

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА  
Механико-математический факультет

На правах рукописи

ПОЛЯКОВА ЛАДА СТАНИСЛАВОВНА

УДК 517.938.5

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ АНАЛОГОВ  
ЦЕПОЧКИ ТОДА И ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ С  
КВАДРАТИЧНЫМИ ПО ИМПУЛЬСАМ ИНТЕГРАЛАМИ

01.01.04 - геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -  
член-корреспондент РАН,  
профессор А.Т.Фоменко



МОСКВА - 1993

## СОДЕРЖАНИЕ

### Введение.

Глава 1. Инварианты интегрируемых алгебраических аналогов цепочки Тода.

- §1. Гамильтоновы системы с экспоненциальным взаимодействием.
- §2. Критерий компактности изоэнергетической поверхности интегрируемой системы с экспоненциальным взаимодействием.
- §3. Теорема о топологической эквивалентности трёх алгебраических аналогов цепочки Тода.
- §4. Построение меченой молекулы для классической периодической цепочки Тода.
- §5. Построение меченой молекулы для интегрируемой цепочки Козлова-Трещева.
- §6. Построение меченой молекулы для интегрируемой симметричной цепочки Склянина.

Глава 2. Топологическая классификация интегрируемых геодезических потоков на сфере  $S^2$  с дополнительным квадратичным или линейным по импульсам интегралом.

- §7. Дискретный код интегрируемой метрики. Теорема классификации.
- §8. Полиномиальные интегралы геодезических потоков. Корректность операции "редукции" к тору  $T^2$ .
- §9. Алгоритм построения меченой молекулы в случае квадратичного дополнительного интеграла.

§10. Алгоритм построения меченой молекулы в случае линейного дополнительного интеграла.

§11. Сложность интегрируемых геодезических потоков на сфере  $S^2$ .

Литература.

## ВВЕДЕНИЕ.

Программа качественного исследования систем гамильтоновой механики была намечена С.Смейлом [8] и получила стремительное развитие в работах М.Мозера [9], В.И.Арнольда, Б.В.Козлова и А.И.Нейштадта [11], В.В.Козлова [14,15], М.П.Харламова [12] и других авторов, посвященных изучению как интегрируемых (большей частью), так и неинтегрируемых систем. Следует отметить, что все-таки особую важность для приложений в механике и Физике представляют интегрируемые случаи, поскольку считается, что такие системы допускают более или менее полное качественное описание псевдения траекторий. Кроме того, согласно известной теореме Колмогорова-Арнольда-Мозера (см., например, [11]), при достаточно малом гамильтоновом возмущении системы большинство нерезонансных инвариантных торов не разрушится, а лишь немного деформируется. Этот важный факт можно применить, например, для изучения топологии поверхностей постоянной энергии. В самом деле, поскольку изоэнергетическая поверхность общего положения при таком возмущении заменится на ей диффеоморфную, то, зная топологию изоэнергетических поверхностей интегрируемых систем, мы можем судить о топологии изоэнергетических поверхностей неинтегрируемых систем, близких к интегрируемым.

Развивая идеи симплектической топологии, заложенные в работах С.Смейла, В.В.Козлова и некоторых других авторов, А.Т.Фоменко [1-7] построил новую топологическую теорию интегрируемых гамильтоновых систем, посвященную, в частности, исследованию следующих вопросов. Как связан факт интегрируемости гамильтоновой

системы с топологией поверхности постоянной энергии системы? Как располагаются торы Лиувилля в фазовом пространстве и на отдельно взятой поверхности постоянной энергии? Как они заполняют открытые области? Что происходит в окрестности критических поверхностей уровня интегралов?

Некоторые из этих вопросов восходят к классическим результатам. Так, поведение интегрируемой гамильтоновой системы в окрестности неособой совместной поверхности уровня первых интегралов полностью описывается теоремой Лиувилля, которая утверждает, что в компактном случае эта поверхность уровня (а следовательно, и все достаточно близкие поверхности уровня) представляет собой несвязное объединение торов, заполненных условно-периодическими траекториями системы (см., например, [10]). Вопрос о строении критических поверхностей уровня - гораздо сложнее. Задавшись этим вопросом, как главной составной частью исследования топологии интегрируемых гамильтоновых систем, А.Т.Фоменко [1-4] разработал новую теорию "типа Морса", описывающую перестройки торов Лиувилля в окрестности критического слоя, и обнаружил новый топологический инвариант, характеризующий интегрируемую гамильтонову систему с точностью до грубой топологической эквивалентности. В работе [5] А.Т.Фоменко и Х.Цишанг оснастили инвариант [2] некоторыми числовыми метками, построив меченный топологический инвариант, позволяющий классифицировать интегрируемые гамильтоновы системы уже с точностью до более тонкой топологической эквивалентности. В работе [6] А.В.Болсинов, С.В.Матвеев и А.Т.Фоменко подвели итог серии исследований топологических свойств

интегрируемых гамильтоновых систем, предъявив топологическую классификацию всех систем с двумя степенями свободы.

В связи с этим возникла задача: выяснить, какое место в этой классификации принадлежит конкретным интегрируемым системам, вычислив для них инвариант Фоменко-Цишанга (меченую молекулу, по терминологии работы [6]). В настоящей работе эта задача решена для трех алгебраических аналогов цепочки Тода (см. [40]) и геодезических потоков на сфере  $S^2$  с дополнительным квадратичным или линейным по импульсам интегралом (последний результат был получен совместно с Нгуен Тьен Зунгом, см. [41]).

Пусть  $M$  — четырехмерное симплектическое многообразие,  $\omega$  — невырожденная замкнутая 2-форма (симплектическая структура),  $H$  — гладкая функция на  $M$  (гамильтониан). Косым градиентом функции  $H$  называется гладкое векторное поле  $v=sgrad H$ , однозначно задаваемое соотношением  $\omega(u, v)=u(H)$ , где  $u$  пробегает множество всех гладких векторных полей на  $M$ , а  $u(H)$  обозначает производную функции  $H$  вдоль векторного поля  $u$ . Поле  $v=sgrad H$  называется гамильтоновой системой на  $M$ . Гамильтоновость системы дифференциальных уравнений означает, что при подходящем выборе локальных координат  $(p, q)$  она записывается в виде  $\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q}$ ,  $\dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial p}$  [10].

Скобкой Пуассона двух функций  $f_1, f_2$  на  $M$  называется функция  $\{f_1, f_2\} = \omega(sgrad f_1, sgrad f_2)$ . Гладкая функция  $f$  называется интегралом гамильтоновой системы  $v$ , если она коммутирует с  $H$ , т.е.  $\{f, H\}=0$ . Очевидно, сам гамильтониан  $H$  является интегралом. Система  $v=sgrad H$  называется интегрируемой по Лиувиллю, если

существует дополнительный интеграл  $f$ , функционально независимый с  $H$  и такой, что  $\{f, H\} = 0$ . По теореме Лиувилля существование такого интеграла обеспечивает интегрируемость системы в квадратурах. Если  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  – регулярное значение отображения момента  $f \times H : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ , то его прообраз  $(f \times H)^{-1}(x, y)$  является (в компактном случае) двумерным тором  $T^2$ , называемым тором Лиувилля. Каждый тор Лиувилля заполнен условно-периодическими траекториями системы  $v$ .

Рассмотрим неособую изоэнергетическую поверхность  $Q_h^3 = \{H=h\}$ . Ограничив функцию  $f$  на  $Q_h^3$ , получим функцию  $f_h : Q_h^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , неособые поверхности уровня которой есть торы Лиувилля.

Определение (А.Т.Фоменко, [1]). Интеграл  $f$  на  $Q_h^3$  называется *боттovским*, если все критические точки функции  $f_h$  организованы в невырожденные критические многообразия.

Напомним, что критическое подмногообразие  $L^k \subset Q^3$  невырождено, если ограничение функции  $f$  на каждую нормальную к нему плоскость  $P^{3-k}$  имеет невырожденную морсовскую особенность в точке  $L^k \cap P^{3-k}$ . Заметим, что критическими подмногообразиями могут служить только окружности, двумерные торы и бутылки Клейна (см. [1–4]). Это следует из того, что критическое подмногообразие  $L^k$  функции  $f$  допускает невырожденное касательное векторное поле (ограничение поля  $v$  на  $L^k$ ), а поэтому его эйлерова характеристика равна 0. Поскольку при переходе к двулистным накрытиям критические бутылки Клейна разворачиваются в критические торы, в теории, построенной А.Т.Фоменко в [1–4] и А.В.Болсиновым, С.В.Матвеевым и А.Т.Фоменко в [6], предполагается, что критических бутылок Клей-

на нет, хотя всю теорию можно было бы построить и для общего случая.

В этой работе нам понадобится также понятие почти боттовского интеграла.

**Определение.** Назовем гладкий интеграл  $f$  *почти боттовским* на  $Q^3$ , если критические точки функции  $f$  на  $Q^3$  образуют критические подмногообразия, невырожденные, за исключением, быть может, минимаксных окружностей, а все критические точки функции  $f$ , ограниченной на нормальный двумерный диск к минимаксной критической окружности, изолированы.

**Замечание.** Для почти боттовских интегралов вся теория, построенная А.Т.Фоменко в [1-4], а также А.В.Болсиновым, С.В.Матвеевым и А.Т.Фоменко в [6], сохраняется.

**Определение ([1-4]).** Гамильтониан  $H$  называется *нерезонансным* на  $Q$ , если в  $Q$  всюду плотны торы Лиувилля, на которых траектории системы  $v$  образуют плотные иррациональные обмотки.

Разбиение многообразия  $Q$  на торы Лиувилля и связные компоненты критических поверхностей уровня интеграла  $f$  называется *лиувиллевым слоением* на  $Q$ .

**Определение ([6]).** Две интегрируемые в боттовском смысле нерезонансные гамильтоновы системы  $v_1, v_2$  на многообразиях  $Q_1, Q_2$  называются *топологически эквивалентными*, если существует сохраняющий ориентацию диффеоморфизм  $h: Q_1 \rightarrow Q_2$ , переводящий лиувиллево слоение системы  $v_1$  в лиувиллево слоение системы  $v_2$  с сохранением ориентации изолированных критических окружностей.

Разрежем многообразие  $Q$  по некоторому тору Лиувилля  $T$  и

склейм возникшие в результате разрезания два экземпляра тора  $T$  при помощи некоторого сохраняющего ориентацию диффеоморфизма. Получим новое трехмерное многообразие  $Q_1$ . Говорят, что лиувиллево слоение на  $Q_1$  получено из слоения на  $Q$  скручиванием вдоль тора Лиувилля ([6]).

Определение ([6]). Две интегрируемые гамильтоновы системы называются *грубо топологически эквивалентными*, если отвечающие им лиувиллевы слоения получаются друг из друга скручиванием вдоль торов Лиувилля.

Топологический инвариант Фоменко-Цишанга [5], вычислению которого для различных интегрируемых гамильтоновых систем и посвящена данная работа, наиболее полно и в наиболее удобных обозначениях описан А.В.Болсиновым, С.В.Матвеевым и А.Т.Фоменко в [6]. Приведем краткое описание инварианта Фоменко-Цишанга (меченой молекулы) в терминологии этой работы.

Определение ([6]). Пара  $(F, \Gamma)$ , где  $\Gamma$  – непустой конечный граф, лежащий в замкнутой поверхности  $F$ , называется (неоснащенной) *молекулой*, если выполнены следующие условия:

- 1) каждая вершина графа имеет степень 0, 2 или 4;
- 2) разность  $F \setminus \Gamma$  распадается в объединение нескольких открытых колец, гомеоморфных  $S^1 \times [0, 1]$ ;
- 3) если разбить каждое кольцо  $S^1 \times [0, 1]$ , из которых состоит разность  $F \setminus \Gamma$ , по средней линии  $S^1 \times \{1/2\}$  на два кольца, то вновь получившиеся кольца можно разделить на положительные и отрицательные так, чтобы к каждому ребру графа  $\Gamma$  примыкало одно положительное и одно отрицательное кольцо.

Две молекулы считаются одинаковыми, если они гомеоморфны как пары пространств (с сохранением ориентации).

Каждая молекула  $W=(F, \Gamma)$  разбивается на части двух типов – на регулярные окрестности связных компонент графа  $\Gamma$  (так называемые атомы) и на оставшиеся кольца. Эти кольца интерпретируются как отрезки-связи, соединяющие атомы в молекуле  $W$ .

Единственный атом, граф которого содержит вершину степени 0, состоит из диска и его центра. В статье [6] этот атом обозначен буквой  $A$ . Граф всех остальных атомов имеет лишь вершины степени 2 и 4.

Теорема ([6]). Существует естественная биекция между множеством всех (неоснащенных) молекул и классами грубо эквивалентных гамильтоновых систем.

Таким образом, инвариант Фоменко (молекула) характеризует интегрируемую гамильтонову систему с точностью до грубой топологической эквивалентности. Инвариант Фоменко-Цишанга (мечная молекула  $W^*$ ) получается из молекулы  $W$  добавлением числовых меток  $[r_i, \varepsilon_i, n_k]$ , где  $r_i$  – рациональные числа,  $0 \leq r_i \leq 1$ ,  $\varepsilon_i = \pm 1$ ,  $n_k \in \mathbb{Z}$ .

Теорема ([6]). Существует естественная биекция между множеством всех меченых молекул и классами топологически эквивалентных гамильтоновых систем.

Следуя работе [6], опишем более подробно объект  $W^* = [W, r_i, \varepsilon_i, n_k]$  – меченую молекулу. П-графом молекулы  $W=(F, \Gamma)$  называется граф  $\Pi$ , вершинами которого служат связные компоненты графа  $\Gamma$ , а ребра символизируют соединяющие кольца из разности  $F \setminus \Gamma$ . На каждом ребре  $e_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , графа  $\Pi$  фиксируется ориентация.

Определение ([6]). Избыточным оснащением молекулы  $W=(F, \Gamma)$  называется сопоставление каждому ребру  $e_i$  графа  $\Pi$  целочисленной матрицы  $A_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$  с определителем -1.

Разбиение изоэнергетического многообразия  $Q$  на регулярные окрестности  $Q_j$ , особых слоев лиувиллева слоения называется разбиением Зейферта многообразия  $Q$ ,  $Q=\cup Q_j$ . Разбиение Зейферта многообразия  $Q$  соответствует разбиению молекулы на атомы,  $W=(F, \Gamma)=\cup(F_j, \Gamma_j)$ . Многообразие (кусок Зейферта)  $Q_j$  называется зейфертовой реализацией атома  $(F_j, \Gamma_j)$ . На самом деле,  $Q_j$  является расслоением Зейферта с базой  $F_j$  (см. [6]). Все особые слои многообразия  $Q_j$  имеют тип  $(2,1)$ , причем слой является особым тогда и только тогда, когда при проекции  $\pi_j: Q_j \rightarrow F_j$  он переходит в вершину степени 2 графа  $\Gamma_j$ . Упомянутая выше целочисленная матрица  $A_i$  задает склейку двух кусков Зейферта  $Q_j$ ,  $Q_{j'}$  при помощи обрашающего ориентацию диффеоморфизма граничных торов. Гомеоморфизмы граничных окружностей, по которым склеиваются соответствующие атомы  $(F_j, \Gamma_j)$ ,  $(F_{j'}, \Gamma_{j'})$ , также должны обращать ориентацию.

Вследствие того, что можно по-разному выбирать систему координат на торах, по которым производится склейка двух кусков Зейферта, информация о гамильтоновой системе, заложенная в матрице склейки  $A_i$ , является избыточной. Опишем точное (т.е. не избыточное) оснащение молекулы  $W=(F, \Gamma)$ , следуя работе [6]. Каждому ребру  $e_i$  ориентированного графа  $\Pi$  сопоставим пару  $[r_i, s_i]$ , где

$$r_i = \begin{cases} \overline{\alpha}_i / |\beta_i|, & \text{если } \beta_i \neq 0 \\ \infty, & \text{если } \beta_i = 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \operatorname{sgn} \beta_i, & \text{если } \beta_i \neq 0 \\ \operatorname{sgn} \alpha_i, & \text{если } \beta_i = 0. \end{cases}$$

Здесь  $A_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{bmatrix}$  — матрица склейки,  $\overline{\alpha}_i$  — числа, удовлетворяющие условиям:  $0 \leq \overline{\alpha}_i \leq |\beta_i|$ ,  $\overline{\alpha}_i = \alpha_i \bmod \beta_i$ . Числа  $\overline{\delta}_i$  определяются аналогичным образом:  $0 \leq \overline{\delta}_i \leq |\beta_i|$ ,  $\overline{\delta}_i = \delta_i \bmod \beta_i$ .

Те ребра  $e_i$ , для которых  $r_i = \infty$ , называются *тонами*. Обозначим через  $\Pi^o$  тонкий подграф в графе  $\Pi$ , и пусть  $\Pi_1^o, \Pi_2^o, \dots, \Pi_s^o$  — те связные компоненты графа  $\Pi^o$ , которые не содержат вершин степени 1 графа  $\Pi$  (т.е. атомов  $A$ ), а  $\Pi_{s+1}^o, \dots, \Pi_l^o$  — те, которые содержат. Пусть  $v_o(e_i)$  обозначает начало ребра  $e_i$ , а  $v_i(e_i)$  — его конец.

Определим числа  $f_{ik}$  следующим образом:

$$f_{ik} = \begin{cases} -\gamma_i / \alpha_i, & \text{если } e_i \in \Pi_k^o, \\ (\alpha_i - \overline{\alpha}_i) / \beta_i, & \text{если } e_i \in \Pi_k^o, v_o(e_i) \in \Pi_k^o, v_i(e_i) \in \Pi_k^o, \\ -(\delta_i - \overline{\delta}_i) / \beta_i, & \text{если } e_i \in \Pi_k^o, v_o(e_i) \in \Pi_k^o, v_i(e_i) \in \Pi_k^o, \\ (\alpha_i - \overline{\alpha}_i - \delta_i + \overline{\delta}_i) / \beta_i, & \text{если } e_i \in \Pi_k^o, v_o(e_i) \in \Pi_k^o, v_i(e_i) \in \Pi_k^o, \\ 0, & \text{если } e_i \in \Pi_k^o, v_o(e_i) \in \Pi_k^o, v_i(e_i) \in \Pi_k^o. \end{cases}$$

Положим  $n_k = \sum_{i=1}^n f_{ik}$ . Набор чисел  $[r_i, \varepsilon_i, n_k]$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq k \leq s$  и называется *точным оснащением* молекулы  $W$  (здесь  $n$  — число ребер в графе  $\Pi$ , а числа  $n_k$  с  $k > s$  в точном оснащении не участвуют). В работе [6] было введено также понятие эквивалентности избыточных оснащений такое, что точное оснащение не изменится, если исходное избыточное оснащение заменить на эквивалентное. При нахождении меченых молекул  $W^* = [W, r_i, \varepsilon_i, n_k]$  для конкретных интегрируемых

гамильтоновых систем обычно ищут какое-нибудь избыточное оснащение, а потом по нему определяют числа  $\{r_i, \varepsilon_i, n_k\}$ . При этом оказывается чрезвычайно полезной следующая лемма, доказанная в [6].

**Лемма ([6]).** Любое избыточное оснащение эквивалентно такому, что все числа  $f_{ik}$  равны 0, кроме, возможно, ровно одного числа  $f_{1_0 k_0}$  для каждого  $k_0 \leq s$ .

Пусть  $v$  — гамильтонова система на замкнутом ориентированном многообразии  $Q$ , интегрируемая при помощи боттовского интеграла  $J$ . Обозначим через  $m$  число всех вершин графа  $\Gamma$  молекулы  $W = (F, \Gamma)$  (или, что то же самое, общее число всех критических окружностей боттовского интеграла  $J$  на изоэнергетическом многообразии  $Q$ ), а через  $n$  — число ребер в П-графе молекулы  $W$  (равное числу цилиндров  $S^1 \times S^1 \times [0, 1]$ , на которые рассыпается многообразие  $Q$  после удаления из него особых слоев соответствующего лиувиллева слоения).

**Определение ([6]).** Пара неотрицательных целых чисел  $(m, n)$  называется *сложностью* данной интегрируемой гамильтоновой системы  $v$ .

Очевидно, сложность является инвариантом молекулы  $W$  (а следовательно, и инвариантом системы  $v$ ). В работе [6] доказано, что число  $\lambda(m, n)$  всех молекул фиксированной сложности  $(m, n)$  конечно, и найдена верхняя граница  $\Lambda(m) = \max \{n | \lambda(m, n) \neq 0\} = \left[ \frac{3m}{2} \right]$ . В связи с понятием сложности возникает новый интересный вопрос: в какие клетки таблицы значений функции  $\lambda(m, n)$  попадают реальные интегрируемые гамильтоновы системы? В настоящей работе мы решаем эту задачу для всех рассматриваемых здесь систем с двумя степенями свободы.

Изложим теперь вкратце содержание диссертации.

В Главе 1 вычисляются мечены молекулы для трех алгебраических аналогов цепочки Тода, входящих в классификацию В.В.Козлова и Д.В.Трецкого [16]. Оказывается, все три исследуемые гамильтоновы системы дифференциальных уравнений топологически эквивалентны между собой и эквивалентны следующим интегрируемым случаям механики твердого тела: Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Горячева-Чаплыгина (гиростат) при соответствующих значениях энергии  $H$ .

В §1 приведен обзор по цепочкам Тода и их алгебраическим аналогам, изложена история вопроса. В §2 обсуждается критерий компактности изоэнергетической поверхности интегрируемой системы с экспоненциальным взаимодействием [16], представляющий собой несложную техническую лемму. В §3 рассматриваются три интегрируемые гамильтоновы системы в  $\mathbb{R}^4(x_1, x_2, p_1, p_2)$ , задаваемые следующими гамильтонианами:

$$(A) \quad H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + v_1 \exp\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x_1 + \sqrt{\frac{1}{2}}x_2\right) + v_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}x_1 + \sqrt{\frac{1}{2}}x_2\right) + v_3 \exp\left(-\sqrt{2}x_2\right);$$

$$(K-T) \quad H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + v_1 \exp(x_1) + v_2 \exp(x_2) + v_3 \exp(-x_1 - x_2) + v_4 \exp\left(-\frac{x_1 + x_2}{2}\right);$$

$$(S) \quad H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \exp(-x_1 - x_2) + \gamma_2 \exp(x_1) + \frac{\beta_2}{2} \exp(2x_1) + \gamma_3 \exp(x_2) + \frac{\beta_3}{2} \exp(2x_2).$$

Здесь гамильтониан ( $A$ ) соответствует классической периодической цепочке Тода, связанной с алгеброй Ли  $A_3$ , а гамильтонианы ( $K-T$ ) и ( $S$ ) обобщают цепочку Тода, связанную с алгеброй Ли  $B_2$ . Интегрируемый случай ( $K-T$ ) был открыт В.В.Козловым и Д.В.Трещевым в [16], а гамильтониан ( $S$ ) задает интегрируемую цепочку Склянина [26]. Цепочку Склянина ( $S$ ) мы будем называть *симметричной*, если коэффициенты  $\gamma_2, \gamma_3$  одного знака и выполняется соотношение  $\gamma_2^2 \beta_3 = \gamma_3^2 \beta_2$ . Мы будем говорить, что набор констант  $v_k$  является *допустимым*, если соответствующая изоэнергетическая поверхность  $Q^3 = \{H=\text{const}\}$  компактна.

**Теорема.** Рассмотрим интегрируемые гамильтоновы системы в  $\mathbb{R}^4$  с гамильтонианами ( $A$ ), ( $K-T$ ) и ( $S$ ), причем цепочку Склянина ( $S$ ) будем предполагать симметричной. Тогда, независимо от выбора допустимого набора коэффициентов  $v_k$ ,

- 1) фазовое пространство  $\mathbb{R}^4$  расслоено на поверхности постоянной энергии  $Q^3 = \{H=\text{const}\} = S^3$ ;
- 2) дополнительные интегралы во всех трех случаях являются почти боттовскими;
- 3) мечная молекула во всех трех случаях имеет следующий простейший вид:  $A \xrightarrow{\circ} A$ ;
- 4) сложность  $(n, p)$  всех трех систем равна  $(2, 1)$ ;
- 5) из совпадения мечных молекул следует, что интегрируемые гамильтоновы системы с гамильтонианами ( $A$ ), ( $K-T$ ) и ( $S$ ) топологически эквивалентны между собой и эквивалентны следующим интегрируемым случаям механики твердого тела: Эйлера,

Лагранжа, Ковалевской, Горячева-Чаплыгина (гиростат) при соответствующих значениях энергии  $H$ .

Доказательство этой теоремы основано на построении бифуркационной диаграммы отображения момента  $H \times f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  для каждого из трех случаев и представлено в следующих трех параграфах (§4–§6).

В Главе 2 изложены результаты, полученные автором совместно с Игуен Тъен Зунгом в работе [41] и посвященные топологической классификации интегрируемых геодезических потоков на двумерной сфере с дополнительным квадратичным или линейным по импульсам интегралом. Классическими примерами таких систем являются геодезические потоки на стандартных эллипсоидах (вообще, на квадриках в  $\mathbb{R}^3$ ) и геодезический поток фактор-метрики на сфере Пуассона, возникающий в классических задачах аналитической динамики.

Локальному изучению натуральных интегрируемых систем с квадратичными и линейными по импульсам интегралами посвящены работы классиков: Дж.Д.Биркгофа [29], Дарбу [34], Леви-Чивиты [35]. Подробное обсуждение этих вопросов можно найти в книге А.М.Переломова [13]. Полиномиальные (главным образом – квадратичные) по импульсам интегралы натуральных интегрируемых систем, заданные глобально на кокасательном расслоении  $T^*M$  к замкнутой двумерной поверхности  $M$ , изучались В.Н.Колокольцовым в [30, 32].

В работе [30] В.Н.Колокольцов доказал, что геодезический поток на двумерной сфере с метрикой класса  $C^2$  имеет дополнительный квадратичный по импульсам интеграл, независимый с интегралом энергии, если и только если в некоторых изостермических координатах  $z=x+iy$ , заданных на сфере с выколотой точкой, метрика имеет

вид  $\lambda(x,y)[dx^2 + dy^2]$ , где функция  $\lambda$  равна одной из следующих:

(0.1)  $\lambda = f(x^2+y^2)$ , где  $f$  - положительная функция класса  $C^2$  такая, что  $f(t) = [a+o(1)]/t^2$  при  $t \rightarrow \infty$ ; такие геодезические потоки имеют линейный по импульсам интеграл;

(0.2)  $\lambda = \frac{f(u(x,y))+h(v(x,y))}{|4z^3 - g_2 z + g_3|}$ , где  $g_2, g_3$  - такие вещественные постоянные, что  $g_2^3 - 27g_3^2 > 0$ , при этом  $u, v$  - соответственно вещественная и мнимая части преобразования  $w(z) = \wp^{-1}(z)$ , где  $\wp$  - функция Вейерштрасса с инвариантами  $g_2, g_3$  и парой периодов вида  $\omega_1$  и  $i\omega_2$  ( $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ ), а  $f$  и  $h$  - функции класса  $C^2$  такие, что

$$\text{a)} f(u) = \left[u - \frac{k\omega_1}{2}\right]^2 [a+o(1)] \text{ при } u \rightarrow \frac{k\omega_1}{2},$$

$$h(v) = \left[v - \frac{k\omega_2}{2}\right]^2 [a+o(1)] \text{ при } v \rightarrow \frac{k\omega_2}{2}$$

для любого фиксированного целого  $k$ ,  $a > 0$ ;

б) функции  $f$  и  $h$  периодические с периодами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , соответственно, и их значения на отрезках  $[\frac{\omega_1}{2}, \omega_1]$ ,  $[\frac{\omega_2}{2}, \omega_2]$  определяются через их значения на отрезках  $[0, \frac{\omega_1}{2}]$ ,  $[0, \frac{\omega_2}{2}]$  по формулам:

$$f\left(\frac{\omega_1}{2} + \tau\right) = f\left(\frac{\omega_1}{2} - \tau\right), \quad \tau \in [0, \frac{\omega_1}{2}],$$

$$h\left(\frac{\omega_2}{2} + \tau\right) = h\left(\frac{\omega_2}{2} - \tau\right), \quad \tau \in [0, \frac{\omega_2}{2}].$$

В §7 вводится понятие дискретного кода интегрируемой метрики вида (0.1) и (0.2) (мы называем метрику *интегрируемой*, если она задает интегрируемый геодезический поток). Оказывается, что для того, чтобы гамильтонова система была боттовской, необходимо и достаточно, чтобы функции  $f(u)$ ,  $h(v)$  или  $g(x^2+y^2)=(x^2+y^2)\times f(x^2+y^2)$ , в зависимости от рассматриваемого случая, были функциями Морса. Это утверждение доказывается в §§ 9,10 в процессе обоснования алгоритмов построения мечевых молекул.

Рассмотрим график функции Морса  $r=f(u)$  на отрезке  $0 \leq u \leq \frac{\omega_1}{2}$

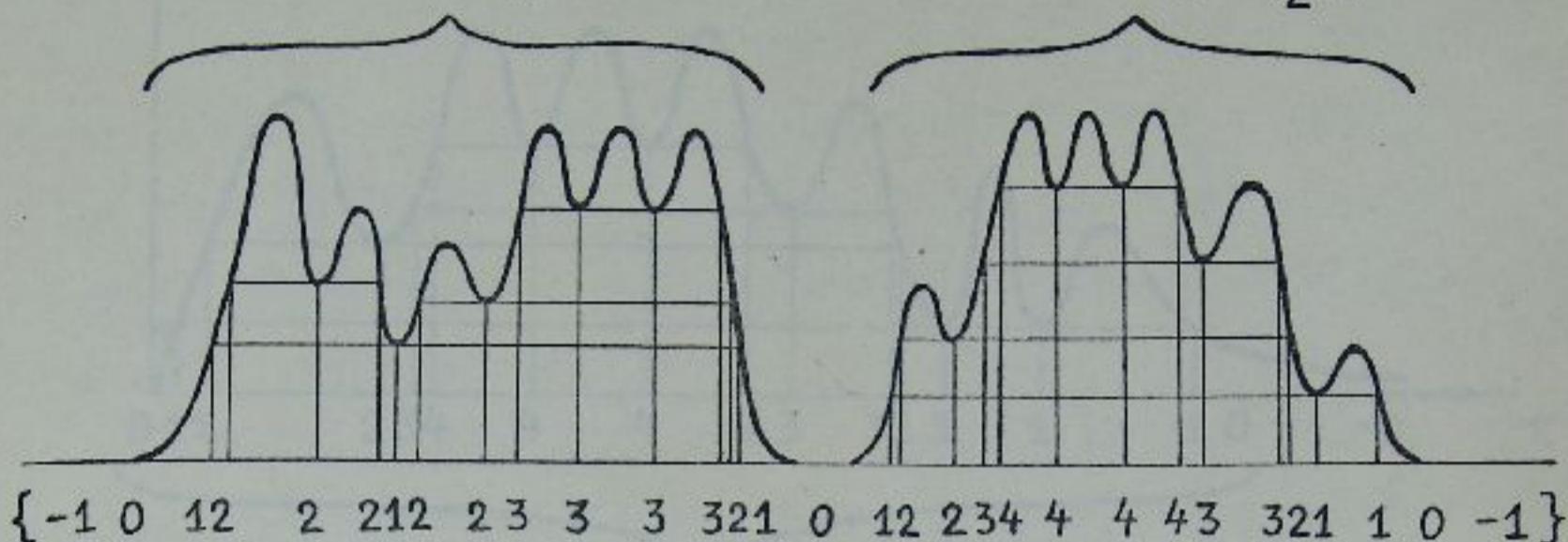
и замкнутое множество  $U=\left\{0 \leq u \leq \frac{\omega_1}{2}, 0 \leq r \leq f(u)\right\}$ . Заметим, что,

согласно условию (0.2a),  $f(u)>0$  при  $0 < u < \frac{\omega_1}{2}$  и  $f(0)=f\left(\frac{\omega_1}{2}\right)=0$ .

