МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Плужников Андрей Иванович

УДК 519.3

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

01.01.04 - геометрия и топология

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор А.Т.Фоменко.

Москва - 1985

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Диссертация посвящена исследованию вариационных свойств гармонических отображений гладких римановых многообразий. Эти отображения относятся к классу решений многомерных вариационных задач и являются экстремалями функционала Дирихле. В последнее время значительно возрос интерес к изучению геометрических функционалов, среди которых важное место занимает функционал Дирихле. Полученные в этой области современного вариационного исчисления результаты нашли свое применение в топологии, теории дифференциальных уравнений, функциональном анализе и других областях математики. Примером плодотворного использования взаимодействия вариационных и топологических методов является монография А.Т.Фоменко [5]. Несомненный интерес многомерные функционалы представляют и в связи с прикладными вопросами, которые возникают в физических моделях, использующих вариационные принципы (см., например, обзор С.П.Новикова [I2]).

Класс гармонических отображений охватывает такие важные дифференциально-геометрические объекты, как гармонические функции, вполне геодезические отображения римановых многообразий (в частности - геодезические линии, параметризованные пропорционально длине дуги) и голоморфные отображения кэлеровых многообразий. Существует тесная связь функционала Дирихле с функционалом объема, обеспечивающая гармоничность локально минимальных (в смысле функционала объема) изометрических погружений. Гармонические отображения интересны с точки зрения построения теории квазилинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка, к которым относится система уравнений Эйлера-Лагранжа для функционала Дирихле. Важную роль функционал Дирихле играет в теории киральных полей. Обзор современного состояния гармонической теории и обширная библиография имеются в работах Дж.Иллса и Л.Лемэра [25,26] .

Для качественного исследования функционала Дирихле и различных приложений, связанных, например, с топологией функциональных пространств, важно иметь возможность априорного описания типа критических точек функционала. При этом особую роль играет класс гармонических отображений, реализующих глобальный минимум функционала Дирихле на своей компоненте связности пространства отображений, и более широкий класс устойчивых (в смысле функционала Дирихле) гармонических отображений. Вопрос о существовании (или отсутствии) таких отображений в данном функциональном пространстве актуален и является основной темой исследований в настоящей диссертации.

Прежде чем перейти к краткому изложению полученных результатов, сделаем несколько замечаний. Все рассматриваемые многообразия предполагаются конечномерными и гладкими (бесконечно-дифференцируемыми). При использовании ковариантного дифференцирования касательное расслоение τ_M риманова многообразия M всегда снабжается канонической связностью Леви-Чивита (симметрической и согласованной с метрикой). Для формального определения гармонических отображений мы используем систему уравнений Эйлера-Лагранжа для функционала Дирихле (см. § I). Этот функционал, называемый также функционалом энергии, определяется формулой

$$E(f) = \frac{1}{2}\int_M \|df\|^2 dv , \quad f \in C^\infty(M, N) ,$$

где M и N - римановы многообразия, dv - гладкая положительная мера на M , индуцированная римановой метрикой, а $\|df\|$ - поточечная норма Гильберта-Шмидта оператора df . Множество гармонических отображений $f \in C^\infty(M,N)$ с конечным интегралом Дирихле $E(f)$ совпадает с множеством экстремалей функционала E в классе гладких вариаций с компактным носителем, не пересекающимся с краем многообразия M (если он не пуст). Компактные многообразия без края называются замкнутыми. Если M замкнуто, то гармоничность f эквивалентна экстремальности f в классе всех гладких вариаций.

Первая глава диссертации посвящена кругу задач, связанных с вопросом о существовании устойчивых гармонических отображений. Напомним, что гармоническое отображение $f: M \to N$ римановых многообразий называется устойчивым, если положительно полуопределена форма второй вариации функционала Дирихле, вычисленная в "точке" $f \in C^\infty(M,N)$. Полученные в рамках общей эллиптической теории результаты М.И.Вишика [49] и С.Смейла [33] показывают, что любое гармоническое отображение реализует локальный минимум функционала Дирихле в классе вариаций с достаточно малым носителем. Отсюда вытекает необходимость рассмотрения "глобальных" вариаций, рассредоточенных по всему многообразию M. Непосредственно из формулы второй вариации функционала Дирихле (см. § I) видно, что все гармонические отображения $f: M \to N$ устойчивы, если M замкнуто, а двумерная кривизна N неположительна. С другой стороны, как показали Мазе [37] и Р.Т.Смит [36], тождественные отображения римановых многообразий, являющиеся простейшими после констант примерами гармонических отображений, далеко не всегда устойчивы. Леунг [45] и А.В.Тырин [20,48] получили целые серии римановых многообразий N таких, что любое непостоянное гармоническое отображение $f: M \to N$ неустойчиво (M связано и компактно). В настоящей работе исследована "двойственная" ситуация и

А.И.Пluжников

получен ряд серий однородных римановых многообразий M таких, что любого риманова многообразия N все непостоянные гармонические отображения $f: M \to N$ априори нестойчивы.

В первом параграфе диссертации приведены определения гармонических и вполне геодезических отображений, введен ряд необходимых нам вспомогательных понятий (средняя кривизна и вторая фундаментальная форма отображения, оператор Якоби и др.), выписаны известные формулы первой и второй вариаций функционала Дирихле. Там же доказана используемая в §§ 2 и 3 техническая теорема, связывающая формы второй вариации функционала Дирихле, соответствующие произвольному гармоническому отображению $f: M \to N$ и тождественному отображению id_M многообразия M.

Во втором параграфе, занимающем центральное место в первой главе диссертации, рассмотрен вопрос об априорной неустойчивости гармонических отображений $f \in C^\infty(M, N)$, где M - однородное риманово многообразие, т.е. риманово многообразие положительной размерности, обладающее транзитивно действующей группой изометрий. Как показывает следующая теорема, определяющую роль в этом вопросе играет неустойчивость тождественного отображения многообразия M.

<u>Теорема 2.I</u>. Пусть M - связное неприводимое компактное однородное риманово многообразие, причем тождественное отображение M неустойчиво. Тогда неустойчивы все непостоянные гармонические отображения $f: M \to N$ из M в произвольное гладкое риманово многообразие N.

Вариации f_t отображения f, уменьшающие при малых t значение интеграла Дирихле, в теореме 2.I имеют вид $f \circ \varphi_t$, где φ_t - такая однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия M, что $E(\varphi_t) < E(\varphi_0)$ при достаточно малом

$|t|\neq 0$. Отметим, что неприводимые однородные римановы многообразия допускают полную классификацию (О.В.Мантуров [21]).

Теорема 2.I позволяет указать ряд пространств $C^\infty(M,N)$, в которых все критические "точки" функционала Дирихле - "седловые", кроме констант (отображений в точку).

Теорема 2.2. Пусть M - связное компактное неприводимое неособое симметрическое пространство, снабженное стандартной римановой метрикой. Тогда для любого гладкого риманова многообразия N в пространстве $C^\infty(M,N)$ нет ни одного непостоянного устойчивого гармонического отображения, если и только если M принадлежит одной из следующих серий (а) - (д).

(а) Стандартные сферы S^n размерности $n \geqslant 4$.

(б) Многообразия Грассмана над телом кватернионов $Sp(p+q)/(Sp(p)\times Sp(q))$.

(в) Пространства $SU(2m)/Sp(m)$, соответствующие стандартному вложению подгруппы $Sp(m)$ в $SU(2m)$, $m \geqslant 2$.

(г) Специальные унитарные группы $SU(n)$, $n \geqslant 2$.

(д) Симплектические группы $Sp(n)$.

Замечание. Сфера $S^3 = SU(2)$ отнесена к серии (г) как группа Ли.

Неустойчивость всех непостоянных гармонических отображений $f: S^n \to N$ ($n \geqslant 3$) ранее доказал Ксин [40].

Доказательство теоремы 2.2 основано на теореме 2.I и результатах Р.Т.Смита [36] и А.В.Тырина [20,48], решивших вопрос о неустойчивости тождественных отображений односвязных компактных неприводимых неособых симметрических пространств типа I и II соответственно.

Укажем примеры гармонических отображений симметрических пространств, которые в силу теоремы 2.2 оказываются неустойчивы-

А.В. Тыршину принадлежит также следующий результат. Пусть $M = G/H$ — компактное однородное неприводимое риманово многообразие с G-инвариантной метрикой такое, что его тождественное отображение неустойчиво. Тогда неустойчивы все непостоянные гармонические гладкие отображения $f: N \to M$ из произвольного связного компактного риманова многообразия N.

