, совпадающих только в точке пересечения. Поэтому введем следующие дополнительные условия невырожденности.

1. Каждый слой слоения Лиувилля компактен.
2. Все особые точки, лежащие на одном особом слое, являются невырожденными.
3. Бифуркационная диаграмма в окрестности особого значения $\mathcal{F}(X)$ имеет вид, показанный на рис. 1.4.
4. Прямые $H = \text{const}$ пересекают дуги бифуркационной диаграммы трансверсально.
5. Особый слой является полным прообразом особого значения $\mathcal{F}(X)$, и его 4-окрестность является полным прообразом некоторого диска с центром в точке $\mathcal{F}(X)$. Иными словами, особый слой, как и его 4-окрестность, связны.
6. Будем считать, что все рассматриваемые объекты, а именно, многообразия, симплектическая структура и первые интегралы, являются вещественно-аналитическими.

Помимо приведенных шести условий добавим условие нерасщепляемости

7. На одном слое не могут лежать одновременно точки типа седло-седло и фокус-фокус.

1.4.3 Полулокальная структура слоения. Особенности типа центр-центр и центр-седло

Пойдем дальше и опишем структуру слоения Лиувилля не только локально в окрестности особой точки, но полулокально в инвариантной четырехмерной окрестности слоя, содержащего особые точки. Напомним, что мы работаем в условиях невырожденности, данных выше. Фундаментальные результаты в этой области были получены А. В. Болсиновым, В. С. Матвеевым и Т. З. Нгуеном (Н. Т. Зунгом). Имеет место следующее предложение.

Предложение 1.10. *1. Особый слой, содержащий точку типа центр-центр, нульмерен и состоит из этой точки. Слой, содержащий точку типа центр-седло, одномерен и представляет собой некоторый граф. Слой, содержащий точку типа седло-седло или фокус-фокус, двумерен.*

2. *Все невырожденные особые точки, лежащие на одном слое, имеют один и тот же тип. Иными словами, один и тот же особый слой не может содержать точки типа седло-седло и фокус-фокус одновременно.*

В случае особенностей типа центр-центр полулокальная структура слоения очевидным образом сводится к локальной, описанной выше. В случае центр-седло имеет место следующая теорема.

Теорема 1.11. *Любая особенность типа центр-седло Лиувиллево эквивалентна особенности вида прямого произведения $A \times P$, где P – некоторый седловой 2-атом. При этом особый слой совпадает с критическим графом 2-атома.*

1.4.4 Особенности типа седло-седло

Полулокальные особенности типа седло-седло имеют более сложную структуру.

Предложение 1.12. *Пусть s – число точек типа седло-седло на особом слое L . Тогда этот слой является двумерным клеточным комплексом, склеенным из $4s$ квадратов. Каждая его клетка является орбитой пуассонова действия (двумерной, одномерной или нульмерной). Стороны квадратов лежат в одном из графов K_1 или K_2 , представляющих собой критические графы некоторых 2-атомов, при этом противоположные стороны квадрата всегда лежат в одном графе, а соседние – в разных.*

Определение 1.14. *Cl -типом особенности седло-седло называется тройка (L, P_1, P_2) вместе с парой вложений $\xi_{1,2} : K_{1,2} \rightarrow L^{(1)}$, где L – особый слой, P_1 и P_2 – некоторые 2-атомы, K_1 и K_2 – их критические графы, $L^{(1)}$ – одномерный остов комплекса L*

Иными словами, Cl -тип особенности – это способ, по которому особый слой этой особенности натягивается на объединение критических графов двух 2-атомов. Оказывается, что это полностью определяет структуру слоения Лиувилля в окрестности особого слоя.

Теорема 1.13 (В. С. Матвеев). *Cl -тип является полным инвариантом Лиувиллевой эквивалентности особенностей типа седло-седло.*

Классификация седловых особенностей сложности 1 в терминах Cl -типов была предложена Л. М. Лерманом и Я. Л. Уманским, а сложности 2 – А. В. Болсиновым.

Несмотря на свою универсальность, описание особенностей их Cl -типом весьма громоздко и проявляет себя только в случаях маленькой сложности особенностей. Более наглядное описание было предложено Н. Зунгом в терминах почти прямых произведений. Пусть P_1 и P_2 – два 2-атома, и f_1, f_2 – их функции Морса. Пусть существует конечная группа G , действующая на каждом 2-атоме и сохраняющая их функции Морса. На прямом произведении $P_1 \times P_2$ задана симплектическая структура как сумма двух структур 2-атомов, а также действие группы G , сохраняющее естественное слоение прямого произведения. Пусть это действие свободно. Тогда фактор-многообразие $P_1 \times P_2/G$ имеет структуру слоения Лиувилля, и является полулокальной особенностью типа седло-седло.

Определение 1.15. *Описанная особенность седло-седло называется особенностью типа почти прямого произведения.*

Теорема 1.14 (Н. Зунг). *Пусть четырехмерная особенность типа седло-седло удовлетворяет условиям невырожденности 1)-б), приведенным выше. Тогда она имеет вид почти прямого произведения.*

Отметим, что теорема не утверждает, что представление почти прямым произведением однозначно. Тем не менее, в виду наглядности и простоты мы будем использовать именно его.

1.4.5 Особенности типа фокус-фокус

Фокальная особенность, несмотря на свое сходство с седловой, устроена значительно проще. Рассмотрим особый слой L , содержащий k особых точек типа фокус-фокус. Отметим, что на L нет одномерных орбит (критических окружностей) в силу того, что точка $(H(L), F(L))$ является изолированным критическим значением в образе отображения момента. Более того, функция β задает действие окружности S^1 , свободное на всем слое L за исключением особых точек. Из этих двух факторов вытекает следующая теорема.

Теорема 1.15 (Лемма 9.7 [1] т. I гл. 9). *Особый слой представляет собой клеточный комплекс, содержащий k двумерных клеток-колец и k точек, при этом каждая точка лежит в границе ровно двух колец. Иными словами, слой L гомеоморфен двумерному тору с k перетяжками.*

Оказывается, структура слоения в инвариантной окрестности особого слоя $(U(L))$ полностью определяется самим слоем L , или же количеством особых точек на нем.

Теорема 1.16 (Теорема 9.10 [1] т. I гл. 9). *Число k особых точек типа фокус-фокус на особом слое является единственным, а потому полным топологическим инвариантом особенности слоения Лиувилля типа фокус-фокус. Иными словами, две особенности типа фокус-фокус эквивалентны при помощи послойного гомеоморфизма тогда и только тогда, когда их сложности совпадают.*

На практике сложность фокальной особенности возможно вычислить с помощью матрицы монодромии. А именно, в образе отображения момента проведем цикл γ , отрезающий изолированную критическую точку фокус-фокус от остальной бифуркационной диаграммы. Рассмотрим прообраз этого цикла в многообразии M^4 . Полученное трехмерное многообразие является локально-тривиальным расслоением, где в качестве слоя выступает тор Лиувилля, а в качестве базы – цикл γ . Отметим произвольную точку X_0 на цикле и проведем ее по этому циклу в себя. Такой обход задает диффеоморфизм соответствующего тора Лиувилля $\psi : T_{X_0} \rightarrow T_{X_0}$, который, в свою очередь, задает автоморфизм фундаментальной группы этого тора $\phi : \pi(T_{X_0}) \rightarrow \pi(T_{X_0})$. Как известно, $\pi(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Таким образом, автоморфизм ϕ задается целочисленной унимодулярной матрицей с точностью до сопряжения. Эта матрица называется *матрицей монодромии*.

Теорема 1.17 (Теорема 9.11 [1] т. I гл. 9). *Если на особом слое лежит k точек типа фокус-фокус, матрица монодромии имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

В связи с этим число k (сложность особенности) мы также будем называть меткой монодромии.

1.5 Вырожденные одномерные орбиты интегрируемых систем. Локальная структура слоения Лиувилля

1.5.1 Понятие вырожденной одномерной орбиты. Топологическая устойчивость

Вернемся к рассмотрению неособых изоэнергетических многообразий $Q_{h_0}^3$. Так же, как и ранее, потребуем, чтобы особые точки первого интеграла F организовывались в одномерные критические орбиты пуассонова действия группы \mathbb{R}^2 , однако теперь опустим требование их невырожденности. Иными словами, допустим существование таких орбит, что ограничение функции F на их трансверсали не является морсовской. Можно привести следующее эквивалентное определение.

Определение 1.16. Пусть γ – одномерная орбита пуассонова действия, т.е. $\exists \lambda, \mu$, такие что $\lambda \operatorname{sgrad} H + \mu \operatorname{sgrad} F = 0$ в любой точке орбиты. Тогда орбита γ является *вырожденной*, если матрица $\lambda d^2 H + \mu d^2 F$, записанная в некоторой системе координат, является вырожденной.

Как правило, интегрируемая система, определенная на многообразии $Q_{h_0}^3$ с вырожденной орбитой, не является *топологически устойчивой*, т.е. при малом изменении значения h_0 гамильтониана системы $Q_{h_0 \pm \varepsilon}^3$ не являются лиувиллево эквивалентными исходной. Это объясняется, в частности, тем, что множество функций Морса всюду плотно в пространстве гладких (либо вещественно-аналитических) функций, а вырожденные особенности функции при ее малом возмущении просто исчезают или расщепляются на невырожденные (см. пример на рис. 1.5, 1.6, 1.7). В образе отображения момента точки $(H(\gamma), F(\gamma))$, соответствующие таким расщепляющимся вырожденным орбитам γ , лежат в замыкании невырожденных дуг бифуркационной диаграммы, причем эти дуги пересекаются не трансверсально, образуя каспы, касание и пр.

В связи с неустойчивостью системы интерес вызывает структура слоения в четырехмерной окрестности слоя, содержащего вырожденную орбиту.

1.5.2 Типичные примеры вырожденных одномерных орбит

Приведем несколько примеров вырожденных орбит, встречающихся в натуральных системах. Примеры будут приводиться на модельных системах, однако терминология применима для любых систем, лиувиллево эквивалентных модельным.

Пример 1. Параболическая орбита. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3(p_1, q_1, p_2)$ пару функций

$$H = p_2, \quad F = p_1^2 + q_1^3 + p_2 q_1.$$

Продолжим их на многообразии $S^1 \times \mathbb{R}^3(p_1, q_1, p_2)$ со стандартной симплектической структурой. Мы получили вполне интегрируемую систему. Ограничим функцию F (как функцию переменных (p_1, q_1)) на трансверсаль к некоторой одномерной орбите в многообразии $\{H = p_2 = \text{const}\}$. Эта функция является функцией Морса при $p_2 \neq 0$. Следовательно, орбита, отвечающая точке $(p_1, q_1, p_2) = (0, 0, 0)$, является вырожденной. Согласно несложным вычислениям, при $p_2 < 0$ функция F имеет две невырожденные особенности: эллиптическую и гиперболическую. При $p_2 > 0$ особых точек не существует. Слоение Лиувилля в окрестности особого слоя изображено на рис. 1.5.

Как видно, в данном случае эллиптическая и гиперболическая орбита при изменении уровня гамильтониана сливаются в одну вырожденную орбиту и исчезают. В образе отображения момента такой особенности соответствует точка возврата.

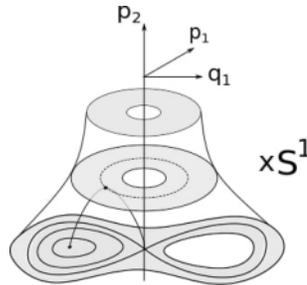


Рис. 1.5: Слоение Лиувилля с случае параболической орбиты.

Пример 2. Эллиптическая вилка (удвоение периода). Как и в предыдущем примере, положим симплектическое многообразие $S^1 \times \mathbb{R}^3(p_1, q_1, p_2)$ и первые интегралы в следующем виде.

$$H = p_2, \quad F = p_1^2 + q_1^4 + p_2 q_1^2.$$

Как и ранее, функция F , ограниченная на трансверсаль к орбите, является функцией Морса только при $p_2 \neq 0$. Следовательно, орбита, отвечающая точке $(p_1, q_1, p_2) = (0, 0, 0)$, является вырожденной. При $p_2 > 0$ функция F имеет одну эллиптическую особенность, при $p_2 < 0$ она имеет три особенности: две эллиптические и одну гиперболическую. На рис. 1.6 изображено слоение.

В этом случае три особенности объединяются в одну, происходит удвоение эллиптических окружностей. Такую особенность назовем *ориентируемой эллиптической вилкой*. Бифуркационная диаграмма в окрестности образа такой орбиты состоит из двух дуг, одна из которых касается другой в своем конце. Точка касания дуг соответствует особым значениям первых интегралов.

Теперь положим на симплектическом многообразии действие группы \mathbb{Z}_2 , которое меняет знаки координат p_1 и q_1 , а окружность S^1 прокручивает на π . Такое действие сохраняет слоение, а также вырожденную орбиту $(q_2, 0, 0, 0)$. Тогда на фактор-многообразии $S^1 \times \mathbb{R}^3(p_1, q_1, p_2)/\mathbb{Z}_2$ также задано слоение с той же самой вырожденной орбитой. Однако теперь одна эллиптическая орбита и одна гиперболическая сливаются в одну эллиптическую через особый слой расслоения Зейферта типа $(2,1)$. Такую особенность назовем *неориентируемой эллиптической вилкой*.

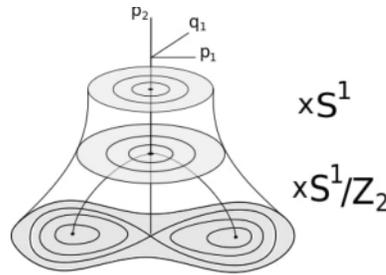


Рис. 1.6: Слоение Лиувилля с случае параболической эллиптической вилки.

Пример 3. Гиперболическая вилка. Теперь в качестве функции F положим

$$F = p_1^2 - q_1^4 - p_2 q_1^2.$$

Замена q_1 на iq_1 приводит к тому, что эллиптические особенности функции Морса становятся гиперболическими, и наоборот, гиперболические становятся эллиптическими. Таким образом происходит *ориентируемое удвоение периода*. Взяв аналогичным образом фактор по действию группы \mathbb{Z}_2 получим *неориентируемую гиперболическую вилку*. Локальная структура слоения Лиувилля изображена на рис. 1.7.

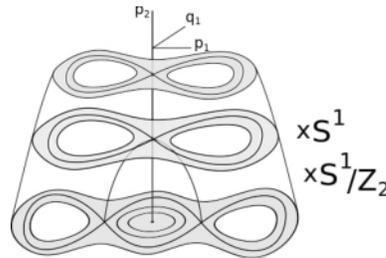


Рис. 1.7: Слоение Лиувилля с случае параболической гиперболической вилки.

1.6 Классические интегрируемые бильярды и их обобщения

1.6.1 Классическое понятие математического бильярда

Рассмотрим замкнутую область \mathcal{B} на плоскости, ограниченную кусочно-гладким простым контуром. Положим, что в изломах контура угол составляет $\frac{\pi}{2}$. Зададим движение материальной точки (бильярдного шара) в этой области по следующему закону:

1. Во внутренности области шар движется свободно, то есть прямолинейно и равномерно.
2. При ударе о гладкую дугу границы области \mathcal{B} шар меняет направление своего движения согласно абсолютно упругому закону отражения, сохраняя при этом модуль скорости.
3. При попадании в точку излома границы шар меняет направление своего движения на противоположное.

Отметим, что правило 3 вытекает из условия непрерывной зависимости траектории бильярдного шара от начальных параметров системы (положения и скорости). В силу того, что все углы изломов составляют $\frac{\pi}{2}$, определить траектории, проходящие через вершины, можно только таким способом

Динамическая система, описывающая заданное движение бильярдного шара в области \mathcal{B} , называется *классическим математическим бильярдом*. Фазовым пространством (пространством точка-импульс) такой системы является многообразие

$$M^4 = \{(\mathbf{x}, p) : \mathbf{x} \in \mathcal{B}, p \in T_{\mathbf{x}}^*\mathbb{R}^2\} / \sim,$$

где отношение эквивалентности $(\mathbf{x}_1, p_1) \sim (\mathbf{x}_2, p_2)$ подчиняется закону отражения на границе бильярда. Иными словами, две разные точки фазового считаются эквивалентными, если

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x} \in \partial \mathcal{B}, & \mathbf{x}\text{-не точка излома} \\ |p_1| = |p_2| & \text{и} \quad \langle p_1 + p_2, n(\mathbf{x}) \rangle = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x} \in \partial \mathcal{B}, & \mathbf{x}\text{-точка излома} \\ p_1 = -p_2, \end{cases}$$

где $n(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}$ обозначает нормаль к границе бильярда в точке \mathbf{x} . Известно, что такое фазовое пространство действительно является многообразием, причем оно ориентированное, некомпактное и без края.

1.6.2 Интегрируемость математического бильярда

Как можно заметить из определения математического бильярда и его фазового многообразия, эта система в строгом смысле не является гладкой. А именно, гладкость нарушается в

точках фазового пространства, соответствующих граничным точкам бильярда при естественной проекции $\pi : M^4 \rightarrow \mathcal{B}$. Обозначим через \hat{M}^4 открытую область в M^4 , в которой задана гладкая структура. Отметим, что эта область диффеоморфна $\text{int}(\mathcal{B}) \times \mathbb{R}^2$. Зададим в ней симплектическую структуру, которая в декартовых координатах имеет канонический вид. В таком случае ограничение бильярдной динамической системы является гамильтоновой системой с гамильтонианом – кинетической энергией $H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2}$. В декартовых координатах (x, y, p_x, p_y) она задается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x & \dot{p}_x = 0 \\ \dot{y} = p_y & \dot{p}_y = 0. \end{cases}$$

Кроме того, поток $\text{sgrad } H$ можно непрерывно определить в точках $X \in M^4 \setminus \hat{M}^4$ таким образом, что на его траекториях функция H сохраняет свое значение. Пусть на M^4 существует еще одна непрерывная функция F , гладкая в \hat{M}^4 , поток которой также может быть продолжен, и при этом которая функционально независима от энергии H и коммутирует с ней. Тогда мы будем называть такой математический бильярд *интегрируемым*, а функцию F – ее *первым интегралом*. Приведенное определение является обобщением интегрируемости по Лиувиллю на случай кусочно-гладких систем.

Рассмотрим изоэнергетическую поверхность $Q_{h_0}^3$ для некоторого уровня значения энергии $H = h_0$ и ее слоение Лиувилля, задаваемое функцией F . В общем случае к этой системе нельзя применять результаты общей теории гладких интегрируемых систем. Тем не менее, предположим, что все слои, за исключением конечного числа особых слоев, гомеоморфны двумерным торами, при этом перестройки торов через особые слои описываются некоторыми 3-атомами с точностью до **послойного гомеоморфизма**. Тогда будем говорить, что для бильярда выполнена *кусочно-гладкая теорема Лиувилля*. В этом случае остаются справедливы все конструкции и теоремы, изложенные выше в предположении гладкости. Поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться этими результатами.

Важный вопрос теории математических бильярдных систем заключается в том, является ли тот или иной бильярд интегрируемым. Дж. Биркгофф в [2] установил интегрируемость бильярда, ограниченного эллипсом, и выдвинул гипотезу, согласно которой бильярды в выпуклой области с гладкой границей интегрируемы лишь в случае, когда они ограничены эллипсом. В доказательстве этой гипотезы есть существенные продвижения. В случае, когда первые интегралы имеют форму многочленов, гипотеза была доказана А. А. Глущоком в [7]. В. Калошин и А. Соррентино в [8] показали, что малые интегрируемые возмущения граничного эллипса также должны быть эллипсами (т.е. доказана локальная гипотеза). В своем же исконном виде вопрос до сих пор остается открытым.

1.6.3 Биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик

Рассмотрим класс биллиардов, ограниченных дугами софокусных гипербол и эллипсов, причем углы в изломах границы положим равными $\frac{\pi}{2}$. Уравнение семейства софокусных квадрик имеет вид

$$\frac{x^2}{a + \lambda} + \frac{y^2}{b + \lambda} = 1, \quad (1.6.1)$$

где $a > b > 0$ – параметры семейства, число λ – параметр квадрики. Заметим, что при $\lambda \in (-b, +\infty)$ квадрика является эллипсом, при $\lambda \in (-a, -b)$ квадрика является гиперболой, при $\lambda < -a$ квадрика не определена. В предельном случае $\lambda = -a$ квадрика образует прямую $x = 0$, а в случае $\lambda = -b$ является фокальной прямой $y = 0$. Оказывается, такой биллиард допускает дополнительный первый интеграл. Этот факт следует из следующей леммы, доказанной, например, в [3].

Лемма 1.18. Пусть прямая l в пространстве \mathbb{R}^n пересекает квадрику Π_0 в точке x_0 и касается квадрики Π_1 , софокусной с Π_0 . Пусть Γ – касательная n -мерная плоскость к поверхности Π_0 в точке x_0 . Тогда прямая l' , симметричная прямой l относительно плоскости Γ , также касается квадрики Π_1 .

Разобьем траекторию биллиарда на прямолинейные сегменты и возьмем из них два последовательных s_1 и s_2 . Пусть сегмент s_1 касается некоторой квадрики с параметром $\lambda = \Lambda$ из софокусного семейства. Тогда, согласно лемме 1.18, сегмент s_2 также касается этой квадрики. Таким образом, значение Λ сохраняется на протяжении всей траектории. Это и есть первый интеграл биллиарда. Его аналитическая запись в декартовых координатах (x, y, p_x, p_y) имеет вид $\Lambda = F/H$, где функция F имеет вид

$$F = \frac{1}{2}(bp_x^2 + ap_y^2 - (xp_y - p_x y)^2). \quad (1.6.2)$$

Квадрика, касательная к сегментам траектории, называется *каустикой* этой траектории. Несложные вычисления показывают, что этот первый интеграл функционально независим от энергии H , и его поток $\text{sgrad } F$ полный. Таким образом, классический биллиард, ограниченный дугами софокусных квадрик, является интегрируемой системой.

Зафиксируем значение энергии $H = 1$ и рассмотрим его изоэнергетическое многообразие Q^3 . Отметим, что любой другой уровень энергии $H = h_0 > 0$ может быть получен из единичного уровня заменой параметра времени $t \rightarrow \sqrt{h_0}t$. Следовательно, все такие системы траекторно эквивалентны, а значит и лиувиллево эквивалентны. Полное описание слоений Лиувилля на Q^3 было дано В. В. Ведюшкиной в [10]. Именно, была предложена следующая классификация биллиардов, схематически изображенная на рис. 1.8. Биллиарды серии A' содержат в своей границе часть фокального отрезка, при этом индекс показывает количество фокусов, попавших на границу. Биллиарды серии A содержат часть фокального отрезка в своей внутренности, индекс

так же показывает количество фокусов. Биллиарды серии B'' , B' и B не содержат точек фокального отрезка ни на границе, не во внутренности, при этом индекс указывает на количество содержащихся отрезков фокальной прямой вне фокусов. Биллиард C_2 представляет собой кольцо, ограниченное двумя софокусными эллипсами. При этом, согласно классификации столов В.В. Ведюшкиной, столы эквивалентны, если они получаются друг из друга непрерывной деформацией границ, для которой параметр квадрики, на которой лежит изменяемая граница, не принимает значения $\Lambda = -b$.

Теорема 1.19 (В. В. Ведюшкина). *Биллиарды, принадлежащие одному и тому же типу из приведенных выше, ливиллево эквивалентны.*

Полное описание слоений Лиувилля в терминах инвариантов Фоменко–Цишанга для каждого из типов биллиардов приведено в [10].

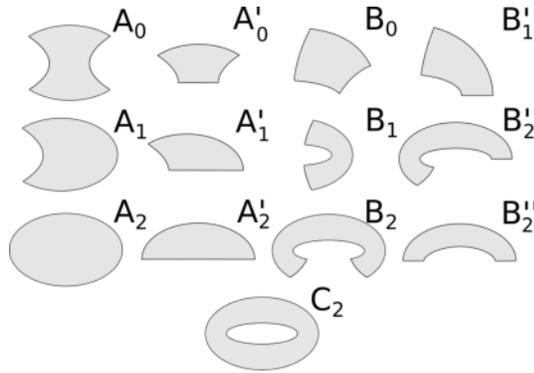


Рис. 1.8: Плоские неэквивалентные элементарные биллиарды.

1.6.4 Биллиарды на двумерных клеточных комплексах

Плоские эллиптико-гиперболические биллиарды, рассмотренные в предыдущем пункте, назовем *элементарными*. Рассмотрим два элементарных биллиарда \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 . Положим, что существуют $\gamma_1 \in \partial\mathcal{B}_1$ и $\gamma_2 \in \partial\mathcal{B}_2$ – гладкие сегменты границ, которые являются дугами одной и той же квадрики с параметром Λ , и концы которых совпадают. Определим *склежку* областей \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 вдоль дуги $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$ путем тривиального отождествления точек дуг γ_1 и γ_2 . Возьмем несколько элементарных областей $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ и склеим их по некоторым гладким сегментам границ. Полученный конечный двумерный клеточный комплекс называется *биллиардным комплексом* и впервые был введен в [16]. Его двумерные клетки назовем *листами*, одномерные – *корешками*, нульмерные – *угловыми точками*.

Определение 1.17 (В. В. Ведюшкина). Рассмотрим биллиардный комплекс $K = K_0 \cup K_1 \cup K_2$, где K_0 , K_1 и K_2 обозначают объединение его нульмерных, одномерных и двумерных клеток. Заномеруем листы комплекса и каждому корешку $e^1 \in K_1$ сопоставим циклическую перестановку

$\Sigma(e^1)$ номеров тех листов, для которых корешок e^1 лежит в границе. *Биллиардной книжкой* B называется динамическая система, описывающая движение материальной точки (биллиардного шара) в биллиардном комплексе K , заданное следующим способом.

1. Во внутренности каждого листа шар движется свободно, то есть прямолинейно и равномерно.
2. При трансверсальном ударе о гладкую граничную дугу γ_i листа \mathcal{B}_i , которая соответствует корешку e^1 , шар продолжает свое движение по листу $\mathcal{B}_{\Sigma(e)(i)}$. Иными словами, при попадании на корешок шар меняет лист согласно предписанной перестановке. При этом, если элементарные \mathcal{B}_i и $\mathcal{B}_{\Sigma(e)(i)}$ лежат по одну сторону относительно их общей дуги, то шар меняет направление движения согласно абсолютно упругому закону отражения, иначе направление не меняется.
3. Если траектория касается корешка e^1 в точке x , движение шара по этой траектории объявляется неполным и заканчивается в точке x .
4. При попадании шара в угловую точку, соответствующую корешкам e_1^1, \dots, e_k^1 , движение определяется как композиция отражений от этих корешков.

В частном случае, когда биллиардный комплекс K является топологическим ориентированным двумерным многообразием, динамическая система называется *топологическим биллиардом*. Такие биллиардные системы были впервые введены В. В. Ведюшкиной (Фокичевой) в [10] и полностью классифицированы и изучены с точки зрения их структуры и лиувиллевой эквивалентности В. В. Ведюшкиной (Фокичевой) в [17] и [18].

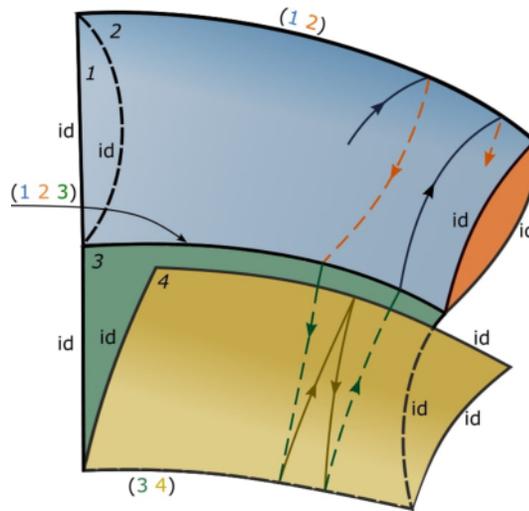


Рис. 1.9: Пример биллиардной книжки

Пункт 3 определения необходим в силу того, что при касании траектории корешка ее продолжение может быть определено неоднозначно: следует ли оставаться на исходном листе или

же перейти на другой лист согласно перестановке. При этом пункт 4 задает условие на перестановки, предписанные корешкам. Действительно, в общем случае разный порядок отражений от соседних корешков может дать разные траектории. Иными словами, движение задано неоднозначно. Необходимое и достаточное условие было предложено И. С. Харчевой в [16].

Лемма 1.20 (Харчева). Пусть e^0 – угловая точка, которая содержится в границах корешков e_1^1, \dots, e_k^1 . В каждой элементарной области эти корешки являются дугами одной из двух софокусных квадрик, пересекающихся в точке, соответствующей e^0 . Разобьем корешки на две группы K_1^1 и K_2^1 , в каждой из которых они лежат на одной и той же квадрике. В каждой группе рассмотрим произведение всех перестановок

$$\sigma_1(e^0) = \prod_{e_i^1 \in K_1^1} \Sigma e_i^1, \quad \sigma_2(e^0) = \prod_{e_i^1 \in K_2^1} \Sigma e_i^1$$

Тогда

1. перестановки $\sigma_1(e^0)$, $\sigma_2(e^0)$ заданы однозначно, то есть не зависят от порядка умножения,
2. эти перестановки коммутируют

Фазовым пространством такой системы является пространство, склеенное из пространств каждого элементарного биллиарда $M^4 = \bigsqcup_{i=1}^n M_i^4 / \sim$, где

$$M_i^4 = \{(x, p) : x \in \mathcal{B}_i, p \in T_x^* \mathbb{R}^2\},$$

а отношение эквивалентности задано на множестве $\bigsqcup_{i=1}^n \partial M_i^4$ согласно закону отражения на корешках. В работе [20] было показано, что пространство M^4 является топологическим кусочно-гладким некомпактным многообразием. В каждой его связной компоненте зададим каноническую симплектическую структуру. Непрерывно доопределим ее на все пространство. Кинетическая энергия $H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2}$ (здесь координаты (x, y, p_1, p_2) заданы локально на каждом листе), как и в классическом случае, является гамильтонианом системы, а функция Λ – дополнительным первым интегралом. Значение этой функции задает параметр квадрики, которая является каустикой траектории на каждом листе книжки. Таким образом, биллиардная книжка является интегрируемой по Лиувиллю кусочно-гладкой системой.

Впервые понятие биллиардной книжки было введено В. В. Ведюшкиной в [16] и изучалось В.В.Ведюшкиной, В.А.Кибкало, А.Т.Фоменко и И.С.Харчевой в ряде работ. Так, в [19] был представлен алгоритм, реализующий любую базу слоения Лиувилля биллиардной книжкой. В [27] и [28] В. А. Кибкало и А. Т. Фоменко была предложена реализация произвольной особенности типа седло-седло биллиардными книжками, снабженными потенциалом Гука. В настоящее время аппарат биллиардных книжек стремительно расширяется.

Глава 2

Биллиарды с упругим потенциалом в областях, ограниченных софокусными квадриками

2.1 Постановка задачи и интегрируемость

Вернемся назад к случаю плоских эллипτικο-гиперболических биллиардов, рассмотренных В. В. Ведюшкиной в [10], но теперь потребуем, что на материальную точку (биллиардный шар) действует точечный упругий потенциал Гука, размещенный в центре софокусного семейства. Более подробно, плоская компактная биллиардная область \mathcal{B} ограничена эллипсами и гиперболами, принадлежащими однопараметрическому семейству, заданному уравнением

$$x^2(b + \lambda) + y^2(a + \lambda) = (a + \lambda)(b + \lambda), \quad (2.1.1)$$

где $a > b > 0$ – параметры семейства, число λ – параметр квадрики. Потенциал $W = \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$ притягивает биллиардный шар к началу координат при $k > 0$, либо отталкивает его от начала координат при $k < 0$. На рис. 2.1 перечислены плоские биллиардные области, на которых мы заострим внимание. Все они вытекают из классификации В. В. Ведюшкиной для классической системы с той лишь разницей, что теперь учитывается пересечение области с вертикальной осью $x = 0$. Опустим без подробного анализа случаи биллиардных столов, граница которых содержит дуги вырожденных квадрик, т.е. отрезки фокальной прямой $0x$ или вертикальной оси $0y$. В разделе 2.5 будет показано, что такие случаи лиувиллево эквивалентны уже перечисленным. Без ограничения общности положим, что один из граничных эллипсов биллиарда имеет параметр $\lambda = 0$, при этом это наибольший параметр среди всех граничных квадрик (т.е. биллиард ограничен таким эллипсом “сверху”).

Таким образом, движение шара во внутренности области \mathcal{B} описывается системой диффе-

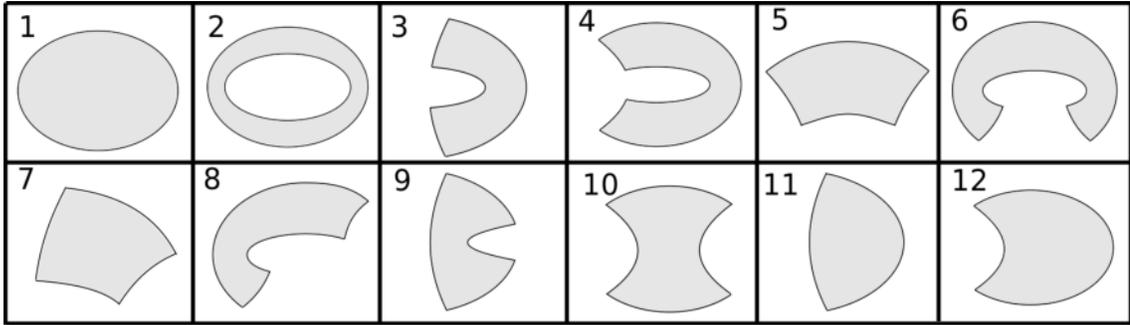


Рис. 2.1: Элементарные бильярдные столы

ренциальных уравнений – парой гармонических осцилляторов

$$\begin{cases} \ddot{x} = -kx \\ \ddot{y} = -ky. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Заметим, что в случае притягивающего потенциала $k > 0$ траектории системы состоят из дуг эллипсов, имеющих общий центр с софокусным семейством 2.1.1 (в том числе вырожденных). Действительно, пусть $k > 0$. Решение уравнений осциллятора, как известно, имеет вид

$$\begin{cases} x = A\cos\sqrt{kt} + B\sin\sqrt{kt} \\ y = C\cos\sqrt{kt} + D\sin\sqrt{kt} \end{cases},$$

где A, B, C, D есть вещественные числа. Если матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ невырождена, проведем линейную замену координат

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

В новой системе решение примет вид

$$\begin{cases} x' = \cos\sqrt{kt} \\ y' = \sin\sqrt{kt} \end{cases},$$

и траектория является окружностью. Следовательно, в исходных координатах траектория есть эллипс. Если же матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ вырождена (и б.о.о. $A \neq 0$), то существует линейная замена $x' = x, y' = y - \frac{C}{A}x$, при которой решение примет вид

$$\begin{cases} x' = A\cos\sqrt{kt} + B\sin\sqrt{kt} \\ y' = 0 \end{cases},$$

Следовательно, траектория лежит на отрезке прямой, проходящей через центр координат.

В случае же отталкивающего потенциала $k < 0$ траектории состоят из дуг гипербол (доказательство аналогично).

Построенный новый бильярд, снабженный потенциалом Гука, сохраняет интегрируемость. А именно, такая динамическая система на фазовом пространстве

$$M^4 = \{(\mathbf{x}, p) : \mathbf{x} \in \mathcal{B}, p \in T_{\mathbf{x}}^*\mathbb{R}^2\} / \sim,$$

снабженном стандартной симплектической структурой в области гладкости, является кусочно-гладкой гамильтоновой системой с гамильтонианом – полной энергией

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \frac{k}{2}(x^2 + y^2), \quad (2.1.3)$$

Утверждение 2.1.1. *Элементарный бильярд с потенциалом Гука допускает дополнительный первый интеграл вида*

$$F = \frac{1}{2}(bp_x^2 + ap_y^2 - (xp_y - p_x y)^2 + k(bx^2 + ay^2)) \quad (2.1.4)$$

Доказательство. Заметим, что функции H и F можно переписать в виде

$$H = H_0 + \bar{H}(x, y) \quad F = F_0 + \bar{F}(x, y),$$

где H_0 и F_0 – это первые интегралы классического элементарного бильярда. Из вида функции F следует, что она удовлетворяет закону отражения. Иными словами, она сохраняет свое значение в точках $\partial \mathcal{B} \times \mathbb{R}^2 \subset T^*\mathcal{B}$, эквивалентных относительно закона отражения. Действительно, функция F_0 сохраняет свое значение, так как она есть первый интеграл классической системы, а функция \bar{F} сохраняет значение, так как она не зависит от импульса бильярдного шара.

Таким образом, нам осталось проверить, коммутируют ли функции H и F в точках гладкости фазового пространства. Докажем, что $\omega^{-1}dHdF = 0$. Имеем

$$\omega^{-1}dHdF = \omega^{-1}dH_0dF_0 + \omega^{-1}d\bar{H}dF_0 + \omega^{-1}dH_0d\bar{F} + \omega^{-1}d\bar{H}d\bar{F}.$$

Заметим, что H_0 и F_0 коммутируют. Получим

$$\begin{cases} \omega^{-1}dH_0dF_0 = 0 \\ \omega^{-1}d\bar{H}d\bar{F} = 0 \\ \omega^{-1}d\bar{H}dF_0 = -kx(bp_x + y(xp_y - yp_x)) - ky(ap_y - x(xp_y - yp_x)) = -kbp_x - kapy \\ \omega^{-1}dH_0d\bar{F} = kbp_x + kapy \end{cases}$$

Следовательно, утверждение доказано. \square

Отметим несколько отличий полученного интегрируемого бильярда от классического. Во-первых, как было отмечено ранее, ограничения классического бильярда на неособые уровни

энергии $H = const$ траекторно эквивалентны друг другу. Это нарушается с добавлением потенциала. Так, будет показано, что при больших уровнях энергии система эквивалентна классическому случаю, в то время как для малых энергий она ведет себя иначе. Во-вторых, новый первый интеграл F перестал нести в себе геометрический смысл параметра каустики. Таким образом, старые методы исследования, разработанные В. В. Ведюшкиной, требуют модификаций. И наконец, у системы появляются точки устойчивого и неустойчивого равновесия (в зависимости от параметра потенциала k), что также влияет на динамику.

Целью этой главы является изучение слоения Лиувилля элементарных эллиптико-гиперболических бильярдов с потенциалом Гука. Будет разработан метод изучения таких систем, построены инварианты Фоменко–Цишанга для неособых уровней энергии, и установлена лиувиллева эквивалентность с другими известными интегрируемыми системами с двумя степенями свободы.

2.2 Метод областей возможного движения. Переменные разделения

2.2.1 Общая формализация метода

Определение 2.1 (М. П. Харламов [26]). Зафиксируем значения первых интегралов $H = h$ и $F = f$. *Областью возможного движения* (в других источниках область возможности или область допустимого движения) называется замыкание объединения всех бильярдных траекторий, соответствующих фиксированным значениям первых интегралов. Иными словами, это замкнутая область на бильярде, в которой бильярдный шар может находиться при фиксированных значениях интегралов h и f .

Очевидно, что любая область возможного движения есть образ соответствующего слоя слоения Лиувилля $T_{(h,f)} = \{X \in M^4 : H(X) = h, F(X) = f\}$ при естественной проекции $\pi : M^4 \rightarrow \mathcal{B}$ на бильярдный стол. Распространенный способ изучения слоения Лиувилля интегрируемых систем состоит в изучении областей возможного движения и их изменений при варьировании значений интегралов. В частности, эта идея хорошо применима к так называемым алгебраически разрешимым системам, изученным М. П. Харламовым в [26].

Определение 2.2. Пусть интегрируемая система $\frac{dX}{dt} = v(X)$ на симплектическом многообразии M^{2n} допускает редукцию к системе уравнений вида

$$\frac{ds_i}{dt} = \sqrt{V_i(s_i, c)}, \quad (2.2.1)$$

где s_1, \dots, s_n – *вспомогательные переменные* или *переменные разделения*, c – набор параметров, зависящих от значений первых интегралов, V_i – многочлен от переменной s_i , гладко зависящий от параметра c . При этом предположим, что фазовые координаты X зависят от переменных s

через рациональные функции от набора радикалов вида $\sqrt{s_i - const}$. В таком случае говорят, что *система алгебраически разрешима*, или что *система допускает разделение переменных*.

Если система имеет переменные разделения s_1 и s_2 , то несложно заметить, что любая область возможного движения является конечным объединением прямоугольников в этих координатах. Действительно, из редуцированной системы видно, что при фиксированных значениях параметров c единственным ограничением на координаты является неотрицательность выражений под корнем $V_i(s_i, c) \geq 0$. В связи с тем, что функции V_1, V_2 есть многочлены, допустимые значения координат s_1 и s_2 образуют конечные наборы отрезков, а область возможного движения есть конечный набор прямоугольников.

2.2.2 Переменные разделения бильярда

Покажем, что любой плоский элементарный бильярд с потенциалом Гука редуцируется к системе, для которой применим метод областей возможного движения М.П. Харламова (то есть метод исследования, применимый к алгебраически разрешимым системам). Для этого явно предъявим переменные разделения. В связи с тем, что области возможного движения в таких координатах представляют собой набор прямоугольников, естественно предположить, что и сами бильярдные области представляют собой прямоугольники в этих координатах. Иными словами, рассмотрим эллиптические координаты (λ_1, λ_2) , для которых координатные линии принадлежат семейству квадрик 2.1.1. Их связь с декартовыми координатами задается формулами

$$\begin{cases} x^2 = \frac{(a+\lambda_1)(a+\lambda_2)}{a-b}, \\ y^2 = \frac{(b+\lambda_1)(b+\lambda_2)}{b-a}. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Здесь координата $\lambda_1 \in (-a, -b)$ отвечает софокусным гиперболам, а координата $\lambda_2 \in (-b, 0)$ – софокусным эллипсам (напомним, что бильярд ограничен “сверху” эллипсом с параметром $\lambda = 0$). Значения $\lambda_1 = -a$ и $\lambda_{1,2} = -b$ являются вырожденными, в них эллиптические координаты теряют регулярность. Также отметим, что кроме естественных ограничений на значения координат существуют ограничения, вызванные формой бильярда. Например, для бильярда B_0 , ограниченного парой гипербол $\lambda = hyp_1, \lambda = hyp_2$ и парой эллипсов $\lambda = ell_1, \lambda = 0$, гиперболическая координата λ_1 ограничена отрезком $[hyp_1, hyp_2] \subset (-a, -b)$, а эллиптическая координата λ_2 ограничена отрезком $[ell_1, 0] \subset (-b, +\infty)$ (рис. 2.2).

Первые интегралы системы в эллиптических координатах запишутся в виде

$$H = \frac{2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_1^2 + \frac{2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \mu_2^2 + \frac{k}{2}(\lambda_1 + \lambda_2),$$

$$F = 2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)\mu_1^2 + \frac{k}{2}\lambda_1^2 - H\lambda_1,$$

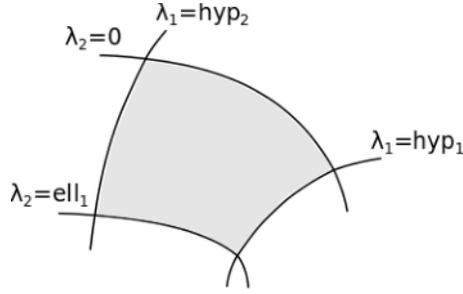


Рис. 2.2: Биллиард B_0 классификации В. В. Ведюшкиной

где μ_1, μ_2 – компоненты импульса в новых координатах. Зафиксируем значения первых интегралов $H = h$ и $F = f$ и выразим компоненты импульса μ_1 и μ_2 из формул интегралов. Получим

$$\mu_i^2 = \frac{-\frac{k}{2}\lambda_i^2 + H\lambda_i + F}{2(a + \lambda_i)(b + \lambda_i)}.$$

Наконец, воспользовавшись гамильтоновыми уравнениями движения, получим выражение компонент вектора скорости

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \pm \frac{\sqrt{8}}{\lambda_2 - \lambda_1} \sqrt{\left(-\frac{k}{2}\lambda_i^2 + h\lambda_i + f\right)(a + \lambda_i)(b + \lambda_i)}. \quad (2.2.3)$$

Таким образом, мы свели исходную биллиардную систему к системе 2.2.3. Это не то разделение переменных 2.2.1, описанное М. П. Харламовым, однако и для него применим метод областей возможного движения. Действительно, единственное ограничение на эллиптические координаты (помимо тех, что были отмечены выше) состоит в неотрицательности подкоренного выражения. Заметим, что $(a + \lambda_1)(b + \lambda_1) < 0$ и $(a + \lambda_2)(b + \lambda_2) > 0$. Следовательно, область возможного движения задается системой неравенств

$$\begin{cases} -\frac{k}{2}\lambda_1^2 + h\lambda_1 + f \leq 0, \\ -\frac{k}{2}\lambda_2^2 + h\lambda_2 + f \geq 0. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Обозначим фигурирующий в этих неравенствах квадратный трехчлен как $V(\lambda)$. В исходных декартовых координатах компоненты скорости выражаются следующими формулами:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{d}{\lambda_2 - \lambda_1} \left((-1)^I \sqrt{V(\lambda_1)(a + \lambda_2)(b + \lambda_1)} + (-1)^J \sqrt{V(\lambda_2)(a + \lambda_1)(b + \lambda_2)} \right), \\ \dot{y} = \frac{d}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(-(-1)^I \sqrt{-V(\lambda_1)(a + \lambda_1)(b + \lambda_2)} + (-1)^J \sqrt{-V(\lambda_2)(a + \lambda_2)(b + \lambda_1)} \right), \end{cases} \quad (2.2.5)$$

где $I, J \in \{0, 1\}$, $d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a-b}}$. Такая запись позволяет определить область возможного движения на координатные оси $0x$ и $0y$ по непрерывности.

Замечание 2.1. Заметим, что если точка с координатами (λ_1, λ_2) лежит в области возможного движения и не является фокальной, то из системы (2.2.5) вытекает три возможности:

1) точке (λ_1, λ_2) соответствуют две пары взаимно обратных векторов скорости, если ни λ_1 , ни λ_2 не являются корнями многочлена V ;

2) этой точке соответствует одна пара взаимно обратных векторов скорости, если только одно из значений λ_1 или λ_2 является корнем многочлена V (эти вектора являются касательными к квадрике с параметром, равным той координате λ_i , которая является корнем);

3) точке соответствует единственный нулевой вектор скорости, если оба значения λ_1 и λ_2 являются корнями многочлена V .

Предположим теперь, что фокус принадлежит области возможного движения (без ограничения общности рассмотрим правый фокус). Подставим точку $x = \sqrt{a-b}$, $y = 0$ в формулы первых интегралов 2.1.3, 2.1.4. Получим

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + k \frac{a-b}{2}, \quad F = \frac{b}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{kb}{2}(a-b).$$

Таким образом, в точке фокуса $(\sqrt{a-b}, 0)$ первые интегралы как функции импульсов являются зависимыми, причем $F = bH$. Ограничения на значения (p_x, p_y) исходят лишь из закона сохранения энергии. Следовательно, фокусу соответствует окружность ковекторов импульса (или же векторов скорости) при $H > k \frac{a-b}{2}$ и нулевой ковектор при равенстве.

2.3 Локальная структура слоения Лиувилля неособого уровня энергии

2.3.1 Явный вид областей возможного движения и их прообраз

Утверждение 2.3.1. Зафиксируем значение первых интегралов (h, f) . Пусть область возможного движения не пуста. Тогда многочлен V имеет хотя бы один корень на отрезке $[-a, 0]$.

Доказательство. Положим противное. Тогда многочлен V знакопостоянен на отрезке $[-a, 0]$. Если он положителен, тогда $V(\lambda_1 > 0)$ для любого $\lambda_1 \in [-a, -b)$, что противоречит тому, что область возможного движения не пуста. Аналогично, если многочлен отрицателен, то $V(\lambda_2 < 0)$, что также противоречит условию. \square

Доказанное утверждение, в частности, означает, что дискриминант квадратного трехчлена V неотрицателен. Следовательно, он имеет корни вида

$$\xi = \frac{h - \sqrt{h^2 + 2kf}}{k}, \quad \eta = \frac{h + \sqrt{h^2 + 2kf}}{k}.$$

Явный вид области возможного движения зависит от расположения корней относительно значений $-a$, $-b$, 0 , а также параметров граничных квадрик биллиардного стола. Так, при $k > 0$ допустимые значения координат (λ_1, λ_2) лежат в пересечении биллиардного стола и области

$$((-\infty, \xi] \cup [\eta, +\infty)) \times [\xi, \eta].$$

При $k < 0$ значения координат принадлежат пересечению биллиардного стола и области

$$[\eta, \xi] \times ((-\infty, \eta] \cup [\xi, +\infty)).$$

Таким образом можно заключить, что любая область возможного движения ограничена квадратами границы биллиарда, а также, возможно, двумя дополнительными софокусными квадратами. При этом вырожденные квадраты, т.е. оси $0x$ и $0y$, не могут ограничивать область вследствие того, что эллиптические координаты симметричны относительно этих осей.

В качестве примера рассмотрим уже упомянутый биллиард B_0 , изображенный на рис. 2.2. Для него при $k > 0$ существует шесть общих случаев расположения корней, дающих непустую область возможного движения (см. рис. 2.3), а также несколько предельных случаев, для которых один из корней принимает значение параметра граничной квадратики либо корни совпадают. Отметим, что в каждом из шести общих случаев область возможного движения двумерна, при этом каждой ее внутренней точке соответствует четыре вектора скорости согласно системе 2.2.5. Назовем области, обладающие такими свойствами, *регулярными*.

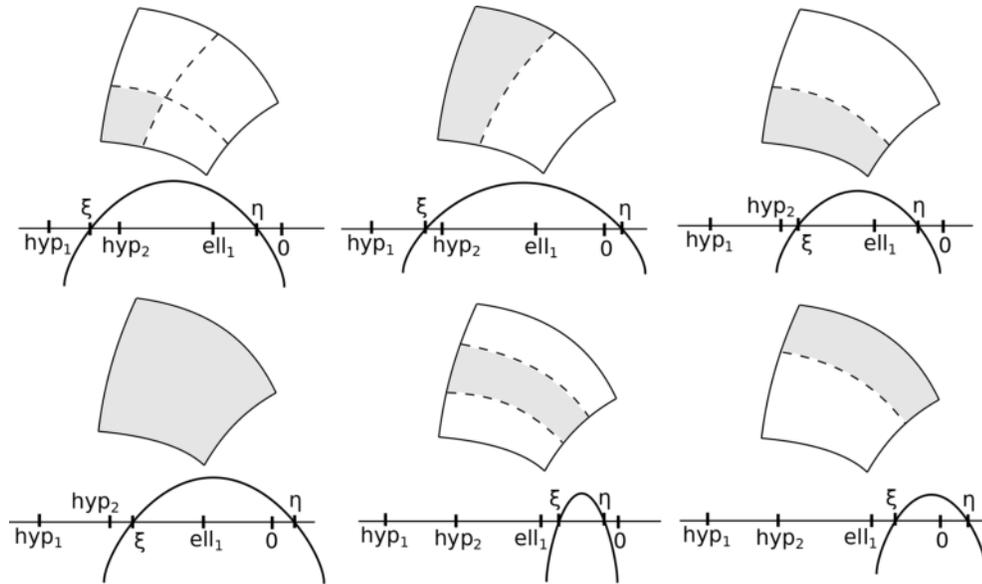


Рис. 2.3: Регулярные области возможного движения биллиарда B_0 при $k > 0$

Лемма 2.2. *Прообраз любой односвязной регулярной области возможного движения в фазовом пространстве M^4 гомеоморфен двумерному тору. Прообраз любой не односвязной (кольцевой) регулярной области гомеоморфен двум непересекающимся торам.*

Доказательство. Согласно замечанию 2.1, регулярная область возможного движения не содержит фокусы. Рассмотрим случай односвязной области возможного движения. В качестве примера приведем область, изображенную на рис. 2.4, а. Разобьем ее на дуги софокусных эллипсов. Точки этих дуг оснастим векторами скорости согласно формулам (2.2.5). По условию теоремы, каждой внутренней точке дуги эллипса соответствуют четыре вектора скорости. В точках, расположенных в первой четверти (при $x \geq 0, y \geq 0$), введем следующие обозначения. Вектор $I = 1, J = 0$ обозначим вектором 1; $I = 0, J = 0$ – вектором 2; $I = 1, J = 1$ – вектором 3; и $I = 0, J = 1$ – вектором 4 (рис. 2.4, а). В оставшихся точка области возможного движения введем обозначения из соображений непрерывности. Заметим, что на гиперболических границах вектор 1 склеивается с вектором 2, а вектор 3 – с вектором 4. Следовательно, прообраз каждой такой дуги разбиения в M^4 гомеоморфен двум непересекающимся окружностям, соответствующим парам векторов 1-2 и 3-4. Таким образом, в прообразе всей области возможного движения лежат два цилиндра, которые склеены друг с другом по границам в силу того, что на эллиптических границах области возможного движения вектор 1 склеивается с вектором 3, а вектор 2 – с вектором 4. При этом ориентация граничных окружностей склейки двух цилиндров одинакова. Следовательно, итоговый прообраз гомеоморфен двумерному тору.

Аналогичные рассуждения проведем в случае неодносвязной области возможного движения, то есть кольца, ограниченного двумя эллипсами (рис. 2.4, б). Разобьем всю область на софокусные эллипсы и оснастим их точки четырьмя векторами скорости, обозначенными 1, 2, 3 и 4 аналогичным образом. Прообраз каждого такого эллипса в M^4 гомеоморфен четырем окружностям, соответствующим векторам скорости. Таким образом, в прообразе всей компоненты связности области возможного движения лежат четыре цилиндра, при этом цилиндры, соответствующие векторам 1 и 3, и цилиндры, соответствующие векторам 2 и 4, склеены друг с другом по своим границам в силу тех же свойств. Следовательно, были получены два тора, соответствующие движению по часовой стрелке и против часовой стрелки бильярдного шара внутри кольцевой области возможного движения.

Лемма доказана. □

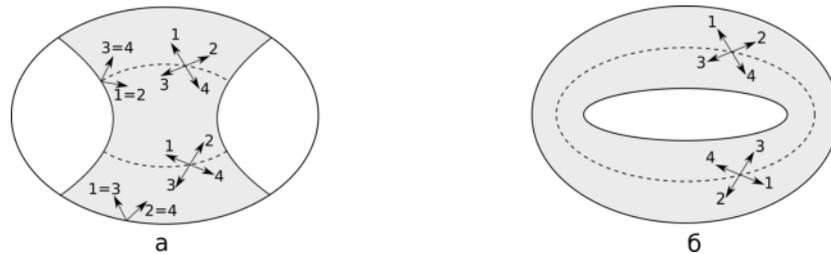


Рис. 2.4: Регулярные области возможного движения и вектора скорости, соответствующие их точкам

Также заметим, что при малом изменении параметров (h, f) регулярная область возможного

движения остается регулярной, при этом ее границы изменяются непрерывно. Следовательно, инвариантная окрестность торов, лежащих в прообразе регулярной области, расслоена на такие же торы, причем это расслоение тривиально. Более того, как было показано выше на примере бильярда B_0 , все области возможного движения, соответствующие случаям общего положения корней ξ и η , являются регулярными. Таким образом, почти все слои в слоении Лиувилля являются торами. Обобщая вышесказанное, был доказан кусочно-гладкий аналог классической теоремы Лиувилля.

2.3.2 Критические области возможного движения и 3-атомы

Изучим, как устроен прообраз нерегулярных (или же критических) областей возможного движения. Зададим бильярдную область тремя параметрами $hyp_1 < hyp_2$ из отрезка $[-a, -b]$ и ell_1 из полуинтервала $[-b, 0)$. Если один из параметров лежит во внутренности соответствующего отрезка, он является параметром граничной квадратики бильярдного стола. Если параметр совпадает со значением $-a$ или $-b$, то бильярдный стол пересекает соответствующую вырожденную квадратичку. Например, бильярд 10 на рис. 2.1 задан параметрами $ell_1 = -b$, $hyp_1 = -a$ и $hyp_2 \neq -b$. Если же бильярд несимметричен относительно осей, будем считать, что в каждом квадранте он задан разными параметрами. Примером такого бильярда служит бильярд 8, для которого $ell_1 \neq -b$, при этом $hyp_1 = -a$, $hyp_2 \neq -b$ в первом квадранте, $hyp_1 = -a$, $hyp_2 = -b$ во втором квадранте и $hyp_1 \neq -a$, $hyp_2 = -b$ в третьем квадранте.

Введем условия на корни многочлена V .

$$c1: \xi = hyp_1,$$

$$c2: \eta = hyp_1 = -a \text{ при } k < 0,$$

$$c3: \xi = -b \text{ при } hyp_2 = -b \text{ или } ell_1 = -b,$$

$$c4: \eta = ell_1 \text{ при } k > 0,$$

$$c5: \eta = hyp_2 \text{ при } k < 0,$$

$$c6: \xi = \eta = e, \text{ где } e \in [ell_1, 0] \text{ в случае } k > 0 \text{ и } e \in [hyp_1, hyp_2] \text{ при } k < 0$$

$$c7: \xi = 0.$$

Утверждение 2.3.2. *Область возможного движения регулярна тогда и только тогда, когда не выполнено ни одно из условий c1-c7.*

Доказательство. Регулярность нарушается в двух случаях: область возможного движения имеет не двумерную компоненту связности, либо область содержит внутренние точки, соответствующие менее чем четырем векторам скорости по формуле 2.2.5. Рассмотрим два случая знака параметра k .

Случай $k > 0$.

Напомним, что область возможного движения является пересечением областей

$$[hyp_1, hyp_2] \times [ell_1, 0] \cap ((-\infty, \xi] \cup [\eta, +\infty)) \times [\xi, \eta],$$

где $hyp_{1,2}$ и ell_1 – параметры бильярдного стола. Она имеет не двумерную компоненту связности, если выполнено $\xi = \eta \in [ell_1, 0]$, либо в одном из четырех случаев: $\eta = ell_1$; $\xi = 0$; $\xi = hyp_1$; $\eta = hyp_2$. Если $\xi = \eta$, область возможного движения есть пересечение софокусного эллипса с бильярдным столом. В случае $\eta = ell_1 \neq -b$, а также $\xi = 0$ область лежит на эллиптической границе бильярда. При $\eta = ell_1 = -b$ область принадлежит фокальной прямой. При $\xi = hyp_1 \neq -a$ область возможного движения лежит на гиперболических границах. При $\xi = hyp_1 = -a$ она принадлежит оси Oy . В случае $\eta = hyp_2$ многочлен V отрицателен на отрезке $[ell_1, 0]$, и область возможного движения пуста. Примеры изображены на рис. 2.5.

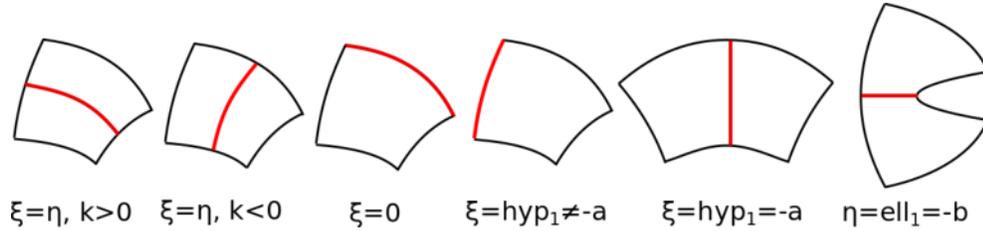


Рис. 2.5: Примеры одномерных критических областей возможного движения для различных бильярдных столов. Красным выделена область

Предположим теперь, что критическая область возможного движения двумерна. Согласно формулам 2.2.5, точка (λ_1, λ_2) соответствует менее чем четырем векторам скорости, если координата λ_1 или λ_2 является корнем многочлена V . В случае, когда корни не равны между собой и не совпадают со значениями $-a$ и $-b$, они задают параметры граничных квадрик области возможного движения. Следовательно, для того, чтобы область имела внутренние точки с двумя векторами скорости, необходимо, чтобы один из корней совпал со значениями $-a$ и $-b$. Рассмотрим шесть случаев. **1.** При $\eta = hyp_1 = -a$ многочлен V отрицателен на отрезке $[-b, 0]$, и область возможного движения пуста. **2.** То же верно в случае $\eta = hyp_2 = -b$ при $ell_1 \neq -b$. **3.** Случаи $\xi = hyp_1 = -a$ и **4.** $\eta = ell_1 = -b$ соответствуют одномерным областям, как было показано выше. **5.** В случае $\xi = hyp_2 = -b$ область возможного движения ограничена эллипсом с параметром $min(\eta, 0) > ell_1$ и, возможно, эллипсом с параметром $ell_1 \neq -b$. Эта область двумерна, при этом точкам с координатами $(\lambda_1, -b)$ соответствуют два вектора скорости. **6.** И аналогично, при $\xi = ell_1 = -b$ область возможного движения ограничена эллипсом с параметром η и двумя гиперболами. Точки с координатами $(-b, \lambda_2)$ соответствуют двум векторам скорости.

Таким образом, утверждение доказано в случае положительного параметра k .

Случай $k < 0$.

Этот случай рассматривается аналогично. Здесь область возможного движения имеет вид

$$[hyp_1, hyp_2] \times [ell_1, 0] \cap [\eta, \xi] \times ((-\infty, \eta] \cup [\xi, +\infty)).$$

Она не двумерна, если $\xi = \eta \in [hyp_1, hyp_2]$, а также в одном из четырех случаев: $\xi = 0$; $\eta = ell_1$; $\eta = hyp_2$; $\xi = hyp_1$. Если $\xi = \eta$, область возможного движения есть пересечение софокусной

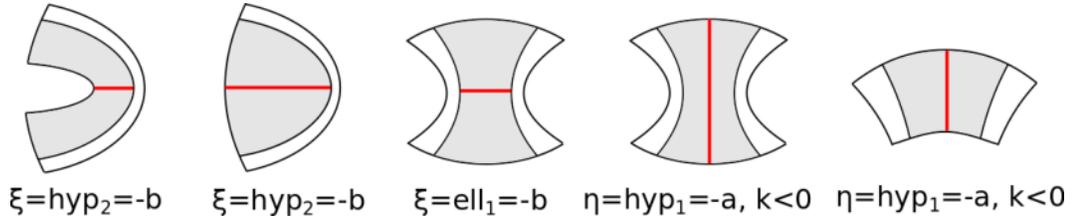


Рис. 2.6: Примеры двумерных критических областей возможного движения для различных бильярдных столов. Красным выделены критические точки, соответствующие двум векторам скорости

гиперболы и бильярдного стола. При $\eta = ell_1$ многочлен V положителен на отрезке $[hyp_1, hyp_2]$. Следовательно, область возможного движения пуста. В случае $\xi = 0$ область одномерна и лежит на граничном эллипсе с параметром 0. При $\eta = hyp_2 \neq -b$ и $\xi = hyp_1 \neq -a$ область принадлежит одной из граничных гипербол. При $\eta = hyp_2 = -b$ она лежит на фокальной оси $0x$, а при $\xi = hyp_1 = -a$ – на оси $0y$.

Пусть теперь область возможного движения двумерна и нерегулярна. Из рассуждений, аналогичных предыдущему случаю $k > 0$, получим, что один из корней многочлена V обязан быть равным $-a$ или $-b$. Это достижимо в шести вариантах. **1.** При $\eta = hyp_1 = -a$ область возможного движения ограничена эллипсам с параметрам ell_1 , гиперболой с параметром hyp_2 и квадрикой ξ (гиперболой или эллипсом). Это двумерная область, причем точки с координатами $(-a, \lambda_2)$ соответствуют двум векторам скорости. **2.** Случаи $\eta = hyp_2 = -b$ и **3.** $\xi = hyp_1 = -a$ одномерны и были рассмотрены выше. **4.** При $\eta = ell_1 = -b$ многочлен V положительный на отрезке $[hyp_1, hyp_2]$. Следовательно, область возможного движения в этом случае пуста. В случаях **5.** $\xi = ell_1 = -b$ и **6.** $\xi = hyp_2 = -b$ область является прямоугольником вида $[max(hyp_1, \eta), hyp_2] \times [ell_1, 0]$, причем точки, лежащие на фокальной оси (за исключением фокусов) соответствуют двум векторам скорости. Примеры критических областей изображены на рис. 2.6.

Утверждение доказано. □

Таким образом, был установлен явный вид области возможного движения в зависимости от условий на корни многочлена V . Выберем значения первых интегралов (h, f) , для которых не выполнено ровно одно из условий $c1-c7$. Заметим, что корни ξ и η гладко и монотонно зависят от значения f . Следовательно, любому значению дополнительного первого интеграла из достаточно малой проколотой окрестности точки f (с фиксированным значением h) соответствует регулярная область возможного движения. При этом критическую область можно рассматривать с точки зрения бифуркации регулярных областей. В силу утверждения 2.3.2 и с учетом того, что любая регулярная область возможного движения имеет не более двух граничных квадрик с переменным параметром, зависящим от значения f , имеют место следующие бифуркации:

1. появление неодносвязной (кольцевой) области из софокусного эллипса;

2. появление односвязной области из дуги софокусного эллипса или отрезка фокальной прямой;
3. стягивание односвязной области на дугу софокусной гиперболы (возможно, вырожденной);
4. слияние двух неодносвязных областей в одну неодносвязную;
5. разрыв неодносвязной области на две односвязные;
6. слияние двух односвязных областей в одну односвязную;
7. разрыв односвязной области на две односвязные области;
8. перестройка неодносвязной области в одну односвязную через два фокуса;
9. перестройка односвязной области в одну односвязную через один фокус.

Прообразами бифуркаций регулярных областей возможного движения выступают бифуркации регулярных торов Лиувилля в изоэнергетическом многообразии Q_h^3 , или, иными словами, 3-атомы. Исходя из всего описанного выше, докажем следующую теорему.

Теорема 2.3. *В системах элементарных бильярдов с потенциалом Гука, ограниченных дугами софокусных эллипсов и гипербол, имеет место следующие соотношения условий критичности значений первых интегралов и 3-атомов.*

1. Условиям c_1, c_4, c_5, c_6, c_7 соответствуют один или несколько 3-атомов A ;
2. Условию c_2 соответствует
 - 3-атом C_2 , если $h_{ур_2} = -b$ (бильярды 1 и 2 на рис. 2.1) и $\xi > -b$,
 - 3-атом B_2 , если $h_{ур_2} = -b$ только в одной полуплоскости (бильярд 4 на рис. 2.1) и $\xi > -b$,
 - несколько 3-атомов B в оставшихся случаях;
3. Условию c_3 соответствует
 - два 3-атома A^* в случае бильярда 1 при $k < 0$ и $\eta > -a$,
 - 3-атом A^* в случае бильярда 11, бильярда 12 при $k > 0$ или $\eta < -a$,
 - 3-атом A^* и 3-атом B в случае бильярда 12 при $k < 0$ и $\eta > -a$,
 - 3-атом B_2 в случае бильярда 6 при $k > 0$ или $\eta < -a$,
 - 3-атом C_2 в случае бильярда 2 при $k > 0$ или $\eta < -a$,
 - несколько 3-атомов B в оставшихся случаях.

Доказательство. Рассмотрим условие $c1$ при $k > 0$. Зафиксируем соответствующее этому условию значение $H = h$. В этом случае корень ξ монотонно убывает относительно значения f . Согласно системе 2.2.4 область возможного движения не пуста только при условии $\eta \in (ell_1, 0)$. Но в таком случае точка ξ является единственной точкой отрезка $[hyp_1, hyp_2]$, удовлетворяющей системе. Таким образом, область возможного движения является одномерной и лежит на гиперболе с параметром $\xi = hyp_1$. Согласно системе 2.2.5, каждой точке области соответствуют два ненулевых вектора скорости, направленных по касательной к гиперболе, за исключением конечных точек, которым соответствует отражение или нулевой вектор. Следовательно, прообраз области возможного движения гомеоморфен одной или двум окружностям (в зависимости от типа бильярда). При уменьшении значения f область перестает быть одномерной и ограничена гиперболами с параметрами ξ и hyp_1 . Прообраз компоненты связности области, согласно лемме 2.2, является тор Лиувилля, с меридианом $\lambda_2 = const$, стягивающимся в точку при росте f , и параллелью $\lambda_1 = hyp_1$, гомологичной с критической окружностью. Таким образом, полученная бифуркация торов Лиувилля описывается 3-атомом A .