Пусть  $C$  – множество локальных минимумов функции  $f$ , отличных от нуля,  $D_c$  – множество отрезков, лежащих в пересечении прямой  $\{r=c, c \in C\}$  с множеством  $U$ , а множество  $D$  определяется следующим образом:  $D=\bigcup_{c \in C} \left\{d \in D_c \mid d \text{ содержит хотя бы одну локально минимальную точку функции } f(u)\right\}$ . Пусть  $E=\{e_1, \dots, e_s\}$  – множество точек пересечения графика  $r=f(u)$  с отрезками из  $D$ , а точки  $u_i$  ( $i=1, \dots, s$ ) – проекции точек  $e_i$  на ось  $r=0$ ,  $u_1 < u_2 < \dots < u_s$ . Обозначим через  $a_i$  число точек пересечения отрезка  $[u_i, e_i]$  с множеством  $D$ . Положим  $s(f)=\{a_1, \dots, a_s\}$ ,  $s(h)$  определяется аналогично.

**Определение.** Кодом  $S(f, h)$  пары функций  $(f, h)$  называется последовательность  $S(f, h)=\{-1, 0; s(f); 0; s(h); 0, -1\}$ , см. Рис.1.

ГРАФИК ФУНКЦИИ  $f$  НА  
ОТРЕЗКЕ  $[0, \frac{\omega_1}{2}]$



Код  $S(f, h)$

Рис. 1

В случае, если функция  $\lambda(x, y)$  имеет вид (0.1), рассмотрим график функции Морса  $g(t) = tf(t)$  на отрезке  $0 \leq t \leq T$ , где  $T$  – достаточно велико ( $T \gg t_i$ , где  $t_i$  – критические точки функции  $g(t)$ ). Условие гладкости  $f(t) = [a + o(1)]/t^2$  ( $t \rightarrow \infty$ ) функции  $f(t)$  в бесконечности гарантирует, что количество экстремумов функции  $g(t)$  конечно; нетрудно показать, что  $g(t)$  имеет вид, изображенный на Рис.2. Код  $S(g)$  функции  $g$  определяется аналогично коду  $s(f)$  функции  $f$ , см. Рис.2.

**Определение.** Пусть  $(b_1, \dots, b_k)$  – произвольная связная подпоследовательность в  $S(f, h)$  или в  $S(g)$ , такая, что  $b_1 = b_k$ ,  $b_l > b_1$  ( $l = 2, \dots, k-1$ ). Замена  $(b_1, \dots, b_k) \rightarrow (b_k, b_{k-1}, \dots, b_1)$  в  $S(f, h)$  или в  $S(g)$  называется элементарным преобразованием кода. Два кода называются эквивалентными, если один получается из другого конечным числом элементарных преобразований.

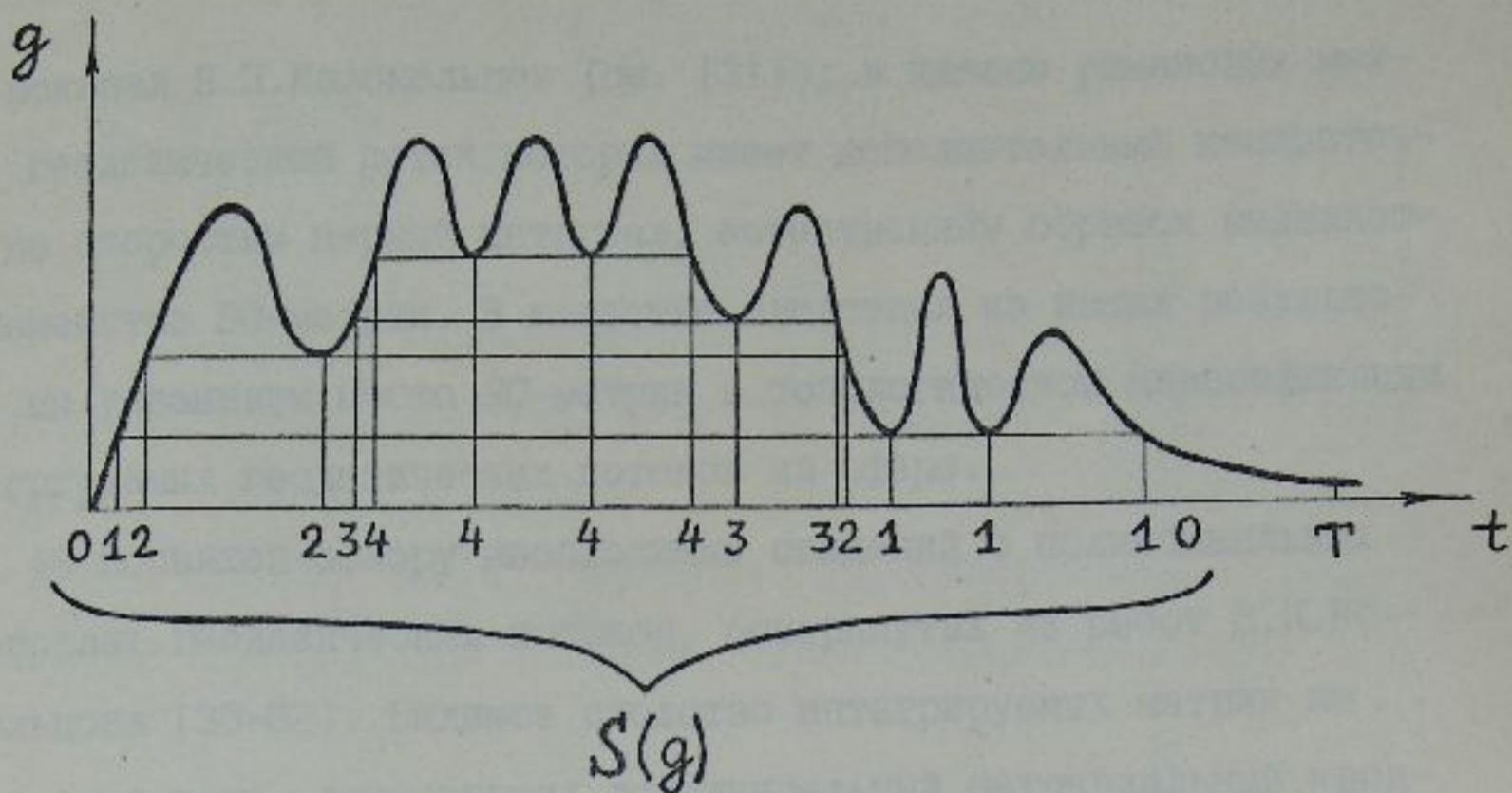


Рис. 2

**Теорема.** 1) Две пары функций Морса  $(f, h)$  и  $(f', h')$ , удовлетворяющие условиям (0.2a, б), задают топологически эквивалентные геодезические потоки метрик вида (0.2) на сфере  $S^2$ , если и только если их коды  $S(f, h)$  и  $S(f', h')$  эквивалентны.

2) Функции Морса  $g_1(t) = tf_1(t)$  и  $g_2(t) = tf_2(t)$  задают топологически эквивалентные геодезические потоки метрик вида (0.1) на сфере  $S^2$ , если и только если их коды  $S(g_1)$  и  $S(g_2)$  эквивалентны.

Как и следовало ожидать, топологически неэквивалентные геодезические потоки на сфере  $S^2$  образуют дискретное множество, находящееся во взаимно однозначном соответствии с множеством кодов  $S(\lambda)$ , рассматриваемых с точностью до эквивалентности.

Риманово многообразие  $M$  называется *SC-многообразием*, если существует такое число  $l > 0$ , что все геодезические являются простыми, т.е. не самопересекающимися, замкнутыми кривыми длины  $l$ .

Как показал В.Н.Колокольцов (см. [31]), в классе римановых метрик, геодезический поток которых имеет дополнительный квадратичный по скоростям первый интеграл, естественным образом выделяется семейство  $SC$ -метрик. В качестве следствия из наших результатов, мы указываем место  $SC$ -метрик в топологической классификации интегрируемых геодезических потоков на сфере.

§8 посвящен обзору необходимых сведений о полиномиальных интегралах геодезических потоков, почерпнутых из работ В.Н.Колокольцова [30–32]. Видимое сходство интегрируемых метрик на сфере и на торе, допускающих дополнительный нетривиальный квадратичный по импульсам интеграл, подсказало нам идею воспользоваться полученными ранее Е.Н.Селивановой [36] результатами классификации лиувиллевых геодезических потоков на торе  $T^2$  для классификации геодезических потоков метрики вида (0.2) на сфере  $S^2$ . Дело в том, что присутствующая в условии (0.2)  $\wp$ -функция Вейерштрасса реализует разветвленное двулистное накрытие  $\wp: T^2 \rightarrow S^2$  и позволяет ввести на конфигурационной сфере с выколотыми точками окружления (точками окружления называются образы при отображении  $\wp: T^2 \rightarrow S^2$  четырех точек ветвления на торе  $T^2$ ) координаты Лиувилля  $(u, v)$ , в которых метрика (0.2) примет лиувиллев вид. Соответствующие координатам  $(u, v)$  импульсы  $(p_u, p_v)$  определены всюду на сфере  $S^2$ , кроме четырех точек окружления. Гамильтониан  $H$  и дополнительный интеграл  $F$  геодезического потока на сфере  $S^2$  в координатах  $(u, v, p_u, p_v)$  (в области, где эти координаты определены), имеют следующий вид:

$$(0.3) \quad H = \frac{1}{2} \frac{p_u^2 + p_v^2}{f(u) + h(v)},$$

$$(0.4) \quad F = \frac{h(v)}{f(u) + h(v)} p_u^2 - \frac{f(u)}{f(u) + h(v)} p_v^2.$$

Корректность применяемой нами операции "редукции" к тору  $T^2$  гарантируется следующей леммой.

**Лемма.** Функции  $H$  и  $F$ , задаваемые формулами (0.3), (0.4), инвариантны относительно действия группы монодромии накрытия  $\mathcal{G}: T^2 \rightarrow S^2$ .

В §9 мы формулируем и доказываем алгоритм построения меченой молекулы в случае квадратичного по импульсам дополнительного интеграла, а в §10 – алгоритм построения меченой молекулы в случае линейного по импульсам дополнительного интеграла. В каждом случае алгоритм построения меченой молекулы является основой доказательства теоремы классификации из §7. Список всех встречающихся здесь атомов, составляющих молекулу, изображен на Рис.3.

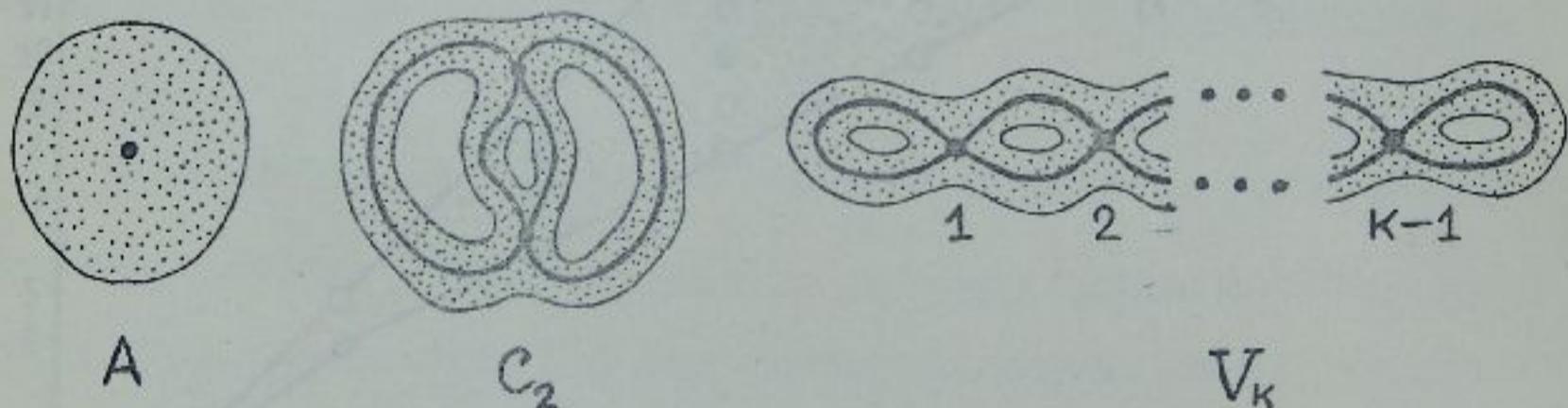


Рис. 3

Последний §11 главы 2 посвящен вычислению сложности интегрируемых геодезических потоков на сфере  $S^2$ .

**Теорема.** Интегрируемые геодезические потоки на сфере  $S^2$  с метрикой вида (0.1) и (0.2) заполняют на молекулярной таблице сложности следующую область:

$$1) \left\{ (m, n) = (2, 1) \text{ или } \frac{m}{2} + 2 \leq n \leq m-1, \text{ где } m \geq 6, m = 4k+2, n = 2l+1, k, l \in \mathbb{N} \right\} -$$

эта область, отмеченная на Рис.4 белыми кружочками, отвечает метрикам вида (0.1);

$$2) \left\{ (m, n) = (6, 4) \text{ или } \frac{m}{2} + 3 \leq n \leq m-2, \text{ где } m \geq 6, m = 4k+2, n = 2l, k, l \in \mathbb{N} \right\} -$$

эта область, отмеченная на Рис.4 черными кружочками, отвечает метрикам вида (0.2).

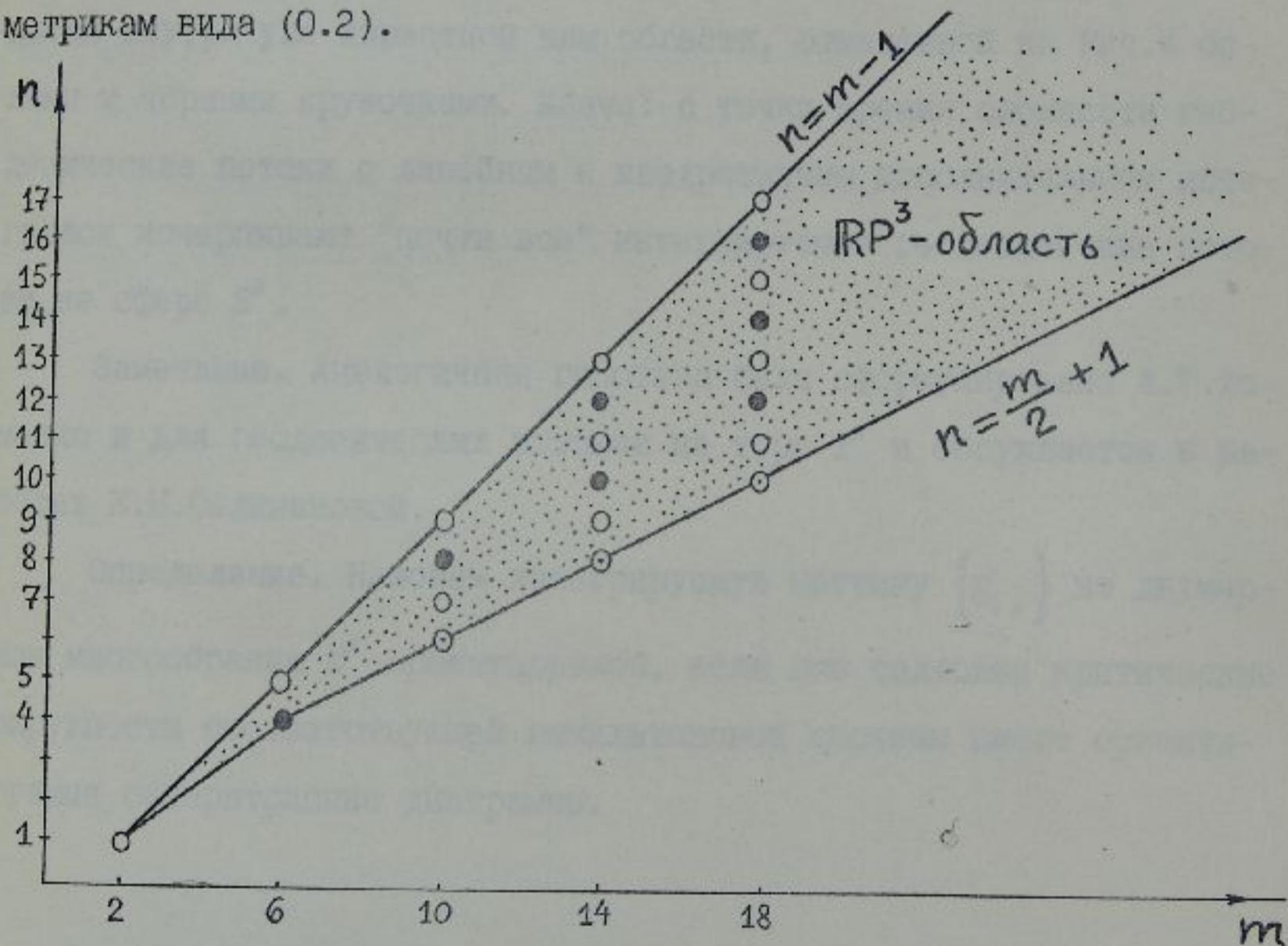


Рис. 4

Заметим, что для геодезических потоков на двумерной сфере  $S^2$  изоэнергетическая поверхность  $Q^3 = \{H=\text{const}\}$  диффеоморфна  $RP^3$ . Всевозможные гамильтоновы системы на изоэнергетической поверхности  $Q^3 = RP^3$  с точки зрения занимаемой ими "физической зоны" (т.е. области на молекулярной таблице Фоменко) были полностью изучены Игуен Тьен Зунгом и А.Т.Фоменко в [37,38]. Как видно из Рис.4, "физическая зона" наших потоков представляет собой "сечное подмножество" в  $RP^3$ -области.

**Гипотеза (А.Т.Фоменко).** Пусть дана произвольная метрика  $\{g_{ij}\}$  на сфере  $S^2$ , геодезический поток которой интегрируем. Тогда отвечающее ей место на молекулярной таблице сложности находится внутри уже известной нам области, отмеченной на Рис.4 белыми и черными кружочками. Иначе: с точки зрения сложности геодезические потоки с линейным и квадратичным дополнительным интегралом исчерпывают "почти все" интегрируемые геодезические потоки на сфере  $S^2$ .

**Замечание.** Аналогичная гипотеза была сформулирована А.Т.Фоменко и для геодезических потоков на торе  $T^2$  и обсуждается в работах Е.Н.Селивановой.

**Определение.** Назовем интегрируемую метрику  $\{g_{ij}\}$  на двумерном многообразии  $M^2$  *ориентируемой*, если все седловые критические окружности соответствующей гамильтоновой системы имеют ориентируемые сепаратрисные диаграммы.

Оказывается, в классе ориентируемых метрик на сфере  $S^2$  гипотеза А.Т.Фоменко "почти верна", а именно, справедливо следующее утверждение.

**Предложение.** Для интегрируемого геодезического потока произвольной метрики  $\{g_{ij}\}$  на сфере  $S^2$  число критических окружностей  $m$  имеет вид  $m=4k+2$ .

**Следствие.** Интегрируемые геодезические потоки на сфере  $S^2$  образуют сеточное подмножество в  $RP^3$ -области, изображенное на Рис.4, где белые и черные кружки отвечают геодезическим потокам с линейным и квадратичным по импульсам дополнительным интегралом, а белые кружки с точкой соответствуют неизвестным пока (или не существующим вовсе) гамильтоновым системам.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору А.Т.Фоменко за внимание к работе и полезные замечания.

## ГЛАВА 1.

### ИНВАРИАНТЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ АНАЛОГОВ ЦЕПОЧКИ ТОДА.

#### §1. Гамильтоновы системы с экспоненциальным взаимодействием.

В 1967 году японский физик Морикацу Тода исследовал взаимодействие атомов в кристаллической решетке и обнаружил отсутствие стохастизации в одномерной бесконечной цепочке частиц единичной массы с экспоненциальным взаимодействием между соседними частицами. Система частиц, предложенная для рассмотрения М.Тода, определяется потенциалом  $V = \sum_i \exp(x_i - x_{i+1})$ , где  $x_i$  – отклонение  $i$ -й частицы от положения равновесия [17].

В случае конечного числа частиц следует различать непериодическую (незамкнутую) цепочку  $n$  частиц на прямой, когда первая и последняя частицы не взаимодействуют друг с другом, и периодическую (замкнутую) цепочку  $n$  частиц на прямой, когда первая и последняя частицы взаимодействуют так же, как и все остальные.

В 1974 году в работе Хенона [18] для конечной непериодической цепочки Тода, состоящей из  $n$  частиц, были найдены  $n$  функционально независимых интегралов движения. В этом же году в работах Флашки [19] и Манакова [20] была подобрана подходящая пара Лакса для этой цепочки и доказана инволютивность найденных Хеноном интегралов.

В работе О.И.Богоявленского [21] (см. также книгу [22]) были рассмотрены гамильтоновы системы с экспоненциальным взаимодействием, обобщающие периодическую цепочку Тода и связанные с

системами корней простых алгебр Ли. При этом классическая периодическая цепочка Тода связана с алгеброй Ли  $A_n$  и задается гамильтонианом:

$$(1.1) \quad H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \exp(x_i - x_{i+1}) + \exp(x_n - x_1).$$

Подробные исторические указания и ссылки, а также доказательства некоторых из вышеуказанных результатов можно найти в книге А.М.Переломова [13].

Е.К.Склянин [26] нашел еще одно интегрируемое обобщение цепочки Тода:

$$(1.2) \quad H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \exp(x_{i+1} - x_i) + \alpha_1 \exp(x_1) + \frac{\beta_1}{2} \exp(2x_1) + \\ + \alpha_n \exp(-x_n) + \frac{\beta_n}{2} \exp(-2x_n),$$

где  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_n, \beta_n$  – вещественные константы.

В.В.Козлов и Д.В.Трещев в [16] рассмотрели гамильтоновы системы с экспоненциальным взаимодействием вида:

$$(1.3) \quad \dot{x} = p, \quad \dot{p} = - \sum_{k=1}^m \left[ v_k \exp(e_k, x) \right] e_k,$$

где  $v_k$  – отличные от нуля вещественные числа,  $x$  и  $p$  –  $n$ -мерные векторы координат и импульсов, соответственно, а набор векторов  $S = \{e_1, \dots, e_m\}$  – так называемый "спектр" суммы экспонент.

Определение 1.1 (В.В.Козлов, Д.В.Трещев [16]). Гамильтонова система уравнений (1.3) называется *интегрируемой по Биркгофу*, если она имеет  $n$  полиномиальных по импульсам интегралов с коэффициентами вида  $\sum c_i \exp(f_i, x)$ , где  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $f_i \in \mathbb{R}^n$ , старшие одно-

родные формы которых почти всюду независимы (как функции в  $\mathbb{R}^{2n}$ ).

В случае двух степеней свободы условие независимости старших форм заменяется более слабым условием независимости дополнительного полиномиального интеграла с интегралом энергии (как аналитических функций в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^4$ ). Гамильтоновы системы из работ [18-26] интегрируемы по Биркгофу.

**Определение 1.2** (В.В.Козлов, Д.В.Трещев [16]). Вектор из спектра  $S$  называется *максимальным*, если он имеет наибольшую длину среди всех векторов из  $S$ , имеющих с ним одинаковое направление.

**Определение 1.3** ([16]). Интегрируемая система со спектром  $S$  называется *полной*, если не существует ненулевого вектора  $e$ , такого, что система (1.3) со спектром  $S \cup \{e\}$  интегрируема по Биркгофу.

Спектр каждой интегрируемой по Биркгофу гамильтоновой системы получается из некоторого полного спектра отбрасыванием части элементов.

**Определение 1.4** ([16]). Гамильтонова система называется *не-приводимой*, если она не разлагается в прямую сумму подсистем.

По аналогии с теорией полупростых алгебр Ли [27] в работе [16] определяется так называемый *граф Кокстера* интегрируемой по Биркгофу гамильтоновой системы. Это граф, вершинами которого служат векторы из спектра  $S$ , причем две вершины  $e_1$  и  $e_2$  соединены  $4\cos^2\phi$  ребрами, где  $\phi$  – угол между векторами  $e_1$  и  $e_2$ . Граф Кокстера, каждой вершине которого приписан коэффициент, пропорциональный квадрату длины соответствующего вектора, называется *схемой Дышина* [16].

В.В.Козлов и Д.В.Трещев в [16] предъявляют классификацию

всех полных неприводимых гамильтоновых систем, интегрируемых по Биркгофу. На Рис.5 изображен список (скорее всего, избыточный) схем Дынкина всех полных неприводимых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, интегрируемых по Биркгофу.

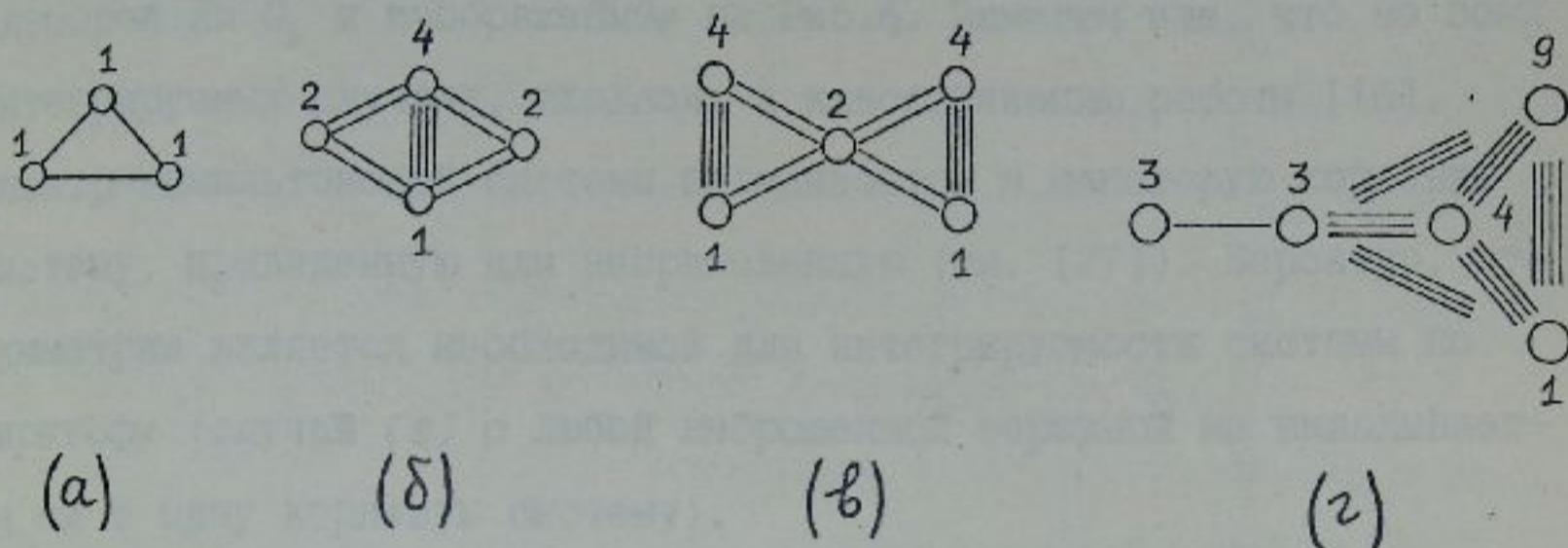
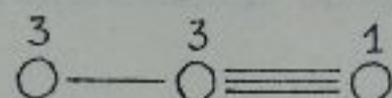
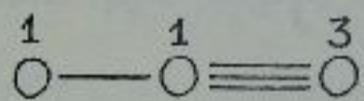


Рис. 5

Известно, что гамильтоновы системы со схемами Дынкина (а), (б), (б') – вполне интегрируемы. Случай (а) входит в набор интегрируемых гамильтоновых систем, связанных с простыми алгебрами Ли и проинтегрированных О.И.Богоявленским в [21] (см. также [22]). Случай (б) был открыт В.В.Козловым и Д.В.Трещевым в [16]; случай (б') – интегрируемая цепочка Е.К.Скленина [26]. В работе [16] исследовался вопрос об интегрируемости по Биркгофу гамильтоновой системы, получающейся из графа (г) отбрасыванием вершины с меткой 4. Оказалось, что система не имеет дополнительного интеграла, степень которого не превосходит шести. Число 6 здесь – число Кокстера соответствующей корневой системы; было замечено, что во всех известных интегрируемых по Биркгофу системах с двумя степе-

нями свободы степень дополнительного интеграла равна как раз соответствующему числу Кокстера. По-видимому, эта система (а тем более полная система со схемой Дынкина (г)) неинтегрируема по Биркгофу, хотя имеет две интегрируемые подсистемы, связанные с алгеброй Ли  $G_2$  и изображенные на Рис.6. Заметим еще, что во всех интегрируемых случаях, входящих в классификацию работы [16], спектр гамильтоновой системы вкладывается в некоторую корневую систему, приведенную или неприведенную (см. [27]). Вероятно, эта симметрия является необходимой для интегрируемости системы по Биркгофу (случай (г) с любой выброшенной вершиной не вкладывается ни в одну корневую систему).



(α)

(δ)

Рис. 6

**§2. Критерий компактности изоэнергетической поверхности интегрируемой системы с экспоненциальным взаимодействием.**

Прежде чем приступить к исследованию конкретных систем, выделим в множестве всех интегрируемых по Биркгофу гамильтоновых систем вида (1.3) те, которые имеют компактные поверхности постоянной энергии  $Q^{2n-1} = \{H=\text{const}\}$ . Верна следующая техническая лемма.

**Лемма 2.1.** Изоэнергетическая поверхность  $Q^{2n-1} = \{H=\text{const}\}$  интегрируемой по Биркгофу гамильтоновой системы вида (1.3) компактна, если и только если выполнены следующие условия:

- (a) спектр  $S$  содержит в точности  $(n+1)$  максимальный вектор, где  $n$  равно числу степеней свободы гамильтоновой системы (1.3);
- (б) для любого максимального вектора  $e$  из спектра  $S$  коэффициент при  $\exp[e, x]$  в выражении для потенциальной энергии больше нуля.

**Доказательство.** Пусть выполнены условия (a) и (б). Изоэнергетическая поверхность  $Q^{2n-1}$  задается уравнением:

$$(2.1) \quad H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{k=1}^m v_k \exp[e_k, x] = h.$$

Из (б) следует, что если существует номер  $k$  такой, что  $v_k < 0$ , то существует и номер  $j$  такой, что  $v_j > 0$ , а  $e_j = \lambda e_k$ , где  $\lambda > 1$ . Систему координат  $x$  можем выбрать так, чтобы  $[e_k, x] = x_1$ , а  $[e_j, x] = \lambda x_1$ ,  $\lambda > 1$ ,  $\lambda$  – целое число. Тогда при  $x_1 \rightarrow +\infty$  выражение  $\left[ v_k \exp[x_1] + v_j \exp[\lambda x_1] \right]$  также стремится к  $+\infty$ . Поэтому, в силу уравнения (2.1), координата  $x_1$  принимает ограниченные положительные значе-

ния. Таким образом, экспоненты с отрицательными коэффициентами не вносят существенного вклада в выражение (2.1), поэтому ради удобства будем считать, что их нет, т.е. что все векторы максимальны.