ми. Отображения вложения картановских моделей симметрических пространств (а), (б) и (в). Нетривиальные гомоморфизмы групп Ли (г), (д) в произвольную группу Ли с биинвариантной римановой метрикой, построенные А.Т.Фоменко [5,II] вполне геодезические отображения сфер (размерности больше двух) в симметрические пространства. Проекции расслоений $G \to G/H$, соответствующие однородным римановым многообразиям G/H с группами движений (г), (д). Расслоения Хопфа $S^{2n-1} \to S^n$ $(n=2,4,8)$ и полученные в работе Р.Т.Смита [35] гармонические реализации нетривиальных элементов гомотопических групп $\pi_n(S^n)$ $(3 \le n \le 7)$, $\pi_{m+1}(S^m)$ $(3 \le m \le 8)$.

Приведем еще результат, демонстрирующий возможность в отдельных случаях в топологических терминах выделять классы тех многообразий, все нетривиальные гармонические отображения которых неустойчивы. Напомним, что связное многообразие называется двухсвязным, если его первая и вторая гомотопические группы тривиальны.

Теорема 2.3. Все многообразия, перечисленные в теореме 2.2, двухсвязны. Связное компактное неприводимое неособое симметрическое пространство M типа I (т.е. не являющееся группой) тогда и только тогда двухсвязно, когда неустойчивы все непостоянные гармонические отображения $f: M \to N$ в произвольное гладкое риманово многообразие N .

Третий параграф диссертации посвящен более детальному исследованию гармонических отображений сфер. Напомним, что индексом $ind(f)$ гармонического отображения $f: M \to N$ римановых многообразий называется размерность максимального подпространства в пространстве векторных полей вдоль f , на котором отрицательно определена форма второй вариации функционала Дирих-

 №2

ле E , вычисленная в "точке" f . Если M замкнуто (компактно и без края), то индекс любого гармонического отображения $f: M \to N$ конечен. Положительность индекса отображения эквивалентна его неустойчивости.

248.4

<u>Теорма 3.I</u>. Пусть $f: S^n \to N$ - непостоянное гармоническое отображение стандартно вложенной в $\mathbb{R}^{n+1}$ сферы положительного радиуса и размерности $n \geqslant 3$ в произвольное гладкое риманово многообразие N . Тогда $ind(f) \geqslant n+1$. Соответствующее пространство векторных полей вдоль f , генерирующих локально уменьшающие значение E вариации отображения f , порождено полями вида $df(grad\,\theta)$, где θ - ограничение на S^n произвольной ненулевой линейной функции в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Eells, Lemaire

Ослабленный вариант сформулированной теоремы получен в [26] : $ind(f) \geqslant k+1$, где k - максимальный ранг отображения f .

Отметим, что градиент ограничения на S^n ненулевой линейной функции в $\mathbb{R}^{n+1}$ порождает однопараметрическую группу φ_t конформных диффеоморфизмов сферы. Вариация f_t отображения f , уменьшающая интеграл Дирихле при малых t , имеет вид $f_t = f \circ \varphi_t$.

Плужникова

Полученная оценка на индекс гармонического отображения сферы не может быть улучшена в общем случае в силу равенства $ind(id_S) = n+1$, выполненного для тождественного отображения id_S сферы размерности $n \geqslant 3$ (Мазе [37] , Р.Т.Смит [36]).

456 394 502

Далее А.И.Плужников

Во второй главе настоящей диссертации рассмотрен ряд вопросов, связанных с задачей минимизации функционала Дирихле:

$$E(f) \to \inf, \quad f \in \mathcal{F} \subset C^\infty(M,N).$$

Решениями этой задачи являются гладкие отображения $f \in \mathcal{F}$ римановых многообразий, реализующие минимум E на подмножестве $\mathcal{F}$ пространства отображений. Предположим, что M компактно и фиксируем некоторое отображение $\psi \in C^\infty(M, N)$. Следуя А.Т.Фоменко [5,47], выделим две основных конкретизации указанной задачи.

I. Задача (минимальной) реализации: в предположении $\partial M = \emptyset$ требуется минимизировать E в гомотопическом классе $\mathcal{F} = [\psi]$, отождествляемом с соответствующей компонентой связности пространства $C^\infty(M, N)$.

2. Задача (минимальной) "заклейки" или задача Дирихле: в предположении $\partial M \neq \emptyset$ минимум E ищется на множестве

$$\mathcal{F} = C^\infty_\psi(M, N) = \{ f \in C^\infty(M, N) : f|\partial M = \psi|\partial M \}$$

(абсолютная версия) или на содержащей отображение ψ компоненте связности пространства $C^\infty_\psi(M, N)$ (относительная версия).

Обе задачи глубоко нетривиальны и имеют богатую историю. Пусть N замкнуто (компактно и без края). Классическими результатами вариационного исчисления, восходящими к работам Адамара, Картана и Гильберта, являются утверждения о разрешимости этих задач в случае $\dim M = 1$ (доказательство может быть основано на теореме Хопфа и Ринова [30] "о кратчайшей", решающей абсолютную версию задачи Дирихле; современное решение задачи реализации методом "наискорейшего спуска" содержится, например, в работах С.И.Альбера [I5] и В.Клингенберга [9]). Задача реализации и обе версии задачи "заклейки" также имеют решения, если (двумерная) кривизна N неположительна (С.И.Альбер [I4, I5], Дж.Иллс и Дж.Сэмпсон [27], Р.С.Гамильтон [41]). Решая двумерную задачу Плато, Морри [29] показал, что абсолютная версия задачи Дирихле разрешима в размерности $\dim M = 2$. А.Т.Фоменко [10] в явном виде построил гомеоморфное $U(m)$ семейство вполне геодезических отображений двумерного диска $\mathcal{D}^2$ (метрика евклидова) в группу Ли $SU(2m)$ ($m \geqslant 1$), которое тесно связано с унитарной периодичностью Ботта и совпадает с множеством минимумов E в пространстве $C^\infty_\psi(\mathcal{D}^2, SU(2m))$, порожденном геодезическим вложением окружности $\psi | \partial\mathcal{D}^2$, продолжающимся до мономорфизма $SU(2) \to SU(2m)$. Сравнительно недавно доказана разрешимость двумерной задачи реализации ($\dim M = 2$) при дополнительном предположении $\pi_2(N) = 0$ (Сакс и Уленбек [39], Лемэр [31]). При этом Сакс и Уленбек доказали, что нетривиальность $\pi_2(N)$ влечет существование хотя бы одного непостоянного гармонического отображения $f: S^2 \to N$, глобально минимального в своем гомотопическом классе. Следующий важный результат получили Гильдебранд, Каул и Видман [42]. Обозначим через $\mathcal{D}(\tau)$ геодезический шар в N радиуса $\tau > 0$, лежащий в нормальной окрестности любой из своих точек (нормальной окрестностью точки называется любая область определения нормальной системы координат с центром в этой точке). Пусть $\psi(\partial M) \subset \mathcal{D}(\tau)$ и $\tau < \pi / 2\sqrt{k}$, где константа $k > 0$ мажорирует функцию двумерной кривизны на N. Тогда в $C^\infty_\psi(M, N)$ существует абсолютно минимальное гармоническое отображение f, причем $f(M) \subset \mathcal{D}(\tau)$. Примерами решений задачи реализации являются голоморфные отображения замкнутых кэлеровых многообразий (Лихнерович [38]).

В настоящей работе доказано, что задача минимальной реализации в $C^\infty(M, N)$ не имеет нетривиальных решений, если хотя бы одно из замкнутых многообразий M и N двухсвязно, т.е. имеет тривиальные первую и вторую гомотопические группы.

Изложенные ниже результаты показывают, что непостоянные минимальные (в своем гомотопическом классе) гармонические отображения существуют лишь между теми связными замкнутыми римановыми многообразиями, у которых хотя бы одна из первых двух гомотопических групп нетривиальна. Как отмечает А.Т.Фоменко [6], подобные факты указывают на глубокие различия между функционалом Дирихле и родственным ему функционалом объема.