Рассмотрим теперь случай $k < 0$. Многочлен $V(t)$ строго возрастает на всем отрезке $[-a, 0]$. Следовательно, область возможного движения, заданная системой 2.2.4, имеет вид $\xi \times [ell_1, 0]$. Повторяя предыдущие рассуждения, снова получим 3-атом A .

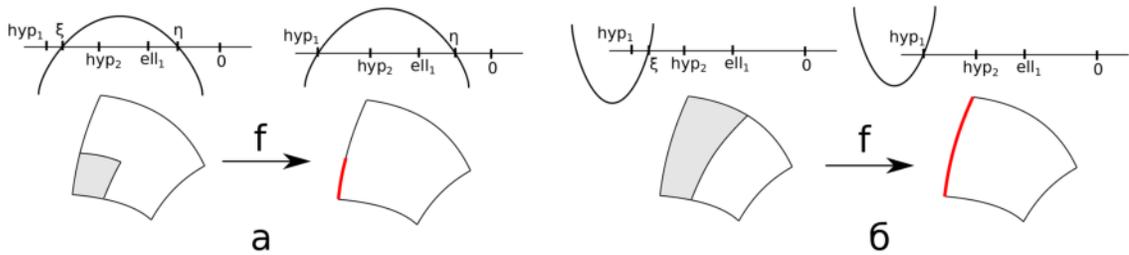


Рис. 2.7: Бифуркации областей возможного движения при условии $c1$. На рис. а изображен случай $k > 0$, на рис. б – случай $k < 0$

Рассмотрим условие $c7$. Зафиксируем соответствующее этому условию значение $H = h$. Область возможного движения существует только при $k > 0$. В этом случае точка $\xi = 0$ является единственной точкой отрезка $[ell_1, 0]$, удовлетворяющей системе 2.2.4. Таким образом, область возможного движения является одномерной и лежит на эллипсе с параметром 0. Если бильярд ограничен гиперболами, область распадается на дуги эллипса. Заменяв дугу эллипса на дугу гиперболы и применив аналогичные предыдущему рассуждения, получим два 3-атома A . Если гиперболические границы бильярда отсутствуют, областью возможного движения является весь эллипс. Ему соответствуют два режима движения: по часовой стрелке и против. Следовательно, прообраз эллипса состоит из двух критических окружностей. Увеличивая f , получим регулярную кольцевую область возможного движения, прообраз которой состоит из двух торов Лиувилля, согласно лемме 2.2. Эти торы стягиваются на соответствующие окружности при уменьшении f . Таким образом, получили два 3-атома A , соответствующих двум типам

вращения вокруг центра притяжения.

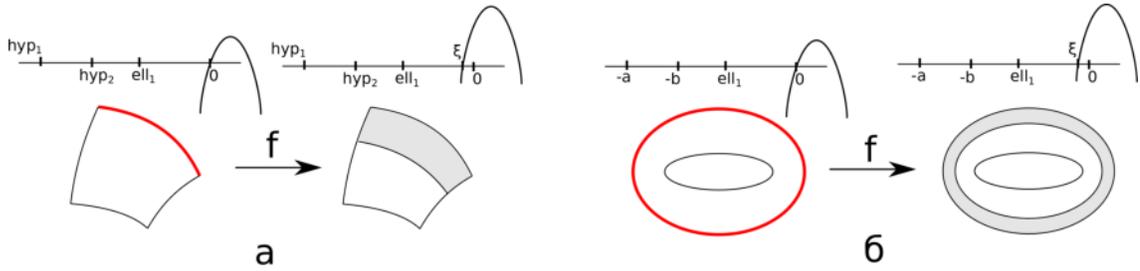


Рис. 2.8: Бифуркации областей возможного движения при условии $c7$. На рис. а изображен случай $k > 0$, на рис. б – случай $k < 0$

Рассмотрим условие $c4$. Точка $\xi = ell_1$ является единственной точкой отрезка $[ell_1, 0]$, удовлетворяющей системе 2.2.4. Положим, что $ell_1 \neq -b$. Область возможного движения одномерна и лежит на эллипсе с параметром ell_1 . Этот случай полностью аналогичен предыдущему. Положим теперь $ell_1 = -b$. Одномерная область представляет собой отрезок, расположенный на фокальной прямой между фокусами биллиарда. Прообраз этого отрезка в изоэнергетическом многообразии гомеоморфен окружности. При уменьшении значения f область становится двумерной, ограниченной эллипсом с параметром ξ и гиперболой. Согласно лемме 2.2, ее прообраз образует тор Лиувилля, который стягивается на критическую окружность при уменьшении f . Таким образом, был получен 3-атом A . Отметим, что проделанные рассуждения также применимы к условию $c5$, если заменить софокусные гиперболы на эллипсы и наоборот.

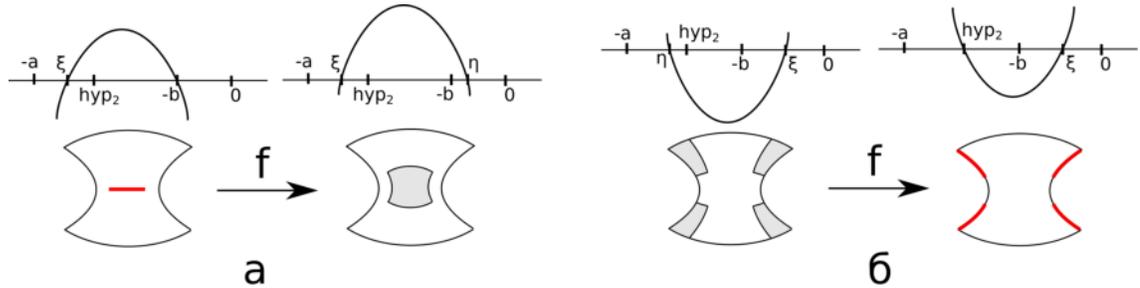


Рис. 2.9: На рис. а изображена бифуркации областей возможного движения при условии $c4$, на рис. б – при условии $c5$

Рассмотрим условие $c6$. Обозначим $e = \xi = \eta$ – точка экстремума многочлена V . Существует четыре возможности в зависимости от расположения точки e и знака параметра k . Пусть $e \in (hyp_1, hyp_2)$ и $k > 0$. В этом случае многочлен $V(t)$ отрицателен на отрезке $[ell_1, 0]$. Следовательно, область возможного движения пуста. Положим теперь $k < 0$. Согласно системе неравенств 2.2.4, область возможного движения представляет собой дуги софокусной гиперболы с параметром $\lambda_1 = e$. Из системы 2.2.5 следует, что каждой точке области соответствуют два касательных вектора скорости. Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство условия $c1$

при $k > 0$. Возьмем теперь $e \in (ell_1, 0)$ и $k < 0$. Легко заметить, что в этом случае многочлен $V(t)$ положителен на отрезке $[hyp_1, hyp_2]$. Следовательно, область возможного движения пуста. Наконец, положим $e \in (ell_1, 0)$ и $k > 0$. В этом случае многочлен $V(t)$ отрицателен на отрезке $[hyp_1, hyp_2]$, и точка $\lambda_2 = e$ является единственной точкой отрезка $[ell_1, 0]$, удовлетворяющей системе 2.2.4. Таким образом, область возможного движения является одномерной и лежит на эллипсе с параметром $\lambda = e$. И опять, дальнейшие рассуждения повторяют доказательство условия $c7$.

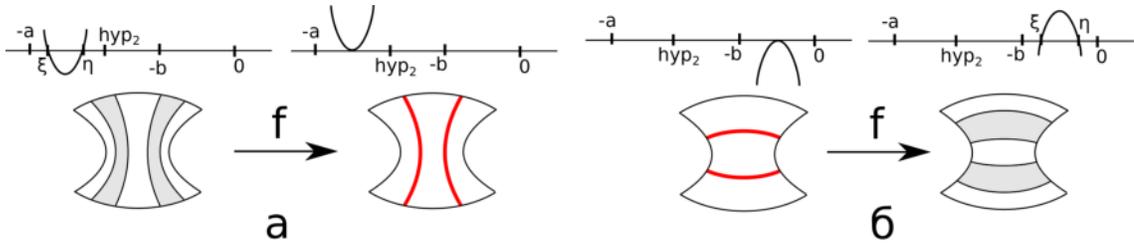


Рис. 2.10: Бифуркации областей возможного движения при условии $c6$.

Перейдем теперь к условию $c2$. Зафиксируем соответствующее этому условию значение $H = h$. Заметим, что правая полуокрестность точки $-a$ удовлетворяет системе неравенств 2.2.4. Более того, точка $-a$ является корнем многочлена $V(t)$. Следовательно, согласно системе 2.2.5, точкам оси $x = 0$ соответствуют два вектора скорости. Обозначим значение дополнительного первого интеграла в этом случае как $f = f_0$. Значение корня η монотонно возрастает при росте значения f . Таким образом, при $\hat{f} = f_0 - \varepsilon < f_0$ правая полуокрестность точки $-a$ также удовлетворяет системе 2.2.4, но при этом точкам оси $x = 0$ соответствуют четыре вектора скорости. Напротив, при $\hat{f} = f_0 + \varepsilon > f_0$ многочлен $V(t)$ положителен в точке $-a$. Следовательно, область возможного движения не пересекает ось $x = 0$. Обобщая вышесказанное, получим, что при росте значения первого интеграла F регулярная область возможного движения перестроилась, разорвавшись вдоль оси $0y$. Исходя из видов бильярдных столов, изображенных на рис. 2.1, и вида регулярных областей возможного движения, существуют три возможности: неодносвязная область перестроилась в две односвязные, односвязная область – в три односвязные, и односвязная область – в две односвязные. Рассмотрим первую возможность. Она достигается только в бильярдах типа 1 и 2, причем $\xi > -b$ (в противном случае область возможного движения ограничена гиперболой с параметром $\lambda_1 = \xi$ и не замыкается в кольцо). По замеченному ранее, кольцевая критическая область возможного движения содержит два критических отрезка, которые лежат на оси $0y$. Как и в доказательстве леммы 2.2, разобьем область на систему софокусных эллипсов и оснастим их точки векторами скорости согласно системе 2.2.5. Обозначения этих векторов также совпадают с обозначениями из доказательства леммы. Каждой точке внутренних эллипсов соответствуют четыре вектора скорости, обозначенных на рис. 2.11, а векторами 1, 2, 3, 4, за исключением двух точек с координатой $x = 0$, в которых вектора 1 и 2, а также вектора 3 и 4 совпадают. Таким образом, прообраз внутреннего эллипса в

изоэнергетическом многообразии Q_h^3 гомеоморфен двум парам окружностей, которые пересекаются в двух точках. Тогда внутренность области возможного движения гомеоморфна прямому произведению отрезка на полученный одномерный комплекс и состоит из двух компонент связности. Отметим, что на границе области возможного движения вектора 1 и 3, а также вектора 1 и 4 эквивалентны. Следовательно, прообраз всей области возможного движения гомеоморфен склейке полученных комплексов по их границе. Иными словами, получили особый слой 3-атома C_2 . Отметим, что на полученной поверхности можно задать тривиальное расслоение на окружности, образы которых на биллиарде задают расслоение области возможного движения на дуги софокусных гипербол. Кроме того, такое же расслоение близких регулярных областей задает тривиальное расслоение торов Лиувилля из окрестности особого слоя, причем все такие расслоения согласованы. Иными словами, на всем 3-атоме также задано тривиальное расслоение на окружности. Это гарантирует то, что искомый 3-атом имеет вид C_2 (см. рис. 2.11, б).

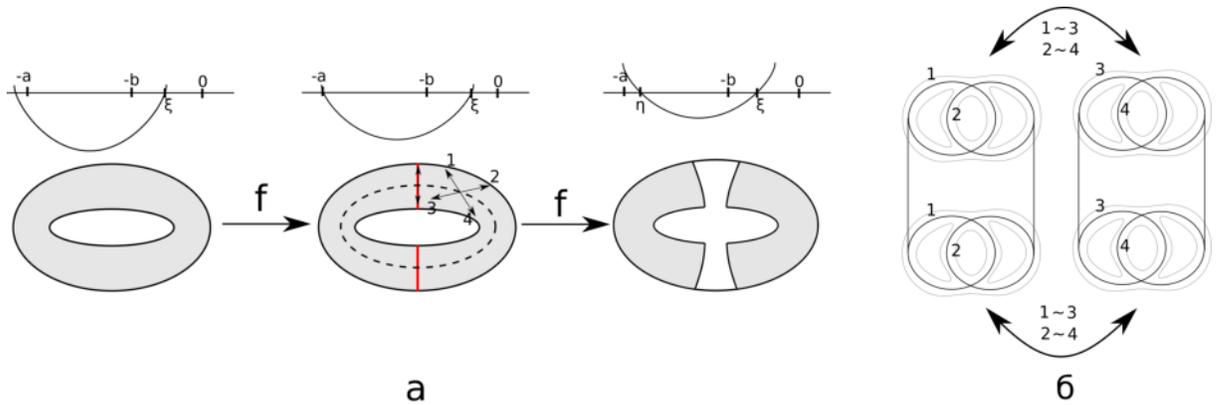


Рис. 2.11: Случай C_2 условия c_2 . На рис. а изображена бифуркация областей возможного движения. На рис. б изображен прообраз в изоэнергетическом многообразии Q_h^3

Рассмотрим теперь вторую возможность. Несложно заметить, что она достигается для биллиардов 4 и 11 при $\xi > -b$ (иначе область возможного движения состоит из двух компонент связности, каждая из которых распадается еще на две компоненты). Как и ранее, разобьем критическую область возможного движения на дуги софокусных эллипсов и оснастим их векторами скорости. Заметим, что каждой точке внутреннего эллипса соответствуют четыре вектора скорости (обозначим их аналогично), кроме четырех точек: двух с координатами $x = 0$ и двух, лежащих на гиперболической границе биллиарда. В этих точках вектора 1 и 2, а также вектора 3 и 4 совпадают. Следовательно, прообраз каждой внутренней дуги в изоэнергетическом многообразии Q_h^3 гомеоморфен двум окружностям, самопересекающимся в двух точках. Из аналогичных соображений получим, что прообраз всей области возможного движения гомеоморфен прямому произведению такой самопересекающейся кривой и окружности S^1 , или, иными словами, особому слою 3-атома B_2 . Повторяя рассуждения из предыдущего случая, заключим, что здесь на всем 3-атоме также задана структура тривиального расслоения на окружности. Таким образом, искомый 3-атом имеет тип B_2 .

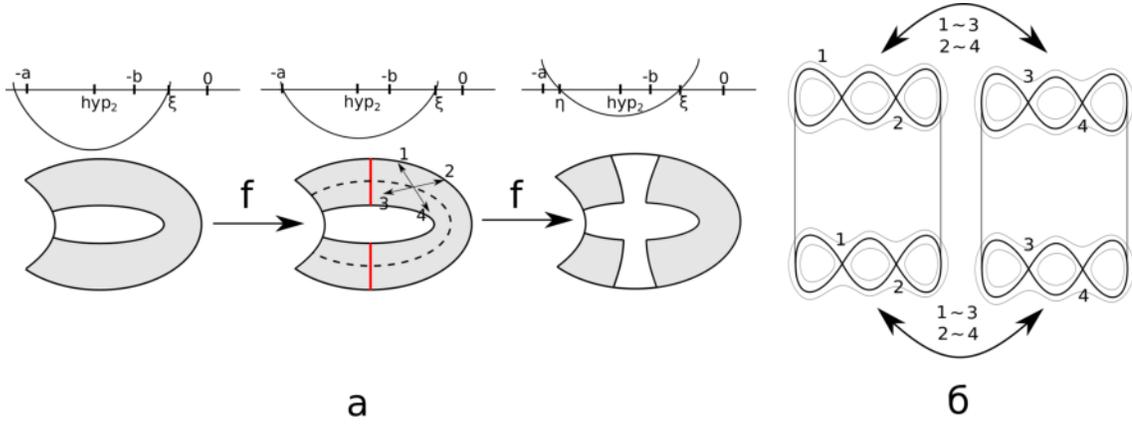


Рис. 2.12: Случай B_2 условия c_2 . На рис. а изображена бифуркация областей возможного движения. На рис. б изображен прообраз в изоэнергетическом многообразии Q_h^3

Наконец, рассмотрим третью возможность на примере биллиарда 5. Критические точки области возможного движения образуют отрезок в пересечении области с осью Oy . Разобьем область на дуги оснащенных эллипсов. Каждой точке внутреннего эллипса соответствуют четыре вектора скорости за исключением трех точек – двух граничных и критической, – в которых вектора скорости 1-2 и 3-4 объединяются в один вектор. Таким образом прообраз внутренней дуги состоит из двух “восьмерок”, т.е. самопересекающихся в одной точке контуров. Следовательно, повторяя рассуждения предыдущих случаев, получим, что прообраз критической области возможного движения гомеоморфен прямому произведению “восьмерки” на окружность, а искомый 3-атом имеет тип B . Отметим, что в зависимости от формы биллиардного стола и области возможного движения рассмотренному случаю могут соответствовать более одного 3-атома. Такое может достигаться, например, в биллиарде 2, если критическая область возможного движения состоит из двух компонент, отделенных друг от друга осью Ox .

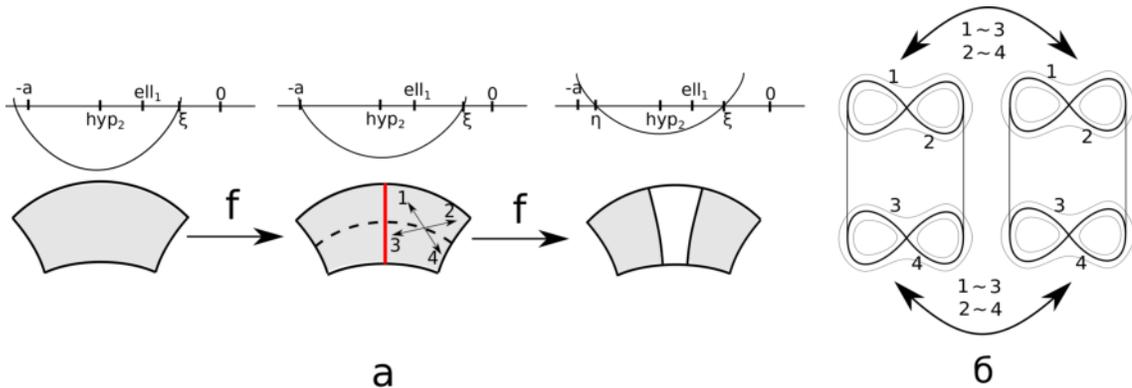


Рис. 2.13: Случай B условия c_2 . На рис. а изображена бифуркация областей возможного движения. На рис. б изображен прообраз в изоэнергетическом многообразии Q_h^3

Перейдем к оставшемуся условию c_3 . Из него, в частности, следует, что многочлен $V(t)$ возрастает в точке $-b$. Это означает, что вся малая окрестность точки $-b$ удовлетворяет системе

неравенств 2.2.4. Значение корня ξ монотонно убывает при росте параметра f . Обозначим значение дополнительного первого интеграла в критическом случае как $f = f_0$. При $f = f_0 - \varepsilon < f_0$ системе удовлетворяет лишь левая полуокрестность точки $-b$, а область возможного движения ограничена эллипсом $\lambda = \xi$. И наоборот, если $f = f_0 + \varepsilon > f_0$, системе удовлетворяет правая полуокрестность точки $-b$, а область возможного движения ограничена гиперболой. Когда же $f = f_0$, точкам фокальной прямой, попавшим в область возможного движения (за исключением фокусов семейства квадрик), соответствуют два вектора скорости. Рассмотрим три случая. Пусть $ell_1 \neq -b$. В этом случае бильярдный стол отделен от фокусов семейства квадрик граничным эллипсом. При росте параметра f от $f_0 - \varepsilon$ к $f_0 + \varepsilon$ область возможного движения разрывается по отрезку оси $0x$, приобретая гиперболическую границу. Заметим, что этот случай схож с рассмотренным выше условием $c2$. А именно, существуют три возможности: односвязная область перестроилась в две односвязные (появляется в бильярде 2 при $k > 0$), односвязная область – в три односвязные (появляется в бильярде 6 $k > 0$), и односвязная область – в две односвязные. Причем анализ этих возможностей также аналогичен. Следовательно, получим 3-атомы C_2 , B_2 и несколько 3-атомов B соответственно.

Если же $hyp_2 \neq -b$, то при росте f область возможного движения теряет одну эллиптическую границу, склеиваясь по точкам фокального отрезка. Это достигается только в бильярдах 9 и 10. Заметим, что область возможного движения не может быть кольцевой. Более того, при описанной бифуркации эта односвязная область состоит из пары компонент связности, которые срastaются в одну компоненту. Разобьем критическую область возможного движения на дуги софокусных гипербол и оснастим их векторами скорости. Каждой точке внутренней гиперболы соответствуют четыре вектора скорости, за исключением средней и концевых точек, в которых вектора 1-3 и 2-4 становятся эквивалентными. Следовательно, прообраз каждой внутренней дуги гомеоморфен двум “восьмеркам”. Прообраз же всей критической области гомеоморфен двум цилиндрам (прямым произведениям “восьмерок” на отрезок), склеенным по границам в особый слой 3-атома B . И также на всем 3-атоме можно задать структуру тривиального расслоения на окружности, образы которых на бильярде лежат на дугах софокусных эллипсов. Таким образом, бифуркация торов Лиувилля имеет тип 3-атома B .

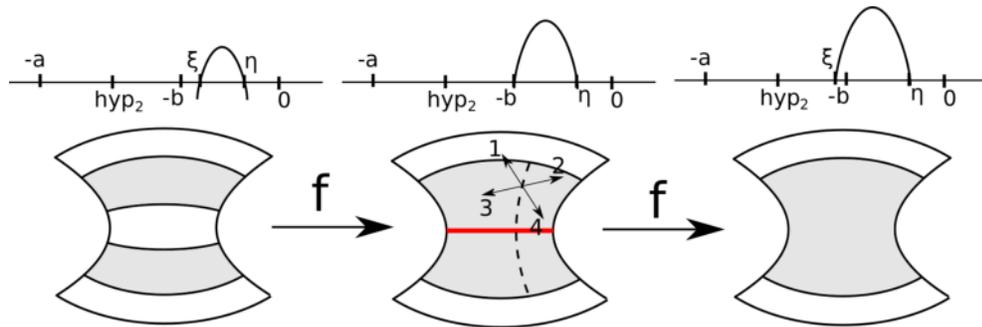


Рис. 2.14: Бифуркации областей возможного движения при условии $c3$, если $hyp_2 \neq -b$.

Наконец, при $ell_1 = hyp_1 = -b$ (биллиарды 1, 11 и 12) область возможного движения перестраивается через фокусы семейства квадрик, теряя одну эллиптическую границу и приобретая гиперболическую. В качестве примера рассмотрим перестройку, возникающую в биллиарде 11. Отметим, что критическая область возможного движения содержит один фокус, которому соответствует окружность векторов скорости согласно замечанию 2.1. Остальным точкам соответствуют четыре вектора скорости, за исключением границ и точек фокальной прямой $y = 0$, в которых два вектора. Разобьем область на две симметричные части критическим отрезком и рассмотрим верхнюю из них. Проведем путь, соединяющий точки $\sqrt{a - b + \varepsilon}$ и $\sqrt{a - b - \varepsilon}$ дугами софокусных квадрик с параметрами $\lambda = -b + \varepsilon$ и $\lambda = -b - \varepsilon$ (рис 2.15, б). Заметим,

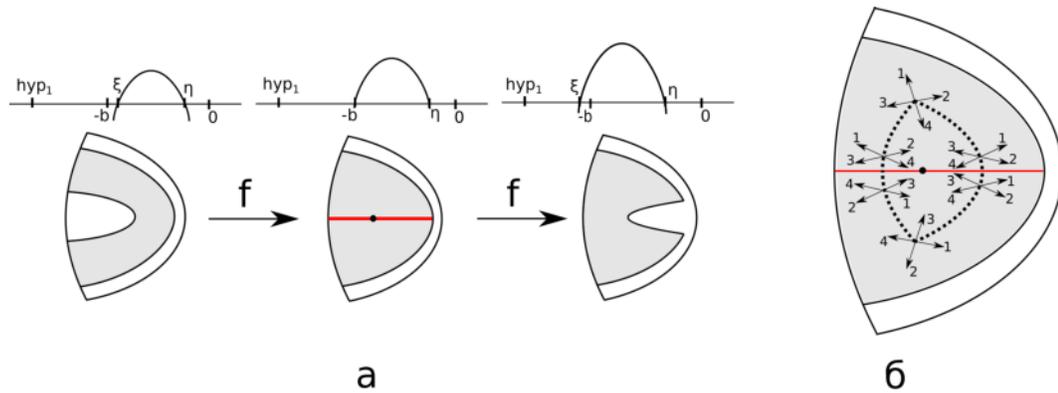


Рис. 2.15: Условие $c3$ при $ell_1 = hyp_1 = -b$. На рис. а изображена бифуркация областей возможного движения. На рис. б изображены вектора скорости, соответствующие различным точкам критической области.

что вектора 2 и 3 после прохождения пути не поменяли своего направления, а вектора 1 и 4 повернулись на угол π . Устремим ε к нулю. Контур при этом стянется в одну точку – фокус. Согласно непрерывности формул 2.2.5, в фокусе векторы 2 и 3 представлены в виде векторов, направленных в разные стороны по фокальной прямой. При этом вектора 1 и 4 в фокусе переходят в две полуокружности. Следовательно, прообраз всей верхней половины области возможного движения разбит на четыре части, изображенные на рис. 2.16. Аналогично рассмотрим нижнюю половину области. Заметим, что теперь вектора 2 и 3 совершают оборот на угол π , а вектора 1 и 4 не меняют направления. На рис. 2.17 изображен прообраз нижней половины, также разбитый на четыре части. Теперь склеим полученные восемь частей, на которые разбит весь прообраз области возможного движения, с учетом соответствия векторов скорости на эллиптических и гиперболических границах. Нетрудно установить, что полученная поверхность гомеоморфна двумерному тору с выделенной окружностью, стянутой по действию группы Z_2 в критическую. Иными словами получили особый слой 3-атома A^* . Структуру самого 3-атома A^* в окрестности особого слоя можно получить, расщепляя факторизованную окружность двумя различными способами для $f < f_0$ и $f > f_0$.

Рассмотрим теперь перестройку через фокус в биллиарде 12. Отметим, что при критическом

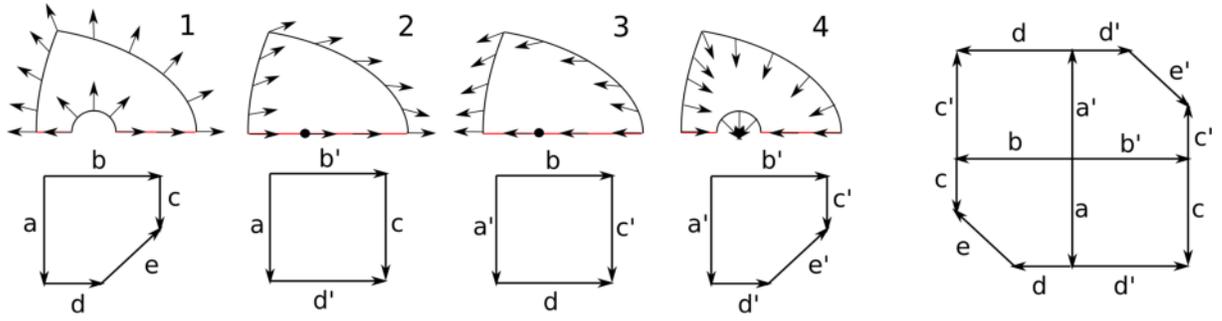


Рис. 2.16: Прообраз верхней половины критической области возможного движения в Q_h^3 . На четырех частях обозначена склейка по отрезкам границы в соответствии с сопоставлением векторов скорости

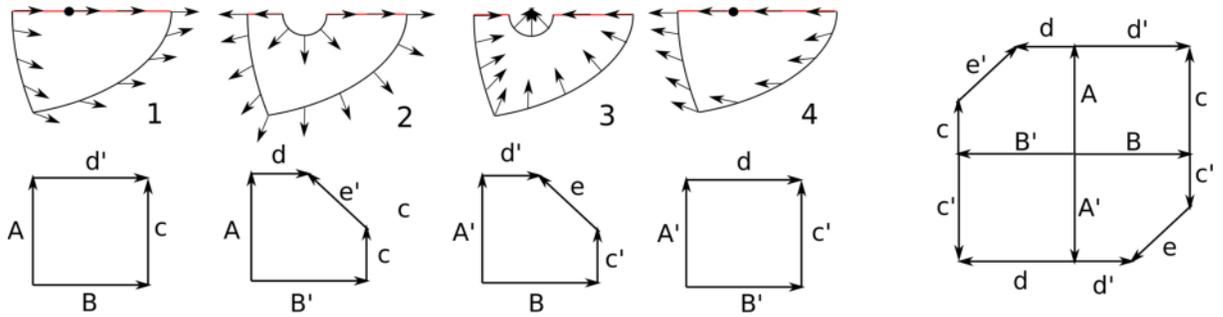


Рис. 2.17: Прообраз нижней половины критической области возможного движения в Q_h^3

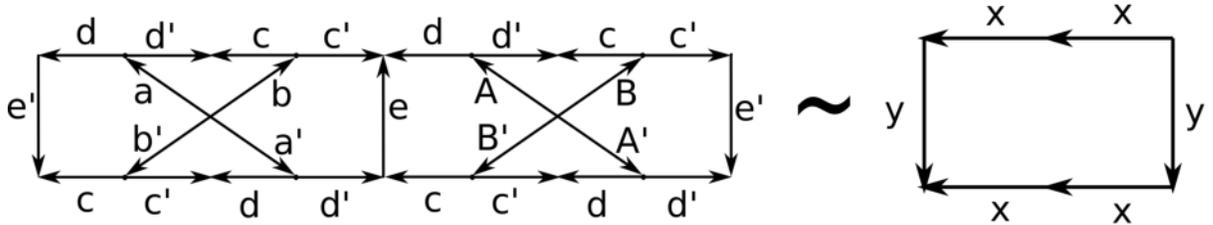


Рис. 2.18: Прообраз критической области возможного движения в Q_h^3 гомеоморфен особому слою 3-атома A^*

значении параметра f многочлен V может принимать либо положительное значение в точке $-a$, либо отрицательное. Если он принимает отрицательное значение, картина не отличается от перестройки, описанной в билиарде 11. Если же он принимает положительное значение, область возможного движения делится прямой $x = 0$ на две несвязанные части. При этом одна из них перестраивается через фокус, давая 3-атом A^* , а вторая перестраивается по 3-атому B , как в билиарде 10.

В заключении, рассмотрим перестройку через два фокуса в билиарде 1. Как и в прошлом случае, вид 3-атома зависит от знака многочлена V в точке $-a$. Если он положителен, то область возможного движения разбивается на две непересекающиеся части, каждая из которых перестраивается через фокус и дает 3-атом A^* . Случай, при котором многочлен V принимает

отрицательное значение, соответствует перестройке кольцевой области возможного движения в односвязную область (рис. 2.19, б). Рассмотрим критическую область возможного движения и разделим ее на четыре симметричные части осями координат. Ранее при рассмотрении фокальной перестройки бильярда 11 мы уже строили прообразы частей, лежащих в I и IV квадранте. Согласно тому, что уравнения Гамильтона, задающие динамику бильярд, симметричны относительно центра бильярда (при замене $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$), получим прообразы частей, лежащие в II и III квадранте. Заметим, что полученный слой гомеоморфен тору с двумя выделенными гомологичными циклами, склеенными в один критический. Т.е. получили особый слой 3-атома B .

Теорема доказана. □

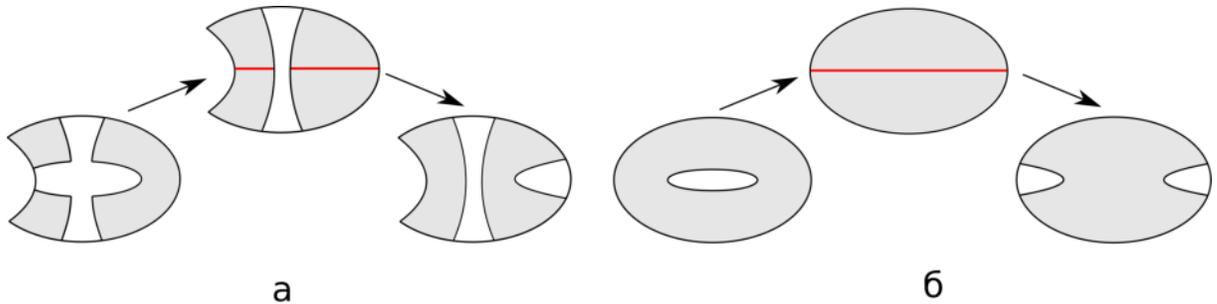


Рис. 2.19: Бифуркации областей возможного движения с получением 3-атомов $A^* + B$ и B

2.4 Инвариант Фоменко–Цишанга элементарного бильярда с потенциалом Гука при неособом уровне энергии

2.4.1 Бифуркационные диаграммы

Построим теперь бифуркационные диаграммы бильярдов 1-12. Из утверждения 2.3.2 следует, что значения первых интегралов (h, f) критические тогда и только тогда, когда не выполнено хотя бы одно из условий $c1 - c7$. Следствием этого утверждения служит теорема о структуре бифуркационной диаграммы.

Теорема 2.4. *Бифуркационная диаграмма элементарного бильярда с потенциалом Гука, ограниченного дугами софокусных квадрик, имеет следующий вид.*

1. При $k > 0$ она включает в себя

- луч $f = -hyp_1h + \frac{k}{2}hyp_1^2$, где $h \geq \frac{k}{2}(hyp_1 + ell_1)$,
- дугу параболы $f = -\frac{h^2}{2k}$, где $h \in [k ell_1, 0]$,

- отрезок прямой $f = -ell_1h + \frac{k}{2}ell_1^2$, где $h \in [\frac{k}{2}(hyp_1 + ell_1), k ell_1]$,
- луч $f = 0$ при $h \geq 0$,
- луч $f = bh + \frac{k}{2}b^2$, где $h \geq \frac{k}{2}(-b + ell_1)$, если $ell_1 = -b$ или $hyp_2 = -b$.

2. При $k < 0$ она включает в себя

- луч $f = -hyp_1h + \frac{k}{2}hyp_1^2$, где $h \geq k hyp_1$,
- дугу параболы $f = -\frac{h^2}{2k}$, где $h \in [k hyp_2, k hyp_1]$,
- отрезок прямой $f = -hyp_2h + \frac{k}{2}hyp_2^2$, где $h \in [\frac{k}{2}hyp_2, k hyp_2]$,
- луч $f = 0$ при $h \geq \frac{k}{2}hyp_2$,
- луч $f = bh + \frac{k}{2}b^2$, где $h \geq \frac{k}{2}(-b + hyp_2)$, если $ell_1 = -b$ или $hyp_2 = -b$,
- отрезок $f = ah + \frac{k}{2}a^2$, где $h \in [-\frac{k}{2}a, -ka]$, если $hyp_1 = -a$.

Доказательство. Начнем со случая $k > 0$. Найдем сначала границы образа отображения момента. Ясно, что граничные значения первых интегралов соответствуют тем условиям, которые дают минимаксные 3-атомы A . Распишем условие $c1$ в терминах параметров (h, f) и получим условие

$$f = -hyp_1h + \frac{k}{2}hyp_1^2, \quad h \geq k hyp_1.$$

При этом из доказанного в теореме 2.3 следует, что движение существует только если $\xi \geq hyp_1$. Это означает, что образ отображения момента лежит ниже полученного луча. Кроме того, при $h < k hyp_1$ точка экстремума многочлена V меньше hyp_1 . Следовательно многочлен убывает на отрезке $[hyp_1, 0]$. Это означает, что неравенство 2.2.4 не может быть выполнено ни при каких значениях (h, f) . Следовательно, образ отображения момента лежит в области $h \geq k hyp_1$.

Аналогично, расписывая условие $c4$, получим

$$f = -ell_1h + \frac{k}{2}ell_1^2, \quad h \leq k ell_1,$$

при этом образ отображения момента лежит выше этого луча на указанном промежутке значений h . Таким образом, объединяя условия $c1$ и $c4$, получим, что образ лежит правее значения $h = \frac{k}{2}(hyp_1 + ell_1)$ – пересечение лучей. Далее, рассмотрим промежуток $h \in [k ell_1, 0]$. При таких значениях энергии экстремум многочлена V лежит на отрезке $[ell_1, 0]$. Согласно теореме 2.3, условию $c6$ соответствует критическое значение первых интегралов. Эти значения удовлетворяют равенству

$$h^2 + 2kf = 0.$$

Причем, если точка (h, f) лежит ниже полученной параболы, многочлен V отрицателен на всей области значений, что означает отсутствие движения. На оставшемся интервале $h \in (0, \infty)$ из условия $c7$ следует, что образ отображения момента лежит выше прямой $f = 0$. Таким образом, были получены границы образа отображения момента.

Очевидно, что условия $c2$ и $c5$ не выполняются. Рассмотрим оставшееся условие $c3$. На плоскости $\mathbb{R}^2(h, f)$ оно соответствует лучу прямой $f = bh + \frac{k}{2}b^2$ для $h \geq -kb$. Однако бифуркациям торов Лиувилля будет соответствовать те точки, которые лежат в области отображения момента. Следовательно, полученный луч необходимо провести, начиная с первой точки пересечения. Ей соответствует значение энергии $h \geq \frac{k}{2}(-b + ell_1)$ (одновременное выполнение условий $c3$ и $c4$). Таким образом, были описаны бифуркационные диаграммы в случае $k > 0$.

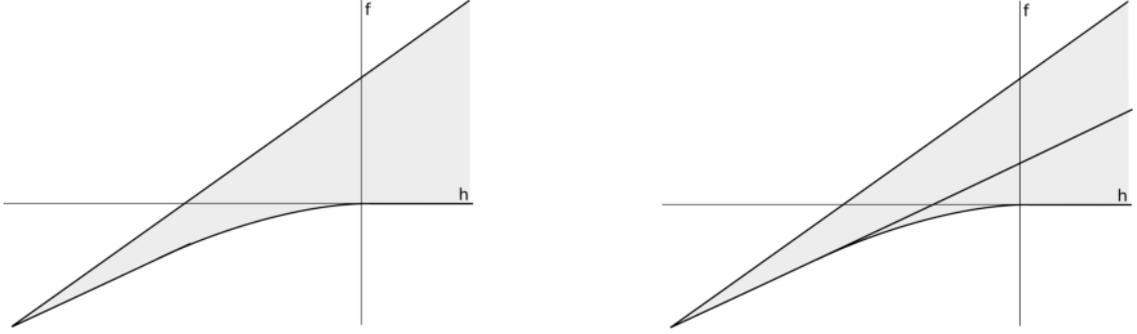


Рис. 2.20: Бифуркационные диаграммы при $k > 0$. Приведены случаи $ell_1 \neq -b$ и $ell_1 = -b$

Положим теперь $k < 0$. Снова найдем границы образа отображения момента. При $h < 0$ точка экстремума многочлена V больше нуля. Из этого следует, что многочлен убывает на всем отрезке $[hyp_1, 0]$, что означает отсутствие движения при любом значении параметра f . Следовательно образ отображения момента лежит в области положительных значений энергии. Но тогда, как было показано ранее, из условия $c7$ вытекает то, что движение существует только при $f \geq 0$. Рассмотрим теперь условие $c5$ и распишем его в терминах h и f . Получим

$$f = -hyp_2h + \frac{k}{2}hyp_2^2 \quad \text{при} \quad h \leq k hyp_2.$$

Причем на полученном промежутке значений энергии движение существует только тогда, когда значение f лежит ниже полученной прямой. Таким образом, объединяя условия $c5$ и $c7$, получим, что образ отображения момента лежит правее значения $h = \frac{k}{2}hyp_2$ (пересечение прямой и оси $0h$), при этом на промежутке $h \in [\frac{k}{2}hyp_2, k hyp_2]$ он ограничен этими двумя прямыми.

Распишем теперь условие $c6$. Получим

$$h^2 + 2kf = 0 \quad \text{при} \quad h \in [k hyp_2, k hyp_1].$$

Причем, если точка (h, f) лежит ниже полученной параболы, многочлен V положителен на всей области значений, что означает отсутствие движения. Далее, рассмотрим условие $c1$. Из него следует, что на промежутке $h \in [k hyp_1, +\infty)$ образ отображения момента лежит ниже прямой

$$f = -hyp_1h + \frac{k}{2}hyp_1^2.$$

Таким образом, были получены границы образа в случае $k < 0$.

Рассмотрим условие $c2$. Оно соответствует прямой

$$f = ah + \frac{k}{2}a^2 \quad \text{при} \quad h < -ka.$$

Точки этого луча, попавшие в образ отображения момента, образуют отрезок, который лежит выше оси $0h$. Для отрезка выполнено $h \in [-\frac{k}{2}a, -ka]$. Отметим, что при выполнении условия $c2$ условие $c1$ примет вид $\xi = -a$. Это означает, что полученный отрезок продолжает граничный луч, соответствующий условию $c1$. Тем не менее, отрезку соответствует бифуркация торов Лиувилля, отличная от бифуркации на границе. Поэтому полученные две бифуркационные кривые нельзя рассматривать как одну.

Распишем оставшийся случай $c3$. Получим

$$f = bh + \frac{k}{2}b^2 \quad \text{при} \quad h > -kb.$$

Первое пересечение этого луча с границей образа отображения момента происходит в точке $h = \frac{k}{2}(-b + \text{hyp}_2)$ (одновременное выполнение условий $c3$ и $c5$). Таким образом, были описаны все бифуркационные диаграммы при $k < 0$.

Теорема доказана.

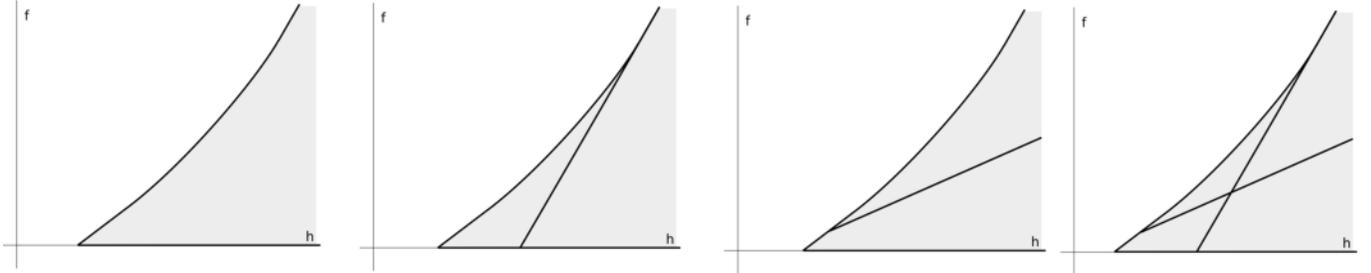


Рис. 2.21: Бифуркационные диаграммы при $k < 0$. Приведены случаи $\text{hyp}_1 \neq -a$ и $\text{hyp}_1 = -a$, а также достижения и недостижения условия $c3$.

□

Заметим, что условия $c2$ и $c3$ (отвечающие седловым 3-атомам), могут не достигаться для определенных элементарных билиардов. Так, они заведомо не достигаются в билиарде 7, который не пересекается с осями $0x$ и $0y$. Следовательно, бифуркационная диаграмма этого билиарда не будет содержать соответствующих дуг, а оставшиеся кривые будут граничными для образа отображения момента. Кроме того, одна и та же дуга может соответствовать разным 3-атомам для разных билиардов. Например, согласно теореме 2.3, дуга $f = bh + \frac{k}{2}b^2$ соответствует 3-атому A^* для билиарда 11 и 3-атому B для билиарда 1.

2.4.2 Грубая молекула

Построим для каждого элементарного бильярда инвариант Фоменко–Цишанга. Напомним, что это инвариант, полностью определяющий глобальное устройство слоения Лиувилля на зафиксированном неособом уровне энергии. Построение происходит в два шага: сначала строится инвариант Фоменко (грубая молекула), представляющий собой граф – базу слоения Лиувилля, и затем вычисляются метки r , ε и n . Зафиксируем неособый уровень энергии $H = h$, и проведем соответствующую прямую на плоскости $\mathbb{R}^2(h, f)$. В пересечении с образом отображения момента получим некоторый отрезок. Выделим на этом отрезке точки его пересечения с дугами бифуркационной диаграммы. Отметим, что неособость уровня энергии означает, что во всех этих точках отрезок пересекает диаграмму трансверсально и не проходит через особенности (точки излома и касания самой диаграммы). Регулярные точки отрезка соответствуют торам Лиувилля. Их количество N определяется областью возможного движения (см. лемму 2.2). Бифуркации торов происходят в выделенных точках пересечения через соответствующие 3-атомы, вычисленные в теоремах 2.3 и 2.4. Все это позволяет полностью восстановить грубую молекулу. Действительно, каждый подотрезок отрезка $H = \text{const}$ соответствует N ребрам молекулы (по количеству торов). Ребра склеиваются в своих концах таким образом, чтобы соответствующие им торы лежали в окрестности особого слоя подходящего 3-атома. Таким образом, изначально изолированные ребра склеиваются в исходный граф, вершинам которого сопоставлены 3-атомы. Схематически описанный процесс изображен на рис. 2.22.

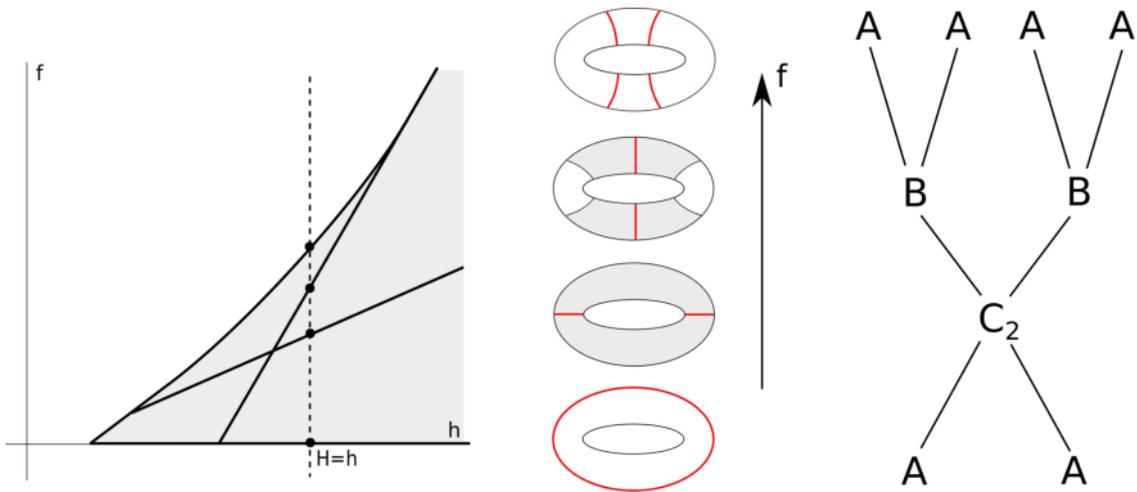


Рис. 2.22: Построение грубой молекулы.

Таким образом были вычислены всевозможные неизоморфные грубые молекулы элементарных бильярдов. В следующем пункте будет представлен их полный список.

2.4.3 Инвариант Фоменко–Цишанга

Вычислим теперь метки в полученном грубом инварианте. Для этого разобьем 3-атомы на шесть групп в соответствии с теоремой 2.3:

1. минимальные 3-атомы A ;
2. максимальные 3-атомы A ;
3. седловые 3-атомы, соответствующие слиянию односвязных областей возможного движения по отрезку фокальной прямой;
4. седловые 3-атомы, соответствующие разрыву области возможного движения по прямой Ox вне фокального отрезка или отрезкам вертикальной оси Oy ;
5. 3-атомы A^* , соответствующий бифуркации односвязной области в односвязную через один фокус;
6. 3-атом B , соответствующий бифуркации неодносвязной области в односвязную через два фокуса;

В таких обозначениях верна следующая теорема.

Теорема 2.5. *Зафиксируем ориентацию изоэнергетического многообразия Q_h^3 таким образом, чтобы все циклы λ на минимальных 3-атомах A стали согласованными. Рис. 2.23 полностью описывает метки, соответствующие ребрам построенной выше грубой молекулы.*

Верхний атом Нижний атом	2	3	4	5	6
1	$r=0 \quad \varepsilon=1$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=\infty \quad \varepsilon=1$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=0$
3	$r=\infty \quad \varepsilon=1$	$r=\infty \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=0 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=0$	$r=0.5 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=-1$	$r=0.5 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=-1$
4	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=\infty \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=2 \quad \Theta'=0$	—————
5	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=2 \quad \Theta'=0$	$r=0.5 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=-1$	—————	—————
6	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=1$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=1 \quad \Theta'=1$	$r=0 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=0$	—————	—————

Рис. 2.23: Метки инварианта Фоменко–Цишанга. Ячейка соответствует ребру, соединяющего атомы из обозначенных групп, причем атом из первого столбца всегда стоит на уровень ниже атома из первой строки в грубой молекуле. Здесь Θ обозначает вклад ребра в метку n семьи, не содержащей атомов 5 и 6, а Θ' обозначает вклад в метку n семьи атома 5 или 6.

Доказательство. Из доказательства теоремы 2.3 следует, что образы критических окружностей при проекции p на бильярд являются дугами софокусного эллипса (в том числе и вырожденного $\lambda_2 = -b$) для 3-атомов из группы 1 и 3, или отрезками фокальной прямой или дугами софокусной гиперболы в случае 3-атомов из групп 2 и 4. Следовательно, согласно правилам выбора допустимого базиса на границах 3-атомов, изложенных в [1], выберем циклы λ и μ следующим образом: образ цикла λ 3-атомов 1 и 4 при проекции на бильярд является дугой софокусной гиперболы, а образ цикла μ – дугой эллипса (рис. 2.24, а, г); для 3-атомов 2 и 3, наоборот, образ цикла λ является дугой софокусного эллипса, а образ цикла μ – дугой гиперболы (рис. 2.24, б, в). В качестве циклов λ на границах 3-атомов 5 и 6 выберем такие, образы которых изображены на рис. 2.24, д, е соответственно (такие циклы, очевидно, стягиваются к критическим), а образы циклов μ (или $\hat{\mu}$ для 3-атома A^*) выберем лежащими на дугах софокусных гипербол. При этом ориентации всех циклов λ седловых 3-атомов и циклов μ 3-атомов A , а также циклов λ минимальных 3-атомов A объявляются согласованными.

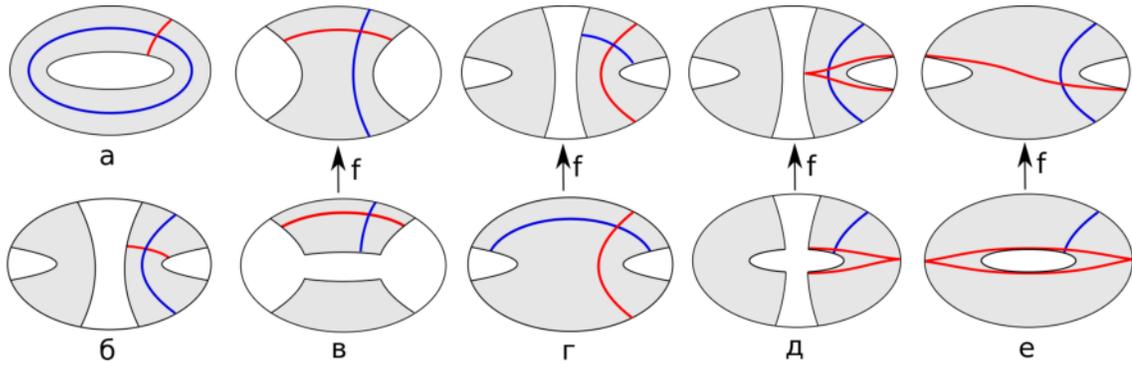


Рис. 2.24: Примеры выбора допустимого базиса на границах 3-атомов. Красным цветом изображены образы циклов λ при проекции на бильярд, синим цветом изображены образы циклов μ (или $\hat{\mu}$ на рис. д). При этом на рис. в, г, д, е изображены две области – образы двух границ 3-атома, соответствующих минимальному и максимальному значению интеграла F .

Одновременно с доказательством теоремы докажем следующую лемму с помощью индукции по высоте грубой молекулы, начиная с нижнего критического слоя (соответствующего наименьшему значению интеграла F) и постепенно переходя к слоям выше.

Лемма 2.6. Пусть 3-атом V принадлежит группе 4. Тогда ориентация цикла μ на его верхней границе (то есть на границе, соответствующей максимальному значению интеграла f) является согласованной. Если же этот 3-атом принадлежит группе 3, ориентация цикла μ на его верхней границе является несогласованной.

Итак, пусть ребро грубой молекулы связывает 3-атомы из групп 1 и 2 (ребро $A - A$). Согласно выбору базисных циклов, с точностью до ориентации цикл λ_1 3-атома 1 переходит в цикл μ_2 3-атома 2 и наоборот (рис. 2.25, а). Согласно тому, что циклы λ_1 и μ_2 согласованные, матрица

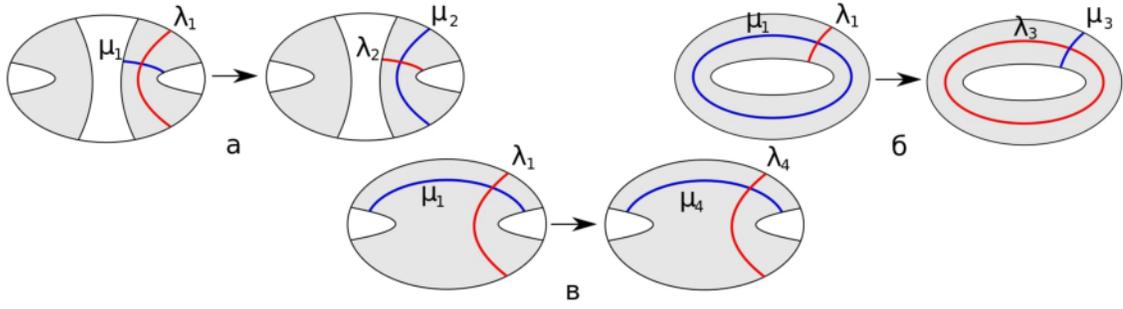


Рис. 2.25: Образы базисных циклов на границах 3-атомов для ребра $A - A$ (рис. а), $A - V_3$ (рис. б) и $A - V_4$ (рис. в)

склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, метка $r = 0$, а метка $\varepsilon = 1$.

Пусть теперь ребро связывает 3-атомы из групп 1 и 3 (ребро $A - V_3$). Аналогично, цикл λ_1 3-атома A переходит в цикл μ_3 3-атома V_3 и наоборот с точностью до ориентации (рис. 2.25, б). Заметим, что циклы λ_3 и μ_1 согласованные. Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$, а вклад в метку n равен 0. Цикл μ_3 обязан быть согласованным. Следовательно, на другой (верхней) границе 3-атома V_3 он станет несогласованным. Этот факт является базой индукции в доказательстве леммы 2.6.

Пусть ребро связывает 3-атомы из групп 1 и 4 (ребро $A - V_4$). Согласно выбору базисных циклов, с точностью до ориентации цикл λ_1 3-атома A переходит в цикл λ_4 3-атома V_4 , а цикл μ_1 переходит в μ_4 (рис. 2.25, в). Согласно тому, что циклы λ_1 и λ_4 согласованные, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Следовательно, метка $r = \infty$, а метка $\varepsilon = 1$. Цикл μ_4 при этом несогласованный. Следовательно, на другой (верхней) границе 3-атома V_4 он станет согласованным. Этот факт также является базой индукции в доказательстве леммы 2.6.

Рассмотрим теперь ребра, соединяющие два 3-атома из группы 3 или 4 (ребра $V_3 - V_3$ и $V_4 - V_4$). Заметим, что в обоих случаях цикл λ_- одного 3-атома переходит в цикл λ_+ другого 3-атома, и то же для циклов μ . При этом оба цикла λ согласованные. Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Метка $r = \infty$, метка $\varepsilon = 1$, а вклад в метку n нулевой. При этом на верхней границе обоих 3-атомов циклы μ сохраняют согласованность (на верхнем 3-атоме V_3 он по прежнему несогласованный, а на верхнем 3-атоме V_4 – согласованный).

Рассмотрим ребро, связывающее 3-атомы из групп 3 и 4 (ребро $V_3 - V_4$). С точностью до ориентации цикл λ_3 3-атома V_3 переходит в цикл μ_4 3-атома V_4 и наоборот (рис. 2.26, а). По лемме 2.6 цикл μ_3 несогласованный. Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Метка $r = 0$, а метка $\varepsilon = -1$. Это ребро может быть как входящим, так и выходящим для двух семей,

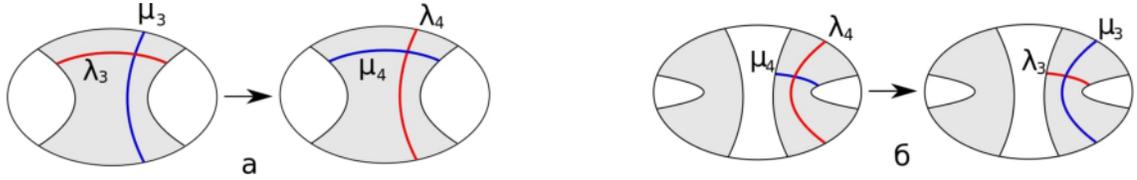


Рис. 2.26: Образы базисных циклов на границах 3-атомов для ребра $V_3 - V_4$ (рис. а) и $V_4 - V_3$ (рис. б)

причем вклад в метку n каждой из них нулевой. Заметим, что цикл μ_4 имеет несогласованную ориентацию. Следовательно, на верхней границе 3-атома V_4 она станет согласованной.

Аналогично, рассмотрим ребро $V_4 - V_3$. Как и раньше, цикл λ_3 3-атома V_3 переходит в цикл μ_4 3-атома V_4 и наоборот (рис. 2.26, б). Но, согласно лемме 2.6, цикл μ_4 согласованный. Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$, а вклад в метку n для каждой из двух возможных семей нулевой. Заметим, что цикл μ_3 имеет согласованную ориентацию. Следовательно, на верхней границе 3-атома V_3 она станет несогласованной.



Рис. 2.27: Образы базисных циклов на границах 3-атомов для ребра $A - A^*$ (рис. а) и $A - B$ (рис. б)

Пусть теперь ребро соединяет 3-атомы из групп 1 и 5 (ребро $A - A^*$). Заметим, что $\lambda_5 = 2\lambda_1 + \mu_1$ в силу согласованности циклов λ_1 и μ_1 , а циклы λ_1 и μ_5 совпадают с точностью до ориентации (рис. 2.27, а). Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$, а вклад в метку n семьи 3-атома A^* нулевой. При этом, ориентация цикла μ_5 согласованная. Следовательно, на верхней границе 3-атома A^* ориентация цикла $\hat{\mu}$ является несогласованной.

Аналогичные соотношения на базисные циклы, и, следовательно, аналогичные метки соответствуют ребру $A - B$, соединяющему 3-атомы из групп 1 и 6 (рис. 2.27, б). Отметим, что на верхней границе 3-атома B ориентация цикла μ , как и в прошлом случае, является несогласованной.

Рассмотрим ребро, соединяющее 3-атомы из 3 и 5 группы (ребро $V_3 - A^*$). В силу леммы 2.6 соотношения на циклы имеют вид $\lambda_5 = \lambda_3 - 2\mu_3$, при этом циклы μ_3 и μ_5 совпадают с точностью до ориентации (рис. 2.28, а). Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0.5$, метка $\varepsilon = -1$. Вклад в метку n семьи 3-атома A^* , а также возможной

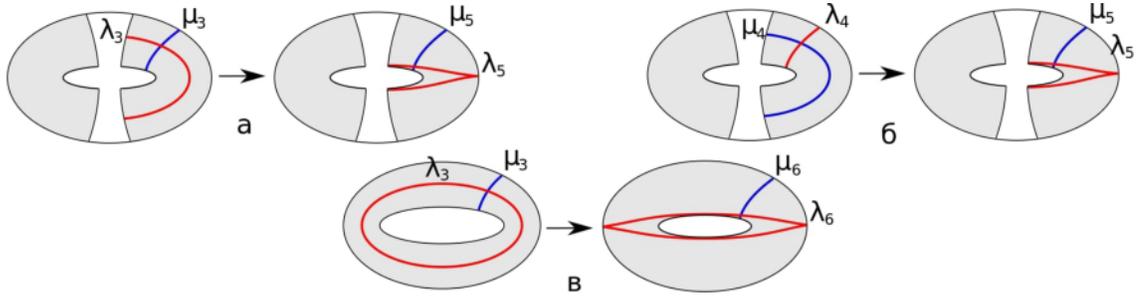


Рис. 2.28: Образы базисных циклов на границах 3-атомов для ребра $V_3 - A^*$ (рис. а), $V_3 - B$ (рис. б) и $V_4 - A^*$ (рис. в)

другой семьи, для которой ребро $V_3 - A^*$ является выходящим, равен -1 . При этом заметим, что ориентация цикла μ_5 согласованная. Следовательно, на верхней границе 3-атома A^* ориентация цикла $\hat{\mu}$ также является несогласованной.

И опять, аналогичные соотношения на базисные циклы и метки соответствуют ребру $V_3 - B$, соединяющему 3-атомы из групп 3 и 6 (рис. 2.28, б). Отметим, что на верхней границе 3-атома B ориентация цикла μ , как и в прошлом случае, является несогласованной.

Пусть теперь ребро соединяет 3-атомы из групп 4 и 5 (ребро $V_4 - A^*$). В силу леммы 2.6 соотношения на циклы имеют вид $\lambda_5 = 2\lambda_4 + \mu_4$, при этом циклы λ_4 и μ_5 совпадают с точностью до ориентации (рис. 2.28, в). Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$. Вклад в метку n семьи 3-атома A^* нулевой, а вклад в метку возможной другой семьи, для которой ребро $V_3 - A^*$ является выходящим, равен 2. И опять, ориентация цикла μ_5 согласованная. Следовательно, на верхней границе 3-атома A^* ориентация цикла $\hat{\mu}$ также является несогласованной.

Заметим, что не существует ребер типа $V_4 - B$, соединяющих 3-атомы из 4 и 6 группы. Действительно, 3-атом B из 6 группы предполагает перестройку неодносвязной области возможного движения в односвязную. Но 3-атом V_4 из 4 группы соответствует “разрыву” области вдоль дуг софокусных гипербол. После такого “разрыва” область возможного движения в любом случае станет объединением односвязных областей. Также невозможны ребра, соединяющие два 3-атома из группы 5 или 6, или же два 3-атома из групп 5 и 6, так как эти 3-атомы лежат на одном уровне интеграла F .

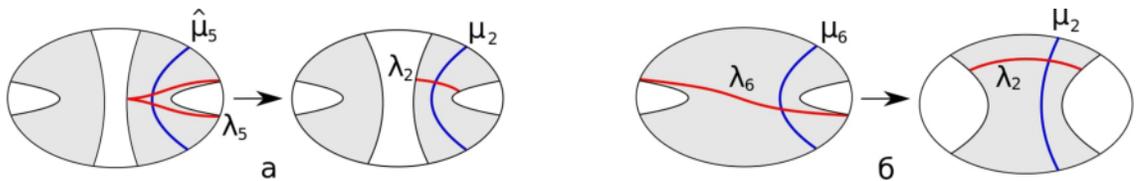


Рис. 2.29: Образы базисных циклов на границах 3-атомов для ребра $A^* - A$ (рис. а) и $B - A$ (рис. б)

Также отметим, что во всех разобранных случаях на верхней границе 3-атомов из групп 5 и 6 циклы μ (или $\hat{\mu}$) ориентированы несогласованно. Рассмотрим теперь ребро $A^* - A$, соединяющее 3-атомы из групп 2 и 5. В силу согласованности цикла μ_2 , соотношение на цикл λ_5 имеет вид $\lambda_5 = \pm 2\lambda_2 + \mu_2$, при этом $\hat{\mu}_5 = -\mu_2$ (рис. 2.29, а). Воспользуемся правилом выбора цикла μ на 3-атоме со звездой: $\mu_5 = \frac{1}{2}(\lambda_5 + \hat{\mu}_5) = \pm\lambda_2$. Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$, а вклад в метку n семьи 3-атома A^* нулевой.

Теперь предположим, что ребро связывает 3-атомы из 2 и 6 группы (ребро $B - A$). В силу несогласованности цикла μ_6 , а также соотношения $\lambda_5 = \pm\lambda_2 + \mu_2$ (рис. 2.29, б), матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$, а вклад в метку n семьи 3-атома A^* равен 1.

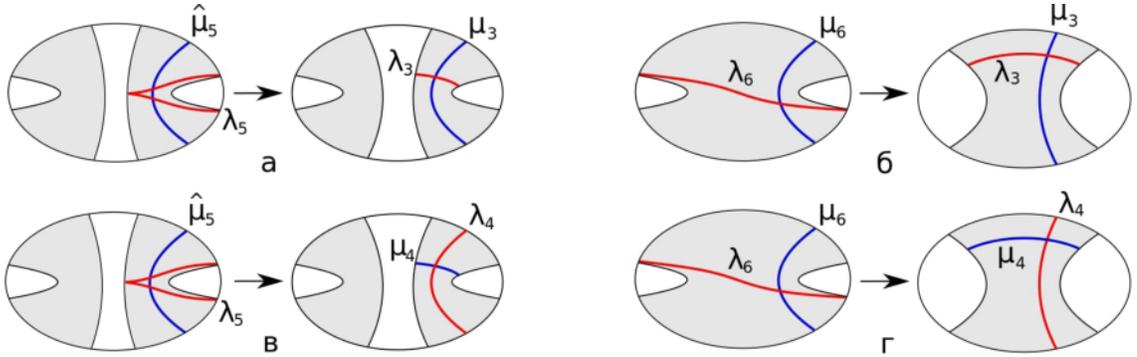


Рис. 2.30: Образы базисных циклов на границах 3-атомов для ребра $A^* - V_3$ (рис. а), $B - V_3$ (рис. б), $A^* - V_4$ (рис. в) и $B - V_4$ (рис. г)

Рассмотрим ребро вида $A^* - V_3$, соединяющее 3-атомы из 5 и 3 группы. Соотношения на циклы имеют вид $\lambda_5 = 2\lambda_3 \pm \mu_3$, при этом $\hat{\mu}_5 = \mp\mu_3$ в силу несогласованности цикла $\hat{\mu}_5$ (рис. 2.30, а). Следовательно, цикл μ_5 имеет вид $\mu_5 = \frac{1}{2}(\lambda_5 + \hat{\mu}_5) = \lambda_3$, а матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$. Вклад в метку n семьи 3-атома A^* нулевой, а вклад в метку возможной другой семьи, для которой ребро $V_3 - A^*$ является выходящим, равен 2. Заметим, что выбор положительного знака означает согласованности цикла μ_3 . Следовательно, на верхней границе 3-атома V_3 цикл μ несогласованный.

Аналогично рассмотрим ребро $B - V_3$, соединяющее 3-атомы из 6 и 3 группы. Соотношения на циклы имеют вид $\lambda_6 = \lambda_3 \pm \mu_3$, при этом $\mu_5 = \mp\mu_3$ в силу несогласованности (рис. 2.30, б). Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$. Вклад в метку n семьи 3-атома B , как и вклад в метку возможной другой семьи, равен 1. Как и в прошлом случае, выбор положительного знака означает согласованности цикла μ_3 . Следовательно, на верхней границе 3-атома V_3 цикл μ также является несогласованным.

Рассмотрим теперь ребро, соединяющее 3-атомы из групп 5 и 4 (ребро $A^* - V_4$). Соотношения на циклы имеют вид $\lambda_5 = \lambda_4 \pm 2\mu_4$, при этом $\hat{\mu}_5 = -\lambda_4$ в силу несогласованности цикла $\hat{\mu}_5$ (рис. 2.30, в). Следовательно, цикл μ_5 имеет вид $\mu_5 = \frac{1}{2}(\lambda_5 + \hat{\mu}_5) = \pm 2\mu_4$, а матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0.5$, метка $\varepsilon = -1$. Вклад в метку n семьи 3-атома A^* , как и вклад в метку возможной другой семьи, равен -1 . Заметим, что выбор отрицательного знака означает несогласованности цикла μ_3 . Следовательно, на верхней границе 3-атома V_4 цикл μ согласованный.