Очевидно, все импульсы  $p_i$  принимают ограниченные значения. Покажем, что координаты  $x_i$  также ограничены. В силу условия (a) для любого  $k$  координата  $x_k$  входит в выражение для потенциальной энергии по крайней мере два раза, причем существуют две экспоненты, обозначим их  $\exp_i$  и  $\exp_j$ , содержащие координату  $x_k$  с разными знаками (это следует из доказанного в работе [16] утверждения, что если гамильтонова система интегрируема по Биркгофу, то угол между любыми двумя линейно независимыми векторами  $e_i$  и  $e_j$  из спектра  $S$  всегда больше или равен  $\pi/2$ ). Поэтому при  $x \rightarrow \pm \infty$  одна из экспонент,  $\exp_i$  или  $\exp_j$ , принимает бесконечно большие значения, что невозможно в силу уравнения (2.1). Следовательно, изоэнергетическая поверхность  $Q^{2n-1}$  компактна.

Докажем обратное утверждение. Пусть число максимальных векторов, входящих в спектр  $S$ , меньше, чем  $(n+1)$ . Тогда подходящим выбором системы координат  $x$  можно добиться того, чтобы координата  $x_1$  входила в уравнение (2.1) только с отрицательным знаком. Но тогда  $x_1$  может принимать бесконечно большие положительные значения и, следовательно, поверхность  $Q^{2n-1}$  некомпактна. Противоречие.

Пусть не выполнено условие (б), т.е. существует максимальный вектор  $e_1$  из спектра  $S$  такой, что коэффициент  $v_1$  при  $\exp[e_1, x]$  меньше нуля. Систему координат  $x$  выберем так, чтобы  $[e_1, x] = x_1$ . Возможно, в выражении для потенциальной энергии содержится член

$v_2 \exp(\lambda e_1, x)$ , где  $v_2 > 0$ , а  $0 < \lambda < 1$ . Однако, это не меняет сути дела, т.к., в силу неравенства  $\lambda < 1$ , при  $x_1 \rightarrow +\infty$  выражение  $\left[ v_1 \exp(x_1) + v_2 \exp(\lambda x_1) \right]$  стремится к  $-\infty$ . Из уравнения (2.1) следует, что для любого  $h$  координата  $x_1$  может принимать сколь угодно большие значения, т.е. изоэнергетическая поверхность  $Q^{2n-1} = \{H=h\}$  некомпактна — противоречие. Лемма 2.1 доказана.

§3. Теорема о топологической эквивалентности трех алгебраических аналогов цепочки Тода.

В этом параграфе будут рассмотрены интегрируемые гамильтоновы системы со схемами Дынкина (a), (б), (8) (см. Рис.5) и сформулирована основная теорема Главы 1. Случай (a), отвечающий алгебре Ли  $A_3$ , можно исследовать двояким образом. В этой работе мы имеем дело уже с редуцированной цепочкой (редукция осуществлялась по одномерной группе симметрий), когда число степеней свободы гамильтоновой системы (в данном случае равное 2) совпадает с рангом алгебры Ли. Недавно А.В.Кузнецов [23] построил топологический инвариант нередуцированной периодической цепочки Тода с тремя степенями свободы (т.е. цепочки Тода, отвечающей алгебре Ли  $A_3$ ). Результаты его работы естественным образом согласуются с нашими.

Выпишем гамильтонианы для интегрируемых случаев со схемами Дынкина (a), (б), (8) (см. Рис.5), сохранив при этом обозначения, принятые во Введении:

$$(A) \quad H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + v_1 \exp\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x_1 + \sqrt{\frac{1}{2}}x_2\right) + v_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}x_1 + \sqrt{\frac{1}{2}}x_2\right) +$$

$$+ v_3 \exp\left(-\sqrt{2}x_2\right);$$

$$(K-T) \quad H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + v_1 \exp(x_1) + v_2 \exp(x_2) + v_3 \exp(-x_1 - x_2) +$$

$$+ v_4 \exp\left(-\frac{x_1 + x_2}{2}\right);$$

$$(S) \quad H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \exp(-x_1 - x_2) + \gamma_2 \exp(x_1) + \frac{\beta_2}{2} \exp(2x_1) + \\ + \gamma_3 \exp(x_2) + \frac{\beta_3}{2} \exp(2x_2).$$

Здесь схеме Дынкина (а) соответствует случай (А), схеме Дынкина (б) – случай (К-Т), и схеме Дынкина (в) – случай (С). Дополнительные интегралы  $F$  для всех трех случаев интегрируемости нетрудно найти из условия  $\{H, F\} = 0$  и предположения, что  $F$  есть полином не выше четвертой степени по импульсам с коэффициентами, зависящими от экспонент. Случаям (А), (К-Т), (С) отвечают дополнительные интегралы:

$$(3.1) \quad F = p_1 \left[ \frac{p_1^2}{3} - p_2^2 \right] + [p_1 + \sqrt{3} p_2] v_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} x_1 + \sqrt{\frac{1}{2}} x_2\right) - \\ - 2p_1 v_3 \exp(-\sqrt{2} x_2) + [p_1 - \sqrt{3} p_2] v_1 \exp\left(\sqrt{\frac{3}{2}} x_1 + \sqrt{\frac{1}{2}} x_2\right);$$

$$(3.2) \quad F = p_1^2 p_2^2 + 2p_1^2 v_2 \exp(x_2) + 2p_1 p_2 \left[ v_3 \exp(-x_1 - x_2) + \right. \\ \left. + v_4 \exp\left(-\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \right] + 2p_2^2 v_1 \exp(x_1) + 2v_2 v_3 \exp(-x_1) +$$

$$+ 2v_1 v_3 \exp(-x_2) + 4v_1 v_2 \exp(x_1 + x_2) +$$

$$+ \left[ v_3 \exp(-x_1 - x_2) + v_4 \exp\left(-\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \right]^2;$$

$$(3.3) \quad F = p_1^2 p_2^2 + p_1^2 \left[ 2\gamma_3 \exp(x_2) + \beta_3 \exp(2x_2) \right] + 2p_1 p_2 \exp(-x_1 - x_2) + \\ + p_2^2 \left[ 2\gamma_2 \exp(x_1) + \beta_2 \exp(2x_1) \right] + \exp(-2(x_1 + x_2)) +$$

$$+ \beta_2 \beta_3 \exp[2(x_1 + x_2)] + 2\beta_2 \gamma_3 \exp[2x_1 + x_2] + 2\beta_3 \gamma_2 \exp[x_1 + 2x_2] + \\ + 4\gamma_2 \gamma_3 \exp[x_1 + x_2] + 2\gamma_2 \exp[-x_2] + 2\gamma_3 \exp[-x_1],$$

соответственно.

**Определение 3.1.** Цепочку Склянина (S) назовем *симметричной*, если коэффициенты  $\gamma_2, \gamma_3$  – одного знака и выполняется следующее соотношение:  $\gamma_2^2 \beta_3 = \gamma_3^2 \beta_2$ .

**Определение 3.2.** Набор констант  $v_k$  интегрируемой по Биркгоффу гамильтоновой системы вида (1.3), удовлетворяющий условиям Леммы 2.1, назовем *допустимым*.

Основной результат Главы 1 составляет

**Теорема 3.1.** Рассмотрим интегрируемые гамильтоновы системы вида (1.3) в  $\mathbb{R}^4$ , схемы Дынкина которых изображены на Рис.5а, б, в, гамильтонианы задаются выражениями (A), (К-Т), (S), а дополнительные интегралы – выражениями (3.1), (3.2), (3.3), соответственно. Пусть интегрируемая цепочка Склянина – симметрична. Тогда, независимо от выбора допустимого набора коэффициентов  $v_k$ ,

- 1) фазовое пространство  $\mathbb{R}^4$  расслоено на поверхности постоянной энергии  $Q^3 = \{H=\text{const}\} = S^3$ ;
- 2) дополнительные интегралы во всех трех случаях являются почти боттовскими;
- 3) бифуркационная диаграмма для отображения момента  $H \times F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  в случае (A) выглядит так, как изображено на Рис.7а, а в случаях (К-Т), (S) ее качественный вид указан на Рис.7б;

- 4) меченая молекула во всех трех случаях имеет следующий простейший вид:  $A \xrightarrow{o} A$ ;
- 5) из совпадения меченых молекул следует, что интегрируемые гамильтоновы системы с гамильтонианами ( $A$ ), ( $K-T$ ) и ( $S$ ) топологически эквивалентны между собой и эквивалентны следующим интегрируемым случаям механики твердого тела: Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Горячева-Чаплыгина (гиростат) при соответствующих значениях энергии  $H$ ;
- 6) сложность  $(m, n)$  исследуемых систем равна  $(2, 1)$ .

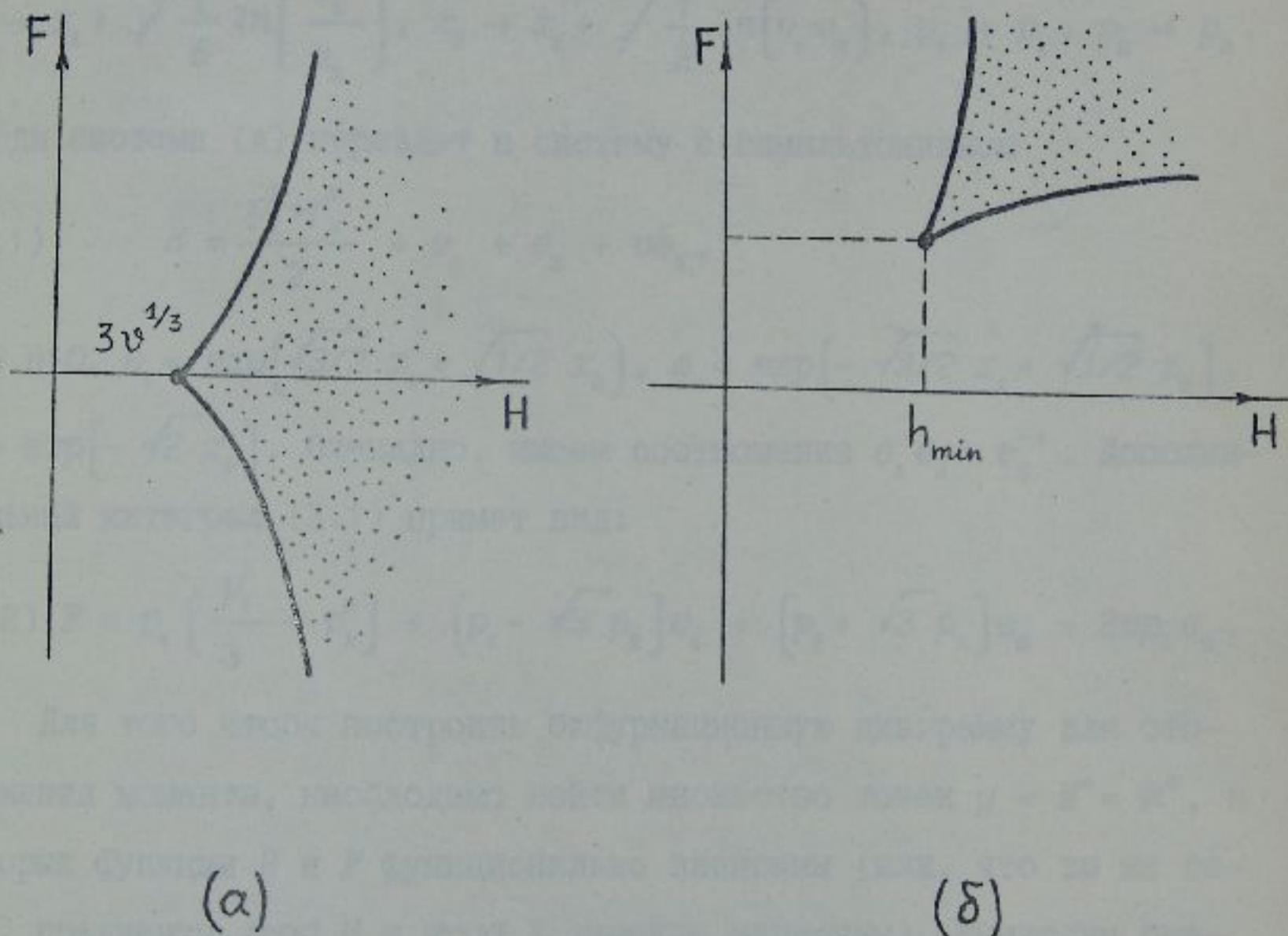


Рис. 7

§4. Построение меченої молекулы для классической периодической цепочки Тода.

В этом параграфе будет доказана часть основной Теоремы 3.1, относящаяся к цепочке, связанной с алгеброй Ли  $A_3$ , схема Дынкина которой изображена на Рис.5а. Нас будет интересовать случай, когда изоэнергетическая поверхность  $Q^3 - \{H=const\}$  компактна. Поскольку у рассматриваемой цепочки все векторы максимальны, то, согласно Лемме 2.1, в выражении (A) для гамильтониана  $H$  все коэффициенты  $v_k$  положительны. Сделаем замену переменных:

$$x_1 \rightarrow x_1 + \sqrt{\frac{1}{6}} \ln \left( \frac{v_1}{v_2} \right), \quad x_2 \rightarrow x_2 + \sqrt{\frac{1}{2}} \ln (v_1 v_2), \quad p_1 \rightarrow p_1, \quad p_2 \rightarrow p_2.$$

Тогда система (A) перейдет в систему с гамильтонианом

$$(4.1) \quad H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + e_1 + e_2 + ve_3,$$

где  $v > 0$ ,  $e_1 = \exp \left[ \sqrt{3/2} x_1 + \sqrt{1/2} x_2 \right]$ ,  $e_2 = \exp \left[ -\sqrt{3/2} x_1 + \sqrt{1/2} x_2 \right]$ ,  $e_3 = \exp \left[ -\sqrt{2} x_2 \right]$ . Очевидно, имеем соотношение  $e_1 e_2 = e_3^{-1}$ . Дополнительный интеграл (3.1) примет вид:

$$(4.2) \quad F = p_1 \left( \frac{p_1^2}{3} - p_2^2 \right) + \left( p_1 - \sqrt{3} p_2 \right) e_1 + \left( p_1 + \sqrt{3} p_2 \right) e_2 - 2vp_1 e_3.$$

Для того чтобы построить бифуркационную диаграмму для отображения момента, необходимо найти множество точек  $y \in M^4 = \mathbb{R}^4$ , в которых функции  $H$  и  $F$  функционально зависимы (или, что то же самое, градиенты  $\text{grad } H$  и  $\text{grad } F$  линейно зависимы). Вычислим градиенты:

$$(4.3) \quad \text{grad } H = \left\{ p_1, p_2, \sqrt{3}/2(e_1 - e_2), \sqrt{1}/2(e_1 + e_2 - 2ve_3) \right\},$$

$$(4.4) \quad \text{grad } F = \left\{ \begin{aligned} & p_1^2 - p_2^2 + e_1 + e_2 - 2ve_3, \\ & -2p_1 p_2 + \sqrt{3}(e_2 - e_1), \\ & \sqrt{3}/2 \left[ (p_1 - \sqrt{3}p_2)e_1 - (p_1 + \sqrt{3}p_2)e_2 \right], \\ & \sqrt{1}/2 \left[ (p_1 - \sqrt{3}p_2)e_1 + (p_1 + \sqrt{3}p_2)e_2 + 4vp_1 e_3 \right] \end{aligned} \right\}.$$

Из выражения (4.3) сейчас же следует, что  $dH = 0$ , если и только если  $p_1 = p_2 = x_1 = 0$ ,  $x_2 = [\sqrt{2}/3] \ln(v)$ . Вычислим гессиан функции  $H$  на  $\mathbb{R}^4$  в критической точке  $r_0 = \{ p_1 = p_2 = x_1 = 0,$   
 $x_2 = [\sqrt{2}/3] \ln(v) \}$ :

$$G = \left. \left( d^2 H \right) \right|_{r_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (e_1 + 2e_1/v) \end{bmatrix}.$$

Из уравнения  $\det(G - \lambda E) = 0$  находим, что все собственные числа  $\lambda$  больше нуля, следовательно, критическая точка  $r_0$  – изолированный минимум функции  $H$  на  $\mathbb{R}^4$ . Легко доказать, что если  $h_0$  – значение гамильтониана  $H$  в точке изолированного минимума, то для всех значений  $h$ , достаточно близких к  $h_0$ , поверхность постоянной энергии  $Q^3 = \{H=h\}$  гомеоморфна  $S^3$ . Действительно, если  $y \in M^4$  – изолированный минимум гамильтониана, то малая инвариантная (относительно потока  $v = s\text{grad } H$ ) окрестность  $O(y)$  гомеоморфна диску  $D^4 \subset M^4$ , а

тогда граница  $\partial\Omega(y) = Q^3 = \{H=\text{const}\}$  гомеоморфна сфере  $\partial D^4 = S^3$ . Так как других критических точек, кроме  $r_o$ , у функции  $H$  на  $\mathbb{R}^4$  нет, то вообще все изоэнергетические поверхности  $Q^3$  гомеоморфны  $S^3$ . Для рассматриваемой в этом параграфе системы (A) пункт 1) Теоремы 3.1 доказан.

Исследуем уравнение  $dF = 0$ . Из выражения (4.4) имеем:

$$(4.5) \quad \sqrt{3} [e_1 - e_2] = - 2p_1 p_2,$$

$$(4.6) \quad p_1 [e_1 - e_2] = \sqrt{3} p_2 [e_1 + e_2],$$

$$(4.7) \quad p_1 [4v e_3 + e_1 + e_2] = \sqrt{3} p_2 [e_1 - e_2],$$

$$(4.8) \quad 2v e_3 = p_1^2 - p_2^2 + e_1 + e_2.$$

Из уравнений (4.5), (4.6) получаем соотношение

$$- 2p_1^2 p_2 = 3p_2 [e_1 + e_2],$$

откуда  $p_2 = 0$ , а из (4.5) тогда следует, что  $e_1 = e_2$ . Уравнение (4.7) влечет  $p_1 = 0$ , а из (4.8) вытекает условие  $v e_3 = e_1$ . Таким образом, мы убеждаемся, что функция  $F$  на  $\mathbb{R}^4$  имеет единственную критическую точку  $r_o = \{p_1 = p_2 = x_1 = 0, x_2 = [\sqrt{2}/3] \ln(v)\}$ , совпадающую с изолированным минимумом функции  $H$ . При отображении момента  $H \times F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  точка  $r_o$  переходит в точку  $(H, F) = (3v^{1/3}, 0)$  (см. Рис. 7а).

Исследуем теперь уравнение  $\text{grad } F = \lambda \text{grad } H$  при  $\lambda \neq 0$ , запишем его в скалярном виде:

$$(4.9) \quad p_1^2 - p_2^2 + e_1 + e_2 - 2ve_3 = \lambda p_1,$$

$$(4.10) \quad -2p_1 p_2 + \sqrt{3} [e_2 - e_1] = \lambda p_2,$$

$$(4.11) \quad p_1 [e_1 - e_2] - \sqrt{3} p_2 [e_1 + e_2] = \lambda [e_1 - e_2],$$

$$(4.12) \quad p_1 [e_1 + e_2] - \sqrt{3} p_2 [e_1 - e_2] + 4p_1 ve_3 = \lambda [e_1 + e_2 - 2ve_3].$$

Если  $e_1 = e_2$ , то из уравнения (4.11) имеем  $p_2 = 0$ . Если при этом  $p_1 = 0$ , то из (4.9) находим, что  $ve_3 = e_1$ , и опять попадаем в найденную выше критическую точку  $r_0 = \{p_1 = p_2 = x_1 = 0, x_2 = [\sqrt{2}/3] \ln(v)\}$ .

Пусть  $p_1 \neq 0$ , тогда из (4.9) получаем выражение для  $\lambda$ :

$$(4.13) \quad \lambda = p_1 + 2 \frac{e_1 - ve_3}{p_1}.$$

Подставив (4.13) в (4.12) и учитя соотношение  $e_3 = e_1^{-2}$ , находим:

$$p_1 = \pm \sqrt{\frac{2}{3v}} [e_1^2 - ve_1^{-1}].$$

Теперь можем выразить функции  $H$  и  $F$  через параметр  $e_1$ :

$$(4.14) \quad H = \frac{(e_1^2 - ve_1^{-1})^2}{3v} + 2e_1 + ve_1^{-1} = \frac{e_1^4 - 2ve_1 + 6ve_1 + 4v^2 e_1^{-2}}{3v} = \\ = \frac{(e_1^2 + 2ve_1^{-1})^2}{3v};$$

$$(4.15) \quad F = \pm \left( \frac{2}{3v} \right)^{3/2} [e_1^2 - ve_1^{-1}]^3 / 3 \pm 2 \left( \frac{2}{3v} \right)^{1/2} [e_1^3 - v] \mp \\ \mp 2v \left( \frac{2}{3v} \right)^{1/2} e_1^{-2} [e_1^2 - ve_1^{-1}] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \pm \left( \frac{2}{3v} \right)^{3/2} \left[ e_1^6 + 6ve_1^3 + 12v^2 - 27v^2 + 8v^3 e_1^{-3} \right] / 3 = \\
 &= \pm \left( \frac{2}{3v} \right)^{3/2} \left[ e_1^2 + 2ve_1^{-1} \right]^3 / 3 \mp 2\sqrt{6v} = \pm 2\sqrt{2} \left( H^{3/2} / 3 - \sqrt{3v} \right).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим случай  $e_1 \neq e_2$ . Из уравнения (4.11) находим выражение для  $\lambda$ :

$$\lambda = p_1 - \sqrt{3} p_2 \frac{e_1 + e_2}{e_1 - e_2}.$$

Подставив  $\lambda$  в (4.10) и (4.9), имеем

$$(4.16) \quad \sqrt{3} p_1 p_2 + [e_1 - e_2] - p_2^2 \frac{e_1 + e_2}{e_1 - e_2} = 0,$$

$$(4.17) \quad \sqrt{3} p_1 p_2 \frac{e_1 + e_2}{e_1 - e_2} - p_2^2 + e_1 + e_2 - 2ve_3 = 0,$$

соответственно. Легко показать, что из условий (4.16), (4.17) уравнение (4.12) следует автоматически. Выразив  $\sqrt{3} p_1 p_2$  из (4.16), подставив полученное выражение в (4.17) и учитя соотношение  $e_3 = e_1^{-1} e_2^{-1}$ , находим:

$$(4.18) \quad p_2 = \pm \sqrt{v/2} [e_1^{-1} - e_2^{-1}].$$

Из уравнения (4.16), учитывая (4.18), получаем выражение для  $p_1$ :

$$p_1 = \pm \sqrt{\frac{2v}{3}} \left[ \frac{e_1 e_2}{v} - \frac{e_1^{-1} + e_2^{-1}}{2} \right].$$

Тогда функции  $H$  и  $F$  выражаются через параметры  $e_1$ ,  $e_2$  следующим образом:

$$(4.19) \quad H = \frac{\left[ e_1 e_2 - \frac{v}{2} (e_1^{-1} + e_2^{-1}) \right]^2}{3v} + v \frac{\left[ e_1^{-1} - e_2^{-1} \right]^2}{4} + e_1 + e_2 + \\ + ve_1^{-1} e_2^{-1} = \frac{e_1^2 e_2^2 + 2ve_1 e_2 (e_1^{-1} + e_2^{-1}) + 2v^2 e_1^{-1} e_2^{-1} + v^2 (e_1^{-2} + e_2^{-2})}{3v} = \\ = \frac{\left[ e_1 e_2 + v(e_1^{-1} + e_2^{-1}) \right]^2}{3v},$$

$$(4.20) \quad F = \pm \sqrt{\frac{2}{3v}} \left[ e_1 e_2 - \frac{v}{2} (e_1^{-1} + e_2^{-1}) \right] \left[ \frac{2 \left[ e_1 e_2 - \frac{v}{2} (e_1^{-1} + e_2^{-1}) \right]^2}{9v} - \right. \\ \left. - \frac{v}{2} (e_1^{-1} - e_2^{-1})^2 \right] \pm \sqrt{\frac{2}{3v}} \left[ e_1 e_2 - \frac{v}{2} (e_1^{-1} + e_2^{-1}) - \frac{3v}{2} (e_1^{-1} - e_2^{-1}) \right] e_1 \pm \\ \pm \sqrt{\frac{2}{3v}} \left[ e_1 e_2 - \frac{v}{2} (e_1^{-1} + e_2^{-1}) + \frac{3v}{2} (e_1^{-1} - e_2^{-1}) \right] e_2 \mp \\ \mp 2v \sqrt{\frac{2}{3v}} \left[ e_1 e_2 - \frac{v}{2} (e_1^{-1} + e_2^{-1}) \right] e_1^{-1} e_2^{-1} = \\ = \pm \left( \frac{2}{3v} \right)^{3/2} \left[ e_1^3 e_2^3 + 3ve_1^2 e_2^2 (e_1^{-1} + e_2^{-1}) + 3v^2 e_1 e_2 (e_1^{-1} + e_2^{-1}) + \right. \\ \left. + v^3 (e_1^{-1} + e_2^{-1})^3 - 27v^2 \right] / 3 = \pm \left( \frac{2}{3v} \right)^{3/2} \left[ e_1 e_2 + v(e_1^{-1} + e_2^{-1}) \right]^3 / 3 \mp \\ \mp 2\sqrt{6v} = \pm 2\sqrt{2} \left[ H^{3/2} / 3 - \sqrt{3v} \right].$$

Заметим, что формулы (4.14), (4.15) являются частным случаем формул (4.19), (4.20). Уравнение

$$\frac{\left(e_1 e_2 + v(e_1^{-1} + e_2^{-1})\right)^2}{3v} = \hbar$$

задает критическую окружность функции  $F$  на  $Q^3 = \{H=\hbar\}$ . Бифуркационную диаграмму строим исходя из формулы (4.20) (см. Рис.7а, образ отображения момента отмечен штриховкой). Отсутствие на Рис.7а бифуркационных кривых, лежащих внутри образа отображения момента (все бифуркационные кривые – граничные) указывает на то, что все критические окружности – изолированные минимаксные, т.е. дополнительный интеграл  $F$  – почти боттовский. Молекула находится непосредственно из вида бифуркационной диаграммы и имеет вид  $A — A$ , т.е. склеивается из двух атомов  $A$ . Метка  $r = \alpha/\beta (\text{mod } 1) = 0$  находится сразу из того факта, что результатом склейки двух полноторий (трубчатых окрестностей минимальной и максимальной критических окружностей) служит сфера  $S^3 = \{H=\text{const}\}$ . Итак, мечтаемая молекула имеет вид  $A \xrightarrow{o} A$ . Анализ гамильтоновой системы ( $A$ ), отвечающей алгебре Ли  $A_a$ , закончен.

§5. Построение меченой молекулы для интегрируемой цепочки Козлова-Трещева.

Рассмотрим систему с гамильтонианом (К-Т) и дополнительным интегралом (3.2) (соответствующая схема Дынкина изображена на Рис.5б). Подходящей заменой переменных можно добиться того, чтобы коэффициенты  $v_1, v_2$  (согласно Лемме 2.1, они обязаны быть положительными) в выражении (К-Т) для гамильтониана  $H$  стали равными 1. Тогда система (К-Т) перейдет в систему с гамильтонианом

$$(5.1) \quad H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + e_1 + e_2 + v_1 e_3 + v_2 e_3^2$$

и дополнительным интегралом

$$(5.2) \quad F = p_1^2 p_2^2 + 2p_1^2 e_2 + 2p_2^2 e_1 + 2p_1 p_2 [v_1 e_3 + v_2 e_3^2] + 2v_2 e_2 e_3^2 + \\ + 2v_2 e_1 e_3^2 + 4e_1 e_2 + [v_1 e_3 + v_2 e_3^2]^2,$$

где  $e_1 = \exp[x_1]$ ,  $e_2 = \exp[x_2]$ ,  $e_3 = \exp\left[-\frac{x_1+x_2}{2}\right] = e_1^{-1/2} e_2^{-1/2}$ , а

коэффициенты  $v_1, v_2$  (как это следует из Леммы 2.1) таковы, что либо  $v_2 = 0, v_1 > 0$ , либо  $v_2 > 0, v_1$  – любое вещественное число.

Найдем градиенты функций  $H$  и  $F$ :

$$(5.3) \quad \text{grad } H = \left\{ p_1, p_2, e_1 - \frac{v_1 e_3}{2} - v_2 e_3^2, e_2 - \frac{v_1 e_3}{2} - v_2 e_3^2 \right\},$$

$$(5.4) \quad \text{grad } F = \left\{ 2p_1 p_2^2 + 4p_1 e_2 + 2p_2 [v_1 e_3 + v_2 e_3^2], \right.$$

$$\left. 2p_1^2 p_2 + 4p_2 e_1 + 2p_1 [v_1 e_3 + v_2 e_3^2], \right.$$

$$- p_1 p_2 \left( v_1 e_3 + 2v_2 e_3^2 \right) + 2p_2^2 e_1 - 2v_2 e_2 e_3^2 + 4e_1 e_2 - 2v_2^2 e_3^4 - 3v_1 v_2 e_3^3 - v_1^2 e_3^2,$$

$$- p_1 p_2 \left( v_1 e_3 + 2v_2 e_3^2 \right) + 2p_1^2 e_2 - 2v_2 e_1 e_3^2 + 4e_1 e_2 - 2v_2^2 e_3^4 - 3v_1 v_2 e_3^3 - v_1^2 e_3^2 \right).$$

Из выражения (5.3) следует, что  $\text{grad } H = 0$ , если и только если  $p_1 = p_2 = 0$ ,  $e_1 = e_2 = e_3^{-1}$ ,  $2v_2 e_3^3 + v_1 e_3^2 = 2$ . Очевидно, последнее уравнение имеет единственное решение  $e_3$ , большее нуля. Обозначим соответствующую критическую точку через  $r_o$  и вычислим гессиан функции  $H$  в этой точке:

$$G = \left( d^2 H \right) \Big|_{r_o} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3^{-1} + v_2 e_3^2 + \frac{v_1 e_3}{4} & v_2 e_3^2 + \frac{v_1 e_3}{4} \\ 0 & 0 & v_2 e_3^2 + \frac{v_1 e_3}{4} & e_3^{-1} + v_2 e_3^2 + \frac{v_1 e_3}{4} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Из уравнения } \det(G - \lambda E) = (1-\lambda)^2 \left[ \lambda^2 - 2\lambda e_3^{-1} \left( 1 + v_2 e_3^3 + \frac{v_1 e_3^2}{4} \right) + e_3^{-2} + 2v_2 e_3 + \frac{v_1}{2} \right] = (1-\lambda)^2 \left[ \lambda^2 - 2\lambda e_3^{-1} \left( 2 - \frac{v_1 e_3^2}{4} \right) + 2e_3^{-2} + v_2 e_3 \right] = 0$$

находим, что все собственные числа  $\lambda$  больше нуля. Отсюда следует, что  $r_o$  – изолированный минимум функции  $H$  и все изоэнергетические поверхности  $Q^3$  гомеоморфны  $S^3$ .