Необходимо отметить отсутствие в литературе примеров пространств $C^{\infty}_{\psi}(M, N)$, не содержащих абсолютно минимальных гармонических отображений. Известны ситуации (Лемэр [3I], Карчер и Вуд [43]), в которых условие $\psi | \partial M = const$ влечет постоянство любого гармонического отображения $f: M \to N$. В этих условиях относительная версия задачи минимальной "заклейки" не имеет нетривиальных решений.

В рамках задачи минимальной реализации первый негативный результат получили Дж.Иллс и Дж.Сэмпсон [27]. Они доказали, что $\inf E = 0$ в любом гомотопическом классе гладких отображений стандартной сферы S^n в себя при $n \geq 3$ (через $\inf E$ мы обозначаем точную нижнюю границу множества значений функционала Дирихле на указываемом в тексте подмножестве пространства отображений). Будем называть гомотопический класс (или соответствующую компоненту связности пространства $C^{\infty}(M, N)$) нетривиальным, если он не содержит локально постоянных отображений. Поскольку $E(f) = 0$ лишь для локально постоянных отображений, задача минимальной реализации неразрешима в тех нетривиальных гомотопических классах, на которых $\inf E = 0$. Обозначим через $[id_M]$ гомотопический класс тождественного отображения риманова многообразия M и положим

$$E(M) = \inf \{ E(\varphi) \mid \varphi \in [id_M] \}.$$

Пусть M компактно и $E(M)=0$. Тогда, как показали Иллс и Лемэр [26], во-первых, равенство $E(M)=0$ остается в силе при замене римановой метрики на M и, во-вторых, для любых римановых многообразий N и N' (N' компактно) $\inf E = 0$ во всех гомотопических классах гладких отображений $M \to N$ и в тех гомотопических классах гладких отображений $N' \to M$, которые содержат римановы субмерсии. Коисо [34] поставил задачу описания множества замкнутых многообразий M таких, что $E(M)=0$ (при произвольном выборе римановой метрики). Как показал недавно Мин-Оо (результат анонсирован в Eells, Lemaire) [26]), кроме сфер S^n ($n \geq 3$), это множество содержит все односвязные компактные группы Ли.

Обзор результатов второй главы настоящей диссертации начнем с шестого параграфа, т.к. четвертый и пятый параграфы носят вспомогательный характер и содержат, в основном, технические утверждения. Следующая теорема в топологических терминах решает задачу описания класса замкнутых (компактных и без края) римановых многообразий M, удовлетворяющих равенству $E(M)=0$.

<u>Теорема 6.I</u>. Пусть M – замкнутое гладкое риманово многообразие. Тогда $E(M)=0$, если и только если каждая компонента связности многообразия M двухсвязна, т.е. ее первая и вторая гомотопические группы тривиальны.

Доказательство прямого утверждения теоремы 6.I основано на результатах пятого параграфа настоящей работы. Обратное утверждение доказывается с использованием приведенных выше известных фактов о минимальной реализации элементов множеств $[S^1, M]$ и $[S^2, M]$.

Класс многообразий, обладающих (для любой римановой метрики на них) гладкими отображениями $\varphi \in [id_M]$ со сколь угодно малым интегралом Дирихле $E(\varphi)$ оказался весьма широким. В соответствии с теоремой 24.5.7 6.I, кроме сфер размерности $\geqslant 3$ и односвязных компактных групп Ли, сюда относятся, например, многообразия Штифеля и Грассмана над телом кватернионов, симметрические пространства из серии (в) теоремы 24.5.4 2.2, прямые произведения и несвязные суммы указанных многообразий.

Из теоремы 24.5.5 6.I следует, что задача минимальной реализации неразрешима в $[id_M]$, если связное замкнутое риманово многообразие M положительной размерности двухсвязно. С другой стороны, из теоремы 24.5.5 6.I извлекается

<u>Следствие 6.I</u>. 24.6.1 Если хотя бы одна из гомотопических групп $\pi_1(M)$ и $\pi_2(M)$ связаного замкнутого гладкого многообразия M нетривиальна, то $E(M) > 0$ для любой римановой метрики на M.

Известно, что само тождественное отображение является решением задачи минимальной реализации в $[id_M]$, если замкнутое риманово многообразие M имеет неположительную кривизну (С.И.Альбер [I4,I5], Хартман [44]) или кэлерово (Лихнерович [38]). В обоих случаях выполнено сформулированное в следствии 24.5.2 6.I условие "недвухсвязности" ($\dim M \geqslant 1$).

В классе компактных симметрических пространств типа I (т.е. не являющихся группами Ли) обнаруживается тесная связь вопросов о существовании глобально минимальных и устойчивых гармонических отображений. Непосредственно из теорем 24.6.1, 24.6.3 2.I, 2.3 и 6.I 24.6.5 извлекается

<u>Следствие 6.2</u>. 24.6.2 Пусть M - произвольное связное компактное неприводимое неособое симметрическое пространство типа I, снабженное стандартной римановой метрикой. Тогда

(I) все непостоянные гармонические отображения из

M в произвольное гладкое риманово многообразие неустойчивы, если и только если $E(M) = 0$.

(2) тождественное отображение id_M устойчиво, если и только если $E(M) > 0$.

С другой стороны, спинорные группы $Spin(n)$ при $n \geqslant 7$ (метрика стандартная) являются примерами римановых многообразий с устойчивым тождественным отображением и таких, что $\inf E = 0$ в гомотопическом классе этого отображения (в соответствии с теоремой 6.1). 24.5.5

Плужникова

Следующая наша теорема демонстрирует важность роли гомотопического класса тождественного отображения в задаче минимизации функционала Дирихле и является усилением сформулированного выше результата Иллса и Лемэра [26], т.к. не содержит дополнительного требования наличия в гомотопическом классе римановой субмерсии.

24.6.6

Теорема 6.2. Пусть M - компактное гладкое риманово многообразие. Тогда следующие три утверждения эквивалентны.

(а) $E(M) = 0$.

(б) $\inf E = 0$ во всех гомотопических классах из $[M, N]$ для произвольного гладкого риманова многообразия N.

(в) $\inf E = 0$ во всех гомотопических классах из $[N', M]$ для произвольного компактного гладкого риманова многообразия N'.

24.6.5

Учитывая теорему 6.1, получаем

24.6.3

Следствие 6.3. Пусть M - замкнутое связное двухсвязное гладкое многообразие. Тогда в любой римановой метрике на M выполнены утверждения (б) и (в) теоремы 6.2. 24.6.8

Отметим, что равенство $\inf E = 0$, выполненное в некотором гомотопическом классе отображений компактных римановых многообразий, сохраняется при замене римановых метрик на этих многообразиях.

Доказательство теоремы 6.2 основано на рассмотрении композиций $f\circ\varphi_i$ и $\varphi_i\circ f'$, где f и f' – представители гомотопических классов отображений из M в N и из N' в M соответственно, $\varphi_i\in[id_M]$ $(i=1,2,\dots)$ и $E(\varphi_i)\to 0$ при $i\to\infty$.

Рассмотрим связное замкнутое риманово многообразие M и произвольный нетривиальный гомотопический класс α, принадлежащий $[M,N]$ или $[N',M]$ (в обозначениях теоремы 6.2). Построим последовательность $f_i\in\alpha$ $(i=1,2,\dots)$ такую, что $E(f_i)\to\inf\limits_{\alpha}E$ при $i\to\infty$. Если M двухсвязно, то в силу следствия 6.3 эта последовательность не может иметь предела в пространстве гладких отображений (как мы увидим ниже, последовательности такого рода сходятся в соответствующих пространствах Соболева к локально постоянным отображениям). Таким образом, нетривиальность хотя бы одной из гомотопических групп $\pi_1(M)$ и $\pi_2(M)$ является необходимым топологическим условием существования непостоянных глобально минимальных гармонических отображений в пространствах $C^\infty(M,N)$ и $C^\infty(N',M)$.

Следствие 6.4. Пусть M и N – произвольные связные компактные гладкие римановы многообразия и $f\in C^\infty(M,N)$ – глобально минимальное (в своем гомотопическом классе) гармоническое отображение. Тогда $f=const$ (отображение в точку), если хотя бы одно из многообразий M и N двухсвязно и не имеет края.