Наконец, рассмотрим ребро, соединяющее 3-атомы из групп 6 и 4 (ребро $B - V_4$). Соотношения на циклы имеют вид $\lambda_5 = \lambda_4 \pm \mu_4$, при этом $\mu_5 = -\lambda_4$ в силу несогласованности цикла μ_5 (рис. 2.30, г). Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = -1$. Вклад в метку n семьи 3-атома A^* нулевой, а вклад в метку возможной другой семьи равен -1 . Заметим, что выбор отрицательного знака означает несогласованности цикла μ_3 . Следовательно, на верхней границе 3-атома V_4 цикл μ также является согласованным.

Заметим, что во всех рассмотренных случаях цикл μ на верхней границе 3-атома V_4 является согласованным, а на верхней границе 3-атома V_3 – несогласованным. С учетом базы лемма 2.6 была доказана с помощью индукции по высоте критических уровней интеграла F .

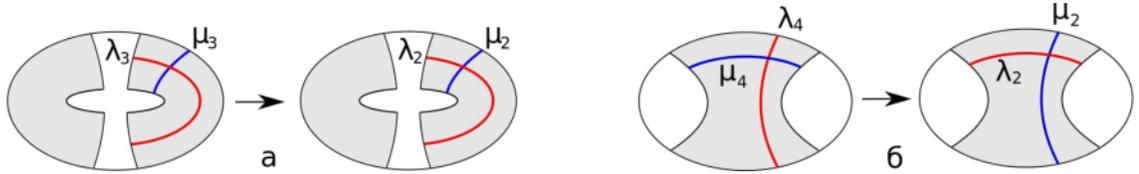


Рис. 2.31: Образы базисных циклов на границах 3-атомов для ребра $V_3 - A$ (рис. а) и $V_4 - A$ (рис. б)

Пусть теперь ребро соединяет 3-атомы из групп 2 и 3 ($V_3 - A$). Заметим, что циклы λ_2 и λ_3 , а также μ_2 и μ_3 совпадают с точностью до ориентации (рис. 2.31, а). В силу леммы 2.6 матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Следовательно, метка $r = \infty$, а метка $\varepsilon = 1$.

И наконец, пусть ребро имеет вид $V_4 - A$, соединяющее 3-атомы из групп 2 и 4. Цикл λ_4 переходит в цикл μ_2 и наоборот (рис. 2.31, б). Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$, а вклад в метку n возможной семьи нулевой. Теорема доказана. \square

Таким образом, мы получили полный инструментарий, позволяющий вычислить всевозможные инварианты Фоменко–Цишанга, встречающиеся в элементарных бильярдах с потенциалом Гука. Конечным результатом анализа служит следующая теорема.

Теорема 2.7. Элементарным бильярдам с потенциалом Гаука, ограниченным дугами софокусных квадрик, соответствуют 18 различных классов лувиллевой эквивалентности слоев Лувилля на неособых изоэнергетических многообразиях Q^3 . Полный список инвариантов Фоменко–Цишанга представлен на рис. 2.32–2.43.

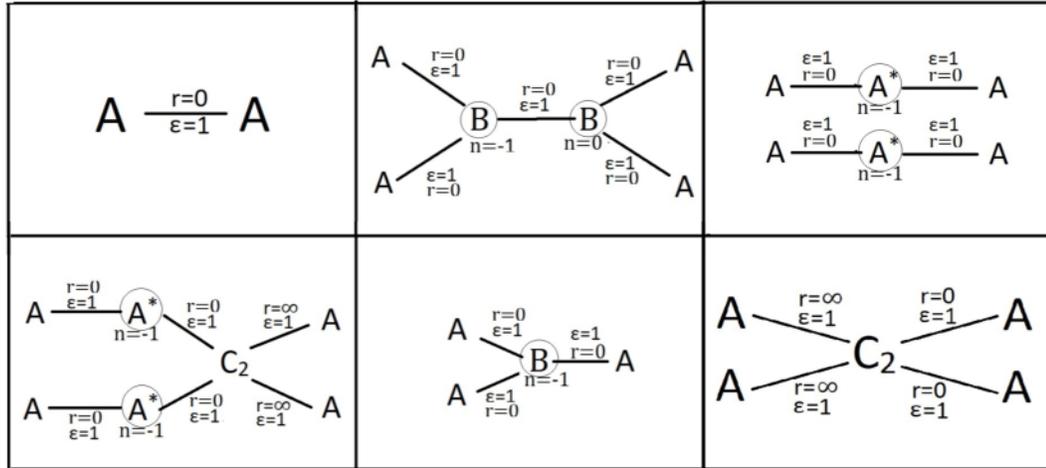


Рис. 2.32: Инварианты Фоменко–Цишанга бильярда 1

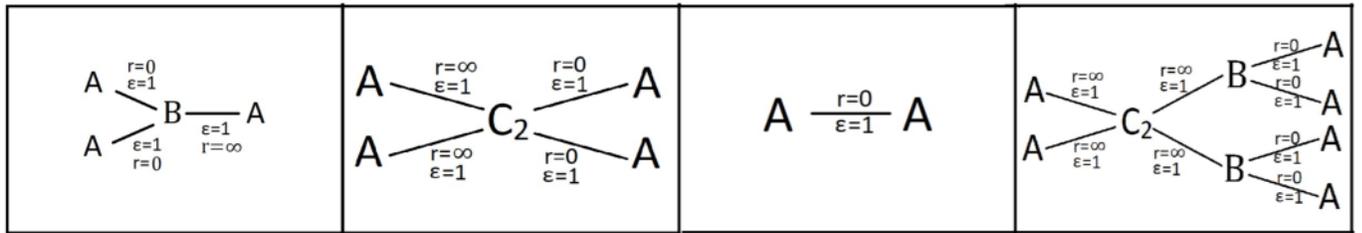


Рис. 2.33: Инварианты Фоменко–Цишанга бильярда 2

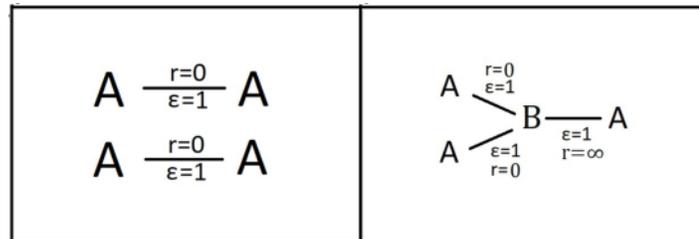


Рис. 2.34: Инварианты Фоменко–Цишанга бильярда 3

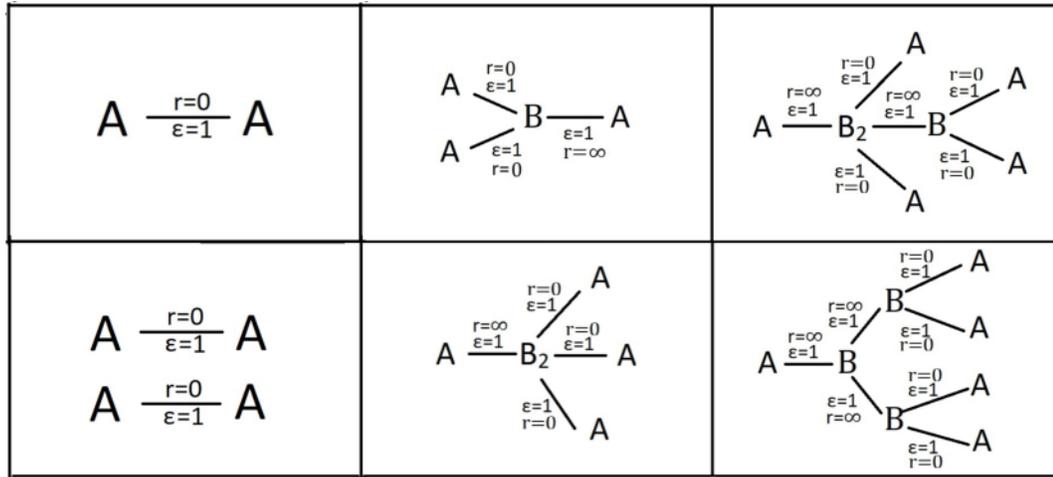


Рис. 2.35: Инварианты Фоменко–Цишанга бильярда 4

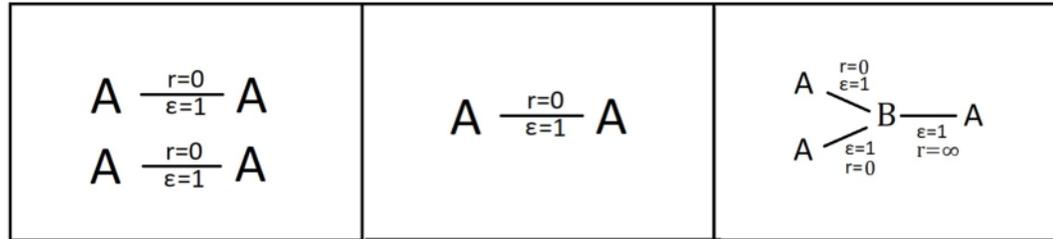


Рис. 2.36: Инварианты Фоменко–Цишанга бильярда 5

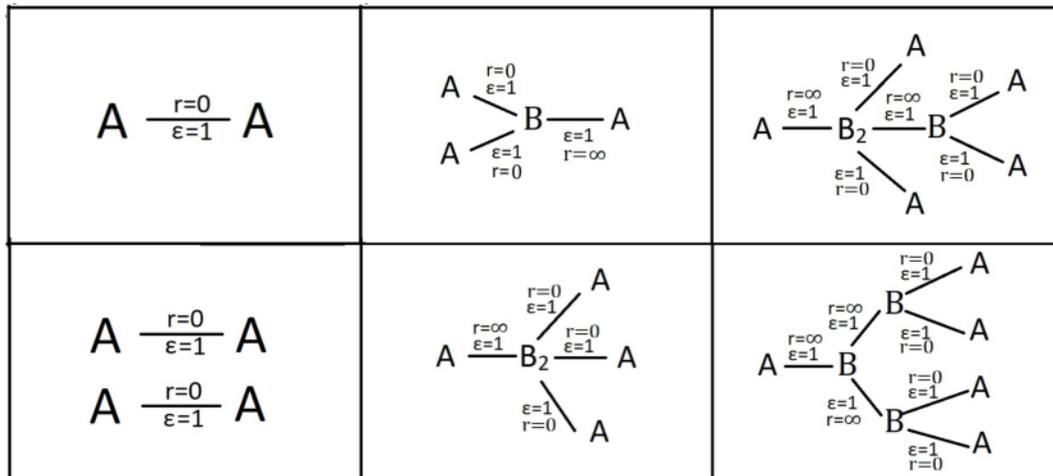


Рис. 2.37: Инварианты Фоменко–Цишанга бильярда 6

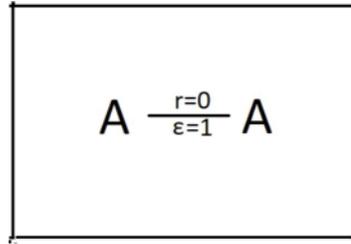


Рис. 2.38: Инварианты Фоменко–Цишанга билиарда 7

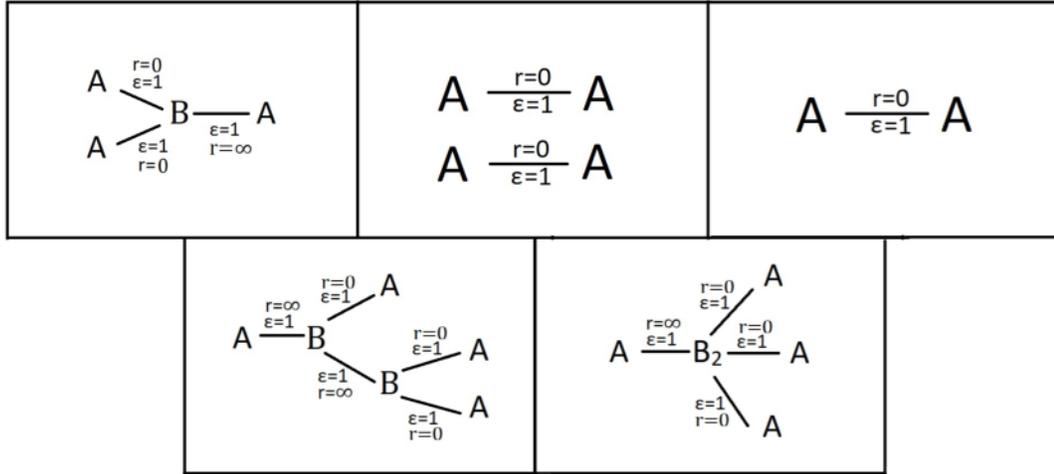


Рис. 2.39: Инварианты Фоменко–Цишанга билиарда 8

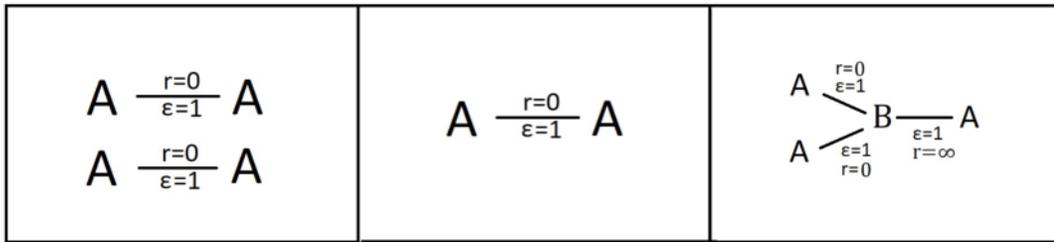


Рис. 2.40: Инварианты Фоменко–Цишанга билиарда 9

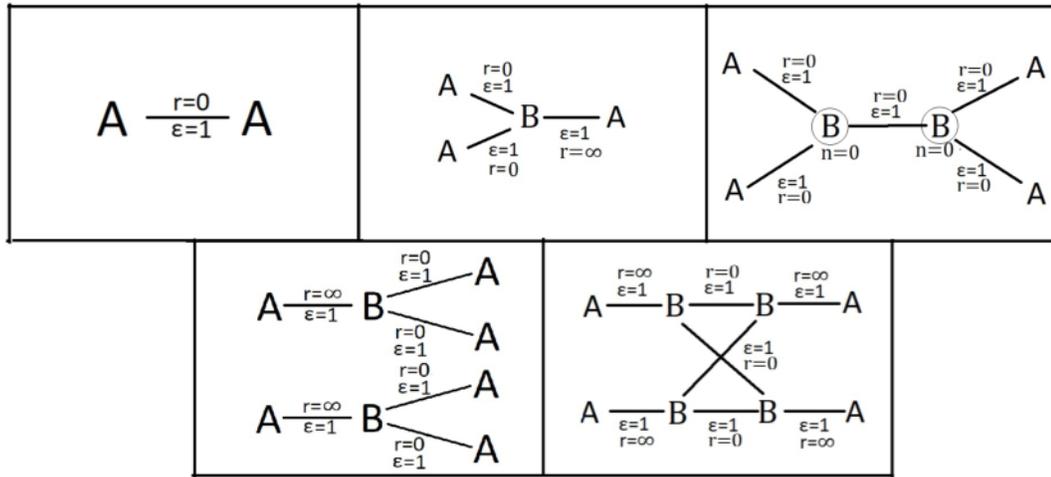


Рис. 2.41: Инварианты Фоменко–Цишанга билиарда 10

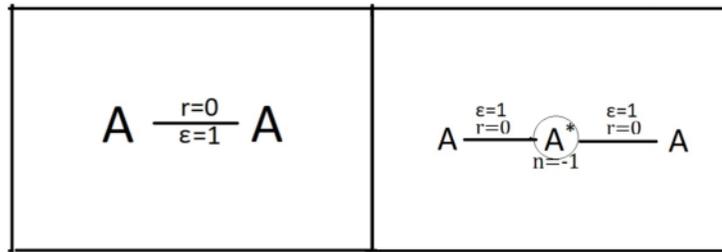


Рис. 2.42: Инварианты Фоменко–Цишанга билиарда 11

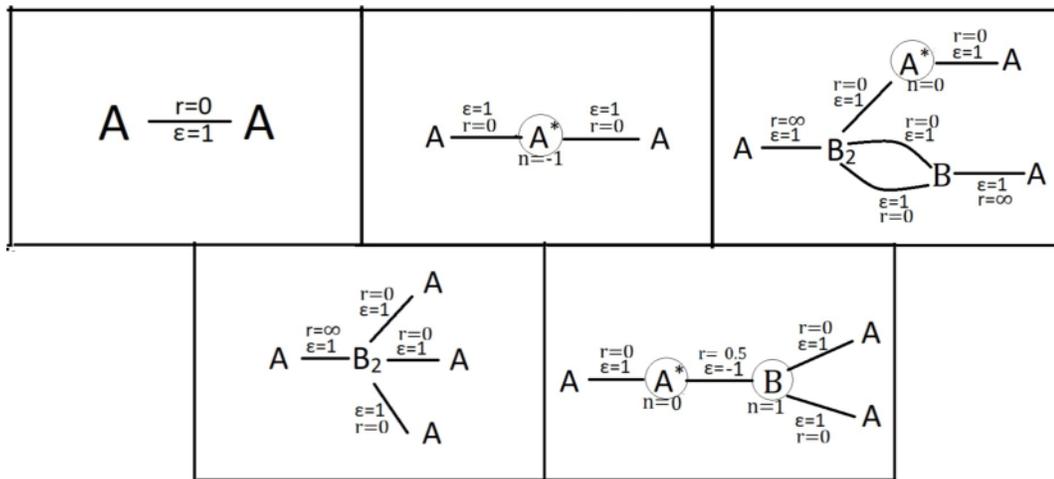


Рис. 2.43: Инварианты Фоменко–Цишанга билиарда 12

2.4.4 интегрируемые системы динамики твердого тела и бильярды с потенциалом

Приведем примеры интегрируемых систем, лиувиллево эквивалентных рассмотренным бильярдам. Для этого достаточно сопоставить инварианты Фоменко–Цишанга, полученные выше, с инвариантами искомых систем. Искомые эквивалентные системы лежат среди хорошо известных систем динамики твердого тела. Их инварианты Фоменко–Цишанга были вычислены в [1]. На рис. 2.44 приведены результаты сравнения.

Таким образом, было получено сопоставление элементарным бильярдам с потенциалом Гука их эквивалентные системы.

Инвариант Фоменко-Цишанга	№ бильярда	Случаи интегрируемости
$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	Все перечисленные	Лагранж, Эйлер
$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} A$	2 при $k < 0, 3, 4,$ 5 при $k < 0,$ 6 при $k < 0, 8, 9, 10$	Ковалевская, Жуковский, Горячев-Чаплыгин-Сретенский, Ковалевская-Яхья
$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	1	Жуковский
$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A^* \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ $n=-1$	1 при $k < 0, 11, 12$	Горячев-Чаплыгин-Сретенский
$A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} C_2 \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} C_2 \xrightarrow[r=\infty]{\varepsilon=1} A$	1 при $k < 0, 2$	Эйлер, Клебш
$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	1 при $k < 0$	Ковалевская

Рис. 2.44: Лиувиллева эквивалентность бильярдов с потенциалом Гука и классических интегрируемых случаев динамики твердого тела и их обобщений. Номера бильярдов во втором столбце соответствуют рис. 2.1

2.5 Биллиарды, граница которых содержит дуги вырожденных квадрик

До сих пор мы рассматривали лишь биллиарды, ограниченные дугами софокусных эллипсов и гипербол, избегая случаев столов, граница которых также содержит отрезки фокальной прямой $0x$ или вертикальной оси $0y$. Такие биллиарды, снабженные потенциалом Гука, также являются интегрируемыми, имеют тот же гамильтониан H и дополнительный первый интеграл F . Покажем, что для каждого такого биллиарда \mathcal{B}' найдется один из двенадцати элементарных биллиардов, рассмотренных ранее, лиувиллево эквивалентный \mathcal{B}' .

Утверждение 2.5.1. Пусть биллиард, снабженный потенциалом Гука с параметром k , задан в области \mathcal{B}' , ограниченной дугами софокусных квадрик, в том числе дугами вырожденных квадрик. Тогда найдется биллиард \mathcal{B} , ограниченный дугами невырожденных софокусных квадрик и снабженный потенциалом Гука с тем же параметром k , лиувиллево эквивалентный биллиарду \mathcal{B}' .

Доказательство. Пусть граница области \mathcal{B}' содержит дуги софокусных квадрик, принадлежащих софокусному семейству $\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1$ с параметрами $\lambda_1 \dots \lambda_m$, причем $\lambda_m = -a$, а остальные параметры отличны от $-a$ и $-b$. На рис. 2.45 приведены все подобные области. В качестве

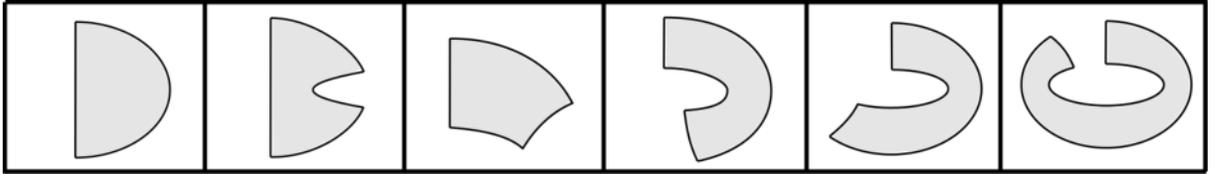
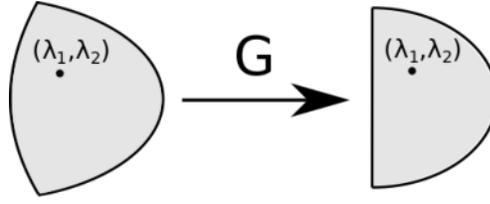


Рис. 2.45: Список эллиптико-гиперболических биллиардов с потенциалом Гука, имеющими вертикальный участок границы

области \mathcal{B} возьмем область, ограниченную квадриками с теми же параметрами, но принадлежащими семейству $\frac{x^2}{a+\varepsilon+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1$ для достаточно малого ε , причем \mathcal{B}' не пересекает ось $0y$. Коэффициент потенциала k оставим без изменений. Покажем, что это искомый биллиард. Действительно, граничная дуга с параметром λ_m перестала лежать на оси $0y$, то есть перестала принадлежать вырожденной гиперболе. Предложим следующий гомеоморфизм G фазовых пространств M^4 и M^4 этих биллиардов. Точке (x, y) области \mathcal{B} сопоставим точку (x', y') области \mathcal{B}' , что $\text{sgn}(x) = \text{sgn}(x')$, $\text{sgn}(y) = \text{sgn}(y')$ и имеющую те же эллиптические координаты. В декартовых координатах формулы перехода примут вид

$$\begin{cases} x'^2(a - b + \varepsilon) = x^2(a - b + \varepsilon) + \varepsilon y^2 + \varepsilon(a - b + \varepsilon) \\ y'^2(a - b + \varepsilon) = y^2(a - b). \end{cases}$$

Рис. 2.46: Проекция гомеоморфизма G на бильярд

Теперь каждому ковектору импульса $p = (p_x, p_y)$ в точке $(x, y) \in \mathcal{B}$ сопоставим ковектор импульса $p' = (p'_x, p'_y)$ в точке $(x', y') \in \mathcal{B}'$. Если выбранная точка не есть фокус, потребуем, чтобы 1) $H(x, y, p) = H(x', y', p')$, $F(x, y, p) = F(x', y', p')$ и 2) вектора скорости p и p' имели равные знаки при покомпонентном разложении по формуле 2.2.5. Наложённые требования дают следующие формулы:

$$\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \end{pmatrix} = \frac{(a - b + \varepsilon)^{-1}}{R(x, y, a, b)} \begin{pmatrix} A(x', y', a + \varepsilon, b) & B(x', y', a + \varepsilon, b) \\ -B(x', y', a + \varepsilon, b) & A(x', y', a + \varepsilon, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(x, y, a, b) & -B(x, y, a, b) \\ B(x, y, a, b) & A(x, y, a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix},$$

где $R(x, y, a, b) = \sqrt{(x^2 - y^2 - a + b)^2 + 4x^2y^2}$,

$$A(x, y, a, b) = \sqrt{(a - b)(R(x, y, a, b) - (x^2 - y^2 - a + b))},$$

$$B(x, y, a, b) = \sqrt{(a - b)(R(x, y, a, b) + (x^2 - y^2 - a + b))}.$$

Если же точка $(x, y) = (\sqrt{a - b}, 0)$, то есть она является фокусом, то положим $p_x = p'_x$, $p_y = p'_y$. В этом случае условие $H(x, y, p) = H(x', y', p')$, $F(x, y, p) = F(x', y', p')$ выполняется автоматически.

По построению полученное отображение $G : M^4 \rightarrow M^4$, $G(x, y, p_x, p_y) = (x', y', p'_x, p'_y)$ есть биекция. Очевидно, что в точках $(x, y, p_x, p_y) \in M^4$, в которых $x \neq \pm\sqrt{a - b}$ или $y \neq 0$ (т.е. вне фокусов), это отображение непрерывно. Несложно показать, что оно непрерывно и в фокусах. Более того, приведенные формулы легко обращаются, задавая также непрерывное отображение. Следовательно, G есть гомеоморфизм. Более того, согласно построению, оно сохраняет значения первых интегралов. Иными словами, G сохраняет слоение. Более того, оно сохраняет ориентацию критических окружностей, заданную потоком гамильтониана H . Это означает, что G есть лиувиллева эквивалентность бильярдных \mathcal{B} и \mathcal{B}' .

Пусть теперь среди граничных дуг бильярда \mathcal{B}' есть дуга квадрики с параметром $\lambda_m = -b$, то есть бильярд ограничен отрезком фокальной прямой. Причем оставшиеся дуги границы принадлежат невырожденным квадрикам. Если фокусы семейства не принадлежат границе бильярда, рассмотрим два случая. Пусть граница содержит точки фокального отрезка (первые две области на рис. 2.47). Тогда рассмотрим бильярд в области \mathcal{B} , ограниченной дугами софокусных квадрик с теми же параметрами, но принадлежащими софокусному семейству, заданному уравнением $\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda+\varepsilon} = 1$ для достаточно малого ε . Причем потребуем, чтобы полученная

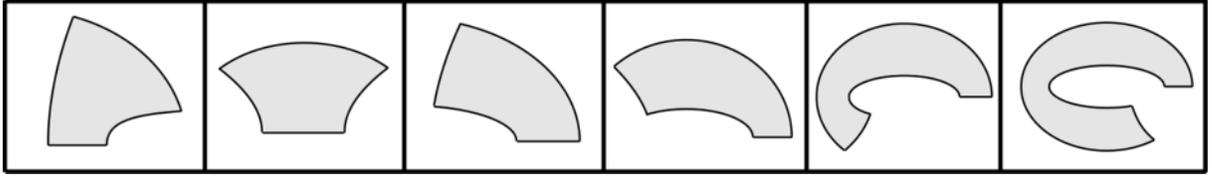


Рис. 2.47: Список эллиптико-гиперболических билиардов с потенциалом Гука, имеющими горизонтальный участок границы без фокусов

область не пересекала фокальную прямую. Если же граница билиарда \mathcal{B}' содержит точки фокальной прямой вне фокусов, построим новый билиард по тому же принципу, но выбрав софокусное семейство с уравнением $\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda-\varepsilon} = 1$. Оба случая аналогичны предыдущему. Для доказательства того, что построенный билиард \mathcal{B} лиувиллево эквивалентен исходному, можно построить послыйный гомеоморфизм G , сохраняющий ориентацию критических окружностей. Формулы, задающие его, аналогичны приведенным.



Рис. 2.48: Проекция гомеоморфизма G на билиард

Наконец, пусть граница билиарда \mathcal{B}' содержит фокусы, но не содержит отрезков оси $0y$. Этому требованию удовлетворяют всего три области, изображенные на рис. 2.49. Обозначим их A_1' , A_{1a}' и A_2' , следуя обозначениям классификации билиардных столов В. В. Ведюшкиной. Заметим, что приведенные области получены из областей 11, 12 и 1 соответственно с помо-

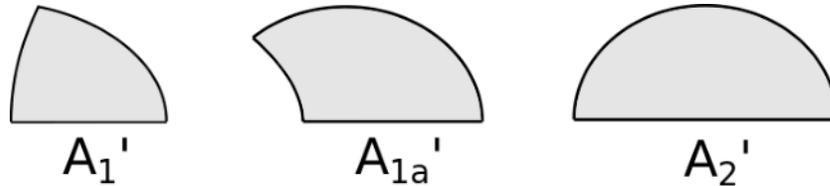


Рис. 2.49: Список эллиптико-гиперболических билиардов с потенциалом Гука, граница которых содержит фокусы

щью факторизации $x \sim -x$ (симметрия относительно фокальной оси). Такая факторизация продолжается до факторизации фазового пространства, заданной инволюцией $\tau : M^4 \rightarrow M^4$, $\tau(x, y, p_x, p_y) = (-x, y, -p_x, p_y)$. Инволюция задана корректно ввиду симметрии уравнений движения. Несложно заметить, что $M^4 = M^4/\tau$, и, более того, τ сохраняет слоение. Регулярные слои при такой факторизации переходят в регулярные слои, однако количество торов Лиувилля на одном уровне первых интегралов может уменьшиться. Рассмотрим опять классификацию 3-атомов, используемую в теореме 2.5. Отметим, что заданная факторизация переводит минимаксные 3-атомы A из групп 1, 2 в минимаксные 3-атомы из групп 1, 2 соответственно. Далее,

рассмотрим 3-атомы из групп 3, 4, 5, 6 бильярдных 1, 11, 12. Если образ критической окружности седлового 3-атома при проекции на бильярд лежит на фокальной оси, то факторизация переводит критический слой этого 3-атома в тор Лиувилля, а весь 3-атом – в расслоенную окрестность тора. Действительно, 3-атомы из групп 3 и 4 соответствуют бифуркациям областей возможного движения (слиянию или разрыву) по отрезку фокальной прямой. Факторизация переводит эту бифуркацию в регулярное изменение области возможного движения, при котором граница области выходит на границу бильярда (рис. 2.50). Следовательно, соответствующий уровень первых интегралов перестает быть критическим.

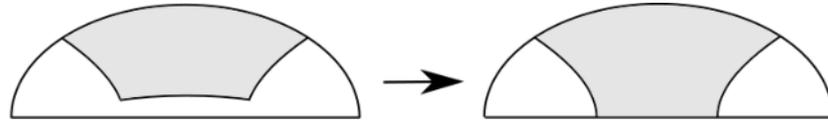


Рис. 2.50: Выход области возможного движения на границу бильярда

Рассмотрим теперь 3-атом A^* из группы 5 на примере бильярда 11. Как было показано в теореме 2.3, перестройке области возможного движения через фокус соответствует 3-атом A^* . Повторим рассуждения этого доказательства уже для бильярда A'_1 . На рис. 2.51 изображены четыре части “особого” слоя, соответствующего области возможного движения, содержащей фокус. Отметим, что фокусу соответствует полуокружность векторов скорости (следствие факторизации). Несложно заметить, что приведенный на рис. 2.51 слой гомеоморфен двумерному тору. Таким образом, факторизация переводит 3-атом из группы 5 в 3-окрестность тора Лиувилля. Аналогично можно показать, что 3-атом B из группы 6, соответствующий бифуркации областей возможного движения через два фокуса, также переходит в регулярное слоение при факторизации.

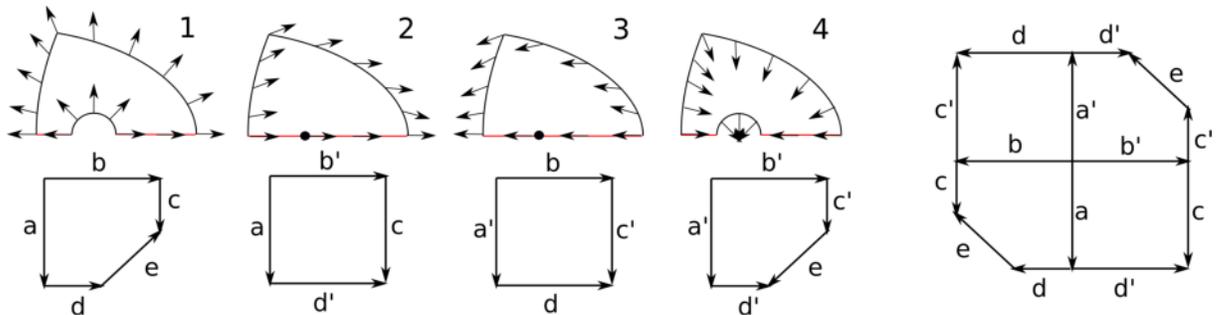


Рис. 2.51: Прообраз области возможного движения, содержащей фокус, гомеоморфен двумерному тору

Оставшиеся 3-атомы из группы 4, соответствующие разрыву области возможного движения по отрезку оси Oy , перейдут при факторизации также в 3-атомы из группы 4. Причем результирующий 3-атом всегда имеет тип B . Это связано с тем, что он имеет лишь одну критическую

окружность, образ которой при проекции на бильярд лежит на оси Oy в верхней полуплоскости.

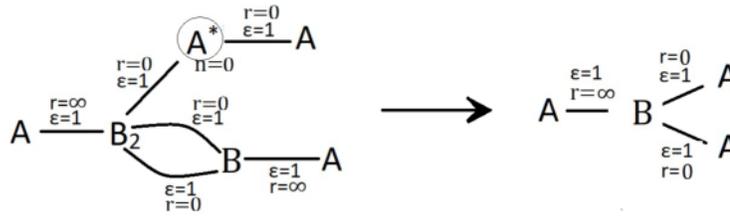


Рис. 2.52: Изменение молекулы при факторизации

Таким образом, был получен способ построения грубых молекул бильярдных A'_1 , A'_{1a} и A'_2 , описывающих слоения Лиувилля на неособых уровнях энергии, на основе грубых молекул бильярдных 11, 12 и 1, описывающих слоение Лиувилля на тех же уровнях энергии. Метки построенных молекул вычисляются согласно теореме 2.5. На рис. 2.53-2.54 изображены построенные таким образом инварианты Фоменко–Цишанга. Несложно заметить, что список молекул бильярда A'_1 совпадает со списком молекул бильярда 7, а список молекул бильярдных A'_{1a} и A'_2 – со списком молекул бильярда 5. Более того, существует взаимно однозначное соответствие уровней энергии приведенных бильярдных, непрерывное в обе стороны, которое сохраняет инварианты Фоменко–Цишанга. Следовательно, бильярд A'_1 лиувиллево эквивалентен бильярду 7, а бильярды A'_{1a} и A'_2 лиувиллево эквивалентны бильярду 5.

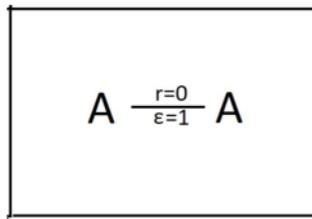


Рис. 2.53: Инвариант Фоменко–Цишанга бильярда A'_1

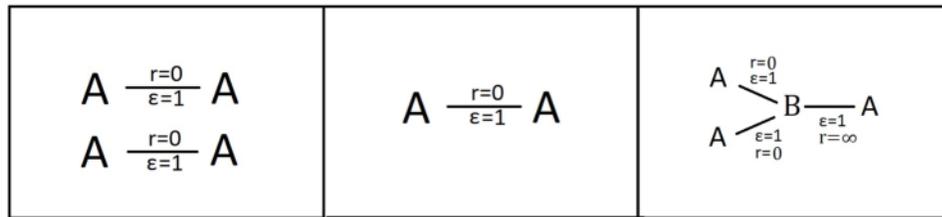


Рис. 2.54: Инварианты Фоменко–Цишанга бильярдных A'_{1a} и A'_2

Если же бильярдная область содержит несколько отрезков вырожденных квадрик в своей границе, сведем этот случай к предыдущим с помощью гомеоморфизма G .

Утверждение доказано. □

Глава 3

Интегрируемый эллиптический бильярд, снабженный полиномиальным потенциалом

3.1 Обобщение интегрируемого бильярда с потенциалом Гука

В предыдущей главе был разобран класс бильярдov, который сохраняет свойство интегрируемости при добавлении потенциала Гука. Возникают два естественных вопроса: будет ли сохраняться интегрируемость, если к таким бильярдам добавить произвольный потенциал, и если нет, то каким классом описываются “интегрируемые” бильярды. Ответ на первый вопрос был дан де Коста, Детманном и Леонелем в [21]. Как оказалось, бильярд с линейным потенциалом имеет фазовый портрет, не характерный для вполне интегрируемых систем. Следовательно, не любой потенциал сохраняет интегрируемость системы. Второй вопрос в общей своей формулировке все еще остается открытым. Тем не менее, был получен ряд результатов, опирающихся на некоторые естественные допущения. Например, при исследовании потенциала Гука в прошлой главе было показано, что дополнительный первый интеграл F отличается от первого интеграла $F_0 = H\Lambda$, соответствующего аналогичной системе без потенциала, на слагаемое \bar{F} , не зависящее от импульса. Иными словами, потенциал Гука влияет на поток дополнительного интеграла снова как потенциал. Таким образом, предложим следующее ограничение. Будем искать такие потенциалы $W(x, y)$, что эллиптический бильярд с ними имеет дополнительный первый интеграл вида $F = F_0 + f(x, y)$. Исходя из такого предположения, В.В.Козлов в [22] получил следующий результат.

Утверждение 3.1.1 (В.В.Козлов). *Бильярд в эллипсе с полуосями \sqrt{a} и \sqrt{b} , снабженный потенциалом $W \in C^\infty(\mathcal{B})$, допускает первый интеграл вида $F = \frac{1}{2}(bp_x^2 + ap_y^2 - (xp_y - yp_x)^2) +$*

$f(x, y)$, если и только если потенциал W удовлетворяет следующему уравнению:

$$(a - b)W_{xy} + 3(yW_x - xW_y) + W_{xy}(y^2 - x^2) + xy(W_{xx} - W_{yy}) = 0 \quad (3.1.1)$$

Примерами таких потенциалов являются квадратичный потенциал Гука $W = \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$ и потенциал четвертой степени вида $W = \beta x^2 + \alpha y^2 + \frac{2(\alpha - \beta)}{a - b}x^2y^2 + \frac{\alpha - \beta}{a - b}(x^4 + y^4)$. Топологический анализ билиардов с этими потенциалами был проведен И. Ф. Кобцевым в [25] и С. Е. Пустовойтовым в [42].

3.1.1 Полиномиальный потенциал в эллиптическом билиарде

Общее решение уравнения (3.1.1) в классе функций Аппеля было найдено В. И. Драговичем в работе [24]. Частный случай таких функций был рассмотрен в более ранней работе [23] того же автора. Здесь было предложено решение уравнения в форме многочлена Лорана. Тем не менее, полиномиальная часть этого решения была предложена в неявном рекуррентном виде, и поэтому была неудобна для анализа. Настоящая глава посвящена изучению эллиптического билиарда с произвольным интегрируемым полиномиальным потенциалом. Опишем сначала некоторые его важные свойства.

Лемма 3.1. *Общее решение уравнения (3.1.1) в виде полинома*

$$W = \sum_{i+j=n}^{i,j=0} a_{i,j}x^i y^j, \quad \text{при } n > 0 \quad (3.1.2)$$

удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) $a_{i,j} = 0$ при $2 \nmid i$ или $2 \nmid j$;
- 2) пространство решений вида (3.1.2) имеет размерность $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Доказательство. Подставим функцию вида (3.1.2) в уравнение (3.1.1). В полученном уравнении коэффициент при $x^{i-1}y^{j-1}$ имеет следующий вид:

$$(a - b)ija_{i,j} + i(i + j)a_{i,j-2} - j(i + j)a_{i-2,j} = 0, \quad (3.1.3)$$

где $i > 0$, $j > 0$, $i + j \leq n + 2$. При этом полагаем, что $a_{-1,i} = a_{i,-1} = a_{i,n+1-i} = a_{i,n+2-i} = 0$ для любого $i \in \overline{0..n+1}$.

Таким образом, дифференциальное уравнение (3.1.1) преобразовалось в систему линейных уравнений типа (3.1.3) относительно коэффициентов $a_{i,j}$. Заметим, что эта система состоит из четырех независимых подсистем от переменных вида $a_{2k+1,2l+1}$, $a_{2k,2l+1}$, $a_{2k+1,2l}$ и $a_{2k,2l}$ соответственно. Рассмотрим каждую из них по отдельности при условии, что число n четно (для нечетного n доказательство аналогичное).

Начнем с системы на $a_{2k+1,2l+1}$. Рассмотрим уравнение (3.1.3) для произвольного нечетного i и $j = n + 2 - i$. Из условий на систему следует, что $a_{i,j} = 0$. Следовательно, если коэффициент

$a_{i-2,j} = 0$, то и $a_{i,j-2} = 0$. Однако, при $i = 1$ и $j = n + 1$ коэффициент $a_{-1,n+1}$ равен нулю по условию на систему. Следовательно, коэффициент $a_{2k+1,2l+1} = 0$ при $2k + 2l + 2 = n$. Рассмотрим теперь уравнение (3.1.3) для произвольного нечетного i и $j = n - i$. Из доказанного выше $a_{i,j} = 0$. Проведя аналогичные рассуждения, получим, что $a_{2k+1,2l+1} = 0$ при $2k + 2l + 2 = n - 2$. Таким образом, уменьшая каждый раз значение суммы $i + j$ на два, получим, что $a_{2k+1,2l+1} = 0$ при любых возможных значениях k и l .

Рассмотрим теперь систему на $a_{2k,2l+1}$. Аналогично предыдущему случаю, рассмотрим уравнение (3.1.3) при произвольном четном i и $j = n + 1 - i$. Из условий на систему следует, что $a_{i,j} = 0$. Следовательно, если коэффициент $a_{i,j-2} = 0$, то и $a_{i-2,j} = 0$. Однако, коэффициент $a_{n,-1} = 0$ из условий на систему. Следовательно, $a_{2k,2l+1} = 0$ при $2k + 2l + 1 = n - 1$. Таким образом, проведя рассуждения, аналогичные предыдущему случаю, получим, что $a_{2k,2l+1} = 0$ при любых возможных значениях k и l .

Рассуждения для системы на $a_{2k+1,2l}$ повторяют рассуждения для предыдущего случая с точностью до замены индексов i на j . Следовательно, коэффициенты вида $a_{2k+1,2l}$ также равны нулю, что завершает доказательство первого пункта леммы.

Наконец, рассмотрим систему на $a_{2k,2l}$. При $i = 0$ и $j = n + 2$ уравнение (3.1.3) становится тождественным $0 = 0$. Обозначим коэффициент $a_{0,n}$ за α_1 . При $i + j = n + 2$ коэффициент $a_{i,j} = 0$. Следовательно, значение коэффициента $a_{i,j-2}$ линейно зависит от значения $a_{i-2,j}$, если $i \neq 0$. Таким образом, коэффициент вида $a_{2k,2l}$ является линейной функцией относительно параметра α_1 .

Аналогично, при $i = 0$ и $j = n$ уравнение (3.1.3) становится тождественным $0 = 0$. Обозначим коэффициент $a_{0,n-2}$ за α_2 . По доказанному ранее, при $i + j = n$ коэффициент $a_{i,j} = a_{i,j}(\alpha_1)$. Следовательно, значение коэффициента $a_{i,j-2}$ линейно зависит от значения $a_{i-2,j}$ и параметра α_1 , если $i \neq 0$. Таким образом, коэффициент вида $a_{2k,2l}$ является линейной функцией относительно параметров α_1 и α_2 .

Проведя аналогичные рассуждения, несложно доказать, что в общем случае коэффициент вида $a_{2k,2l}$ при $2k + 2l = n - 2(m - 1)$ является линейной функцией от параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, при этом $a_{0,n-2(m-1)} = \alpha_m$ для m от единицы до $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Заметим, что параметры α_m были выбраны независимо друг от друга и в исходной системе линейных уравнений каждое уравнение типа (3.1.3) было использовано для вычисления значения коэффициента $a_{i,j-2}$. Следовательно, параметры α_m являются координатами в пространстве решений уравнения (3.1.1), а размерность этого пространства равняется $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Лемма доказана. □

Замечание 3.2. *Используя идеи доказательства леммы 3.1, несложно восстановить алгоритм решения системы линейных уравнений (3.1.3) (был впервые проведен В. И. Драговичем в [23]). Известно, что при $2k + 2l = n$, решение имеет вид $a_{2k,2l} = \binom{k+l}{k} \alpha_1$. Однако, в произвольном случае зависимость коэффициента $a_{2k,2l}$ от параметров α_m имеет более сложный*

вид. Тем не менее, общий вид решения уравнения (3.1.1) в форме многочлена (3.1.2) будет приведен в эллиптических координатах.

Следующая теорема дает общий вид решения уравнения (3.1.1) в форме многочлена (3.1.2) в эллиптических координатах.

Теорема 3.3. Уравнение (3.1.1) в эллиптических координатах (2.2.2) имеет следующий вид:

$$x(\lambda_1, \lambda_2)y(\lambda_1, \lambda_2)\left(\frac{W_1 - W_2}{\lambda_1 - \lambda_2} - W_{12}\right) = 0, \quad (3.1.4)$$

где W_i — частная производная функции W по λ_i .

Общее решение уравнения (3.1.1) в форме многочлена (3.1.2) имеет следующий вид:

$$W = \frac{P(\lambda_1) - P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (3.1.5)$$

где P — произвольный многочлен степени $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Доказательство. Докажем, что уравнение (3.1.4) равносильно уравнению (3.1.1). Обратные формулы перехода от эллиптических координат к декартовым имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a - b - R(x, y)), \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a - b + R(x, y)), \end{cases} \quad (3.1.6)$$

где $R(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - a + b)^2 + 4(a - b)y^2}$. Из этой системы получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} \lambda'_{1x} &= \frac{2x(\lambda_1 + b)}{\lambda_1 - \lambda_2}; & \lambda'_{1y} &= \frac{2y(\lambda_1 + a)}{\lambda_1 - \lambda_2}; \\ \lambda'_{2x} &= -\frac{2x(\lambda_2 + b)}{\lambda_1 - \lambda_2}; & \lambda'_{2y} &= -\frac{2y(\lambda_2 + a)}{\lambda_1 - \lambda_2}; \\ \lambda''_{1xx} &= \frac{2(\lambda_1 + b)}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{8x^2(\lambda_1 + b)(\lambda_2 + b)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^3}; & \lambda''_{1yy} &= \frac{2(\lambda_1 + a)}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{8y^2(\lambda_1 + a)(\lambda_2 + a)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^3}; \\ \lambda''_{2xx} &= -\frac{2(\lambda_2 + b)}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{8x^2(\lambda_1 + b)(\lambda_2 + b)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^3}; & \lambda''_{2yy} &= -\frac{2(\lambda_2 + a)}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{8y^2(\lambda_1 + a)(\lambda_2 + a)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^3}; \\ \lambda''_{1xy} &= \lambda''_{2xy} = -\frac{4xy((\lambda_1 + a)(\lambda_2 + b) + (\lambda_1 + b)(\lambda_2 + a))}{(\lambda_1 - \lambda_2)^3}. \end{aligned}$$

Перепишем уравнение (3.1.1) в эллиптических координатах. Получим

$$A_1W_1 + A_2W_2 + A_{11}W_{11} + A_{22}W_{22} + A_{12}W_{12} = 0,$$

где коэффициенты A_{ij} имеют следующий вид:

$$A_1 = (y^2 - x^2 + a - b)\lambda''_{1xy} + xy(\lambda''_{1xx} - \lambda''_{1yy}) + 3(y\lambda'_{1x} - x\lambda''_{1y});$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= (y^2 - x^2 + a - b)\lambda''_{2_{xy}} + xy(\lambda''_{2_{xx}} - \lambda''_{2_{yy}}) + 3(y\lambda'_{2_x} - x\lambda''_{2_y}); \\
A_{11} &= (y^2 - x^2 + a - b)\lambda'_{1_x}\lambda'_{1_y} + xy((\lambda'_{1_x})^2 - (\lambda'_{1_y})^2); \\
A_{22} &= (y^2 - x^2 + a - b)\lambda'_{2_x}\lambda'_{2_y} + xy((\lambda'_{2_x})^2 - (\lambda'_{2_y})^2); \\
A_{12} &= (y^2 - x^2 + a - b)(\lambda'_{1_x}\lambda'_{2_y} + \lambda'_{2_x}\lambda'_{1_y}) + 2xy(\lambda'_{1_x}\lambda'_{2_x} - \lambda'_{1_y}\lambda'_{2_y}).
\end{aligned}$$

Подставим полученные ранее выражения для частных производных эллиптических координат по декартовым в формулы коэффициентов A_{ij} и получим $A_{11} = A_{22} = 0$, $A_{12} = 4xy(a - b)$, $A_2 = -A_1 = \frac{4xy(a-b)}{\lambda_1 - \lambda_2}$. Таким образом, была доказана равносильность уравнений (3.1.4) и (3.1.1).

Доказательство того, что функция (3.1.5) является решением уравнения (3.1.4), состоит в непосредственной подстановки одной формулы в другую. Заметим, что пространство решений вида (3.1.5) имеет размерность $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Действительно, свободный коэффициент c_0 многочлена $P(z)$ сокращается сам с собой в формуле (3.1.5). Слагаемое $c_1 z$ многочлена $P(z)$ изменяет потенциал W на константу. Следовательно, многочлен P определен с точностью до своей линейной части $c_1 z + c_0$, а оставшиеся его $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ коэффициентов $c_2, \dots, c_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$ являются координатами в пространстве решений.

Докажем, что функция $\frac{\lambda_1^{(m+1)} - \lambda_2^{(m+1)}}{\lambda_1 - \lambda_2}$ является многочленом степени $2m$ в декартовых координатах. Действительно,

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_1^{(m+1)} - \lambda_2^{(m+1)}}{\lambda_1 - \lambda_2} &= \sum_{i=0}^m \lambda_1^i \lambda_2^{m-i} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^m \lambda_1^i \lambda_2^{m-i} + \lambda_1^{m-i} \lambda_2^i, \\
\lambda_1^k \lambda_2^{k+l} + \lambda_1^{k+l} \lambda_2^k &= (\lambda_1 \lambda_2)^k (\lambda_1^l + \lambda_2^l).
\end{aligned}$$

Из формул (3.1.6) несложно заметить, что функция $\lambda_1 \lambda_2$ является многочленом второй степени, а функция $\lambda_1^l + \lambda_2^l$ является многочленом степени $2l$ для любого l . Следовательно, функция вида (3.1.5) является многочленом степени n в декартовых координатах. Таким образом, пространство решений вида (3.1.5) является подпространством пространства решений вида (3.1.2). Согласно лемме 3.1 эти два подпространства совпадают в силу размерности.

Теорема доказана. \square

3.1.2 Первые интегралы эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом

В дальнейшем для определенности положим $c_0 = c_1 = 0$. Гамильтониан в эллиптических координатах имеет следующий вид:

$$H = \frac{2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_1^2 + \frac{2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \mu_2^2 + \frac{P(\lambda_1) - P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (3.1.7)$$

Теорема 3.4. Следующая функция является первым интегралом эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом:

$$F = -H\lambda_1 + 2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)\mu_1^2 + P(\lambda_1) \quad (3.1.8)$$

Интегралы H и F находятся в инволюции и функционально независимы почти всюду. Причем функция F имеет вид $F = F_0 + f(x, y)$, где F_0 есть первый интеграл классического эллиптического бильярда.

Доказательство. Сначала докажем, что функция F сохраняется вдоль траекторий между ударами о границу бильярда. Вычислим значение \dot{F}

$$\dot{F} = -H\dot{\lambda}_1 + 2\dot{\lambda}_1(b + \lambda_1)\mu_1^2 + 2\dot{\lambda}_1(a + \lambda_1)\mu_1^2 + 4(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)\mu_1\dot{\mu}_1 + P'(\lambda_1)\dot{\lambda}_1$$

Подставим значения $\dot{\lambda}_1$ и $\dot{\mu}_1$ из уравнений Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_i = \frac{\partial H}{\partial \mu_i}, \\ \dot{\mu}_i = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} \end{cases} \quad (3.1.9)$$

Можно убедиться, что после подстановки получим тождественный ноль. А значит, $F = const$ вдоль траекторий между отражениями.

Теперь докажем, что функция F сохраняется при отражении от стенки бильярда. Заметим, что при отражении значение интеграла H и координаты λ_1 не меняются. Следовательно, достаточно проверить лишь неизменность величины μ_1^2 . Отметим, что закон абсолютно упругого отражения от софокусной квадратики в эллиптических координатах можно записать следующим образом: если точка отражается от гиперболы, то вектор скорости изменится по правилу $(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2) \rightarrow (-\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2)$, а если точка отражается от эллипса, то вектор скорости изменится по правилу $(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2) \rightarrow (\dot{\lambda}_1, -\dot{\lambda}_2)$. Из уравнений Гамильтона (3.1.9) вытекает следующая формула:

$$\dot{\lambda}_1 = \frac{4(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_1. \quad (3.1.10)$$

Следовательно, вектор импульса (μ_1, μ_2) меняется при отражении аналогично вектору скорости, и значение μ_1^2 остается неизменным.

То, что первые интегралы H и F находятся в инволюции и функционально независимы почти всюду и то, что интеграл F имеет вид $F_0 + f(x, y)$, проверяются непосредственно. Опустим соответствующие выкладки.

Теорема доказана. □

Замечание 3.5. Заметим, что проведенные рассуждения верны и в случае произвольного элементарного эллипτικο-гиперболического бильярда. Следовательно, интегрируемость бильярда в эллипсе автоматически влечет интегрируемость любого эллипτικο-гиперболического бильярда.

Замечание 3.6. Определим две следующие функции:

$$H_1 = \frac{2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)\mu_1^2 + P(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (3.1.11)$$

$$H_2 = \frac{2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)\mu_2^2 + P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (3.1.12)$$

Тогда первые интегралы запишутся в виде $H = H_1 - H_2$, $F = \lambda_1 H_2 - \lambda_2 H_1$. При этом вклад потенциала в интеграл F равен $f = \frac{\lambda_1 P(\lambda_2) - \lambda_2 P(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}$ и также является многочленом от декартовых переменных x и y , причем каждый его моном имеет также четную степень по обоим переменным.

3.1.3 Разделение переменных биллиарда с полиномиальным потенциалом. Области возможного движения

В силу рассуждений, аналогичных рассуждениям для потенциала Гука, было показано, что для произвольного интегрируемого потенциала верна аналогичная формула разделения переменных

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \pm \frac{\sqrt{8}}{\lambda_2 - \lambda_1} \sqrt{V(\lambda_i)(a + \lambda_i)(b + \lambda_i)}. \quad (3.1.13)$$

Здесь $V(z) = f + hz - P(z)$ -многочлен степени $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. В декартовых координатах получим аналогичную систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{d}{\lambda_2 - \lambda_1} \left((-1)^I \operatorname{sgn}(x) \sqrt{V(\lambda_1)(a + \lambda_2)(b + \lambda_1)} + (-1)^J \operatorname{sgn}(x) \sqrt{V(\lambda_2)(a + \lambda_1)(b + \lambda_2)} \right) \\ \dot{y} = \frac{d}{\lambda_2 - \lambda_1} \left((-1)^I \operatorname{sgn}(y) \sqrt{-V(\lambda_1)(a + \lambda_1)(b + \lambda_2)} + (-1)^J \operatorname{sgn}(y) \sqrt{-V(\lambda_2)(a + \lambda_2)(b + \lambda_1)} \right) \end{cases} \quad (3.1.14)$$

где $I, J \in \{0, 1\}$, $d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a-b}}$.

Таким образом, здесь также применим метод областей возможного движения М. П. Харламова, описанный в пункте 2.2.1. Причем область возможного движения, как и в случае потенциала Гука, определяется системой неравенств

$$\begin{cases} V(\lambda_1) \leq 0 \\ V(\lambda_2) \geq 0, \end{cases} \quad (3.1.15)$$

и представляет собой объединение нескольких прямоугольников в эллиптических координатах. Однако теперь сняты ограничения, исходящие из вида многочлена V . Например, изменяя его степень, можно добиться того, что область возможного движения содержит сколь угодно много компонент связности. Для потенциала Гука количество компонент в области не могло превышать четырех.

Замечание 3.7. Заметим, что, аналогично частному случаю потенциала Гука, в общем случае полиномиального потенциала также выполняется условие на количество векторов скорости, соответствующих точке бильярда. А именно, если точка с координатами (λ_1, λ_2) лежит в области возможного движения и не является фокальной, то из системы (3.1.14) вытекает три возможности:

- 1) точке (λ_1, λ_2) соответствуют две пары взаимно обратных векторов скорости, если ни λ_1 , ни λ_2 не являются корнями многочлена V ;
- 2) этой точке соответствует одна пара взаимно обратных векторов скорости, если только одно из значений λ_1 или λ_2 является корнем многочлена V (эти вектора являются касательными к квадрике с параметром, равным той координате λ_i , которая является корнем);
- 3) точке соответствует единственный нулевой вектор скорости, если оба значения λ_1 и λ_2 являются корнями многочлена V .

Если же фокус принадлежит области возможного движения (без ограничения общности рассмотрим правый фокус), подставим точку $x = \sqrt{a-b}$, $y = 0$ в формулы первых интегралов. Напомним, что в декартовых координатах они имеют вид

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \frac{P(\lambda_1) - P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad F = \frac{1}{2}(bp_x^2 + ap_y^2 - (xp_y - yp_x)^2) + \frac{\lambda_1 P(\lambda_2) - \lambda_2 P(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

где λ_1 и λ_2 рассматриваются как функции координат (x, y) (формулы 3.1.6). Распишем

$$\frac{P(\lambda_1) - P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} = \sum_{i=2}^{n/2} c_i \frac{\lambda_1^i - \lambda_2^i}{\lambda_1 - \lambda_2} = \sum_{i=2}^{n/2} c_i \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_1^j \lambda_2^{i-1-j}.$$

Заметим, что $\lambda_1(\sqrt{a-b}, 0) = \lambda_2(\sqrt{a-b}, 0) = -b$. Следовательно, в фокусе имеем

$$\frac{P(\lambda_1) - P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} = \sum_{i=2}^{n/2} c_i \sum_{j=0}^{i-1} (-b)^{i-1} = \sum_{i=2}^{n/2} c_i i (-b)^{i-1} = P'(-b).$$

Таким образом, значение гамильтониана примет вид $H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + P'(-b)$. Аналогично, распишем дополнительный первый интеграл.

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1 P(\lambda_2) - \lambda_2 P(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} &= \sum_{i=2}^{n/2} c_i \frac{\lambda_1 \lambda_2^i - \lambda_2 \lambda_1^i}{\lambda_1 - \lambda_2} = - \sum_{i=2}^{n/2} c_i \lambda_1 \lambda_2 \sum_{j=0}^{i-2} \lambda_1^j \lambda_2^{i-2-j} = - \sum_{i=2}^{n/2} c_i (i-1) (-b)^i = \\ &= bP'(-b) + P(-b) \end{aligned}$$

Таким образом, в точке фокуса первые интегралы как функции от (p_x, p_y) являются зависимыми, причем $F = bH + P(-b)$. Следовательно, ограничение на значения компонент импульса выходит только из закона сохранения энергии. При $H > P(-b)$ фокусу соответствует окружность ковекторов импульса, а при $H = P(-b)$ ему соответствует нулевой ковектор.

3.2 Критические значения первых интегралов. Бифуркационные диаграммы

Как было показано выше, для произвольного интегрируемого потенциала справедливо замечание 3.7 о количестве векторов скорости, аналогичное замечанию 3.7 для потенциала Гука. Следовательно, верна и лемма 2.2 о регулярных областях возможного движения. Найдем теперь критические значения первых интегралов. Для этого введем следующие условия на многочлен V :

- $C1$) существует точка $z = e \in (-a, -b)$, которая является точкой экстремума многочлена V , и $V(e) = 0$;
- $C2$) существует точка $z = e \in (-b, 0)$, которая является точкой экстремума многочлена V , и $V(e) = 0$;
- $C3$) $V(0) = 0$, и V возрастает в окрестности нуля;
- $C4$) $V(-a) = 0$;
- $C5$) $V(-b) = 0$.

Лемма 3.8. *Зафиксируем значение f . Соответствующий слой слоения Ливилля регулярен тогда и только тогда, когда не выполнено ни одно из условий $C1 - C5$.*

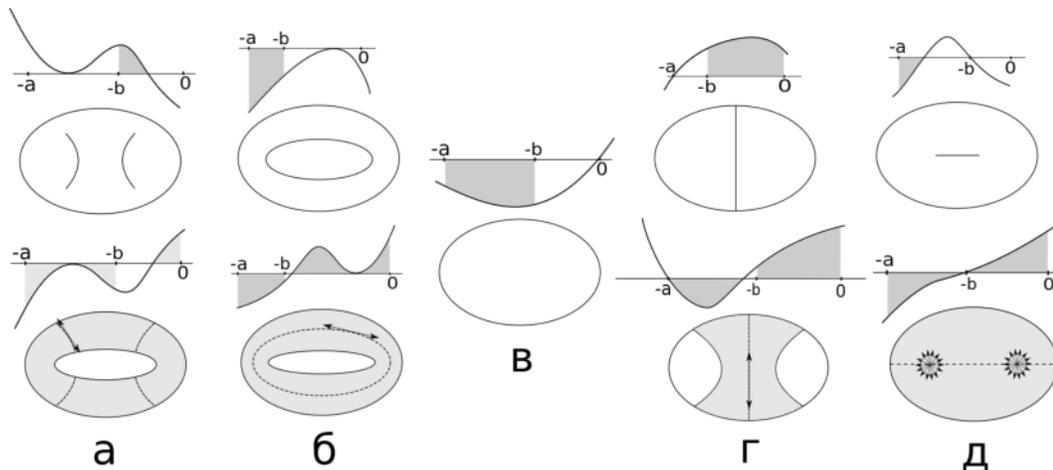


Рис. 3.1: Примеры критических областей возможного движения. Изображен график многочлена V в координатах $0zV$ и соответствующая область возможного движения. Рис. а соответствует условию $C1$, рис. б – условию $C2$, рис. в – условию $C3$, рис. г – условию $C4$, рис. д – условию $C5$

Доказательство. Необходимость. От противного. Пусть выполнено условие $C1$, при этом точка $z = e$ является точкой минимума многочлена V . Тогда, в силу неравенств 3.1.15, существует одномерная компонента связности области возможного движения – дуга гиперболы $\lambda_1 = e$. Если же точка $z = e$ является точкой максимума многочлена V , то по замечанию 3.7 во внутренности области возможного движения существует точка с координатами (e, λ_2) , которой соответствуют лишь два вектора скорости. Получили противоречие (рис. 3.1, а). Доказательства того, что условия $C2 - C4$ не выполняются, аналогичны (рис. 3.1, б, в и г соответственно).

Пусть выполнено условие $C5$. Если при этом $V'(-b) > 0$, то фокусы принадлежат области возможного движения, при этом им соответствует целая окружность векторов (см. замечание 3.7). Если $V'(-b) = 0$, то фокусам соответствует один нулевой вектор. Если $V'(-b) < 0$, то в силу системы 3.1.15 существует одномерная компонента связности области возможного движения – отрезок фокальной прямой (рис. 3.1, д).

Достаточность. Доказательство достаточности повторяет доказательство необходимости, обращенное в противоположную сторону.

Лемма доказана. □

Отметим, что корни многочлена V'' не зависят от значений h и f , а точки экстремумов многочлена V не зависят от значений f . Пусть для некоторого значения $H = h_0$ точка $z = e \in (-a, 0)$ является точкой экстремума многочлена V (то есть $V'(e) = 0$ и $V''(e) \neq 0$). Тогда по теореме о неявной функции существует функция $e(h)$ в окрестности точки h_0 , т.ч. $e(h_0) = e$, $V'(e(h)) = 0$ и $V''(e(h)) \neq 0$ (то есть $e(h)$ также является точкой экстремума многочлена V , но уже для значения $H = h$). Функцию $e(h)$ можно продолжить на отрезок $[h_1, h_2]$, где $V''(e(h_1)) = V''(e(h_2)) = 0$ и для любого $h \in (h_1, h_2)$ выполнено $V''(e(h)) \neq 0$. Таким образом, справедлива следующая теорема об устройстве произвольной бифуркационной диаграммы.

Теорема 3.9. Пусть $e_i(h)$ – построенные выше функции на своих областях определения (экстремумы многочлена $V(z)$ при фиксированном значении h). Тогда бифуркационная диаграмма эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом состоит из дуг следующих кривых (возможно, не всех):

- $d1_i) V(e_i(h)) = 0$ при $e_i(h) \in [-a, -b]$
- $d2_i) V(e_i(h)) = 0$ при $e_i(h) \in [-b, 0]$;
- $d3) f = 0$ при $h \geq 0$;
- $d4) V(-a) = 0$;
- $d5) V(-b) = 0$.

Доказательство. Зафиксируем значение h и f . Заметим, что принадлежность точки (h, f) дуге $d1_i$ эквивалентно выполнению условия $C1$, принадлежность дуге $d2_i$ эквивалентно условию $C2$, дуге $d3$ – условию $C3$, дуге $d4$ – условию $C4$, и дуге $d5$ – условию $C5$. Из леммы 3.8 и теоремы 2.2 следует, что точки образа отображения момента, не лежащие на перечисленных дугах, являются регулярными (им соответствует объединение торов в изоэнергетическом многообразии Q_h^3 , причем слоение Лиувилля в окрестности этих торов устроено тривиально).

Пусть точка (h, f) принадлежит одной из дуг $d1_i$. Следовательно, существует точка на билиарде с координатами $\lambda_1 = e_i$ и $\lambda_2 \neq -b$, для которой $P(\lambda_1) = f + h\lambda_1$, $P'(\lambda_1) = h$. Кроме того, согласно формулам (3.1.14) и (3.1.10) получим $\mu_1 = 0$. С учетом этого, вычислим полные дифференциалы первых интегралов H и F в точке (λ_1, λ_2) :

$$dH = -\frac{4(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_2 d\mu_2 + \frac{h}{\lambda_1 - \lambda_2} d\lambda_2$$

$$dF = -\lambda_1 dH.$$

Следовательно, в точке (λ_1, λ_2) ранг матрицы Якоби отображения момента падает, т.е. точка (h, f) является особой, а дуга $d1_i$ принадлежит бифуркационной диаграмме. Аналогично можно показать, что дуга $d2_i$ также принадлежит бифуркационной диаграмме.

Рассмотрим теперь точку (h, f) на дуге $d4$. Согласно замечанию 3.7 на оси $0y$ найдется точка с координатами $\lambda_1 = -a$ и $\lambda_2 \neq -b$, в которой $p_x = 0$. Вычислим полные дифференциалы первых интегралов H и F :

$$dH = p_y dp_y + W'_y dy$$

$$dF = ap_y dp_y + f'_y dy.$$

Напомним, что функции W и f являются многочленами от декартовых координат, при этом их мономы имеют четную степень по обоим переменным. Следовательно $W'_y(0, y) = (W(0, y))'_y$ и $f'_y(0, y) = (f(0, y))'_y$. Из формул на функции W и f , приведенных в теореме 3.3 и замечании к теореме 3.4, получим следующее:

$$W(0, y) = \sum_{i=2}^{n/2} c_i \sum_{k=0}^i (-a)^{i-k} (y^2 - b)^k$$

$$f(0, y) = a \sum_{i=2}^{n/2} c_i \sum_{k=0}^i (-a)^{i-k} (y^2 - b)^k,$$

где c_i – коэффициенты многочлена P . Таким образом, несложно заметить, что $f'_y = aW'_y$. Следовательно, в точке (λ_1, λ_2) ранг матрицы Якоби отображения момента падает, т.е. точка (h, f) является особой, а дуга $d4$ принадлежит бифуркационной диаграмме. Аналогично можно показать, что дуга $d5$ также принадлежит бифуркационной диаграмме (в действительности, это показано в замечании 3.7).

Наконец, рассмотрим дугу $d3$. В отличие от предыдущих случаев, на бильярде нет точек падения ранга матрицы Якоби отображения момента. Перестройка торов Лиувилля, соответствующая точке (h, f) этой дуги, происходит в силу негладкой природы бильярда на его границе. Такую перестройку уже появлялась в случае потенциала Гука (см. теорему 2.3). Она соответствует нескольким минимальным 3-атомам A , образы критических окружностей которых при проекции на бильярд являются дугами граничного эллипса (рис. 3.1, в).