Рассмотрим уравнение  $\text{grad } F = 2\lambda \text{ grad } H$ , запишем его в скалярном виде:

$$(5.5) \quad p_1 p_2^2 + 2p_1 e_2 + p_2 \left( v_1 e_3 + v_2 e_3^2 \right) = \lambda p_1,$$

$$(5.6) \quad p_1^2 p_2 + 2p_2 e_1 + p_1 \left( v_1 e_3 + v_2 e_3^2 \right) = \lambda p_2,$$

$$(5.7) - p_1 p_2 \left[ v_1 e_3 + 2v_2 e_3^2 \right] + 2p_2^2 e_1 - 2v_2 e_2 e_3^2 + 4e_1 e_2 - 2v_2^2 e_3^4 -$$

$$- 3v_1 v_2 e_3^3 - v_1^2 e_3^2 = \lambda \left[ 2e_1 - v_1 e_3 - 2v_2 e_3^2 \right],$$

$$(5.8) - p_1 p_2 \left[ v_1 e_3 + 2v_2 e_3^2 \right] + 2p_1^2 e_2 - 2v_2 e_1 e_3^2 + 4e_1 e_2 - 2v_2^2 e_3^4 -$$

$$- 3v_1 v_2 e_3^3 - v_1^2 e_3^2 = \lambda \left[ 2e_2 - v_1 e_3 - 2v_2 e_3^2 \right],$$

Из уравнений (5.5), (5.6) следует, что  $p_1$  и  $p_2$  обращаются в нуль одновременно, поэтому можем написать  $p_2 = \alpha p_1 = \alpha p$ , где  $\alpha \neq 0$ . Тогда из (5.5), (5.6) находим:

$$(5.9) \lambda = \alpha^2 p^2 + 2e_2 + \alpha \left[ v_1 e_3 + v_2 e_3^2 \right] = p^2 + 2e_1 + \frac{v_1 e_3 + v_2 e_3^2}{\alpha},$$

откуда имеем

$$(5.10) [\alpha^2 - 1] p^2 = 2[e_1 - e_2] + \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} [v_1 e_3 + v_2 e_3^2].$$

Заметим, что при замене пары  $[p_1, e_1]$  на пару  $[p_2, e_2]$  уравнение (5.5) переходит в (5.6), уравнение (5.7) - в (5.8), а уравнения (5.9) и (5.10) остаются неизменными. Поэтому при выполнении условий (5.9), (5.7) условие (5.8) выполняется автоматически. Подставив (5.9) в (5.7), получим:

$$(5.11) [a-1] p^2 = \frac{(v_1 e_3 + v_2 e_3^2)(1-\alpha)}{\alpha} - \frac{2(e_2 - \alpha e_1)(v_1 e_3 + v_2 e_3^2)}{\alpha(v_1 e_3 + 2v_2 e_3^2)}.$$

Видно, что случай  $\alpha=1$  - особый. Рассмотрим его отдельно. При  $\alpha=1$  уравнение (5.10) дает  $e_1 = e_2$ , а уравнение (5.11) превращается в тождественное равенство. Тогда функции  $H$  и  $F$  выражаются через параметры  $p = p_1 = p_2$  и  $e_3 = e_1^{-1} = e_2^{-1}$  следующим образом:

$$(5.7) - p_1 p_2 \left[ v_1 e_3 + 2v_2 e_3^2 \right] + 2p_2^2 e_1 - 2v_2 e_2 e_3^2 + 4e_1 e_2 - 2v_2^2 e_3^4 - \\ - 3v_1 v_2 e_3^3 - v_1^2 e_3^2 = \lambda \left[ 2e_1 - v_1 e_3 - 2v_2 e_3^2 \right],$$

$$(5.8) - p_1 p_2 \left[ v_1 e_3 + 2v_2 e_3^2 \right] + 2p_1^2 e_2 - 2v_2 e_1 e_3^2 + 4e_1 e_2 - 2v_2^2 e_3^4 - \\ - 3v_1 v_2 e_3^3 - v_1^2 e_3^2 = \lambda \left[ 2e_2 - v_1 e_3 - 2v_2 e_3^2 \right],$$

Из уравнений (5.5), (5.6) следует, что  $p_1$  и  $p_2$  обращаются в нуль одновременно, поэтому можем написать  $p_2 = \alpha p_1 = \alpha p$ , где  $\alpha \neq 0$ . Тогда из (5.5), (5.6) находим:

$$(5.9) \lambda = \alpha^2 p^2 + 2e_2 + \alpha \left[ v_1 e_3 + v_2 e_3^2 \right] = p^2 + 2e_1 + \frac{v_1 e_3 + v_2 e_3^2}{\alpha},$$

откуда имеем

$$(5.10) [\alpha^2 - 1] p^2 = 2 \left[ e_1 - e_2 \right] + \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} \left[ v_1 e_3 + v_2 e_3^2 \right].$$

Заметим, что при замене пары  $[p_1, e_1]$  на пару  $[p_2, e_2]$  уравнение (5.5) переходит в (5.6), уравнение (5.7) – в (5.8), а уравнения (5.9) и (5.10) остаются неизменными. Поэтому при выполнении условий (5.9), (5.7) условие (5.8) выполняется автоматически. Подставив (5.9) в (5.7), получим:

$$(5.11) [\alpha - 1] p^2 = \frac{(v_1 e_3 + v_2 e_3^2)(1 - \alpha)}{\alpha} - \frac{2(e_2 - \alpha e_1)(v_1 e_3 + v_2 e_3^2)}{\alpha(v_1 e_3 + 2v_2 e_3^2)}.$$

Видно, что случай  $\alpha=1$  – особый. Рассмотрим его отдельно. При  $\alpha=1$  уравнение (5.10) дает  $e_1 = e_2$ , а уравнение (5.11) превращается в тождественное равенство. Тогда функции  $H$  и  $F$  выражаются через параметры  $p = p_1 = p_2$  и  $e_3 = e_1^{-1} = e_2^{-1}$  следующим образом:

$$H = p^2 + 2e_3^{-1} + v_1 e_3 + v_2 e_3^2,$$

$$F = p^4 + 4p^2 e_3^{-1} + 2p^2 (v_1 e_3 + v_2 e_3^2) + 4v_2 e_3 + 4e_3^{-2} + (v_1 e_3 + v_2 e_3^2)^2 = \\ = H^2 - 4v_1,$$

а уравнение

$$p^2 + 2e_3^{-1} + v_1 e_3 + v_2 e_3^2 = h$$

задает критическую окружность. Полученное выше выражение

$$F = H^2 - 4v_1 \quad \text{даёт лишь часть бифуркационной диаграммы.}$$

Рассмотрим теперь случай  $\alpha \neq 1$ . Умножив (5.11) на  $(\alpha+1)$  и сравнив результат с (5.10), получим:

$$(5.12) \quad \frac{1+\alpha}{\alpha} [e_2 - \alpha e_1] [v_1 e_3 + v_2 e_3^2] + [e_1 - e_2] [v_1 e_3 + v_2 e_3^2] = 0.$$

Введем новые обозначения. Пусть  $e_2 = f e_1$ , где  $f > 0$ . Тогда  $e_3 = [e_1 \sqrt{f}]^{-1}$  и равенство (5.12) запишется в виде:

$$(5.13) \quad \frac{1+\alpha}{\alpha} [v_1 e_1 \sqrt{f} + v_2] [f - \alpha] + [v_1 e_1 \sqrt{f} + 2v_2] [1 - f] = 0.$$

Будем рассматривать случай общего положения (т.е. такой, что  $\alpha \neq \pm 1$ ,  $f \neq -\alpha$ ,  $f \neq \alpha^2$ ). Тем самым мы исключили случай  $\alpha = -1$ ,  $f=1$ , но он ничем не отличается от общего, и его можно было бы рассмотреть отдельно. Из равенства (5.13) находим:

$$(5.14) \quad e_1 = \frac{v_2 [f + \alpha] [\alpha - 1]}{v_1 \sqrt{f} [f - \alpha^2]},$$

$$(5.15) \quad e_2 = \frac{v_z \sqrt{f} [f + \alpha] [\alpha - 1]}{v_i [f - \alpha^2]},$$

$$(5.16) \quad e_3 = \frac{v_i [f - \alpha^2]}{v_z [f + \alpha] [\alpha - 1]},$$

теперь из уравнения (5.10), учитывая (5.14)-(5.16), выразим  $p^2$ :

$$(5.17) \quad p^2 = \frac{2v_z [f + \alpha] [1 - f]}{v_i \sqrt{f} [f - \alpha^2] [1 + \alpha]} + \frac{v_i^2 [f - \alpha^2] [1 - f]}{v_z [f + \alpha]^2 [\alpha - 1]^2}.$$

Тогда функция  $H$  выражается через параметры  $f, \alpha$  следующим образом:

$$(5.18) \quad H = -\frac{2v_z [f + \alpha]}{v_i \sqrt{f} [1 + \alpha]} + \frac{v_i^2 f [1 + \alpha]^2}{2v_z [f + \alpha]^2} - \frac{v_i^2}{2v_z} = \frac{v_z x^2}{2} + \frac{v_z}{x} - \frac{v_i^2}{2v_z},$$

где

$$(5.19) \quad x = -\frac{v_i \sqrt{f} [1 + \alpha]}{v_z [f + \alpha]}.$$

Из равенства (5.9) имеем:

$$\lambda = p^2 + 2e_1 + \frac{v_i e_3 + v_z e_3^2}{\alpha} = -\frac{2v_z [f + \alpha]}{v_i \sqrt{f} [1 + \alpha]} = \frac{2}{x},$$

а интегрирование уравнения  $\text{grad } F = 2\lambda \cdot \text{grad } H$  дает:

$$(5.20) \quad F = \int 2\lambda \frac{dH}{dx} dx = 4v_z x + \frac{4}{x^2} + C.$$

Найдем область допустимых значений  $f, \alpha$ , используя выражения

(5.14), (5.17) (они должны быть больше нуля): для случая  $v_1 > 0$  искомая область отмечена штриховкой на Рис.8а, а для случая  $v_1 < 0$  - на Рис.8б.

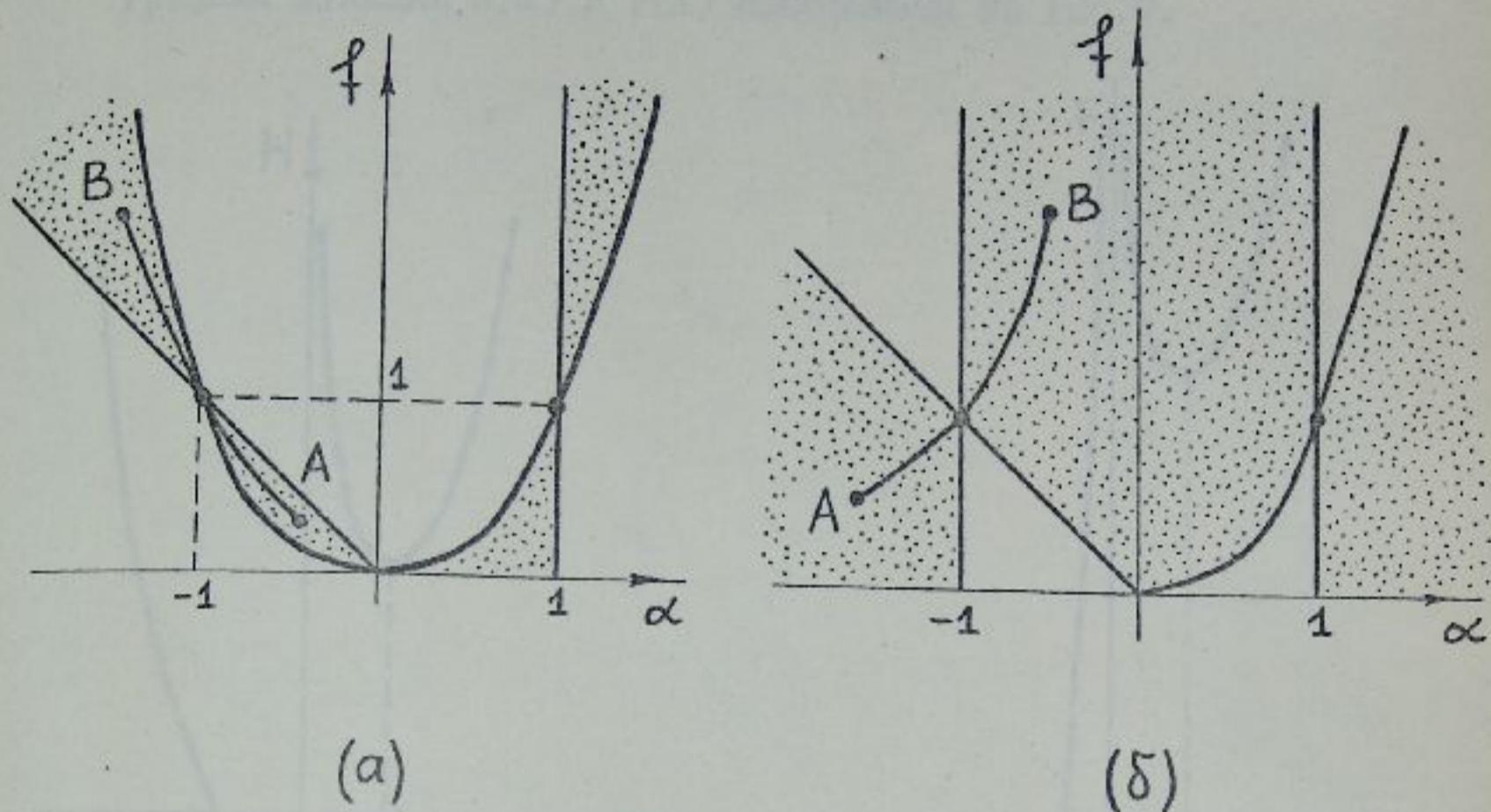


Рис. 8

Чтобы определить константу  $C$  в выражении (5.20), возьмем некоторую пару  $[\alpha, f]$  из заштрихованной области (см. Рис.8) и посчитаем значение  $F$ . Пусть  $v_1 < 0$ ,  $[\alpha, f] = \left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$  (случай  $v_1 > 0$

полностью аналогичен, поэтому опустим его). Тогда  $x = -\frac{v_1}{v_2}$ ,

$e_1 = e_2 = -\frac{v_2}{v_1}$ ,  $e_3 = -\frac{v_1}{v_2}$ ,  $p^2 = 0$ , и вычисление значения

$$F = -4v_1 + \frac{4v_2^2}{v_1^2} + C = -4v_1 + \frac{4v_2^2}{v_1^2} + \frac{v_1^2}{v_2^2} (v_1 - v_1)^2$$

дает  $C = 0$ . Окончательно получаем

$$(5.21) \quad F = 4v_2 + \frac{4}{x^2}.$$

Графики функций  $H(x)$  и  $F(x)$  изображены на Рис.9.

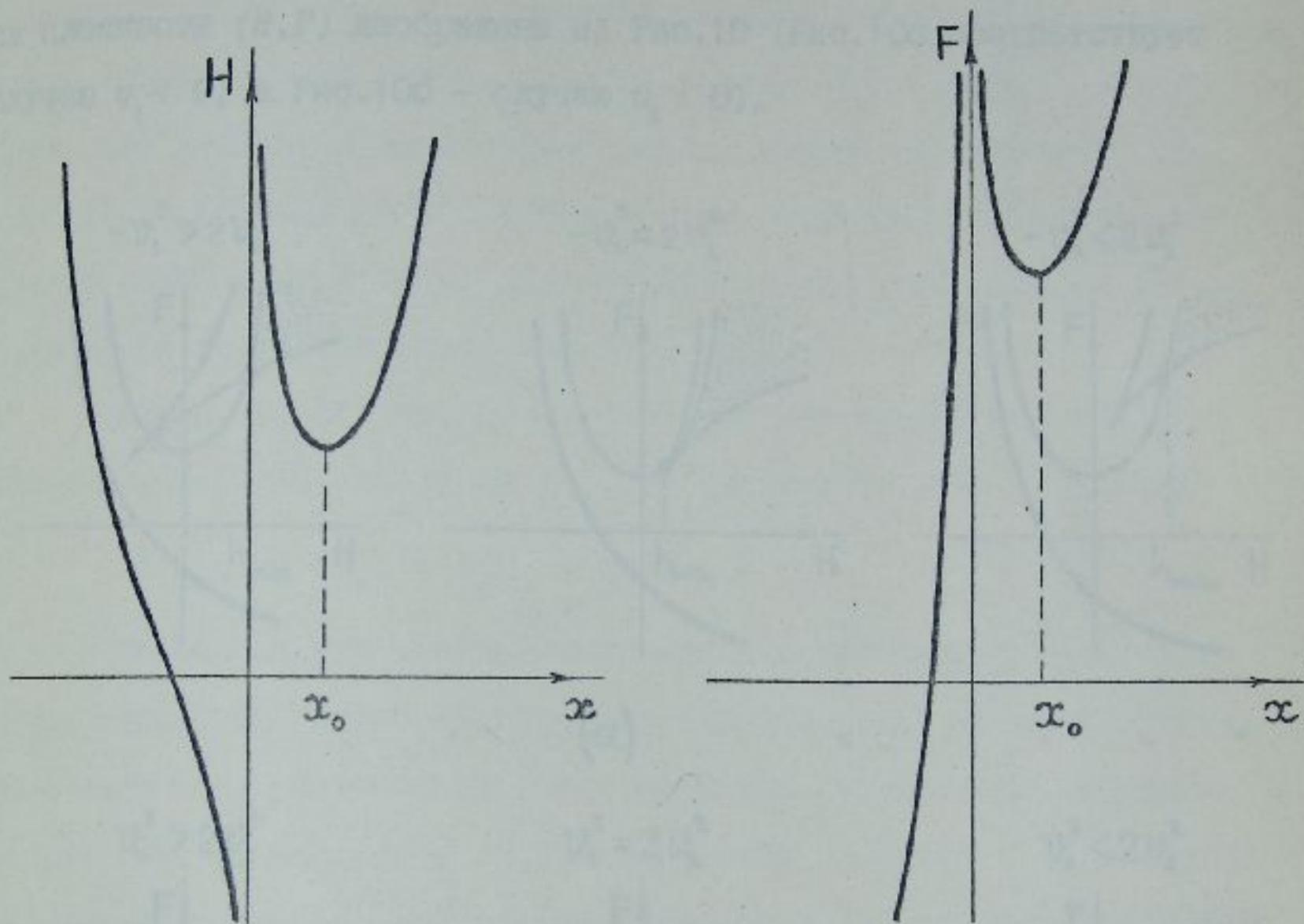


Рис. 9

Для того чтобы выяснить качественный вид бифуркационной диаграммы, сравним функцию  $F(x) = 4v_2 + \frac{4}{x^2}$  с функцией

$$H^2(x) - 4v_1 = \frac{v_2^2 x^4}{4} + \frac{4}{x^2} + \frac{v_1^4}{4v_2^2} + 2v_2 x - \frac{v_1^2 x^2}{2} - \frac{2v_1^2}{v_2 x} - 4v_1.$$

Очевидно, при  $x \rightarrow \pm \infty$  и  $x \rightarrow -0$  имеем неравенство  $F < [H^2 - 4v_1]$ , а при  $x \rightarrow +0$  – неравенство  $F > [H^2 - 4v_1]$ .

Все возможные расположения кривых бифуркационной диаграммы на плоскости  $(H, F)$  изображены на Рис.10 (Рис.10 $\alpha$  соответствует случаю  $v_1 < 0$ , а Рис.10 $\delta$  – случаю  $v_1 > 0$ ).

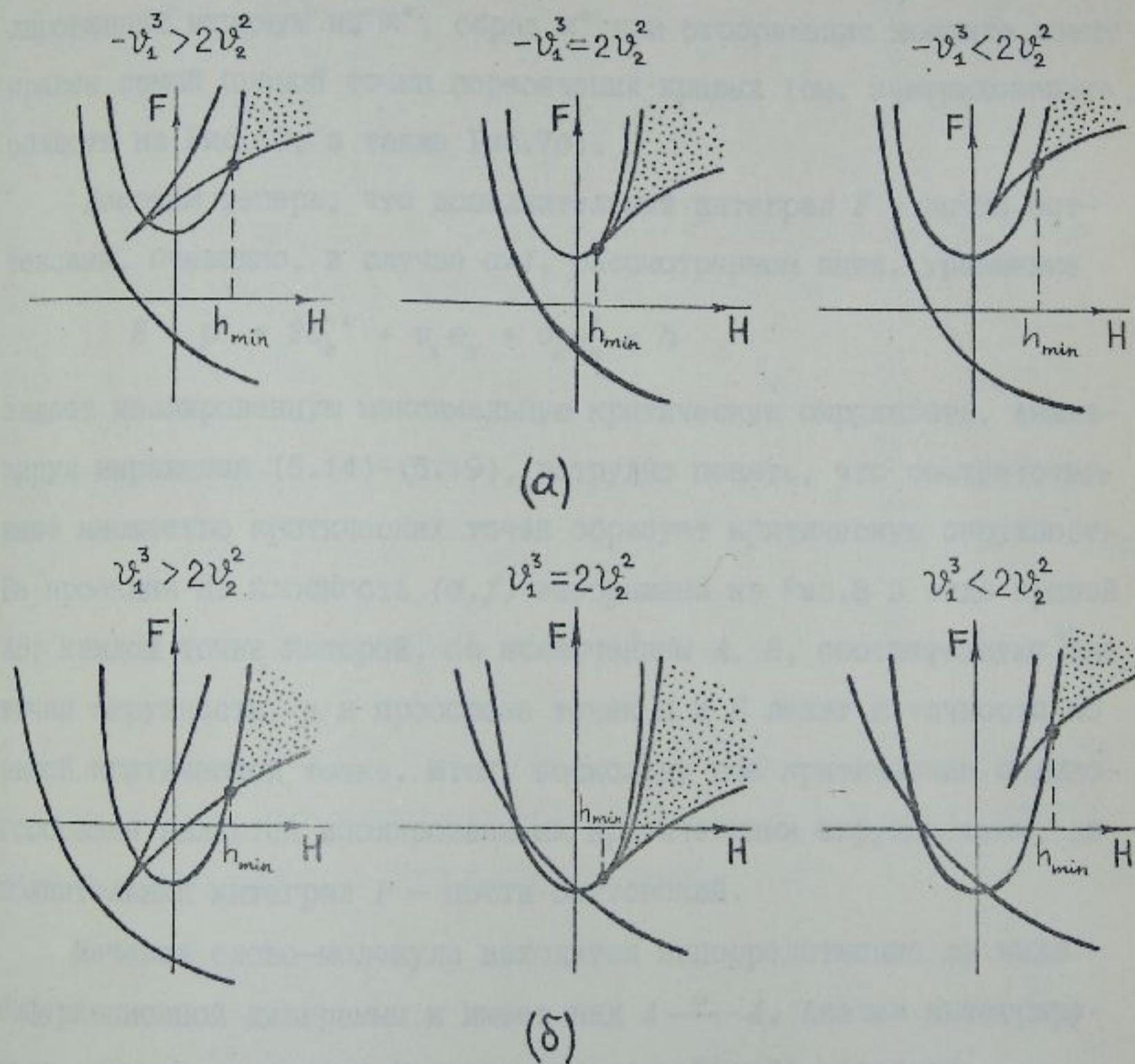


Рис. 10

В отношении левой нижней кривой Рис.10 схематичен, т.е. не обязательно точно отражает действительное взаимное расположение этой кривой и параболы  $F = H^2 - 4v_1$ , но для нас это несущественно. Важно то, что "ключ" пересекает параболу всегда правее всех остальных кривых. Точки пересечения кривых бифуркационной диаграммы соответствуют критическим значениям обеих функций  $H$  и  $F$ . Поскольку функция  $H$  имеет единственную критическую точку – изолированный минимум на  $\mathbb{R}^4$ , образ  $\mathbb{R}^4$  при отображении момента лежит правее самой правой точки пересечения кривых (см. заштрихованные области на Рис.10, а также Рис.7б).

Докажем теперь, что дополнительный интеграл  $F$  – почти боттовский. Очевидно, в случае  $a=1$ , рассмотренном выше, уравнение

$$H = p^2 + 2e_3^{-1} + v_1 e_3 + v_2 e_3^2 = h$$

задает изолированную максимальную критическую окружность. Анализируя выражения (5.14)–(5.19), нетрудно понять, что соответствующее множество критических точек образует критическую окружность. Ее проекция на плоскость  $(\alpha, f)$  изображена на Рис.8 в виде кривой  $AB$ , каждой точке которой, за исключением  $A$ ,  $B$ , соответствуют две точки окружности, а в прообразе точек  $A$  и  $B$  лежит в точности по одной критической точке. Итак, поскольку все критические подмногообразия являются изолированными критическими окружностями, дополнительный интеграл  $F$  – почти боттовский.

Меченое слово-молекула находится непосредственно из вида бифуркационной диаграммы и имеет вид  $A \xrightarrow{\circ} A$ . Анализ интегрируемого случая со схемой Дынкина (б) (см. Рис.5) завершен.

### §6. Построение меченой молекулы для интегрируемой симметричной цепочки Склянина.

Рассмотрим симметричную цепочку Склянина – интегрируемую гамильтонову систему с гамильтонианом ( $S$ ) и дополнительным интегралом (3.3), такую, что  $\gamma_z^2 \beta_3 = \gamma_3^2 \beta_z$  и коэффициенты  $\gamma_z, \gamma_3$  – одного знака. Сделаем замену переменных

$$x_1 \rightarrow x_1 + \ln \left| \frac{\gamma_z}{\gamma} \right| = x_1 + \ln \left| \frac{\beta_z}{\beta} \right|^2, \quad p_1 \rightarrow p_1,$$

$$x_2 \rightarrow x_2 + \ln \left| \frac{\gamma_3}{\gamma} \right| = x_2 + \ln \left| \frac{\beta_3}{\beta} \right|^2, \quad p_2 \rightarrow p_2,$$

где  $\gamma, \beta$  – таковы, что  $\gamma_z \gamma_3 = \gamma^2, \beta_z \beta_3 = \beta^2$ . Тогда наша симметричная цепочка перейдет в систему с гамильтонианом

$$(6.1) \quad H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + e_1 + \gamma(e_2 + e_3) + \frac{\beta}{2}(e_2^2 + e_3^2)$$

и дополнительным интегралом

$$(6.2) \quad F = p_1^2 p_2^2 + p_1^2 [2\gamma e_3 + \beta e_3^2] + 2p_1 p_2 e_1 + p_2^2 [2\gamma e_2 + \beta e_2^2] + \\ + e_1^2 + \beta^2 e_2^2 e_3^2 + 2\beta\gamma [e_2^2 e_3 + e_2 e_3^2] + 4\gamma^2 e_2 e_3 + 2\gamma e_1 [e_2 + e_3],$$

где  $e_1 = \exp(-x_1 - x_2)$ ,  $e_2 = \exp(x_1)$ ,  $e_3 = \exp(x_2)$ , а коэффициенты  $\beta, \gamma$  – таковы, что либо  $\beta=0, \gamma>0$ , либо  $\beta>0, \gamma$  – любое вещественное число. Вычислим градиенты функций  $H$  и  $F$ :

$$(6.3) \quad \text{grad } H = \left\{ p_1, p_2, -e_1 + \gamma e_2 + \beta e_3^2, -e_1 + \gamma e_3 + \beta e_2^2 \right\},$$

$$(6.4) \quad \text{grad } F = \left\{ 2(p_1^2 p_2 + p_2 e_1 + p_1 (2\gamma e_3 + \beta e_3^2)) \right\},$$

$$2 \left[ p_1^2 p_2 + p_1 e_1 + p_2 (2\gamma e_2 + \beta e_2^2) \right],$$

$$2 \left[ -p_1 p_2 e_1 + p_2^2 (\gamma e_2 + \beta e_2^2) - e_1^2 + \beta^2 e_2^2 e_3^2 + \right. \\ \left. + 2\gamma^2 e_2 e_3 - \gamma e_1 e_3 + \beta \gamma (2e_2^2 e_3 + e_2 e_3^2) \right],$$

$$2 \left[ -p_1 p_2 e_1 + p_1^2 (\gamma e_3 + \beta e_3^2) - e_1^2 + \beta^2 e_2^2 e_3^2 + \right. \\ \left. + 2\gamma^2 e_2 e_3 - \gamma e_1 e_2 + \beta \gamma (2e_2 e_3^2 + e_2^2 e_3) \right] \}.$$

Из выражения (6.3) легко видеть, что  $\text{grad } H = 0$ , если и только если  $p_1 = p_2 = 0$ ,  $e_1 = e_2^{-1} e_3^{-1} = \gamma e_2 + \beta e_2^2 = \gamma e_3 + \beta e_3^2$ . Из последнего уравнения находим:

$$(e_2 - e_3)(\gamma + \beta e_2 + \beta e_3) = 0, \quad \gamma + \beta e_2 > 0, \quad \gamma + \beta e_3 > 0.$$

Следовательно,

$$e_2 = e_3 = \frac{1}{e_3(\gamma + \beta e_3)}.$$

Так как существует и единственное решение уравнения

$$e_3^3 (\gamma + \beta e_3) = 1,$$

то существует и единственная критическая точка

$$r_0 = \left\{ p_1 = p_2 = 0, \quad e_2 = e_3, \quad e_1 = e_3^{-2}, \quad e_3^3 (\gamma + \beta e_3) = 1 \right\}$$

функции  $H$  на  $\mathbb{R}^4$ . Вычислим гессиан функции  $H$  в критической точке:

$$G = \left[ d^2 H \right] \Big|_{r_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3^{-2} + \gamma e_3 + 2\beta e_3^2 & e_3^{-2} \\ 0 & 0 & e_3^{-2} & e_3^{-2} + \gamma e_3 + 2\beta e_3^2 \end{bmatrix}.$$

Из уравнения  $\det(G-\lambda E) = (1-\lambda)^2 \left[ \lambda^2 - 2\lambda(2e_3^{-2} + \beta e_3^2) + \right. \\ \left. + (\gamma e_3 + 2\beta e_3^2) + 2e_3^{-2}(e_3^{-2} + \beta e_3^2) \right] = 0$  находим, что все собственные числа  $\lambda$  больше нуля, а значит,  $r_o$  - изолированный минимум функции  $H$  на  $\mathbb{R}^4$ , и все изоэнергетические поверхности  $Q^3$  гомеоморфны  $S^3$ .