Этот результат свидетельствует об ограниченности области применимости "минимизирующих" методов типа "наискорейшего спуска" для построения непостоянных гармонических отображений из-за присутствия нетривиальных гомотопических классов, в которых минимум функционала энергии заведомо не достигается. Особую важность приобретает изучение и развитие методов, доставляющих неминимальные гармонические отображения. Этот вопрос выходит за рамки настоящего исследования, и мы ограничимся указанием, например, на конструктивные методы построения гармони-

125 157 395

ческих отображений сфер (А.Т.Фоменко [II] , Р.Т. Смит [35]) и интенсивно развиваемую в последние годы теорию гармонических

Eells, Wood, Erdem 461, 462

отображений римановых поверхностей (см., например, [28,46]).

24.6.5 24.6.6

Используя теоремы 6.I и 6.2, можно указать ряд ситуаций, в которых отсутствие в данном гомотопическом классе глобально минимальных гармонических отображений сочетается с отделенностью от нуля значений функционала энергии. Как отметил Д.В.Аносов,

24.6.3

из следствия 6.3 извлекается недостижимость $\inf E$ в классе тождественного отображения многообразия $S^1 \times S^n$ ($n \geqslant 3$),

24.5.1

хотя $E(S^1 \times S^n) > 0$ (см.следствие 6.I). Разработка этого наблюдения привела нас к следующим утверждениям.

24.6.7

<u>Теорема 6.3</u>. Рассмотрим компактные связные гладкие римановы многообразия M , N , Q и обозначим через π_N и π_Q канонические проекции риманова прямого произведения $N \times Q$ на первый и второй сомножители соответственно. Пусть Q двухсвязно и $\partial Q = \emptyset$. Тогда

$$\inf_{[F]} E = \inf_{[\pi_N \circ F]} E$$

для любого $F \in C^\infty(M, N \times Q)$. При этом $\inf E$ на $[F]$ не достигается, если гомотопический класс $[\pi_Q \circ F]$ нетривиален.

24.6.5 24.5.7

<u>Следствие 6.5</u>. Пусть выполнены условия теоремы 6.3, $\partial M = \partial N = \emptyset$ и двумерная кривизна N неположительна. Предположим, что

оба отображения $\pi_N \circ F$ и $\pi_Q \circ F$ гомотопически нетривиальны. Тогда $\inf E$ положителен в классе $[F]$, но не достигается ни на одном гладком отображении из $[F]$.

Теорема 6.4. Рассмотрим компактные связные гладкие римановы многообразия M, N, P, Q и произвольные гладкие отображения $f: M \to N$ и $\varphi: P \to Q$. Обозначим через $f \times \varphi$ соответствующее индуцированное отображение из $M \times P$ в $N \times Q$. Пусть хотя бы одно из многообразий P и Q двухсвязно и не имеет края. Тогда

$$\inf_{[f \times \varphi]} E = vol(P) \cdot \inf_{[f]} E ,$$

где $vol(P)$ - объем многообразия P (если $\dim P = 0$, то положим $vol(P) = 1$). При этом $\inf E$ на $[f \times \varphi]$ не достигается, если гомотопический класс $[\varphi]$ нетривиален.

Следствие 6.6. Пусть выполнены условия теоремы 6.4 и в каждой компоненте связности пространства $C^\infty(M, N)$ содержится глобально минимальное гармоническое отображение. Предположим, что оба отображения f и φ гомотопически нетривиальны. Тогда $\inf E > 0$ на $[f \times \varphi]$, но не достигается ни на одном гладком отображении из этого гомотопического класса.

Ряд гармонических (неминимальных) отображений вида $f \times \varphi$ построен в [32]. Сопоставление следствия 6.6 с приведенными выше известными результатами о минимальной реализации показывает, что гомотопические классы отображений из $M \times P$ в $N \times Q$ с недостигаемым $\inf E > 0$ возникают в следующих ситуациях (M и N замкнуты, $C^\infty(P, Q)$ несвязно): (I) $M = S^1$, $\pi_1(N) \neq 0$, (2) $\dim M = 2$, $\pi_1(N) \neq 0$, $\pi_2(N) = 0$, (3) $\pi_1(M) \neq 0$, кривизна N неположительна. Например, можно взять такое сочетание замкнутых многообразий: $M = S^1$, $P = S^m (m \geq 3)$, $\pi_1(N) \neq 0$, $\pi_m(Q) \neq 0$.

Возвращаясь к вопросу о возможности минимальной реализации гомотопического класса тождественного отображения "недвухсвязного" многообразия (см. следствие 6.I), отметим

Следствие 6.7. Пусть M и P — связные замкнутые гладкие римановы многообразия, причем $\dim P > 0$, группы $\pi_1(P)$ и $\pi_2(P)$ тривиальны, а хотя бы одна из групп $\pi_1(M)$ и $\pi_2(M)$ нетривиальна. Тогда $\inf E$ в гомотопическом классе тождественного отображения многообразия $M \times P$ положителен, но не реализуется ни на одном гладком отображении из этого гомотопического класса.

Доказательства сформулированных теорем шестого параграфа базируются на результатах четвертого и пятого параграфов. При исследовании поведения функционала Дирихле в различных гомотопических классах используется прием разложения $f = f_2 \circ f_1$ рассматриваемого отображения в композицию некоторого фиксированного отображения из данного гомотопического класса и отображения, гомотопного тождественному. Полученные в четвертом параграфе неравенства применяются в доказательствах теорем 6.I и 6.2 и позволяют, в частности, оценить $E(f)$ через $E(f_1)$ или $E(f_2)$.

В пятом параграфе изучается поведение функционала Дирихле в гомотопическом классе тождественного отображения двухсвязного многообразия. Следующая теорема является центральным результатом параграфа и посвящена построению специальной диффеотопии, существование которой является основным моментом доказательства теоремы 6.I.

Теорема 5.I. Пусть M – произвольное связное замкнутое двухсвязное гладкое многообразие размерности $\geqslant 5$ или одна из стандартных сфер S^3, S^4. Тогда существует диффеотопия φ_t $(0 \le t < 1)$ многообразия M такая, что $\varphi_0 = id_M$ и для любой римановой метрики на M

$$\lim_{t \to 1} E(\varphi_t) = 0.$$

Отсюда следует, что $\inf E = 0$ на связной компоненте единицы группы диффеоморфизмов многообразия M, удовлетворяющего условиям теоремы 5.I. Понятно, что при этом $E(M) = 0$. Комбинируя утверждения теорем 5.I и 6.I, получаем, что в классе связных замкнутых многообразий размерности больше четырех равенство $E(M) = 0$ эквивалентно существованию диффеотопии, описанной в теореме 5.I. По поводу малых размерностей отметим следующие известные факты (см.например, [6]). Любое связное замкнутое двухсвязное гладкое многообразие в размерности 4 гомеоморфно S^4, а в размерности 3 гомотопно S^3. В размерностях I и 2 такие многообразия отсутствуют.

Наметим основные идеи доказательства теоремы 5.I. Оно проводится конструктивным построением диффеотопии φ_t и использует существование на многообразии M, удовлетворяющем условиям теоремы, функции Морса μ без критических точек индекса $n-1$ и $n-2$ $(n = \dim M)$. Диффеотопия φ_t моделирует деформацию M, определяемую градиентным потоком функции μ, и строится в виде композиции "локальных" деформаций, каждая из которых сосредоточена на одной из ручек Смейла разбиения многообразия M, индуцированного функцией μ. Если не учитывать поправок на "склейку", деформация отдельной ручки в координатах $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ $(p+q = n)$ имеет вид $(x, y) \to (x, f_t(y))$, где f_t – отображение типа "радиального растяжения" и $q \geq 3$. При этом используется следующее наблюдение, проистекающее из квадратичности по производным подинтегральной функции функционала Дирихле. Если $f_t(y) = (1-t)^{-1} \cdot y$, то интеграл Дирихле ограничения f_t на прообраз $f_t^{-1} \mathcal{D}^q$ единичного диска в евклидовом пространстве равен $(q/2) \cdot vol(\mathcal{D}^q) \cdot (1-t)^{q-2}$ и стремится к нулю при $t \to 1$, если $q \geq 3$. В простейшем примере со сферами S^n ($n \geq 3$) в качестве μ можно взять любой ненулевой вещественный линейный функционал на $\mathbb{R}^{n+1}$. В этом случае конструируемая диффеотопия имеет вид $\varphi_t = \beta_t \circ \alpha_t$, где α_t "раздувает" на нижнюю полусферу $S_- = \{\mu \leq 0\}$ окрестность радиуса $1-t$ точки минимума $\mu^{-1}(-1)$, а β_t "сжимает" верхнюю полусферу $S_+ = S^n \setminus S_-$ в окрестность радиуса $1-t$ точки максимума $\mu^{-1}(1)$. Доказательство заканчивается стандартной процедурой оценки интеграла при помощи разложения

$$E(\varphi_t) = E(\varphi_t | \alpha_t^{-1} S_-) + E(\varphi_t | \alpha_t^{-1} S_+),$$

где в первом слагаемом мала область интегрирования, а во втором – подинтегральная функция.