Теорема доказана. □

Замечание 3.10. *Отметим, что, согласно системе 3.1.15, образ отображения момента ограничен двумя типами бифуркационных дуг:*

1. самой верхней дугой среди дуг $d1_i$ и $d4$ относительно координаты f ,
2. самой нижней дугой среди дуг $d2_i$, $d3$ и $d5$.

Действительно, значения первых интегралов H, F принадлежит образу, если соответствующий им многочлен $V(t)$ пересекает оба отрезка $[-a, -b]$ и $[-b, 0]$ хотя бы в одной точке. Описанные кривые соответствуют предельным случаям этого условия.

3.2.1 Бифуркационные диаграммы бильярда с потенциалом четвертой степени

Отметим, что если в предыдущей главе, посвященной потенциалу Гука, разнообразие бифуркационных диаграмм достигалось за счет усложнения бильярдного стола, то теперь оно достигается за счет увеличения степени потенциала. Пусть его степень равна $2n$. Тогда система полностью задается полиномом $P(t) = c_n t^n + \dots + c_2 t^2$, т.е. значениями его $n - 1$ коэффициента c_2, \dots, c_n . С формальной точки зрения, каждый набор значений определяет свою систему, и их общее количество равномощно континууму. Однако с точки зрения лиувиллевой эквивалентности, множество различных систем всегда конечно для любого n . Причем множество значений коэффициентов, соответствующих лиувиллево эквивалентным системам, можно определить с помощью качественного различия бифуркационных диаграмм. А именно, для эквивалентных систем их бифуркационные дуги $d1-d5$ имеют одинаковое относительное расположение, т.е. точки пересечения и касания этих дуг расположены в соответствующих частях плоскости, на которые ее делят другие дуги. Например, при $n = 2$ система определяется лишь значением коэффициента $c_2 = \frac{k}{2}$. Как было показано в главе 2, существуют лишь две возможности: при $k > 0$ точка пересечения дуг $d4$ и $d5$ лежит ниже прямой $f = 0$, а при $k < 0$ она лежит выше. Структура бифуркационной диаграммы полностью определяется лишь этим расположением дуг, а система с точностью до лиувиллевой эквивалентности определяется знаком коэффициента k : притягивающим и отталкивающим потенциалом Гука.

Из теоремы 3.9 нетрудно заметить, что с ростом значения степени потенциала также растет количество бифуркационных дуг, причем линейно. Следовательно, количество их точек

пересечения и касания растет квадратично, а общее количество различных бифуркационных диаграмм – порядка $O(2^{n^2})$. В связи с этим достаточно сложно в явном виде описать бифуркационные диаграммы для относительно больших степеней потенциала. Тем не менее, разберем случай четвертой степени, который следует непосредственно после потенциала Гука. В декартовых координатах он имеет вид

$$W_4(x, y) = c_2(x^2 + y^2) + c_3((x^2 + y^2)^2 - (2a + b)x^2 - (2b + a)y^2) \quad (3.2.1)$$

где c_2 и c_3 – коэффициенты многочлена P , причем $c_3 \neq 0$. Тогда бифуркационные кривые, фигурирующие в теореме 3.9, примут вид

- $d1) f = d_-(h) := \frac{2c_2^3 + 9c_2c_3h + 2(c_2^2 + 3c_3h)^{\frac{3}{2}}}{27c_3^2}$;
- $d2) f = d_+(h) := \frac{2c_2^3 + 9c_2c_3h - 2(c_2^2 + 3c_3h)^{\frac{3}{2}}}{27c_3^2}$;
- $d3) f = 0$ при $h \geq 0$;
- $d4) f = l_{-a}(h) := ah + c_2a^2 - c_3a^3$;
- $d5) f = l_{-b}(h) := bh + c_2b^2 - c_3b^3$.

Отметим несколько свойств этих кривых.

1. Кривые $d1$ и $d2$ выпуклые. Они касаются в точке $h = -\frac{c_2^2}{3c_3}$, $f = -\frac{c_2^3}{27c_3^2}$, образуя точку возврата;
 2. При произвольном значении x прямая $f = xh + c_2x^2 - c_3x^3$ касается кривой $d1$, если $\frac{c_2}{c_3} \leq 3x$, и кривой $d2$, если $\frac{c_2}{c_3} \geq 3x$. В случае равенства прямая касается обеих кривых в точке возврата. Таким образом, взаимное расположение бифуркационных кривых зависит от положения точки пересечения прямых $d4, d5$ относительно луча $d3$ (это задает расположение трех прямых) и трех точек касания прямых $d3, d4, d5$ с кривыми $d1$ и $d2$. Их координаты имеют следующие значения:

- Точка AB пересечения прямых $d4$ и $d5$: $h = -c_2(a + b) + c_3(a^2 + ab + b^2)$, $f = -c_2ab + c_3(a^2b + ab^2)$;
- Точка $E0$ касания луча $d3$ с объединением кривых $d1$ и $d2$: $h = 0$, $f = 0$;
- Точка EA касания прямой $d4$ с кривыми $d1$ и $d2$: $h = -2c_2a + 3c_3a^2$, $f = -c_2a^2 + 2c_3a^3$;
- Точка EB касания прямой $d5$ с кривыми $d1$ и $d2$: $h = -2c_2b + 3c_3b^2$, $f = -c_2b^2 + 2c_3b^3$;

Найдем условия, при которых полученные точки лежат на бифуркационных кривых. Иными словами, получим критические расположения бифуркационных кривых. Как оказалось, они зависят лишь от значения отношения $c_2 : c_3$. А именно, имеем следующее:

1. $\frac{c_2}{c_3} = 0$: точка $E0$ попадает в точку возврата кривых $d1$ и $d2$;

2. $\frac{c_2}{c_3} = b$: точка $E0$ попадает на прямую $d4$;
3. $\frac{c_2}{c_3} = a$: точка $E0$ попадает на прямую $d5$;
4. $\frac{c_2}{c_3} = 2b$: точка EB попадает на луч $d3$;
5. $\frac{c_2}{c_3} = 2a$: точка EA попадает на луч $d3$;
6. $\frac{c_2}{c_3} = 3b$: точка EB попадает в точку возврата кривых $d1$ и $d2$;
7. $\frac{c_2}{c_3} = 3a$: точка EA попадает в точку возврата кривых $d1$ и $d2$;
8. $\frac{c_2}{c_3} = 2b + a$: точка EB попадает на прямую $d4$;
9. $\frac{c_2}{c_3} = 2a + b$: точка EA попадает на прямую $d5$;
10. $\frac{c_2}{c_3} = a + b$: точка AB попадает на луч $d3$.

Переход через критическое значение отношения $c_2 : c_3$ изменяет структуру бифуркационной диаграммы в окрестности соответствующей точки. При росте значения $\frac{c_2}{c_3}$ эволюция бифуркационной диаграммы определяется последовательностью таких локальных перестроек. Следовательно, для того, чтобы построить бифуркационную диаграмму для каждого значения $\frac{c_2}{c_3}$ и описать ее эволюцию, необходимо знать расположение десяти полученных критических величин на числовой прямой. Существуют четыре возможности:

- $0 < b < a < 2b < a + b < 2a < 3b < a + 2b < 2a + b < 3a$ при $a < 1, 5b$;
- $0 < b < a < 2b < a + b < 3b < 2a < a + 2b < 2a + b < 3a$ при $1, 5b < a < 2b$;
- $0 < b < 2b < a < 3b < a + b < a + 2b < 2a < 2a + b < 3a$ при $2b < a < 3b$;
- $0 < b < 2b < 3b < a < a + b < a + 2b < 2a < 2a + b < 3a$ при $a > 3b$.

Каждая из четырех возможностей задает эволюцию бифуркационной диаграммы при изменении значения $\frac{c_2}{c_3}$ от $-\infty$ до $+\infty$, и каждому интервалу, ограниченному соседними величинами, соответствует бифуркационная диаграмма. Заметим, что интервалам для разных случаев может соответствовать одна и та же диаграмма, т.к. были произведены одни и те же локальные перестройки. Согласно сказанному выше, объединим четыре последовательности в один т.н. *эволюционный граф*, приведенный на рис. 3.2.

Осталось лишь построить образы отображения момента и их бифуркационные диаграммы. Напомним, что образ ограничен бифуркационными дугами в соответствии с замечанием 3.10. На рис. 3.4 – 3.9 приведены образы отображения момента при $c_3 < 0$. Кроме того, бифуркационным дугам сопоставлены их 3-атомы, вычислением которых мы займемся в следующем разделе. Отметим, что диаграммы 5 и 12, а также 9 и 15 совпадают друг с другом. Тем не менее, они

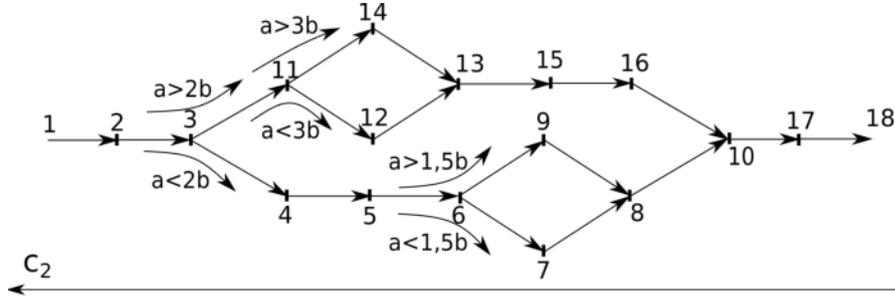


Рис. 3.2: Эволюционный граф бифуркационных диаграмм при $c_3 < 0$

выделены в отдельные вершины на эволюционном графе в связи с тем, что принимают участие в различных ветвях эволюции. Таким образом, была доказана следующая теорема.

Теорема 3.11. *Для эллиптического бильярда, снабженного потенциалом четвертой степени с параметром $c_3 < 0$, существуют 16 неэквивалентных классов бифуркационных диаграмм, изображенных на рис. 3.4 – 3.9. Эволюция бифуркационных диаграмм при росте значения $\frac{c_2}{c_3}$ зависит от соотношений на параметры a и b граничного эллипса и описывается эволюционным графом 3.2.*

Рассмотрим теперь случай $c_3 > 0$. Оказывается, эволюционный граф, изображенный на рис. 3.2, перестает быть полным. Иными словами, в нем можно выделить вершины, отвечающие эквивалентным диаграммам (т.е. диаграммам двух лиувиллево эквивалентных систем). Это связано с тем, что теперь точки EA, EB, AB лежат в полуплоскости $h < 0$. Следовательно, они не попадут на луч $d3$ ни при каком значении $\frac{c_2}{c_3}$. Кроме того, во многих случаях точка возврата кривых $d1$ и $d2$ не лежит в образе отображения момента. Из десяти критических значений отношения $c_2 : c_3$, приведенных выше, имеют место лишь четыре: $b, 3b, 2b + a, 2a + b$. Эволюционный граф примет вид, изображенный на рис. 3.3.



Рис. 3.3: Эволюционный граф бифуркационных диаграмм при $c_3 > 0$

На рис. 3.10 и 3.4 изображены бифуркационные диаграммы при $c_3 > 0$. Заметим, что в обоих случаях бифуркационная диаграмма, соответствующая $\frac{c_2}{c_3} \rightarrow -\infty$ в точности совпадает с диаграммой эллиптического бильярда с притягивающим потенциалом Гука, а при $\frac{c_2}{c_3} \rightarrow +\infty$ диаграмма соответствует отталкивающему потенциалу Гука. Это следует непосредственно из вида потенциала W_4 . Таким образом, была доказана теорема.

Теорема 3.12. *Для эллиптического бильярда, снабженного потенциалом четвертой степени с параметром $c_3 > 0$, существуют 4 неэквивалентных класса бифуркационных диаграмм,*

изображенных на рис. 3.4 и 3.10. Эволюция бифуркационных диаграмм при росте значения $\frac{c_2}{c_3}$ описывается эволюционным графом 3.3.

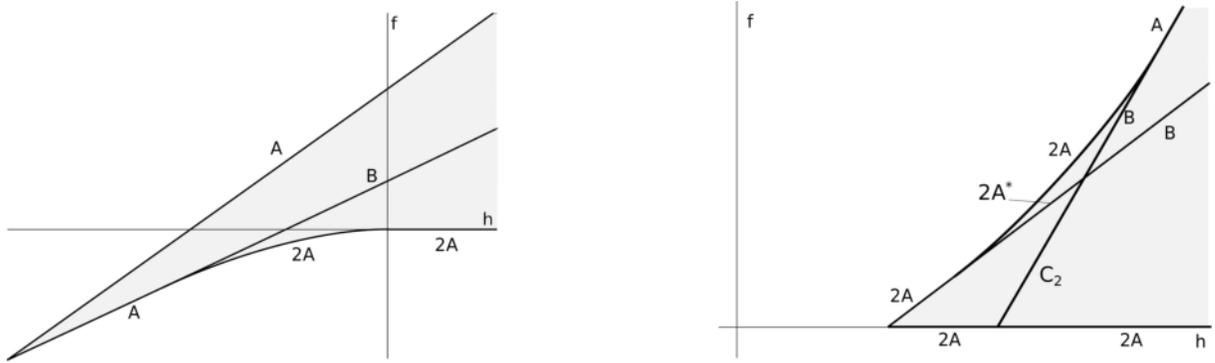


Рис. 3.4: Бифуркационные диаграммы, соответствующие билиарду с притягивающим и отталкивающим потенциалом Гука. Диаграммы соответствуют вершинам 1 и 18 эволюционного графа для $c_3 < 0$ и вершинам 4 и 1 для $c_3 > 0$

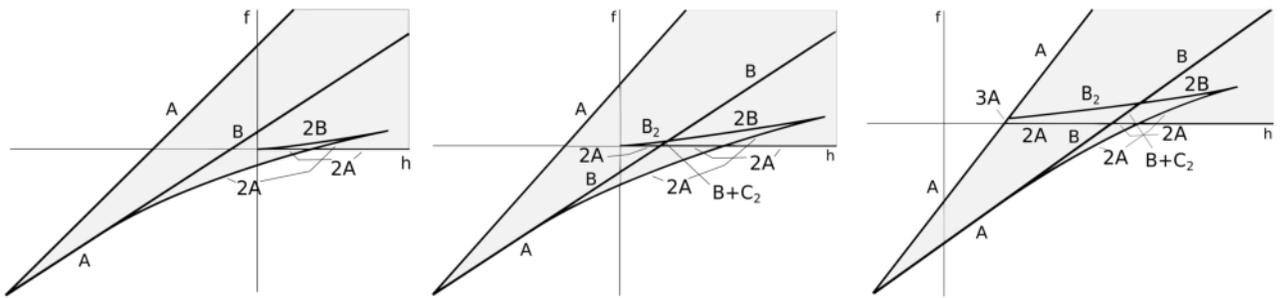


Рис. 3.5: Бифуркационные диаграммы 2, 3 и 4 случая $c_3 < 0$

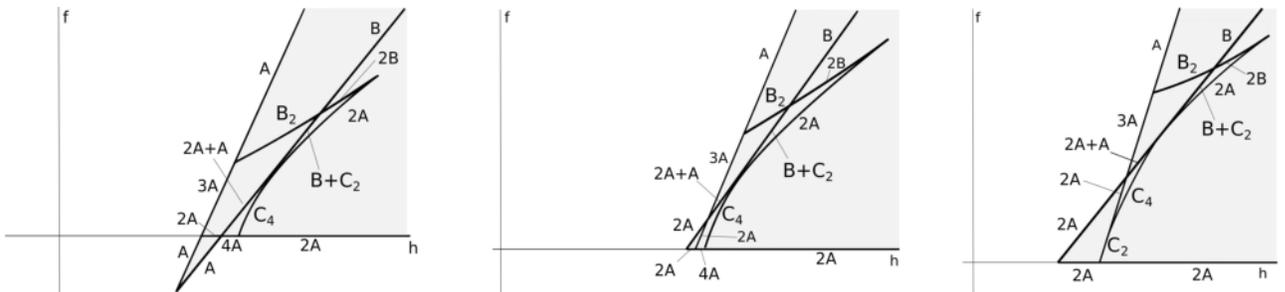


Рис. 3.6: Бифуркационные диаграммы 5 (12), 6 и 7 случая $c_3 < 0$

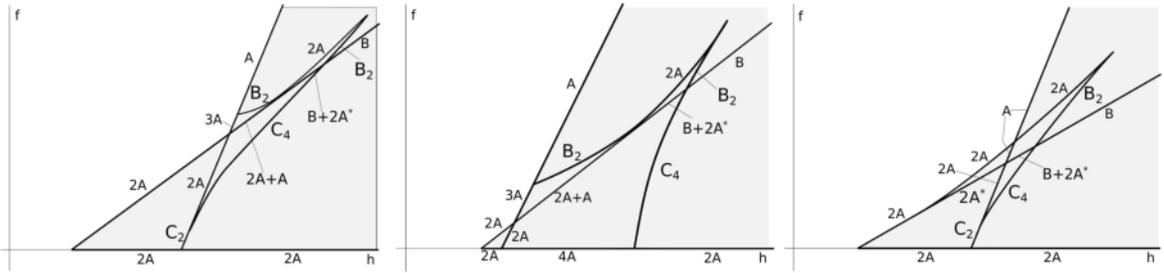


Рис. 3.7: Бифуркационные диаграммы 8, 9 (15) и 10 случая $c_3 < 0$

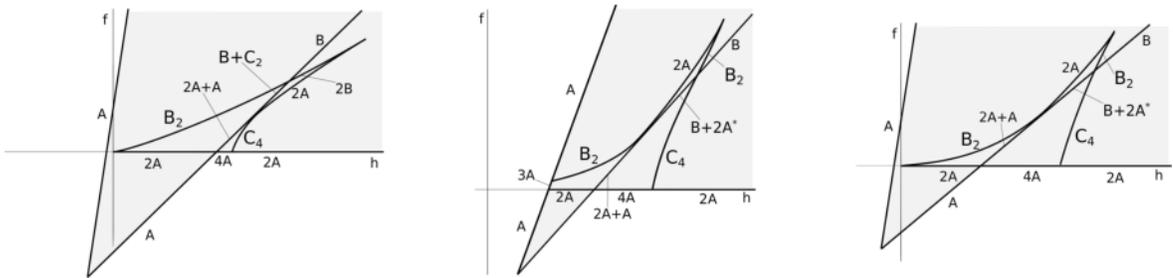


Рис. 3.8: Бифуркационные диаграммы 11, 13 и 14 случая $c_3 < 0$

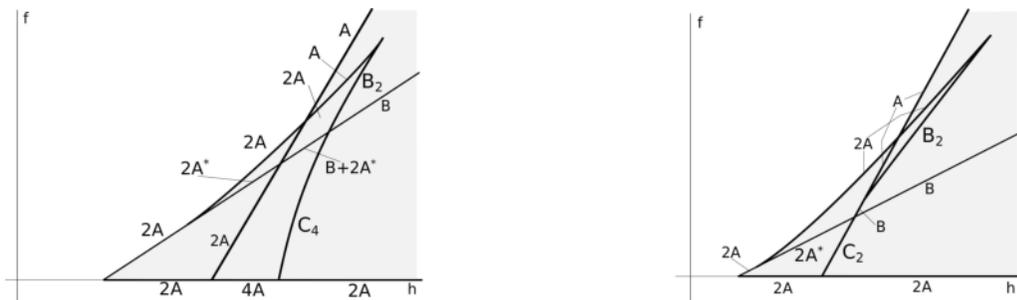


Рис. 3.9: Бифуркационные диаграммы 16 и 17 случая $c_3 < 0$

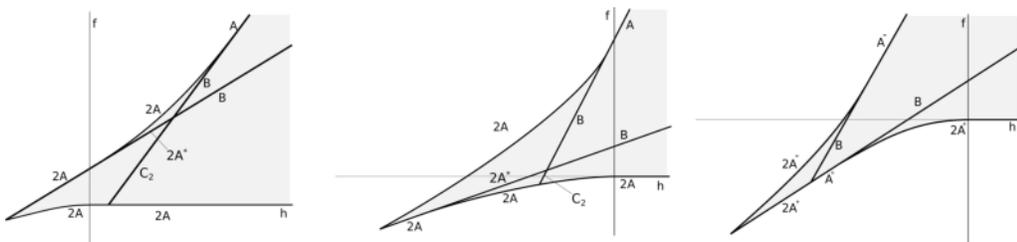


Рис. 3.10: Бифуркационные диаграммы 1, 2 и 3 случая $c_3 > 0$

3.3 Бифуркации областей возможного движения и 3-атомы

Вычислим теперь 3-атомы, соответствующие дугам $d1-d5$ бифуркационной диаграммы. Доказательства лемм 3.13–3.15, приведенных ниже, в многом аналогичны доказательству теоремы 2.3. Главная идея доказательств – сопоставить областям возможного движения их поверхности уровня первых интегралов в изоэнергетическом многообразии Q_h^3 и проследить за их бифуркацией при локальном изменении интеграла F в окрестности критического значения. В трех леммах, приведенных ниже, мы накладываем условие, что критическое значение интегралов $H = h$ и $F = f$ не является особым. В следующей главе будет показано, что это условие нарушается в точках пересечения двух дуг из трех разных групп: 1. $d1_i, d4$, 2. $d2_i, d3$, 3. $d5$

Лемма 3.13. *Зафиксируем значение интегралов $H = h$ и $F = f$, причем точка (h, f) является невырожденной точкой ранга 1. Пусть эта точка лежит на кривой $d1_i, d4$ или их пересечении. Тогда такому значению интеграла F соответствуют несколько седловых 3-атомов C_{2k}, B_k или максимальных 3-атомов A в изоэнергетическом многообразии $Q_h^3 = \{X \in M^4 : H(X) = h\}$.*

Доказательство. Из предположения того, что точка (h, f) не является вырожденной, следует, что она не принадлежит дугам $d2_i, d3$ и $d5$. Следовательно, фокусы граничного эллипса не лежат в области возможного движения. Пусть точка (h, f) лежит на пересечении дуг $d1_i$, которым соответствуют различные точки экстремумов e_i многочлена V . Тогда для этой точки выполнено условие $C1$, при этом не выполнены $C2, C3$ и $C5$. Согласно замечанию 3.7, каждой внутренней точке области возможного движения соответствуют четыре вектора скорости, кроме точек дуг гипербол $\lambda_1 = e_i$, которым соответствуют два вектора скорости. Если точка (h, f) также лежит на дуге $d4$, для нее выполнено условие $C4$, и внутренним точкам области возможного движения, лежащим на вертикальной оси Oy , также соответствуют два вектора скорости.

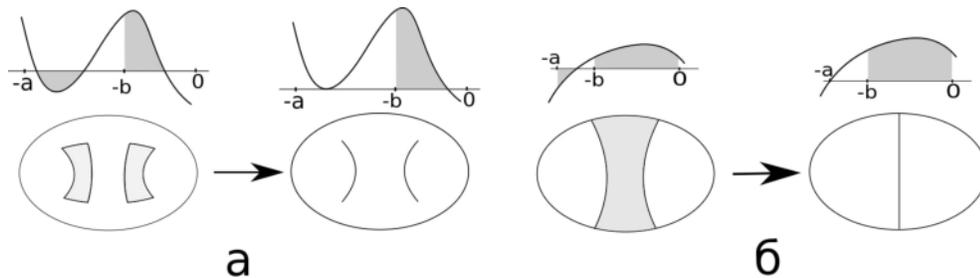


Рис. 3.11: Перестройки областей возможного движения, соответствующие максимальному атому A . Изображены графики многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и их движение при возрастании значения f , а также соответствующие им области возможного движения.

Пусть в точке $z = e_{i_1} =: e$ достигается локальный минимум многочлена $V(z)$. При $F \rightarrow f - 0$ область возможного движения удовлетворяет условию теоремы 2.2.4 и имеет компоненты связности, ограниченные двумя софокусными гиперболами с параметрами $\lambda \rightarrow e - 0$ и $\lambda \rightarrow e + 0$

соответственно (рис. 3.11, а). Таким образом, в пределе соответствующие компоненты связности области возможного движения становятся одномерными (стягиваются на дуги гиперболы с параметром $\lambda = e$), а прообраз каждой такой компоненты в Q_h^3 гомеоморфен окружности. Следовательно, слоение Лиувилля в окрестности этой окружности устроено как 3-атом A . Аналогично, если в точке $z = -a$ многочлен $V(z)$ обращается в ноль, при этом в окрестности этого корня он возрастает, соответствующая компонента связности области возможного движения становится одномерной (отрезком оси $0y$), а окрестность прообраза этой компоненты в Q_h^3 гомеоморфна 3-атому A (рис. 3.11, б).

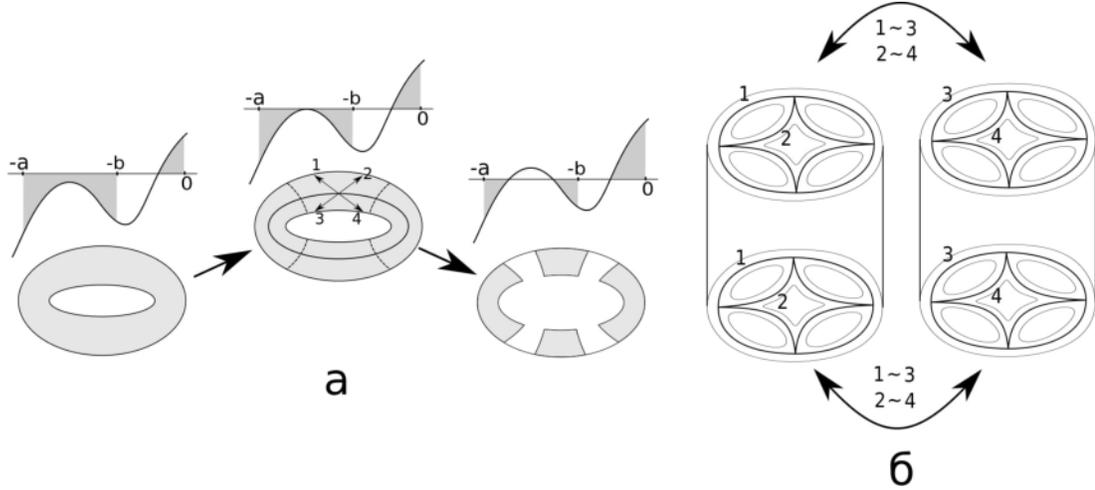


Рис. 3.12: Перестройка областей возможного движения, соответствующая 3-атому C_4 . На рис. а изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения. На рис. б изображен прообраз этих областей в Q_h^3 , при этом цифрами 1-4 обозначены точки, соответствующие векторам скорости, а двусторонние стрелки обозначают склейки границ “цилиндров”.

Предположим, что в k точках $z = e_i$ многочлен V достигает свои локальные максимумы. Пусть также он не имеет других корней на полуинтервале $[-a, -b]$ (в частности, из этого следует, что точка (h, f) не лежит на дуге $d4$). Областью возможного движения для значений h и f является объединение неодносвязных (кольцевых) областей. Рассмотрим одну из компонент связности. Как и в доказательстве теоремы 2.2.4, разобьем ее софокусные эллипсы и оснастим их точки векторами скорости в соответствии с системой (3.1.14). Заметим, что прообраз каждого такого эллипса в Q_h^3 состоит из двух пар окружностей, соответствующих векторам скорости 1-2 и 3-4, и пересекающихся в $4k$ точках согласно тому, что вектора 1 и 2, а также вектора 3 и 4 склеиваются в точках гипербол $\lambda_1 = e_i$. Таким образом, получили два особых слоя 2-атома C_{4k} . Умножим эти два особых слоя на отрезок (дугу софокусной гиперболы) и склеим полученные “цилиндры” друг с другом по границам согласно тому, что вектора скорости 1-3 и 2-4 отождествляются на эллиптической границе области возможного движения (рис. 3.12, б). Таким образом, получили особый слой 3-атома C_{4k} , который и является прообразом рассматриваемой

компоненты связности области возможного движения. При этом аналогичными рассуждениями несложно показать, что слоение Лиувилля в окрестности этого слоя устроено как 3-атом C_{4k} . Заметим, что если $z = -a$ является корнем многочлена V (т.е. точка (h, f) лежит на дуге $d4$), при этом он убывает в окрестности этого корня, то область возможного движения также является неодносвязной, при этом прообраз каждой компоненты связности гомеоморфен особому слою 3-атома C_{4k+2} .

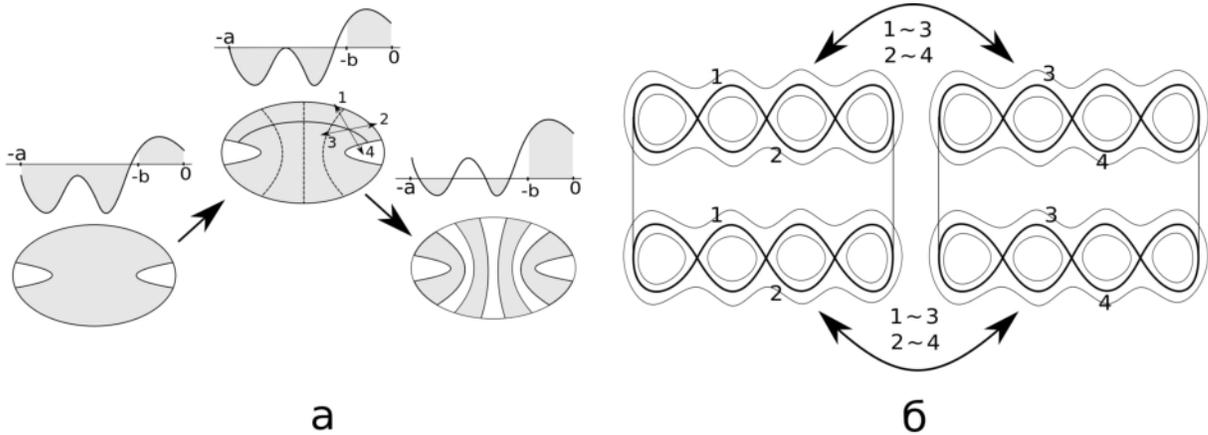


Рис. 3.13: Перестройка областей возможного движения, соответствующая 3-атому B_3 . На рис. а изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения. На рис. б изображен прообраз этих областей в Q_h^3 , при этом цифрами 1-4 обозначены точки, соответствующие векторам скорости, а двусторонние стрелки обозначают склейки границ “цилиндров”.

Предположим теперь, что на интервале $(-a, -b)$ есть другие корни многочлена V . В этом случае область возможного движения состоит из односвязных компонент, при этом, как и ранее, всем внутренним точкам этой области соответствуют четыре вектора скорости, кроме точек, лежащих на гиперболах $\lambda_1 = e_i$ и (возможно) оси $0y$, которым соответствуют только два вектора скорости (рис. 3.13, а). Заметим, что компоненты связности, которые не содержат точки этих гипербол, удовлетворяют теореме 2.2.4. Следовательно, прообразы таких компонент в Q_h^3 гомеоморфны двумерным торами. Рассмотрим одну из компонент связности, содержащую k критических дуг. Разобьем ее на дуги софокусных эллипсов и оснастим их точки векторами скорости. Заметим, что в прообразе каждой такой дуги лежат две окружности, соответствующие векторам скорости 1-2 и 3-4, стянутые по своим k хордам (особые слои 2-атома B_k). Следовательно, проведя рассуждения, аналогичные предыдущему случаю, прообраз всей области возможного движения гомеоморфен особому слою 3-атома B_k , и более того слоение Лиувилля в окрестности этого особого слоя устроено как 3-атом B_k (рис. 3.13, б).

Лемма доказана. \square

Лемма 3.14. *Зафиксируем значение интегралов $H = h$ и $F = f$, причем точка (h, f) является*

невырожденной точкой ранга 1. Пусть эта точка лежит на кривой $d2_i$, $d3$ или их пересечении. Тогда такому значению интеграла F соответствуют несколько седловых 3-атомов B_k или минимальных 3-атомов A в изоэнергетическом многообразии $Q_h^3 = \{X \in M^4 : H(X) = h\}$.

Доказательство. Как и в прошлой лемме, из предположения того, что точка (h, f) не является особой, следует, что фокусы граничного эллипса не лежат в области возможного движения. Пусть точка (h, f) лежит на пересечении дуг $d2_i$, которым соответствуют различные точки экстремумов e_i многочлена V . Тогда для этой точки выполнено условие $C2$, при этом не выполнены $C1$, $C4$ и $C5$. Согласно замечанию 3.7, каждой внутренней точке области возможного движения соответствуют четыре вектора скорости, кроме точек дуг эллипсов $\lambda_2 = e_i$, которым соответствуют два вектора скорости. Если точка (h, f) также лежит на дуге $d3$, для нее выполнено условие $C3$.

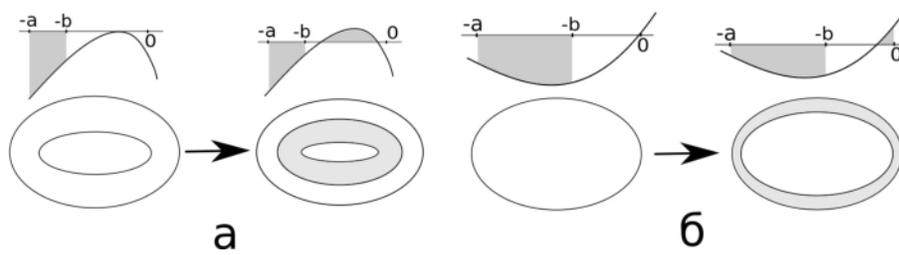


Рис. 3.14: Перестройки областей возможного движения, соответствующие минимальному атому A . Изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения.

Пусть в точке $z = e_{i_1} =: e$ достигается локальный максимум многочлена $V(z)$. Аналогично соответствующему случаю из предыдущей леммы можно показать, что прообраз области возможного движения при $F \rightarrow f + 0$ является объединением двумерных торов (рис. 3.14, а). В пределе область возможного движения становится одномерной, а в ее прообразе лежат несколько критических окружностей. Таким образом, получили 3-атом A . Аналогично, если многочлен V в точке $z = 0$ обращается в ноль, при этом он возрастает в окрестности этого корня, область возможного движения при убывании значения интеграла F стягивается на границу биллиарда, чему также соответствует 3-атом A . Отметим, что если многочлен V убывает в окрестности точки $z = 0$, то такая точка (h, f) соответствует тому, что одна из границ области возможного движения вышла на границу биллиарда, при этом не происходит никакой качественной перестройки области возможного движения. Следовательно, такая точка (h, f) является регулярной, а луч $f = 0$ при $h < 0$ не принадлежит бифуркационной диаграмме.

Пусть теперь в нескольких точках $z = e_i$ многочлен V достигает свои локальные минимумы. Предположим, что $V(z) < 0$ для любого $z \in [-a, -b]$. Таким образом область возможного движения для значений h и f является объединением неодносвязных (кольцевых) областей. Заметим, что компоненты связности, не содержащие точек эллипсов $\lambda_2 = e_i$, удовлетворяют

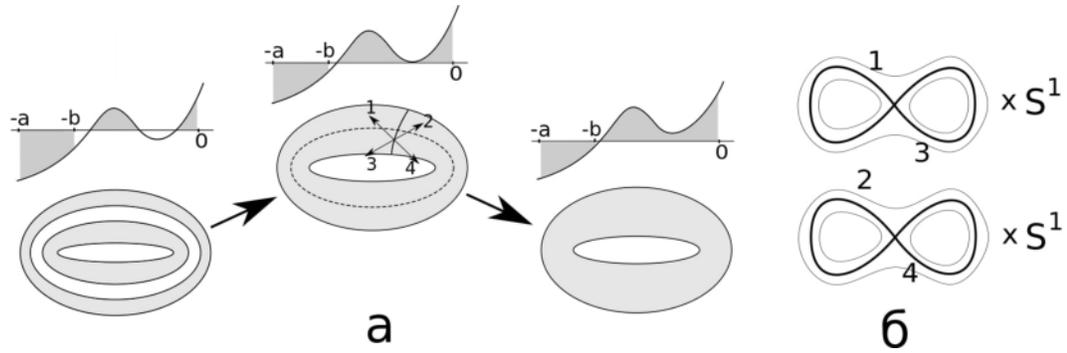


Рис. 3.15: Перестройка областей возможного движения, соответствующая двум 3-атомам B . На рис. а изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения. На рис. б изображен прообраз этих областей в Q_h^3 .

теореме 2.2.4. Прообразы таких компонент в Q_h^3 гомеоморфны объединению двух торов Лиувилля. Рассмотрим теперь компоненту, содержащую в себе k эллипсов $\lambda_2 = e_i$. Разобьем ее на дуги софокусных гипербол и оснастим их точки векторами скорости (рис. 3.15, а). Прообраз такой дуги в Q_h^3 гомеоморфен двум окружностям, соответствующим векторам скорости 1-3 и 2-4, стянутым по своим k хордам в силу того, что вектора 1 и 3, а также 2 и 4 склеиваются в точках “критических” эллипсов. Получили два особых слоя 2-атома B_k . Следовательно, прообраз всей компоненты связности гомеоморфен этим двум слоям, умноженным на окружность (софокусный эллипс), т.е. двум особым слоям 3-атома B_k (рис. 3.15, б). Более того, в окрестности этого слоя слоение устроено как 3-атом B_k .

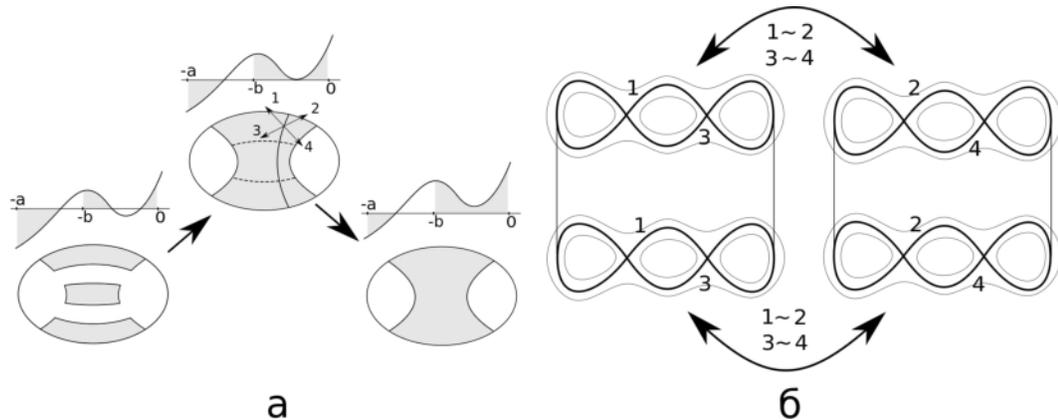


Рис. 3.16: Перестройка областей возможного движения, соответствующая 3-атому B_2 . На рис. а изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения. На рис. б изображен прообраз этих областей в Q_h^3 , при этом цифрами 1-4 обозначены точки, соответствующие векторам скорости, а двусторонние стрелки обозначают склейки границ “цилиндров”.

Предположим теперь, что на интервале $z \in (-a, -b)$ существуют корни многочлена V , т.е.

область возможного движения состоит из односвязных компонент. Опять, прообраз компоненты связности, не содержащей точек эллипсов $\lambda_2 = e_i$, гомеоморфен тору Лиувилля. Рассмотрим компоненту, содержащую k дуг этих эллипсов. Разобьем ее на дуги софокусных гипербол и оснастим их точки векторами скорости (рис. 3.16, а). Заметим, что как и в аналогичном случае предыдущей леммы прообраз каждой такой дуги в Q_h^3 гомеоморфен двум особым слоям 2-атома B_k . Умножим эти особые слои на отрезок и склеим полученные “цилиндры” по границам в силу того, что на гиперболических границах вектора 1 склеивается с вектором 2, а вектор 3 – с вектором 4 (рис. 3.16, б). Таким образом, прообраз рассматриваемой компоненты в Q_h^3 гомеоморфен особому слою 3-атома B_k , при этом его окрестность также устроена, как 3-атом B_k .

Лемма доказана. \square

Лемма 3.15. *Зафиксируем значение интегралов $H = h$ и $F = f$, причем точка (h, f) не является вырожденной или ранга 0. Пусть эта точка лежит на кривой $d5$. Если в окрестности точки $z = -b$ многочлен V возрастает, этому критическому значению соответствует несколько 3-атомов C_2, B или два атома A^* в изоэнергетическом многообразии Q_h^3 . Если в окрестности точки $z = -b$ многочлен V убывает, то ему соответствуют несколько максимальных и минимальных 3-атома A .*

Доказательство. Согласно условию на невырожденность и ранг следует, что точка (h, f) не лежит на других дугах бифуркационной диаграммы, кроме дуги $d5$. Согласно замечанию 3.7, каждой внутренней точке области возможного движения соответствуют четыре вектора скорости, кроме фокусов, которым соответствуют окружность векторов, и остальных точек фокальной оси $0x$, которым соответствуют два вектора скорости.

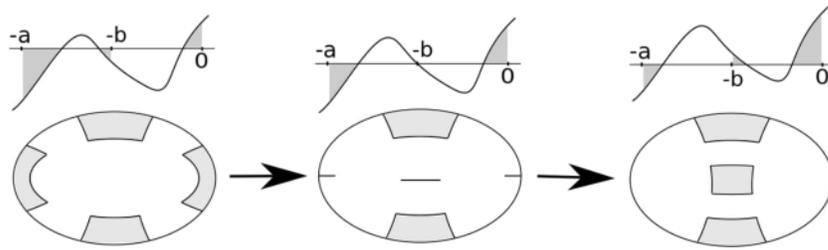


Рис. 3.17: Перестройка областей возможного движения, соответствующая 3-атомам A . Изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения.

Пусть в окрестности точки $z = -b$ многочлен V убывает. При $F \rightarrow f - 0$ область возможного движения ограничена дугами одной гиперболы, которая стремится к фокальной оси. В пределе область становится одномерной, а ее прообраз гомеоморфен объединению непересекающихся окружностей. С другой стороны, при $F \rightarrow f + 0$ область возможного движения ограничена дугами эллипса, который также стремится к фокальной оси (рис. 3.17). В итоге оба

случая соответствуют 3-атомам A , при этом первый случай соответствует “исчезновению” торов Лиувилля, а второй – их “появлению”

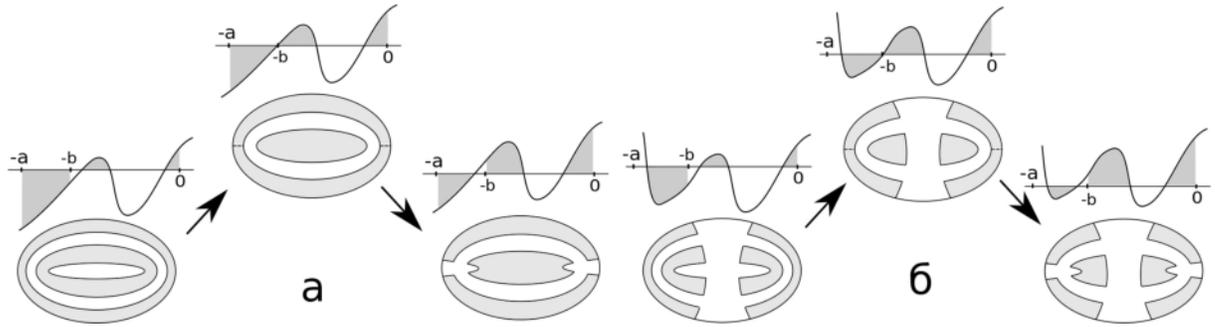


Рис. 3.18: Перестройка областей возможного движения, соответствующая 3-атомам C_2 и B . Изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения.

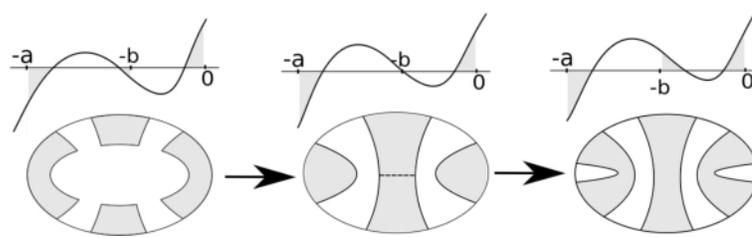


Рис. 3.19: Перестройка областей возможного движения, соответствующая 3-атому B . Изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения.

Пусть теперь в окрестности точки $z = -a$ многочлен V возрастает. Если компонента связности области возможного движения не содержит точек фокальной прямой, она удовлетворяет теореме 2.2.4, и ее прообраз в Q_h^3 гомеоморфен тору. Рассмотрим компоненту связности, которая содержит точки фокальной прямой, но не содержит фокусы. Заметим, что если она содержит точки фокального отрезка $[F_1, F_2]$, такой случай эквивалентен случаю перестройки двух односвязных областей возможного движения в одну односвязную в лемме 3.14. Следовательно, прообраз такой компоненты в Q_h^3 гомеоморфен особому слою 3-атома B (рис. 3.19). Если же она содержит точки лучей $(-\infty, F_1]$ и $[F_2, +\infty)$, такой случай аналогичен случаям перестроек неодносвязных и односвязных областей возможного движения в лемме 3.13, и прообраз этой компоненты связности гомеоморфен особому слою 3-атома C_2 в неодносвязном случае и B в односвязном (рис. 3.18).

Предположим, что компонента связности содержит в себе только один фокус. Докажем, что такой критический случай соответствует 3-атому A^* . С аналогичной ситуацией мы сталкивались раньше при доказательстве теоремы 2.3. Приведем здесь альтернативное доказательство этого

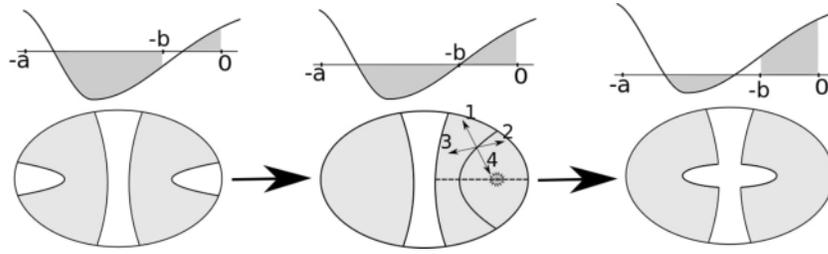


Рис. 3.20: Перестройка областей возможного движения при условии $C5$. Изображен график многочлена $V(z)$ на отрезке $[-a, 0]$ и соответствующие ему области возможного движения

факта, идеи которого будут использоваться в следующей главе. Разобьем область возможного движения на дуги софокусных гипербол и отрезок s , лежащий на фокальной прямой между фокусом и границей биллиарда (рис. 3.20). Заметим, что прообраз каждой такой дуги гомеоморфен двум “восьмеркам” – особым слоям 2-атома B . Следовательно, прообраз всей области возможного движения без отрезка s гомеоморфен двум таким “восьмеркам”, умноженным на отрезок и склеенным друг с другом по одной из границ полученных “цилиндров” (рис. 3.21, б). По замечанию 3.7 фокусу соответствует окружность векторов. Следовательно, прообраз отрезка s в Q_h^3 гомеоморфен окружности вместе со своей хордой, соединяющей две противоположные точки этой окружности (рис. 3.22). Рассмотрим “восьмерку”, соответствующую векторам 2 и

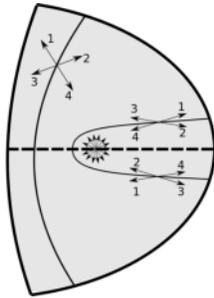


Рис. 3.21: Область возможного движения, содержащая фокус.

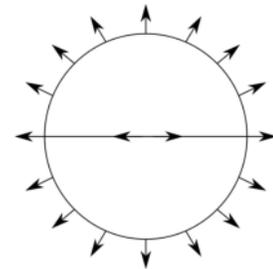


Рис. 3.22: Прообраз отрезка s в Q_h^3 .

4, образ которой лежит на гиперболе, близкой к отрезку s (рис. 3.21). Заметим, что при обходе по гиперболе сверху вниз вектор 2 повернется против часовой стрелки, изменив свой угол от нуля до π . При этом вектор 4 повернется против часовой стрелки, изменив свой угол от π до 2π . Следовательно, в окрестности прообраза отрезка s эта “восьмерка” будет иметь вид, изображенный на рис. 3.23, а. Аналогичные рассуждения проведем для “восьмерки”, соответствующей векторам 1 и 3 (рис. 3.23, в). Заметим, что в результате склейки границ полученного выше “цилиндра”, изображенной на рис. 3.23, получим особый слой 3-атома A^* (т.е. особый слой 3-атома B с “перекруткой”). Более того, окрестность этого слоя устроена как 3-атом A^* . Если же область возможного движения содержит два фокуса, то такая “перекрутка” 3-атома B произойдет дважды, и в итоге получим опять 3-атом B .

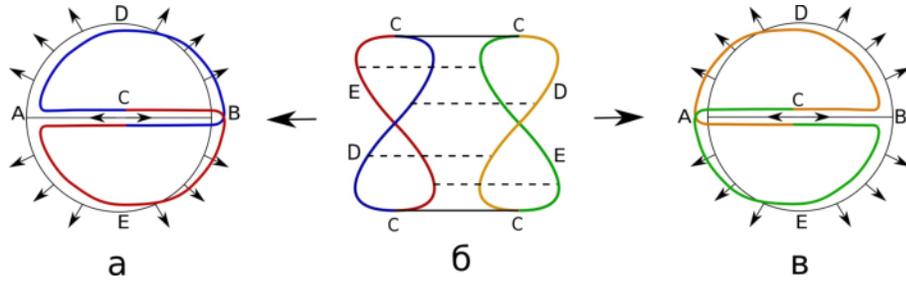


Рис. 3.23: Склеивка границ “цилиндра” по прообразу отрезка s . Оранжевым цветом обозначены точки, соответствующие вектору 1, синим цветом – вектору 2, зеленым – вектору 3 и красным – вектору 4.

Лемма доказана. □

В итоге, были описаны всевозможные 3-атомы, соответствующие нашей системе. Следующая теорема является обобщением полученных результатов.

Следствие 3.16 (Основная теорема об атомах.). *Существует всего девять типов бифуркаций регулярных областей возможного движения:*

- 1) появление неодносвязной (кольцевой) компоненты связности из софокусного эллипса (соответствует двум минимальным 3-атомам A в изоэнергетическом многообразии Q^3);
- 2) появление односвязной компоненты связности из дуги софокусного эллипса или отрезка фокальной прямой (соответствует минимальному 3-атому A);
- 3) стягивание односвязной компоненты связности на дугу софокусной гиперболы, либо на отрезок вертикальной оси Oy , либо на отрезок фокальной прямой (соответствует максимальному 3-атому A);
- 4) слияние k неодносвязных компонент связности в одну неодносвязную компоненту (соответствует двум 3-атомам B_{k-1});
- 5) разрыв неодносвязной компоненты связности на $2k$ односвязные компоненты (соответствует 3-атому C_{2k});
- 6) слияние k односвязных компонент связности в одну односвязную (соответствует 3-атому B_{k-1});
- 7) разрыв односвязной компоненты связности на k односвязных компонент (соответствует 3-атому B_{k-1});
- 8) перестройка неодносвязной компоненты связности в одну односвязную компоненту через два фокуса (соответствует 3-атому B);
- 9) перестройка односвязной компоненты связности в одну односвязную компоненту через один фокус (соответствует 3-атому A^*).

3.4 Грубые молекулы и метки

Зафиксируем уровень гамильтониана $H = h$ и вычислим соответствующую ему грубую молекулу. Напомним, что при вычислении 3-атомов мы следили за изменением многочлена V при локальном изменении значения f . Теперь проследим за его изменением при глобальном возрастании значения f от $-\infty$ до $+\infty$. Когда график многочлена V лежит ниже нуля на отрезке $[-b, 0]$, движения нет. Затем при значении $f = f_{min}$ несколько экстремумов (в количестве m), лежащих справа от точки $-b$, выходят на отрезок $[-a, 0]$. Если при этом график V лежит ниже нуля на отрезке $[-a, -b]$, этому соответствует появление m неодносвязных компонент области возможного движения, или же $2m$ минимальных атомов A согласно следствию 3.16. Если же график V имеет корни на отрезке $[-a, -b]$, происходит появление $2m(2k + l)$ односвязных компонент, где k – число подотрезков на отрезке $[-a, -b]$, не содержащих точки $-a$ и $-b$, на которых $V < 0$, а l – число таких же подотрезков, но содержащих одну из этих точек. При дальнейшем росте значения f будем следить за последовательным выходом экстремумов многочлена V и значений $V(-a)$, $V(-b)$ и $V(0)$ на отрезок $[-a, 0]$. Этим выходам соответствуют перестройки области возможного движения, описанные в леммах 3.13-3.15 предыдущего раздела. Таким образом, будем строить грубую молекулу снизу, начиная с описанных выше 3-атомов A , и на каждом критическом уровне интеграла f сопоставляя перестройкам области возможного движения атомы согласно следствию 3.16. При достижении значения $f = f_{max}$ многочлен V становится больше нуля на отрезке $[-a, -b]$, чему соответствует несколько максимальных атомов A , и затем движение снова перестает существовать. На этом заканчивается построение грубой молекулы. Пример вычисления приведен на рис 3.24.

Таким способом был получен полный список молекул, встречающихся для (гуковского) потенциала второго порядка (работа [25]) и четвертого порядка (работа [42]). Однако, в общем случае возможных грубых молекул, соответствующих потенциалу большого порядка, необозримо много. Поэтому приведем несколько их общих свойств.

Утверждение 3.4.1. *Построенная выше грубая молекула удовлетворяет следующим свойствам:*

1) *существует расположение молекулы в плоскости, при котором она является симметричной относительно некоторой оси, причем атомы, переходящие друг в друга под действием этой симметрии, соответствуют одинаковому уровню интеграла F ;*

2) *все атомы вида C_{2k} лежат на некотором одном уровне интеграла F (обозначим его $F = f_C$), причем число k для всех них одинаковое;*

3) *ниже уровня атомов C_{2k} молекула является непересекающимся объединением нескольких симметричных деревьев с корнями в вершине C_{2k} ;*

4) *на фокальном уровне интеграла F , при котором $V(-b) = 0$ (обозначим его $F = f_F$), лежат либо несколько минимаксных атомов A , либо два атома A^* и несколько атомов B_k , либо один атом B и несколько атомов C_{2k} ;*

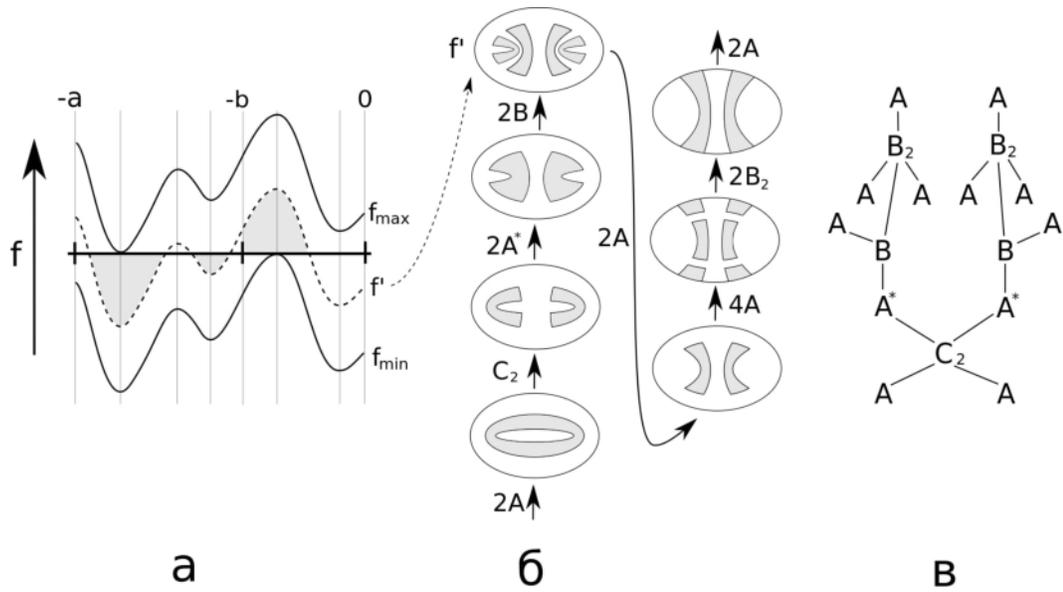


Рис. 3.24: Вычисление грубой молекулы с помощью графика многочлена V . На рис. а изображено поднятие графика с ростом значения f . На рис. б изображены области возможного движения и их перестройки. На рис. в изображена результирующая грубая молекула.

5) в общем случае молекула не является деревом, т.е. могут существовать циклы;

6) молекула может содержать кратные ребра, причем они могут соединять только атомы C_{2k} с атомами B_k , расположенными не ниже фокального уровня;

7) если $V(z_1) < V(-b) < V(z_2)$ для любых $z_1 \in [-a, -b]$ и $z_2 \in (-b, 0]$, молекула является деревом.

Доказательство. Докажем сначала пункт 2. Заметим, что если регулярная область возможного движения содержит неодносвязную (кольцевую) компоненту связности, то все ее компоненты также будут кольцевыми (это связано с тем, что при таком условии выполнено неравенство $V(z) < 0$ для любого $z \in [-a, -b]$). Атомы C_{2k} соответствуют разрыву одной такой кольцевой компоненты на $2k$ односвязных компонент по дугам софокусных гипербол, причем такой разрыв одновременно происходит и для всех остальных кольцевых компонент. Из этого и следует пункт 2.

Докажем теперь пункт 3. Согласно предыдущему пункту, все области возможного движения, соответствующие значениям интеграла $F < f_C$ ниже уровня атомов C_{2k} , являются кольцевыми. Следовательно, всю молекулу можно разбить на два изоморфных (одинаковых) подграфа, соответствующих движениям по и против часовой стрелки. При этом каждый атом этих подграфов соответствует слиянию нескольких кольцевых компонент области возможного движения в одну (то есть является атомом B_k согласно следствию 3.16), что и гарантирует структуру дерева.

Докажем пункт 4. Согласно лемме 3.15, если многочлен V убывает в окрестности точки $-b$, фокальному уровню $F = f_F$ соответствует несколько минимаксных атомов A . Если же много-

член V возрастает в этой окрестности, обязательно найдутся регулярные компоненты области возможного движения, которые перестраиваются через фокусы. Если область возможного движения ниже фокального уровня состоит из кольцевых компонент, в силу леммы 3.15 одна из них перестраивается через два фокуса (что соответствует атому B), а все остальные разрываются на две односвязные компоненты (что соответствует атому C_2). Если же компоненты области возможного движения до перестройки являются односвязными, две из них перестраиваются через фокус (что соответствует двум атомам A^*), а оставшиеся либо разрываются, либо сливаются по отрезкам фокальной прямой (что соответствует атому B).

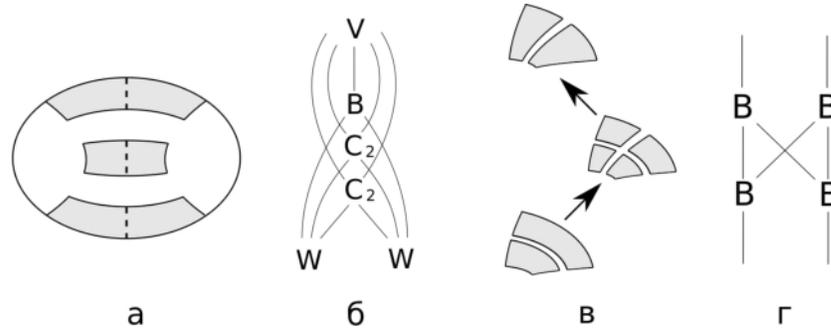


Рис. 3.25: Иллюстрации к пунктам 1 и 5. Здесь W – некоторое дерево, а V – симметричный граф.

Теперь докажем пункт 1. Согласно тому, что эллиптическая система координат симметрична относительно осей $0x$ и $0y$, а область возможного движения ограничена ее координатными линиями, следует, что эта область симметрична относительно осей $0x$ и $0y$, а также переходит в себя при повороте на угол π . Таким образом, зададим следующую инволюцию τ на вершинах грубой молекулы (атомах): если атом лежит выше уровня атомов C_{2k} , сопоставим ему атом, соответствующий перестройке диаметрально противоположной компоненты области возможного движения; если атом лежит ниже уровня атомов C_{2k} , сопоставим ему его парный атом, соответствующий движению в противоположном направлении, согласно пункту 3; атомы C_{2k} оставим на месте. Заметим, что такая инволюция сопоставляет два атома, лежащие на одном уровне интеграла F , при этом если атом перешел в себя, то это либо C_{2k} , либо он соответствует перестройке компоненты связности области возможного движения, содержащей центр биллиарда, и следовательно единственный на своем уровне (рис. 3.25, а). Инволюция τ задает инволюцию ребер грубой молекулы. Также заметим, что если ребро перешло в себя при этой инволюции, оно такое единственное на своем уровне $f_i < F < f_{i+1}$ между двумя соседними критическими уровнями интеграла F . Несложно заметить, что построенная таким образом инволюция порождает необходимую симметрию молекулы в плоскости (пример изображен на рис. 3.25, б).

Для доказательства пункта 5 приведем пример появления цикла в грубой молекуле. На рис. 3.25, в, г изображена перестройка области возможного движения и соответствующий ей цикл. Пример перестройки области возможного движения, соответствующей кратному ребру в

молекуле, изображен на рис. 3.26. Рассмотрим теперь два атома W_1 и W_2 , соединенные кратными ребрами. Если атом W_1 принадлежит серии B_k , он соответствует разрыву некоторой односвязной компоненты области возможного движения по дугам гипербол. В результате этого разрыва получим $k + 1$ компонент связности, ограниченных дугами одних и тех же софокусных эллипсов. Следовательно, эти компоненты не могут сливаться друг с другом по своим эллиптическим границам (т.к. эти границы должны принадлежать разным эллипсам). Иными словами, такой атом W_1 не может быть соединен кратными ребрами. Если же атом W_1 принадлежит серии C_{2k} , он соответствует разрыву не односвязной компоненты области возможного движения на $2k$ односвязных компонент. Рассмотрим две из них, образующих кратные ребра. Существует две возможности: 1. эти две компоненты слились в одну вдоль фокального отрезка; 2. они слились с некоторой третьей компонентой, содержащей точки фокального отрезка. В первом случае атом W_2 является атомом B , лежащем на фокальном уровне $F = f_F$, во втором он лежит выше фокального уровня, т.к. только для таких значений интеграла F область возможного движения может содержать точки фокального отрезка. Таким образом, был доказан пункт 6.

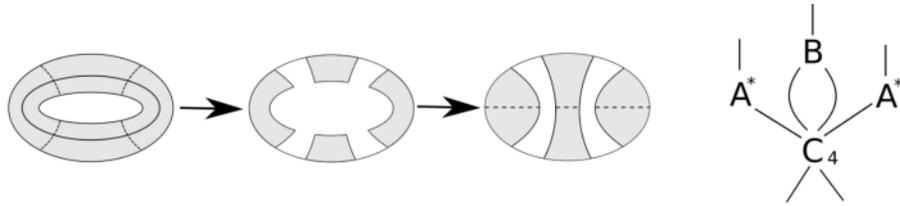


Рис. 3.26: Пример появления кратных ребер

Пункт 7 почти очевиден. Действительно, ниже фокального уровня $F = f_F$ молекула является деревом, согласно пункту 3. Выше этого уровня каждый атом является “разделяющим” атомом серии B_k , т.е. соответствует разделению области возможного движения по дугам софокусных гипербол. Граф, состоящий из таких разделяющих вершин, заведомо является деревом.

Утверждение доказано. □

Последним шагом в вычислении полных инвариантов Фоменко–Цишанга является вычисление их меток. Для этого разобьем 3-атомы на шесть групп в соответствии со следствием 3.16:

1. минимальные 3-атомы A из групп 1, 2;
2. максимальные 3-атомы A из группы 3;
3. седловые 3-атомы из групп 4, 6, соответствующие бифуркациям области возможного движения типа “слияние”;
4. седловые 3-атомы из групп 5, 7, соответствующие бифуркациям типа “разрыв”;
5. 3-атомы A^* из группы 8;

6. 3-атом B из группы 9, соответствующий бифуркации через два фокуса.

Отметим, что при вычислении меток в частном случае потенциала Гука, мы также разделили 3-атомы на шесть групп, которые полностью соответствуют группам, приведенным выше. В таких обозначениях верна следующая теорема, которая является аналогом теоремы 2.5 для частного случая.

Теорема 3.17. *Зафиксируем ориентацию изоэнергетического многообразия Q_h^3 таким образом, чтобы все циклы λ на минимальных атомах A стали согласованными. Рис. 3.27 полностью описывает метки, соответствующие ребрам построенной выше грубой молекулы.*

Верхний атом \ Нижний атом	2	3	4	5	6
1	$r=0 \quad \varepsilon=1$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=\infty \quad \varepsilon=1$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=0$
3	$r=\infty \quad \varepsilon=1$	$r=\infty \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=0 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=0$	$r=0.5 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=-1$	$r=0.5 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=-1$
4	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=\infty \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=2 \quad \Theta'=0$	—
5	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=2 \quad \Theta'=0$	$r=0.5 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=-1$	—	—
6	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=1$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=1 \quad \Theta'=1$	$r=0 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=0$	—	—

Рис. 3.27: Метки инварианта Фоменко–Цишанга. Ячейка соответствует ребру, соединяющего атомы из обозначенных групп, причем атом из первого столбца всегда стоит на уровень ниже атома из первой строки в грубой молекуле. Здесь Θ обозначает вклад ребра в метку n семьи, не содержащей атомов 5 и 6, а Θ' обозначает вклад в метку n семьи атома 5 или 6.

Доказательство этой теоремы полностью повторяет рассуждения в доказательстве теоремы 2.5. Таким образом, были построены всевозможные инварианты Фоменко–Цишанга, соответствующие эллиптическому бильярду с потенциалом.

Замечание 3.18. *Заметим, что при выбранной ориентации Q_h^3 циклы λ на максимальных 3-атомах A также будут ориентированны согласованно.*

Также заметим, что каждый 3-атом из групп 5 и 6 (A^* и B) образует семью. В зависимости от соседних 3-атомов, метка n 3-атома A^* может равняться -2 , -1 или 0 , а метка n 3-атома B может равняться -2 , -1 , 0 или 1 .

3.5 Изоэнергетическое многообразие Q^3

Определим теперь, чему гомеоморфно изоэнергетическое многообразие $Q_h^3 = \{X \in M^4 : H(X) = h\}$. Отметим, что единственное ограничение на вектор скорости задает следующая

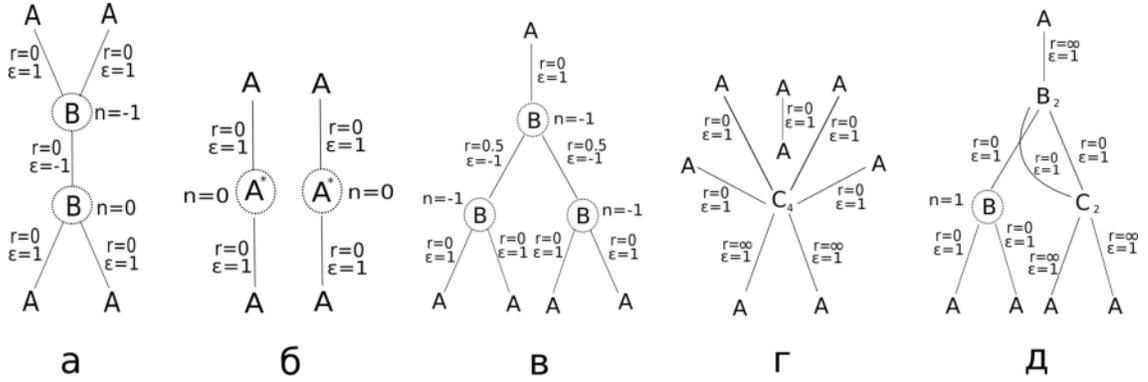


Рис. 3.28: Примеры меченых молекул с малым количеством критических значений интеграла F (не больше четырех)

формула:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(h - W(x, y)).$$

Таким образом, если в точке (x, y) имеем $W(x, y) < h$, то этой точке соответствует целая окружность векторов скорости, если $W(x, y) = h$, ей соответствует один нулевой вектор, если $W(x, y) > h$, в этой точке не происходит движение. Следовательно, образ изоэнергетического многообразия Q_h^3 при проекции p на бильярд задается неравенством

$$W(x, y) \leq h \quad (3.5.1)$$

Лемма 3.19. Пусть изоэнергетическое многообразие Q_h^3 соответствует неособому уровню энергии $H = h$. Тогда все точки, для которых выражение (3.5.1) обращается в равенство, являются граничными точками образа $p(Q_h^3)$.