Рассмотрим уравнение  $\text{grad } F = 2\lambda \cdot \text{grad } H$ . Из выражений (6.3), (6.4) следует:

$$(6.5) \quad p_1 p_2^2 + p_2 e_1 + p_1 \left[ 2\gamma e_3 + \beta e_3^2 \right] = \lambda p_1,$$

$$(6.6) \quad p_1^2 p_2 + p_1 e_1 + p_2 \left[ 2\gamma e_2 + \beta e_2^2 \right] = \lambda p_2,$$

$$(6.7) \quad -p_1 p_2 e_1 + p_2^2 \left[ \gamma e_2 + \beta e_2^2 \right] - e_1^2 + \beta^2 e_2^2 e_3^2 + 2\gamma^2 e_2 e_3 - \\ - \gamma e_1 e_3 + \beta \gamma \left[ 2e_2^2 e_3 + e_2 e_3^2 \right] = \lambda \left( -e_1 + \gamma e_2 + \beta e_2^2 \right),$$

$$(6.8) \quad -p_1 p_2 e_1 + p_1^2 \left[ \gamma e_3 + \beta e_3^2 \right] - e_1^2 + \beta^2 e_2^2 e_3^2 + 2\gamma^2 e_2 e_3 - \\ - \gamma e_1 e_2 + \beta \gamma \left[ 2e_2 e_3^2 + e_2^2 e_3 \right] = \lambda \left( -e_1 + \gamma e_3 + \beta e_3^2 \right).$$

Учитывая, что  $p_1$  и  $p_2$  обращаются в нуль одновременно, введём новые обозначения:  $p_2 = \alpha p_1 = \alpha p$ , где  $\alpha \neq 0$ . Тогда из уравнений (6.5), (6.6) имеем:

$$(6.9) \quad \lambda = \alpha^2 p^2 + \alpha e_1 + \left[ 2\gamma e_3 + \beta e_3^2 \right] = p^2 + \frac{1}{\alpha} e_1 + \left[ 2\gamma e_2 + \beta e_2^2 \right],$$

или

$$(6.10) \quad \left[ 1 - \alpha^2 \right] p^2 = 2\gamma \left[ e_3 - e_2 \right] + \beta \left[ e_3^2 - e_2^2 \right] + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha} e_1.$$

Заметим, что при замене  $p_1 \rightarrow p_2$ ,  $e_2 \rightarrow e_3$  уравнение (6.5) превращается в (6.6), а уравнение (6.7) - в (6.8). Поэтому независимых уравнений на переменные  $p$ ,  $\alpha$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  существует только два - (6.7) и (6.10). Первое из них, после некоторых преобразований, примет вид:

$$(6.11) \quad [1 - \alpha]p^2 = \frac{\alpha - 1}{\alpha}e_1 + \gamma\left(\frac{1}{\alpha}e_3 - e_2\right) + \beta\left(\frac{1}{\alpha}e_3^2 - e_2^2\right).$$

умножим уравнение (6.11) на  $[1 + \alpha]$  и вычтем его из (6.10).

Получим:

$$(6.12) \quad [e_3 + \alpha e_2]\left[\gamma(1 - \alpha) + \beta(e_3 - \alpha e_2)\right] = 0.$$

Покажем, что вторая скобка в (6.12) почти всегда отлична от нуля (исключение составляет случай  $\alpha = 1$ ,  $e_2 = e_3$ ). Предположим, она равна нулю, т.е.

$$(6.13) \quad \gamma[1 - \alpha] = \beta e_2 \left(\frac{e_3}{e_2} - \alpha\right).$$

Рассмотрим случай  $\gamma > 0$ . Пусть  $f = \frac{e_3}{e_2}$ . Из уравнения (6.13) получаем, что область допустимых значений  $f$ , а не превосходит области, заштрихованной на Рис.11а. Покажем, что области, обозначенные на Рис.11а цифрами I-V, также не являются допустимыми. Действительно, из (6.13) находим:

$$e_3 = \alpha e_2 + \frac{\gamma}{\beta}(\alpha - 1);$$

следовательно,  $\alpha$  не может быть отрицательным (область I удаляем). Из уравнения (6.10) легко получить, что области IV, V - недопустимы. Выразим  $\alpha$  из (6.13) и подставим в (6.10):

$$\alpha = \frac{\beta e_s + \gamma}{\beta e_z + \gamma},$$

$$p^2 = \frac{(e_s - e_z)(2\gamma + \beta(e_s + e_z))}{1 - \alpha^2} - \frac{e_1}{\alpha} =$$

$$= \frac{(e_s - e_z)(2\gamma + \beta e_s + \beta e_z)(\beta e_z + \gamma)^2}{(2\gamma + \beta e_z + \beta e_s)(\beta e_z + \gamma - \beta e_s - \gamma)} - \frac{e_1}{\alpha} = - \frac{(\beta e_z + \gamma)^2}{\beta} - \frac{e_1}{\alpha} < 0,$$

очевидное противоречие.

Итак, области II, III (см. Рис. 11а) также недопустимы, а значит, множество допустимых значений  $f$ , а состоит из одной точки  $[a, f] = [1, 1]$ .

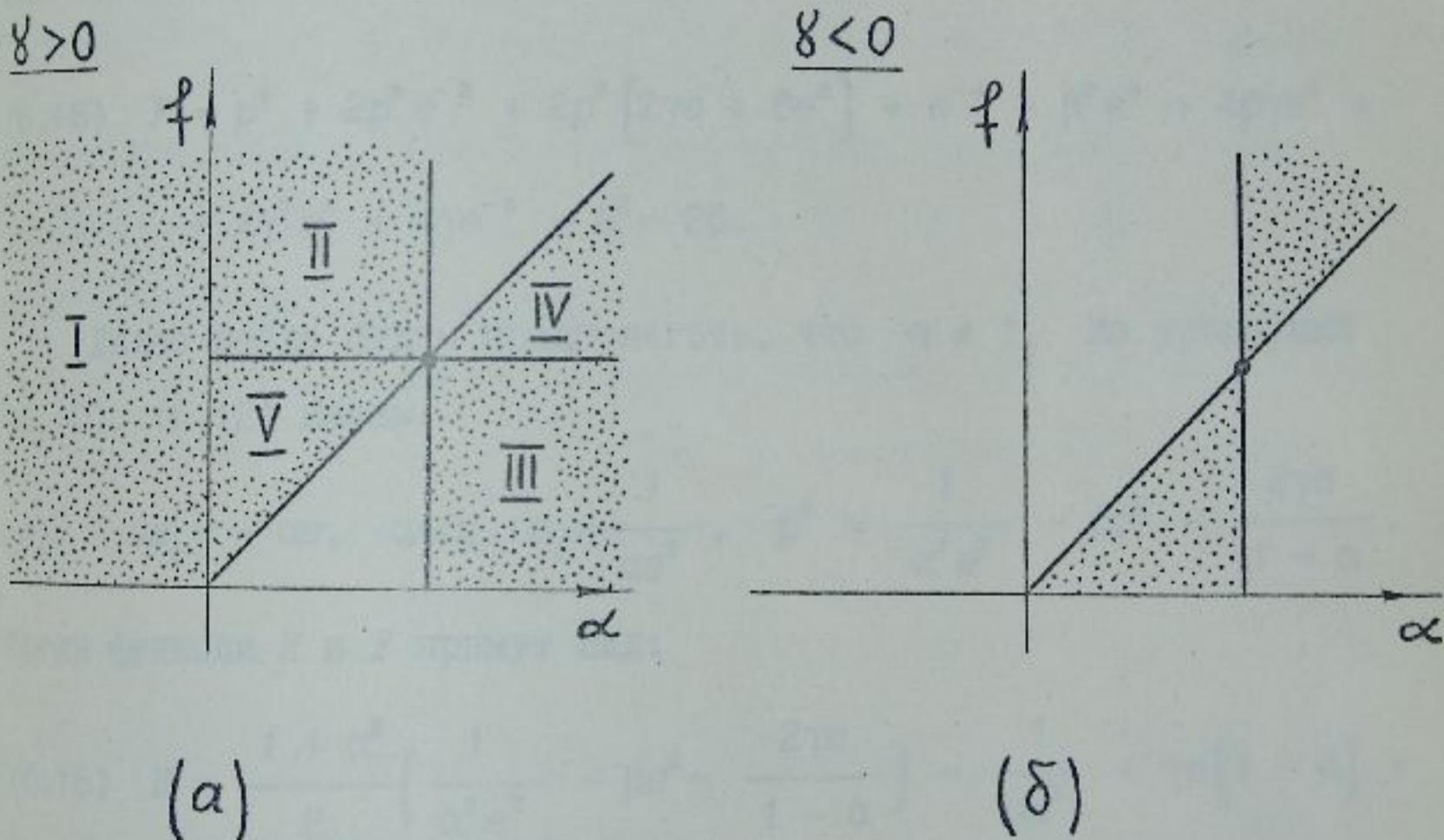


Рис. 11

Пусть теперь  $\gamma < 0$ . Из уравнения (6.13) следует, что область допустимых значений  $f$ , а не больше, чем заштрихованная на рис. 11б. При помощи рассуждений, аналогичных случаю  $\gamma > 0$ , можно показать, что пара  $[\alpha, f] = [1, 1]$  – единственна допустимая среди всех пар  $[\alpha, f]$ , принадлежащих заштрихованной области (см. рис. 11б).

Итак, доказано, что вторая скобка в (6.12) отлична от нуля всегда, за исключением особого случая  $[\alpha, f] = [1, 1]$ , характерного тем, что уравнения (6.10), (6.11) превращаются в тождественные равенства. Рассмотрим этот случай отдельно. Выразим функции  $H$  и  $F$  через параметры  $p = p_1 = p_2$  и  $e = e_2 = e_3$ :

$$(6.14) \quad H = p^2 + e^{-2} + 2\gamma e + \beta e^2,$$

$$(6.15) \quad F = p^4 + 2p^2e^{-2} + 2p^2[2\gamma e + \beta e^2] + e^{-4} + \beta^2 e^4 + 4\beta\gamma e^3 + \\ + 4\gamma^2 e^2 + 4\gamma e^{-1} = H^2 - 2\beta.$$

Далее везде будем предполагать, что  $\alpha \neq 1$ . Из уравнений (6.10), (6.12) имеем:

$$e_3 = -ae_2 = -ae, \quad \alpha < 0; \quad e_1 = \frac{1}{ae^2}, \quad p^2 = \frac{1}{\alpha^2 e^2} - \beta e^2 - \frac{2\gamma e}{1 - \alpha}.$$

Тогда функции  $H$  и  $F$  примут вид:

$$(6.16) \quad H = \frac{1 + \alpha^2}{2} \left( \frac{1}{\alpha^2 e^2} - \beta e^2 - \frac{2\gamma e}{1 - \alpha} \right) - \frac{1}{ae^2} + \gamma e[1 - \alpha] + \\ + \frac{\beta e^2}{2} [1 + \alpha^2] = \frac{(1 - \alpha)^2}{2\alpha^2 e^2} + \frac{2\gamma ae}{\alpha - 1} = \frac{x^2}{2} + \frac{2\gamma}{x},$$

где

$$(6.17) \quad x = \frac{\alpha - 1}{ae},$$

$$(6.18) \quad F = \alpha^2 p^4 + p^2 (-2\gamma ae + \beta \alpha^2 e^2) - \frac{2p^2}{e^2} + \alpha^2 p^2 [2\gamma e + \beta e^2] + \\ + \frac{1}{\alpha^2 e^4} + \beta^2 \alpha^2 e^4 + 2\beta\gamma [-\alpha + \alpha^2] e^3 - 4\gamma^2 \alpha e^2 - \frac{2\gamma(e - ae)}{ae^2} = \\ = \frac{4\gamma^2 \alpha^2 e^2}{(1 - \alpha)^2} + \frac{4\gamma(\alpha - 1)}{ae} + 2\beta = \frac{4\gamma^2}{x^2} + 4\gamma x + 2\beta.$$

Качественный вид графиков функций  $H(x)$  и  $F(x)$  – такой же, как и для предыдущей гамильтоновой системы (см. Рис.9). Сравним

функции  $F(x)$  и  $H^2(x) - 2\beta = \frac{x^4}{4} + \frac{4\gamma^2}{x^2} + 2\gamma x - 2\beta$  при различных значениях  $x$ . Для достаточно больших значений  $x$  (положительных или отрицательных) имеем  $F < H^2 - 2\beta$ , а при  $x \rightarrow \pm 0$  выполняется обратное неравенство –  $F > H^2 - 2\beta$ . Кроме того, "клюв" (II) никогда не пересекается с кривой (I) (см. Рис.12). Действительно, точке  $A$  на Рис.12 соответствует значение  $x_0 = (2\gamma)^{1/3}$ . Посчитаем значения функций  $H$  и  $F$  в точке  $x_0$ :

$$H(x_0) = \frac{3(2\gamma)^{2/3}}{2}, \quad F(x_0) = 3(2\gamma)^{4/3} + 2\beta.$$

Предположим, существуют значения параметров  $\beta, \gamma$ , такие, что точка  $A$  "клюва" принадлежит кривой (I), т.е. существует значение  $x < 0$ , такое, что  $H(x) = H(x_0)$ ,  $F(x) = F(x_0)$ . Но тогда в силу очевидных неравенств

$$\frac{3}{2} [2\gamma]^{2/3} = H(x_0) = H(x) < \frac{x^2}{2};$$

$$3[2\gamma]^{4/3} + 2\beta = F(x_0) = F(x) < \frac{4\gamma^2}{x^2} + 2\beta$$

имеем  $3[2\gamma]^{2/3} < x^2 < \frac{1}{3} [2\gamma]^{2/3}$ , что невозможно. Следовательно, бифуркационная диаграмма имеет следующий вид (см. Рис.12).

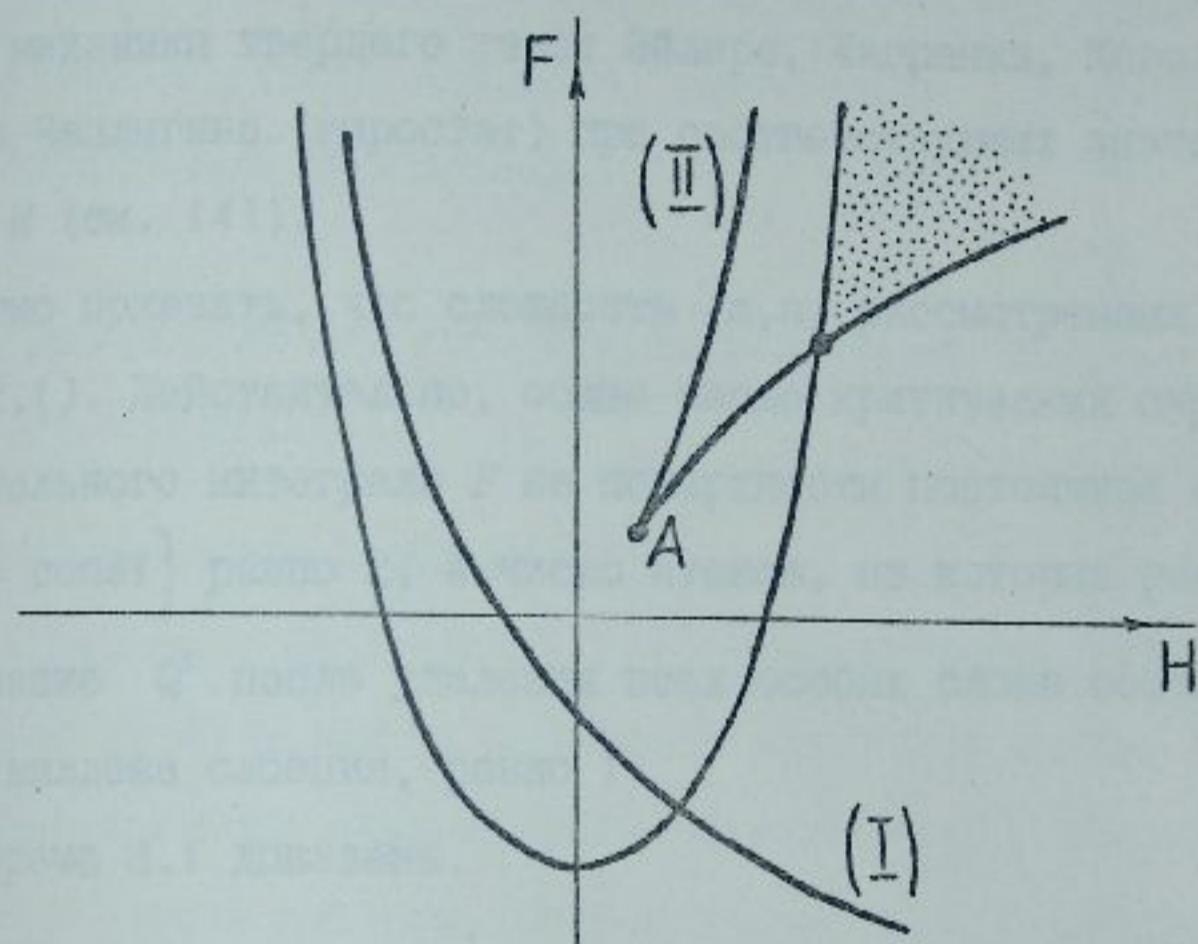


Рис. 12

Поскольку функция  $H$  на  $\mathbb{R}^4$  имеет единственную критическую точку – изолированный минимум, образ  $\mathbb{R}^4$  при отображении момента  $H \times F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  заполняет заштрихованную на Рис.12 область (см. также Рис.7б).

Почти боттовость дополнительного интеграла доказывается аналогично случаю системы (К-Т), рассмотренной в предыдущем параграфе, схема Дынкина которой изображена на Рис.5σ).

из вида бифуркационной диаграммы следует, что меченая молекула имеет вид  $A \xrightarrow{o} A$ . Итак, мечены молекулы для всех трех исследуемых интегрируемых гамильтоновых систем совпадают, а значит, согласно [6], эти системы топологически эквивалентны между собой и эквивалентны следующим известным интегрируемым случаям механики твердого тела: Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Горячева-Чаплыгина (гиростат) при соответствующих значениях энергии  $H$  (см. [4]).

Легко показать, что сложность  $(m, n)$  рассмотренных систем равна  $(2, 1)$ . Действительно, общее число критических окружностей дополнительного интеграла  $F$  на поверхности постоянной энергии  $Q^3 = \{H = \text{const}\}$  равно 2, а число кусков, на которые рассыпается многообразие  $Q^3$  после удаления всех особых слоев соответствующего лиувиллева слоения, равно 1.

Теорема 3.1 доказана.

## ГЛАВА 2.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ НА СФЕРЕ  $S^2$  С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ КВАДРАТИЧНЫМ ИЛИ ЛИНЕЙНЫМ ПО ИМПУЛЬСАМ ИНТЕГРАЛОМ.

В этой главе изложены результаты, полученные автором совместно с Игуен Тьен Зунгом в работе [41]. Классическими примерами таких систем являются геодезические потоки на стандартных эллипсоидах (вообще, на квадриках в  $\mathbb{R}^3$ ) и геодезический поток фактор-метрики на сфере Пуассона, возникающий в классических задачах аналитической динамики.

### §7. Дискретный код интегрируемой метрики. Теорема классификации.

В.Н. Колокольцов в работе [30] (развивающей локальные результаты Дж.Д. Биркгофа [29], Дарбу [34] и Леви-Чивиты [35]) доказал, что геодезический поток на двумерной сфере с метрикой класса  $C^2$  имеет дополнительный квадратичный по импульсам интеграл, независимый с интегралом энергии, если и только если в некоторых изотермических координатах  $z=x+iy$ , заданных на сфере с выколотой точкой, метрика имеет вид  $\lambda(x,y)(dx^2 + dy^2)$ , где функция  $\lambda$  равна одной из следующих:

$$(7.1) \quad \lambda = f(x^2 + y^2), \quad \text{где } f \text{ - положительная функция класса } C^2$$

такая, что  $f(t) = [a + o(1)]/t^2$  при  $t \rightarrow \infty$ ; такие геодезические потоки имеют линейный по импульсам интеграл;

(7.2)  $\lambda = \frac{f(u(x,y)) + h(v(x,y))}{|4z^3 - g_2 z + g_3|}$ , где  $g_2, g_3$  - такие вещественные постоянные, что  $g_2^3 - 27g_3^2 > 0$ , при этом  $u, v$  - соответственно вещественная и мнимая части преобразования  $w(z) = \wp^{-1}(z)$ , где  $\wp$  - функция Вейерштрасса с инвариантами  $g_2, g_3$  и парой периодов вида  $\omega_1$  и  $i\omega_2$  ( $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ ), а  $f$  и  $h$  - функции класса  $C^2$  такие, что

$$a) f(u) = \left(u - \frac{k\omega_1}{2}\right)^2 [a + o(1)] \text{ при } u \rightarrow \frac{k\omega_1}{2},$$

$$h(v) = \left(v - \frac{k\omega_2}{2}\right)^2 [a + o(1)] \text{ при } v \rightarrow \frac{k\omega_2}{2}$$

для любого фиксированного целого  $k$ ,  $a > 0$ ;

б) функции  $f$  и  $h$  периодические с периодами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , соответственно, и их значения на отрезках  $[\frac{\omega_1}{2}, \omega_1]$ ,  $[\frac{\omega_2}{2}, \omega_2]$  определяются через их значения на отрезках  $[0, \frac{\omega_1}{2}]$ ,  $[0, \frac{\omega_2}{2}]$  по формулам:

$$f\left(\frac{\omega_1}{2} + \tau\right) = f\left(\frac{\omega_1}{2} - \tau\right), \quad \tau \in [0, \frac{\omega_1}{2}],$$

$$h\left(\frac{\omega_2}{2} + \tau\right) = h\left(\frac{\omega_2}{2} - \tau\right), \quad \tau \in [0, \frac{\omega_2}{2}].$$

В связи с топологической классификацией геодезических потоков естественным образом возникает вопрос кодирования пар функций  $(f, h)$  (или же функции  $f(x^2 + y^2)$ , в случае метрик вида (7.1)) таким образом, чтобы топологически эквивалентным геодезическим потокам соответствовали эквивалентные в каком-то смысле пары

$[f_i, h_i]$  (функции  $f_i(x^2+y^2)$ , соответственно). В дальнейшем всюду будем предполагать, что функции  $f(u)$ ,  $h(v)$  и  $g(x^2+y^2) = (x^2+y^2)f(x^2+y^2)$  суть функции Морса; смысл этого требования заключается в том, чтобы обеспечить боттвость соответствующего дополнительного интеграла, функционально независимого с энергией  $H$ .

Рассмотрим график функции  $r=f(u)$  на отрезке  $0 \leq u \leq \frac{\omega_1}{2}$  и замкнутое множество  $U = \left\{ 0 \leq u \leq \frac{\omega_1}{2}, 0 \leq r \leq f(u) \right\}$ . Заметим, что, согласно условию (7.2a) на функции  $f$ ,  $h$ , имеем:  $f(u) > 0$  при  $0 < u < \frac{\omega_1}{2}$  и  $f(0) = f\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = 0$ . Пусть  $C$  – множество локальных минимумов функции  $f$ , отличных от нуля,  $D_c$  – множество отрезков, лежащих в пересечении прямой  $\{r=c, c \in C\}$  с множеством  $U$ , а множество  $D$  определяется следующим образом:  $D = \bigcup_{c \in C} \left\{ d \in D_c \mid d \text{ содержит хотя бы одну локально минимальную точку функции } f(u) \right\}$ . Пусть  $E = \{e_1, \dots, e_s\}$  – множество точек пересечения графика  $r=f(u)$  с отрезками из  $D$ , а точки  $u_i$  ( $i=1, \dots, s$ ) – проекции точек  $e_i$  на ось  $r=0$ ,  $u_1 < u_2 < \dots < u_s$ . Обозначим через  $a_i$  число точек пересечения отрезка  $[u_i, e_i]$  с множеством  $D$ . Положим  $s(f) = [a_1, \dots, a_s]$ ,  $s(h)$  определяется аналогично (см. Рис.13).

Определение 7.1. Кодом  $S(f, h)$  пары функций  $(f, h)$  называется последовательность  $S(f, h) = \{ -1, 0; s(f); 0; s(h); 0, -1 \}$ .

Определение 7.2. Пусть  $[b_1, \dots, b_k]$  – произвольная связная подпоследовательность в  $S(f, h)$ , такая, что  $b_1 = b_k$ ,  $b_i > b_1$

$(i=2, \dots, k-1)$ . Замена  $\{b_1, \dots, b_k\} \rightarrow \{b_k, b_{k-1}, \dots, b_1\}$  в  $S(f, h)$  называется элементарным преобразованием кода. Два кода называются эквивалентными, если один получается из другого конечным числом элементарных преобразований.

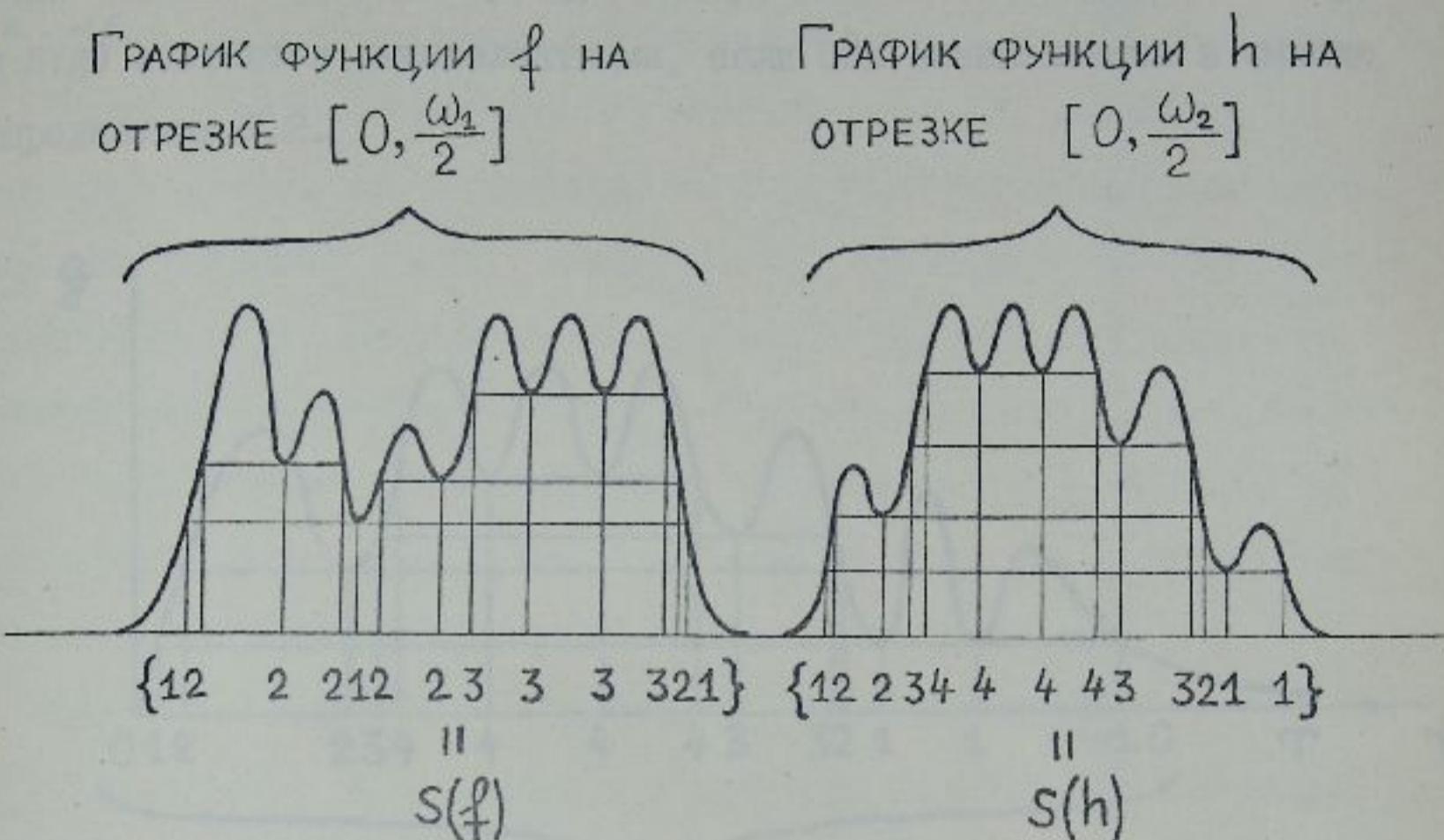


Рис. 13

**Теорема 7.1.** Две пары функций Морса  $(f, h)$  и  $(f', h')$ , удовлетворяющие условиям (7.2а, б), задают топологически эквивалентные геодезические потоки на сфере  $S^2$ , если и только если их коды  $S(f, h)$  и  $S(f', h')$  эквивалентны.

В случае метрики вида (7.1), задающей геодезический поток с линейным по импульсам интегралом, вместо функции  $f(t)$  удобно рассматривать функцию  $g(t) = tf(t)$ , которую в дальнейшем мы будем

предполагать функцией Морса. Условие гладкости  $f(t) = [a+o(1)]/t^2$  ( $t \rightarrow \infty$ ) функции  $f(t)$  в бесконечности гарантирует, что количество экстремумов функции  $g(t)$  конечно; нетрудно показать, что  $g(t)$  имеет вид, изображенный на Рис.14. Код  $S(g)$  функции  $g$  определяется аналогично коду  $s(f)$  функции  $f$ , см. Рис.14. Два кода  $S(g)$  и  $\tilde{S}(g)$  считаются эквивалентными, если они эквивалентны в смысле Определения 7.2.

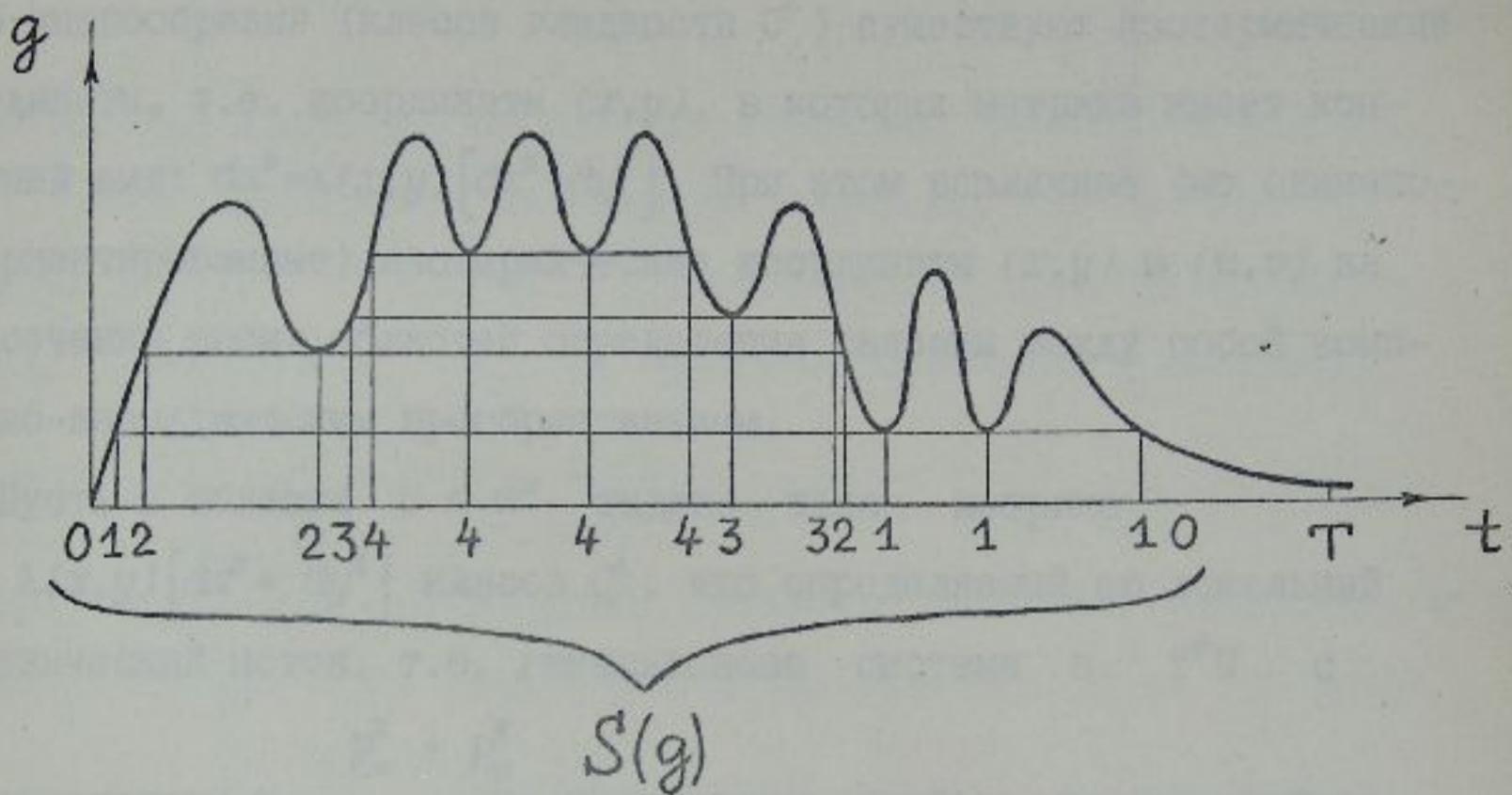


Рис. 14

Теорема 7.2. Функции Морса  $g_1(t) = t f_1(t)$  и  $g_2(t) = t f_2(t)$  задают топологически эквивалентные геодезические потоки на сфере  $S^2$ , если и только если их коды  $S(g_1)$  и  $S(g_2)$  эквивалентны.