В седьмом параграфе диссертации развитые для анализа функционала Дирихле методы прилагаются к исследованию пространств Соболева $W_2^1(M, N)$ обобщенных отображений гладких римановых многообразий. Каждое из этих пространств является "естественной областью определения" функционала Дирихле и играет в случае $\dim N > 1$ ту же роль, какую в теории гармонических функций ($N = \mathbb{R}^1$) играет линейное пространство Соболева $W_2^1(M)$ функций на M, интегрируемых в квадрате вместе со своим дифференциалом. Соболевские пространства отображений с успехом использовались во многих работах (см. например, [9,I0,I5] и обзоры [25, 26]) в качестве вспомогательного аппарата при решении различных "гладких" задач, обычно связанных с минимизацией функционала.

Рассмотрим произвольные компактные гладкие римановы многообразия M и N и фиксируем изометрическое вложение N в евклидово пространство $\mathbb{R}^k$ достаточно большой размерности. Определим $W_p^m(M,N)$ как топологическое подпространство в линейном топологическом пространстве $W_p^m(M,\mathbb{R}^k)$, состоящее из таких (классов) обобщенных отображений $f: M \to \mathbb{R}^k$, что $f(x) \in N$ почти для всех $x \in M$. Можно показать, что индуцированная на $W_p^m(M,N)$ топология не зависит от выбора вложения N в $\mathbb{R}^k$. Нормы $\|\cdot\|_m$ в гильбертовых пространствах $W_2^m(M,\mathbb{R}^k)$ можно ввести таким образом, что функционал Дирихле на них при $m \geqslant 1$ будет иметь простой вид $E^R(\cdot) = \|\cdot\|_1^2 - \|\cdot\|_0^2$, где $\|\cdot\|_0$ совпадает с L_2-нормой. При этом функционал Дирихле на пространстве Соболева отображений из M в N определяется как ограничение E^R на $W_2^m(M,N)$. На гладких отображениях это определение дает стандартный функционал Дирихле.

Тесная связь E с нормой в объемлющем линейном пространстве Соболева позволила применить результаты шестого параграфа к анализу топологической структуры "нелинейного" пространства $W_2^1(M,N)$, которая, как показывают следующие утверждения, зависит от топологических свойств многообразий M и N.

Теорема 7.I. Пусть M - связное замкнутое гладкое многообразие. Тогда двухсвязность M эквивалентна любому из следующих двух утверждений, выполненному для всех связных компактных гладких римановых многообразий N и при произвольном выборе римановой метрики на M .

(а) Замыкание в $W_2^1(M, N)$ любой компоненты связности пространства $C^\infty(M, N)$ содержит множество постоянных отображений из M в N .

(б) То же утверждение с переменой местами M и N .

<u>Следствие 7.I</u>. Пусть M и N – произвольные связные замкнутые гладкие римановы многообразия и хотя бы одно из них двухсвязно. Тогда пересечение замыканий в $W_2^1(M, N)$ всех компонент связности пространства $C^\infty(M, N)$ непусто и содержит множество постоянных отображений. В частности, замыкание пространства $C^\infty(M, N)$ в $W_2^1(M, N)$ связно.

Основные результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в работах автора [I6–I9] .

Работа выполнена под руководством профессора А.Т.Фоменко, которому автор выражает глубокую благодарность за постоянное внимание и помощь.

Часто встречающиеся обозначения.

$\mathbb{R}$ - поле вещественных чисел.

$\mathbb{R}^n$ - вещественное n-мерное линейное пространство, снабженное стандартной евклидовой нормой.

M, N - гладкие (бесконечно дифференцируемые) конечномерные многообразия.

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ - операция скалярного произведения.

$C^\infty(M)$ - алгебра гладких вещественнозначных функций на многообразии M.

$C^\infty(M,N)$ - топологическое пространство гладких отображений между многообразиями M и N, снабженное слабейшей из топологий, в которых непрерывны все канонические вложения $C^\infty(M,N)\to C^r(M,N)$ в пространства C^r - отображений.

E - функционал Дирихле (см. § I).

τ_M - касательное расслоение многообразия M.

τ_f (или $f^*\tau_N$) - линейное расслоение над многообразием M, индуцированное отображением $f\in C^\infty(M,N)$ (см. § I).

$C^\infty(\xi)$ - пространство гладких сечений конечномерного расслоения.

$df\in C^\infty(\tau_M^*\otimes\tau_f)$ - дифференциал гладкого отображения f из M в N.

$\nabla: C^\infty(\xi)\to C^\infty(\tau_M^*\otimes\xi)$ - оператор линейной связности в линейном конечномерном расслоении над многообразием M.

$A_f(\cdot,\cdot)=\langle df(\cdot), df(\cdot)\rangle$ - первая фундаментальная форма отображения f римановых многообразий.

B_f, H_f - вторая фундаментальная форма и средняя кривизна гладкого отображения f римановых многообразий (см. § I).

Глава I. АПРИОРНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

§ I. Первая и вторая вариации функционала Дирихле.

Мы начнем с описания ряда известных конструкций гармонической теории, необходимых для дальнейшего изложения. Определения и свойства используемых при этом стандартных дифференциально-геометрических объектов содержатся, например, в [I,2,3,4] .

Изложение специальных понятий теории гармонических отображений и функционала Дирихле следует, в основном, работам [5,25,26] .

Обозначим через M и N конечномерные гладкие (бесконечно дифференцируемые) римановы многообразия, снабженные связностями Леви-Чивита в касательных расслоениях τ_M и τ_N соответственно. Компактные многообразия без края будем называть замкнутыми. Через $C^\infty(\xi)$ будем обозначать $C^\infty(M)$-модуль гладких сечений конечномерного векторного расслоения ξ над M . Для каждого гладкого отображения $f : M \to N$ определено риманово векторное расслоение τ_f над многообразием M , индуцированное отображением f из расслоения τ_N TN и называемое касательным расслоением вдоль f . Слоем $(\tau_f)_x$ этого расслоения над точкой $x \in M$ является линейное пространство $(\tau_N)_{f(x)}$ TN , касательное к N в точке $f(x)$, а риманова структура (риманова метрика плюс согласованная с ней связность) переносится из касательного расслоения τ_N TN . Сечения $X \in C^\infty(\tau_f)$ называются векторными полями вдоль f и являются гладкими отображениями из M в касательное пространство многообразия N , удовлетворяющими условию $\pi_N \circ X = f$, где π_N – проекция расслоения τ_N . Важность описанного расслоения τ_f для теории функционала Дирихле обусловлена тем фактом, что пространство $C^\infty(\tau_f)$ играет роль касательного к пространству $C^\infty(M,N)$ в "точке" f. В частности, для любой гладкой вариации f_t отображения f "направляющее" поле $(\partial f_t/\partial t)_{t=0}$ является гладким векторным полем вдоль f. Кроме того, дифференциал df отображения f является гладким сечением расслоения $\tau_M^*\otimes\tau_f$ I-форм на M со значениями в τ_f, т.к. $df(v)\in C^\infty(\tau_f)$ для любого гладкого векторного поля $v\in C^\infty(\tau_M)$ на M. Каждое $\theta\in C^\infty(\tau_N)$ индуцирует векторное поле вдоль f вида $f^*\theta=\theta\circ f$.

Замечание I.I. При наличии края у гладкого многообразия M в касательные пространства $(\tau_M)_x$ краевых точек $x\in\partial M$ включаются вектора, ортогональные ∂M, т.е. $\tau_M|\partial M\cong$ $\cong\tau_{\partial M}\oplus\mathbb{R}(\vec{n})$, где $\vec{n}$ - поле внутренних нормалей вдоль ∂M. Вообще при рассмотрении любого гладкого векторного расслоения ξ над M всегда будет предполагаться, что ξ является ограничением на M некоторого гладкого расслоения $\hat{\xi}$ над гладким "расширением" $\hat{M}=M\cup\partial M\times[0,\varepsilon)$ многообразия M, уже не имеющим края.