Доказательство. Отметим, что по замечанию 3.7 фокусам всегда соответствует окружность векторов. Следовательно, если фокусы лежат в образе $p(Q^3)$, они удовлетворяют строгому неравенству (3.5.1) и являются внутренними точками.

Используя формулу (3.1.5) из теоремы 3.3, приведем неравенство (3.5.1) к следующему виду:

$$h\lambda_1 - P(\lambda_1) \leq h\lambda_2 - P(\lambda_2).$$

Напомним, что $V(z) = f + hz - P(z)$. В силу того, что значение энергии является неособым, не существуют таких двух точек $z = e_1 \in [-a, -b]$ и $z = e_2 \in [-b, 0]$, которые являются локальными экстремумами многочлена $V(z)$ на своих отрезках (либо точками $-a$, $-b$ или 0) и $V(e_1) = V(e_2) = 0$. Следовательно, для любой точки (λ_1, λ_2) , удовлетворяющей равенству (3.5.1), для одной из координат λ_i многочлен V является монотонным в окрестности точки $z = \lambda_i$, при этом λ_i не равняется $-a$, $-b$ или 0 . Пусть без ограничения общности такой координатой является λ_1 . Тогда в окрестности этой координаты существует значение λ'_1 , для которого $h\lambda'_1 - P(\lambda'_1) >$

$h\lambda_1 - P(\lambda_1) = \lambda_2 - P(\lambda_2)$. Следовательно, точка (λ'_1, λ_2) не принадлежит образу Q^3 , а точка (λ_1, λ_2) является граничной.

Лемма доказана. \square

Отметим, что многочлен V не имеет кратных корней, если значение энергии h является неособым. Следовательно, условие того, что точка $z = e$ является экстремумом, эквивалентно условию $V'(e) = 0$.

Лемма 3.20. Пусть изоэнергетическое многообразие Q_h^3 соответствует неособому уровню энергии $H = h$. Тогда любая компонента края образа $p(Q_h^3)$ гомеоморфна окружности.

Доказательство. Для доказательства нужно показать, что множество $(x, y) : W = h$ не имеет самопересечений и точек касания с граничным эллипсом. Докажем, что нет самопересечений. Достаточно показать, что для любой точки границы либо $W'_x \neq 0$, либо $W'_y \neq 0$. Вычислим полный дифференциал W в граничной точке (λ_1, λ_2) :

$$dW = \frac{d\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}(P'(\lambda_1) - h) - \frac{d\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}(P'(\lambda_2) - h) = \frac{V'(\lambda_2)d\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{V'(\lambda_1)d\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Если точка (λ_1, λ_2) не принадлежит осям $0x$ и $0y$, условие $W'_x = W'_y = 0$ эквивалентно условию $V'(\lambda_1) = V'(\lambda_2) = 0$. Однако, последнее означает, что выполнены условия $C1$ и $C2$. Следовательно, значение h является особым, что запрещено условием.

Пусть теперь точка (λ_1, λ_2) принадлежит оси $0y$. Тогда $W'_x = 0$ в силу того, что каждый моном многочлена W имеет четную степень по переменной x . При этом

$$W'_y = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2}yV'(\lambda_2).$$

То, что $V'(\lambda_2) = 0$ и $V(-a) = V(\lambda_2)$, означает, что выполнены условия $C2$ и $C4$, что запрещено выбором неособого значения h . Если $y = 0$, то точка с координатами $\lambda_1 = -a$ и $\lambda_2 = -b$ принадлежит границе и $V(-a) = V(-b)$. Следовательно, выполнены условия $C4$ и $C5$, что также запрещено выбором неособого значения h . Аналогично рассматривается случай, когда точка (λ_1, λ_2) принадлежит оси $0x$.

Докажем теперь, что нет точек касания с граничным эллипсом. Достаточно показать, что вектора (W'_x, W'_y) и $(\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$ линейно независимы. Если точка (λ_1, λ_2) не лежит на осях $0x$ и $0y$, из условия линейной зависимости вытекает, что $V'(\lambda_1) = 0$. Следовательно, выполнены условия $C1$ и $C3$, что запрещено. Если же точка касания лежит на осях $0y$ или $0x$, то автоматически выполнены условия $C3$ и $C4$ или условия $C3$ и $C5$ соответственно, что также запрещено.

Лемма доказана. \square

В итоге имеем, что образ изоэнергетического многообразия $p(Q_h^3)$ при проекции p на бильярд ограничен контурами, гомеоморфными окружности, и всем внутренним точкам этого образа соответствует окружность векторов скорости. Компоненты связности этого образа могут быть

как односвязным, так и представлять собой “дырявые” диски со сколь угодно большим числом дырок.

Теорема 3.21. *Изоэнергетическое многообразие Q^3 эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом состоит из нескольких компонент связности, каждая из которых гомеоморфна либо трехмерной сфере S^3 , либо связной сумме $(S^1 \times S^2) \# \dots \# (S^1 \times S^2)$ нескольких многообразий $S^1 \times S^2$.*

Доказательство. Рассмотрим односвязную компоненту связности образа $p(Q^3)$ (обозначим ее K). Разобьем ее по некоторому внутреннему контуру на две области: дисковую K_1 и кольцевую K_2 (рис. 3.29, а). По замеченному ранее, каждой точке области K_1 соответствует окружность векторов. Следовательно, прообраз $p^{-1}(K_1)$ в Q^3 гомеоморфен полноторию. На его границе выберем базисные циклы λ_1 и μ_1 так, что цикл $\lambda_1 = p^{-1}(x, y)$, т.е. окружность векторов, соответствующая одной точке (x, y) области Π_1 , а $\mu_1 = \{(x, y, \dot{x}, 0) : (x, y) \in \partial\Pi_1\}$, то есть прообраз границы области Π_1 , каждой точке которой сопоставлен вектор скорости с компонентой $\dot{y} = 0$. Заметим, что цикл λ_1 задает образующую фундаментальной группы полнотория $p^{-1}(\Pi_1)$ (является его параллелью), а μ_1 стягивается в точку (является меридианом).

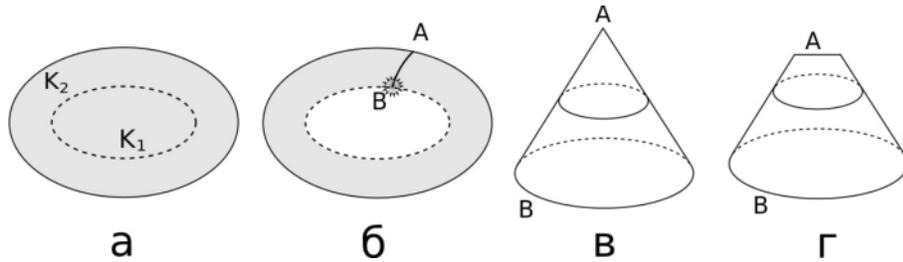


Рис. 3.29: Случай многообразия S^3

Докажем теперь, что прообраз области K_2 также гомеоморфен полноторию. Действительно, разобьем ее на стягиваемые отрезки, трансверсальные ее границе, начало которых лежит на границе области K (точка A), а конец – на внутренней границе области K_2 (точка B), как изображено на рис. 3.29, б. Заметим, что если точка A не лежит на границе бильярда, ей соответствует нулевой вектор скорости. Следовательно, в прообразе отрезка AB лежит конус (рис. 3.29, в), т.е. он гомеоморфен двумерному диску. Если же точка принадлежит граничному эллипсу, в прообразе отрезка AB лежит цилиндр, одна граница которого стянута на отрезок согласно отождествлению векторов скорости на границе бильярда (рис. 3.29, г). Таким образом, прообраз отрезка AB опять гомеоморфен двумерному диску. Следовательно, прообраз всей области Π_2 гомеоморфен полноторию. На его границе выберем базисные циклы $\lambda_2 = \mu_1$ и $\mu_2 = \lambda_1$. Заметим, что цикл λ_2 задает образующую фундаментальной группы полнотория $p^{-1}(K_2)$ (является его параллелью), а μ_2 стягивается в точку (является меридианом).

Таким образом, прообраз K состоит из двух полноторий, склеенных по граничному тору по

правилу $\lambda_2 = \mu_1$ и $\mu_2 = \lambda_1$. Итоговое трехмерное многообразие гомеоморфно S^3 (см., например, [1], т. I, стр. 201).

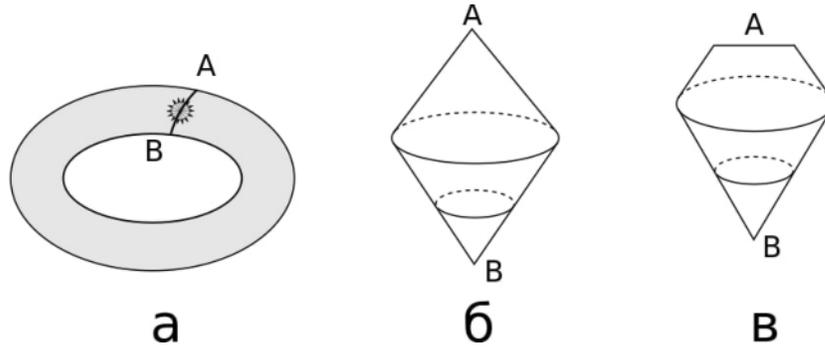


Рис. 3.30: Случай многообразия $S^1 \times S^2$

Теперь рассмотрим неодносвязную компоненту связности образа $p(Q^3)$, гомеоморфную кольцу (обозначим ее W). Как и в случае области K_2 , разобьем ее на стягиваемые отрезки, трансверсальные ее границе, начало которых лежит на внешней границе области W (точка A), а конец – на внутренней границе (точка B), как изображено на рис. 3.30, а. Заметим, что если точка A не принадлежит границе бильярда, ей соответствует нулевой вектор скорости, прообраз отрезка AB гомеоморфен цилиндру, границы которого стянуты в точку (рис. 3.30, б). Если же точка A принадлежит границе бильярда, прообраз отрезка AB гомеоморфен цилиндру, одна граница которого стянута в точку, а вторая – на отрезок согласно отождествлению векторов скорости на границе бильярда (рис. 3.30, в). Таким образом, прообраз отрезка AB всегда гомеоморфен двумерной окружности S^2 . Следовательно, прообраз всей области W гомеоморфен прямому произведению $S^2 \times S^1$.

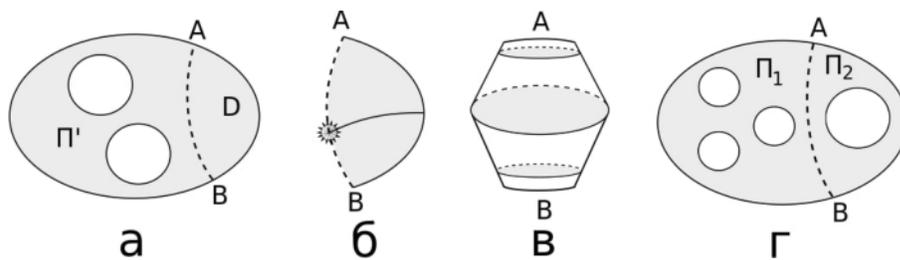


Рис. 3.31: Случай многообразия $S^2 \times S^1 \# \dots \# S^2 \times S^1$

Наконец, рассмотрим общий случай, при котором компонента связности образа $p(Q^3)$ (обозначим ее Π) содержит произвольное количество компонент края (“дырок”). Покажем по индукции, что если Π содержит n “дырок”, ее прообраз гомеоморфен связной сумме n пространств $S^2 \times S^1$. Шаг индукции при $n = 1$ был доказан ранее. Предположим, что утверждение доказано для значения $n = k$. Пусть области Π соответствует $k' \leq k$ дырок. Выберем на ее внешней границе точки A и B и разобьем ее на две области Π' и D стягиваемым отрезком B так, чтобы

область D не содержала “дырок” (рис. 3.31, а). Докажем, что прообраз области D гомеоморфен трехмерному диску. Действительно, ее граница разбивается на два отрезка точками A и B , причем один из них лежит на границе области Π , а каждой точке второго соответствует окружность векторов скорости. Разобьем область $D \setminus \{A, B\}$ на отрезки, начала которых лежат на одной границе, а концы – на другой (рис. 3.31, б). Как и в случае области K_2 , прообраз каждого такого отрезка разбиения гомеоморфен двумерному диску D^2 . Следовательно, прообраз области D гомеоморфен $D^2 \times [A, B]$, где границы $D^2 \times \{A\}$ и $D^2 \times \{B\}$ стянуты в точку или на отрезок, т.е. трехмерному диску (рис. 3.31, в). Таким образом, по предположению индукции, прообраз области Π' гомеоморфен

$$\underbrace{S^2 \times S^1 \# \dots \# S^2 \times S^1}_{k'} \setminus D^3.$$

Пусть теперь области Π соответствует $k + 1$ дырка. Выберем на ее внешней границе точки A и B и разобьем ее на две области Π_1 и Π_2 стягиваемым отрезком AB так, чтобы область Π_1 содержала k “дырок”, а область Π_2 – одну “дырку” (рис. 3.31, г). Согласно доказанному выше, прообразы этих областей гомеоморфны

$$\underbrace{S^2 \times S^1 \# \dots \# S^2 \times S^1}_k \setminus D^3 \quad \text{и} \quad S^2 \times S^1 \setminus D^3$$

соответственно. Следовательно, прообразом области Π является склейка этих двух пространств по граничной сфере, что гомеоморфно связной сумме $\underbrace{S^2 \times S^1 \# \dots \# S^2 \times S^1}_{k+1}$.

Теорема доказана. □

Замечание 3.22. Эта теорема схожа с теоремой Смейла из динамики твердого тела. Она гласит следующее: рассмотрим образ изоэнергетического многообразия Q^3 при его проекции на сферу Пуассона. Если этот образ покрывает всю сферу, то Q^3 гомеоморфно проективному пространству $\mathbb{R}P^3$; если образ гомеоморфен сфере с одной дыркой, то Q^3 гомеоморфно сфере S^3 ; если образ содержит $m > 1$ дырок, то Q^3 гомеоморфно связной сумме $\underbrace{S^2 \times S^1 \# \dots \# S^2 \times S^1}_{m-1}$.

Замечание 3.23. Заметим, что образ изоэнергетического многообразия $p(Q^3)$ является объединением областей возможного движения для всевозможных значений интеграла f . Следовательно, в каждом конкретном случае конфигурации многочлена V мы независимо строим инвариант Фоменко–Цишанга и определяем тип многообразия Q^3 , который в частности и определяется этим инвариантом. Иными словами, мы получили наглядный способ определения типа Q^3 , соответствующего некоторой меченой молекулой (определенного вида), с помощью бильярда в эллипсе.

Глава 4

Четырехмерные полулокальные особенности биллиардов с потенциалом

В предыдущих главах 2 и 3 была исследована глобальная структура слоения Лиувилля интегрируемых биллиардов с потенциалом на неособых изоэнергетических поверхностях Q_h^3 . Иными словами, мы специально избегали случаев, при которых значения первых интегралов H и F являются особыми. Эти значения соответствуют точкам пересечения и касания бифуркационных дуг в образе отображения момента. Теперь изучим структуру слоения четырехмерных окрестностей особых слоев, соответствующих данным особым значениям интегралов. Настоящая глава посвящена двум сюжетам. В первом разделе мы опишем полулокальные особенности эллиптического биллиарда с потенциалом малой степени. Ограничение на сложность исходит из соображений, аналогичных описанному в пункте 3.2.1: с ростом степени потенциала количество различных случаев увеличивается экспоненциально. Второй раздел посвящен реализации фокальной особенности с помощью биллиардных книжек, снабженных потенциалом Гука. Этот сюжет является одним из ряда работ, преследующих глобальную цель – описать всевозможные структуры вполне интегрируемых систем посредством биллиардов и их обобщений. Напомним, что биллиард есть кусочно-гладкая интегрируемая система. Следовательно, мы не можем использовать фундаментальные результаты, изложенные в разделе 1.4 первой главы, в полном объеме, т.к. они справедливы для гладких систем.

4.1 Полулокальные особенности эллиптического биллиарда с потенциалом четвертой степени

Данный раздел является идейным продолжением пункта 3.2.1. Здесь мы будем использовать результаты этого пункта, а именно, построенные бифуркационные диаграммы. Более точно, нас будет интересовать локальное строение диаграмм в окрестности особых значений первых интегралов. Как следствие, терминология, используемая в этом разделе, продолжает терминологию

пункта 3.2.1: обозначения бифуркационных кривых, параметров потенциала, многочлена V из формулы разделения переменных.

4.1.1 Структура слоения Лиувилля невырожденных особенностей ранга 0

Найдем все точки фазового многообразия M^4 , в которых не нарушается гладкость и ранг системы дифференциалов dH и dF равен 0. Для этого распишем эти дифференциалы.

$$\begin{aligned} dH &= \left(p_x, \quad p_y, \quad 4c_3x(x^2 + y^2 - a - b) + 2c_3bx + 2c_2x, \quad 4c_3y(x^2 + y^2 - a - b) + 2c_3ay + 2c_2y \right) \\ dF &= \left(bp_x - y(yp_x - xp_y), \quad ap_y + x(yp_x - xp_y), \right. \\ &\quad p_y(yp_x - xp_y) + 2c_3x(ay^2 + bx^2 - ab) + 2c_3bx(x^2 + y^2 - a - b) + 2c_2bx, \\ &\quad \left. -px(yp_x - xp_y) + 2c_3y(ay^2 + bx^2 - ab) + 2c_3ay(x^2 + y^2 - a - b) + 2c_2ay \right) \end{aligned}$$

Приравнивая полученные выражения к нулю, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} p_x = p_y = 0 \\ 2c_3x(x^2 + y^2 - a - b) + c_3bx + c_2x = 0 \\ 2c_3y(x^2 + y^2 - a - b) + c_3ay + c_2y = 0 \\ c_3x(ay^2 + bx^2 - ab) + c_3bx(x^2 + y^2 - a - b) + c_2bx = 0 \\ c_3y(ay^2 + bx^2 - ab) + c_3ay(x^2 + y^2 - a - b) + c_2ay = 0 \end{cases}$$

Решениями этой системы при $c_3 \neq 0$ являются точки

$$P_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad P_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = \frac{a}{2} + b - \frac{c_2}{2c_3} \end{cases} \quad P_3 : \begin{cases} x^2 = a + \frac{b}{2} - \frac{c_2}{2c_3} \\ y = 0 \end{cases}$$

При $c_3 = 0$ решением является лишь первая точка P_1 .

Определим теперь, являются ли полученные критические точки невырожденными, т.е. подалгебра, порожденная операторами $\langle A_H = \Omega^{-1}d^2H, A_F = \Omega^{-1}d^2F \rangle$, является двумерной и картановской. Напомним, что подалгебра \mathfrak{h} полупростой алгебры \mathfrak{g} (в нашем случае это $sp(4, \mathbb{R})$) называется *картановской*, если это максимальная коммутативная подалгебра, состоящая из полупростых элементов (для которых присоединенный оператор ad_x диагонализуемый). Поступим согласно критерию, описанному в первой главе. Вычислим вторые дифференциалы. В первой точке P_1 они имеют вид

$$d^2H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4c_3a - 2c_3b + 2c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2c_3a - 4c_3b + 2c_2 \end{pmatrix}$$

$$d^2F = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4c_3ab - 2c_3b^2 + 2c_2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2c_3a^2 - 4c_3ab + 2c_2a \end{pmatrix}$$

Следовательно, образующие матрицы A_H и A_F имеют вид

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4c_3a + 2c_3b - 2c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2c_3a + 4c_3b - 2c_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4c_3ab + 2c_3b^2 - 2c_2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2c_3a^2 + 4c_3ab - 2c_2a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Операторы линейно зависимы, если $p = 4c_3a + 2c_3b - 2c_2 = 0$ или $q = 2c_3a + 4c_3b - 2c_2 = 0$. В противном случае точка невырождена, а собственные значения матрицы $\lambda A_H + \mu A_F$ имеют вид

$$t_{1,2} = \pm(\lambda + a\mu)\sqrt{q} \quad t_{3,4} = \pm(\lambda + b\mu)\sqrt{p}.$$

Следовательно, точка имеет тип центр-центр при отрицательных значениях p и q , тип седло-седло при положительных и тип центр-седло при различных знаках значений p и q .

Аналогично для второй точки P_2 образующие матрицы имеют вид

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2c_3(a - b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4c_2 - 2c_3(2a + 4b) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (c_2 - c_3a)(a - b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(4c_2 - 2c_3(2a + 4b)) \\ \frac{c_2}{2c_3} - \frac{a}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Операторы независимы при любой конфигурации параметров c_2 и c_3 . Обозначим $p = 4c_2 - 2c_3(2a + 4b)$ и $q = \frac{c_2}{2c_3} - \frac{a}{2}$. Тогда собственные числа матрицы $\lambda A_H + \mu A_F$ примут вид

$$t_{1,2} = \pm(\lambda + q\mu)\sqrt{2c_3(a - b)} \quad t_{3,4} = \pm(\lambda + a\mu)\sqrt{p}.$$

Заметим, что $p = -8c_3y^2$. Следовательно, знаки подкоренных выражений собственных чисел всегда различны. Иными словами, точка имеет тип центр-седло.

Наконец, образующие матрицы для третьей точки P_3 имеют вид

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4c_2 - 8c_3a + 4c_3b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2c_3(b-a) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b(-4c_2 + 8c_3a + 4c_3b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(-c_2 + c_3b)(b-a) \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_2}{2c_3} - \frac{b}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Операторы линейно зависимы, если $c_2 = 3c_3$. В противном случае, как и ранее, обозначим $p = 4c_2 - 8c_3a - 4c_3b$ и $q = \frac{c_2}{2c_3} - \frac{b}{2}$. Тогда собственные числа примут вид

$$t_{1,2} = \pm(\lambda + q\mu)\sqrt{2c_3(b-a)} \quad t_{3,4} = \pm(\lambda + b\mu)\sqrt{p}.$$

Осталось заметить, что $p = -8c_3x^2$. Следовательно, знаки подкоренных выражений собственных чисел совпадают, а точки имеет тип центр-центр при $c_3 > 0$ или седло-седло при $c_3 < 0$.

Найдем теперь все точки в фазовом многообразии M^4 , в которых гладкость системы нарушается (т.е. точки, являющиеся прообразами точек границы при проекции на бильярд) и которые являются точками равновесия системы (в таких точках система ведет себя схоже с точками ранга 0 в гладком случае). Иными словами, найдем все точки на границе бильярда, в которых вектор потенциальной силы $\vec{F}_W = -dW$ сонаправлен с вектором нормали $n = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$.

Имеем

$$\begin{cases} ay^2 + bx^2 - ab = 0 \\ [\vec{F}_W \times n] = 0 \\ (\vec{F}_W, n) > 0 \end{cases}$$

Решением этой системы являются точки $P_4 : x = 0, y^2 = b$ при $c_2 < c_3a$; $P_5 : y = 0, x^2 = a$ при $c_2 < c_3b$ и $P_6 : x^2 = \frac{1}{a-b}(a^2 - \frac{c_2a}{2c_3}), y_2 = \frac{1}{a-b}(\frac{c_2b}{2c_3} - b^2)$ при $\frac{c_2}{2c_3} \in (b, a)$ и $c_2 < 0$. Тип этих точек нельзя установить аналитически, как это было в гладком случае. Тем не менее, будет показано, что в терминах слоения Лиувилля точки P_4 и P_5 ведут себя как точки типа центр-центр или центр-седло (в зависимости от знака параметра c_3), а точка P_6 ведет себя как точка типа центр-седло.

Изучим теперь структуру слоений Лиувилля четырехмерных окрестностей особых слоев, содержащих найденные точки ранга 0. Докажем следующую теорему.

Теорема 4.1. *Невырожденные особые точки ранга 0 эллиптического бильярда с потенциалом четвертого порядка имеют тип центр-центр, центр-седло или седло-седло. Слоение Лиувилля четырехмерной окрестности точек центр-центр послойно гомеоморфно прямому*

произведению двух 2-атомов A . Слоение Лиувилля окрестностей слоев, содержащих точки центр-седло, послойно гомеоморфно прямому произведению 2-атома A и одного из 2-атомов B, B_2, C_2 или C_4 . Слоение Лиувилля окрестностей слоев, содержащих точки седло-седло, послойно гомеоморфно почти прямому произведению $B \times C_2/\mathbb{Z}_2, B_2 \times C_2/\mathbb{Z}_2$ или $B \times C_4/\mathbb{Z}_2$.

Доказательство. Точка P_1

Первое утверждение теоремы уже было частично доказано для точек P_1, P_2 и P_3 . Рассмотрим точку P_1 , при этом $2c_3a + c_3b - c_2 < 0$ и $c_3a + 2c_3b - c_2 < 0$, т.е. случай центр-центр. Вычислим значения интегралов в этой точке $H(P_1) = h_1, F(P_1) = f_1$. Заметим, что для таких значений многочлен $V(t)$ имеет корни $t = -a$ и $t = -b$, при этом в точке $-a$ он возрастает, а в точке $-b$ — убывает. На рис. 4.1,а изображен график этого многочлена. Область возможного движения состоит лишь из одной точки $(0, 0)$. Из построенных в пункте 3.2.1 бифуркационных диаграмм заметим, что образ отображения момента в окрестности точки (h_1, f_1) заключен в угле между лучами прямых $f = l_{-a}(h)$ и $f = l_{-b}(h)$ (см. рис. 4.1,б). Рассмотрим прямоугольную окрестность вершины этого угла $O(h_1, f_1)$. Введем на ней координатную сетку, заданную прямыми двух видов:

$$f = l_{\varepsilon_1}(h) := -\varepsilon_1 h + c_2 \varepsilon_1^2 + c_3 \varepsilon_1^3, \quad f = l_{\varepsilon_2}(h) := -\varepsilon_2 h + c_2 \varepsilon_2^2 + c_3 \varepsilon_2^3,$$

при ε_1 , близком к $-a$, и ε_2 , близком к $-b$. Область возможного движения, соответствующая точке пересечения прямых этой сетки, ограничена софокусным эллипсом с параметром $\lambda = \varepsilon_2$ и софокусной гиперболой с параметром $\lambda = \varepsilon_1$ (рис. 4.1,с). На прямой $l_{-a}(h)$ эта область вырождается в отрезок оси $x = 0$, который соответствует критической окружности в M^4 , а на прямой $l_{-b}(h)$ она вырождается в отрезок фокальной оси $y = 0$, который также соответствует критической окружности. Найдем теперь прообраз окрестности $\mathcal{F}^{-1}(O(h_1, f_1))$ в фазовом

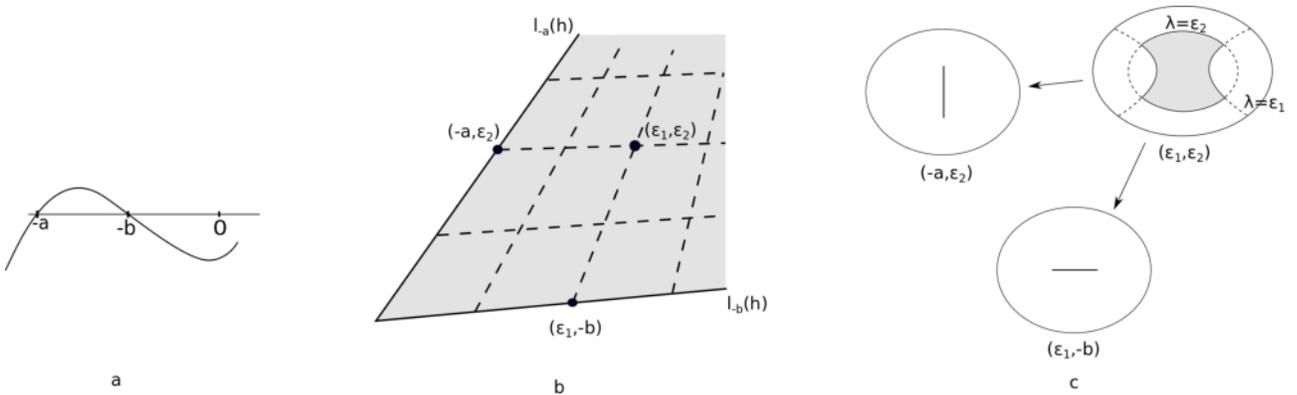


Рис. 4.1: Случай центр-центр точки P_1 . На рис. а изображен график многочлена $V(t)$. На рис. б изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_1, f_1) и система координат $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ в ней. На рис. с изображено изменение области возможного движения при $\varepsilon_1 \rightarrow -a$ и $\varepsilon_2 \rightarrow -b$.

пространстве M^4 . Разобьем произвольную регулярную область возможного движения на дуги

софокусных эллипсов, каждая из которых оснащена четырьмя векторами скорости в соответствии с системой 3.1.14 (см. рис. 4.2). Прообразом внутренности каждой такой дуги являются четыре интервала $(-a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1)$, соответствующих четырем векторам скорости. При этом два интервала, соответствующие векторам 1 и 4, должны быть склеены на своих границах в одну окружность. Аналогично, интервалы, соответствующие векторам 2 и 3, также должны быть склеены. Следовательно, в прообразе всей расслоенной окрестности лежат два цилиндра, полученные прямым умножением полученных окружностей на отрезок $[-b - \varepsilon_2, b + \varepsilon_2]$, которые, в свою очередь, должны быть склеены по своим граничным окружностям. Полученный тор можно представить в виде прямого произведения двух пар склеенных отрезков длины $2(a + \varepsilon_1)$ и $2(b + \varepsilon_2)$, причем попарное произведение отрезков из каждой пары взаимно-однозначно проецируется на область возможного движения. Следовательно, прообраз отрезка прямой $f = l_{\varepsilon_2}(h)$

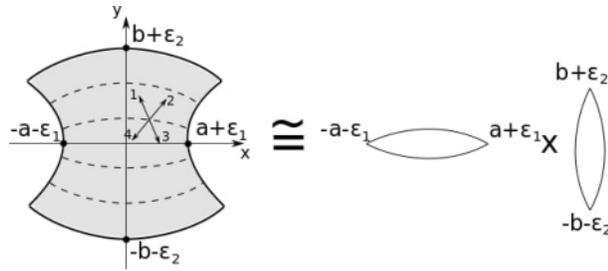


Рис. 4.2: Область возможного движения, разбитая на оснащенные векторами скорости дуги эллипсов, и ее прообраз в фазовом пространстве.

из окрестности $O(h_1, f_1)$ послойно гомеоморфен прямому произведению окружности, склеенной из пары отрезков длины $2(b + \varepsilon_2)$, и 2-атома A , расслоенного на пары отрезков длины $2(a + \varepsilon_1)$ при $\varepsilon_1 \rightarrow -a$. Прообраз же всей окрестности $O(h_1, f_1)$, разбитой на такие отрезки, послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома A на 2-атом A , расслоенный на окружности длины $2(b + \varepsilon_2)$ при $\varepsilon_2 \rightarrow -b$ (см. рис. 4.3).

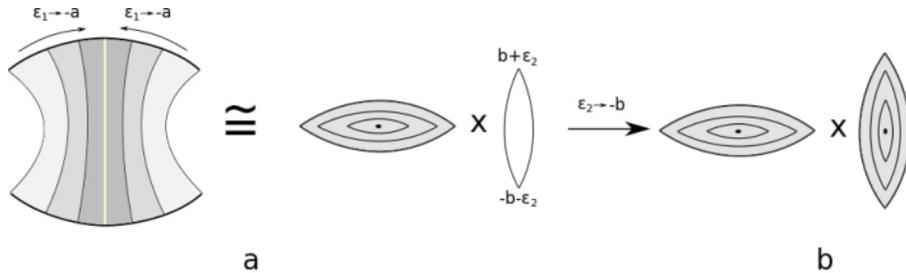


Рис. 4.3: На рис. а изображено изменение области возможного движения при $\varepsilon_1 \rightarrow -a + 0$, а также прообраз отрезка прямой $f = l_{\varepsilon_2}(h)$. На рис. б изображен прообраз всей окрестности $O(h_a, f_a)$.

Теперь рассмотрим случай центр-седло точки P_1 , для которого $2c_3a + c_3b - c_2 < 0$ и $c_3a + 2c_3b - c_2 > 0$. Многочлен $V(t)$ при соответствующих значениях интегралов $H = h_1, F = f_1$ имеет

корни $-a$ и $-b$, в которых он возрастает (см. рис. 4.4, *a*). Бифуркационная диаграмма в окрестности точки (h_1, f_1) состоит из двух прямых $f = l_{-a}(h)$ и $f = l_{-b}(h)$. Как и в прошлом случае, введем на этой окрестности координатную сетку, заданную прямыми двух видов: $f = l_{\varepsilon_1}(h)$ при ε_1 , близком к $-a$, и $f = l_{\varepsilon_2}(h)$ при ε_2 , близком к $-b$. Область возможного движения, соответствующая координатам $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, состоит из нескольких компонент связности, ограниченных гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$ при $\varepsilon_1 > -a$, некоторой гиперболой $\lambda = \lambda_0$ и еще одной квадрикой $\lambda = \varepsilon_2$ (рис. 4.4, *c*). Прообраз же окрестности $\mathcal{F}^{-1}(O(h_1, f_1))$ состоит из трех компонент связности, при этом точка P_1 лежит в той компоненте, которая не соответствует перестройке области возможного движения через фокусы биллиарда. Образ этой компоненты при отображении момента лежит ниже прямой $l_{-a}(h)$, а область возможного движения ограничена гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$, а также эллипсом $\lambda = \varepsilon_2$ в случае $\varepsilon_2 > -b$. Разобьем эту область на дуги софокусных гипербол,

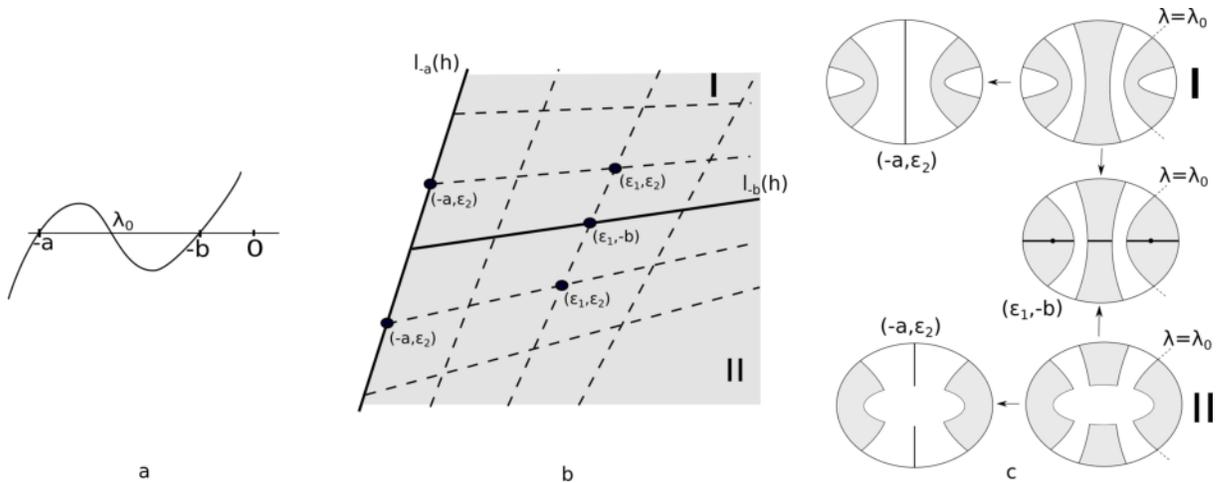


Рис. 4.4: Случай центр-седло точки P_1 . На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_1, f_1) и система координат $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ в ней. На рис. *c* изображено изменение области возможного движения при $\varepsilon_1 \rightarrow -a + 0$ и $\varepsilon_2 \rightarrow -b \pm$.

как изображено на рис. 4.5, *a*. При $\varepsilon_2 > -b$ одна гипербола разбивается на две дуги, и прообраз каждой такой дуги состоит из четырех отрезков вида $[b + \varepsilon_2, b]$, склеенных, как и ранее, в две окружности. Следовательно, прообраз всей области возможного движения, состоящей из двух компонент, гомеоморфен прямому произведению окружности, склеенной из пары отрезков $[-a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1]$, и двух окружностей, также склеенных из пар отрезков длины $-\varepsilon_2$. При $\varepsilon_2 = -b$ две дуги гиперболы объединяются в одну, а в ее прообразе лежат две пары окружностей длины ε_2 , склеенных в одну “восьмерку” суммарной длины $-2\varepsilon_2$. При $\varepsilon_2 < -b$ прообраз дуги софокусной гиперболы, как и ранее, состоит из двух окружностей, склеенных из четырех отрезков длины $2b$. Следовательно, прообраз отрезка $f = l_{\varepsilon_1}(h)$ в окрестности $O(h_1, f_1)$ имеет вид прямого произведения окружности, склеенной из двух отрезков длины $2(a + \varepsilon_1)$, и 2-атома B , расслоенного на окружности, полученные склейкой двух отрезков, и особый слой, получен-

ный склейкой четырех отрезков. Прообраз же всей окрестности $O(h_1, f_1)$ послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома B на 2-атом A , расслоенный на пары отрезков длины $2(a + \varepsilon_1)$ при $\varepsilon_1 \rightarrow -a$ (см. рис. 4.5, b).

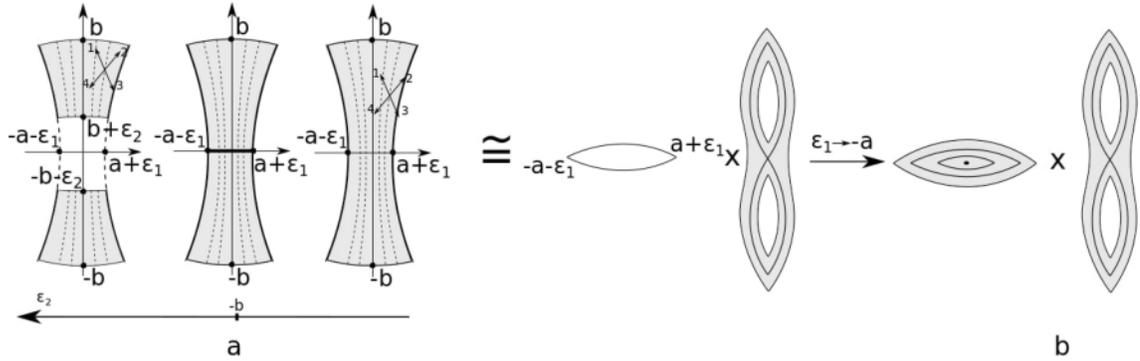


Рис. 4.5: На рис. а изображено изменение области возможного движения в зависимости от значения переменной ε_2 , а также проекция соответствующего отрезка прямой $f = l_{\varepsilon_1}(h)$. На рис. б изображен прообраз всей окрестности $O(h_a, f_a)$.

Аналогично рассмотрим случай центр-седло точки P_1 при $2c_3a + c_3b - c_2 > 0$ и $c_3a + 2c_3b - c_2 < 0$. На этот раз многочлен $V(t)$ в своих корнях $-a$ и $-b$ убывает. Образ отображения момента в окрестности соответствующего уровня интегралов (h_1, f_1) лежит выше прямой $f = l_{-b}(h)$, при этом прямая $f = l_{-a}(h)$ принадлежит бифуркационной диаграмме. Как и ранее, введем координаты $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ в окрестности точки (h_1, f_1) . Область возможного движения ограничена эллипсом $\lambda = \varepsilon_2$, некоторой гиперболой $\lambda = \lambda_0$, а также гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$ при $\varepsilon_1 > -a$. Повторяя те же рассуждения с заменой ε_1 на ε_2 и с разбиением области возможного движения на дуги софокусных эллипсов получим, что прообраз окрестности точки (h_1, f_1) , как и в прошлом случае, послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атомов A и B .

Наконец, рассмотрим случай седло-седло точки P_1 , которому соответствуют неравенства $2c_3a + c_3b - c_2 > 0$ и $c_3a + 2c_3b - c_2 > 0$. Многочлен $V(t)$, как и ранее, имеет корни в точках $-a$ и $-b$, при этом в точке $-a$ он убывает, а в точке $-b$ возрастает (см. рис. 4.7, a). Как и ранее, введем в окрестности соответствующей точки (h_1, f_1) в образе отображения момента координаты $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Камере I образа отображения момента, заданной неравенствами $f < l_{-a}(h)$ и $f < l_{-b}(h)$, соответствует область возможного движения, лежащая вне эллипса $\lambda = \varepsilon_2$. Камере II, заданной неравенствами $f < l_{-a}(h)$ и $f > l_{-b}(h)$, соответствует область, ограниченная гиперболой $\lambda = \varepsilon_2$. Камере III, заданной неравенствами $f > l_{-a}(h)$ и $f < l_{-b}(h)$, соответствует область, ограниченная эллипсом $\lambda = \varepsilon_2$ и гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$. Наконец, камере IV, заданной неравенствами $f > l_{-a}(h)$ и $f > l_{-b}(h)$, соответствует область, лежащая между двумя гиперболами $\lambda = \varepsilon_2$ и $\lambda = \varepsilon_1$. Приведенные области возможного движения изображены на рис. 4.7, c . Разрежем каждую такую область на три подобласти фиксированной гиперболой $\lambda = \lambda_0 := (-a - b)/2$ (обозначим их числами 1, 2 и 3). Рассмотрим область из камеры III и ее центральную подоб-

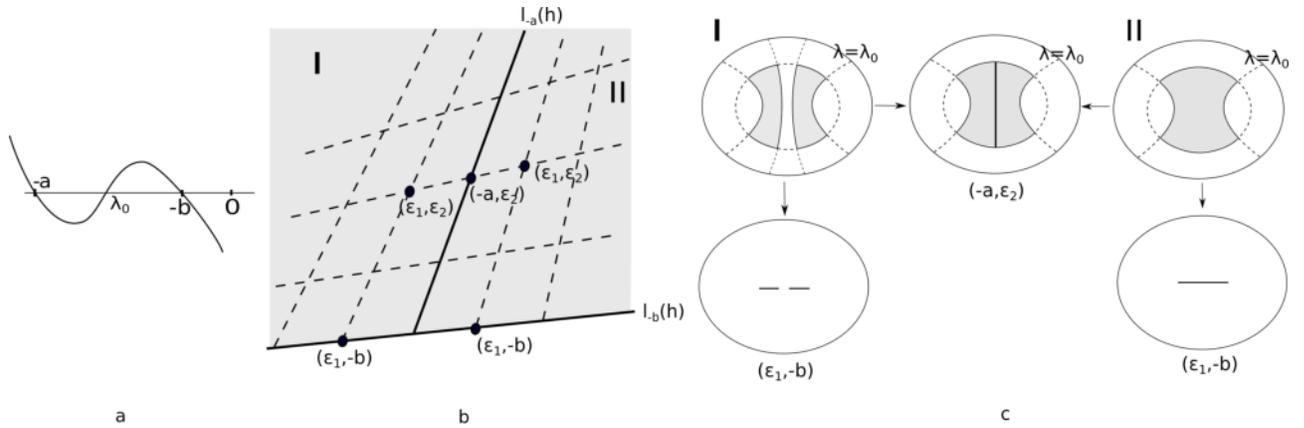


Рис. 4.6: Случай центр-седло точки P_1 . На рис. а изображен график многочлена $V(t)$. На рис. б изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_1, f_1) и система координат $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ в ней. На рис. с изображено изменение области возможного движения при $\varepsilon_1 \rightarrow -a \pm 0$ и $\varepsilon_2 \rightarrow -b - 0$.

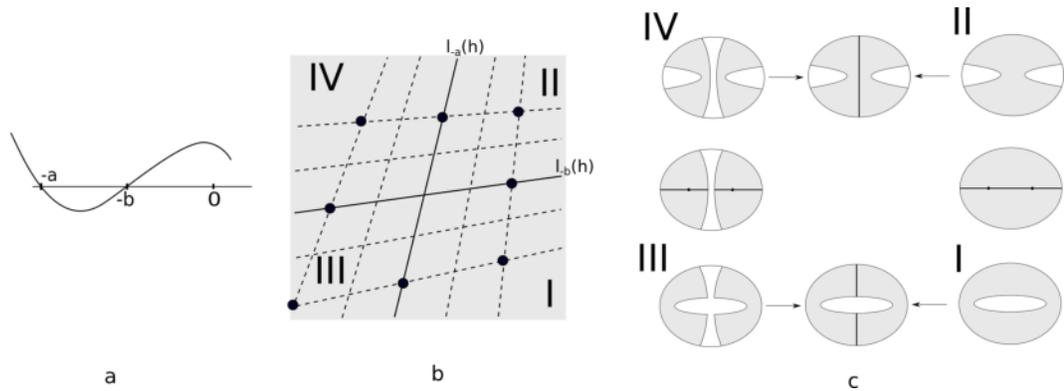


Рис. 4.7: Случай седло-седло точки P_1 . На рис. а изображен график многочлена $V(t)$. На рис. б изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_1, f_1) , разбитый на камеры, и система координат $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ в ней. На рис. с изображено изменение областей возможного движения, соответствующих камерам.

ласть 2. Разобьем ее на дуги софокусных гипербол. Как и ранее, в прообразе каждой такой дуги лежат четыре отрезка вида $\pm[b + \varepsilon_2, b]$, которые склеиваются в две окружности. В прообразе же каждой из четырех компонент связности подобласти 2 лежат две такие окружности, прямо умноженные на два отрезка $\pm[a + \varepsilon_1, a + \lambda_0]$, которые также склеены в одном из концов $\pm(a + \varepsilon_1)$. При переходе из камеры III в камеру IV компоненты связности подобласти 2 сливаются в две по отрезкам прямой $y = 0$, а в прообразе дуги гиперболы лежат четыре отрезка, склеенных в одну “восьмерку” суммарной длины $-2\varepsilon_2 = 2b$. В случае же камеры IV в прообразе гиперболы лежит окружность, склеенная из двух отрезков длины $2b$. Следовательно, при $\varepsilon_1 > -a$ часть прообраза отрезка прямой $f = l_{\varepsilon_1}(h)$, соответствующая подобласти 2 на бильярде, послойно гомеоморфна прямому произведению 2-атома B , расслоенного на склеенные отрезки длины $-\varepsilon_2$

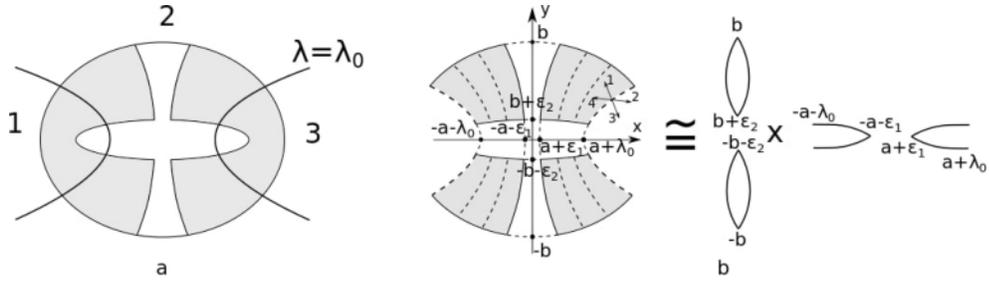


Рис. 4.8: На рис. а изображено разбиение области возможного движения на три части. На рис. б изображен прообраз части 2 в фазовом пространстве для области возможного движения, соответствующей камере III.

и $-2\varepsilon_2$, и двух отрезков, склеенных из двух пар вида $[\lambda_0 + a, \varepsilon_1 + a]$ и $[-a - \varepsilon_1, -a - \lambda_0]$ по конечной точке $\pm(a + \varepsilon_1)$. Заметим, что на границе камер III и I, а также IV и II, компоненты связности области возможного движения сливаются по отрезкам прямой $y = 0$. Следовательно, при $\varepsilon_1 = -a$ та же часть прообраза отрезка в окрестности $O(h_1, f_1)$ послойно диффеоморфна прямому произведению того же 2-атома B на “крест” общей длины $2(a + \lambda_0)$, склеенный из четырех отрезков. Аналогично можно показать, что при $\varepsilon_1 < -a$ этот “крест” распадается в два отрезка длины $\varepsilon_1 = -a$, а прообраз всей окрестности $O(h_1, f_1)$, с учетом ограничения на подобласть 2 на бильярде, гомеоморфен прямому произведению 2-атома B на расслоенную 2-окрестность “креста” (см. рис. 4.9, b).

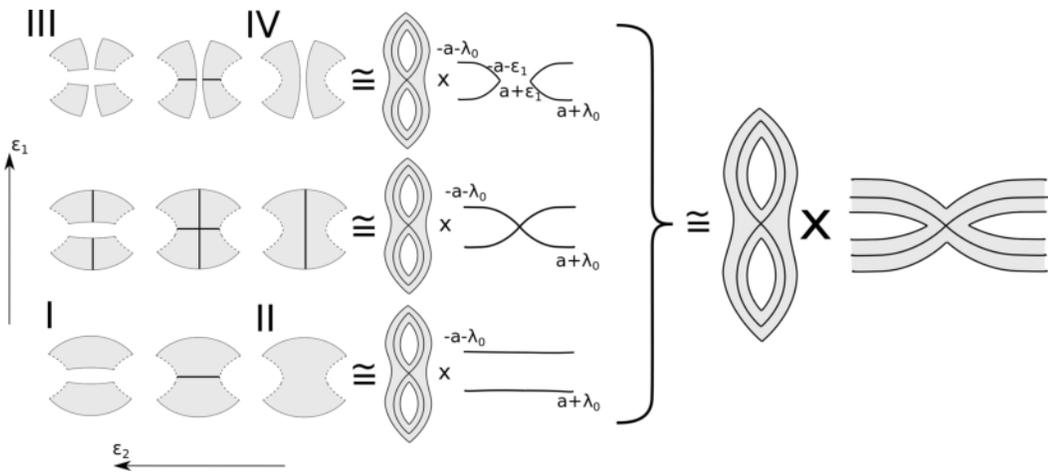


Рис. 4.9: Изменение части 2 области возможного движения в зависимости от значений переменных ε_1 и ε_2 , а также соответствующая часть прообраза окрестности $O(h_1, f_1)$.

Разбив каждую область возможного движения на три части, мы, тем самым, разбили весь прообраз окрестности $O(h_1, f_1)$ на соответствующие три части. Ранее мы изучили часть 2. Изучим теперь часть 1. Подобласть возможного движения ограничена гиперболой $\lambda = \lambda_0$ и квадратикой $\lambda = \varepsilon_2$. При движении по прямой $f = l_{\varepsilon_1}(h)$ при любом ε_1 происходит перестройка подобласти через фокус бильярда. В лемме 3.15 главы 3 мы показали, что в прообразе отрезка

такой прямой лежит 2-атом B , прямо умноженный на отрезок (см. рис. 4.10, *a*). Более того, если гипербола $\lambda = \lambda_0$ является границей биллиарда, такой трехмерный “цилиндр” склеивается по своим граничным 2-атомам B с перекруткой, образуя 3-атом A^* . Следовательно, часть 1 прообраза окрестности $O(h_1, f_1)$ послойно гомеоморфна прямому произведению 2-атома B и прямоугольника, тривиально расслоенного на отрезки. Аналогично устроена часть 3 прообраза. Таким образом, часть 1 с частью 2 (как и часть 2 с частью 3) склеены по своим трехмерным границам, учитывая описанную перекрутку на границе склейки. Иными словами, мы получили локально-тривиальное расслоение, в качестве слоя и базы которого выступает 2-атом B , при этом оно не является тривиальным. Осталось заметить, что оно послойно гомеоморфно почти прямому произведению 2-атомов $B \times C_2/\mathbb{Z}_2$, где группа \mathbb{Z}_2 образована инволюцией $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, порожденной центральной симметрией сомножителей, изображенной на рис. 4.10, *b*).

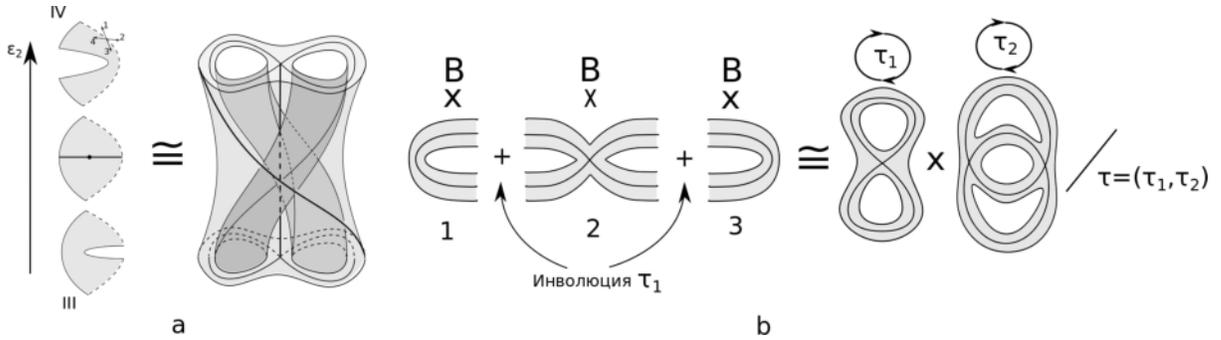


Рис. 4.10: На рис. *a* изображена бифуркация части 1 области возможного движения и соответствующий ей прообраз в фазовом пространстве. На рис. *b* изображен прообраз всей окрестности $O(h_1, f_1)$.

Точка P_2

Рассмотрим теперь точку P_2 при $c_3 < 0$. Вычислим соответствующие значения первых интегралов $H(P_2) = h_2$, $F(P_2) = f_2$ и подставим их в формулу многочлена $V(t)$. Оказывается, в таком случае он имеет два корня $t = -a$ и $t = t_1 = \frac{c_3 a - c_2}{2c_3}$. Многочлен возрастает в корне $-a$. Корень t_1 является кратным и лежит в интервале $(-b, 0)$. График многочлена $V(t)$ изображен на рис. 4.11, *a*. Образ отображения момента в окрестности $O(h_2, f_2)$ лежит ниже прямой $f = l_{-a}(h)$, при этом кривая $f = d_+(h)$ является дугой бифуркационной диаграммы. При $f < d_+(h)$ область возможного движения ограничена гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$ и двумя эллипсами $\lambda = \varepsilon_2$ и $\lambda = \varepsilon_3$. Разобьем ее на дуги софокусных гипербол. Как и ранее, в прообразе каждой такой дуги в M^4 лежат четыре отрезка, склеенные в две окружности. Следовательно, прообраз всей области возможного движения послойно гомеоморфен прямому произведению окружности, склеенной из двух отрезков $[-a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1]$ в граничных точках, и трех несвязных окружностей, каждая из которых также склеена из двух отрезков видов $[-b, -b - \varepsilon_3]$, $[-b - \varepsilon_2, b + \varepsilon_2]$ и $[b + \varepsilon_3, b]$. При $f = d_-(h)$ три компоненты области возможного движения сливаются в одну, а прообраз софокусной гиперболы гомеоморфен тройной “восьмерке”, склеенной из отрезков вида $[-b, -b - t_1]$, $[-b - t_1, b + t_1]$

и $[b + t_1, b]$. При $f > d_+(h)$ область возможного движения ограничена лишь гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$, а прообраз дуги разбиения гомеоморфен окружности, склеенной из двух отрезков общей длины $2b$. Следовательно, прообраз отрезка прямой $f = l_{\varepsilon_1}(h)$, лежащего в окрестности $O(h_2, f_2)$, послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома B_2 , расслоенного на склеенные отрезки, и окружности, склеенной из двух отрезков длины $2(a + \varepsilon_1)$. Прообраз же всей окрестности $O(h_2, f_2)$ послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома B_2 и 2-атома A , расслоенного на окружности длины $2(a + \varepsilon_1)$ при $\varepsilon_1 \rightarrow -a$ (см. рис. 4.11, d).

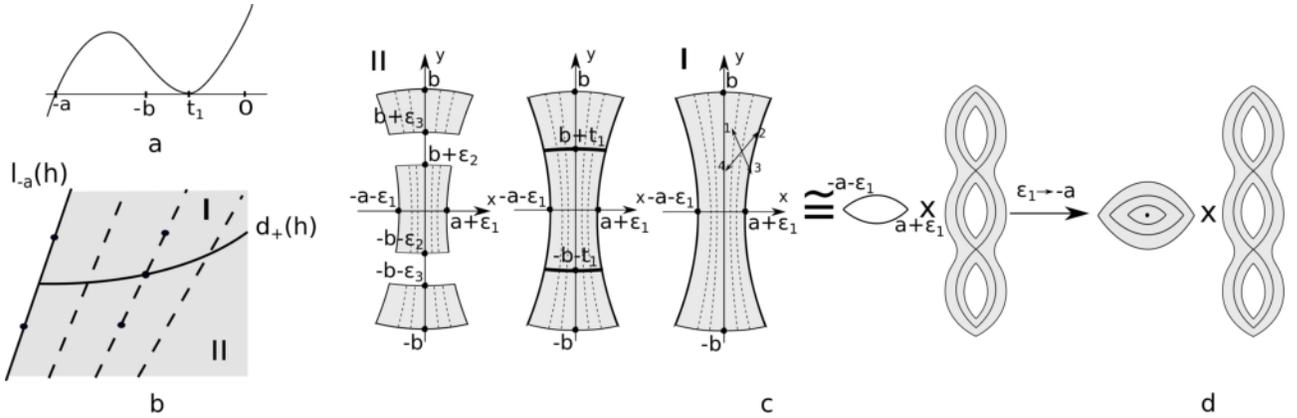


Рис. 4.11: Случай центр-седло точки P_2 при $c_3 < 0$. На рис. a изображен график многочлена $V(t)$. На рис. b изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_2, f_2) . На рис. c изображена бифуркация области возможного движения и соответствующий ей прообраз в фазовом пространстве. На рис. d изображен весь прообраз окрестности $O(h_2, f_2)$.

Теперь рассмотрим случай $c_3 > 0$ точки P_2 . Многочлен $V(t)$ также имеет два корня $t = -a$ и $t = t_1 \in (-b, 0)$, при этом в точке $-a$ он убывает (см. рис. 4.12, a). Образ отображения момента в окрестности точки (h_2, f_2) лежит выше кривой $f = d_-(h)$, при этом прямая $f = l_{-a}(h)$ принадлежит бифуркационной диаграмме (см. соответствующие диаграммы в пункте 3.2.1). Зададим в этой окрестности координаты (ε_1, δ) с помощью кривых

$$f = l_{\varepsilon_1}(h) := -\varepsilon_1 h + c_2 \varepsilon_1^2 + c_3 \varepsilon_1^3,$$

$$f = d_{\delta-}(h) = \frac{2c_3^3 + 9c_3 c_2 h - 2(c_3^2 - 12c_3^2 \delta^2 + 3c_2 h) \sqrt{c_3^2 - 3c_3^2 \delta^2 + 3c_2 h}}{27c_3^2}.$$

Область возможного движения ограничена двумя эллипсами $\lambda = \varepsilon_2 = -\frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{c_2}{2c_3} - \delta$, $\lambda = \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{c_2}{2c_3} + \delta$, а также гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$ при $\varepsilon_1 > -a$. Разобьем эту область на дуги софокусных эллипсов. При $\varepsilon_1 < -a$ в прообразе каждого такого эллипса лежат четыре непересекающихся окружности – его копии. Прообраз же всей области возможного движения гомеоморфен четырем цилиндрам, полученные прямым произведением эллипса на отрезок $[b + \varepsilon_2, b + \varepsilon_3]$ длины 2δ , которые, однако, нужно склеить друг с другом в два тора в соответствии с законом отражения на границе биллиарда. При $\varepsilon_1 = -a$ в прообразе эллипса лежат две пары пересекающихся в двух

точках окружностей. При $\varepsilon_1 > -a$ область возможного движения состоит из двух симметричных компонент, а в прообразе дуги софокусного эллипса лежат четыре половины эллипса, склеенные в две окружности. Следовательно, прообраз дуги кривой $f = d_{\delta-}(h)$, лежащей в окрестности точки (h_2, f_2) послойно гомеоморфен прямому произведению окружности, склеенной из двух отрезков длины 2δ , и 2-атома C_2 , расслоенного на эллипсы и склеенные половины эллипсов. Прообраз же всей окрестности $O(h_2, f_2)$, послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома C_2 на 2-атом A , расслоенный на окружности длины 2δ при $\delta \rightarrow +0$ (см. рис. 4.12, *d*).

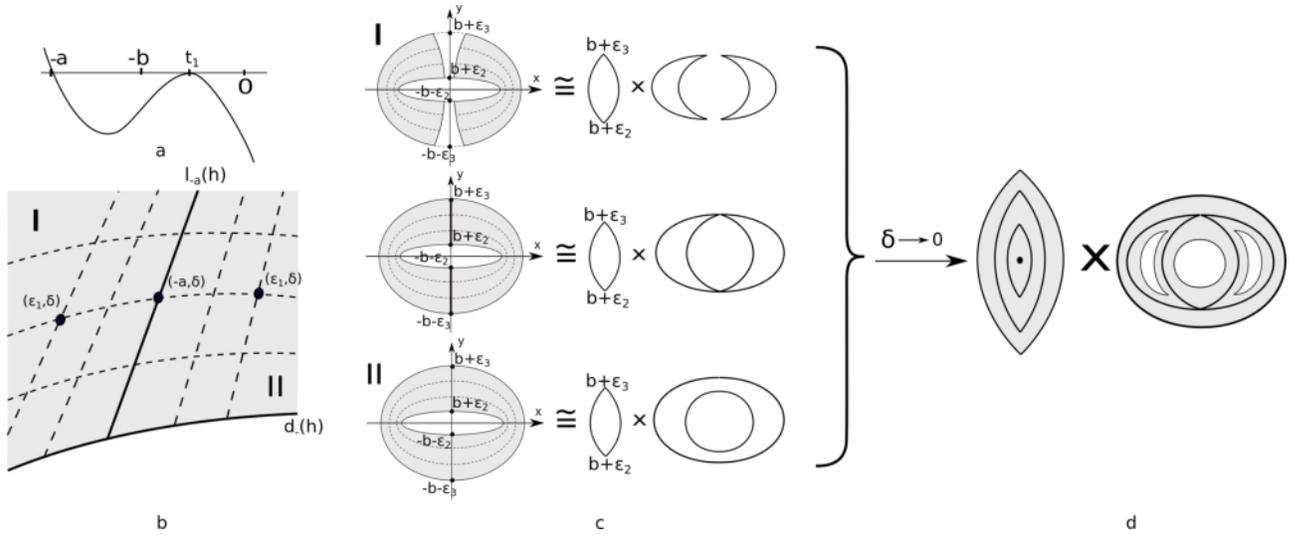


Рис. 4.12: Случай центр-седло точки P_2 при $c_3 > 0$. На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_2, f_2) и система координат (ε_1, δ) . На рис. *c* изображена бифуркация области возможного движения и соответствующий ей прообраз в фазовом пространстве. На рис. *d* изображен весь прообраз окрестности $O(h_2, f_2)$.

Точка P_3

Рассмотрим точку P_3 при $c_3 > 0$, т.е. случай центр-центр. Вычислим значения первых интегралов в этой точке $H(P_3) = h_3$ и $F(P_3) = f_3$ и подставим их в формулу многочлена $V(t)$. Рассмотрим подслучай $c_2 > 3c_3$. Тогда многочлен $V(t)$ имеет два корня $t = -b$ и $t = t_1 = \frac{c_3 b - c_2}{2c_3}$. При этом в корне $-b$ он убывает. Корень t_1 является кратным и лежит на интервале $(-a, -b)$. График многочлена $V(t)$ изображен на рис. 4.13, *a*. Образ отображения момента в окрестности точки (h_3, f_3) заключен в угле, образованном прямой $f = l_{-b}(h)$ и дугой кривой $f = d_+(h)$. Зададим в этой окрестности координаты (ε_2, δ) , заданные кривыми

$$f = l_{\varepsilon_2}(h) := -\varepsilon_2 h + c_2 \varepsilon_2^2 + c_3 \varepsilon_2^3,$$

$$f = d_{\delta+}(h) = \frac{2c_3^3 + 9c_3 c_2 h + 2(c_3^2 - 12c_3^2 \delta^2 + 3c_2 h) \sqrt{c_3^2 - 3c_3^2 \delta^2 + 3c_2 h}}{27c_3^2}.$$

Область возможного движения, соответствующая координате (ε_2, δ) , состоит из двух компонент связности и ограничена дугой софокусного эллипса $\lambda = \varepsilon_2$ и парой гипербол $\lambda = \varepsilon_3 =$

$-\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{c_2}{2c_3} - \delta$, $\lambda = \varepsilon_4 = -\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{c_2}{2c_3} + \delta$ (см. рис. 4.13, *b*). Рассмотрим правую компоненту. Разобьем ее на дуги софокусных гипербол. В прообразе каждой такой дуги лежат четыре отрезка $[-b - \varepsilon_2, b + \varepsilon_2]$, которые склеены в две непересекающиеся окружности по своим граничным точкам. В прообразе же всей компоненты области возможного движения лежат два цилиндра, полученных прямым произведением этих окружностей на отрезок $[a + \varepsilon_3, a + \varepsilon_4]$, при этом склеенных по своим граничным окружностям. Иными словами, прообраз гомеоморфен тору, являющемуся прямым произведением двух окружностей, склеенных из отрезков длины $2(b + \varepsilon_2)$ и 2δ . Следовательно, прообраз отрезка прямой $f = l_{\varepsilon_2}(h)$, лежащий в окрестности $O(h_3, f_3)$, послойно гомеоморфен прямому произведению окружности, склеенной из двух отрезков длины $2(b + \varepsilon_2)$, и 2-атома A , расслоенного на окружности длины 2δ при $\delta \rightarrow 0$. Прообраз же всей прямоугольной окрестности $O(h_3, f_3)$ послойно гомеоморфен прямому произведению двух 2-атомов A для каждой компоненты связности области возможного движения.

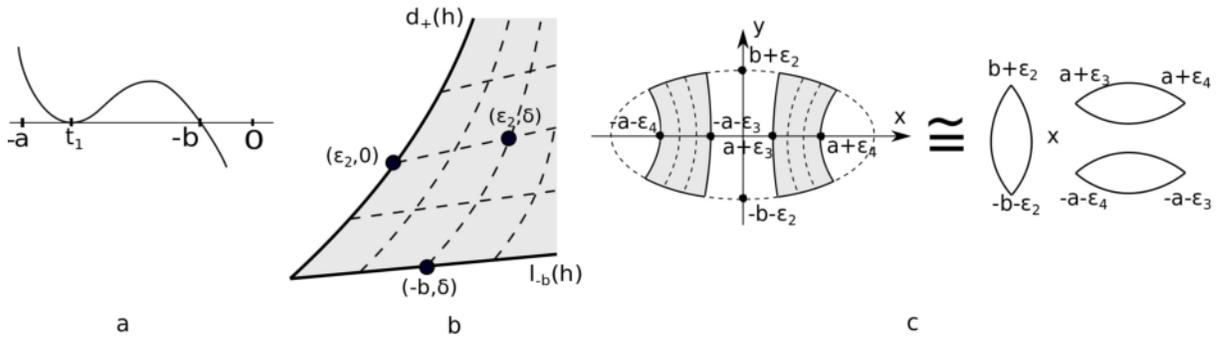


Рис. 4.13: Случай центр-центр точки P_3 . На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_2, f_2) и система координат (ε_2, δ) . На рис. *c* изображена область возможного движения и ее прообраз в фазовом пространстве.

Рассмотрим теперь подслучай $c_2 > 3c_3$, для которого кратный корень многочлена $V(t)$ лежит в интервале $(-b, 0)$. Образ отображения момента в окрестности точки (h_3, f_3) лежит в угле, образованном прямой $f = l_{-b}(h)$ и кривой $f = d_{-}(h)$. Введем в ней координаты (ε_2, δ) , заданные кривыми $f = l_{\varepsilon_2}(h)$ и $f = d_{\delta-}(h)$. Область возможного движения состоит из двух компонент связности и ограничена софокусной гиперболой $\lambda = \varepsilon_2$ и парой эллипсов $\lambda = \varepsilon_3 = -\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{c_2}{2c_3} - \delta$, $\lambda = \varepsilon_4 = -\frac{\varepsilon_2}{2} - \frac{c_2}{2c_3} + \delta$ (см. рис. 4.14, *c*). Повторяя предыдущие рассуждения с заменой разбиения на дуги софокусных эллипсов получим, что прообраз прямоугольной окрестности $O(h_3, f_3)$ также состоит из двух компонент связности, каждая из которых послойно гомеоморфна прямому произведению двух 2-атомов A .