Содержание теорем 7.1 и 7.2 составляет основной результат данной главы, он будет доказан в параграфах 9 и 10.

### §8. Полиномиальные интегралы геодезических потоков.

Корректность "операции редукции" к тору  $T^2$ .

Исследование геодезических потоков на двумерном многообразии существенно облегчает тот факт, что всякая риманова метрика на двумерном ориентируемом многообразии задает на нем комплексно-аналитическую структуру. В самом деле, хорошо известно (см., например, [33]), что в окрестности каждой точки двумерного риманова многообразия (класса гладкости  $C^1$ ) существуют изотермические координаты, т.е. координаты  $(x, y)$ , в которых метрика имеет конформный вид:  $ds^2 = \lambda(x, y)[dx^2 + dy^2]$ . При этом различные (но одинаково ориентированные) изотермические координаты  $(x, y)$  и  $(u, v)$  на пересечении своих областей определения связаны между собой комплексно-аналитическим преобразованием.

Пусть в области  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  задана такая метрика  $ds^2 = \lambda(x, y)[dx^2 + dy^2]$  класса  $C^1$ , что определяемый ею локальный геодезический поток, т.е. гамильтонова система в  $T^*U$  с

гамильтонианом  $H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2\lambda}$  имеет однородный полиномиальный по

импульсам интеграл

$$F_n = \sum_{k=0}^n b_k(x, y)p_x^{n-k}p_y^k, \quad n \geq 1.$$

Тогда, как доказал Дж.Д.Биркгоф в [29] (см. также [30]), функция

$R(z) = \sum_{k=0}^n t^k b_k$  является голоморфной функцией комплексной переменной  $z=x+iy$ . Кроме того, если в некоторых других изотермических

координатах  $(u, v)$ , связанных с  $(x, y)$  голоморфным преобразованием  $w(z)$ , где  $w=u+iv$ , интеграл  $F_n$  выражается формулой

$$F_n = \sum_{k=0}^n c_k(u, v) p_u^{n-k} p_v^k ,$$

то голоморфные функции  $R(z)$  и  $S(w)=\sum_{k=0}^n t^k b_k$  связаны формулой

$$(8.1) \quad S(w)=(w^*(z))^n R(z).$$

Ниже мы выпишем некоторые факты из работы В.Н.Колокольцова [30], необходимые нам в дальнейшем изложении. Как следует из формулы (8.1), в окрестности всякой точки, не принадлежащей множеству нулей функции  $R(z)$ , инвариантно определена голоморфная

1-форма  $\frac{dz}{\sqrt[n]{R(z)}}$ . Изучение квадратичных по скоростям интегралов

движения, в отличие от изучения полиномиальных интегралов высших степеней, сводится по существу к исследованию свойств определяе-

мой ими формы  $\frac{dz}{\sqrt[n]{R(z)}}$ , ибо по ней сам интеграл восстанавливает-

ся почти однозначно (с точностью до прибавления интеграла энергии).

Итак, пусть в области  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  задана риманова метрика  $ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$ , и соответствующий ей локальный геодезический поток в  $T^*U$ , определяемый гамильтонианом  $H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2\lambda}$ ,

имеет квадратичный интеграл  $F = \sum b_{ij}(x,y)p_i p_j$ , где  $B = (b_{ij})$  – симметрическая матрица порядка два,  $R(z) = (b_{11} - b_{22}) + 2ib_{12}$ . Если  $R_1 = b_{11} - b_{22}$ ,  $2R_2 = 2b_{12}$  – соответственно вещественная и мнимая части голоморфной функции  $R(z)$ , то матрица интеграла имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} b_{22} + R_1 & R_2 \\ R_2 & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Из условия, что скобка Пуассона  $\{F, H\}$  равна 0, получаем следующее основное уравнение на функцию  $\lambda$ :

$$(8.2) \quad R_2 \left( \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} \right) + R_1 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial R_2}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + 3 \frac{\partial R_2}{\partial y} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial^2 R_2}{\partial y^2} = 0,$$

которое является линейным уравнением второго порядка, гиперболическим во всех точках, за исключением нулей функции  $R$ .

При произвольной голоморфной замене координат  $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  функции  $R$  и  $\lambda$  преобразуются по формулам (см. [30]):

$$(8.3) \quad \lambda_1(w) |w'(z)|^2 = \lambda(z),$$

$$(8.4) \quad S(w) [w'(z)]^{-2} = R(z).$$

Рассмотрим решения основного уравнения (8.2) для произвольной голоморфной функции  $R(z) \neq 0$ . Переходим к новым локальным координатам  $w=u+iv$ , таким, чтобы  $S(w)=1$ . Тогда из формулы (8.4)

имеем  $w'(z) = \frac{1}{\sqrt{R(z)}}$ , что дает явное выражение для такой замены

в окрестности любой точки  $z_0$ , в которой  $R(z_0) \neq 0$ . В координа-

так  $(u, v)$  уравнение (8.2) примет вид  $\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial u \partial v} = 0$ , где  $\lambda_1(u, v)$  – функция, задающая метрику в изотермических координатах  $(u, v)$  и связанная с  $\lambda$  по формуле (8.3). Отсюда  $\lambda_1 = f(u) + h(v)$ , где  $f$  и  $h$  – произвольные положительные функции класса  $C^2$ , и для  $\lambda$  получаем окончательную формулу:

$$\lambda(x, y) = \frac{f(u(x, y)) + h(v(x, y))}{|R(z)|}.$$

Используя предыдущие соображения, В.И. Колокольцов в [30] доказал, что геодезический поток на торе  $T^2$  имеет квадратичный по импульсам дополнительный интеграл, если и только если в некоторых глобальных координатах  $(u, v)$  на торе  $T^2$  метрика имеет лиувиллев вид  $ds^2 = [f(u) + h(v)](du^2 + dv^2)$ , где  $f, h$  – положительные периодические функции класса  $C^2$ . При этом гамильтониан и дополнительный интеграл геодезического потока этой метрики имеют вид:

$$(8.5) \quad H = \frac{1}{2} \frac{p_u^2 + p_v^2}{f(u) + h(v)},$$

$$(8.6) \quad F = \frac{h(v)}{f(u) + h(v)} p_u^2 - \frac{f(u)}{f(u) + h(v)} p_v^2.$$

В работе Е.Н. Селивановой [36] предъявлена топологическая классификация таких геодезических потоков на торе  $T^2$  (на основе явного вычисления топологического инварианта Фоменко-Цишанга, или меченой молекулы). Оказывается, топологическая классификация геодезических потоков на сфере  $S^2$  с дополнительным нетривиальным квадратичным по импульсам интегралом наиболее эффективно может

быть получена в результате некоторого "процесса редукции" к тору  $T^2$ . А именно, рассмотрим метрику вида (7.2) на сфере  $S^2$  в некоторых глобальных изотермических координатах  $z=x+iy$ . Тогда связанная с ней  $\wp$ -функция Вейерштрасса осуществляет двулистное накрытие  $\wp(w): T^2 \rightarrow S^2$  с четырьмя точками разветвления:  $0, \frac{\omega_1}{2}, \frac{i\omega_2}{2}, \frac{\omega_1+i\omega_2}{2}$ . Условие  $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$  (см. §7, формулу (7.2)) гарантирует, что эти четыре точки соответствуют четырем различным точкам (точкам округления) на  $S^2$ . Здесь  $w$  – периодическая комплексная переменная на  $T^2$  с периодами  $\omega_1, i\omega_2$ , отвечающая вещественным переменным  $u, v$  с периодами  $\omega_1, \omega_2$ , соответственно. Ясно, что в окрестности каждой точки на  $S^2$ , кроме точек округления, функция  $w = \wp^{-1}(z)$ , где  $z=x+iy$ ,  $w=u+iv$ , осуществляет переход к лиувиллевым координатам. Поэтому первоначальная метрика на  $S^2$  поднимается до римановой метрики  $ds^2 = [f(u) + h(v)](du^2 + dv^2)$  на торе  $T^2$  с четырьмя выколотыми точками. Отметим здесь, что формула  $ds^2 = [f(u) + h(v)](du^2 + dv^2)$  не определяет римановой метрики на всем торе  $T^2$ , ибо функция  $f(u)+h(v)$  обращается в нуль в точках  $\{0, 0\}, \{0, \frac{\omega_2}{2}\}, \{\frac{\omega_1}{2}, 0\}, \{\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}\}$ . В то же время использование метрики  $ds^2$  на  $K = T^2 \setminus \{4 \text{ точки}\}$  чрезвычайно удобно для дальнейшего качественного анализа соответствующих гамильтоновых систем, а в особенности – их критических периодических траекторий. В самом деле, для метрики  $ds^2$  в  $K$  гамильтониан  $H$  и дополнительный интеграл  $F$  в  $T^*K$  задаются простыми и красивыми формулами (8.5), (8.6).

Корректность нашей "операции редукции" к тору  $T^2$  гарантиру-

ется следующей леммой.

**Лемма.** Функции  $H$  и  $F$ , задаваемые формулами (8.5), (8.6), соответственно, инвариантны относительно действия группы монодромии накрытия  $\mathcal{G}(w): T^2 \rightarrow S^2$ .

**Доказательство Леммы.** Известно, что группа монодромии  $\sigma$  для общих римановых поверхностей  $\Gamma$  совпадает с группой всех перестановок точек слоя. В нашем случае риманова поверхность  $\Gamma$  представляет собой эллиптическую кривую  $\Phi(\mathfrak{F}', \mathfrak{F}) = \mathfrak{F}'^2 - R(\mathfrak{F}) = 0$ , где  $R(\mathfrak{F}) = 4\mathfrak{F}^3 - g_2\mathfrak{F} - g_3$ , и группа монодромии  $\sigma$  равна  $S_2 = \mathbb{Z}_2$ .

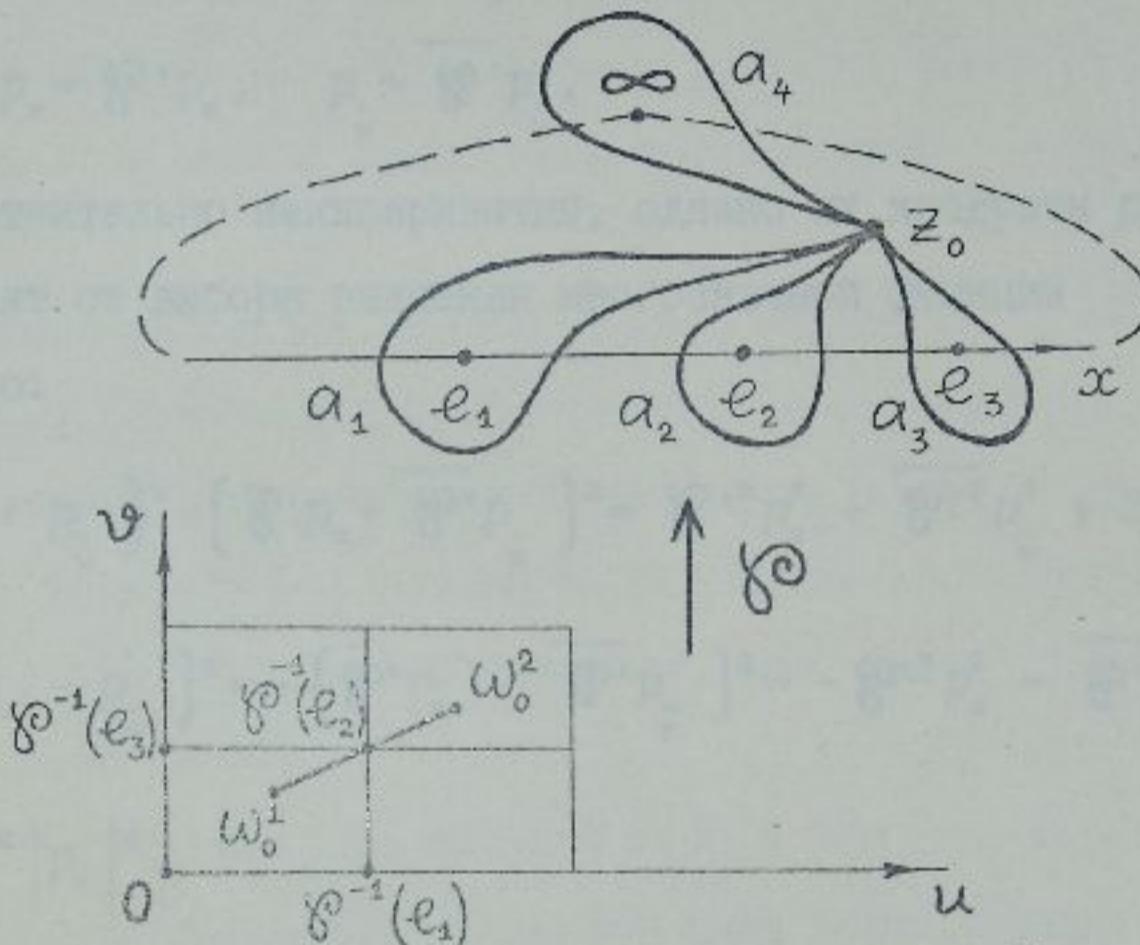


Рис. 15

Изобразим развертку сферы  $S^2$  и тора  $T^2$  на плоскость  $\mathbb{C}$  (см. Рис. 15). Пусть  $z_0 \in S^2$  — произвольная точка, отличная от точек окружления  $e_1, e_2, e_3, \infty$ . Каждый путь  $a_j$  (см. Рис. 15) произво-

дит перестановку двух точек слоя  $\mathcal{G}^{-1}(z_0) = \omega_0^1 \cup \omega_0^2$ . Например,  $\sigma(a_z)$  переставляет точки  $\omega_0^1$  и  $\omega_0^2$ , симметричные относительно  $\mathcal{G}^{-1}(e_z)$  на плоскости  $(u, v)$ . В силу симметрии функций  $f$  и  $h$  относительно подобных перестановок (см. условие (7.26)), метрика  $\lambda = \frac{f+h}{|R(z)|}$  остается инвариантной под действием группы монодромии  $\sigma = S_2$ . Можно было бы ожидать, что импульсы  $p_u$ ,  $p_v$ , входящие в выражения для функций  $H$  и  $F$  (8.5), (8.6), неинвариантны относительно действия группы монодромии  $\sigma$ . Как легко видеть из формул

$$(8.7) \quad p_v = \mathcal{G}' p_z, \quad p_{\bar{v}} = \overline{\mathcal{G}' p_{\bar{z}}},$$

они действительно неинвариантны, однако их квадраты  $p_u^2$  и  $p_v^2$  уже не зависят от выбора значения многозначной функции  $\mathcal{G}^{-1}(z)$ . Покажем это:

$$\begin{aligned} p_u^2 &= (p_v + p_{\bar{v}})^2 = (\mathcal{G}' p_z + \overline{\mathcal{G}' p_{\bar{z}}})^2 = |\mathcal{G}'|^2 p_z^2 + |\overline{\mathcal{G}'}|^2 p_{\bar{z}}^2 + 2 |\mathcal{G}'| |p_z|^2, \\ p_v^2 &= -(p_v - p_{\bar{v}})^2 = -(\mathcal{G}' p_z - \overline{\mathcal{G}' p_{\bar{z}}})^2 = -|\mathcal{G}'|^2 p_z^2 - |\overline{\mathcal{G}'}|^2 p_{\bar{z}}^2 + \\ &\quad + 2 |\mathcal{G}'| |p_z|^2. \end{aligned}$$

Ясно, что на таких  $p_u^2$ ,  $p_v^2$  действие группы монодромии  $\sigma$  тривиально, следовательно, функции  $H$  и  $F$ , определяемые формулами (8.5), (8.6), соответственно, также инвариантны. Лемма доказана.

§9. Алгоритм построения меченой молекулы в случае квадратичного дополнительного интеграла.

Теорема 9.1 (Алгоритм построения меченой молекулы  $W^*(f, h)$ ).

Геодезическому потоку на двумерной сфере с метрикой вида (7.2) соответствует меченая молекула  $W^*(f, h)$ , которая строится по следующему алгоритму:

1) Рассмотрим график функции  $r=f(u)$  на отрезке  $[0, \frac{\omega_1}{2}]$  и описанные в §7 множества  $U$ ,  $C$  и  $D$ . Добавляя в  $D$  множество локально максимальных точек графика  $r=f(u)$ , получаем множество  $D'$ . Пусть для каждого  $k \in \mathbb{N}$   $V_k$  – атом с  $(k-1)$  вершиной и  $(k+1)$  компонентой края, а атом  $A$  представляет собой диск с точкой (см. Рис.16);

2) заменяя каждый отрезок  $d$  из  $D$  атомом  $V_k$  (где  $(k+1)$  равно числу точек пересечения графика  $r=f(u)$  с отрезком  $d$ ), каждую локально максимальную точку из  $D'$  атомом  $A$ , а каждую компоненту связности разности  $U \setminus D'$  одним ребром между соответствующими атомами, получаем некоторый объект  $W(f)$  (см. Рис.17); объект  $W(h)$  строится аналогично;

3) замечая, что оба объекта  $W(f)$  и  $W(h)$  имеют в точности по одному свободному ребру, склеиваем нашу неоснащенную молекулу  $W(f, h)$  из двух экземпляров  $W(f)$ , двух экземпляров  $W(h)$  и одного "центрального" атома  $C_2$  (см. Рис. 18);

4) меченая молекула  $W^*(f, h)$  получается из  $W(f, h)$  следующим образом: всем внутренним ребрам (т.е. ребрам, не содержащим атома  $A$ ) приписывается  $r$ -метка  $\infty$ , всем остальным ребрам – метка 0; семье, содержащей атом  $C_2$  (единственной семье, не содержащей

атомов A), ставится в соответствие метка n=2).

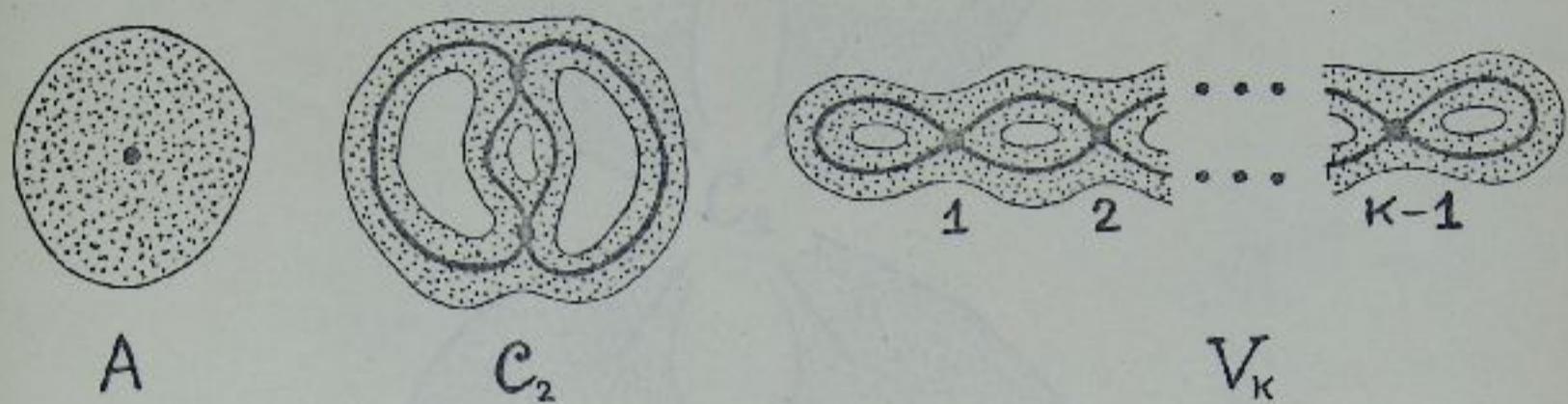


Рис. 16

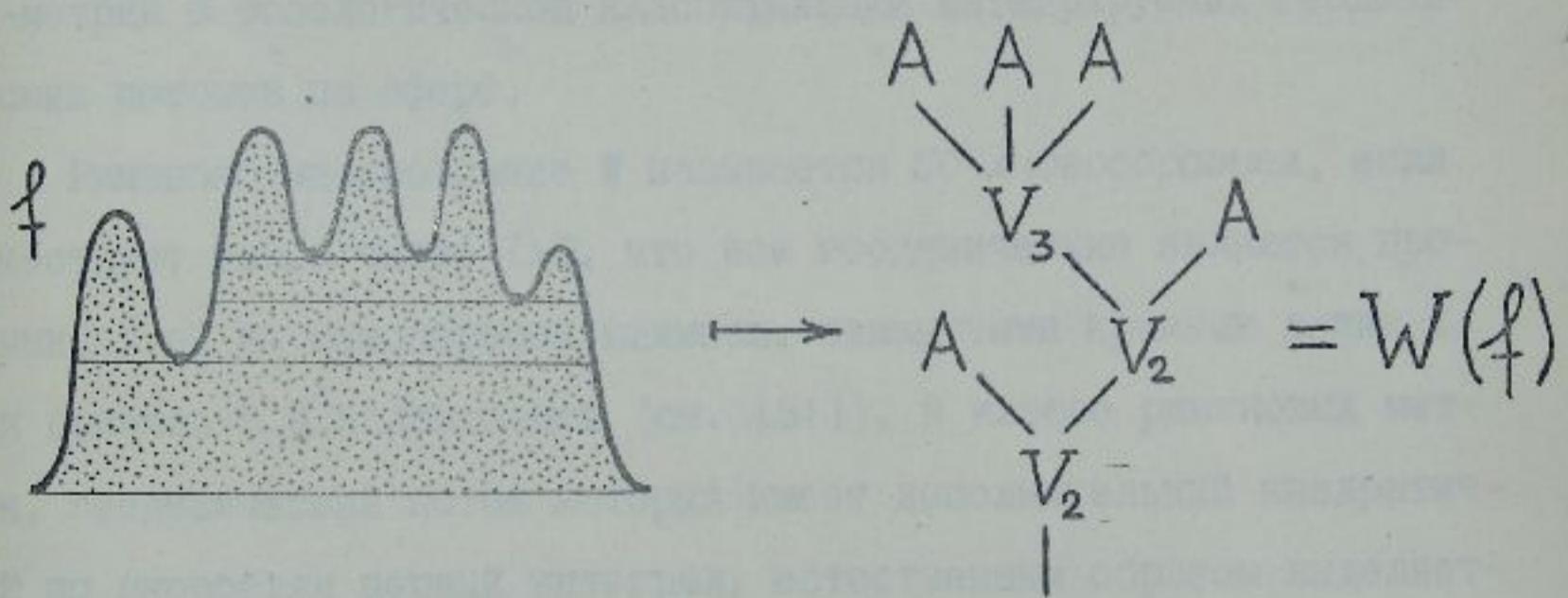


Рис. 17

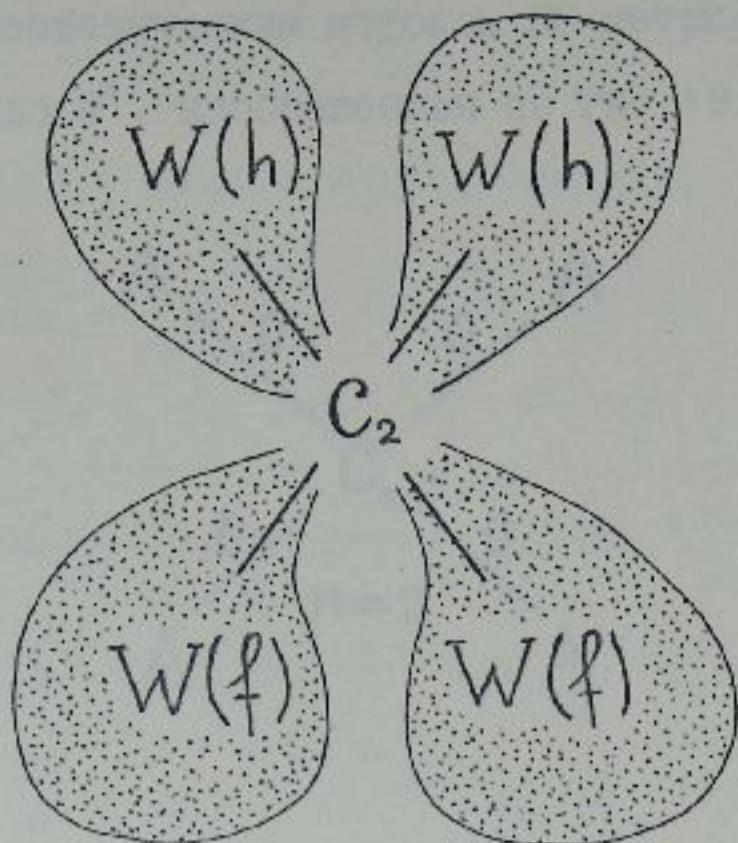


Рис. 18

В качестве следствия из Теоремы 9.1, мы указываем место SC-метрик в топологической классификации интегрируемых геодезических потоков на сфере.

Риманово многообразие  $M$  называется *SC-многообразием*, если существует такое число  $l > 0$ , что все геодезические являются простыми, т.е. не самопересекающимися, замкнутыми кривыми длины  $l$ . Как показал В.Н.Колокольцов (см. [31]), в классе римановых метрик, геодезический поток которых имеет дополнительный квадратичный по скоростям первый интеграл, естественным образом выделяется семейство SC-метрик. Как доказано в [31], необходимым условием замкнутости всех геодезических на  $S^2$  является требование, чтобы функции  $f$  и  $h$  имели единственную локально максимальную точку на полупериоде. Учитывая последнее замечание, получаем

**Следствие.** Геодезическим потокам  $SC$ -метрик соответствует оснащенная молекула  $W^*$ , изображенная на Рис.19.

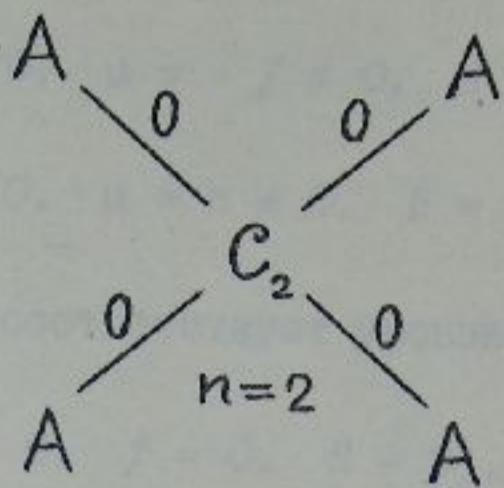


Рис. 19

**Доказательство теоремы 9.1.** Перейдем к новым координатам

$(w, p)$ , где  $p = p_1 - ip_2 = \frac{p_v}{\sqrt{f+h}}$ . Тогда функции  $H$  и  $F$  примут вид:

$$(9.1) \quad \begin{cases} H = p_1^2 + p_2^2, \\ F = hp_1^2 - fp_2^2. \end{cases}$$

Построим бифуркационную диаграмму для отображения момента  $K=H\times F:T^*S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Подставив выражения

$$(9.2) \quad \begin{cases} \text{grad } H = \{2p_1, 2p_2, 0, 0\}, \\ \text{grad } F = \left\{2hp_1, -2fp_2, -\frac{df}{du}p_2^2, \frac{dh}{dv}p_1^2\right\} \end{cases}$$

в равенство  $\text{grad } F = \mu \cdot \text{grad } H$ , получаем систему уравнений на множество критических точек отображения момента  $K$ :

$$(9.3) \quad hp_1 = \mu p_1, \quad -fp_2 = \mu p_2, \quad \frac{df}{du} p_2^2 = 0, \quad \frac{dh}{dv} p_1^2 = 0.$$

Решения системы (9.3) распадаются на три части:

$$(9.4) \quad p_1 = 0, \quad \frac{df}{du} = 0, \quad \mu = -f \neq 0, \quad H = p_2^2, \quad F = -fp_2^2;$$

$$(9.5) \quad p_2 = 0, \quad \frac{dh}{dv} = 0, \quad \mu = h \neq 0, \quad H = p_1^2, \quad F = hp_1^2;$$

(9.6) (этот случай соответствует уровню  $F = 0$ )

$$a) \quad p_1 = 0, \quad \frac{df}{du} = 0, \quad f = 0, \quad H = p_2^2, \quad F = 0;$$

$$b) \quad p_2 = 0, \quad \frac{dh}{dv} = 0, \quad h = 0, \quad H = p_1^2, \quad F = 0;$$

$$b) \quad \frac{df}{du} = \frac{dh}{dv} = 0, \quad f = h = 0, \quad H = p_1^2 + p_2^2, \quad F = 0.$$

Соответствующую бифуркационную диаграмму см. на Рис.20.