Индуцированная линейная риманова (т.е.согласованная с метрикой) связность ∇^f касательного вдоль f расслоения τ_f удовлетворяет следующим структурным уравнениям Картана (см. [3, § 2]):

$$\nabla^f_u(dfv)-\nabla^f_v(dfu)=df[u,v], \tag{I}$$

$$R^f(u,v)X=R^N(dfu,dfv)X, \tag{2}$$

где $u,v\in C^\infty(\tau_M)$, $X\in C^\infty(\tau_f)$, R^N - тензор римановой кривизны многообразия N, а R^f - оператор кривизны связности ∇^f расслоения τ_f , который определяется следующей стандартной формулой:

$$R^f(u,v)X = \nabla^f_u \nabla^f_v X - \nabla^f_v \nabla^f_u X - \nabla^f_{[u,v]} X. \qquad (3)$$

Римановы структуры расслоений τ_M и τ_f естественно индуцируют риманову структуру в расслоении $\tau^*_M \otimes \tau_f$, гладким сечением которого является дифференциал df отображения f . Обозначим соответствующую индуцированную риманову связность через $\bar\nabla$ и рассмотрим ковариантный дифференциал $B_f = \bar\nabla(df)$, являющийся билинейной формой на $\tau_M \times \tau_M$ со значениями в τ_f . В соответствии с формулой Лейбница, определяющей правило ковариантного дифференцирования тензорного произведения, имеем:

$$B_f(u,v) = \nabla^f_u (df\,v) - df(\nabla_u v), \qquad (4)$$

где $u, v \in C^\infty(\tau_M)$, ∇ - связность Леви-Чивита в τ_M . Из уравнения (I), очевидно, вытекает симметричность формы B_f .

Определение I.I. Второй фундаментальной формой гладкого отображения $f: M \to N$ римановых многообразий называется симметрическая билинейная форма $B_f = \bar\nabla(df)$ на $\tau_M \times \tau_M$ со значениями в τ_f . Средней кривизной отображения f называется поточечный след $H_f = tr\, B_f$ этой формы, являющийся гладким векторным полем вдоль f .

Формулируемые ниже леммы I.I-I.4 хорошо известны (см.например, [5,26]) и приводятся нами без доказательства для удобства дальнейших ссылок.

Лемма I.I [27] . Пусть $f: M \to N$ - изометрическое вложение гладких римановых многообразий. Тогда формы B_f и H_f принимают значения в нормальном расслоении к $f(M)$ в

N и совпадают со второй фундаментальной формой и средней кривизной подмногообразия $f(M)$ в N.

Определение I.2. Гладкое отображение $f: M \to N$ римановых многообразий называется гармоническим, если имеет нулевую среднюю кривизну $H_f = 0$, и вполне геодезическим, если имеет нулевую вторую фундаментальную форму $B_f = 0$.

Гармонические отображения обобщают понятие подмногообразий с нулевой средней кривизной, которые называются локально минимальными и являются экстремалями функционала объема. В частном случае $N = \mathbb{R}$ форма B_f совпадает с гессианом функции $f \in C^\infty(M)$, а уравнение $H_f = 0$ преобретает вид $\Delta f = 0$ (Δ - оператор Лапласа) и определяеи гармонические функции на M, которые и дали наименование гармоническим отображениям. Вполне геодезические отображения называются так потому, что равенство $B_f = 0$ эквивалентно следующему утверждению: для любой геодезической γ в многообразии M кривая $f(\gamma)$ является геодезической в N.

Как уже отмечалось во введении, гармонические отображения являются экстремалями функционала Дирихле E, называемого также функционалом энергии. Рассмотрим гладкое отображение $f: M \to N$ гладких римановых многообразий и обозначим через $\|df\|(x)$ норму Гильберта-Шмидта оператора $df(x): (T_M)_x \to (T_N)_{f(x)}, x \in M$. Отметим, что $\|df\|^2 = \operatorname{tr} A_f$, где $A_f = f^* g^N$ - первая фундаментальная форма отображения f ("индуцированная метрика"), соответствующая римановой метрике g^N многообразия N.

Определение I.3. Функционал Дирихле на пространстве отображений римановых многообразий определяется по следующей формуле:

$$E(f) = \frac{1}{2} \int_M \|df\|^2 dv, \quad f \in C^\infty(M, N),$$

где dv - элемент объема на M. Если M компактно, то $E(f)<\infty$ для всех $f\in C^\infty(M,N)$ и функционал E непрерывен.

Лемма I.2 [27]. Пусть $f: M\to N$ - произвольное гладкое отображение римановых многообразий и $E(f)<\infty$. Тогда для любой такой гладкой вариации f_t $(t\in\mathbb{R})$ отображения $f=f_0$, которая совпадает с f вне некоторого компактного подмножества многообразия M, не пересекающегося с ∂M, выполнено следующее равенство:

$$\delta E(f)[X] = \frac{\partial}{\partial t}E(f_t)\Big|_{t=0} = -\int\limits_M \langle H_f, X\rangle dv,$$

где $X=(\partial f_t/\partial t)_{t=0}\in C^\infty(\tau_f)$, dv - элемент объема на M, H_f - средняя кривизна отображения f.

Следовательно, уравнение $H_f=0$ является уравнением Эйлера-Лагранжа для функционала Дирихле, а множество гармонических отображений с конечным значением $E(f)$ совпадает с множеством экстремалей этого функционала в классе вариаций с компактным носителем, не пересекающимся с краем многообразия M (если он не пуст).

Для того, чтобы выписать явную формулу второй вариации функционала Дирихле E, нам понадобятся некоторые дополнительные построения. Пусть ξ - конечномерное гладкое риманово векторное расслоение с римановой связностью ∇ над римановым многообразием M. Дважды ковариантно продифференцировав произвольное сечение $X\in C^\infty(\xi)$, получим билинейную форму $\nabla^2 X$ на M со значениями в ξ. Поточечный след этой формы, снова являющийся гладким сечением ξ, обозначим через $\Delta X = \mathrm{tr}\,\nabla^2 X$. Построенный эндоморфизм Δ пространства $C^\infty(\xi)$ носит название оператора Лапласа.

<u>Лемма I.3</u> [22]. Оператор $-\Delta = -\operatorname{tr}\nabla^2$ в линейном расслоении ξ с римановой связностью ∇ над гладким римановым многообразием M является линейным сильно эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка. Если M замкнуто, то оператор $-\Delta$ самосопряжен и положительно полуопределен.

Определим линейный оператор Риччи $Ric^f \in C^\infty(\tau_f^* \otimes \tau_f)$ в расслоении τ_f, касательном вдоль отображения $f \in C^\infty(M,N)$ формулой

$$Ric^f(\cdot) = \operatorname{tr}\left[v \longrightarrow R^N(\cdot, dfv)\, dfv\right], \qquad (5)$$
$$v \in C^\infty(\tau_M),$$

где R^N – тензор римановой кривизны многообразия N, а символ $\operatorname{tr}[v \longrightarrow F(v,v)]$ обозначает поточечный след билинейной формы F на $\tau_M \times \tau_M$. Из свойств тензора R^N следует, что оператор Ric^f симметричен. Если $f = id_M$ (тождественное отображение M), то Ric^f действует в касательном расслоении τ_M и совпадает с классическим оператором кривизны Риччи, который мы обозначим символом Ric^M.

<u>Лемма I.4</u> [36,37]. Пусть $f: M \to N$ – гармоническое отображение гладких римановых многообразий, причем M замкнуто. Тогда вторая вариация функционала Дирихле E, вычисленная в "точке" f, является вещественнозначной симметрической билинейной формой на $C^\infty(\tau_f) \times C^\infty(\tau_f)$ и имеет следующий вид:

$$\delta^2 E(f)[\cdot,\cdot] = \int_M \langle J_f(\cdot), \cdot \rangle\, dv,$$

$$J_f = -\Delta_f - Ric^f,$$

где dv – элемент объема на M, Δ_f и Ric^f – операторы Лапласа и Риччи в расслоении τ_f.

<u>Определение I.4</u>. Линейный сильно эллиптический дифференциальный оператор второго порядка $\mathcal{J}_f = -\Delta_f - Ric^f$ в расслоении τ_f, соответствующий гармоническому отображению f, называется оператором Якоби отображения f.