Рассмотрим теперь случай седло-седло точки P_3 . Рассмотрим подслучай $c_2 < 3c_3$. Многочлен $V(t)$ на уровне интегралов (h_3, f_3) имеет два корня $t = -b$ и $t = t_1 = \frac{c_3 b - c_2}{2c_3}$. В корне $-b$ многочлен возрастает. Корень t_1 является кратным и лежит на интервале $(-a, -b)$. Бифуркационная диаграмма в окрестности точки (h_3, f_3) состоит из отрезка прямой $f = l_{-b}(h)$ и дуги кривой $f = d_{-}(h)$. Разобьем эту окрестность дугами диаграммы на четыре камеры, как показано на

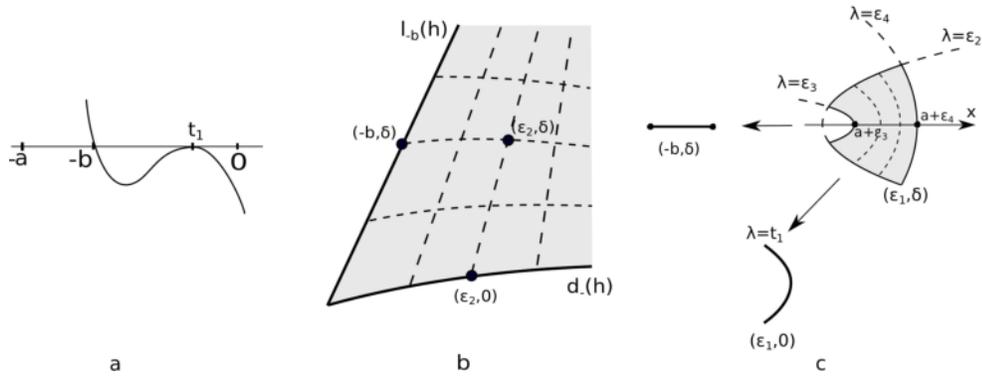


Рис. 4.14: Случай центр-центр точки P_3 . На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_2, f_2) и система координат (ε_2, δ) . На рис. *c* изображена бифуркация области возможного движения при изменении параметров ε_2 и δ .

рис. 4.15, *b*. Точкам камеры I соответствует область возможного движения, ограниченная эллипсом $\lambda = \varepsilon_2$. Камере II соответствует область, лежащая внутри гиперболы $\lambda = \varepsilon_2$. Область возможного движения камеры III ограничена софокусным эллипсом $\lambda = \varepsilon_2$ и двумя софокусными гиперболами $\lambda = \varepsilon_3$ и $\lambda = \varepsilon_4$. Область камеры IV ограничена тремя гиперболами $\lambda = \varepsilon_2$, $\lambda = \varepsilon_3$ и $\lambda = \varepsilon_4$. Разрежем теперь каждую из областей на три подобласти одной и той же гипер-

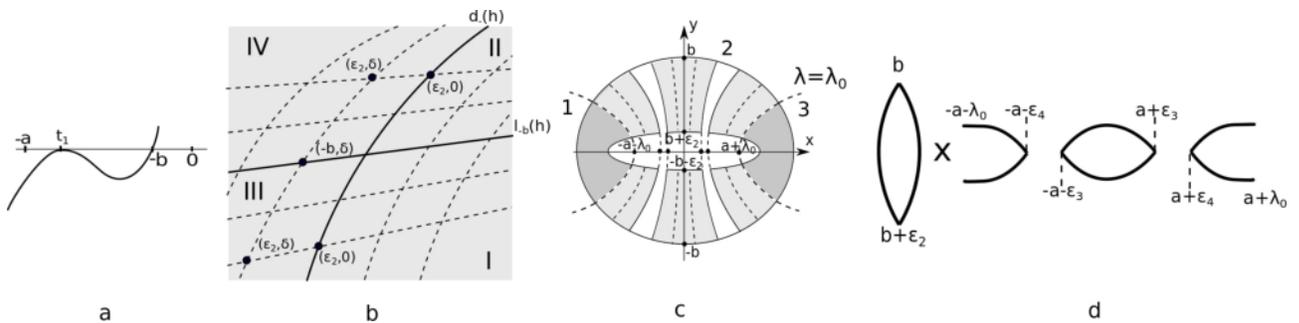


Рис. 4.15: Случай седло-седло точки P_3 . На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_2, f_2) и система координат (ε_2, δ) . На рис. *c* изображена область возможного движения камеры III, разбитая на три части софокусной гиперболой $\lambda = \lambda_0$. На рис. *d* изображен прообраз часть 2 этой области.

болой $\lambda = \lambda_0 = \frac{-a+t_1}{2}$ аналогично тому, как было сделано в случае седло-седло точки P_1 . Тем самым мы разрезали прообраз окрестности $O(h_3, f_3)$ в фазовом пространстве на три части. Заметим, что подобласти возможного движения 1 и 3 аналогичны тем же областям случая точки P_1 . Следовательно, части 1 и 3 прообраза $O(h_3, f_3)$ послойно гомеоморфны прямому произведению 2-атома B на прямоугольник, тривиально расслоенный на отрезки. Рассмотрим теперь подобласть возможного движения 2, соответствующую камере III образа отображения момента, и расслоим ее на дуги софокусных гипербол. В прообразе каждой такой дуги лежат четыре

отрезка вида $\pm[b + \varepsilon_2, b]$, склеенные в две окружности по граничным точкам. Прообраз же всей подобласти состоит из шести частей, две из которых гомеоморфны прямому произведению этой окружности длины $-\varepsilon_2$ и окружности, склеенной из двух отрезков вида $[-a - \varepsilon_3, a + \varepsilon_3]$, а четыре оставшихся гомеоморфны прямому произведению той же окружности на отрезок, склеенный из двух отрезков $[a + \varepsilon_4, a + \lambda_0]$ по одной из границ (рис. 4.16). Для значений интегралов, нахо-

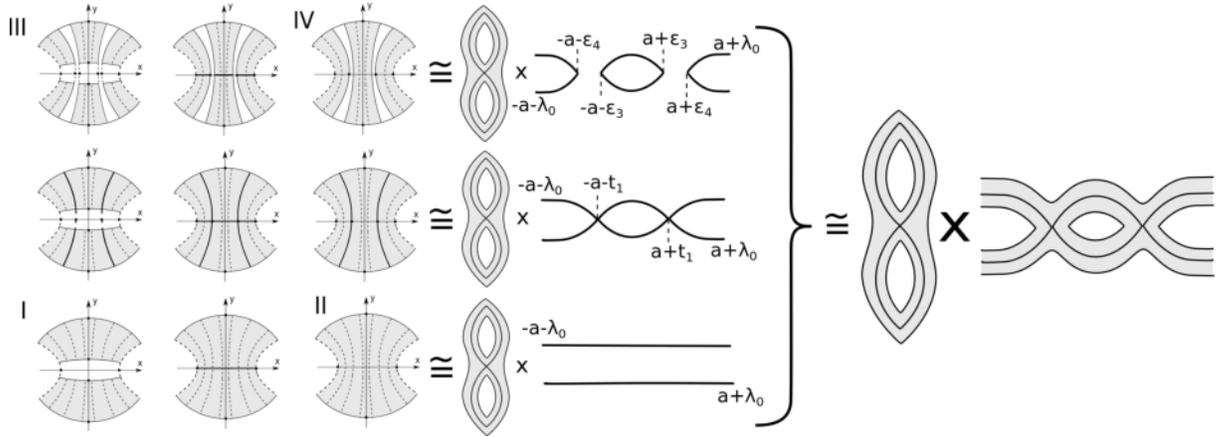


Рис. 4.16: Изменение части 2 области возможного движения в зависимости от точки образа отображения момента и соответствующий ему прообраз в фазовом пространстве.

дящихся на границе камер III и IV, шесть компонент подобласти 2 попарно сливаются в три по отрезку фокальной прямой, при этом прообраз одной из них гомеоморфен прямому произведению окружности длины $2(a + \varepsilon_3)$ на “восьмерку”, склеенную из четырех отрезков длины $-\varepsilon_2 = b$, а прообразы двух других компонент гомеоморфны прямому произведению той же “восьмерки” на отрезок, склеенный из двух отрезков длины $\lambda_0 - \varepsilon_4$. Прообраз подобласти 2 для значений интегралов, лежащих в камере IV, гомеоморфен тому же с заменой “восьмерки” на окружность, склеенную из двух отрезков длины $2b$. Следовательно, часть 2 прообраза дуги кривой $f = d_{\delta-}(h)$, лежащей в камерах III и IV образа отображения момента, послойно гомеоморфна прямому произведению 2-атома B на несвязное объединение окружности, склеенной из отрезков длины $2(a - \varepsilon_3)$, и двух отрезков, склеенных из пары отрезков длины $\lambda_0 - \varepsilon_4$ (см. рис. 4.16). Аналогично можно показать, что при $\varepsilon_3 - \varepsilon_4 = \delta = 0$ прообраз бифуркационной дуги $f = d_-(h)$ послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома B на “удвоенный крест”, склеенный из двух отрезков длины $2(a - \varepsilon_3)$ и четырех отрезков длины $\lambda_0 - \varepsilon_4$ (см. рис. 4.16). Прообраз же дуги кривой $f = d_-(h) - const$, проходящей через камеры I и II, послойно гомеоморфен 2-атому B на пару несвязных отрезков длины $2(\lambda_0 + a)$. Таким образом, часть 2 прообраза всей окрестности $O(h_3, f_3)$ послойно гомеоморфна прямому произведению 2-атома B на расслоенную 2-окрестность “удвоенного креста” (см. рис. 4.16). Склеить же части 1, 2 и 3 всего прообраза нужно так же, как было в случае седло-седло точки P_1 , а именно с перекруткой каждого 2-атома B на каждом 1-слое второго сомножителя в прямом произведении (рис. 4.17, b). Осталось заметить, что построенная таким образом расслоенная 4-окрестность послойно гомео-

морфна почти прямому произведению $B \times C_4/\mathbb{Z}_2$, где группа \mathbb{Z}_2 образована симметрией (τ_1, τ_2) . Действие инволюций τ_1 и τ_2 на каждом сомножителе изображено на рис. 4.17, *b*.

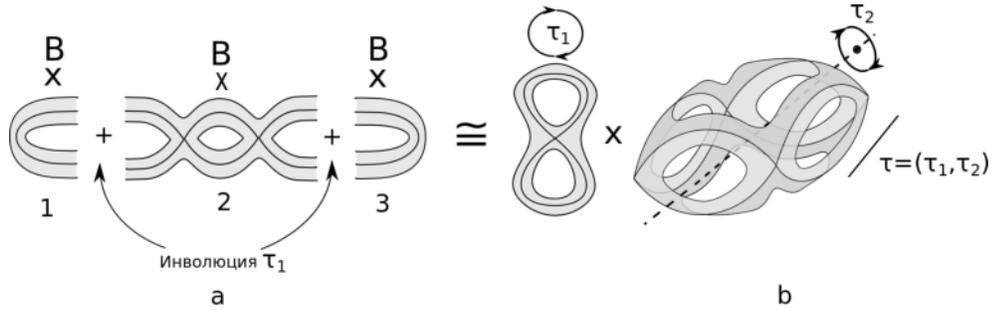


Рис. 4.17: Склейка трех частей прообраза окрестности точки (h_3, f_3) в полный прообраз.

Наконец, рассмотрим подслучай $c_2 > 3c_3$ случая седло-седло точки P_3 . В этом случае кратный корень t_1 многочлена $V(t)$ лежит на промежутке $(-b, 0)$. График этого многочлена изображен на рис. 4.18, *a*. Бифуркационная диаграмма в окрестности точки (h_3, f_3) состоит из отрезка прямой $f = l_{-b}(h)$ и дуги кривой $f = d_+(h)$. Как и ранее, разобьем эту окрестность дугами диаграммы на четыре камеры, как показано на рис. 4.18, *b*. Точкам камеры I соответствует область возможного движения, ограниченная тремя софокусными эллипсами $\lambda = \varepsilon_2$, $\lambda = \varepsilon_3$ и $\lambda = \varepsilon_4$. Камере II соответствуют области, лежащие вне эллипса $\lambda = \varepsilon_2$. Область камеры III ограничена двумя эллипсами $\lambda = \varepsilon_3$ и $\lambda = \varepsilon_4$ и гиперболой $\lambda = \varepsilon_2$. Область же камеры IV ограничена одной гиперболой $\lambda = \varepsilon_2$. Все области возможного движения изображены на рис. 4.19. Разрежем эти области фиксированным эллипсом $\lambda = \lambda_0 = (-b + t_1)/2$ и обозначим внутреннюю часть подобластью 1, а внешнюю – подобластью 2. Итак, рассмотрим подобласть 2, соответствующую

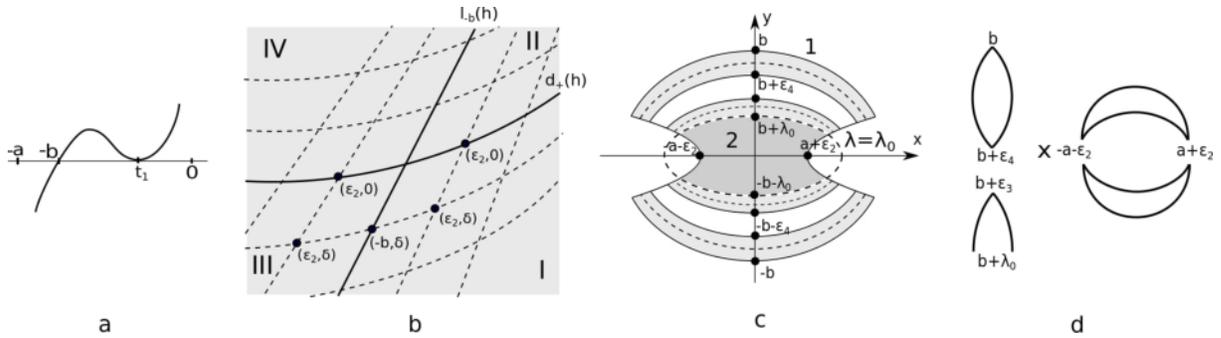


Рис. 4.18: Случай седло-седло точки P_3 . На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_3, f_3) и система координат (ε_2, δ) . На рис. *c* изображена область возможного движения камеры III, разбитая на две части софокусным эллипсом $\lambda = \lambda_0$. На рис. *d* изображен прообраз часть 2 этой области.

точкам камеры III, и разобьем ее на дуги софокусных эллипсов. В прообразе каждого эллипса лежат четыре отрезка длины $2(a + \varepsilon_2)$, склеенные в две окружности в граничных точках. В

прообразе же всей подобласти 2 лежат четыре компоненты связности, две из которых гомеоморфны прямому произведению окружности, склеенной из двух копий отрезка $[-a - \varepsilon_2, a + \varepsilon_2]$, на окружность, полученную склейкой двух отрезков вида $[b + \varepsilon_4, b]$, а две другие гомеоморфны прямому произведению той же окружности на отрезок, склеенный из двух отрезков вида $[b + \lambda_0, b + \varepsilon_3]$ по границе $b + \varepsilon_3$ (рис. 4.18, *c*). На границе камер III и I четыре компоненты подобласти 2 сливаются в две по отрезкам фокальной прямой, при этом прообраз одной из них гомеоморфен прямому произведению пары пересекающихся в двух точках окружностей, склеенных из четырех отрезков вида $[-a + \varepsilon_2, a - \varepsilon_2]$ при $\varepsilon_2 = -b$, и окружности, склеенной из двух отрезков $[b + \varepsilon_4, b]$, а прообраз второй компоненты гомеоморфен прямому произведению тех же пересекающихся окружностей с отрезком, полученным склейкой двух отрезков $[b + \lambda_0, b + \varepsilon_3]$. Следовательно, прообраз дуги $f = d_{\delta_+}(h)$ в окрестности $O(h_3, f_3)$, ограниченный на подобласть 2, послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома C_2 на несвязное объединение окружности и отрезка. Прообраз же граничной дуги $f = d_+(h)$ гомеоморфен произведению 2-атома C_2 на одномерный комплекс, склеенный из двух пар отрезков вида $[b + \lambda_0, b + t_1]$ и $[b + t_1, b]$ в точках b и $b + t_1$ (см. рис. 4.19). Прообраз же дуги вида $f = d_+(h) + const$, лежащий в камерах II и IV, послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома C_2 на отрезок, склеенный из двух отрезков вида $[b + \lambda_0, b]$ в точке 0. Прообраз же всей окрестности $O(h_3, f_3)$, ограниченный на подобласть 2, послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома C_2 на расслоенную 2-окрестность, изображенную на рис. 4.19.

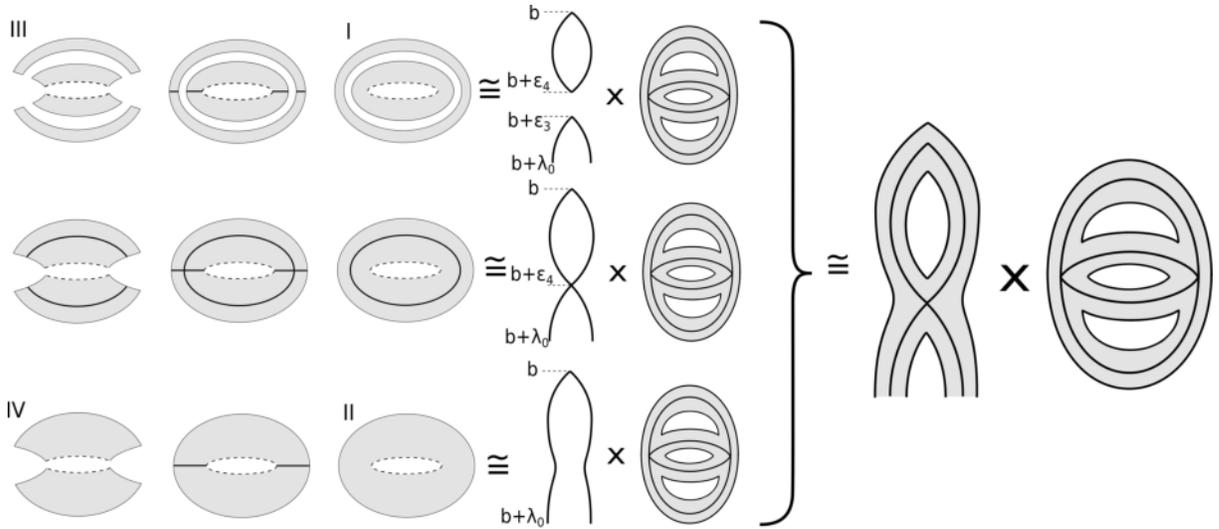


Рис. 4.19: Изменение части 2 области возможного движения в зависимости от точки образа отображения момента и соответствующий ему прообраз в фазовом пространстве.

Рассмотрим теперь прообраз дуги $f = d_{\delta_+}(h)$ в ограничении на подобласть 1, что соответствует перестройке этой подобласти через два фокуса биллиарда. Этот прообраз послойно гомеоморфен прямому произведению отрезка на 2-атом C_2 . Более того, если эллипс λ_0 сам ограничивает биллиард, полученный трехмерный “цилиндр” склеивается по своим основани-

ям с перекруткой, образуя 3-атом B (см. лемму 3.15 главы 3). Следовательно, прообраз всей окрестности $O(h_3, f_3)$ в ограничении на подобласть 1 послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома C_2 на прямоугольник, тривиально расслоенный на отрезки. Весь же прообраз этой окрестности склеен из двух полученных частей по своим 3-границам с перекруткой 2-атома C_2 , как изображено на рис. 4.20, *b*. Заметим, что полученное слоение лиувиллево эквивалентно почти прямому произведению $C_2 \times B_2/\mathbb{Z}_2$, где группа \mathbb{Z}_2 порождена центральными симметриями сомножителей (рис. 4.20, *b*).

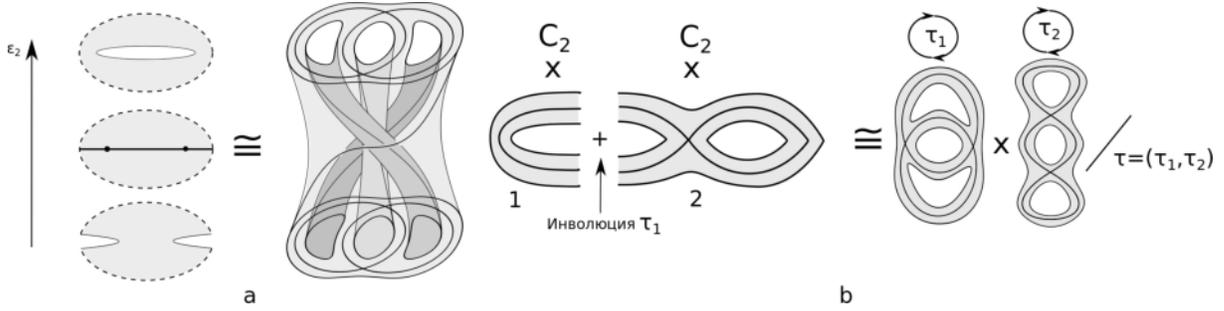


Рис. 4.20: На рис. а изображена бифуркация части 1 области возможного движения и соответствующий ей прообраз в фазовом пространстве. На рис. б изображен прообраз всей окрестности $O(h_3, f_3)$.

Точка P_4

Таким образом, мы рассмотрели все гладкие случаи точек ранга 0. Рассмотрим теперь негладкие случаи P_4 , P_5 и P_6 . Заметим, что во всех этих точках значение интеграла F равно нулю. Начнем с точки P_4 . Вычислим значение гамильтониана $h_4 = H(P_4)$ и подставим его в формулу многочлена $V(t)$. Этот многочлен имеет корни $t = 0$ и $t = -a$, причем в точке 0 он возрастает. При $c_2 = 2c_3a$ точка P_4 лежит на вырожденной траектории (это будет показано в следующем пункте текущего раздела), поэтому не будем рассматривать этот случай. Рассмотрим подслучай $c_2 > 2c_3a$, для которого многочлен $V(t)$ возрастает в точке $-a$ (см. рис. 4.21, *a*). Движение в окрестности точки P_4 существует только для тех значений первых интегралов из окрестности точки $(h_4, 0)$, для которых $f \geq 0$ и $f \leq l_{-a}(h)$. Введем в этой окрестности координаты $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, заданные прямыми $f = l_{\varepsilon_1}(h)$ при ε_1 , близком к $-a$, и $f = l_{\varepsilon_2}(h)$ при ε_2 , близком к нулю (рис. 4.21, *b*). Область возможного движения состоит из двух компонент, ограниченных софокусной гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$ и эллипсом $\lambda = \varepsilon_2$ (рис. 4.21, *c*). Аналогично случаю центр-центр точки P_3 каждая компонента этой области гомеоморфна прямому произведению окружности, склеенной из двух отрезков $[-a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1]$, и окружности, склеенной из двух отрезков $[b + \varepsilon_2, b]$. Весь же прообраз $O(h_4, 0)$ состоит из двух компонент связности, послойно гомеоморфных прямому произведению 2-атома A , расслоенного на окружности $[-a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1]$ при $\varepsilon_1 \rightarrow -a$, и 2-атома A , расслоенного на окружности $[b + \varepsilon_2, b]$ при $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ (см. рис. 4.21, *d*).

При $c_2 < 2c_3a$ многочлен $V(t)$ убывает в своем корне $-a$ (рис. 4.22, *a*). Образ отображения

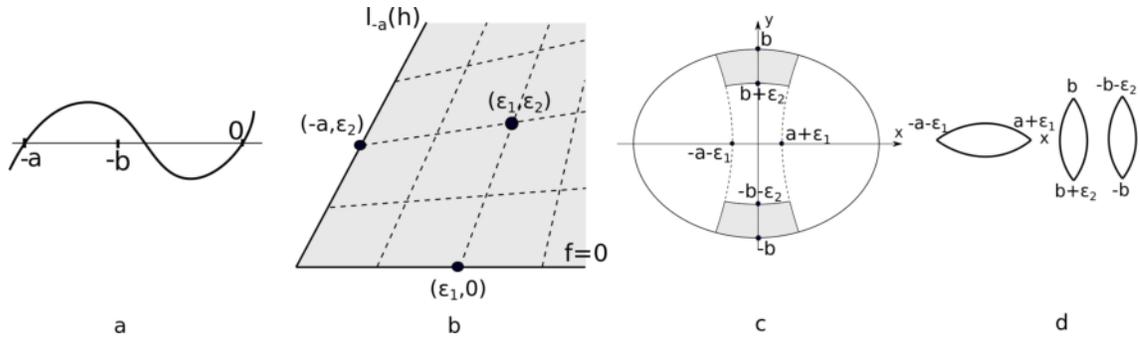


Рис. 4.21: Случай центр-центр точки P_4 . На рис. a изображен график многочлена $V(t)$. На рис. b изображен образ отображения момента в окрестности точки $(h_4, 0)$ и система координат $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. На рис. c изображена область возможного движения. На рис. d изображен ее прообраз в фазовом пространстве.

момента в окрестности точки $(h_4, 0)$ лежит выше оси $f = 0$, а прямая $f = l_{-a}(h)$ в этой окрестности принадлежит бифуркационной диаграмме. При $f < l_{-a}(h)$ область возможного движения ограничена софокусным эллипсом, а при $f > l_{-a}(h)$ она разбивается на две компоненты дугами софокусной параболы (рис. 4.22, c). Заметим, что этот случай полностью аналогичен случаю $c_3 > 0$ точки P_2 типа центр-седло. Следовательно, прообраз окрестности $O(h_4, 0)$ также послонно гомеоморфен прямому произведению 2-атома A на 2-атом C_2 .

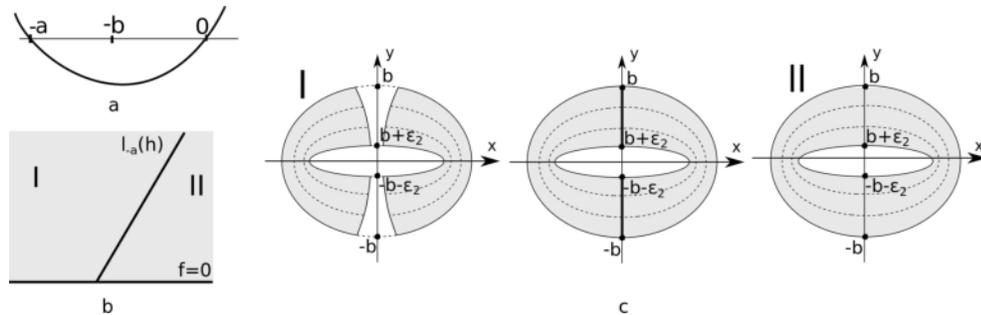


Рис. 4.22: Случай центр-седло точки P_4 . На рис. a изображен график многочлена $V(t)$. На рис. b изображен образ отображения момента в окрестности точки $(h_4, 0)$. На рис. c изображено изменение области возможного движения.

Точка P_5

Рассмотрим теперь точку P_5 и вычислим в ней значение гамильтониана $h_5 = H(P_5)$. Многочлен $V(t)$ имеет два корня $t = 0$ и $t = -b$, при этом в нуле он возрастает. Аналогично точке P_4 , при $c_2 = 2c_3b$ точка P_5 принадлежит вырожденной траектории, поэтому этот случай рассматривать не будем. Пусть $c_2 < 2c_3b$. Тогда многочлен $V(t)$ убывает в точке $t = -b$. В окрестности точки P_5 движение существует только при $f \geq 0$ и $f \leq l_{-b}(h)$. Область возможного движения состоит из двух компонент и ограничена одним софокусным эллипсом и софокусной гиперболой так, как изображено на рис. 4.23, c . Заметим, что этот случай полностью аналогичен подслучаю

$c_2 < 3c_3$ точки P_3 типа центр-центр. Следовательно, весь прообраз окрестности $O(h_5, 0)$ состоит из двух компонент, послойно гомеоморфных прямому произведению двух 2-атомов A .

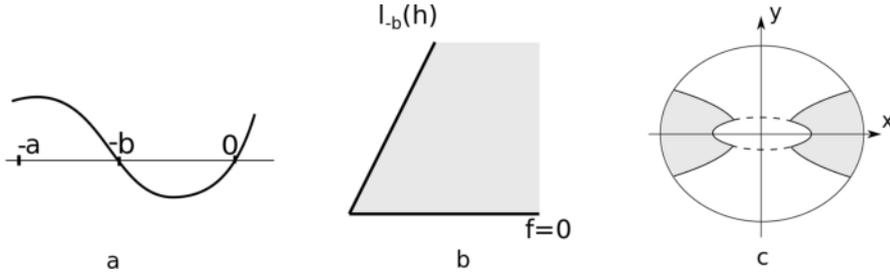


Рис. 4.23: Случай центр-центр точки P_5 . На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки $(h_5, 0)$. На рис. *c* изображена область возможного движения.

Рассмотрим теперь подслучай $c_2 > 2c_3b$ точки P_5 , для которого многочлен $V(t)$ возрастает в корне $t = -b$. Движение в окрестности точки P_5 существует только при $f \geq 0$, при этом прямая $f = l_{-b}(h)$ в окрестности точки $(h_5, 0)$ является бифуркационной. Введем в этой окрестности координаты $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, заданные прямыми $f = l_{\varepsilon_1}(h)$ и $f = l_{\varepsilon_2}(h)$. Область возможного движения, которая пересекается с окрестностью точки P_5 , состоит из двух компонент, ограниченных софокусным эллипсом $\lambda_0 = \varepsilon_2$, а также гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$ (рис. 4.24, *c*). Заметим, что этот случай аналогичен случаю центр-седло точки P_4 с той лишь разницей, что при переходе через бифуркационную прямую компоненты области возможного движения сливаются в одну кольцевую область по отрезкам фокальной прямой, а не по отрезкам оси $x = 0$. Следовательно, как и в предыдущем случае, прообраз окрестности $O(h_5, 0)$ послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атомов A и C_2 .

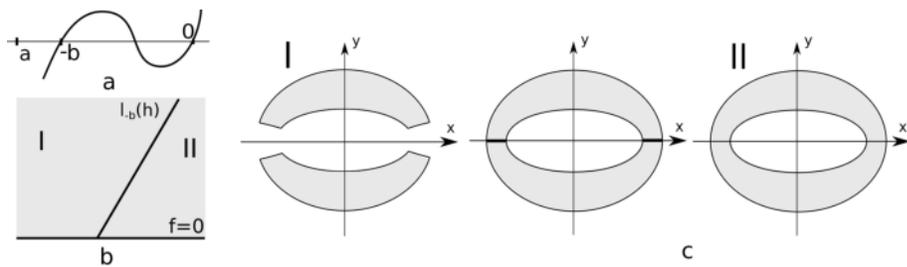


Рис. 4.24: Случай центр-седло точки P_5 . На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки $(h_5, 0)$. На рис. *c* изображено изменение области возможного движения.

Точка P_6

Наконец, рассмотрим точку P_6 . Вычислим значение $H(P_6) = h_6$ и подставим в формулу многочлена $V(t)$. В этом случае он имеет два корня $t = 0$ и $t = t_1 = -\frac{c_2}{2c_3}$. В корне $t = 0$ он возрастает, а корень $t_1 \in (-a, -b)$ является кратным (см. рис. 4.25, *a*). Образ отображения момента

в окрестности точки $(h_6, 0)$ лежит выше оси $f = 0$ и разбивается кривой $f = d_-(h)$ на две камеры, как показано на рис. 4.25, *b*. Точкам камеры I соответствует область возможного движения,

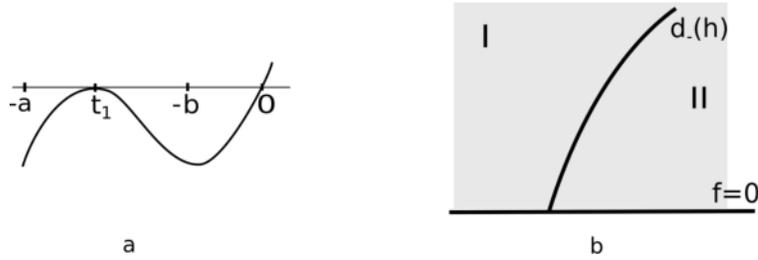


Рис. 4.25: Случай центр-седло точки P_6 . На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки $(h_5, 0)$.

ограниченная эллипсом $\lambda = \varepsilon_2$ и разбитая на четыре компоненты связности дугами гипербол $\lambda = \varepsilon_3$ и $\lambda = \varepsilon_4$. Разбив каждую из этих компонент на дуги софокусных эллипсов можно показать, что прообразы двух из них гомеоморфны прямому произведению окружности, склеенной из двух отрезков $[b + \varepsilon_2, b]$, на окружность, склеенную из двух отрезков $[-a - \varepsilon_3, a + \varepsilon_3]$, а прообразы двух других компонент гомеоморфны прямому произведению той же окружности $[b + \varepsilon_2, b]$ и окружности, склеенной из двух отрезков $[-b - \varepsilon_2, b + \varepsilon_2]$. Для значений интегралов (h, f) , лежащих на границе камер I и II, четыре компоненты области возможного движения сливаются в одну кольцевую область, а ее прообраз гомеоморфен прямому произведению окружности $[\varepsilon_2, -\varepsilon_2]$ на граф, склеенный из восьми отрезков вида $\pm[-a - t_1, a + t_1]$ и $\pm[-b - \varepsilon_2, b + \varepsilon_2]$ так, как изображено на рис. 4.26. Прообраз же области, соответствующей камере II, гомеоморфен прямому произведению окружности $[b + \varepsilon_2, b]$ на пару окружностей, соответствующих движению по и против часовой стрелки. Следовательно, прообраз отрезка прямой $f = l_{\varepsilon_2}(h)$ в окрестности $O(h_6, 0)$ послойно гомеоморфен прямому произведению окружности, склеенной из двух отрезков $[b + \varepsilon_2, b]$, и 2-атому C_4 . Прообраз же всей этой окрестности послойно гомеоморфен прямому произведению 2-атома C_4 на 2-атом A , расслоенный на окружности вида $[b + \varepsilon_2, b]$ при $\varepsilon_2 \rightarrow 0$.

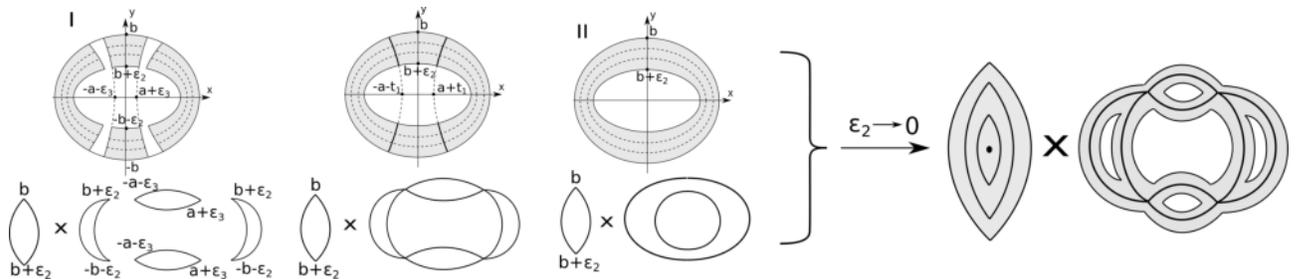


Рис. 4.26: Изменение области возможного движения и соответствующий ему прообраз в фазовом пространстве.

Таким образом, были рассмотрены все окрестности слоев, содержащих невырожденные точки ранга 0, с точностью до лиувиллевой эквивалентности. Теорема доказана. \square

4.1.2 Структура слоения Лиувилля вырожденных особенностей ранга 1

Этот пункт посвящен изучению слоения Лиувилля эллиптического бильярда с потенциалом в четырехмерной окрестности особых слоев, содержащих вырожденную критическую траекторию ранга 1. А именно, пусть потоки первых интегралов H и F в точках траектории линейно зависимы, то есть некоторая их линейная комбинация $k \cdot \text{sgrad } H + l \cdot \text{sgrad } F$ равна нулю. Напомним, что такая критическая траектория называется невырожденной, если оператор $kd^2H + ld^2F$, определенный на трехмерном Ω -ортогональном дополнении к вектору потока $\Omega^{-1}dH$, имеет максимальный ранг 2 в каждой точке траектории. Иначе траектория называется вырожденной. Критические траектории ранга 1 нашего бильярда, как было показано в предыдущем пункте, делятся на четыре вида: лежащие на оси $x = 0$, на фокальной оси $y = 0$, на некоторой софокусной гиперболе с параметром $-a < \lambda_0 < -b$ и на софокусном эллипсе с параметром $-b < \lambda_0 < 0$.

Рассмотрим траекторию, лежащую на прямой $x = 0$, и изучим, в каких случаях она вырождена (обозначим этот случай G_1). Потоки интегралов на такой траектории связаны соотношением $\text{sgrad } H - a \cdot \text{sgrad } H = 0$, при этом ортогональное дополнение $\perp_{\Omega} \text{sgrad } H$ образовано тремя векторами в касательном пространстве к фазовому пространству M^4 : $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 0, 1, 0)$ и $e_3 = \text{sgrad } H$. Определитель оператора $d^2F - a \cdot d^2H$, ограниченного на подпространство $\langle e_1, e_2 \rangle$, равняется

$$\text{Det} = (a - b)(p_y^2 - 2(a - b + y^2)(-c_2 + c_3(2a + b - y^2))).$$

Следовательно, траектория вида $x = 0$ вырождена, если определитель Det равен нулю. Имеем формулу

$$p_y^2 = 2(a - b + y^2)(-c_2 + c_3(2a + b - y^2)).$$

Подставляя соответствующие значения импульсов в формулы первых интегралов, получим $H(0, p_y, 0, y) = h_a = a(3ac_3 - 2c_2)$, $F(0, p_y, 0, y) = f_a = a^2(2ac_3 - c_2)$.

Аналогично изучим траектории, лежащие на прямой $y = 0$ (обозначим этот случай G_2). На таких траекториях потоки связаны соотношением $\text{sgrad } H - b \cdot \text{sgrad } H = 0$, а ортогональное дополнение к вектору $\text{sgrad } H$ образовано векторами $e_1 = (0, 1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 0, 0, 1)$ и $e_3 = \text{sgrad } H$. Определитель же оператора $d^2F - b \cdot d^2H$ на подпространстве $\langle e_1, e_2 \rangle$ имеет вид

$$\text{Det} = (a - b)(-p_x^2 + 2(a - b - x^2)(c_2 - c_3(a + 2b - x^2))).$$

Траектория $y = 0$ вырождена, если $\text{Det} = 0$. Подставляя соответствующие значения импульсов в формулы интегралов, получим $H(p_x, 0, x, 0) = h_b = b(3bc_3 - 2c_2)$, $F(p_x, 0, x, 0) = f_b = b^2(2bc_3 - c_2)$.

Рассмотрим теперь случаи G_3 и G_4 движения по гиперболе или эллипсу соответственно. Необходимыми условиями такого критического движения является пара соотношений

$$\frac{x^2}{a + \hat{\lambda}} + \frac{y^2}{b + \hat{\lambda}} = 1 \quad \frac{x p_x}{a + \hat{\lambda}} + \frac{y p_y}{b + \hat{\lambda}} = 0$$

Достаточным же условием, в дополнение к первым двум, является следующее соотношение на импульс:

$$p_x^2 = -\frac{a + \hat{\lambda}}{b + \hat{\lambda}} y^2 (c_3(a + b - 4\hat{\lambda}) + (a - b)c_3(\frac{2y^2}{b + \hat{\lambda}} - 1) - 2c_2). \quad (4.1.1)$$

В этом случае ранг отображения момента на траектории падает, причем потоки первых интегралов удовлетворяют соотношению $\hat{\lambda} \cdot \text{sgrad } H + \text{sgrad}(F = 0)$. Ортогональное дополнение к вектору потока $\text{sgrad } H$ образовано тремя векторами $e_1 = \text{sgrad } H$, $e_2 = (e_1(1), 0, e_1(3), 0)$ и $e_3 = (e_1(4), -e_1(3), 0, 0)$. При этом оператор $\hat{\lambda} \cdot d^2H + d^2F$, ограниченный на подпространство $\langle e_2, e_3 \rangle$, имеет определитель

$$\text{Det} = -8p_x p_y x y (c_2 + 3c_3 \hat{\lambda}).$$

Следовательно, траектория $\lambda = \hat{\lambda}$, целиком не лежащая ни на одной из осей $x = 0$ и $y = 0$, является вырожденной только при $c_2 + 3c_3 \hat{\lambda} = 0$. Вычислим значения первых интегралов, используя все полученные соотношения. Имеем $h_e = -\frac{c_2^2}{3c_3}$, $f_e = -\frac{c_3^3}{27c_3^2}$. Кроме того, подставив значение $\hat{\lambda} = -\frac{c_2}{3c_3}$ в уравнение 4.1.1, получим, что правая часть неотрицательна только при $c_3 < 0$. Это условие является необходимым условием существования движения для вычисленных значений первых интегралов, а также для значений, принадлежащих окрестности $O(h_e, f_e)$.

Помимо четырех рассмотренных случаев критических орбит ранга 1 существует еще один вид траекторий, лежащих на граничном эллипсе с параметром $\lambda = 0$, в точках которых гладкость системы нарушается, но которые, тем не менее, ведут себя как эллиптические критические орбиты ранга 1 при условии $F = 0$, $H > 0$. При “слиянии” такой “эллиптической” орбиты с некоторой гиперболической орбитой она становится “вырожденной” в смысле поведения слоения Лиувилля в инвариантной 4-окрестности соответствующего слоя (это будет показано в дальнейшем). Иными словами, траектория $\lambda = 0$ вырождена, если она является предельной критической траекторией, лежащей на софокусном эллипсе с параметром $\lambda = \hat{\lambda}$, при $\hat{\lambda} \rightarrow -0$. Обозначим этот случай G_5 . Используя условия критического движения, приведенные выше для случая G_4 , получим $F = f_0 = 0$, $H = h_0 = 0$.

Изучим теперь структуру слоения Лиувилля в 4-окрестности слоев, содержащих описанные вырожденные траектории ранга 1. Докажем следующую теорему.

Теорема 4.2. *Вырожденные орбиты потоков первых интегралов, встречающиеся в эллиптическом бильярде с потенциалом четвертого порядка, соответствуют перестройкам параболического типа или типам эллиптического или гиперболического удвоения периода невырожденных окружностей. Четырехмерные окрестности слоев слоения Лиувилля, содержащих такие орбиты, лиувиллево эквивалентны одному из шести типов, изображенных на рис. 4.27.*

Доказательство. Случай G_1

Начнем со случая G_1 , рассмотренного выше. Многочлен $V(t)$, соответствующий значениям $H = h_a$ и $F = f_a$, имеет корни $t = -a$ и $t = t_1 = 2a - \frac{c_2}{c_3}$, при этом корень $-a$ является

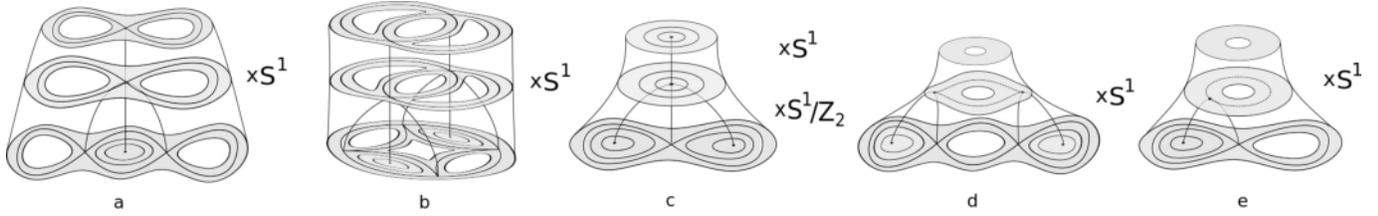


Рис. 4.27: Шесть типов слоений Лиувилля в окрестности вырожденных слоев ранг 1. На рис. *c* изображены два типа слоения, соответствующие ориентируемому и неориентируемому случаю эллиптического удвоения периода.

кратным. В зависимости от знака параметра c_3 и расположения корня t_1 относительно отрезка $[-a, 0]$ возникает восемь подслучаев (многие из которых, в свою очередь, не будут соответствовать движению). Рассмотрим послучай $c_3 < 0$ и $t_1 < -a$. График многочлена $V(t)$ изображен на рис. 4.28, *a*. Образ отображения момента в окрестности точки (h_a, f_a) разбивается на две камеры дугами бифуркационной диаграммы $f = d_+(h)$ и $f = l_{-a}(h)$ (см. рис. 4.28, *b*). Область

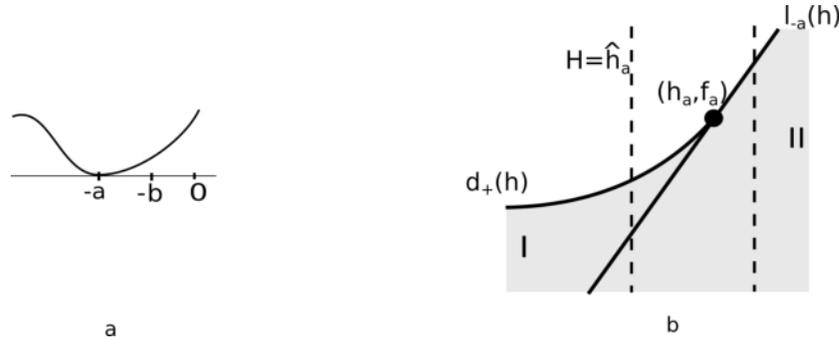


Рис. 4.28: Случай G_1 , подслучай $c_3 < 0$, $t_1 < -a$. На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_a, f_a) .

возможного движения, соответствующая значениям интегралов в камере I, ограничена дугами двух софокусных гипербол с параметрами $\lambda = \varepsilon_1$ и $\lambda = \varepsilon_2$, а область, соответствующая камере II, ограничена лишь одной гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$. Разобьем эти области на дуги софокусных гипербол. Заметим, что такое разбиение порождает тривиальное расслоение прообраза окрестности $O(h_a, f_a)$ в M^4 на окружности. База же этого расслоения задается глобальным трансверсальным сечением, образ которого на бильярде лежит на фокальной оси $y = 0$. Зафиксируем значение гамильтониана $H = \hat{h}_a < h_a$. При $f < \hat{f} = l_{-a}(\hat{h}_a)$ области возможного движения принадлежит отрезок $[-a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1]$, а в его прообразе в M_4 лежит окружность, соответствующая векторам скорости 1 и 2, изображенным на рис. 4.29. При $f = \hat{f}$ эти вектора скорости сливаются в середине отрезка, а в его прообразе лежит “восьмерка”. При $f > \hat{f}$ отрезок разбивается на два отрезка $[-a - \varepsilon_1, -a - \varepsilon_2]$ и $[a + \varepsilon_2, a + \varepsilon_1]$, в прообразе каждого из которых лежит окружность. При $f \rightarrow f_{max} = d_+(\hat{h}_a)$ эти два отрезка стягиваются в точки $-a - \hat{t}$ и $a + \hat{t}$, где $\hat{t} = \frac{-c_2 - \sqrt{c_2^2 + 3c_3\hat{h}_a}}{3c_3}$. Следовательно, сечение прообраза отрезка прямой $h = \hat{h}_a$, лежащего в окрестности точки (h_a, f_a) ,

при $\hat{h}_a < h_a$ устроено так, как изображено на рис. 4.29. При $\hat{h}_a \rightarrow h_a - 0$ значение \hat{t} стремится

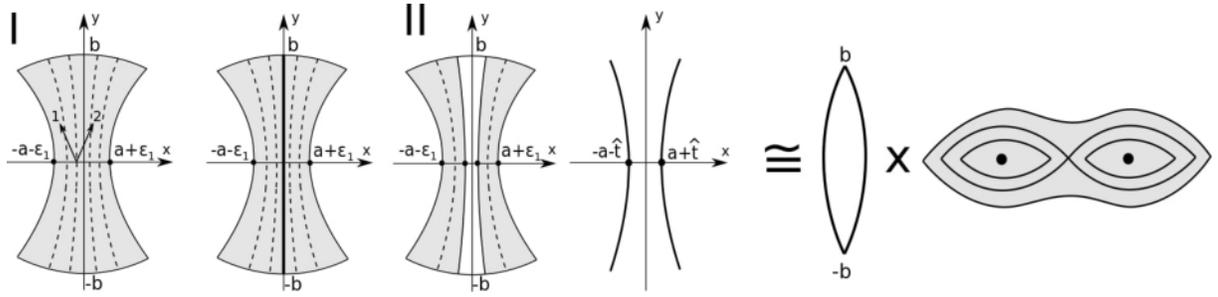


Рис. 4.29: Изменение области возможного движения при $H = \hat{h}_a < h_a$.

$-a$, что соответствует слиянию двух эллиптических и одной седловой критических точек, при этом весь слой-“восьмерка” также стягивается в эту точку. При $\hat{h}_a > h_a$ отрезок фокальной оси, лежащий в области возможного движения, стягивается в точку при $f \rightarrow f_{max} = \hat{f}$, что соответствует структуре 2-атома A . Таким образом, прообраз окрестности $O(h_a, f_a)$ послойно гомеоморфен прямому произведению окружности (слою расслоения) на базу (топологически трехмерный шар), слоение которого изображено на рис. 4.27, *с*.

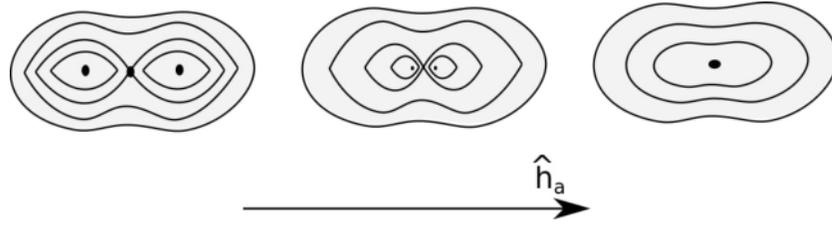


Рис. 4.30: Изменение сечения базы плоскостью $H = \hat{h}_a$ при увеличении значения \hat{h}_a .

Рассмотрим теперь подслучай $c_3 < 0$ и $-a < t_1 < -b$. График многочлена $V(t)$ приведен на рис. 4.31, *а*. Образ отображения момента разбивается дугами бифуркационной диаграммы $f = d_-(h)$ и $l_{-a}(h)$ так, как показано на рис. 4.31, *б*. Значениям интегралов камеры I соответствует область возможного движения, ограниченная софокусными гиперболами с параметрами $\lambda = \varepsilon_1$ и $\lambda = \varepsilon_2$, камере II соответствует область, ограниченная лишь одной гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$, а камере III – область, ограниченная тремя гиперболами $\lambda = \varepsilon_1$, $\lambda = \varepsilon_2$ и $\lambda = \varepsilon_3$. Как и в прошлом случае, на всем прообразе окрестности точки (h_a, f_a) задано тривиальное расслоение на окружности, образы которых на бильярдном столе образуют разбиение областей возможного движения на софокусные гиперболы. Как и ранее, найдем базу этого расслоения. Зафиксируем значение гамильтониана $H = \hat{h}_a < h_a$. При $f < \hat{f} = l_{-a}(\hat{h}_a)$ в области возможного движения лежит отрезок $[-a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1]$ фокальной прямой, прообраз которого содержит окружность, соответствующую векторам скорости 1 и 2. При $f = \hat{f}$ эти вектора скорости сливаются в середине отрезка, а в его прообразе лежит “восьмерка”. При $f > \hat{f}$ отрезок разбивается на два отрезка $[-a - \varepsilon_1, -a - \varepsilon_2]$ и $[a + \varepsilon_2, a + \varepsilon_1]$, в прообразе каждого из которых лежит окружность.

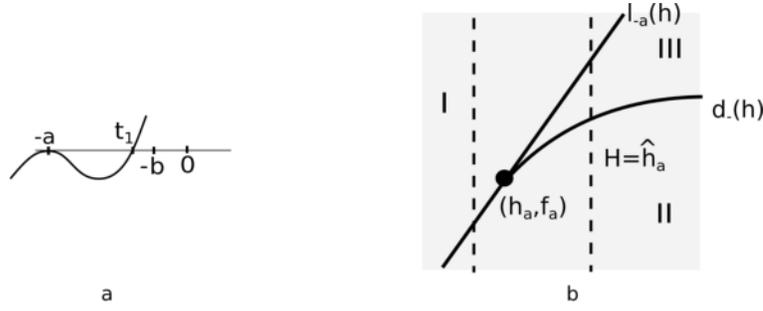


Рис. 4.31: Случай G_1 , подслучай $c_3 < 0$, $-a < t_1 < -b$. На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_a, f_a) .

Следовательно, база расслоения прообраза всего отрезка прямой $H = \hat{h}_a$, лежащего в $O(h_a, f_a)$, послойно гомеоморфна 2-атому B . Зафиксируем теперь значение $H = \hat{h}_a > h_a$. Прямая $h = \hat{h}_a$ пересекает бифуркационную диаграмму в двух точках. При $f = d_-(\hat{h}_a)$ отрезку $[-a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1]$ принадлежат две точки $-a - \hat{t}$ и $a + \hat{t}$, где $\hat{t} = \frac{-c_2 + \sqrt{c_2^2 + 3c_3\hat{h}_a}}{3c_3}$, в которых вектора скорости 1 и 2 сливаются в один вектор, а в прообразе этого отрезка лежит “тройная восьмерка” (см. рис. 4.32). При $d_-(\hat{h}_a) < f < \hat{f}$ области возможного движения принадлежат три отрезка фокальной прямой: $[-a - \varepsilon_1, -a - \varepsilon_2]$, $[a + \varepsilon_2, a + \varepsilon_1]$ и $[-a - \varepsilon_3, a + \varepsilon_3]$. Последний из них стягивается в точку 0 при $f \rightarrow \hat{f} - 0$. Следовательно, сечение прообраза отрезка $h = \hat{h}_a$ в этом случае устроено так, как изображено на рис. 4.32. При $\hat{h}_a \rightarrow h_a + 0$ значение \hat{t} стремится $-a$, что соответствует

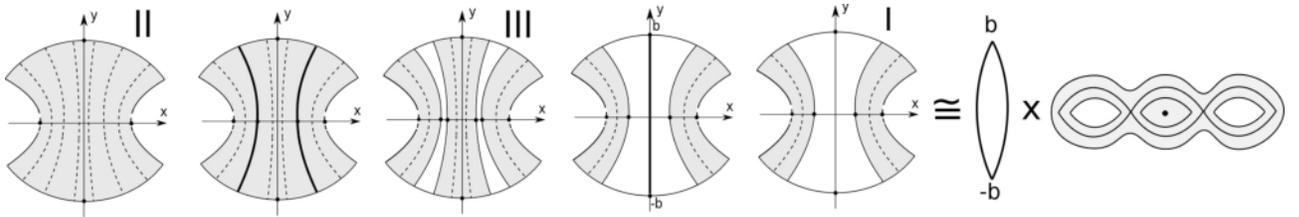


Рис. 4.32: Изменение области возможного движения при $H = \hat{h}_a > h_a$.

слиянию двух седловых критических точек “тройной восьмерки” и одной эллиптической точки в одну седловую точку. Таким образом, вся база расслоения прообраза $O(h_a, f_a)$ имеет вид, изображенный на рис. 4.27, *a*. Весь же прообраз послойно гомеоморфен прямому произведению этой базы на окружность.

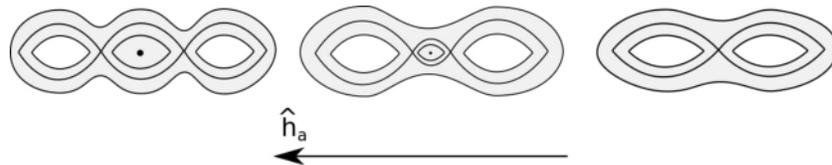


Рис. 4.33: Изменение сечения базы плоскостью $H = \hat{h}_a$ при изменении значения \hat{h}_a .

Рассмотрим подслучай $c_3 < 0$ и $-b < t_1 < 0$ случая G_1 . Образ отображения момента в окрест-

ности точки (h_a, f_a) устроен аналогично прошлому подслучаю. Области возможного движения, соответствующие камерам I-III, изображены на рис. 4.34 и ограничены софокусным эллипсом с параметром $\lambda = \varepsilon_1$ и гиперболами $\lambda = \varepsilon_2$ и $\lambda = \varepsilon_3$. Как и ранее, разбиение этих областей на дуги софокусных гипербол задает тривиальное расслоение всего прообраза окрестности $O(h_a, f_a)$ на окружности, однако на этот раз образ общего трансверсального сечения на бильярдном столе лежит не на фокальной прямой, а на некотором выделенном софокусном эллипсе $\lambda = \lambda_0$. Изучим это сечение. Зафиксируем значение гамильтониана $H = \hat{h}_a < h_a$. При переходе из камеры II в камеру I эллипс, полностью лежащий в области возможного движения, разделяется на две части в точках, лежащих на оси $x = 0$. Как было показано ранее в доказательстве теоремы 3.4, прообраз такой перестройки в фазовом пространстве M^4 соответствует 2-атому C_2 . Следовательно, сечение на фиксированном уровне энергии послойно гомеоморфно 2-атому C_2 . Теперь зафиксируем значение $H = \hat{h}_a > h_a$. При переходе из камеры II в камеру III эллипс разделяется на четыре части в точках, лежащих на гиперболе с параметром $\lambda = \hat{t} = \frac{-c_2 + \sqrt{c_2^2 + 3c_3 \hat{h}_a}}{3c_3}$. В фазовом пространстве такая перестройка соответствует 2-атому C_4 . При переходе же из камеры III в камеру I две части эллипса, ограниченные гиперболой $\lambda = \varepsilon_3$, стягиваются в точки, что соответствует двум 2-атомам A . Сечение же всего прообраза такого отрезка прямой $h = \hat{h}_a$ изображено на рис. 4.34. При $\hat{h}_a \rightarrow h_a + 0$ значение \hat{t} стремится к $-a$. Следовательно, четыре

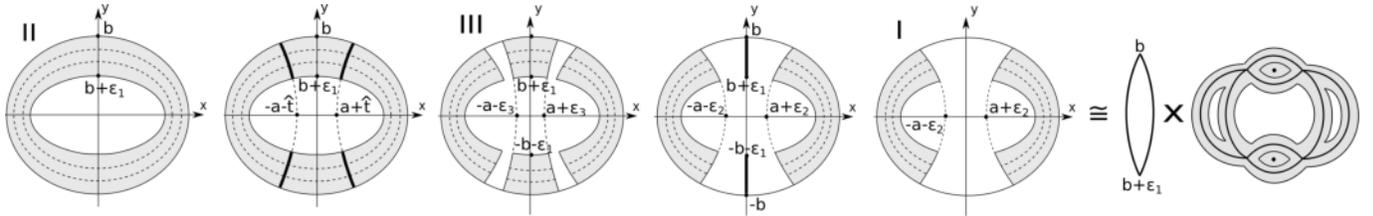


Рис. 4.34: Изменение области возможного движения при $H = \hat{h}_a > h_a$.

седловых точки 2-атома C_4 сливаются вместе с двумя эллиптическими точками 2-атомов A в седловые точки 2-атома C_2 (см. рис. 4.27, b). Таким образом, описана база расслоения прообраза окрестности $O(h_a, f_a)$. Весь же прообраз послойно гомеоморфен прямому произведению этой базы на окружность.

Отметим, что в случаях $c_3 < 0$ и $t_1 > 0$, а также $c_3 > 0$ и $t_1 < -b$ многочлен $V(t)$ принимает отрицательные значения при любом значении интегралов, лежащих в окрестности точки (h_a, f_a) . Следовательно, образ отображения момента не пересекает эту окрестность, а приведенные случаи не соответствуют движению. Оставшийся же подслучай $c_3 > 0$ и $t_1 > -b$ полностью аналогичен подслучаю $c_3 < 0$ и $t_1 < -a$, рассмотренному ранее. Это следует из того, что многочлен $V(t)$ для этих двух случаев качественно устроен одинаково на отрезке $[-a, 0]$. Следовательно, слоение Лиувилля прообраза окрестности $O(h_a, f_a)$ также устроено аналогично.

Случай G_2

Рассмотрим теперь случай G_2 вырожденной орбиты. Многочлен $V(t)$ для значений интегра-

лов $H = h_b$ и $F = f_b$ имеет два корня $t = -b$ и $t = t_1 = 2b - \frac{c_2}{c_3}$, при этом корень $-b$ является кратным. Как и в случае G_1 , здесь имеют место восемь подслучаев в зависимости от знака параметра c_3 и расположения корня t_1 относительно отрезка $[-a, 0]$. Рассмотрим подслучай $c_3 > 0$ и $t_1 < -a$. График многочлена приведен на рис. 4.35, *a*. Образ отображения момента в окрестности точки (h_b, f_b) разбивается дугами бифуркационной диаграммы $f = d_-(h)$ и $f = l_{-b}(h)$ на две камеры, как показано на рис. 4.35, *b*. Область возможного движения, соответствующая значениям

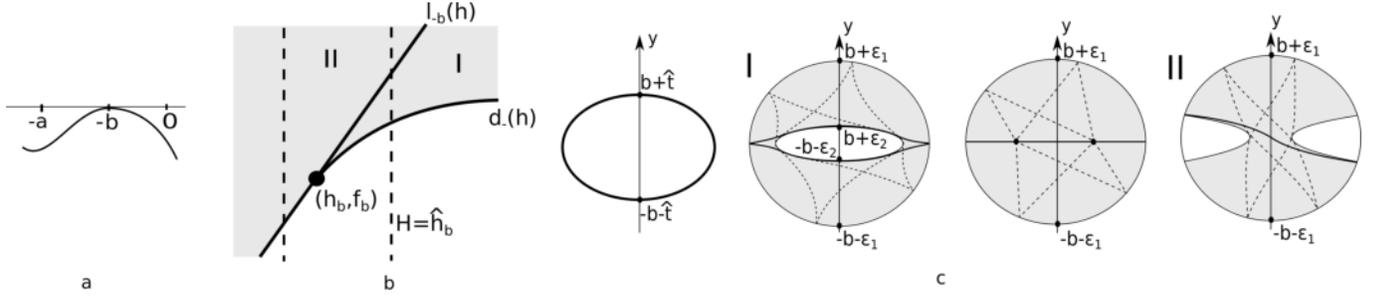


Рис. 4.35: Случай G_2 при $c_3 > 0$ и $t_1 < -a$. На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_b, f_b) . На рис. *c* изображено изменение области возможного движения при $H = \hat{h}_b > h_b$. Здесь пунктиром изображены образы гомологичных циклов Λ , задающие тривиальное расслоение четырехмерной окрестности особого слоя. При этом выделены циклы, которые переходят в критический при $f = l_{-b}(\hat{h}_b)$.

камеры I, ограничена двумя софокусными эллипсами с параметрами $\lambda = \varepsilon_1$ и $\lambda = \varepsilon_2$. Прообраз такой области в фазовом пространстве M^4 гомеоморфен несвязному объединению двух торов Лиувилля, которые вырождаются в две окружности при $f = d_-(h)$. Образ этих окружностей на бильярде является софокусным эллипсом $\lambda = \hat{t} = \frac{-c_2 - \sqrt{c_2^2 + 3c_3 h}}{3c_3}$. камере II соответствует область, ограниченная софокусным эллипсом $\lambda = \varepsilon_1$ и гиперболой $\lambda = \varepsilon_2$. Прообраз такой области в фазовом пространстве гомеоморфен одному тору Лиувилля. На каждом регулярном торе рассмотрим расслоение на гомологичные окружности, образы которых в областях возможного движения имеют вид, изображенный на рис. 4.35, *c* (кривая выходит из точки на границе бильярда, касается каустики, приходит в диаметрально противоположную точку границы и затем возвращается в исходную точку). Обозначим класс гомологий этих окружностей буквой Λ . Можно показать, что на критических слоях, соответствующих дугам бифуркационной диаграммы, критические циклы также принадлежат классу Λ . Таким образом в прообразе окрестности точки (h_a, f_a) было задано расслоение со слоем S^1 . Согласно работе [10], это расслоение тривиально, а его база является глобальным трансверсальным сечением, дополняющим цикл Λ до допустимого базиса в окрестностях критических слоев. Образ такого сечения на бильярдном столе лежит на оси $x = 0$. Зафиксируем уровень гамильтониана $H = \hat{h}_b > h_b$ и проследим за изменением этого сечения при росте значения f от $f_{min} = d_-(\hat{h}_b)$ до $f_{max} > \hat{f} = l_{-b}(\hat{h}_b)$. При $f = f_{min}$ на оси $x = 0$ лежат две точки $\pm(b + \hat{t})$. При дальнейшем увеличении f эти точки вырастают в два отрезка $[-b - \varepsilon_1, -b - \varepsilon_2]$ и $[b + \varepsilon_2, b + \varepsilon_1]$, которые сливаются в один отрезок

$[-b - \varepsilon_1, b + \varepsilon_1]$ для значения $f = \hat{f}$. Следовательно, слоение Лиувилля глобального сечения, ограниченного уровнем гамильтониана $H = \hat{h}_b$, устроено как расслоение двумерного диска на 2-атом B и два 2-атома A . При $\hat{h}_a \rightarrow h_a + 0$ значение \hat{t} стремится к $-b$, что соответствует слиянию критических точек этих 2-атомов в одну эллиптическую точку при $\hat{h}_b < h_b$. Таким образом, глобальное сечение всего прообраза окрестности $O(h_b, f_b)$ аналогично сечению для случая G_1 , изображенному на рис. 4.33. Весь же прообраз послойно гомеоморфен прямому произведению окружности (слоя расслоения) на полученное сечение (базу). Также отметим, что подслучай $c_3 < 0$ и $t_1 > 0$ того же случая G_2 полностью аналогичен данному.

Рассмотрим подслучай $c_3 > 0$ и $-a < t_1 < -b$ случая G_2 . Образ отображения момента в окрестности точки (h_b, f_b) , как и ранее, разбивается дугами бифуркационной диаграммы $f = d_-(h)$ и $f = l_{-b}(\hat{h}_b)$ на две камеры. Области возможного движения, соответствующие камерам I и II, аналогичны областям из предыдущего случая с той лишь разницей, что теперь все эти области разбиваются дугами софокусной гиперболы $\lambda = t_1$ на две непересекающиеся подобласти (см. рис. 4.36). Следовательно, прообраз всей окрестности точки (h_b, f_b) в фазовом простран-

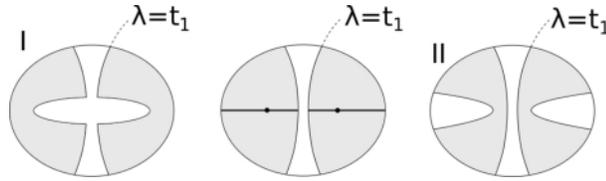


Рис. 4.36: Области возможного движения в случае G_2 при $c_3 > 0$ и $-a < t_1 < -b$.

стве также состоит из двух непересекающихся компонент. Рассмотрим компоненту, соответствующую областям возможного движения, лежащим в правой полуплоскости $x > 0$. Отметим, что наш билиард в заданной области значений интегралов $O(h_a, f_a)$ эквивалентен билиарду, полученному из предыдущего подслучая добавлением вертикальной стенки $x = 0$. Иными словами, рассматриваемый подслучай может быть получен из предыдущего путем факторизации по инволюции, заданной симметрией билиарда относительно оси $x = 0$. В четырехмерной окрестности $\mathcal{F}^{-1}(O(h_b, f_b))$, которая, как было показано, является тривиальным расслоением $S^1 \times Ba^3$, где Ba^3 обозначает трехмерную базу, изображенную на рис. 4.27, c , описанная выше инволюция действует следующим образом. На множителе S^1 она действует центрально симметрично, а на Ba^3 – поворотом на угол π относительно оси симметрии. Таким образом, прообраз окрестности $O(h_b, f_b)$ в фазовом пространстве для рассматриваемого подслучая состоит из двух непересекающихся частей, послойно гомеоморфных почти прямому произведению $S^1 \times Ba^3 / \mathbb{Z}_2$, изображенному на рис. 4.27, c .