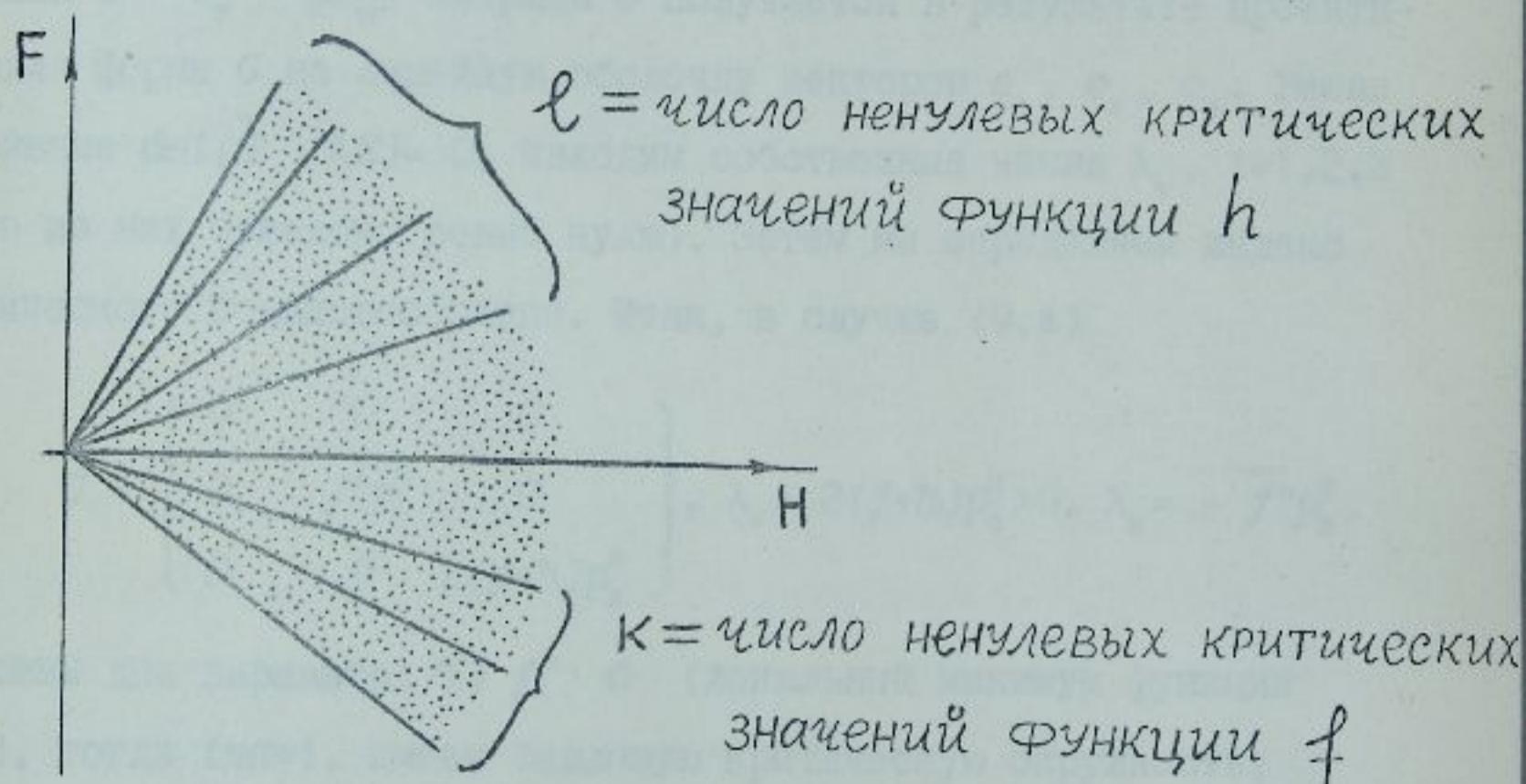


Рис. 20

Покажем, что невырожденность всех критических точек функций  $f$  и  $h$  гарантирует боттовость дополнительного интеграла  $F$ . Выберем три независимых вектора, ортогональных  $\text{grad } H$ :  $e_1 = \{0, 0, 0, 1\}$ ,  $e_2 = \{0, 0, 1, 0\}$ ,  $e_3 = \{p_2, -p_1, 0, 0\}$ . Гессиан  $G_F$  функции  $F$  равен

$$G_F = \begin{bmatrix} 2h & 0 & 0 & 2p_1 \frac{dh}{du} \\ 0 & -2f & -2p_2 \frac{df}{du} & 0 \\ 0 & -2p_2 \frac{df}{du} & -2f''_{uu} p_2^2 & 0 \\ 2p_1 \frac{dh}{du} & 0 & 0 & h''_{vv} p_1^2 \end{bmatrix}.$$

Далее, для каждого из случаев (9.4), (9.5), (9.6) находим гессиан  $G = G_F - \mu G_H$ ; матрица  $\tilde{G}$  получается в результате проектирования формы  $G$  на линейную оболочку векторов  $e_1, e_2, e_3$ . Решая уравнение  $\det(\tilde{G} - \lambda E) = 0$ , находим собственные числа  $\lambda_i$ ,  $i=1,2,3$  (одно из них заведомо равно нулю). Затем мы определяем индекс критического подмногообразия. Итак, в случае (9.4)

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & f''p_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(f+h)p_2^2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 2(f+h)p_2^2 > 0, \quad \lambda_2 = -f''p_2^2.$$

Возможны два варианта: 1)  $f'' > 0$  (локальный минимум функции  $f(u)$ ), тогда  $ind=1$ , имеем седловую критическую окружность; 2)  $f'' < 0$  (локальный максимум функции  $f(u)$ ),  $ind=0$  – минимальная критическая окружность. В случае (9.5)

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} h''p_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2(f+h)p_1^2 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 2(f+h)p_1^2 < 0, \lambda_2 = h''p_1^2;$$

1) если  $h'' > 0$ , то  $ind=1$  – седло; 2) если  $h'' < 0$ , то  $ind=2$  – максимальная критическая окружность. В случае (9.6a)

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f''p_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2hp_2^2 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 2hp_2^2 \geq 0, \lambda_2 = -f''p_2^2 < 0,$$

следовательно,  $ind=1$  – седло; в случае (9.6b)

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} h''p_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2fp_1^2 \end{bmatrix}, \lambda_1 = -2fp_1^2 \leq 0, \lambda_2 = h''p_1^2 > 0 –$$

седло; в случае (9.6c)

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} h''p_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -f''p_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_1 = h''p_1^2 \geq 0, \lambda_2 = -f''p_2^2 \geq 0 –$$

седло. Поскольку боттовость интеграла  $F$  равносильна тому, что собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ , здесь следует сделать оговорку. Как нетрудно заметить,  $\lambda_1$  или  $\lambda_2$  обращается в нуль лишь только в четырех точках разветвления накрытия  $\mathcal{Y}(w): T^2 \rightarrow S^2$ ; но индуцированная метрика на торе вырождена как раз в этих точках, а поэтому обращение одного из собственных чисел в нуль совершенно естественно. Кроме того, из формул (9.6) легко видеть, что

координаты  $(p_1, p_2)$  определены не для всех решений а)- в). Множество критических точек а), б), в) схематично изображено на Рис.21, где сплошными линиями обозначены действительные решения, а пунктиром и пустыми кружочками – то, что не определено в координатах  $(p_1, p_2)$ . Стрелочками на Рис.21 обозначено склеивание соответствующих участков при двулистном накрытии  $\varphi: w \rightarrow z$ . Действительно, критические окружности с двумя выколотыми точками проектируются на плоскость  $(u, v)$  так, как показано на Рис. 22. Как хорошо известно,  $\wp$ -функция Вейерштрасса отображает такие окружности (с выколотыми точками) в отрезки с выколотыми концами.

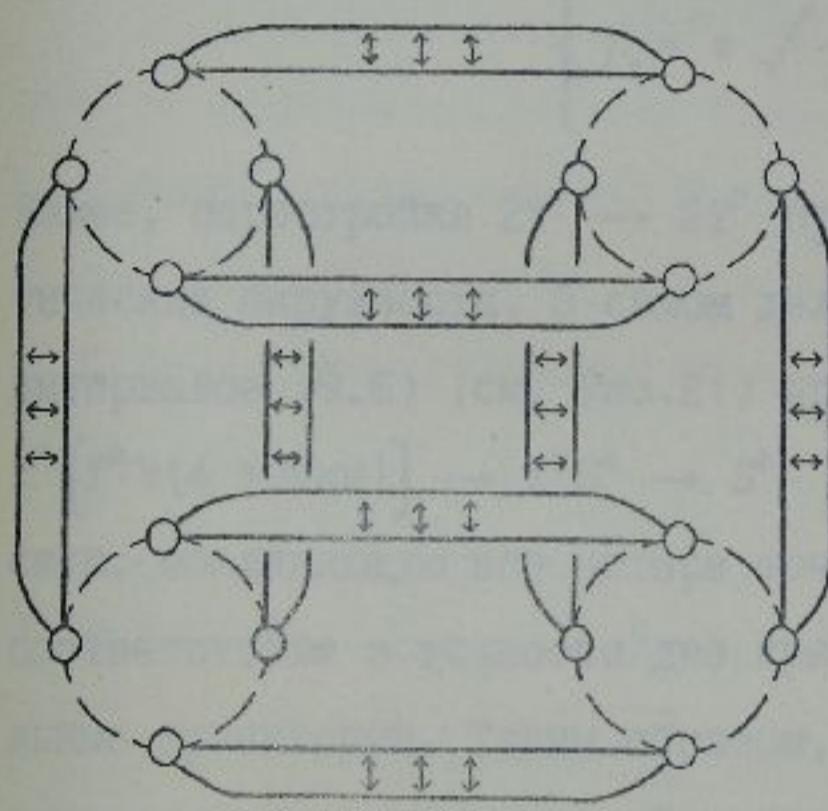


Рис. 21

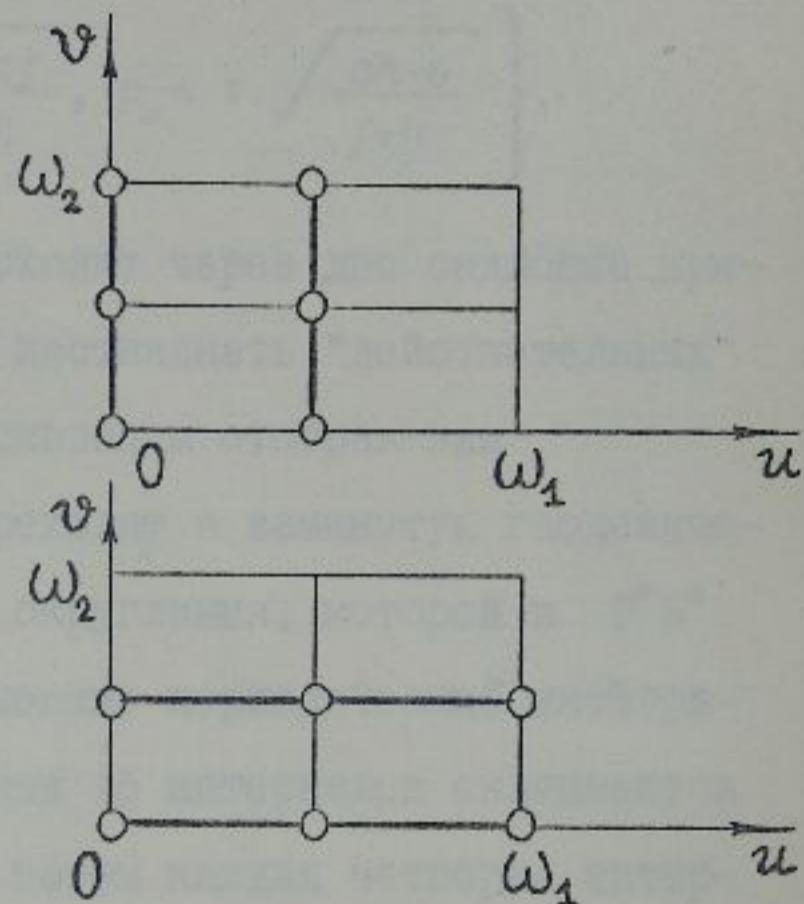


Рис. 22

Покажем, что на уровне  $F = 0$  происходит перестройка  $2T^2 \rightarrow 2T^2$ . Действительно, пусть  $\varepsilon$  – достаточно мало, тогда

поверхность уровня  $\{H = c, F = \varepsilon\}$  задается системой уравнений:

$$\left\{ p_1^2 = \frac{\varepsilon + cf}{f+h}, \quad p_2^2 = \frac{ch - \varepsilon}{f+h} \right\}.$$

Поскольку при двулистном накрытии  $\mathcal{G}: T^2 \rightarrow S^2$  точки  $[p_1, p_2]$  и  $[-p_1, -p_2]$  отождествляются, поверхность  $\{H = c, F = \varepsilon\}$  состоит из двух компонент связности:

$$(9.7) \left\{ p_1 = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon + cf}{f+h}}, \quad p_2 = \pm \sqrt{\frac{ch - \varepsilon}{f+h}} \right\} \text{ и } \left\{ p_1 = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon + cf}{f+h}}, \quad p_2 = \mp \sqrt{\frac{ch - \varepsilon}{f+h}} \right\}.$$

Далее, перестройка  $2T^2 \rightarrow 2T^2$  происходит через две седловые критические окружности. В самом деле, шестнадцать "действительных" интервалов (9.6) (см. Рис.21) при сквозном отображении  $T^*[T^2 \setminus (4 \text{ точки})] \rightarrow T^*S^2 \rightarrow S^2$  переходят в замкнутую геодезическую, соединяющую все четыре точки окружления, которой в  $T^*S^2$  соответствуют в точности две критические периодические интегральные траектории. Таким образом, наши 16 интервалов склеиваются попарно, как показано на Рис.21, а затем каждая четверка интервалов стыкуется концами, образуя критическую окружность в  $RP^3$ .

Заметим теперь, что обе компоненты связности (9.7) совершенно равноправны; следовательно, уровню  $F = 0$  соответствует атом  $C_2$ , ибо из всех атомов сложности  $m = 2$ , осуществляющих перестройку  $2T^2 \rightarrow 2T^2$ , симметричен только атом  $C_2$  (см. [6]).

Изучим теперь перестройки торов, происходящие в прообразе бифуркационных прямых  $F = h_i H$ , где  $h_i$  - критические значения функции  $h(v)$ , см. Рис.20. Совместная поверхность уровня интегралов  $H, F$ , лежащая в прообразе точек любой прямой  $F = aH$ , задается системой уравнений

$$\left\{ p_u^2 + p_v^2 = H, \quad h(v)p_u^2 - f(u)p_v^2 = aH \right\},$$

эквивалентной следующей:

$$(9.8) \quad \left\{ p_u^2 = \frac{H(f(u)+a)}{f(u)+h(v)}, \quad p_v^2 = \frac{H(h(v)-a)}{f(u)+h(v)} \right\}.$$

Из уравнений (9.8) получаем очевидное неравенство  $h(v) \geq a$ , которое налагает ограничение на допустимые значения  $v$ . Если  $a$  - регулярное значение функции  $h(v)$ , то уравнения (9.8) задают семейство торов Лиувилля. При изменении значения  $a$ , эти торы "шны-вут" по изоэнергетической поверхности  $Q^3 = \{H = \text{const}\}$  и перестраиваются, когда значение  $a$  становится критическим. На Рис.23 изображен пример функции  $h(v)$  (напомним, что  $h(v)$ , подобно  $f(u)$ , принадлежит классу неотрицательных периодических функций Морса с периодом  $\omega_2$ , симметричных относительно точки  $v = \frac{\omega_2}{2}$  и обращающихся в нуль в точности в двух точках на периоде:  $v = 0, \frac{\omega_2}{2}$ ) и указаны допустимые отрезки изменения координаты  $v$  на тех торах Лиувилля  $T^2$ , на которых значения интегралов  $H, F$  связаны условием  $F = aH$ . Легко видеть, что седловые перестройки торов при движении вдоль прямой  $\{H = \text{const}\}$  в области  $F > 0$  соответствуют

локальным минимумам функции  $h(v)$  и происходят через атомы вида  $V_k$ ; локальным максимумам, как и следовало ожидать, отвечают атомы  $A$ .

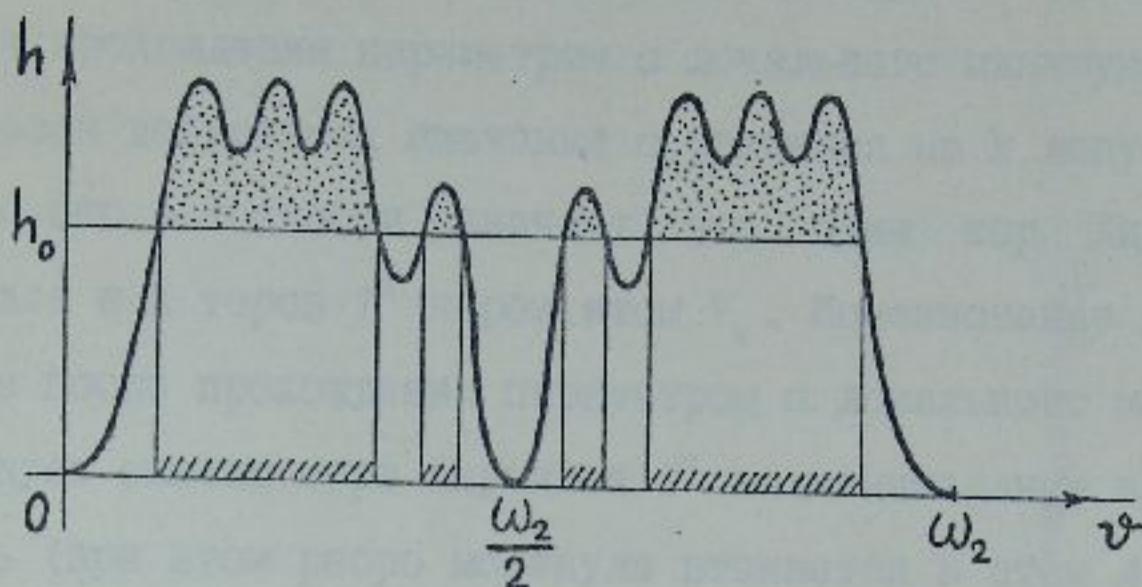


Рис. 23

В области  $F < 0$  прямая  $\{H = \text{const}\}$  пересекает пучок бифуркационных прямых, соответствующих множеству критических точек  $\{p_u = 0, f'(u) = 0, f' \neq 0\}$ . Два тора Лиувилля  $T^2$ , отошедшие от уровня  $\{F = 0\}$ , при  $F < 0$  будут перестраиваться в соответствии с распределением локальных минимумов функции  $f(u)$ . А именно, торы Лиувилля, принадлежащие совместному уровню двух интегралов  $[H, F = -aH]$  (здесь  $a > 0$ ), задаются уравнениями:

$$\left\{ p_u^2 = \frac{H[f(u) - a]}{f(u) + h(v)}, p_v^2 = \frac{H[h(v) + a]}{f(u) + h(v)} \right\},$$

которые дают очевидное неравенство  $f(u) \geq a$ . Аналогично тому, как это было с функцией  $h(v)$ , неравенство  $f(u) \geq a$  выделяет на

оси  $u$  отрезки допустимых значений, и картина перестроек торов Лиувилля  $T^2$  при движении вдоль прямой  $\{H = \text{const}\}$  в области  $F < 0$  описывается распределением локальных минимумов функции  $f(u)$ . Если после прохождения параметром  $a$  локального минимума функции  $f(u)$  отрезок допустимых значений  $u$  разбился на  $k$  допустимых отрезков, то это в точности означает, что один тор Лиувилля  $T^2$  перестроился в  $k$  торов  $T^2$  через атом  $V_k$ . Исчезновение допустимого отрезка после прохождения параметром  $a$  локального максимума соответствует скатию тора Лиувилля  $T^2$  на минимальную критическую окружность (при этом ребро молекулы втыкается в атом  $A$ ).

Объединяя результаты исследования перестроек в областях  $F > 0$ ,  $F < 0$  и на уровне  $\{F=0\}$ , получаем, что из ребер-связей атома  $C_2$  вверх растут два идентичных дерева (с атомами вида  $L$  и  $V_k$ ), строящихся по графику  $h(v)$ , и вниз - два дерева, соответствующих функции  $f$ . Итак, молекула  $W(f, h)$  имеет вид, схематично изображенный на Рис. 18.

Оснащение построенной молекулы  $W$  легко получается из наблюдения, что все критические периодические траектории гомологичны друг другу в  $Q^3 = RP^3$ . Итак, все метки  $r_i = \infty$  на рёбрах, не содержащих буквы  $A$ , и  $r_i = 0$  - на остальных рёбрах. Вследствие такого оснащения существует единственная семья, не содержащая атомов  $A$  - в центре ее "сидит" атом  $C_2$  (см. [6]). Чтобы вычислить метку  $n$ , выпишем копредставление для фундаментальной группы многообразия  $Q^3 = RP^3$ :

$$(9.9) \quad \pi_1(Q^3) = \mathbb{Z}_2 = \left\langle \eta, \bigcup_{k=1}^{2M+2N} a_k \mid \eta \text{ - в центре, } \eta^{\alpha_k} a_k^{\beta_k} = 1, \prod_{k=1}^{2M+2N} a_k = 1 \right\rangle.$$

Здесь  $\eta$  соответствует слою, а образующие  $a_k$  -  $(2M+2N)$  дыркам на сфере  $S^2$ , где  $2M$  и  $2N$  - число локальных максимумов функций  $f$  и  $h$ , соответственно. Согласно оснащению молекулы  $W^*$ , все  $\beta_i$  в (9.9) равны 1, следовательно, числа  $\bar{\alpha}_i$ , удовлетворяющие условиям  $0 \leq \alpha_i < |\beta_i|$ ,  $\bar{\alpha}_i = \alpha_i \bmod \beta_i$ , равны нулю.

В соответствии с леммой, упомянутой во Введении и доказанной в [6], любое избыточное оснащение (т.е., в нашем случае, числа  $\alpha_i$ ) эквивалентно такому, что все  $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$ , кроме, возможно, ровно одного числа  $\alpha_k$ . Учитывая это замечание, для фундаментальной группы  $\pi_1(Q^3)$  находим:

$$\langle \eta, a | [\eta, a] = 1, \eta^n a = 1, a = 1 \rangle = \langle \eta | \eta^n = 1 \rangle = \mathbb{Z}_2,$$

следовательно, семье, содержащей  $C_2$ , соответствует метка  $n=2$ .

Теорема 9.1 доказана.

**Доказательство Теоремы 7.1.** Как видно из доказательства Теоремы 9.1, молекула  $W(f, h)$ , равно как и меченая молекула  $W^*(f, h)$ , зависит только от локальных минимумов функций  $f$  и  $h$ . При этом информации о минимумах этих функций, заложенной в коде  $S(f, h)$ , достаточно для построения молекулы, а элементарные преобразования кода соответствуют симметриям атомов, составляющих молекулу. Итак, для геодезических потоков на сфере  $S^2$  с квадратичными по импульсам интегралами можно установить взаимно-однозначное соответствие между мечеными молекулами  $W^*(f, h)$  (являющимися, согласно теории А.Т.Фоменко, полными топологическими инвариантами систем) и кодами  $S(f, h)$ , рассматриваемыми с точностью до эквивалентности. Теорема 7.1 доказана.

**§10. Алгоритм построения меченой молекулы в случае линейного дополнительного интеграла.**

Теорема 10.1 (Алгоритм построения оснащенной молекулы  $W^*(f)$ ). Геодезическому потоку на сфере  $S^2$  с метрикой вида (7.1), заданной функцией Морса  $g(t) = tf(t)$ , отвечает меченая молекула  $W^*(f)$ , которая строится следующим образом:

1) Рассмотрим график функции  $r=g(t)$  на отрезке  $[0, T]$ , где  $T$  достаточно велико ( $T > t_*$ , где  $t_*$  - экстремальные точки), и замкнутое множество  $U = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq r \leq g(t)\}$ . Далее, повторяя уже описанную выше процедуру для метрик вида (7.2) (см. Теорему 9.1), получаем некоторый объект  $W(g)$ ;

2) молекула  $W(f)$  склеивается из двух экземпляров  $W(g)$ , как показано на Рис.24;

3) меченая молекула  $W^*(f)$  в случае, если  $g(t)$  имеет единственный экстремум, изображена на Рис.25; иначе (если количество экстремумов  $g(t)$  больше 1) все  $r$ -метки на внутренних ребрах молекулы равны  $\infty$ , на остальных ребрах - нулю, а единственной семье, не содержащей атомов  $A$ , приписывается метка  $n=2$ .

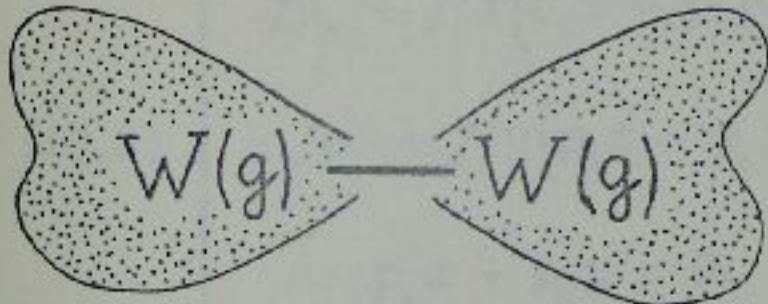


Рис. 24

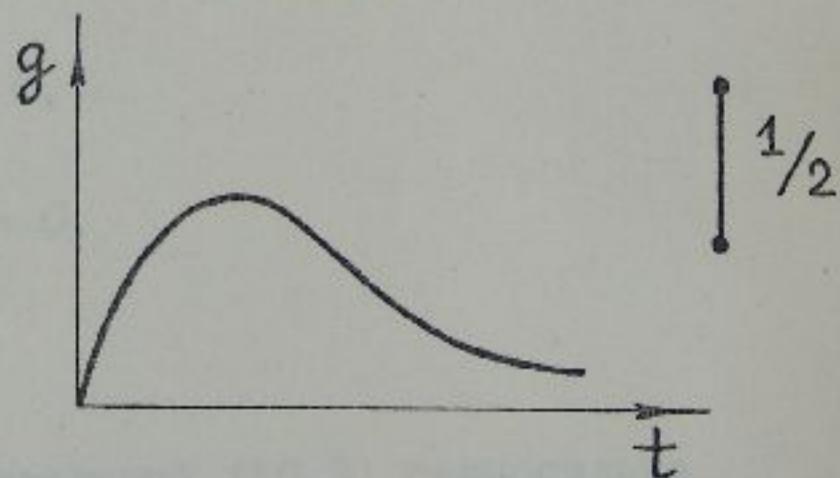


Рис. 25

Доказательство Теоремы 10.1. Для метрик вида (7.1) гамильтониан  $H$  и дополнительный интеграл  $F$  имеют вид

$$(10.1) \quad \begin{cases} H = \frac{\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2}{f(x^2+y^2)}, \\ F = \tilde{p}_2 x - \tilde{p}_1 y. \end{cases}$$

После замены координат  $p_1 = \frac{\tilde{p}_1}{\sqrt{f}}, \quad p_2 = \frac{\tilde{p}_2}{\sqrt{f}}$  имеем:

$$(10.2) \quad \begin{cases} H = p_1^2 + p_2^2, \\ F = \sqrt{f} (p_2 x - p_1 y). \end{cases}$$

Подставив выражения

$$\text{grad } H = \{2p_1, 2p_2, 0, 0\},$$

$$\text{grad } F = \left\{ -\sqrt{f} y, \sqrt{f} x, \sqrt{f} p_2 + \frac{f' x}{\sqrt{f}} (p_2 x - p_1 y), -\sqrt{f} p_1 + \frac{f' y}{\sqrt{f}} (p_2 x - p_1 y) \right\}$$

в уравнение  $\text{grad } F = \mu \cdot \text{grad } H$ , получаем следующее множество критических точек отображения момента  $H \times F : T^* S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

$$(10.3) \quad \begin{cases} fp_2 + f' x (p_2 x - p_1 y) = 0, \\ -fp_1 + f' y (p_2 x - p_1 y) = 0, \\ p_1 x + p_2 y = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что система уравнений (10.3) равносильна следующей:

$$(10.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 x + p_2 y = 0, \\ f' + t f'' = 0, \end{array} \right.$$

$$(10.5)$$

где  $t=x^2+y^2$ . Положим  $g(t)=tf'(t)$ . Тогда  $g'=f'+tf''$  и уравнение (10.5) эквивалентно  $g'=0$ . Из условий (7.1) для функции  $g$  имеем:

$$g(0)=0, \quad g(t)=\frac{a+o(1)}{t} \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

При отображении момента множество критических точек (10.3) переходит в набор парабол  $g(c)H=F^2$ , где  $c$  - критическая точка функции  $g$ . Соответствующую бифуркационную диаграмму см. на Рис.26.

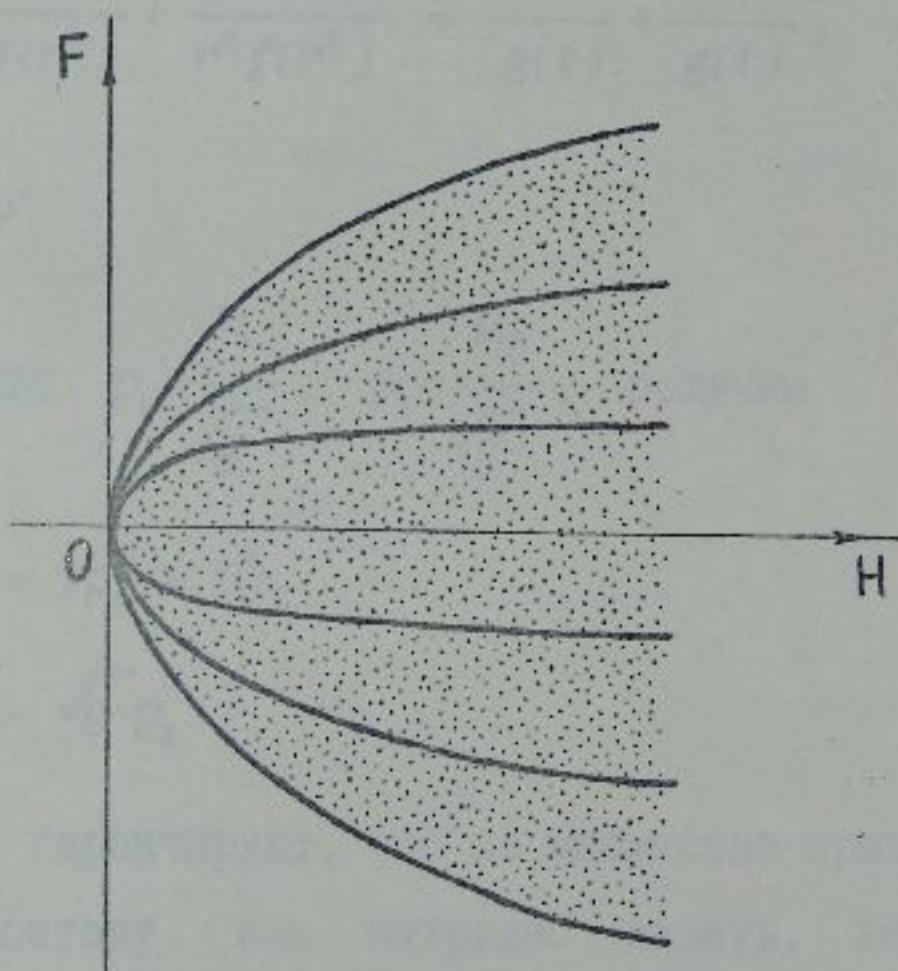


Рис. 26

Критические окружности задаются следующей системой уравнений:

$$(10.6) \quad \begin{cases} p_1^2 + p_2^2 = h, \\ x^2 + y^2 = c, \\ p_1 x + p_2 y = 0. \end{cases}$$

Для доказательства боттовости интеграла  $F$  удобно перейти к полярным координатам:  $x=r\cos\varphi$ ,  $y=r\sin\varphi$ . Тогда для метрики  $ds^2$  имеем  $ds^2 = f(r^2)(dr^2 + r^2 d\varphi^2)$ , а гамильтониан  $H$  и дополнительный интеграл  $F$  записутся в виде:

$$\begin{cases} H = \frac{p_r^2}{f(r^2)} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 f(r^2)} = \frac{tp_r^2}{g(t)} + \frac{p_\varphi^2}{g(t)}, \\ F = p_\varphi. \end{cases}$$

Производя замену  $p_r = \frac{p_r}{\sqrt{g}}$ ,  $p_\varphi = \frac{p_\varphi}{\sqrt{g}}$ , получим

$$(10.7) \quad \begin{cases} H = tp_r^2 + p_\varphi^2, \\ F = \sqrt{g} p_\varphi. \end{cases}$$

Формулы (10.6) гарантируют, что на множестве критических точек  $0 < t < \infty$ . Поэтому, как нетрудно видеть, векторы

$$grad H = \left\{ 2tp_r, 2p_\varphi, p_r^2, 0 \right\} \text{ и } grad F = \left\{ 0, \sqrt{g}, \frac{g' p_\varphi}{2\sqrt{g}}, 0 \right\}$$

зависимы, если и только если  $p_r = 0$ ,  $g'(t) = 0$ . В качестве базиса

касательного пространства  $T_q Q^3$  в критической точке  $q \in Q^3 \cong RP^3$  можно взять, например, следующие три вектора, ортогональные  $\text{grad } H|_q = \{0, 2p_z, 0, 0\}$ :

$$e_1 = \{0, 0, 0, 1\}, e_2 = \{0, 0, 1, 0\}, e_3 = \{1, 0, 0, 0\}.$$

Тогда, проектируя гессиан

$$G = \begin{bmatrix} -\frac{t\sqrt{g}}{p_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{g}}{p_z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g''p_z}{2\sqrt{g}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

на линейную оболочку векторов  $e_1, e_2, e_3$ , имеем:

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g''p_z}{2\sqrt{g}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{t\sqrt{g}}{p_z} \end{bmatrix},$$

откуда собственные числа  $\lambda_1 = \frac{g''p_z}{2\sqrt{g}}, \lambda_2 = -\frac{t\sqrt{g}}{p_z}$ . Теперь ясно,

что необходимым и достаточным условием боттовости дополнительного интеграла  $F$  является требование  $g''(t) \neq 0$  (при  $g'(t) = 0$ ), т.е. функция  $g(t)$  обязана быть функцией Морса. Для знаков  $\lambda_1, \lambda_2$  имеются следующие возможности:

- 1)  $p_z > 0$  (т.е.  $F > 0$ ), тогда  $\lambda_2 < 0$ , далее,

а) если  $g'' < 0$  (локальный максимум  $g(t)$ ), то  $\lambda_1 < 0$ , т.е.