Из леммы I.3 и стандартных теорем о сильно эллиптических дифференциальных операторах следует, что в случае замкнутого M пространство $C^\infty(\tau_f)$ разлагается в прямую сумму конечномерных собственных подпространств оператора Якоби и лишь конечное их число соответствует отрицательным собственным числам.

Тождественное отображение id_M гладкого риманова многообразия M гармонично и даже вполне геодезично, т.к. его дифференциал ковариантно постоянен. Оператор Якоби отображения id_M обозначим через $\mathcal{J}_M$. Из приведенных выше формул видно, что $\mathcal{J}_M = -\Delta - Ric^M$, где Δ – стандартный оператор Лапласа на векторных полях, а Ric^M – оператор кривизны Риччи многообразия M. Последующие результаты настоящей главы во многом основаны на существовании связи $\mathcal{J}_M$ с операторами Якоби $\mathcal{J}_f$ произвольных гармонических отображений $f: M \to N$. Характер этой связи выясняет наша

<u>Теорема I.I</u>. Пусть $f: M \to N$ – произвольное гармоническое отображение гладких римановых многообразий, а $\mathcal{J}_f$ и $\mathcal{J}_M$ – операторы Якоби отображения f и тождественного отображения многообразия M соответственно. Тогда

$$df \circ \mathcal{J}_M - \mathcal{J}_f \circ df = 2L_f ,$$

где L_f – линейный дифференциальный оператор первого порядка, действующий из $C^\infty(\tau_M)$ в $C^\infty(\tau_f)$ по следующей формуле:

$$L_f(\cdot) = tr\left[v \to B_f(v, \nabla_v(\cdot))\right], \; v \in C^\infty(\tau_M). \qquad (6)$$

Здесь B_f - вторая фундаментальная форма отображения f, а ∇ - связность Леви-Чивита на M.

Доказательству теоремы I.I предпошлем две леммы. Лемма I.6 доказана в [26] в качестве следствия общей формулы, связывающей операторы Δ и $\delta d + d\delta$, где d и $\delta = d^*$ - дифференциал и кодифференциал в расслоении внешних форм на M со значениями в τ_f. Напомним, что в соответствии с замечанием I.I требуемую формулу достаточно доказать для внутренних точек многообразия M. Поэтому,не ограничивая общности, будем считать, что $\partial M = \emptyset$.

<u>Лемма I.5</u>. Обозначим через $\bar{R}$ оператор кривизны индуцированной римановой связности $\bar{\nabla}$ расслоения $\tau_M^* \otimes \tau_f$. Пусть ℓ - произвольное гладкое сечение этого расслоения. Тогда для любых $u, v \in C^\infty(\tau_M)$ выполнено следующее равенство:

$$\bar{R}(u,v)\ell = R^f(u,v)\circ \ell - \ell \circ R^M(u,v),$$

где R^f и R^M - операторы кривизны расслоений τ_f и τ_M соответственно.

Доказательство. Оператор $\bar{R}$ является гладкой 2-формой на M со значениями в линейном расслоении эндоморфизмов расслоения $\tau_M^* \otimes \tau_f$ и определяется следующей стандартной формулой:

$$\bar{R}(u,v)\ell = \bar{\nabla}_u \bar{\nabla}_v \ell - \bar{\nabla}_v \bar{\nabla}_u \ell - \bar{\nabla}_{[u,v]} \ell .$$

Обе части доказываемого равенства $C^\infty(M)$ -линейны по аргументу ℓ. Следовательно, доказательство достаточно провести для сечений $\tau_M^* \otimes \tau_f$ вида $\omega \otimes X$, где $\omega \in C^\infty(\tau_M^*)$,

$X \in C^\infty(\tau_f)$. В соответствии с формулой Лейбница дифференцирования тензорного произведения имеем:

$$\bar{R}(u,v)(\omega\otimes X) = \bar{\nabla}_u\left[(\nabla^*_v\omega)\otimes X + \omega\otimes(\nabla^f_v X)\right] -$$

$$-\bar{\nabla}_v\left[(\nabla^*_u\omega)\otimes X + \omega\otimes(\nabla^f_u X)\right] - (\nabla^*_{[u,v]}\omega)\otimes X - \omega\otimes(\nabla^f_{[u,v]}X) =$$

$$= \left[\nabla^*_u\nabla^*_v\omega - \nabla^*_v\nabla^*_u\omega - \nabla^*_{[u,v]}\omega\right]\otimes X + \omega\otimes\left[\nabla^f_u\nabla^f_v X - \nabla^f_v\nabla^f_u X - \nabla^f_{[u,v]}X\right],$$

где через ∇^* обозначена индуцированная связность в τ^*_M. Следовательно, если через R^* обозначить оператор кривизны расслоения τ^*_M, то

$$\bar{R}(u,v)(\omega\otimes X) = \left[R^*(u,v)\omega\right]\otimes X + \omega\otimes\left[R^f(u,v)X\right]. \qquad (7)$$

Пусть $t \in C^\infty(\tau_M)$ - произвольное векторное поле на M. Тогда свертка (ω, t) является гладкой функцией на M, т.е. сечением тривиального расслоения - произведения $M\times\mathbb{R}$, которое имеет нулевую кривизну. Вычисления, аналогичные вышеприведенным, показывают, что

$$\left(R^*(u,v)\omega, t\right) + \left(\omega, R^M(u,v)t\right) = 0. \qquad (8)$$

Суммируя равенства (7) и (8), получаем

$$\bar{R}(u,v)(\omega\otimes X) = -(\omega\otimes X)\circ R^M(u,v) + R^f(u,v)\circ(\omega\otimes X).$$

Лемма I.5 доказана.

<u>Лемма I.6.</u> Пусть $\bar{\Delta}$ - оператор Лапласа в расслоении $\tau^*_M\otimes\tau_f$ и отображение $f: M\to N$ гармонично. Тогда

$$\bar{\Delta}(df) = df\circ Ric^M - Ric^f\circ df,$$

где Ric^M и Ric^f - операторы Риччи в расслоениях τ_M и τ_f соответственно.

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $x \in M$ и нормальную (геодезическую) систему локальных координат с центром в точке x. Пусть $e_i = \partial/\partial x^i$ ($i = 1, 2, \ldots, n = \dim M$) – соответствующий локальный базис векторных полей. Тогда, как известно, в точке x выполнены следующие равенства:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \nabla_i e_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\nabla_i = \nabla_{e_i}$. Следовательно, в точке x

$$\bar{\Delta}(df) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_i df - \sum_{i=1}^{n} \bar{\nabla}_{\nabla_i e_i} df = \sum_{i=1}^{n} \bar{\nabla}_i B_f(e_i, \cdot),$$

где $\bar{\nabla}$ – связность в $\tau_M^* \otimes \tau_f$. Используя симметричность второй фундаментальной формы B_f, получаем:

$$(\bar{\Delta} df) e_p = \sum_{i=1}^{n} \nabla_i^f B_f(e_p, e_i) = \sum_{i=1}^{n} (\bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_p df) e_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\bar{\nabla}_p \bar{\nabla}_i df) e_i + \sum_{i=1}^{n} (\bar{R}(e_i, e_p) df) e_i \quad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\bar{R}$ – оператор кривизны расслоения $\tau_M^* \otimes \tau_f$. Этот оператор, фигурирующий во второй сумме, представим при помощи формулы леммы I.5 и заметим, что из условия гармоничности f следует равенство нулю первой суммы:

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{\nabla}_p \bar{\nabla}_i df) e_i = \sum_{i=1}^{n} \nabla_p^f (\bar{\nabla}_i df) e_i = \nabla_p^f H_f = 0.$$

Таким образом,

$$(\bar{\Delta} df) e_p = \sum_{i=1}^{n} R^f(e_i, e_p) \cdot df(e_i) - df \sum_{i=1}^{n} R^M(e_i, e_p) e_i.$$

Теперь доказываемая формула следует из второго уравнения Картана (2) и определений операторов Риччи Ric^f (5) и кривизны Риччи Ric^M многообразия M:

$$(\bar{\Delta} df)e_p = df(Ric^M e_p) - \sum_{i=1}^{n}{}' R^N(dfe_p, dfe_i)dfe_i =$$

$$= df(Ric^M e_p) - Ric^f(dfe_p).$$

Лемма I.6 доказана.