Перейдем теперь к подслучаю $c_3 > 0$ и $t_1 > -b$. График многочлена $V(t)$ изображен на рис. 4.37, a . Образ отображения момента в окрестности точки (h_b, f_b) , а также области возможного движения, соответствующие камерам I и II, изображены на рис. 4.37. Этот случай схож с предыдущим с той лишь разницей, что области возможного движения соответствуют

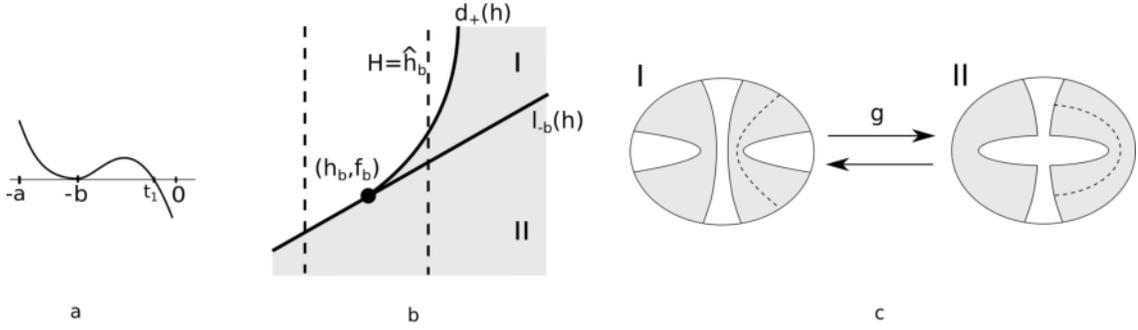


Рис. 4.37: Случай G_2 при $c_3 > 0$ и $t_1 > -b$. На рис. *a* изображен график многочлена $V(t)$. На рис. *b* изображен образ отображения момента в окрестности точки h_b, f_b . На рис. *c* изображены области возможного движения, соответствующие камерам I и II, и отображение g , переводящее одну область в другую.

противоположным камерам, при этом образы критических окружностей, соответствующих дуге $f = d_+(h)$ бифуркационной диаграммы, лежат на дугах некоторой софокусной гиперболы (а не на дугах эллипса). Проведем следующее преобразование g областей возможного движения. Положим $g(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda'_1, \lambda'_2)$, где (λ_1, λ_2) задает эллиптические координаты точки области, а координаты (λ'_1, λ'_2) образа этой точки имеют вид

$$\begin{cases} \lambda'_1 = -\frac{a-b}{b}(\lambda_2 + b) - b, \\ \lambda'_2 = -\frac{b}{a-b}(\lambda_1 + b) - b. \end{cases}$$

Поднимем это преобразование до преобразования $\hat{g}(\lambda_1, \lambda_2, \dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2) = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dot{\lambda}'_1, \dot{\lambda}'_2)$ фазового пространства, положив

$$\dot{\lambda}'_1 = -\frac{a-b}{b}\dot{\lambda}_2, \quad \dot{\lambda}'_2 = -\frac{b}{a-b}\dot{\lambda}_1.$$

Отметим, что такое преобразование корректно определено для бильярда, ограниченного эллипсом и отрезком оси $x = 0$, оно сохраняет бильярдный закон отражения, при этом является послойным гомеоморфизмом. На рис. 4.37, *c* изображены области возможного движения после преобразования g . Осталось заметить, что преобразованная система полностью аналогична предыдущему подслучаю $c_3 > 0$ и $-a < t_1 < -b$, а $\hat{g}(\mathcal{F}^{-1}(O(h_b, f_b)))$ послойно гомеоморфно почти прямому произведению $S^1 \times Ba^3/\mathbb{Z}_2$. Но, как было отмечено, \hat{g} – послойный гомеоморфизм. Следовательно, слоение Лиувилля в прообразе окрестности $O(h_b, f_b)$ устроено аналогичным образом. Отметим также, что рассмотренный подслучай полностью аналогичен подслучаю $c_3 < 0$ и $t_1 < -a$.

Рассмотрим теперь подслучай $c_3 < 0$ и $-a < t_1 < -b$. Образ отображения момента в окрестности точки (h_b, f_b) разбивается дугами бифуркационной диаграммы $f = d_+(h)$ на четыре камеры. Области возможного движения, соответствующие значениям интегралов каждой камеры, изображены на рис. 4.38. Заметим, что каждая такая область не имеет точек пересечения с фиксированной софокусной гиперболой $\lambda = \lambda_0 \in (t_1, -b)$. Следовательно, прообраз окрестности

$O(h_b, f_b)$ в фазовом пространстве состоит из трех непересекающихся компонент. Аналогично случаю G_1 при $c_3 < 0$ и $-a < t_1 < -b$ можно доказать, что компонента связности прообраза $\mathcal{F}^{-1}(O(h_b, f_b))$, образ которой при проекции на бильярд лежит между ветвями гиперболы $\lambda = \lambda_0$, послойно гомеоморфна прямому произведению, изображенному на рис. 4.27, *a*. Структура же слоения Лиувилля оставшихся двух компонент полностью аналогична предыдущему подслучаю.

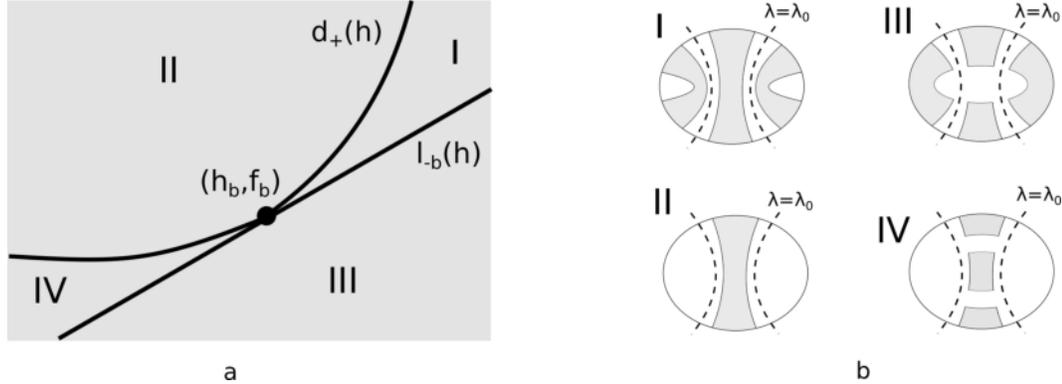


Рис. 4.38: Случай G_2 при $c_3 < 0$ и $-a < t_1 < -b$. На рис. *a* изображен образ отображения момента в окрестности точки h_b, f_b . На рис. *b* изображены области возможного движения, соответствующие камерам образа.

Наконец, рассмотрим подслучай $c_3 < 0$ и $-b < t_1 < 0$. Области возможного движения, соответствующие значениям интегралов каждой из четырех камер образа отображения момента в окрестности точки (h_b, f_b) , изображены на рис. 4.39. Заметим, что каждая такая область не имеет точек пересечения с фиксированным софокусным эллипсом $\lambda = \lambda_0 \in (-b, t_1)$. Таким образом, весь прообраз окрестности $O(h_b, f_b)$ состоит из двух компонент связности. Слоение той компоненты, чей образ при проекции на бильярд лежит внутри области, ограниченной выделенным эллипсом, устроено аналогично случаю G_2 при $c_3 > 0$ и $t_1 < -a$. Слоение же другой компоненты, как и в случае G_1 при $c_3 < 0$ и $-b < t_1 < 0$, устроено как прямое произведение окружности на сечение, изображенное на рис. 4.27, *b*.

Случай G_3

Перейдем теперь к случаю G_3 . Подставим значения интегралов $H = h_e, F = f_e$ в формулу многочлена $V(t)$. В этом случае он имеет вид $V(t) = -c_3(t - \hat{\lambda})^3$ при $c_3 < 0$ и $\hat{\lambda} \in (-a, -b)$. Точка (h_e, f_e) является точкой возврата дуг бифуркационной диаграммы $f = d_-(h)$ и $f = d_+(h)$, которые разбивают образ отображения момента на две камеры. Область возможного движения, соответствующая значениям первых интегралов из камеры I, состоит из трех компонент, ограниченных дугами софокусных гипербол $\lambda = \varepsilon_1, \lambda = \varepsilon_2$ и $\lambda = \varepsilon_3$. При этом область камеры II ограничена лишь одной гиперболой $\lambda = \varepsilon_1$. Образ отображения момента в окрестности $O(h_e, f_e)$ и области возможного движения изображены на рис. 4.40. Отметим, что, как и в предыдущих случаях, в прообразе этой окрестности $\mathcal{F}^{-1}(O(h_e, f_e))$ задано тривиальное расслоение на окруж-

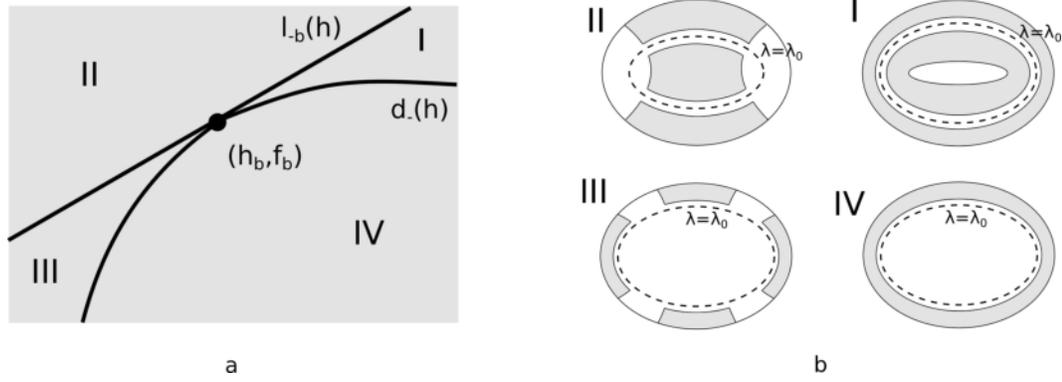


Рис. 4.39: Случай G_2 при $c_3 < 0$ и $-b < t_1 < 0$. На рис. *a* изображен образ отображения момента в окрестности точки h_b, f_b . На рис. *b* изображены области возможного движения, соответствующие камерам образа.

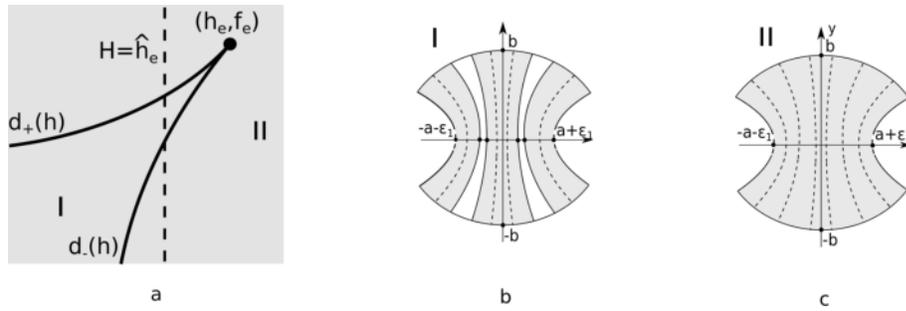


Рис. 4.40: Случай G_3 . На рис. *a* изображен образ отображения момента в окрестности точки (h_e, f_e) . На рис. *b* и *c* изображены области возможного движения, соответствующие камерам I и II соответственно.

ности, образы которых при проекции на бильярд разбивают области возможного движения на дуги софокусных гипербол. В качестве базы этого расслоения возьмем глобальное сечение, образ которого лежит на фокальной оси. Зафиксируем значение гамильтониана $H = \hat{h}_e < h_e$ и проследим за изменением этого сечения при изменении значения интеграла F . При $f < d_-(\hat{h}_e)$ в области возможного движения лежит лишь один отрезок фокальной оси $[-a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1]$, прообраз которого в M^4 гомеоморфен окружности. При $f = d_-(\hat{h}_e)$ этот отрезок имеет критические точки $-a - \hat{t}_1$ и $a + \hat{t}_1$, где $\hat{t}_1 = \frac{-c_2 + \sqrt{c_2^2 + 3c_3 h}}{3c_3}$, а его прообраз гомеоморфен “тройной восьмерке”, т.е. особому слою 2-атома B_2 . При $d_-(\hat{h}_e) < f < d_+(\hat{h}_e)$ отрезок делится на три отрезка $[-a - \varepsilon_1, -a - \varepsilon_2]$, $[-a - \varepsilon_3, a + \varepsilon_3]$ и $[a + \varepsilon_2, a + \varepsilon_1]$. При $f = d_+(\hat{h}_e)$ два из них стягиваются в точки $-a - \hat{t}_2$ и $a + \hat{t}_2$, где $\hat{t}_2 = \frac{-c_2 - \sqrt{c_2^2 + 3c_3 h}}{3c_3}$. Таким образом, выбранное глобальное сечение прообраза $\mathcal{F}^{-1}(O(h_e, f_e))$, ограниченное на уровень энергии $H = \hat{h}_e$, послойно гомеоморфно расслоенному кольцу, изображенному на рис. 4.41. При $\hat{h}_e \rightarrow h_e - 0$ особые точки этого сечения $-a - \hat{t}_1$ и $-a - \hat{t}_2$, а также точки $a + \hat{t}_1$ и $a + \hat{t}_2$, сливаются вместе и исчезают при $\hat{h}_e > h_e$. Таким образом, все глобальное сечение (база расслоения) имеет структуру слоения Лиувилля, изображенную на

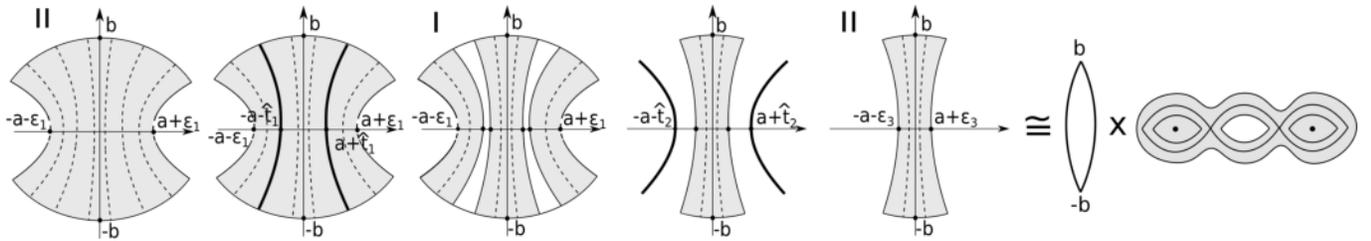


Рис. 4.41: Изменение области возможного движения при $H = \hat{h}_e < h_e$

рис. 4.27, *d*. Весь прообраз окрестности $O(h_e, f_e)$ послойно гомеоморфен прямому произведению полученной трехмерной базы на окружность S^1 .

Случай G_4

Рассмотрим случай G_4 . В отличие от случая G_3 кратный корень $t = \hat{\lambda}$ многочлена $V(t)$ лежит в интервале $(-b, 0)$. Образ отображения момента в окрестности точки (h_e, f_e) устроен аналогично, при этом камере I соответствует область возможного движения, ограниченная тремя софокусными эллипсами, а камере II соответствует область, ограниченная одним эллипсом (см. рис. 4.42). Отметим, что прообраз этой окрестности в фазовом пространстве состоит из двух компонент связности, отвечающих за движение по часовой стрелке и против часовой стрелки в областях возможного движения. Здесь структуру тривиального расслоения на окружности задает разбиение этих областей на софокусные эллипсы, при этом в качестве его базы выберем сечение, образ которого при проекции на бильярд лежит на луче оси $x = 0$ при $y > 0$. Зафиксируем значение гамильтониана $H = \hat{h}_e < h_e$. При $f < d_-(\hat{h}_e)$ в образе сечения лежит один отрезок $[\varepsilon_1 + b, b]$, прообраз которого гомеоморфен окружности. При $f = d_-(\hat{h}_e)$ этому образу также принадлежит точка $b + \hat{t}_1$, которая вырастает в отрезок $[\varepsilon_3 + b, \varepsilon_2 + b]$. При $f = d_+(\hat{h}_e)$ эти два отрезка сливаются в один в точке $b + \hat{t}_2$, что соответствует перестройке двух окружностей в одну через особый слой 2-атома B . Следовательно, сечение прообраза $\mathcal{F}^{-1}(O(h_e, f_e))$, ограниченное на уровень энергии $H = \hat{h}_e$, имеет структуру, изображенную на рис. 4.42. При

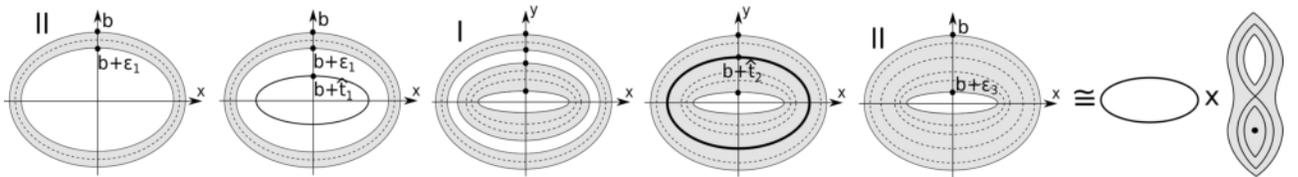


Рис. 4.42: Изменение области возможного движения при $H = \hat{h}_e < h_e$

$\hat{h}_e \rightarrow h_e - 0$ особые точки $b + \hat{t}_1$ и $b + \hat{t}_2$ сливаются и исчезают при $\hat{h}_e > h_e$. Таким образом, слоевание Лиувилля всего сечения (базы расслоения) имеет структуру, изображенную на рис. 4.27, *e*, а вся окрестность особого слоя послойно гомеоморфна прямому произведению полученной базы на окружность.

Случай G_5

Наконец, рассмотрим случай G_5 . Подставляя значения интегралов $H = h_0$ и $F = f_0$ в формулу многочлена $V(t)$ получим, что он имеет два корня $t = 0$ и $t = t_1$, причем первый из них – кратный. Как и в случаях G_1 и G_2 , здесь возникает восемь подслучаев в зависимости от знака параметра c_3 и расположения корня t_1 . Однако можно показать, что при $c_3 > 0$, а также $c_3 < 0$ и $t_1 > 0$, образ отображения момента в окрестности точки (h_0, f_0) имеет лишь одну гладкую дугу бифуркационной диаграммы, представляющую собой дугу кривой $f = d_-(h)$, переходящую в луч $f = 0$ при $h > 0$. Следовательно, критическая окружность, образ которой лежит на границе биллиарда $\lambda = 0$, не является “вырожденной” в смысле структуры слоения Лиувилля в ее окрестности. Кроме того, при $c_3 < 0$ и $t_1 > -a$ многочлен $V(t)$ принимает положительные значения на отрезке $[-a, -b]$, что означает отсутствие движения для данных значений интегралов. Таким образом, имеют место два подслучая: $c_3 < 0$ и $-a < t_1 < -b$, а также $c_3 < 0$ и $-b < t_1 < 0$. Рассмотрим первый из них. Точка (h_0, f_0) является точкой возврата дуг бифуркационной диаграммы $f = d_+(h)$ и $f = 0$, которые разбивают образ отображения момента на две камеры. Области возможного движения, соответствующие значениям интегралов каждой камеры, изображены на рис. 4.43, *b*. Проведем рассуждения, аналогичные случаю G_3 , однако теперь в качестве глобального сечения возьмем то, образ которого при проекции на биллиард лежит на оси $x = 0$. Результирующее слоение аналогично этому случаю (см. рис. 4.27, *d*). Для остав-

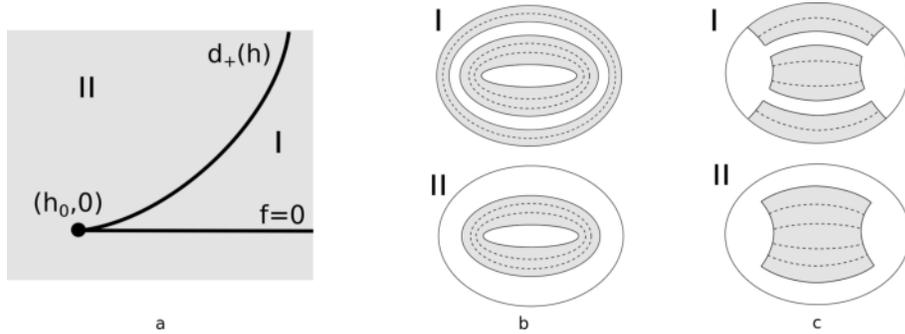


Рис. 4.43: Случай G_5 . На рис. *a* изображен образ отображения момента в окрестности точки $(h_0, 0)$. На рис. *b* и *c* изображены области возможного движения для подслучаев $c_3 < 0$, $-a < t_1 < -b$ и $c_3 < 0$, $-b < t_1 < 0$ соответственно.

шегося подслучая $c_3 < 1$, $-b < t_1 < 0$ области возможного движения, соответствующие камерам I и II образа отображения момента, имеют вид, изображенный на рис. 4.43, *c*. Этот подслучай полностью аналогичен случаю G_4 . Соответствующее слоение изображено на рис. 4.27, *e*.

Таким образом, были рассмотрены все случаи вырожденных орбит ранга 1 с точки зрения структуры слоения Лиувилля инвариантных четырехмерных окрестностей слоев, содержащих эти орбиты. Теорема доказана. \square

4.2 Реализация фокальных особенностей бильярдными книжками, снабженными потенциалом Гука

В предыдущем разделе было показано, что эллиптический бильярд, снабженный потенциалом четвертой степени, обладает невырожденными особенностями типа центр-центр, центр-седло либо седло-седло определенного вида. Разобраный метод дает базу для дальнейшего исследования случая потенциала общего вида, и, как следствие, инструментарий для задачи реализации произвольной особенности типа центр-седло или седло-седло. Однако, эллиптическим бильярдам в общем случае не характерна особенность типа фокус-фокус. В данном разделе мы переходим к предельному случаю, для которого бильярдный стол становится круговым, т.е. $a = b$.

4.2.1 Бильярд с потенциалом Гука в круге

Рассмотрим бильярдный стол $D \subset \mathbb{R}^2(x, y)$, являющийся кругом радиуса $R = 1$ с центром в точке $(0, 0)$. Введем на этом столе центральный отталкивающий потенциал Гука $k(x^2 + y^2)/2$, где $k < 0$. Иными словами, это эллиптический бильярд, рассмотренный в главе 2, в предельном случае $a = b = 1$. Напомним, что такой бильярд допускает первые интегралы вида

$$H = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + \frac{k}{2}(x^2 + y^2),$$

$$F = p_x^2 + p_y^2 - (xp_y - p_x y)^2 + k(x^2 + y^2) = H - (xp_y - p_x y)^2$$

Таким образом, функция $G = xp_y - p_x y$ также является первым интегралом системы. В дальнейшем вполне интегрируемая система будет рассматриваться с парой интегралов (H, G) .

Утверждение 4.2.1. *Образ фазового пространства $\mathcal{F}(M^4)$ бильярда D при отображении момента $\mathcal{F} = (H, G)$ изображен на рис. 4.44. Бифуркационная диаграмма состоит из параболы и изолированной точки: начала координат. Прообраз этой точки соответствует особому слою невырожденной особенности типа фокус-фокус. В прообразе каждой точки параболы лежит критическая окружность, и соответствующий 3-атом имеет тип A . Прообраз любой другой точки образа отображения момента гомеоморфен двумерному тору T^2 .*

Доказательство. 1. Каждая точка из бифуркационной диаграммы принадлежит к одному из двух классов. Первыми являются \mathcal{F} -образы критических точек (x, y, \dot{x}, \dot{y}) отображения \mathcal{F} , лежащих на удалении от границы D , т.е. при $x^2 + y^2 < 1$. Вторые являются \mathcal{F} -образами точек, где фазовое пространство было склеено по отражению от границы.

Вычислим дифференциалы dH, dG и косые градиенты.

$$dH = kx dx + ky dy + \dot{x} d\dot{x} + \dot{y} d\dot{y}, \quad \text{sgrad } H = -k\dot{x} dx - k\dot{y} dy + x d\dot{x} + y d\dot{y},$$

$$dG = ydx - xdy - ydx + xdy, \quad \text{sgrad } G = ydx - xdy + ydx - xdy.$$

В точке $(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (0, 0, 0, 0)$ имеем $dH = dG = \vec{0}$, т.е. это критическая точка ранга 0. Несложно проверить, что при $k < 0$ других критических точек у системы нет.

Определим тип локальной особенности в точке $(0, 0, 0, 0)$. Вычислим линейризации A_H и A_G векторных полей $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } G$:

$$A_H = \omega^{-1}d^2H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_G = \omega^{-1}d^2G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим линейную комбинацию $\lambda A_H + \mu A_G$ этих операторов. При $\lambda = \mu = 1$ ее собственные значения имеют вид $\pm i \pm \sqrt{-k}$ для каждой возможной пары знаков. Они попарно различны, отличны от нуля и не являются вещественными или чисто мнимыми при $k < 0$. Следовательно, данная критическая точка является невырожденной и имеет тип фокус-фокус при $k < 0$. Ее образом при отображении $\mathcal{F} = (H, G)$ является начало координат.

2. Для каждой фиксированной пары значений (h, g) отображения момента $\mathcal{F} = (H, G)$ опишем траектории бильярда на столе D и область возможного движения, т.е. проекцию слоя Лиувилля на D . В полярных координатах (r, ϕ) имеем

$$H = \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2}{2} + \frac{kr^2}{2}, \quad G = r^2\dot{\phi}.$$

При $g > 0$ частица движется против часовой стрелки, а при $g < 0$ — по часовой стрелке. В случае $g = 0$ имеем два случая. В первом случае $\dot{\phi} = 0$, и частица движется по диаметру круга D . Во втором случае $r = 0$: частица находится в центре стола D , где координаты r, ϕ не регулярны.

Вычислим \dot{r} при $r > 0$. Выразив $\dot{\phi}$ из формулы G и подставив в уравнение для H , имеем

$$\dot{r}^2 = 2h - kr^2 - g^2/r^2 \geq 0. \quad (4.2.1)$$

Следовательно, область возможного движения задается неравенствами на r

$$-kr^4 + 2hr^2 - g^2 \geq 0, \quad r \leq 1.$$

Дискриминант левой части $4h^2 - 4kg^2$ всегда не меньше нуля, поскольку $k < 0$. При этом меньший корень $(-h - \sqrt{h^2 - kg^2})/(-k) \leq 0$. Следовательно, область возможного движения является пересечением стола D , заданного условием $r \leq 1$, и внешности круга $r \geq r_0 := \sqrt{(-h + \sqrt{h^2 - kg^2})/(-k)}$. При следующем условии она непуста и является круговым кольцом (или диском D целиком, в случае $g = 0, h \geq 0$), см. рис 4.44:

$$-h + \sqrt{h^2 - kg^2} \leq -k \quad \iff \quad h \geq (g^2 + k)/2.$$

Правое неравенство задает образ отображения момента \mathcal{F} . Его границей является парабола $h = (g^2 + k)/2$. Следовательно, бифуркационная диаграмма состоит из этой параболы и точки $(0, 0)$ — образа особой точки фокус-фокус.

3. Прообраз любой точки, лежащей в образе отображения момента, гомеоморфен тору. Действительно, пусть $g \neq 0$ либо $g = 0$ и $h < 0$. Тогда $r_0 \neq 0$, и область возможного движения является кольцом, заключенным между парой концентрических окружностей. Каждой точке этого кольца, согласно формуле 4.2.1, соответствуют два вектора скорости, кроме граничных точек, где эти вектора сливаются в один вектор. Следовательно, в прообразе области возможного движения в M^4 лежат два цилиндра, склеенных на своих границах с сохранением ориентации. Такой слой гомеоморфен 2-тору.

Пусть теперь $g = 0$, но $h > 0$. Область возможного движения в этом случае полностью заполняет бильярдный стол. Вектора скорости направлены по радиусам области. Следовательно, каждой нецентральной точке соответствуют два вектора скорости, кроме границы бильярда, где эти вектора склеиваются согласно закону отражения. Центру же бильярда соответствует окружность векторов. Рассмотрим прообраз области возможного движения с выколотым центром. Он гомеоморфен цилиндру $S^1 \times (0, 1)$. Добавим к полученному цилиндру прообраз точки $(0, 0)$, т.е. окружность. Полученный прообраз, таким образом, станет гомеоморфен цилиндру $S^1 \times [0, 1]$, для которого точки типа $(\alpha, 0)$ склеены с точками $(\alpha + \pi, 1)$. Несложно заметить, что полученная поверхность также является 2-тором.

В случае равенства $h = (g^2 + k)/2$ имеем, что область возможного движения одномерна и является окружностью — границей бильярда. Над каждой ее точкой висит один касательный к ней вектор скорости фиксированной длины, причем его направление зависит от знака g . Утверждение доказано. \square

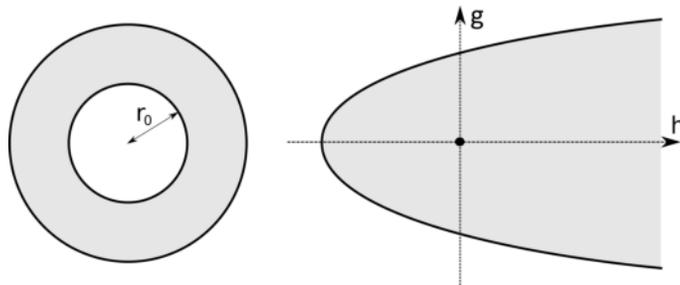


Рис. 4.44: (а) область возможного движения бильярда D при фиксированных $h > (g^2 + k)/2$, (б) образ отображения момента (H, G) для бильярда D и его бифуркационная диаграмма: парабола $h = (g^2 + k)/2$ и образ $(0, 0)$ точки фокус-фокус.

Замечание 4.3. Отметим, что рассмотренная система лиувиллево эквивалентна случаю Лагранжа динамики твердого тела с параметрами $g^2 < 4$ и $\beta \neq 0$.

4.2.2 Вычисление монодромии особенности биллиарда в круге D и на книжке $\mathcal{B}_n = nD$

Для определения полулокального типа особенности в прообразе начала координат у биллиарда D и книжки \mathcal{B}_n , склеенной из n экземпляров такого стола по циклической перестановке $(1, 2, \dots, n)$, вычислим числовую метку монодромии этой особенности, т.е. целочисленный инвариант матрицы перехода между допустимыми базисами до и после обхода вокруг нее. Для этого мы найдем допустимые базисы и инварианты Фоменко–Цишанга для двух изоэнергетических поверхностей, на которых $H = \pm\varepsilon$ (более точно, вместо левой прямой $H = -\varepsilon$ мы возьмем некоторую параболу на плоскости Ohg , на которой $g'_h > 0$).

Теорема 4.4. Числовая метка монодромии особенности в прообразе точки $(0, 0)$ равна n для биллиардной системы с отталкивающим потенциалом Гука на книжке \mathcal{B}_n , склеенной из n экземпляров стола D плоского биллиарда внутри круга по перестановке $(1, 2, \dots, n)$ на их окружности склейки.

Доказательство. 1. Сначала рассмотрим самый простой случай биллиарда $\mathcal{B}_1 = D$ (плоский биллиард). Зафиксируем значение гамильтониана $H = h = -\varepsilon < 0$. На рис. 4.45 изображено изменение области возможного движения и поведение траектории с ростом интеграла G . Такой перестройке соответствует молекула $A - A$ с метками $r = \infty$ и $\varepsilon = 1$, а соответствующее Q^3 гомеоморфно $S^1 \times S^2$. Здесь гладкая дуга траектории для $G < 0$ стягивается на отрезок радиуса и разворачивается в дугу для $G > 0$.

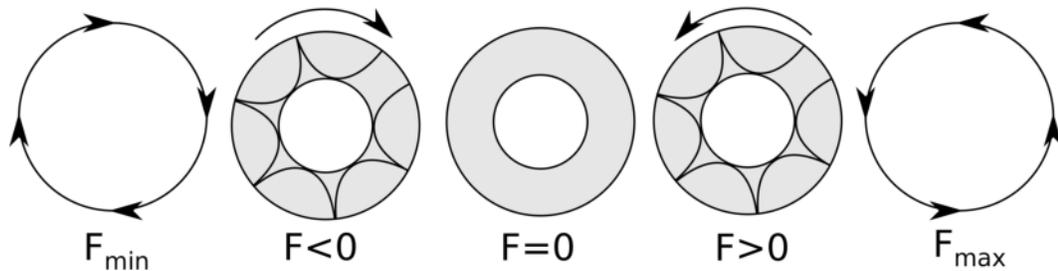


Рис. 4.45: Область возможного движения и поведение траекторий биллиарда $\mathcal{B}_1 = D$ при фиксированном значении $h = -\varepsilon < 0$ энергии H в зависимости от значения g интеграла G .

2. Зафиксируем теперь значение $h = \varepsilon > 0$ гамильтониана H . В отличие от предыдущего случая, область возможного движения при $g = 0$ становится всей биллиардной областью, а гладкие дуги траектории распрямляются в диаметры и затем снова искривляются. Направление обхода точки также определяется знаком $G = g$. Теперь на каждом торе Лиувилля выберем цикл γ , проекция которого на биллиарде лежит на соседних дугах траектории движения и дуге внутренней границы области возможного движения (голубой цикл на рис. 4.46). Несложно заметить, что при изменении параметра g соответствующий цикл γ также меняется непрерывно.

Но при $g < 0$ получим $\gamma = \lambda_-$ (т.е. цикл, стягивающийся в точку внутри полнотория A), а при $g > 0$ получим $\gamma = \lambda_+ + \mu_+$ (сумма исчезающего цикла и дополняющего его до базиса на граничном торе другого полнотория A). При этом для дополняющих циклов μ , гомологичных внутри полноторий A критическим траекториям (движениям по и против часовой стрелки) выполнено соотношение $\mu_+ = -\mu_-$. Таким образом, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} \lambda_+ \\ \mu_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_- \\ \mu_- \end{pmatrix}$. Следовательно, такой перестройке соответствует молекула $A - A$ с метками $r = 0$ и $\varepsilon = 1$, а соответствующее изоэнергетическое многообразие Q^3 гомеоморфно трехмерной сфере S^3 .

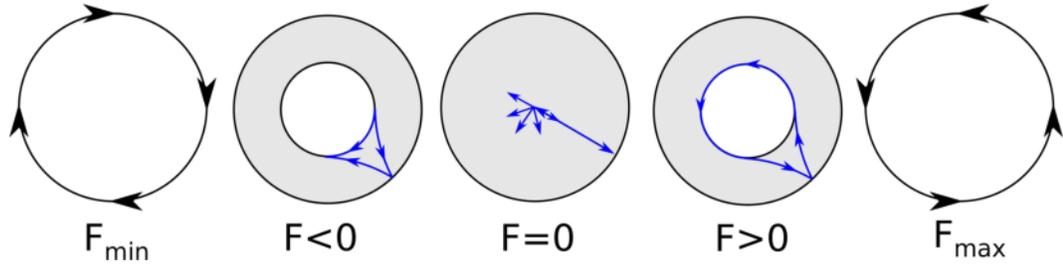


Рис. 4.46: Область возможного движения и поведение траекторий бильярда $\mathcal{B}_1 = D$ при фиксированном значении $h = \varepsilon > 0$ энергии H в зависимости от значения g интеграла G .

Покажем, что полный прообраз точки $(h, g) = (0, 0)$ является “тором с перетяжкой”. Рассмотрим близкий тор со значениями $h > 0, g = 0$. Этот тор отвечает движению вдоль диаметров исходного круга. При стремлении h к нулю скорость вблизи центра круга будет уменьшаться. При $h = 0$ получаем траектории, которые оканчиваются ровно в центре. Теперь центральной точке круга на торе соответствует не окружность (пары точка-единичный вектор скорости), а одна точка. То есть для получения полного прообраза необходимо стянуть нетривиальный цикл на торе Лиувилля в точку. В результате будет получен искомый “тор с перетяжкой”.

Отметим, что аналогичная картина имеет место и для упомянутого случая Лагранжа динамики твердого тела.

3. Теперь сделаем небольшое отступление. Найдем множество значений h, g интегралов H и G , для которых радиус внутренней границы равен заданному числу $r_0 = c$, где $0 < c < 1$. В этом случае решаем уравнение $(-h + \sqrt{h^2 - kg^2})/(-k) = c$ и получаем параболу $h = (g^2 + c^2k)/(2c)$. Теперь в качестве контура обхода вокруг точки фокус-фокус выберем контур, состоящий из дуги этой параболы и отрезка вертикальной прямой (рис. 4.47, а). Изменение траектории движения при обходе этого контура изображено на рис. 4.47, б. На торе Лиувилля, соответствующем точке 1, выберем базис следующим образом: образ цикла λ лежит на границе бильярда, а образ цикла μ идет по радиусу. Теперь воспользуемся тем же трюком, каким мы пользовались для подсчета матрицы склейки для случая $h > 0$, а именно рассмотрим цикл γ , выбранный аналогично. В точке 1 $\gamma = \mu$ и остается таким при движении от 1 к 2. При движении от 2 к 3 цикл γ изменяется тем же образом, что и раньше, и при переходе от 3 к 1 становится равен $\lambda + \mu$. При этом цикл

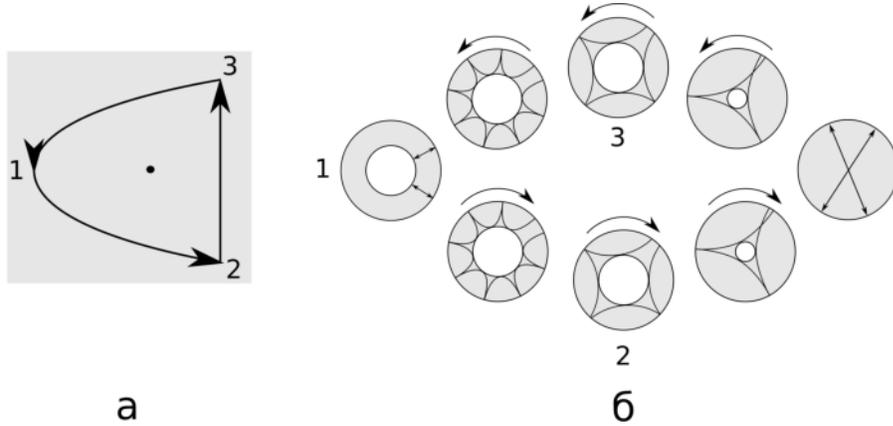


Рис. 4.47: (а) кривая в $\mathbb{R}^2(h, g)$, обходящая особую точку, (б) движения частицы в ее прообразе.

λ при таком же обходе не изменился. Следовательно, матрица монодромии имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Мы рассмотрели обычный бильярд в диске с потенциалом. Склеим теперь бильярдную книжку \mathcal{B}_n из n копий такого бильярда по их общей граничной окружности с циклической перестановкой $(1, 2 \dots n)$. Отметим, что в силу того, что область возможного движения всегда ограничена границей бильярда, такая склейка не добавит системе новых бифуркаций. Следовательно, бифуркационная диаграмма останется прежней.

Тем не менее, прообраз точки $(h, g) = (0, 0)$ теперь устроен сложнее. Рассмотрим тор Лиувилля, соответствующий значениям $h > 0$, $g = 0$. Он склеен из n торов Лиувилля для каждого листа бильярдной книжки, разрезанных и склеенных в единый тор по фиксированным циклам — прообразам границы кругового бильярда. Без ограничения общности будем считать эти циклы параллелями торов. Заметим, что эти циклы гомологичны окружностям, проекция которых на бильярд попадает в центр круга. Поэтом при стремлении h к нулю необходимо стянуть каждую из n параллелей в одну точку. В результате получим тор с n "перетяжками".

Как и ранее, значениям $h < 0$ соответствует следующий инвариант слоения Лиувилля на такой изоэнергетической поверхности Q_h^3 : молекула $A - A$ с метками $r = \infty$ и $\varepsilon = 1$, а Q^3 гомеоморфно $S^1 \times S^2$. Для положительных значений гамильтониана положим цикл γ аналогично, но теперь он будет проходить через каждый лист. Таким образом, при $G > 0$ этот цикл равен $\lambda_+ + n\mu_+$ (он обходит вокруг каждого из n центров кругов). Следовательно, этому случаю соответствует молекула $A - A$ с метками $r = 1/n$ и $\varepsilon = 1$, а Q^3 гомеоморфно линзовому пространству $L(1, n)$. Из тех же рассуждений следует, что матрица монодромии при таком же выборе базиса для тора в точке 1 имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$. Теорема доказана. \square

Тем самым, один из важных классов полулокальных особенностей — невырожденные фокусные особенности — удалось полностью реализовать в топологической категории интегрируемых бильярдами.

Глава 5

Интегрируемые магнитные бильярды

В последней главе мы разберем другой класс интегрируемых бильярдов. Теперь вместо плоских элементарных бильярдов, снабженных потенциалом, рассмотрим бильярды, которые подвержены действию постоянного магнитного поля. Будет ли сохраняться их интегрируемость? Частично ответ на этот вопрос был предложен М. Робником и М. Берри в [29]. В этой работе было показано, что магнитный бильярд в области, ограниченной эллипсом, имеет хаотическую динамику почти на всех уровнях энергии H , из чего можно заключить, что система не является интегрируемой. Полный ответ на вопрос, в каких областях сохраняется интегрируемость магнитного бильярда, был дан А.Е.Мироновым и М.Бялым в [30]. В своей работе авторы доказали следующую теорему.

Теорема 5.1 (Миронов, Бялый). *Пусть магнитный бильярд задан в выпуклой области \mathcal{B} , ограниченной кусочно-гладкой кривой, и магнитное поле имеет индукцию β . Если граница $\partial\mathcal{B}$ не есть окружность, магнитный бильярд не является алгебраически интегрируемым для любых значений индукции β , кроме, быть может, конечного числа таких значений.*

Мы изучим структуру слоения Лиувилля двух интегрируемых плоских случая: бильярд в круговой области, и бильярд в кольце, ограниченном парой концентрических окружностей. Анализ траекторий и слоев двух этих базовых случая позволят нам изучить структуру слоения топологических бильярдов, бильярдная книжка которых склеена из рассмотренных элементарных кусков. Основным результатом являются два алгоритма. Первый алгоритм берет на вход конфигурацию топологического бильярда и по ней строит соответствующий инвариант Фоменко–Цишанга. Второй алгоритм обратен первому: на вход он берет меченую молекулу и выдает конфигурацию топологического бильярда, имеющего соответствующий инвариант.

5.1 Постановка задачи. Траектории

Рассмотрим плоский математический бильярд внутри области \mathcal{B} , ограниченной окружностью либо парой концентрических окружностей. На материальную точку единичной массы и

заряда (бильярдный шар) действует постоянное магнитное поле индукции β , ортогональное к плоскости бильярдного стола. Эта система гамильтонова на фазовом пространстве $T^*\mathcal{B}$ со стандартной симплектической структурой и гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \left(\left(p_x - \frac{\beta}{2} y \right)^2 + \left(p_y + \frac{\beta}{2} x \right)^2 \right) \quad (5.1.1)$$

Из уравнений Гамильтона следует, что компоненты вектора скорости в декартовых координатах выражаются через импульсы следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x - \frac{\beta}{2} y, \\ \dot{y} = p_y + \frac{\beta}{2} x, \end{cases}$$

а гамильтониан становится кинетической энергией $H = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2}$.

Гамильтониан имеет следующий геометрический смысл. Как известно, заряд под действием постоянного магнитного поля движется по дуге окружности фиксированного радиуса L против часовой стрелки (эта окружность называется окружностью Лармора). Модуль скорости точки остается постоянным и равен βL . Гамильтониан нашей системы H зависит от L квадратичным образом $H = \frac{(\beta L)^2}{2}$. Следовательно, любая траектория системы кусочно-гладкая и состоит из дуг окружностей Лармора постоянного радиуса.

Покажем, что система является интегрируемой, а именно, что следующая функция является первым интегралом:

$$G = xp_y - yp_x \quad (5.1.2)$$

Действительно, в точках гладкости имеем

$$\{H, G\} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial p_y} \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial p_x} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial p_y} = 0$$

Следовательно, функция G сохраняется на траекториях между ударами о стенку. В точках отражения перепишем функцию в терминах вектора скорости

$$G = \beta(x^2 + y^2) - 2(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Каждое их слагаемых сохраняется, согласно закону отражения. Таким образом, функция является первым интегралом нашей кусочно-гладкой системы. Независимость первых интегралов H и G также проверяется непосредственными вычислениями. Иными словами, мы доказали следующую лемму.

Лемма 5.2. *Функции H и G являются первыми интегралами магнитного бильярда в круговой (кольцевой) области. Эти функции функционально независимы почти всюду и находятся в инволюции относительно стандартной симплектической структуры на M^4 . Кроме того, интеграл G является функцией Ботта (то есть критические подмногообразия функции G являются невырожденными). Таким образом, магнитный бильярд в круговой (кольцевой) области является вполне интегрируемым по Лиувиллю.*

Первый интеграл G также имеет геометрический смысл. Рассмотрим функцию

$$R = \frac{1}{\beta} \sqrt{2H + \beta G},$$

которая также является первым интегралом системы. Как было отмечено, любая траектория бильярда состоит из дуг окружностей Лармора постоянного радиуса. Оказывается, центры этих окружностей отстоят от центра бильярда на расстояние R . Следовательно, параметры L и R полностью определяют траекторию бильярдного шара с точностью до поворота вокруг центра бильярда. На рис. 5.1 представлены примеры траекторий.

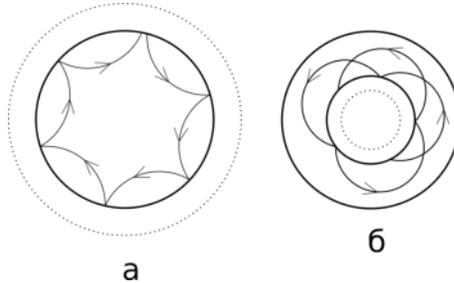


Рис. 5.1: Примеры траекторий движения для кругового и кольцевого магнитного бильярда

В дальнейшем, для описания структуры слоения Лиувилля и поведения траекторий мы будем использовать пару первых интегралов (L, R) вместо стандартной пары (H, G) .

5.2 Области возможного движения. Бифуркационные диаграммы

Найдем всевозможные области возможного движения при любых значениях интегралов L и R для кругового и кольцевого бильярдов.

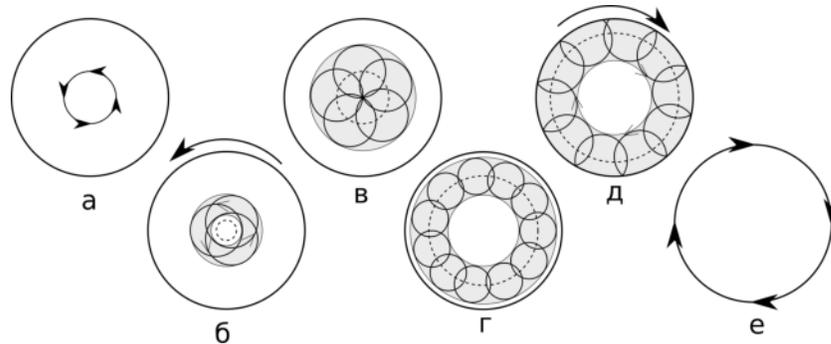


Рис. 5.2: Области возможного движения при $0 < L < \frac{1}{2}R_0$

Начнем с кругового бильярда. Обозначим радиус граничной окружности бильярда за R_0 . Зафиксируем значение $0 < L < \frac{1}{2}R_0$. При $R = 0$ область возможного движения является одномерной и состоит из окружности Лармора радиуса L (рис. 5.2, а).

При $0 < R < L$ траекториями движения являются замкнутые окружности Лармора, которые целиком лежат внутри бильярдной области и обходят центр бильярда. Следовательно, областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $L - R$ и $R + L$, при этом движение точки в этой области происходит против часовой стрелки (рис. 5.2, б).

При $L = R$ траекториями также являются окружности Лармора, которые однако проходят через центр бильярда. Областью возможного движения является круговая область, ограниченная окружностью радиуса $R + L$ (рис. 5.2, в).

При $L < R \leq R_0 - L$ траекториями также являются окружности Лармора. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $R - L$ и $R + L$ (рис. 5.2, г). Отметим, что вплоть до значения $R = R_0 - L$ все траектории были замкнутыми (в определениях выше это означает что все торы являются резонансными).

При $R_0 - L < R < L + R_0$ траектория становится кусочно-гладкой, состоящей из дуг окружностей Лармора. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $R - L$ и R_0 , при этом точка движется в этой области по часовой стрелке (рис. 5.2, д).

При $R = L + R_0$ область возможного движения вырождается в окружность радиуса R_0 , и затем при $R > L + R_0$ окружности Лармора на пересекаются с бильярдной областью, а область возможного движения является пустым множеством (рис. 5.2, е).

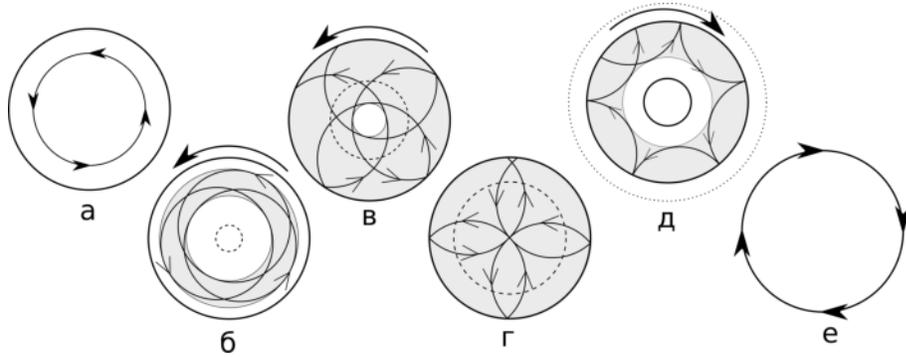


Рис. 5.3: Области возможного движения при $\frac{1}{2}R_0 \leq A < R_0$

Зафиксируем теперь $\frac{1}{2}R_0 \leq L < R_0$. При $0 < R \leq R_0 - L$ траекториями движения являются замкнутые окружности Лармора, целиком лежащие внутри бильярдной области. Следовательно, областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $L - R$ и $R + L$, при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 5.3, б).

При $R_0 - L < R < L$ траектория становится кусочно-гладкой, состоящей из дуг окружностей Лармора. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $L - R$ и R_0 , при этом точка движется в этой области против часовой стрелки

(рис. 5.3, в).

При $L = R$ каждая дуга окружностей Лармора проходит через центр бильярда. Областью возможного движения является вся бильiardная область (рис. 5.3, г).

При $L < R < L + R_0$ областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $R - L$ и R_0 , при этом точка движется в этой области по часовой стрелке (рис. 5.3, г).

При $R = L + R_0$ область возможного движения вырождается в окружность радиуса R_0 , и затем при $R > L + R_0$ окружности Лармора на пересекаются с бильiardной областью, а область возможного движения является пустым множеством (рис. 5.3, е).

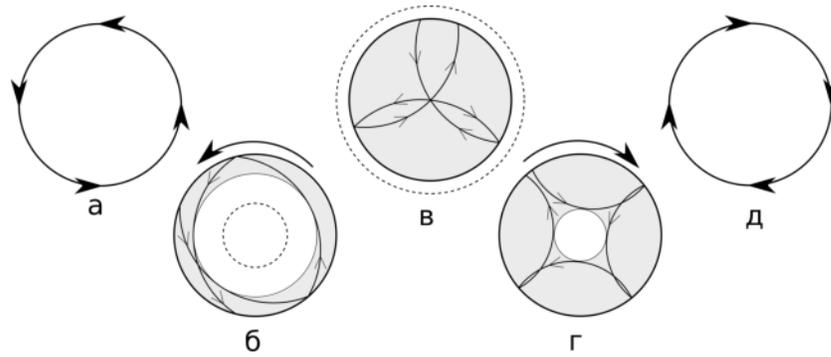


Рис. 5.4: Области возможного движения при $L \geq R_0$

Наконец, зафиксируем значение $L \geq R_0$. При $R < L - R_0$ окружности Лармора не пересекают бильiardную область, и область возможного движения пуста.

При $R = L - R_0$ область возможного движения одномерна и является граничной окружностью бильiardа (рис. 5.4, а).

При $L - R_0 < R < L$ траектория является кусочно-гладкой, состоящей из дуг окружностей Лармора. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $L - R$ и R_0 , при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 5.4, б).

Далее при дальнейшем росте значения интеграла R траектории и области возможного движения повторяют случай $\frac{1}{2}R_0 \leq L < R_0$.

Теорема 5.3. *Прообраз любой двумерной области возможного движения кругового магнитного бильiardа при проекции p (т.е. соответствующий слой слоения Лиувилля) гомеоморфен двумерному тору в M^4 .*

Доказательство. Доказательство полностью повторяет рассуждения в доказательстве пункта 3 утверждения 4.2.1. Действительно, в обеих ситуациях область возможного движения ограничена либо окружностью, либо парой концентрических окружностей (рис. 5.5). Внутренним точкам, отличным от центра, также соответствуют два вектора скорости, т.к. через каждую такую

точку проходят лишь две окружности Лармора. Если же область содержит центр бильярда, ему соответствует целая окружность векторов скорости. Таким образом, случаи эквиваленты с топологической точки зрения, и в прообразе области возможного движения лежит один 2-тор. \square

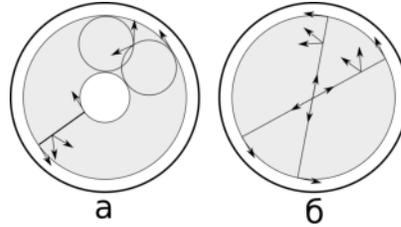


Рис. 5.5

Таким образом, при $0 < L < R_0$ и $0 < R < L + R_0$ и при $L \geq R_0$ и $L - R_0 < R < L + R_0$ прообраз соответствующей области возможного движения гомеоморфен двумерному тору. Граничные точки заданной области значений первых интегралов соответствуют особенностям слоения, а за ее пределами значения (L, R) не соответствуют движению. Таким образом, в нашем случае образ отображения момента имеет вид, изображенный на рис. 5.6. Бифуркационной диаграммой является граница изображенной области.

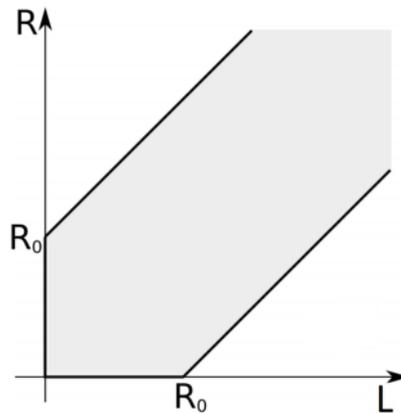


Рис. 5.6: Бифуркационная диаграмма кругового магнитного бильярда.

Рассмотрим теперь бильярд в кольцевой области. Пусть радиус внешней окружности равен R_0 , а радиус внутренней – r_0 . Проведем аналогичные рассуждения. Зафиксируем $L < r_0$. При $R < r_0 - L$ окружности Лармора на пересекаются с бильярдной областью, а область возможного движения является пустым множеством. При $R = r_0 - L$ область возможного движения одномерна и является окружностью радиуса r_0 (рис. 5.7, а).

При $r_0 - L < R < L + r_0$ траектория является кусочно-гладкой, состоящей из дуг окружностей Лармора. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная

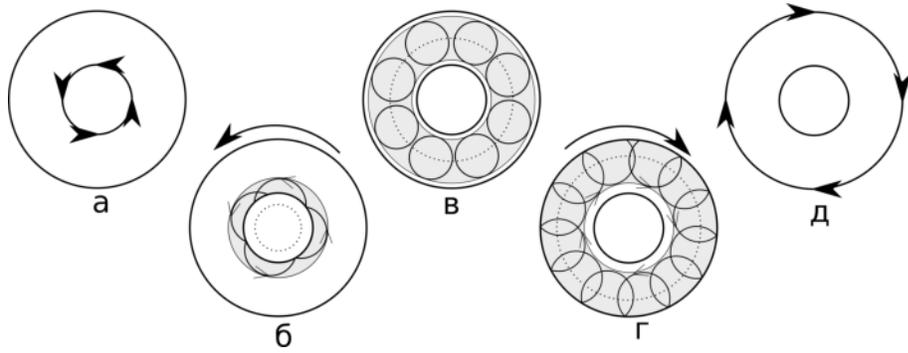


Рис. 5.7: Области возможного движения при $L < r_0$

окружностями радиусов r_0 и $R + L$, при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 5.7, б).

При $L + r_0 < R < R_0 - L$ траекториями являются окружности Лармора, полностью лежащие в бильярдной области. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $R - L$ и $R + L$ (рис. 5.7, в).

При $R_0 - L < R < L + R_0$ траектории опять становятся кусочно гладкими. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $R - L$ и R_0 , при этом точка движется в этой области по часовой стрелке (рис. 5.7, г). При $R = L + R_0$ область возможного движения вырождается в одномерную окружность, а при дальнейшем росте R она становится пустым множеством.

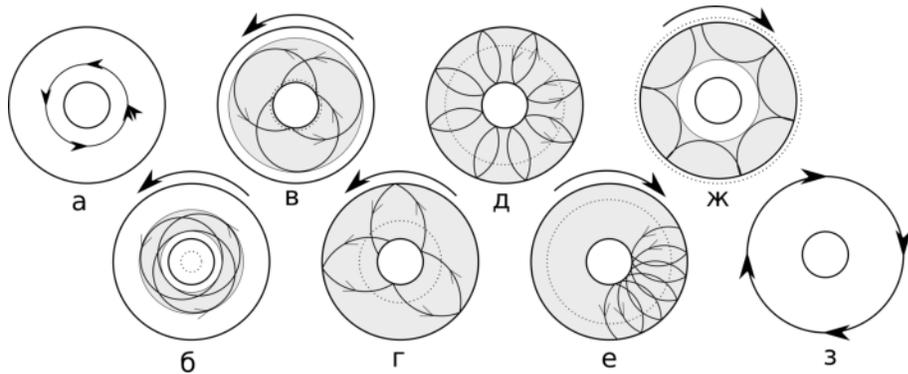


Рис. 5.8: Области возможного движения при $r_0 < L < \frac{1}{2}(r_0 + R_0)$

Теперь рассмотрим случай $r_0 < L < \frac{1}{2}(r_0 + R_0)$. При $R = 0$ областью возможного движения является окружность Лармора радиуса L (рис. 5.8, а).

При $0 < R \leq L - r_0$ траекториями являются окружности Лармора, полностью лежащие в бильярдной области. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $L - R$ и $L + R$, при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 5.8, б).

При $L - r_0 < R \leq R_0 - L$ траектории становятся кусочно-гладкими. Областью возможного

движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов r_0 и $R + L$, при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 5.8, в).

При $R_0 - L < R < L + r_0$ материальная точка соударяется как с внутренней стенкой бильярда, так и с внешней. Областью возможного движения становится вся бильiardная область, при этом характер движения в ней меняется из движения против часовой стрелки в движение по часовой стрелке (рис. 5.8, г, д, е).

При $L + r_0 \leq R < L + R_0$ материальная точка соударяется только с внешней стенкой. Область возможного движения ограничена окружностями радиусов $R - L$ и R_0 , при этом точка движется в этой области по часовой стрелке (рис. 5.8, ж).

При $R = L_0 + R$ область возможного движения вырождается в окружность радиуса R_0 , и с дальнейшим ростом значения R становится пустым множеством (рис. 5.8, з).

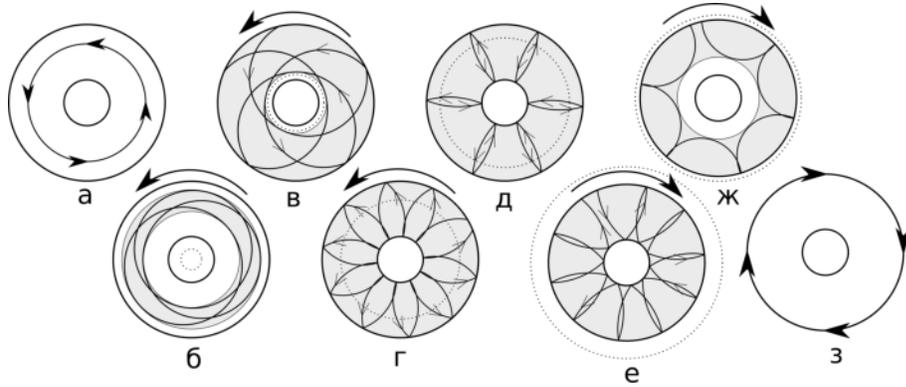


Рис. 5.9: Области возможного движения при $\frac{1}{2}(R_0 + r_0) < L < R_0$

Рассмотрим теперь случай $\frac{1}{2}(R_0 + r_0) < L < R_0$. При $0 < R \leq R_0 - L$ траекториями являются окружности Лармора, полностью лежащие в бильiardной области. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов $L - R$ и $R + L$, при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 5.9, б).

При $R_0 - L < R \leq L - r_0$ траектории становятся кусочно-гладкими. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов R_0 и $L - R$, при этом точка движется в этой области также против часовой стрелки (рис. 5.9, в).

При $L - r_0 < R < L + r_0$ материальная точка соударяется как с внутренней стенкой бильiardа, так и с внешней. Областью возможного движения становится вся бильiardная область, при этом характер движения в ней меняется из движения против часовой стрелки в движение по стрелке (рис. 5.9, г, д, е).

При $L + r_0 \leq R < L + R_0$ материальная точка соударяется только с внешней стенкой. Область возможного движения ограничена окружностями радиусов $R - L$ и R_0 , при этом точка движется в этой области по часовой стрелке (рис. 5.9, ж).

Наконец, зафиксируем значение $L > R_0$. При $R < L - R_0$ окружности Лармора не пересекают бильiardную область, и область возможного движения пуста. При $R = L - R_0$ областью

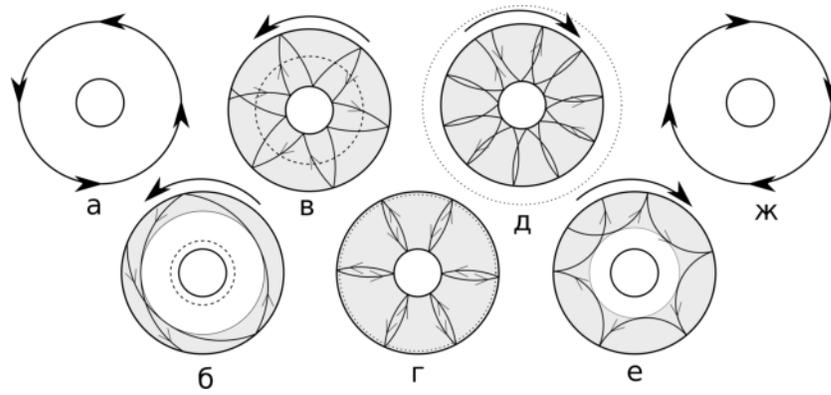


Рис. 5.10: Области возможного движения при $L > R_0$

возможного движения является окружность радиуса R_0 .

При $L - R_0 < R < L - r_0$ траектории кусочно-гладкие, состоящие из дуг окружностей Лармора. Областью возможного движения является кольцевая область, ограниченная окружностями радиусов R_0 и $L - R$, при этом точка движется в этой области против часовой стрелки (рис. 5.10, б). При дальнейшем росте значения R поведение траекторий и областей возможного движения не отличается от предыдущего случая $\frac{1}{2}(R_0 + r_0) < L < R_0$.

Для кольцевого бильярда верна теорема, аналогичная теореме 5.3.

Теорема 5.4. *Прообраз любой двумерной области возможного движения кольцевого магнитного бильярда при проекции p (т.е. соответствующий слой слоения Лиувилля) гомеоморфен двумерному тору в M^4 .*

Аналогично круговому бильярду, построим образ отображения момента и бифуркационную диаграмму кольцевого бильярда (рис. 5.11).

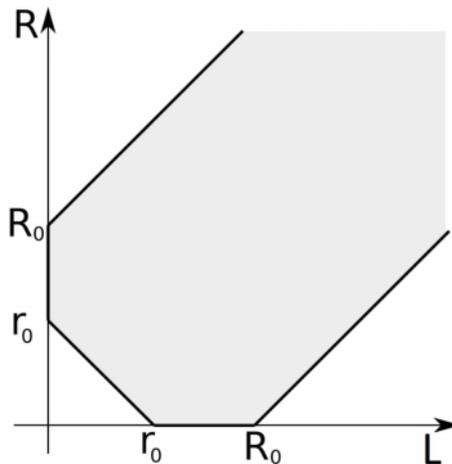


Рис. 5.11: Бифуркационная диаграмма кольцевого магнитного бильярда.

5.3 Инварианты Фоменко–Цишанга. Изоэнергетические многообразия

Изучим теперь топологию слоения Лиувилля изоэнергетического многообразия $Q^3 = \{X \in M^4 : L(X) = \text{const}\}$. Согласно теоремам 5.3 и 5.4, регулярные слои слоения Лиувилля гомеоморфны двумерным торам. Также заметим, что как для кругового бильярда, так и для кольцевого бильярда, любому регулярному значению интеграла L соответствуют лишь два критических слоя, гомеоморфных окружности, при этом их окрестность гомеоморфна 3-атому A . Следовательно, грубая молекула, соответствующая любому регулярному значению интеграла L , имеет вид $A - A$.

Теорема 5.5. *Для кругового магнитного бильярда изоэнергетическое многообразие Q^3 гомеоморфно трехмерной сфере S^3 при любом значении интеграла L . Соответствующий инвариант Фоменко–Цишанга имеет вид $A - A$ с метками $r = 0$ и $\varepsilon = 1$.*

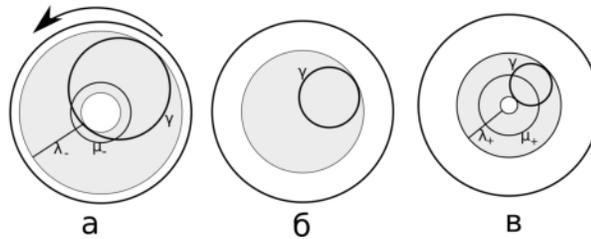


Рис. 5.12: Базисные циклы вблизи слоя $L = R$.

Доказательство. Рассмотрим случай $0 < R < \frac{1}{2}R_0$. Разобьем Q^3 на два полнотория, соответствующие $0 < R < L$ и $L < R < L + R_0$. Эти полнотория склеиваются на граничном слое $L = R$. На рис. 5.12 изображена проекция этого граничного слоя на бильярд, а также проекции регулярных слоев в окрестностях 3-атомов A с их допустимыми базисными циклами λ и μ . Заметим, что циклы γ , изображенные на рис. а и в, склеиваются с циклом γ на граничном слое (рис. б). При этом цикл γ на слое “а” гомологичен циклу $\pm\lambda_- + \mu_-$, а на слое “в” он гомологичен циклу λ_+ . Кроме того, цикл μ_+ склеивается с циклом $-\mu_-$ вследствие их противоположной ориентации (рис. 5.2). Следовательно, матрица склейки базисных циклов имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Такой матрице склейки соответствует метка $r = 0$ и метка $\varepsilon = 1$, а многообразию Q^3 гомеоморфно сфере S^3 .

Аналогичные рассуждения можно провести для случаев $\frac{1}{2}R_0 < A < R_0$ и $L > R_0$ с правильным выбором цикла γ .

Теорема доказана. □

Теорема 5.6. Для кольцевого магнитного бильярда изоэнергетическое многообразие Q^3 гомеоморфно произведению $S^1 \times S^2$ при любом значении интеграла L . Соответствующий инвариант Фоменко–Цишанга имеет вид $A - A$ с метками $r = \infty$ и $\varepsilon = 1$.

Доказательство. Из рис. 5.7, 5.8, 5.9 и 5.10 несложно заметить, что для всевозможных значений интеграла L базисные циклы λ и μ , соответствующие окрестностям двух 3-атомов A , склеиваются согласно правилу $\lambda_+ = \pm\lambda_-$ и $\mu_+ = -\mu_-$ (это связано с тем, что в отличие от кругового бильярда, бильярд в кольце не обладает перестройкой областей возможного движения через центр бильярда). Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Метка $r = \infty$, метка $\varepsilon = 1$, а изоэнергетическое многообразие Q^3 гомеоморфно $S^1 \times S^2$.

Теорема доказана. \square

Таким образом, мы полностью завершили топологический анализ интегрируемых магнитных бильярдов на плоских (элементарных) столах. Были вычислены их меченые молекулы для каждого значения энергии и определены классы гомеоморфности соответствующих изоэнергетических многообразий Q^3 . Отметим, что рассмотренные системы являются лиувиллево эквивалентными случаю Лагранжа динамики твердого тела на соответствующих уровнях энергии.