$ind=2$  – максимальная критическая окружность,

б) если  $g'' > 0$  (локальный минимум  $g(t)$ ), то  $\lambda_1 > 0$ , т.е.

$ind=1$  – седловая критическая окружность;

2)  $p_2 < 0$  (т.е.  $F < 0$ ), тогда  $\lambda_2 > 0$ , далее,

а) если  $g'' > 0$ , то  $\lambda_1 < 0$ ,  $ind=1$  – седло,

б) если  $g'' < 0$ , то  $\lambda_1 > 0$ ,  $ind=0$  – минимальная критическая окружность.

Для построения меченої молекулы  $W^*(f)$  вернемся к декартовым координатам  $(x, y)$  и соответствующим импульсам  $(p_1, p_2)$ ,

$$p_1 = \frac{\tilde{p}_1}{\sqrt{f}}, \quad p_2 = \frac{\tilde{p}_2}{\sqrt{f}} \quad (\text{соответствующие обозначения см. выше, в начале доказательства}).$$

Пусть  $H = p_1^2 + p_2^2 = h$ , тогда имеем:

$$\begin{aligned} F^2 &= f(p_2 x - p_1 y)^2 = f(p_1^2 + p_2^2)(x^2 + y^2) - f(p_1 x + p_2 y)^2 = \\ &= hg(t) - f(p_1 x + p_2 y)^2. \end{aligned}$$

При фиксированном  $t$  получаем неравенство:

$$-\sqrt{hg(t)} \leq F \leq \sqrt{hg(t)}$$

и функция  $F$  принимает все значения на  $[-\sqrt{hg(t)}, \sqrt{hg(t)}]$ .

При этом на торе  $\{p_1^2 + p_2^2 = h, x^2 + y^2 = t\}$  (не являющемся тором Лиувилля) имеется ровно одна окружность с  $F = -\sqrt{hg(t)}$ , одна

окружность с  $F = \sqrt{hg(t)}$  и для любого  $F_0 \in [-\sqrt{hg(t)}, \sqrt{hg(t)}]$

ровно две окружности с  $F = F_0$  (см. Рис. 27).

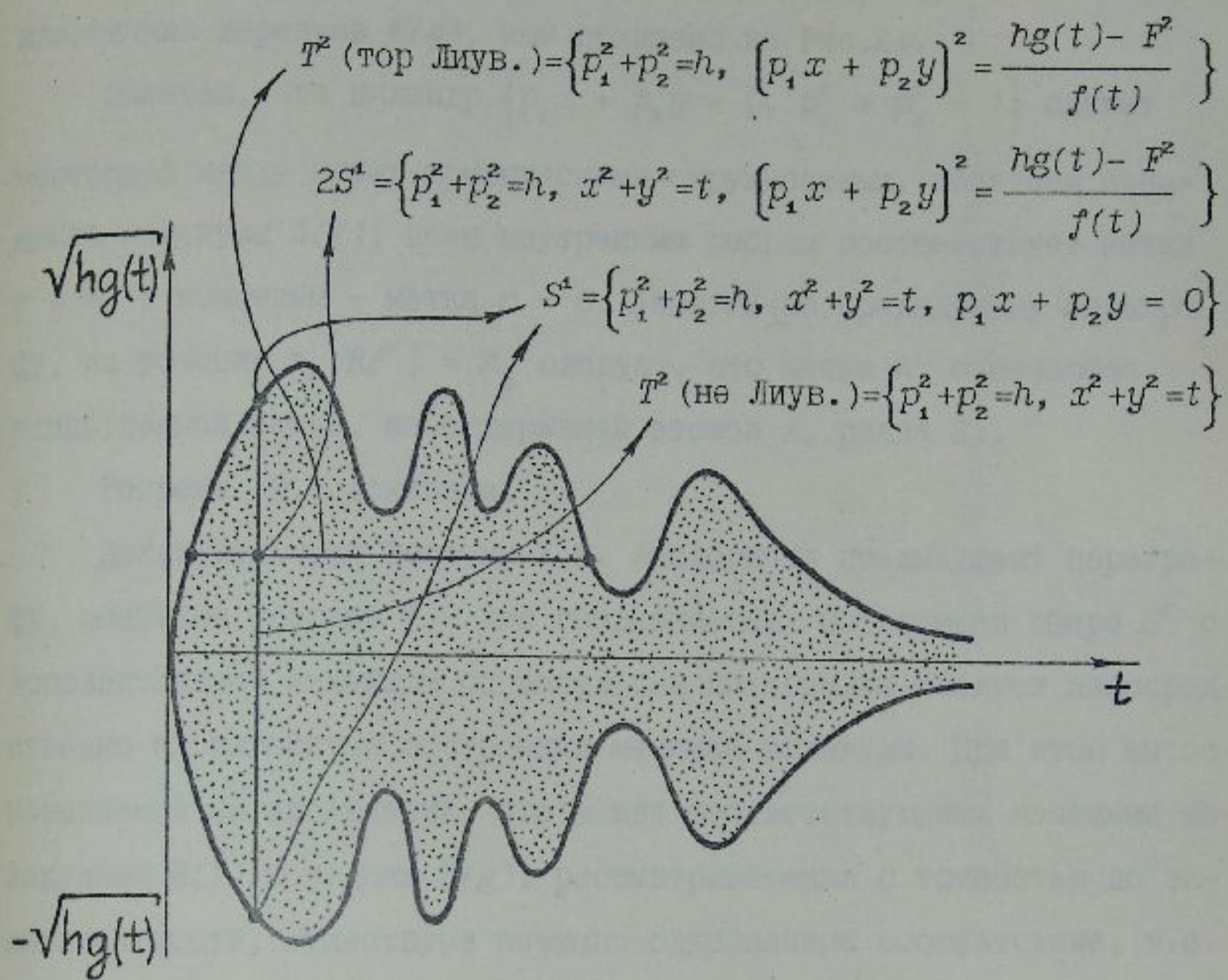


Рис. 27

Заметим, что при фиксированном значении  $F = F_0$  координата  $t$  принадлежит одному из отрезков допустимых значений, в соответствии с очевидным неравенством  $hg(t) \geq F^2$ . Теперь ясно, что молекула  $W(f)$  строится по графику функции  $\sqrt{hg(t)}$ , или, что то же самое, по графику функции  $g(t)$ , т.к. качественное поведение этих функций одинаково. Более точно, молекула  $W(f)$  зависит от распо-

ложения локально минимальных точек  $g(t)$  (которое в точности задается кодом  $S(g)$ ), причем является результатом склейки двух идентичных деревьев  $W(g)$ , как показано на Рис.24.

Замечая, что цилиндр  $\{p_1 x + p_2 y = 0, p_1^2 + p_2^2 = 1\}$  служит изотопией между всеми критическими окружностями, получаем оснащение молекулы  $W(f)$ : всем внутренним ребрам соответствует метка  $r = \infty$ , а концевым – метка  $r = 0$ . Аналогично предыдущему параграфу, из условия  $\pi_1(RP^3) = \mathbb{Z}_2$  следует, что метка  $n$ , отвечающая единственной семье, не содержащей атомов  $A$ , равна 2.

Теорема 10.1 доказана.

**Доказательство Теоремы 7.2.** Аналогично предыдущему параграфу, основная Теорема 7.2 для геодезических потоков на сфере  $S^2$  с дополнительным линейным по импульсам интегралом следует непосредственно из алгоритма построения меченой молекулы. При этом мы основываемся на наблюдении, что между соответствующими меченными молекулами  $W(f)$  и кодами  $S(g)$ , рассматриваемыми с точностью до эквивалентности, существует взаимно-однозначное соответствие, т.е. код  $S(g)$  является полным топологическим инвариантом рассматриваемых потоков. Теорема 7.2 доказана.

**§11. Сложность интегрируемых геодезических потоков на сфере  $S^2$ .**

**Теорема 11.1.** Интегрируемые геодезические потоки на сфере  $S^2$  с метрикой вида (7.1) и (7.2) заполняют на молекулярной таблице сложности следующую область:

$$1) \left\{ (m, n) = (2, 1) \text{ или } \frac{m}{2} + 2 \leq n \leq m-1, \text{ где } m \geq 6, m = 4k+2, n = 2l+1, k, l \in \mathbb{N} \right\} -$$

- эта область, отмеченная на Рис.28 белыми кружочками, отвечает метрикам вида (7.1);

$$2) \left\{ (m, n) = (6, 4) \text{ или } \frac{m}{2} + 3 \leq n \leq m-2, \text{ где } m \geq 6, m = 4k+2, n = 2l, k, l \in \mathbb{N} \right\} -$$

эта область, отмеченная на Рис.28 черными кружочками, отвечает метрикам вида (7.2).

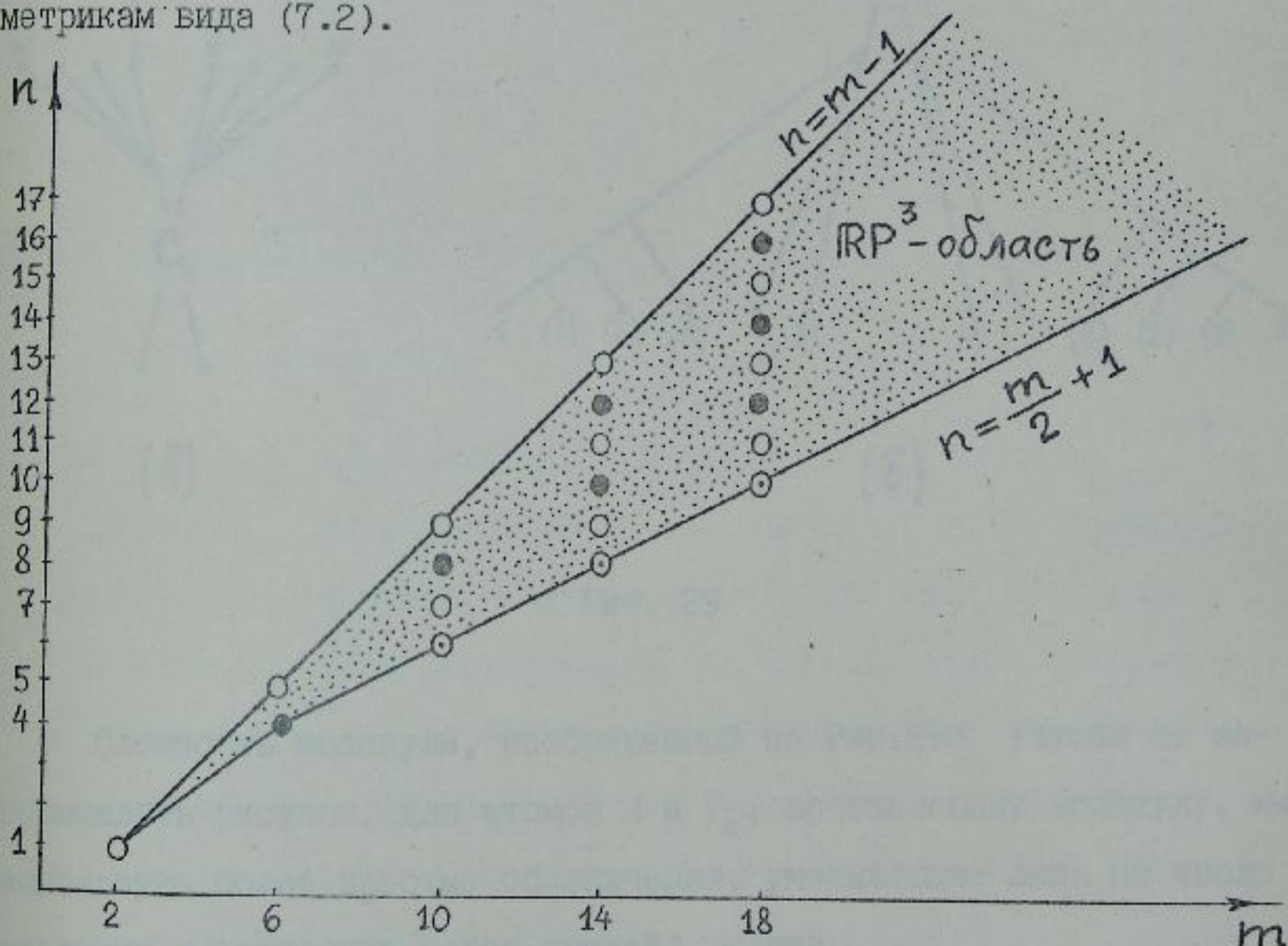


Рис. 28

**Доказательство Теоремы 11.1.** Посчитаем сначала сложность геодезических потоков с дополнительным квадратичным по импульсам интегралом, задаваемых метрикой вида (7.2). Простейшая система, молекула которой изображена на Рис.29а, очевидно, имеет сложность  $(m, n) = (6, 4)$ .

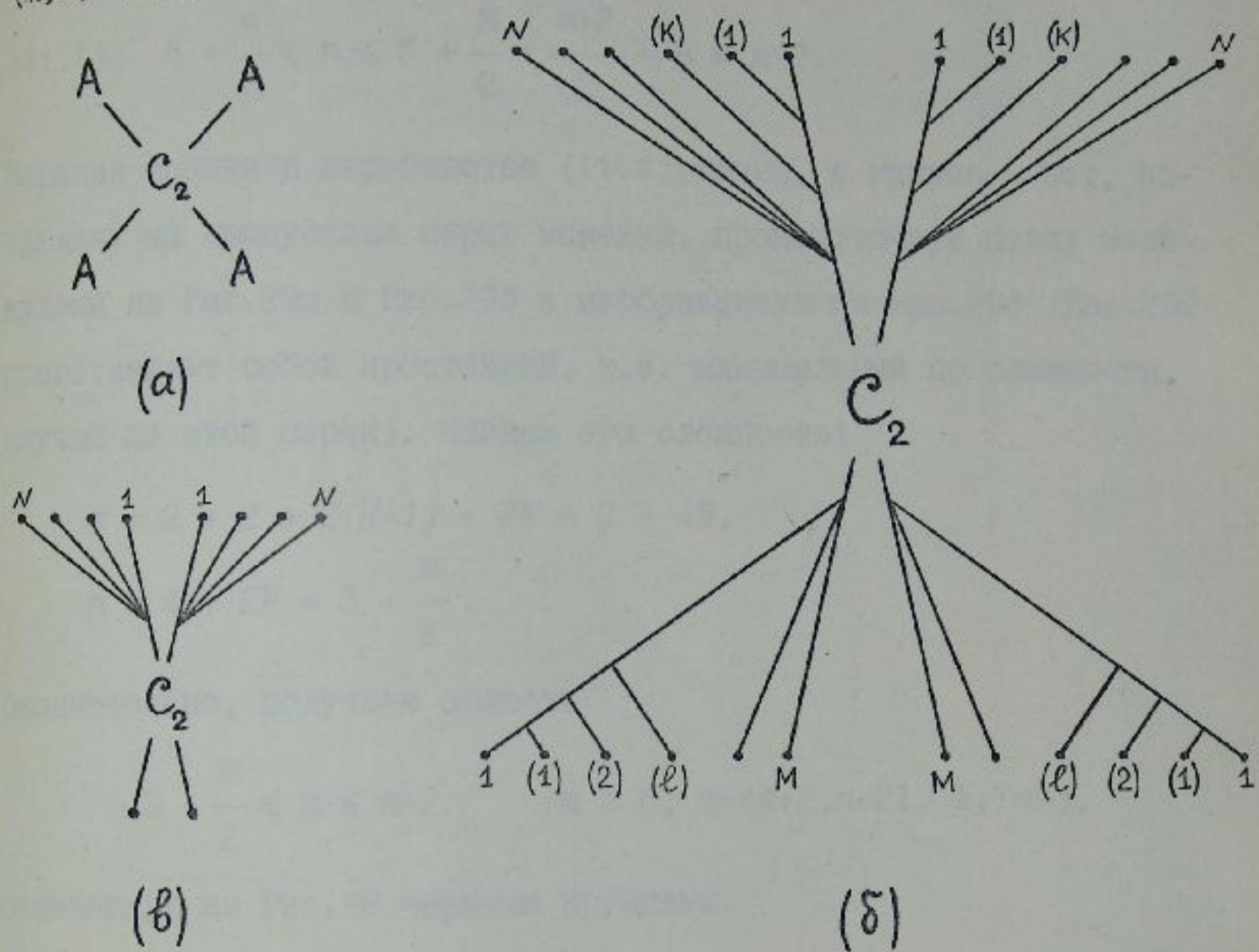


Рис. 29

Сложность молекулы, изображенной на Рис.29б (чтобы не загромождать рисунок, для атомов  $A$  и  $V_k$ , составляющих молекулу, мы используем более простые обозначения, указывающие лишь на число входящих и исходящих ребер-связей), равна

$$m = 2 + 2 \{ N + k + N - k - 1 + M + l + M - l - 1 \} = 4N + 4M - 2,$$

$$n = 4 + 2 \{ N + k + M + l \} = 5 + \frac{m}{2} + 2(k+l),$$

где  $0 \leq k \leq N-2$ ,  $0 \leq l \leq M-2$ , следовательно,

$$(11.1) \quad 5 + \frac{m}{2} \leq n \leq 5 + \frac{m}{2} + \frac{m+2}{2} - 8 = m-2.$$

Верхняя оценка в неравенстве (11.1) точна, а нижняя - нет, поскольку мы пропустили серию молекул, промежуточную между молекулами на Рис.29а и Рис.29б и изображенную на Рис.29в (Рис.29в представляет собой простейший, т.е. минимальный по сложности, случай из этой серии). Найдем его сложность:

$$m = 2 + 2 + 2(N-1) + 2N = 2 + 4N,$$

$$n = 4 + 2N = 3 + \frac{m}{2}.$$

Окончательно, получаем область

$$3 + \frac{m}{2} \leq n \leq m-2 \quad (m \geq 6, m=4k+2, n=2l, k, l \in \mathbb{N}),$$

отмеченную на Рис.28 черными кружками.

Вычислим теперь сложность геодезических потоков с линейным по импульсам интегралом, задаваемых метрикой вида (7.1). Для молекулы  $W$  общего вида, изображенной на Рис.30 (здесь имеется в виду общий вид молекулы с точки зрения сложности; легко видеть, что в результате некоторой перестановки ребер произвольную молекулу можно заменить молекулой той же сложности  $(m,n)$ , но имеющей вид, изображенный на Рис.30), имеем:

$$m = 2(2l + 2k - 1) = 4(l+k) - 2,$$

$$n = 2(l + 2k - 1) = 2(l+k) + 2k - 1 = \frac{m}{2} + 2k, \quad k=1, \dots, N-1,$$

где  $N=k+l$ . Следовательно,

$$\frac{m}{2} + 2 \leq n \leq m-1,$$

соответствующая область отмечена на Рис.28 белыми кружками.

Теорема 11.1 доказана.

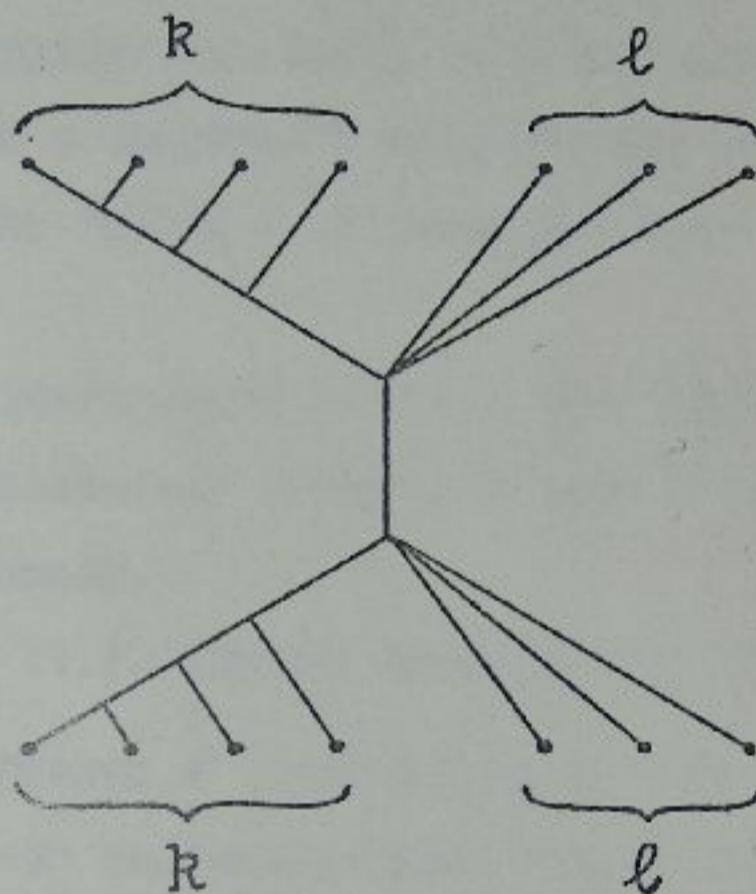


Рис. 30

Заметим, что для геодезических потоков на двумерной сфере  $S^2$  изоэнергетическая поверхность  $Q^3 = \{H=const\}$  диффеоморфна  $RP^3$ . Все возможные гамильтоновы системы на изоэнергетической поверхности  $Q^3 = RP^3$  с точки зрения занимаемой ими "физической зоны"

(т.е. области на молекулярной таблице Фоменко) были полностью изучены Нгуен Тьен Зунгом и А.Т.Фоменко в [37,38]. Как видно из Рис.28, "физическая зона" наших потоков представляет собой "сечочное подмножество" в  $RP^3$ -области.

**Гипотеза (А.Т.Фоменко).** Пусть дана произвольная метрика  $\{g_{ij}\}$  на сфере  $S^2$ , геодезический поток которой интегрируем. Тогда отвечающее ей место на молекулярной таблице сложности находится внутри уже известной нам области, отмеченной на Рис.28 белыми и черными кружочками. Иначе: с точки зрения сложности геодезические потоки с линейным и квадратичным дополнительным интегралом исчерпывают "почти все" интегрируемые геодезические потоки на сфере  $S^2$ .

**Замечание.** Аналогичная гипотеза была сформулирована А.Т.Фоменко и для геодезических потоков на торе  $T^2$  и обсуждается в работах Е.Н.Селивановой.

**Определение 11.1.** Назовем интегрируемую метрику  $\{g_{ij}\}$  на двумерном многообразии  $M^2$  ориентируемой, если все седловые критические окружности соответствующей гамильтоновой системы имеют ориентируемые сепаратрисные диаграммы.

Оказывается, в классе ориентируемых метрик на сфере  $S^2$  гипотеза А.Т.Фоменко "почти верна", а именно, справедливо следующее утверждение.

**Предложение 11.2.** Для интегрируемого геодезического потока произвольной метрики  $\{g_{ij}\}$  на сфере  $S^2$  число критических окружностей  $m$  имеет вид  $m=4k+2$ .

**Следствие.** Интегрируемые геодезические потоки на сфере  $S^2$  образуют сеточное подмножество в  $RP^3$  – области, изображенное на Рис.28, где белые и черные кружки отвечают геодезическим потокам с линейным и квадратичным по импульсам дополнительным интегралом, а белые кружки с точкой соответствуют неизвестным пока (или не существующим вовсе) гамильтоновым системам.

**Доказательство Предложения 11.2.** Особенностью геодезических потоков риманова многообразия  $M$  является наличие инволюции  $r \rightarrow -r$  (здесь через  $r$  обозначен импульс), переводящей гамильтонову систему, а значит, и ее топологический инвариант (молекулу  $W$ ) в себя. Дело в том, что каждая геодезическая имеет две совершенно равноправные ориентации, другими словами, два направления движения. Очевидно, инволюция  $\sigma: r \rightarrow -r$  переводит устойчивые периодические траектории в устойчивые, ориентируемые седловые окружности – в ориентируемые седловые окружности, неориентируемые – в неориентируемые. Кроме того,  $\sigma$  действует на траекториях гамильтоновой системы без неподвижных точек. Если обозначить через  $m$  общее число критических окружностей, через  $a$  – число атомов  $A$  в молекуле, и через  $b$  – число звездочек (равное числу седловых окружностей с неориентируемой сепаратрисной диаграммой), то, вследствие наличия инволюции  $\sigma$ , имеем:  $m:2$ ,  $a:2$ ,  $b:2$ . Тогда из формулы  $a = \frac{m-b}{2} + 1$  для  $Q^3 \cong RP^3$ , доказанной В.В.Калашниковым в [39], при условии  $b=0$  (звездочек нет) имеем  $m=4k+2$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

Предложение 11.2 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фоменко А.Т. Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых систем и препятствия к интегрируемости// Изв. АН СССР. Серия матем. 1986. Т.50. С.1276-1307.
2. Фоменко А.Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю// Функциональный анализ и его приложения. 1988. Т.22. №4. С.38-51.
3. Фоменко А.Т. Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем// УМН. 1989. Т.44. №1. С.145-173.
4. Фоменко А.Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения // Изд-во Моск. ун-та, 1988.
5. Фоменко А.Т., Цишанг Х. О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем// Изв. АН СССР. Серия матем. 1988. Т.52. №2. С.378-407.
6. Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности// УМН. 1990. Т.45. №2. С.49-77.
7. Матвеев С.В., Фоменко А.Т. Теория типа Морса для интегрируемых гамильтоновых систем с ручными интегралами// Матем. заметки. 1988. Т.43. №5. С.663-671.
8. Смейл С. Топология и механика// УМН. 1972. Т.27. №2. С.77-133.
9. Мозер М. Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем// УМН. 1981. Т.36. №6. С.109-151.

10. Арнольд В.И. Математические методы классической механики// М.: Наука, 1989.
11. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики// Итоги науки и техники. ВINITI. Соврем. проблемы математики: Фундам. направления. 1985. Т.3. С.5-303.
12. Харламов М.П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела// Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
13. Переолов А.М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли// М.: Наука, 1990.
14. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела// М.: Изд-во МГУ, 1980.
15. Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// УМН. 1983. Т.38. №1. С.3-67.
16. Козлов В.В., Трещев Д.В. Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием// Изв. АН СССР. Серия матем. 1989. Т.53. №3.
17. Тода М. Теория нелинейных решеток// М.: Мир, 1984.
18. Hénon M. Integrals of the Toda Lattice// Phys. Rev. 1974. V.B9. P.1921-1923.
19. Flaschka H. The Toda Lattice.1.Existence of Integrals// Phys. Rev. 1974. B.9. P.1924-1925.
20. Манаков С.В. О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах// ЖЭТФ. 1974. Т.67. №2. С.543-555.

21. Bogoyavlensky O.I. On perturbations of the periodic Toda lattices// Commun. Math. Phys. 1976. Vol.51. P.201-209.
22. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астродинамике и газовой динамике// М.: Наука, 1980.
23. Olshanetsky M., Perelomov A. Explicit solutions of classical generalized Toda models// Invent. Math. 1979. Vol. 54. №3. P.261-269.
24. Kostant B. The solution of a generalized Toda lattice and representation theory// Adv. Math. 1979. Vol.34. P.195-338.
25. Adler M., van Moerbeke P. Kowalewski's Asymptotic Method, Kac-Moody Lie Algebras and Regularization// Commun. Math. Phys. 1982. Vol.83. P.83-106.
26. Sklyanin E.K. Boundary conditions for integrable quantum systems. Preprints// L.: LOMI, 1986.
27. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли// М.: Мир, 1972.
28. Кузнецов А.В. Построение инварианта алгебраического аналога периодической цепочки Тода// УМН. 1992. Т.47. №5. С.181-182.
29. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы// М.-Л.: ОГИЗ, 1941.
30. Колокольцов В.Н. Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом// Изв. АН СССР. Серия матем. 1982. Т.46. №6. С.994-1010.
31. Колокольцов В.Н. Новые примеры многообразий с замкнутыми геодезическими// Вестн. МГУ. Серия матем. мех. 1984. №4. С.80-82.

32. Колокольцов В.Н. Полиномиальные интегралы геодезических потоков на компактных поверхностях// Дисс. канд. физ.-матем. наук, Москва, 1984.
33. Шиффер М., Спенсер Д.К. Функционалы на конечных римановых поверхностях// М.: ИЛ, 1957.
34. Darboux G. Lecons sur la theorie generale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal// Paris. Gautier-Villar. 1891. Vol.3.
35. Levi-Civita T. Sulle trasformazioni della equazioni dinamiche// Annali di Mat. 2:24. 1896.
36. Селиванова Е.Н. Классификация геодезических потоков лиувиллевых метрик на двумерном торе с точностью до топологической эквивалентности// Матем. сб. 1992. Т.183. №4. С.69-86.
37. Нгуен Тьен Зунг, Фоменко А.Т. Топологическая классификация интегрируемых боттовских гамильтонианов на изоэнергетической трехмерной сфере// УМН. 1990. Т.45. №6. С.91-111.
38. Нгуен Тьен Зунг. Сложность интегрируемых гамильтоновых систем на заданном изоэнергетическом трехмерном подмногообразии// Матем. сб. 1992. Т.183. №4. С.87-117.
39. Kalashnikov V.V. Description of the Structure of Fomenko Invariants on the Boundary and inside Q-Domains, Estimates of their Number on the Lower Boundary for the Manifolds  $S^3$ ,  $RP^3$ ,  $S^4 \times S^2$ , and  $T^3$ // Advances in Soviet Mathematics. AMS. 1991. Vol.6. P.297-304.

40. Polyakova L.S. Topological invariants for some algebraic analogs of the Toda lattice// Advances in Soviet Mathematics. AMS. 1991. Vol.6. P.185-207.
41. Nguyen Tien Zung, Polyakova L.S. A topological classification of integrable geodesic flows on two-dimensional sphere with quadratic in momenta additional integral// J. of Non-linear Sciences. 1993. Vol.3. №1. P.85-108.
42. Нгуен Тьен Зунг, Полякова Л.С., Селиванова Е.Н. Топологическая классификация интегрируемых геодезических потоков на двумерных многообразиях// Функци. анализ и его прилож. 1993. Т.27. №3.