5.4 Изоинтегральное многообразие Q_R^3

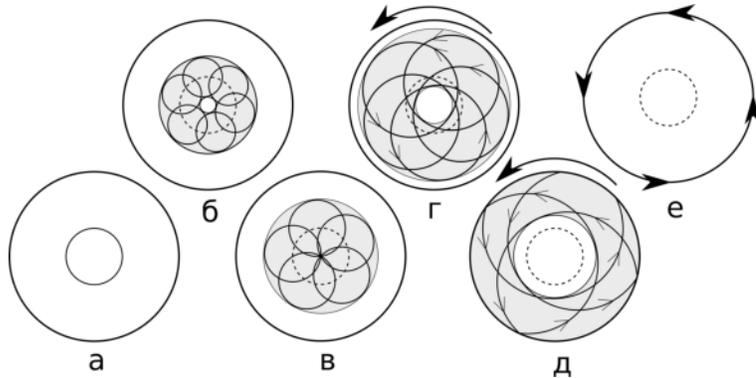


Рис. 5.13: Перестройка областей возможного движения при $0 < R < \frac{1}{2}R_0$

Рассмотрим теперь изоинтегральное многообразие $Q_R^3 = \{X \in M^4 : R(X) = const\}$ и проведем для него аналогичный анализ. Начнем с кругового бильярда. На рис. 5.13, 5.14 и 5.15 изображены перестройки областей возможного движения при фиксированном значении интеграла R и возрастающем значении интеграла L . Заметим, что как и в случае изоэнергетического многообразия Q^3 , соответствующая грубая молекула имеет тот же вид $A - A$. Как и раньше, метка $r = 0$, однако при $0 < R < R_0$ ориентация цикла μ_- вблизи минимального 3-атома A

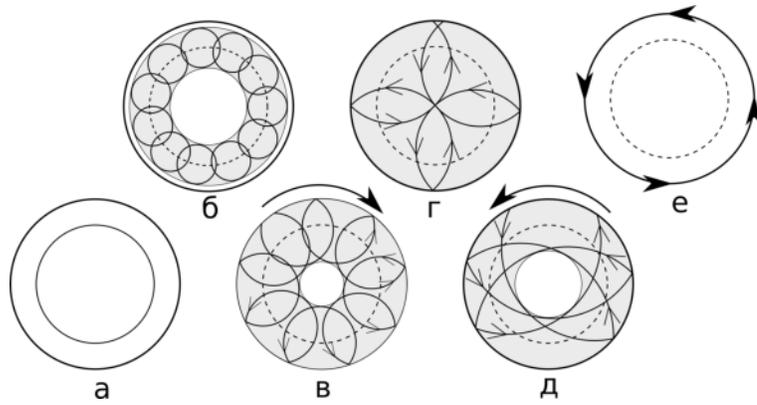


Рис. 5.14: Перестройка областей возможного движения при $\frac{1}{2}R_0 < R < R_0$

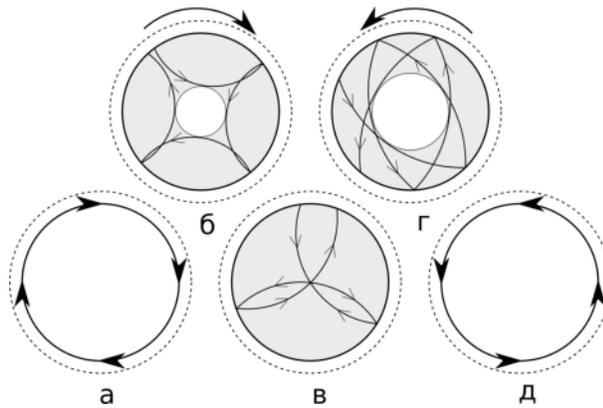


Рис. 5.15: Перестройка областей возможного движения при $R_0 < R$

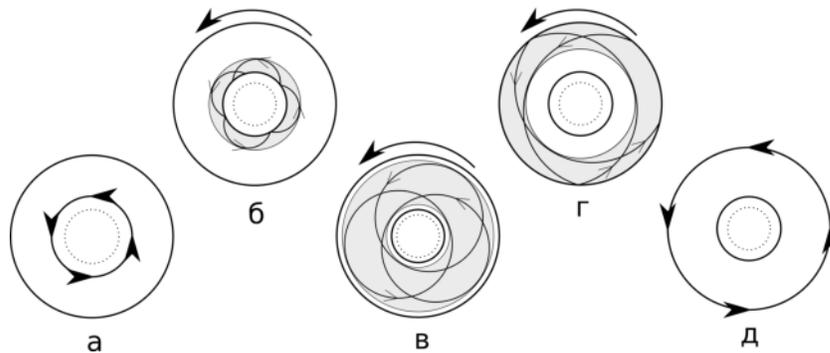


Рис. 5.16: Перестройка областей возможного движения при $0 < R < r_0$

не определена. Следовательно, метка ε не определена. Тем не менее, многообразие Q_R^3 также гомеоморфно трехмерной сфере S^3 .

Рассмотрим теперь кольцевой бильярд. Перестройки областей возможного движения при всевозможных фиксированных значениях интеграла R приведены на рис. 5.16, 5.17, 5.18 и 5.19. Как и в предыдущих случаях, грубая молекула имеет вид $A - A$. В случае $r_0 < R < R_0$ матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$, при этом знак невозможно определить в силу неопределенности

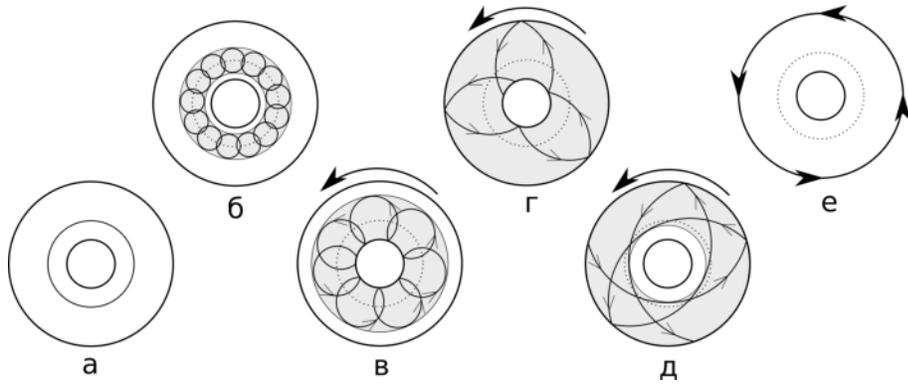


Рис. 5.17: Перестройка областей возможного движения при $r_0 < R < \frac{1}{2}(R_0 + r_0)$

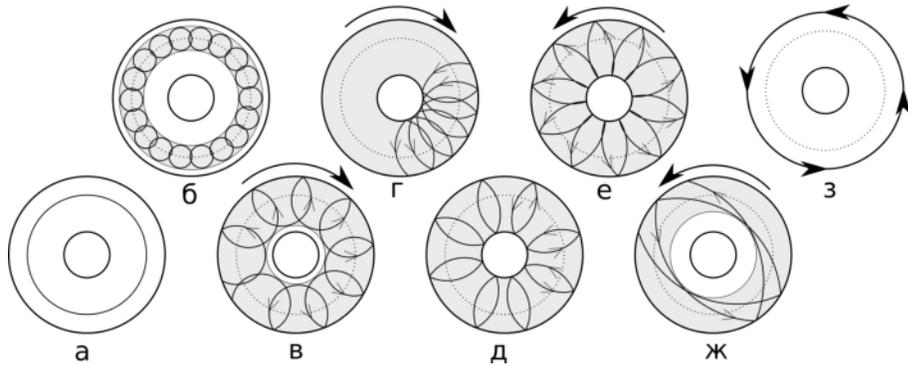


Рис. 5.18: Перестройка областей возможного движения при $\frac{1}{2}(R_0 + r_0) < R < R_0$

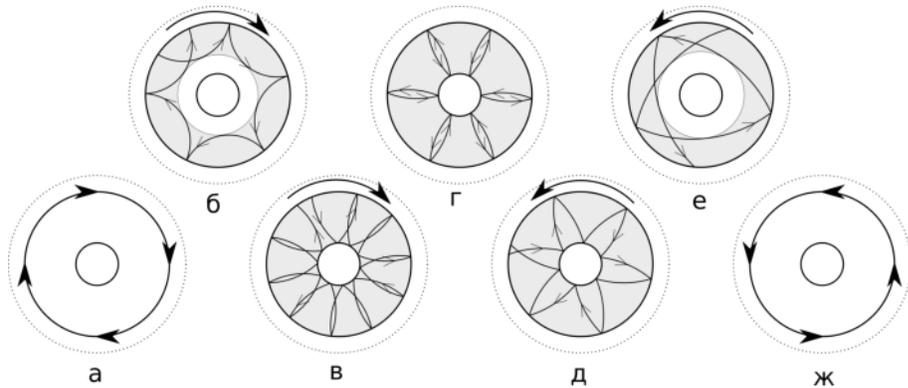


Рис. 5.19: Перестройка областей возможного движения при $R_0 < R$

ориентации цикла μ_- . Следовательно, метка $r = \infty$, а метка ε не определена. Изоинтегральное многообразие гомеоморфно произведению $S^1 \times S^2$.

В случае $R > R_0$ циклы μ имеют противоположную ориентацию. Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Метка $r = \infty$, метка $\varepsilon = 1$.

При $R < r_0$ циклы μ имеют одинаковую ориентацию. Следовательно, матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Метка $r = \infty$, метка $\varepsilon = -1$.

5.5 Топологические магнитные бильярды

В предыдущих разделах мы увидели, что класс интегрируемых плоских магнитных бильярдов достаточно мал (он состоит только из кругового и кольцевого бильярда). Следовательно, количество типов слоения Лиувилля изоэнергетических многообразий таких бильярдов также невелик. Это означает, что такие “простые” бильярды реализуют лишь немногие известные динамические системы с точки зрения лиувиллевой эквивалентности. Для того, чтобы класс магнитных бильярдов стал богаче (иными словами, чтобы было реализовано значительно больше интегрируемых систем, описанных, например, в [31]-[34]), необходимо обобщить понятие магнитного бильярда. Одним из таких обобщений плоских интегрируемых бильярдов является понятие интегрируемых топологических бильярдов, введенное В. В. Ведюшкиной в статье [32]. Первоначально оно было введено для классических эллипτικο-гиперболических бильярдов. Напомним, что топологическим бильярдом называется бильярдная книжка, конфигурационное пространство которой (т.е. бильярдный стол) является топологическим двумерным ориентируемым многообразием. В частности, это означает, что по одному корешку такой книжки могут быть склеены не более двух листов. Бильярдный шар, двигаясь по одному листу, после отражения от корешка продолжит движение по другому столу. Иными словами, каждому корешку приписана перестановка-инволюция. Такая конструкция, во-первых, сохраняет интегрируемость, а с другой стороны, существенно расширяет класс интегрируемых плоских бильярдов, ограниченных дугами софокусных квадрик (напомним, что имеется лишь конечное число неэквивалентных плоских бильярдов, см. [10]).

В нашем случае также можно воспользоваться данной конструкцией. В качестве интегрируемых элементарных бильярдных листов, из которых будет склеен топологический бильярд, выступают бильярды всего двух типов, рассмотренных ранее: бильярд, ограниченный одной окружностью и бильярд, ограниченный двумя окружностями. Очевидно, что полученный в результате таких склеек кусочно-плоский ориентируемый стол-комплекс будет гомеоморфен одному из следующих двумерных многообразий: диску, цилиндру, сфере или тору. Более того, во всех таких бильярдах можно выделить цилиндр, склеенный из колец, границы которого либо остаются ни с чем не склеенными, либо склеиваются между собой (получается тор), либо склеиваются дисками – одним или двумя. Нам в дальнейшем будет удобно изначально работать с этим цилиндром.

Более подробно, рассмотрим несколько кольцевых бильярдных столов, занумерованных натуральными числами от 1 до n . Положим также, что любые два соседних стола имеют внешние или внутренние граничные окружности равного радиуса, и точки этой пары отождествлены друг с другом. Иными словами, склеим имеющиеся бильярдные столы по общим границам, при этом потребуем, чтобы никакие три стола не были склеены по одной границе. Полученный комплекс гомеоморфен цилиндру $[0, 1] \times S^1$, а бильярдное движение на каждом столе зададим как и ранее с той лишь разницей, что при попадании материальной точки на границу одного

стола, она переходит на соседний стол с той же границей и продолжает движение в нем. Построенный таким образом бильярд bC является топологическим бильярдом. Пример такого топологического бильярда приведен на рис. 5.20.

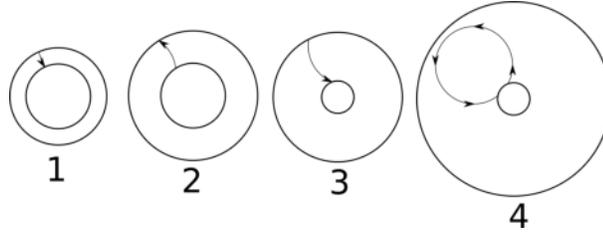
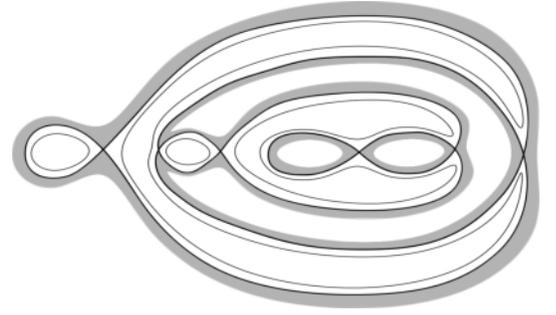


Рис. 5.20: Топологический бильярд bC , гомеоморфный цилиндру. Изображена траектория, которая начинается на первом кольце и после ряда отражений остается на кольце с номером 4

Бильярд bC допускает те же первые интегралы L и R , то есть является интегрируемым по Лиувиллю. Заметим, что областью возможного движения при фиксированных значениях этих интегралов также является пересечение бильярдной области с областью W , ограниченной окружностями радиусов $R + L$ и $|R - L|$ на каждом элементарном “листе” (назовем ее исходной областью возможного движения). Заметим, что область возможного движения состоит из нескольких связных частей, гомеоморфных цилиндрам. При этом прообраз каждой такой компоненты связности регулярной области возможного движения также гомеоморфен двумерному тору Лиувилля в фазовом пространстве M^4 . Доказательство этого факта может быть получено следующим образом. Необходимо разрезать торы Лиувилля, соответствующего каждому кольцу по точкам, лежащим на ребрах склейки. Эти разрезы превращают каждый тор в кольцо. Склейка колец в цилиндр объединяет эти “кольца Лиувилля” обратно в единый тор. Однако бифуркации этих торов и описывающие их 3-атомы имеют более сложный вид.

Определение 5.1. Пусть τ – конечная последовательность натуральных чисел. Обозначим $n = \sum \tau_i$. Определим седловой 3-атом B_τ следующим способом: разрежем 2-атом B_n трансверсально на $|\tau|$ связных частей таким образом, чтобы в каждой i -ой части находилось ровно τ_i критических точек; склеим обратно эти части по местам разрезов с перекруткой (рис. 5.21), и на основе полученного 2-атома прямым произведением на окружность получим 3-атом. Такой 3-атом перестраивает $k = \sum_{2|i} \tau_i + 1$ торов Лиувилля в $l = \sum_{2 \nmid i} \tau_i + 1$ торов.

Заметим, что 2-атом B_τ при любом τ является плоским (один из вариантов вложения в плоскость изображен на рис. 5.22), а также имеет вид, изображенный на рис. 5.23, г. Также отметим, что класс 3-атомов B_τ в точности совпадает с классом атомов $V_n^{\eta_1, \dots, \eta_n}$ (т.н. 3-атомы с плюсами и минусами), возникающими в работе [35] при описании потоков на поверхностях вращения в магнитном поле. Наше переобозначение обусловлено тем, что 3-атом $V_n^{0,0, \dots, 0}$ совпадает с 3-атомом B_n , а также тем, что в дальнейшем нам будет удобнее работать именно с последовательностью τ .

Рис. 5.21: 2-Атом B_τ для $\tau = (2, 2, 1, 1)$ Рис. 5.22: Вложение 2-атома B_τ в плоскость.

Опишем теперь алгоритм, как по заданному топологическому бильярду вида bC построить грубую молекулу, соответствующую некоторому уровню интеграла L .

Шаг 1. Занумеруем границы склейки бильярда в соответствии с их принадлежностью элементарным столам-листам, то есть границы одного листа должны быть занумерованы последовательными натуральными числами.

Шаг 2. Построим на плоскости $(0xy)$ следующую ломаную (ломаная K_0 на рис. 5.23, а): последовательно соединим точки с координатами (i, R_i) , где R_i – радиус i -ой границы. Затем отразим полученный график симметрично оси $0x$ (ломаная M на рис. 5.23, а). Иными словами, вместе ломаные K_0 и M образуют профиль бильярда (сечение плоскостью, содержащей ось симметрии нашего топологического бильярда). Наконец, отразим относительно прямой $y = L$ ту часть ломаной K_0 , которая расположена выше этой прямой (ломаная K на рис. 5.23, а).

Шаг 3. Разобьем область между двумя ломаными K и M на горизонтальные отрезки и стянем каждый из них в точку. В полученном графе припишем свободным вершинам индекс A . Заметим, что остальным вершинам полученного графа соответствуют несколько локальных минимумов ломаной K и несколько локальных максимумов ломаной M , лежащих на соответствующем горизонтальном отрезке. Пусть последовательность таких экстремумов слева направо задается последовательностью τ (τ_1 подряд идущих минимумов, затем τ_2 подряд идущих максимумов и т.д.). Пример такой последовательности для $\tau = (2, 2, 1, 1)$ изображен на рис. 5.23, в. Припишем такой вершине графа индекс B_τ .

Теорема 5.7. Построенный выше граф с индексированными вершинами (рис. 5.23, б) является грубой молекулой топологического бильярда bC , ограниченного на фиксированный неособый уровень энергии L .

Доказательство. Заметим, что экстремумы ломаной K принадлежат к одному из четырех типов. Первый тип – это максимумы, лежащие на прямой $y = L$. Движение на соответствующем уровне интеграла $R = 0$ – это критические движения по окружностям Лармора, лежащим на разных столах-листах. При локальном увеличении значения интеграла эти окружности как области возможного движения расширяются в кольца (см. рис. 5.24, а). Следовательно, каждой

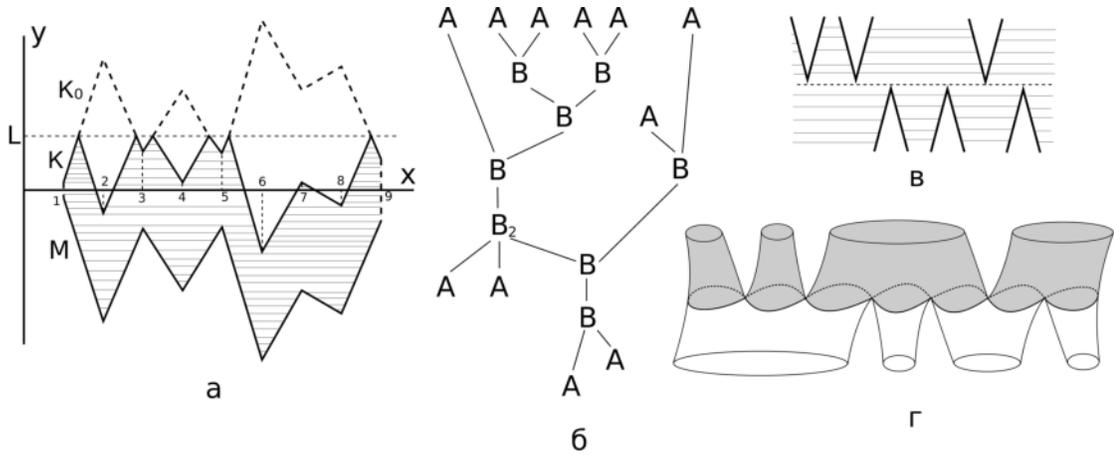


Рис. 5.23: Построение грубой молекулы

такой точке соответствует атом A . Также к этому типу можно приписать максимумы ломаной K , которые изначально в ломаной K_0 лежали ниже прямой $y = L$. Они соответствуют выпуклым склейкам бильярдных столов вдоль окружностей, радиус которых меньше окружности Лармора. Следовательно, движение в окрестности этих склеек возможно с момента касания внутренней окружности радиуса $|L - R|$ области W (исходной области возможного движения) и окружности, соответствующей данной склейке. Дальнейшее увеличение приводит к движению сразу по двум склеенным столам-листам (см. рис. 5.24, б).

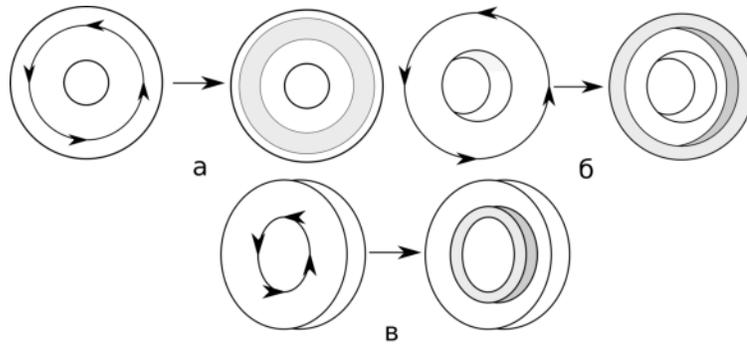


Рис. 5.24: Перестройки областей возможного движения. На рис. б локально изображены два бильярдных стола, склеенных по выпуклой (внешней) границе. На рис. в изображена склейка двух столов по невыпуклой (внутренней) границе.

Второй тип — это точки максимума ломаной K , которые на ломаной K_0 были локальными минимумами. Несложно заметить, что они соответствуют невыпуклым склейкам вдоль окружностей, радиусы которых больше значения L . Следовательно, до тех пор, пока интеграл R не примет такое значение, что внешняя граница области W радиуса $R + L$ достигнет этой окружности склейки, движения в окрестности этой склейки нет. В момент достижения возникает одна критическая окружность, которая впоследствии разрастается до области возможного движения, лежащей на двух бильярдных столах. В молекуле это также будет соответствовать 3-атому A

(см. рис. 5.24, в).

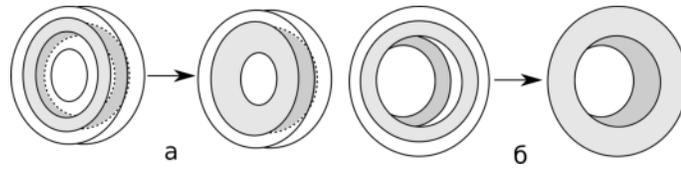


Рис. 5.25: Перестройки областей возможного движения. На рис. а локально изображены два бильярдных стола, склеенных по невыпуклой (внутренней) границе. На рис. б изображена склейка двух столов по выпуклой (внешней) границе.

Третий тип критических точек графика ломаной K – это точки минимума, которые изначально лежали на ломаной K_0 под прямой $y = L$. Они соответствуют невыпуклым склейкам бильярдных столов, причем радиус окружности склейки этих колец меньше радиуса ларморовских окружностей. При увеличении значения R прохождение прямой $y = L - R$ через эту точку соответствует слиянию двух колец в области возможного движения, находящихся на соседних листах, вдоль общей невыпуклой окружности (см. рис. 5.25, а).

Четвертый тип критических точек графика K – это минимумы, полученные отражением максимумов ломаной K_0 . Этим максимумам соответствуют выпуклые склейки листов друг с другом. В момент, когда область W своей внешней окружностью совпадет с окружностью этой выпуклой склейки, произойдет бифуркация – слияние областей возможного движения. Она соответствует прохождению прямой $y = R + L$ через точку описываемого типа (см. рис. 5.25, б).

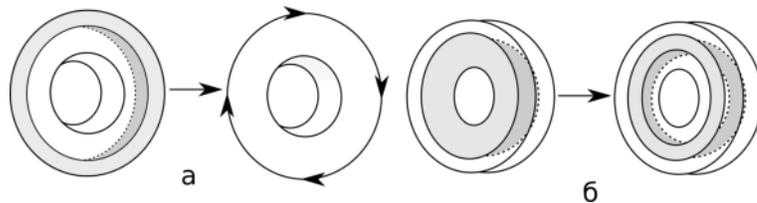


Рис. 5.26: Перестройки областей возможного движения. На рис. а локально изображены два бильярдных стола, склеенных по невыпуклой (внутренней) границе. На рис. б изображена склейка двух столов по выпуклой (внешней) границе.

Экстремумы графика M также делятся на два типа – минимумы и максимумы. Минимумам соответствуют выпуклые склейки бильярдных столов. При достижении соответствующего значения R внутренняя граница области W выходит на границу склейки. При дальнейшем увеличении значения R область W не пересекается с соответствующими бильярдными столами, а следовательно, движения нет. Таким образом, мы получили 3-атом A (см. рис. 5.26, а).

Максимумам графика M соответствуют невыпуклые склейки бильярдных столов. Внутренняя граница области W достигает эту границу склейки, а область возможного движения рвется по окружности склейки (см. рис. 5.26, б).

Мы показали, как изменяется область возможного движения вблизи образов критических циклов по-отдельности. Для вычисления 3-атомов необходимо рассмотреть такие изменения в совокупности. Как уже было показано, свободным вершинам в полученном графе соответствуют атомы A . В оставшихся случаях существуют две возможности: на соответствующем уровне $y = \text{const}$ лежат k экстремумов третьего типа и l экстремумов четвертого типа ломаной K (возможен при $R < L$); или же на уровне $y = \text{const}$ лежат k экстремумов четвертого типа ломаной K и l максимумов ломаной M (возможен при $R > L$). Заметим, что в обоих этих случаях критический слой искомого седлового атома гомеоморфен критическому слою атома B_{k+l} . Действительно, разобьем соответствующую область возможного движения на радиальные отрезки. Каждой точке таких отрезков соответствуют два вектора скорости (см. теорему 5.4), кроме двух точек – границ области возможного движения, и $k + l$ точек, соответствующих критическим окружностям. В первом случае, оба вида бифуркаций, как было показано выше, являются слиянием областей возможного движения. Следовательно, в изоэнергетическом многообразии Q^3 это соответствует 3-атому B_{k+l} . Во втором случае, k критических окружностей соответствуют склейке областей возможного движения и l критических окружностей – их разрыву. С учетом взаимного расположения этих склеек и разрывов на критическом слое, несложно убедиться, что в изоэнергетическом многообразии Q^3 такая перестройка соответствует 3-атому B_τ (наглядно это видно на рис. 5.23 в, г).

Таким образом, теорема доказана. \square

Теперь к одной или двум свободным границам топологического бильярда bC приклеим бильярдный стол, ограниченной окружностью подходящего радиуса. Конфигурационное пространство такого бильярда гомеоморфно двумерному диску D^2 (бильярд bD) или двумерной сфере S^2 (бильярд bS) соответственно. Заметим, что алгоритм вычисления грубых молекул ничем не отличается от рассмотренного случая. Действительно, единственное отличие бильярдов bD и bS от бильярда bC заключается в появлении областей возможного движения, содержащих один или два центра дисковых бильярдных столов (т.е. гомеоморфных D^2 или S^2 соответственно). Как было доказано ранее, прообразы таких областей возможного движения также гомеоморфны двумерным торам. Следовательно, уровень $y = 0$ на графике 5.23 не является критическим сам по себе, и, следовательно, грубая молекула 5.23, б останется прежней.

Из алгоритма построения грубой молекулы сразу вытекает тип ее строения. А именно, верно следствие.

- Следствие 5.8.** 1. *Граф инварианта Фоменко бильярдов bC , bD и bS является деревом.*
2. *При достаточно больших значениях энергии L это дерево имеет симметричный вид $W - W$, где W – это корневое поддереве, причем обе симметричные части в молекуле соединены ребром, инцидентным обоим корням.*

Доказательство. Первый пункт докажем от противного. Действительно, если бы в графе существовал цикл, то в области между ломаными K и M существовала бы нестягиваемая окружность, переходящая в этот цикл при факторизации области (сжимании горизонтальных отрезков). Но область между этими ломаными всегда односвязная. Получили противоречие.

Для доказательства второго пункта заметим, что при больших значениях интеграла L прямая $y = L$ лежит выше ломаной K_0 . Следовательно, ломаные K и K_0 совпадают, а область между ломаными K и M симметрична относительно прямой $y = 0$. Из этого следует симметричность дерева. Далее заметим, что на ломаной K встречаются экстремумы только первого и третьего типа, которые лежат выше прямой $y = 0$. Иными словами, в одной из симметричных половин дерева (обозначим ее W) существуют только атомы A и объединяющие атомы B_k , что и означает, что дерево корневое. Наконец, заметим, что уровню $y = 0$ соответствует лишь один горизонтальный отрезок в области между ломаными. Следовательно, оба корневых симметричных поддерева соединены лишь одним ребром.

Следствие доказано. □

Рассмотрим теперь топологический бильярд bC и предположим, что в таком бильярде склеено четное число столов, а свободные граничные окружности имеют одинаковый радиус. Теперь склеим их таким образом, что конфигурационное пространство стало гомеоморфно двумерному тору T^2 (опустим случай, при котором конфигурационное пространство гомеоморфно бутылке Клейна). Полученный топологический бильярд назовем bT .

Определение 5.2. Пусть τ – конечная последовательность натуральных чисел, определенная с точностью до циклической перестановки своих элементов. Пусть $n = \sum \tau_i > 1$. Определим седловой 3-атом \hat{C}_τ следующим способом: если $n = 1$, положим его равным 3-атому B ; иначе, разрежем 2-атом C_n трансверсально на $|\tau|$ связных частей таким образом, чтобы в каждой i -ой части находилось ровно τ_i критических точек; склеим обратно эти части по местам разрезов с перекруткой (рис. 5.27), и на основе построенного 2-атома прямым произведением на окружность получим 3-атом. Такой 3-атом перестраивает $k = \sum_{2|i} \tau_i$ торов Лиувилля в $l = \sum_{2\not|i} \tau_i$ торов.

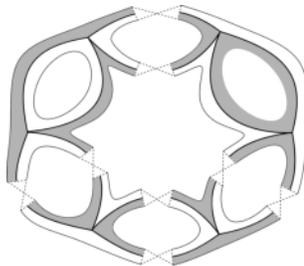


Рис. 5.27: Атом \hat{C}_τ для $\tau = (2, 2, 1, 1)$

Несмотря на то, что в своем построении 3-атомы B_τ и \hat{C}_τ очень похожи, 2-атом \hat{C}_τ уже не всегда можно вложить в плоскость. Самым простым примером является 3-атом $\hat{C}_{1,1}$, который более известен как 3-атом C_1 (см. [1]).

Алгоритм вычисления грубых молекул для бильярда bT схож с алгоритмом для bC . А именно, зафиксируем значение интеграла L . Построим ломаные K_0 , K и M в плоскости Oxy , аналогично предыдущему случаю, и отобразим плоскость Oxy на цилиндр с образующей прямой Oy так, чтобы свободные вершины этих графиков совпадали (рис. 5.28,а). Иными словами, ломаные K_0 и M , как и ранее, составляют профиль бильярда. Разобьем область между получившимися ломаными K и M на горизонтальные слои и стянем каждый из них в точку в объемлющем к цилиндру пространстве \mathbb{R}^3 . В полученном графе добавим еще однократное ребро к тем ребрам, которые соответствуют нестягиваемым на цилиндре слоям, и припишем свободным вершинам индекс A . Если вершина графа соответствует стягиваемому на цилиндре слою, припишем ей индекс B_τ аналогичным образом. Если же вершина графа соответствует нестягиваемому слою, припишем ей индекс \hat{C}_τ по тому же правилу (рис. 5.28, б).

Теорема 5.9. Построенный выше граф с индексированными вершинами (рис. 5.28, б) является грубой молекулой топологического бильярда bT , ограниченного на фиксированный уровень энергии L .

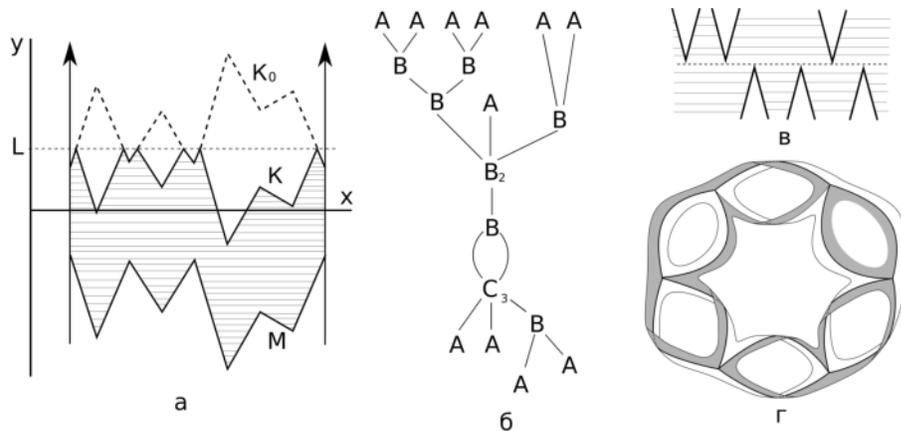


Рис. 5.28: Построение грубой молекулы

Доказательство. В случае, когда уровень $y = const$ стягиваем на цилиндре, доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 5.7. Пусть на уровне $y = const$ нет минимумов и максимумов графиков K и M , при этом он нестягиваемый в области между этими двумя ломаными. В таком случае областью возможного движения является весь бильярд bT , который гомеоморфен тору. Траектория движения материальной точки является обмоткой этого тора, при этом точка движется в одном из двух направлений на его меридиане. Следовательно, в прообразе такой области возможного движения лежат два тора Лиувилля, что объясняет добавление кратного ребра.

Пусть теперь уровень $y = \text{const}$ также нестягиваемый, но при этом на нем лежат экстремумы графиков K и M . Заметим, что прообраз соответствующей области возможного движения гомеоморфен критическому слою 3-атома C_n . Действительно, разобьем эту область возможного движения на радиальные отрезки. Полученное сечение гомеоморфно окружности на bT . При этом каждой точке этой окружности соответствуют два вектора скорости, кроме n точек, соответствующих критическим окружностям и по которым две окружности в прообразе пересекаются.

Как и в случае бильярда bC , существуют две возможности: на этом уровне лежат k экстремумов третьего типа и l экстремумов четвертого типа ломаной K (возможен при $R < L$); или же на нем лежат k экстремумов четвертого типа ломаной K и l максимумов ломаной M (возможен при $R > L$). В первом случае, оба вида бифуркаций, как было показано выше, являются слиянием областей возможного движения в одну область, гомеоморфную тору. Следовательно, в изоэнергетическом многообразии Q^3 это соответствует 3-атому C_{k+l} . Во втором случае, k критических окружностей соответствуют склейке областей возможного движения и l критических окружностей – их разрыву. С учетом взаимного расположения этих склеек и разрывов на критическом слое, несложно убедиться, что в изоэнергетическом многообразии Q^3 такая перестройка соответствует 3-атому \hat{C}_τ . Таким образом, теорема доказана. \square

Заметим, что если в молекуле появился атом \hat{C}_τ при $|\tau| > 1$, то в этой молекуле он единственный такого типа (все оставшиеся уровни $y = \text{const}$ стягиваемы на цилиндре). Таким образом, любой топологический интегрируемый магнитный бильярд с ориентируемым конфигурационным пространством был описан с точки зрения грубой лиувиллевой эквивалентности.

Замечание 5.10. *Заметим, что грубая молекула, соответствующая изоинтегральному многообразию Q_R^3 при фиксированном значении интеграла R_0 , совпадает с грубой молекулой, соответствующий изоэнергетическому многообразию Q^3 с фиксированным значением энергии $L_0 = R_0$, даже в случае топологического бильярда. Действительно, как было замечено ранее, область возможного движения при фиксированных значениях интегралов L и R является пересечением области W , ограниченной окружностями радиусов $R + L$ и $|R - L|$, и бильярда. Таким образом, область возможного движения для значений интегралов L_1 и R_1 совпадает с областью для значений $L_2 = R_1$ и $R_2 = L_1$. Следовательно, и бифуркации областей возможного движения будут также совпадать и происходить в том же порядке, что и означает совпадение грубых молекул.*

Следствие 5.11. *Бифуркационная диаграмма топологического магнитного бильярда состоит из отрезков прямых $R + L = R_j$ и лучей прямых $|R - L| = R_j$, лежащих в первой четверти плоскости, где R_j – радиусы границ склеек, а также из отрезка $R + L = r_i$, где r_i – радиусы свободных внутренних границ, и лучей $|R - L| = R_i$, где R_i – радиусы свободных внешних границ (рис. 5.29).*

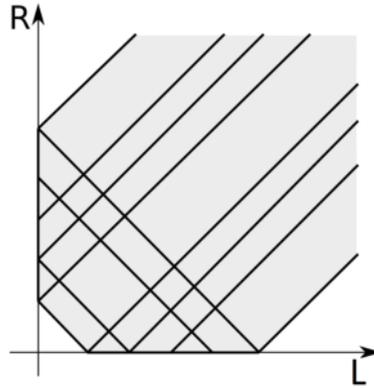


Рис. 5.29: Бифуркационная диаграмма топологического магнитного бильярда.

Доказательство. Как было показано ранее, бифуркации происходят, когда внешняя граница радиуса $R + L$ области W или ее внутренняя граница радиуса $|R - L|$ выходит на границу склейки радиуса R_i или на свободную границу бильярда радиуса r_i . \square

Вычислим теперь метки, соответствующие построенным грубым молекулам. Отметим, что образы критических окружностей любого 3-атома на бильярде совпадают с границами склеек бильярдных столов-листов. Ориентируем их по направлению скорости материальной точки. Заметим, что на атомах B_τ и \hat{C}_τ , для которых $|\tau| > 1$, существуют критические окружности, ориентации которых противоположны (рис. 5.30, ж). Это соответствует топологической неустойчивости системы. В связи с этим в дальнейшем будем рассматривать только молекулы без таких 3-атомов. Остальные 3-атомы разобьем на две группы: **1)** минимальный атом A , 3-атом B_k , перестраивающий (склеивающий) $k + 1$ тор Лиувилля в один тор, и 3-атом C_k , перестраивающий (склеивающий) k торов Лиувилля в два тора (рис. 5.30, а, б, в, г); **2)** максимальный атом A , 3-атом B_k , перестраивающий (разделяющий) один тор Лиувилля в $k + 1$ тор, и 3-атом C_k , перестраивающий (разделяющий) два тора Лиувилля в k торов (рис. 5.30, д, е). Заметим, что для всех 3-атомов первой группы критические окружности ориентированны против часовой стрелки, а для 3-атомов второй группы они ориентированы по часовой стрелке.

Теорема 5.12. *Инвариант Фоменко–Цишанга неособого уровня энергии топологического магнитного бильярда имеет следующий вид:*

- 1) грубая молекула строится по алгоритму, приведенному в теореме 5.7 в случае бильярдov bC , bD и bS , или алгоритму, приведенному в теореме 5.9 в случае бильярда bT ;
- 2) метка r равна нулю на всех ребрах, инцидентных 3-атомам A , и бесконечности на остальных ребрах (и следовательно, существует лишь одна семья);
- 3) метка ε равна $+1$ на всех ребрах, соединяющих два 3-атома из одной группы либо два 3-атома A , и -1 в остальных случаях;
- 4) метка n единственной семьи равна нулю в случае бильярдov bC и bT , ± 1 в случае бильярда bD и ± 2 в случае бильярда bS .

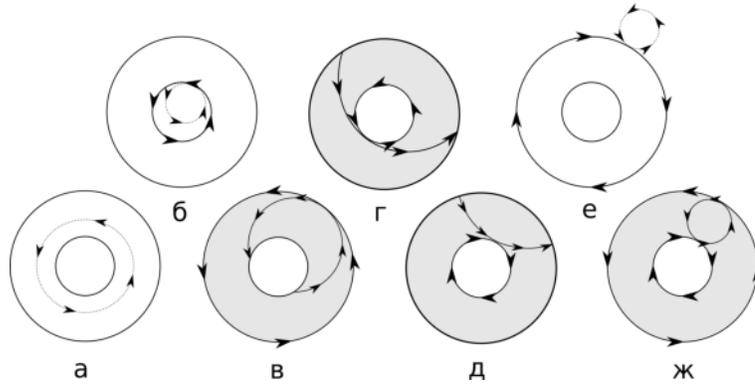


Рис. 5.30: Ориентации критических окружностей. На рис. а, б изображена окружность Лармора и критическая окружность минимального 3-атома A . На рис. в, г, д изображена часть области возможного движения, лежащая на одном бильярдном столе, критическая окружность седлового 3-атома и касающаяся ее траектория. На рис. е изображена окружность Лармора и критическая окружность максимального 3-атома A . На рис. ж изображены две критические траектории 3-атома B_τ или \hat{C}_τ , ориентированные противоположно.

Доказательство. Начнем с топологических бильярдов bC и bT . Как было отмечено ранее, образы критических окружностей любого 3-атома совпадают с границами склейки топологического бильярда. В случае седлового атома они гомологичны циклам λ допустимого базиса (рис. 5.30, в, г). При этом дополняющий его цикл μ выберем так, чтобы его образ на бильярде лежал на одном и том же радиусе. Заметим, что если мы фиксировали радиус, то прообраз лежащих на нём точек соответствует отрезкам на плоскости или цилиндре между кривыми K и M (см. построение грубой молекулы). Фактически каждый стягиваемый в точку отрезок соответствует граничной окружности некоторого двумерного атома. Таким образом, все выбранные циклы, во-первых, действительно являются трансверсальными сечениями соответствующих 3-атомов, а во-вторых, для каждого выбранного 3-атома являются граничными окружностями одного и того же двумерного сечения. Так как пара циклов λ и μ одного седлового 3-атома гомологична паре циклов λ и μ другого седлового 3-атома, то матрица склейки на ребре, соединяющей два седловых 3-атома, имеет вид $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, метка $r = \infty$, а вклад в метку n на таких ребрах равен нулю. При этом, как было отмечено ранее, если эти седловые 3-атомы принадлежат одной группе, то ориентации их циклов λ совпадают. Следовательно, метка $\varepsilon = 1$. В обратном случае метка $\varepsilon = -1$.

Для 3-атомов A , напротив, цикл μ гомологичен критической окружности (рис. 5.30, а, б), а образ исчезающего цикла λ лежит на одном выбранном радиусе. Следовательно, матрица склейки на ребрах, соединяющих 3-атом A и седловой 3-атом, имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, метка $r = 0$ на ребрах, а вклад в метку n на таких ребрах также нулевой. Как и в прошлом случае, метка $\varepsilon = 1$, если седловой 3-атом и 3-атом A принадлежат одной группе, и

$\varepsilon = -1$ иначе. Случай, при котором ребро соединяет два 3-атома A , был рассмотрен ранее для кольцевого бильярда.

Теперь рассмотрим топологический бильярд bD . Как было отмечено ранее, этот бильярд отличается от бильярда b появлением единственной регулярной области возможного движения (при $R = L$), содержащей центр дискового бильярдного стола. Найдем единственное ребро e в грубой молекуле, на котором лежит соответствующая этой области возможного движения точка. Всем остальным ребрам будут соответствовать матрицы склейки, аналогичные случаю бильярда bC . Если ребро e соединяет два седловых 3-атома, то как и в случае bC , циклы λ этих 3-атомов совпадают с точностью до ориентации. Чтобы найти соотношение на циклы μ , воспользуемся циклом γ , аналогичным случаю обычного кругового бильярда (см. рис. 5.12). Таким образом, матрица склейки на ребре e имеет вид $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ (-1)^i & \mp 1 \end{pmatrix}$, где $i \in 0, 1$. Следовательно, метка $r = \infty$, а вклад в метку n равен ± 1 (в зависимости от ориентации Q^3 , она влияет на значение i). При этом, как и ранее, метка $\varepsilon = 1$, если седловые 3-атомы принадлежат одной группе, и $\varepsilon = -1$ иначе.

Если же ребро e соединяет седловой 3-атом с 3-атомом A , то используя тот же цикл γ можно показать, что матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & (-1)^i \end{pmatrix}$. Следовательно, метка $r = 0$, а вклад в метку n также равен ± 1 . Как и ранее, метка $\varepsilon = 1$, если седловой 3-атом и 3-атом A принадлежат одной группе, и $\varepsilon = -1$ иначе. Случай, когда ребро e соединяет два 3-атома A , был рассмотрен для кругового бильярда.

Наконец, рассмотрим бильярд bS . Рассмотрим область возможного движения, соответствующей случаю $R = L$. Тогда либо в этой области существуют две компоненты связности, каждая из которых содержит один центр дискового стола, либо эта область состоит из одной, гомеоморфной сфере, компоненты связности и содержит сразу оба центра.

В первом случае возникают два ребра в грубой молекуле, аналогичных ребру e для бильярда bD . Следовательно, метки r и ε на таких ребрах совпадают с метками на ребре e . Вклад каждого такого ребра в метку n равен ± 1 . Можно показать, что при правильном выборе ориентации Q^3 все описанные выше вклады в метку n становятся положительными. То есть оба этих вклада нужно брать с одним и тем же знаком.

Во втором случае вспомогательный цикл γ устроен немного иначе. А именно, его образ на бильярде состоит из двух частей, совпадающих с образами старого цикла γ , лежащих на двух дисковых бильярдных столах. Таким образом, матрицы склейки имеют вид $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 2(-1)^i & \mp 1 \end{pmatrix}$ для ребра, соединяющего седловые 3-атомы, и $\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 2(-1)^i \end{pmatrix}$ для ребра, соединяющего седловой 3-атом и 3-атом A . Метки r и ε аналогичны меткам бильярда bD , а вклад такого ребра в метку n равен ± 2 .

Теорема доказана. □

5.6 Топологический магнитный бильярд лиувиллево эквивалентен геодезическому потоку на поверхностях вращения в потенциальном поле

В заключение покажем, какие известные интегрируемые системы с двумя степенями свободы лиувиллево эквивалентны топологическим магнитным бильярдам. Рассмотрим интегрируемый геодезический поток на поверхности вращения, гомеоморфной сфере, в потенциальном поле. Интегрируемые системы такого типа были изучены с точки зрения топологии слоения Лиувилля в работе Е. О. Кантонистовой [36]. Более точно, такой геодезический поток на многообразии $\mathcal{M} \simeq S^2$ задается парой функций одной переменной $(f(r), V(r))$, где функция $f : [0, I] \rightarrow \mathbb{R}$ задает метрику вращения $ds^2 = dr^2 + f^2(r)d\phi^2$ на \mathcal{M} , а функция V является потенциалом, не зависящим от угловой координаты ϕ . Гамильтонианом такой системы является функция

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\phi^2}{2f^2(r)} + V(r),$$

и дополнительный первый интеграл $F = p_\phi$ линеен по импульсам. Согласно работе [36], имеет место следующая теорема.

Теорема 5.13 (Е. О. Кантонистова). *Рассмотрим геодезический поток на многообразии вращения в потенциальном поле, заданный парой функций (f, V) . Пусть $Q \subseteq Q_h^3 = \{H = h\}$ – связная компонента неособой изоэнергетической поверхности, на которой интеграл K является функцией Ботта. Тогда:*

1. *Инвариант Фоменко–Цишанга потока на Q симметричен относительно оси h , т.е. имеет вид $W - W$. При этом W является корневым деревом, свободные вершины которого соответствуют 3-атомам A , а остальные – седловым 3-атомам B_k для произвольного k .*
2. *Метки на ребрах типа $A - B_k$ молекулы: $r = 0, \varepsilon = 1$.*
3. *Метки на ребрах типа $B_l - B_k$, где оба седловых атома лежат в одной из двух симметричных частей молекулы $W - W$: $r = \infty, \varepsilon = 1$.*
4. *Метки на ребре типа $B_k - B_k$, соединяющем корни симметричных частей молекулы: $r = \infty, \varepsilon = -1$.*
5. *Метка единственной семьи n равна 0, 1 или 2 в зависимости от того, сколько точек ранга 0 лежит в подмногообразии $\{H < h\}$.*

Теперь покажем, что для определенных значений интеграла L топологический магнитный бильярд лиувиллево эквивалентен геодезическому потоку на поверхности вращения в потенциальном поле. А именно, верна следующая теорема.

Теорема 5.14. *Рассмотрим геодезический поток на поверхности вращения в потенциальном поле, заданный парой функций (f, V) . Выберем неособое значение энергии этого потока, такое, что выполнены условия теоремы 5.13. Тогда существует топологический магнитный бильярд, инвариант Фоменко–Цишанга которого для больших значений интеграла L совпадает с инвариантом, соответствующим выбранному значению энергии геодезического потока. Следовательно, эти две системы лиувиллево эквивалентны.*

Доказательство. Пусть выбранному значению энергии геодезического потока с потенциалом соответствует инвариант Фоменко–Цишанга $W - W$. Зафиксируем этот инвариант. Теорема будет доказана, если найдется бильярд класса bC , bD или bS (в зависимости от значения метки n), инвариант Фоменко которого при достаточно больших значениях интеграла L совпадает с фиксированной грубой молекулой. Метки же такого бильярда автоматически будут совпадать с метками фиксированной молекулы согласно теоремам 5.12 и 5.13 и следствию 5.8.

Для того, чтобы построить необходимый бильярд, приведем алгоритм, обратный к алгоритму построения грубой молекулы по бильярду (см. рис. 5.31).

Шаг 0. Рассмотрим подграф W . Пусть его высота равна $N - 1$. Разобьем все его 3-атомы на группы в соответствии с их расстоянием до корня. Обозначим эти группы f_i , где i – расстояние. Заметим, что в группе f_0 лежит лишь один 3-атом B_k (присвоим ему номер 1).

Шаг 1. В полуплоскости $0xy : x > 0$ на прямой $y = 1$ выберем k точек с координатами $x_1^{-1} < x_1^0 < \dots < x_1^k$, где k – сложность атома в группе $f = f_0$.

Шаг 2. Атомы в группе f_1 занумеруем парами чисел $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, N_2)$, где N_2 – количество 3-атомов, а первое число в паре обозначает смежность этих 3-атомов 3-атому с номером 1. Пусть 3-атом $(1, j)$ имеет сложность k_j . Тогда на прямой $y = 2$ выберем k_j точек с координатами $x_1^{j-1} < x_{1,j}^0 < \dots < x_{1,j}^{k_j} < x_1^j$. Определим теперь шаги с номерами $3 \leq i \leq N$.

Шаг i . Пусть в группе f_{i-1} лежат N_i 3-атомов. Занумеруем их наборами из i чисел $(1, j_2, j_3, \dots, j_i)$, где $1 \leq j_i \leq N_i$. При этом 3-атом с номером $(1, j_2, j_3, \dots, j_{i-1}, j_i)$ смежен 3-атому с номером $(1, j_2, j_3, \dots, j_{i-1})$, лежащему в группе f_{i-2} (напомним, что дерево W является корневым). Пусть этот 3-атом имеет сложность k_{j_i} . Тогда на прямой $y = i$ выберем k_{j_i} точек с координатами $x_{1,j_2,j_3,\dots,j_{i-1}}^{j_i-1} < x_{1,j_2,j_3,\dots,j_{i-1},j_i}^0 < \dots < x_{1,j_2,j_3,\dots,j_{i-1},j_i}^{k_{j_i}} < x_{1,j_2,j_3,\dots,j_{i-1}}^{j_i}$. При этом считаем, что $x_{1,j_2,j_3,\dots,j_{i-1}}^0 = x_{1,j_2,j_3,\dots,j_{i-2}}^{j_{i-1}-1}$ и $x_{1,j_2,j_3,\dots,j_{i-1}}^{k_{j_{i-1}}+1} = x_{1,j_2,j_3,\dots,j_{i-2}}^{j_{i-1}}$, где $k_{j_{i-1}}$ – сложность 3-атома с номером $(1, j_2, j_3, \dots, j_{i-1})$.

Шаг $N+1$. Соединим построенные на предыдущих шагах точки ломаной K по возрастанию их координат x . Отразим эту ломаную относительно прямой $y = 0$ (обозначим результирующую ломаную M). Вместе полученные ломаные K и M образуют профиль топологического бильярда класса bC . На основе этого профиля восстановим исходный бильярд.

Шаг N+2. Если метка семьи n исходной молекулы равна 1, приклеим к одной из свободных границ построенного бильярда круговой элементарный стол-лист. Если метка семьи n равна 2, приклеим такие круговые листы к обеим свободным границам.

Построенный бильярд обладает фиксированной ранее грубой молекулой при значении интеграла $L = N + 1$. Действительно, рассмотрим группу 3-атомов f_i . Если в ней лежит 3-атом A с номером $(1, j_2, j_3, \dots, j_{i-1}, j_i)$, то он не смежен ни с одним 3-атомом группой выше. Следовательно, ближайшие выделенные вершины к точке $x_{1, j_2, j_3, \dots, j_{i-1}, j_i}^1$ расположены ниже прямой $y = i$, т.е. это точка максимума кривой K . Аналогично можно показать, что точки ломаной, отвечающие седловым 3-атомам, являются локальными минимумами. Кроме того, все локальные минимумы, соответствующие одному 3-атому B_k , лежат на стягиваемом горизонтальном отрезке прямой $y = i$ (иначе этот 3-атом был бы смежен двум 3-атомам, лежащим в группе ниже), и при этом только они (иначе существовал бы другой 3-атом, лежащий в той же группе f_i и смежный 3-атому B_k). Следовательно, приведенный алгоритм действительно является обратным к алгоритму теоремы 5.7.

Теорема доказана. □

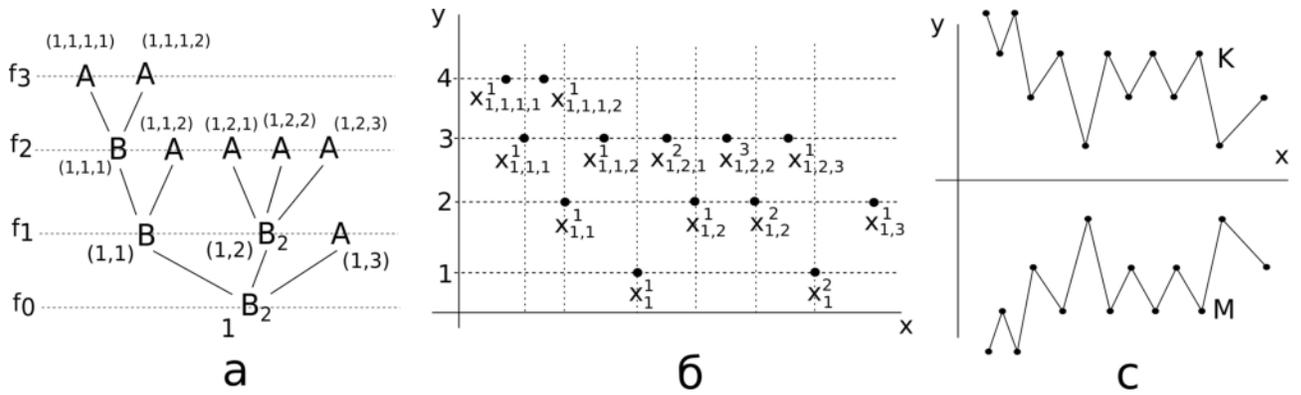


Рис. 5.31: Алгоритм восстановления бильярда по молекуле. На рис. а изображен корневой подграф W и его разбиение на группы f_i . на рис. б изображено расположение точек-вершин ломаной K согласно алгоритму. На рис. в изображено результирующее сечение искомого топологического бильярда.

Замечание 5.15. Доказанная теорема означает, что класс слоений Лиувилля неособых изоэнергетических многообразий геодезических потоков на поверхностях вращения с потенциалом (с точностью до лиувиллевой эквивалентности) полностью лежит в аналогичном классе топологических магнитных бильярдов. Более того, класс бильярдов шире, т.к. ему соответствуют также грубые молекулы, не являющиеся симметричными (см. рис. 5.23).

Заключение

В диссертации был получен ряд результатов, описывающих топологию слоения Лиувилля и его особенностей интегрируемых бильярдных систем, снабженных потенциалом или помещенных в магнитное поле. Основным методом анализа таких систем стал метод областей возможного движения, идущий от формальных алгебраически разрешимых систем и адаптированный для специфики бильярдных систем. На его основе во второй главе были вычислены инварианты Фоменко–Цишанга лиувиллевой эквивалентности для элементарных эллипτικο-гиперболических бильярдных систем, снабженных потенциалом Гука. Кроме того, были построены бифуркационные диаграммы таких бильярдных систем. На основе полученного списка инвариантов была установлена лиувиллева эквивалентность с рядом уже изученных интегрируемых систем с двумя степенями свободы.

Автором был установлен явный вид полиномиальных потенциалов, сохраняющих интегрируемость эллиптического бильярда. Как оказалось, множество интегрируемых полиномиальных потенциалов взаимно однозначно множеству вещественных многочленов одной переменной, а свойства слоения Лиувилля бильярда с потенциалом W зависят от поведения соответствующего ему многочлена $P(z)$. Кроме того стоит отметить, что полученный класс потенциалов сохраняет интегрируемость не только эллиптического, но и произвольного эллипτικο-гиперболического бильярда, границы которого софокусны с исходным эллипсом. Для эллиптического бильярда с потенциалом был предложен алгоритм, вычисляющий инвариант Фоменко–Цишанга для любого неособого изоэнергетического многообразия Q^3 , исходя из параметров системы. Дополнительно была установлена топология этого многообразия. Как оказалось, сложность инварианта зависит экспоненциально от степени потенциала. Тем не менее, для эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом, степень которого не превышает четырех, были явно построены бифуркационные диаграммы, а также установлена их зависимость от параметров потенциала и значений полуосей граничного эллипса. Затем была изучена топология слоений полулокальных особенностей такого бильярда. А именно, автором были установлены типы невырожденных точек ранга 0 и вырожденных траекторий, и также описано слоение Лиувилля четырехмерных окрестностей особых слоев, содержащих эти точки и траектории.

Кроме того, автором были рассмотрены бильярдные книжки, снабженные потенциалом Гука. Как оказалось, книжки, склеенные из круговых бильярдных систем с отталкивающим потенциалом, реализуют произвольную фокальную особенность, встречающуюся в интегрируемых системах с

двумя степенями свободы. Этот результат дополняет уже известные результаты по реализации седловых особенностей с помощью бильярдов.

Наконец, в заключительной главе диссертации автором были изучены топологические магнитные бильярды с точки зрения лиувиллевой эквивалентности. Был предложен алгоритм, позволяющий вычислять инвариант Фоменко–Цишанга топологического магнитного бильярда на любом неособом изоэнергетическом многообразии, исходя из формы бильярда, а также обратный алгоритм, строящий бильярд по заданному инварианту. С помощью этих алгоритмов удалось установить лиувиллеву эквивалентность топологических бильярдов с интегрируемыми системами на поверхностях вращения с потенциалом.

Результаты диссертации могут быть полезны специалистам по теории интегрируемых систем, топологии трехмерных многообразий и теоретической механики.

Литература

Список литературы

- [1] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*. Том I, II – Ижевск: РХД, 1999.
- [2] Дж. Биркгоф, *Динамические системы* – Ижевск: Издательский дом “Удмуртский университет”, 1999.
- [3] В. В. Козлов, Д. В. Трещев, *Генетическое введение в динамику систем с ударами* – Москва: Изд-во МГУ, 1991.
- [4] А. Т. Фоменко, *Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем*, // Успехи Математических Наук – 1989 – Т. 44 вып. 1(265) – С. 145–173
- [5] А. Т. Фоменко, *Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем*, // Доклады АН СССР – 1986 – Т. 287 вып. 5 – С. 1071–1075
- [6] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, *Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*, // Известия АН СССР. Серия математическая – 1990 – Т. 54 вып. 3 – С. 546–575
- [7] A. A. Glutsyuk, *On polynomially integrable Birkhoff billiards on surfaces of constant curvature* // Journal of the European Mathematical Society – 2021 – Vol. 23 no 3 – p. 995–1049.
- [8] V. Kaloshin, A. Sorrentino, *On the local Birkhoff conjecture for convex billiards* // Annals of Mathematics – 2018 – Vol. 188 no 1 – p. 315–380.
- [9] V. Dragovic, M. Radnovic, *Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards* // Regular and Chaotic Dynamics – 2009 – Vol. 14 no 4-5 – p. 479-494.
- [10] В. В. Фокичева, *Топологическая классификация бильярдных областей в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик*, // Математический сборник – 2015 – Т. 206 вып. 10 – С. 127-176.

-
- [11] S. Tabachnikov, *Introducing projective billiards*// Ergodic Theory and Dynamical Systems – 2009 – Vol. 17 no 4 – p. 957 - 976
- [12] A.T. Fomenko, V.V. Vedyushkina, *Billiards with Changing Geometry and Their Connection with the Implementation of the Zhukovsky and Kovalevskaya Cases*// Russian Journal of Mathematical Physics – 2021 – Vol. 28 – p. 317-332
- [13] В. В. Ведюшкина, В. Н. Завьялов, *Реализация геодезических потоков с линейным интегралом бильярдами с проскальзыванием*// Математический сборник – 2022 – Т. 213 вып. 12 – С. 31-52
- [14] Е. Е. Каргинова, *Слоение Лиувилля топологических бильярдов на плоскости Минковского*// Фундаментальная и прикладная математика. – 2019. – Т. 22 вып 6. – С. 123-150
- [15] Г. В. Белозеров, *Топологическая классификация интегрируемых геодезических бильярдов в трехмерном евклидовом пространстве*// Математический сборник – 2020. –Т. 211 вып. 11. – С. 3–40
- [16] В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева, *Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем*// Математический сборник – 2018 – Т. 209 вып. 12 – С. 17-56
- [17] В. В. Ведюшкина, *Слоение Лиувилля невыпуклых топологических бильярдов*// Доклады Академии наук – 2018 – Т. 478 вып. 1 – С. 7-11
- [18] В. В. Ведюшкина, *Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических бильярдов*// Математический сборник – 2019 – Т. 210 вып. 3 – С. 17-74
- [19] В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева, *Бильярдные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем*// Математический сборник – 2021 – Т. 212 вып 8 – С. 89–150
- [20] И. С. Харчева, *Изоэнергетические многообразия интегрируемых бильярдных книжек*// Вестник Московского университета. Серия 1: Математика, механика – 2020 – вып. 4 – С. 12–22
- [21] D. R. da Costa, C. P. Dettmann, E. D. Leonel, *Circular, elliptic and oval billiards in a gravitational field*// Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation – 2015 – V. 22 no 1-3 – p. 731-746
- [22] В. В. Козлов, *Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде*// Прикладная математика и механика – 1995 – Т. 59 вып. 1

-
- [23] Vladimir Dragovic, *The Appell hypergeometric functions and classical separable mechanical systems*// Journal of Physics A: Mathematical and General – 2002 – Vol. 35
- [24] V. I. Dragovich, *Integrable perturbations of a Birkhoff billiards inside an ellipse*// Journal of Applied Mathematics and Mechanics – 1998 – Vol. 62 no 1 – p. 159-162
- [25] И. Ф. Кобцев, *Эллиптический бильярд в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ*// Математический сборник – 2020 – Т. 211 вып. 7 – С. 93–120
- [26] М. П. Харламов, *Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приближения к классическим системам*// Нелинейная динамика – 2010 – Т. 6 вып. 4, С. 769-805.
- [27] A. T. Fomenko, V. A. Kibkalo, *Saddle singularities in integrable Hamiltonian systems: Examples and algorithms*// Sadovnichiy, V.A., Zgurovsky, M.Z. (eds.): Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems – 2021 – p. 3–26
- [28] В. А. Кибкало *Бильярды с потенциалом моделируют ряд четырехмерных особенностей интегрируемых систем*// Современные проблемы математики и механики: Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В. А. Садовниченко – 2019 – Т. 2 – С. 563-566
- [29] M. Robnik and M. V. Berry *Classical billiards in magnetic fields*// Journal of Physics A: Mathematical and General – 1985 – Vol. 18
- [30] M. Bialy, A. E. Mironov, *Algebraic non-integrability of magnetic billiards*// Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical – 2016 – Vol. 49 no 45 – 18 pp.
- [31] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, *Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности*// Вестник Московского университета. Серия 1: Математика, механика – 2019 – вып. 3 – С. 15-25.
- [32] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды*// Известия РАН – 2019 – Т. 83 вып. 6 – С. 63-103.
- [33] A. T. Fomenko and V. V. Vedyushkina, *Implementation of integrable systems by topological, geodesic billiards with potential and magnetic field*// Russian Journal of mathematical physics – 2019 – Vol. 26 no 3 – p. 320–333.

- [34] В. В. Ведюшкина, В. А. Кибкало, А. Т. Фоменко, *Топологическое моделирование интегрируемых систем бильярдами: реализация числовых инвариантов*// Доклады Академии Наук (РАН) – 2020 – Т. 493 – с. 9-12.
- [35] Е. А. Кудрявцева, А. А. Ошемков, *Бифуркации интегрируемых механических систем с магнитным полем на поверхностях вращения*// Чебышевский сборник – 2020 – Т. 21 вып. 2 – С. 244–265
- [36] Е. О. Кантонистова, *Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле*// Математический сборник – 2016 – Т. 207 вып. 3 – С. 47–92

Список публикаций автора по теме диссертации

- [37] С. Е. Пустовойтов, *Исследование структуры слоения Лиувилля интегрируемого эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом*// Чебышевский сборник. – 2024 – Т. 25, вып. 1 – С. 62–102.
Импакт фактор 0.262 (SJR), 0.293 (РИНЦ). Объем 2.562 п.л.
- [38] S. E. Pustovoitov, *Classification of Singularities of the Liouville Foliation of an Integrable Elliptical Billiard with a Potential of Fourth Degree*// Russian Journal of Mathematical Physics. – 2023 – vol. 30, no 4 – pp. 643–673.
Импакт фактор 0.602 (SJR), 1,680 (РИНЦ). Объем 1.937 п.л.
- [39] В. В. Ведюшкина, С. Е. Пустовойтов, *Классификация слоений Лиувилля интегрируемых математических бильярдов в магнитном поле*// Математический сборник. — 2023. — Т. 214, вып. 2. — С. 23–57.
Импакт фактор 0.548 (SJR), 0.979 (РИНЦ). Объем 2.187 п.л.
Перевод: V. V. Vedyushkina, S. E. Pustovoitov, *Classification of Liouville foliations of integrable topological billiards in magnetic fields*// Sbornik: Mathematics – 2023 – vol. 214, no 2 – pp. 166-196
Импакт фактор 0.548 (SJR), 0,772 (РИНЦ). Объем 1.937 п.л.
С. Е. Пустовойтовым были получены результаты разделов 7–9. Диссертант внес значительный вклад в доказательство утверждений разделов 5 и 6. Общая доля диссертанта составляет 63%
- [40] В. В. Ведюшкина, В. А. Кибкало, С. Е. Пустовойтов, *Реализация фокусных особенностей интегрируемых систем бильярдными книжками с потенциалом Гука*// Чебышевский сборник. – 2021 – Т. 22, вып. 5. – С. 44-57.

Импакт фактор 0.262 (SJR), 0.293 (РИНЦ). Объем 0.875 п.л.

С. Е. Пустовойтовым было доказано утверждение 1. Диссертант внес значительный вклад в доказательство теоремы 1. Общая доля диссертанта составляет 40%

- [41] С. Е. Пустовойтов, *Топологический анализ бильярда, ограниченного софокусными квадриками, в потенциальном поле*// Математический сборник. — 2021 — Т. 212, вып. 2. — С. 81–105.

Импакт фактор 0.548 (SJR), 0.979 (РИНЦ). Объем 1.562 п.л.

Перевод: S. E. Pustovoitov, *Topological analysis of a billiard bounded by confocal quadrics in a potential field*// Sbornik: Mathematics – 2021 – vol. 212, no 2 – pp. 211–233

Импакт фактор 0.548 (SJR), 0.772 (РИНЦ). Объем 1.437 п.л.

- [42] Е. Пустовойтов, *Топологический анализ эллиптического бильярда в потенциальном поле четвертого порядка*// Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика — 2021 — вып. 5. — С. 8-19.

EDN: NTRMZL. Импакт фактор 0.243 (SJR), 0.313 (РИНЦ). Объем 0.75 п.л.

Перевод: S. E. Pustovoitov, *Topological Analysis of an Elliptic Billiard in a Fourth-Order Potential Field*// Moscow University Mathematics Bulletin – 2021 – vol. 76 – pp. 193-205

EDN: RVBKSВ. Импакт фактор 0.243 (SJR), 0.313 (РИНЦ). Объем 0.812 п.л.

- [43] S. E. Pustovoytov, *Topological analysis of a billiard in elliptic ring in a potential field*// Journal of Mathematical Sciences. – 2021 – vol. 259 – pp. 712–729.

Импакт фактор 0.280 (SJR). Объем 1,187 п.л.