Доказательство теоремы I.I. Поскольку для постоянных обращений доказываемое равенство тривиально, будем считать, что оба многообразия M и N имеют положительную размерность. В соответствии с формулой $B_f = \bar{\nabla}(df)$ оператор L_f (6) можно представить в следующем виде:

$$L_f(v) = tr[u \to (\bar{\nabla}_u df)(\nabla_u v)],$$

где $u, v \in C^\infty(\tau_M)$. Применение оператора Лапласа Δ_f в расслоении τ_f к векторному полю $df(v)$ вдоль f приводит к равенству

$$\Delta_f(dfv) = (\bar{\Delta} df)v + 2L_f(v) + df(\Delta v), \tag{9}$$

где $\bar{\Delta}$ и Δ – операторы Лапласа в расслоениях $\tau_M^* \otimes \tau_f$ и τ_M соответственно. После подстановки в (9) выражения для $\bar{\Delta} df$ из леммы I.6 получим:

$$\Delta_f(df\,v) + Ric^f(df\,v) = df(Ric^M v) + df(\Delta v) + 2L_f(v).$$

Воспользовавшись, наконец, формулами $\Delta_f + Ric^f = -J_f$ и $\Delta + Ric^M = -J_M$ (см.определение I.4), приходим к нужному нам равенству. Теорема I.I доказана.

§ 2. Неустойчивость гармонических отображений некоторых однородных многообразий.

Рассмотрим гармоническое отображение $f : M \to N$ конечномерных гладких римановых многообразий. Предположим, что многообразие M замкнуто (компактно и без края). В соответствии с леммой I.2 отображение f является экстремалью функционала Дирихле E, т.е. первая вариация $\delta E(f)$, соответствующая отображению f, является тождественно нулевым линейным функционалом на пространстве $C^\infty(\tau_f)$ векторных полей вдоль f. Напомним, что отображение f называется устойчивым (в смысле функционала Дирихле), если неотрицательна квадратичная форма второй вариации $\delta^2 E(f)$, которая в соответствии с леммой I.4 имеет следующий вид:

$$\delta^2 E(f)[X] = \int_M < \mathcal{J}_f(X), X > dv . \qquad (I)$$

Здесь $X \in C^\infty(\tau_f)$, dv - элемент объема на M, а $\mathcal{J}_f$ - оператор Якоби, введенный в определении I.4.

Рассмотрим однопараметрическую группу φ_t диффеоморфизмов многообразия M и определим вариацию отображения f формулой $f_t = f \circ \varphi_t$. Соответствующая инфинитезимальная вариация $(\partial f_t / \partial t)_{t=0} \in C^\infty(\tau_f)$ называется касательным векторным полем вдоль f и имеем вид $df(v)$, где $v = (\partial \varphi_t / \partial t)_{t=0}$ - векторное поле на M, определяющее группу диффеоморфизмов φ_t. В теореме I.I была получена формула, выражающая $\mathcal{J}_f(df\, v)$ через $\mathcal{J}_M(v)$, где $\mathcal{J}_M$ - оператор Якоби, соответствующий тождественному отображанию многообразия M. После подстановки этой формулы в (I) получим:

$$\delta^2 E(f)[df\, v] = \int\limits_M A_f(\mathcal{J}_M v, v)\,dv - 2\int\limits_M \langle \widetilde{L}_f v, v\rangle\,dv. \quad (2)$$

Здесь $A_f(\cdot,\cdot) = \langle df(\cdot), df(\cdot)\rangle$ – первая фундаментальная форма отображения f, а линейный дифференциальный оператор первого порядка $\widetilde{L}_f$ в расслоении τ_M индуцирован оператором L_f теоремы I.I и определяется следующей формулой:

$$\widetilde{L}_f(v) = tr\left[u \to df^* \circ B_f(u, \nabla_u v)\right], \quad (3)$$

где $u, v \in C^\infty(\tau_M)$, $B_f = \overline{\nabla}(df)$ – вторая фундаментальная форма отображения f, а df^* – поле линейных операторов, поточечно сопряженных к df.

Рассмотрение усреднения квадратичной формы (2) по действию группы изометрий однородного многоооразия M на подходящем линейном пространстве векторных полей на M позволит нам выявить те условия, при которых неустойчивость тождественного отображения многообразия M (т.е. наличие отрицательных собственных чисел у оператора $\mathcal{J}_M$) влечет неустойчивость любого гармонического отображения f с ненулевой формой A_f (т.е. не являющегося локально постоянным).

<u>Определение 2.I</u>. Компактным однородным римановым многообразием называется компактное гладкое риманово многообразие положительной размерности, обладающее эффективно и транзитивно действующей группой изометрий.

Группа изометрий G такого многообразия M является компактной группой Ли, а M диффеоморфно однородному многообразию G/H, полученному факторизацией G по правому действию ее замкнутой подгруппы Ли H, изоморфной всем стационарным подгруппам $H(x)$ точек $x \in M$. Понятно, что действие группы G на M индуцируется действием G на себе левыми сдвигами. Кроме того, мы будем считать, что G снабжена би-инвариантной римановой метрикой, обеспечивающей изометричность многообразий G/H и M.

Приведем ряд необходимых нам фактов, касающихся индуцированных представлений группы изометрий G риманова многообразия M в тензорных расслоениях над M, снабженных G-инвариантными римановыми структурами (т.е. римановыми метриками и согласованными с ними линейными связностями). Обозначим через T^p_q линейное расслоение $(\otimes^p \tau_M) \otimes (\otimes^q \tau^*_M)$ $(p+q>0)$ тензоров типа (p,q) над комактным однородным римановым многообразием M. Символом T^0_0 обозначим тривиальное расслоение $M \times \mathbb{R} \to M$, понимая под тензорным полем типа $(0,0)$ гладкую функцию на M. Пусть $g_M : M \to M$ - изометрия многообразия M, соответствующая элементу g группы изометрий G. Для удобства записи формул мы будем обозначать тем же символом g индуцированные этой изометрией преобразования тензорных полей. Соответствующие индуцированные представления G в пространствах гладких сечений $C^\infty(T^p_q)$ ортогональны (т.е. g сохраняет скалярное произведение в $L_2(T^p_q)$) и определяются следующими формулами:

$$g\varphi = (g_M^{-1})^* \varphi = \varphi \circ g_M^{-1}, \quad \varphi \in C^\infty(T^0_0);$$

$$gv = (g_M)_* v = dg_M(v), \quad v \in C^\infty(T^1_0);$$

$$g\omega = (g_M^{-1})^* \omega = \omega \circ dg_M^{-1}, \quad \omega \in C^\infty(T^0_1);$$

$$g(t \otimes t') = gt \otimes gt', \quad t \in C^\infty(T^p_q), \; t' \in C^\infty(T^{p'}_{q'}).$$

Пусть $\mathcal{L}(t_1,\dots,t_k)$ - любое k - линейное преобразование тензорной алгебры многообразия M, порожденное операциями тензорного произведения, свертки по паре индексов, "поднятия", "опускания" и перестановки индексов. Тогда

$$\mathcal{L}(gt_1,\dots,gt_k) = g\mathcal{L}(t_1,\dots,t_k). \tag{4}$$

В частности, G - инвариантность индуцированных римановых метрик в расслоениях T^p_q выражается формулой

$$\langle gt, gt'\rangle = g\langle t, t'\rangle,$$

выполненной для любых тензорных полей t и t' одного типа. Риманова связность $\nabla : C^\infty(T^p_q) \to C^\infty(T^p_{q+1})$ в тензорных расслоениях, индуцированная связностью Леви-Чивита многообразия M, также G -инвариантна:

$$\nabla(gt) = g(\nabla t), \quad t \in C^\infty(T^p_q). \tag{5}$$

<u>Определение 2.2</u>. Компактное однородное риманово многообразие $M = G/H$ называется неприводимым, если для любой точки $x \in M$ линейное представление стационарной подгруппы $H(x)$ этой точки в касательном пространстве $(\tau_M)_x$ неприводимо.

Условие неприводимости M сильно ограничивает множество G - инвариантных тензорных полей. Например, выполняется следующее утверждение, являющееся аналогом известной леммы Шура.

<u>Лемма 2.I</u>. Пусть M - неприводимое компактное однородное риманово многообразие и $\ell \in C^\infty(T^1_1)$ - G -инвариантное поле симметрических линейных операторов. Тогда $\ell = \lambda \cdot id$, где $\lambda = const$, а id - поле тождественных операторов.

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $x \in M$. Пусть λ - вещественное собственное число оператора $\ell(x)$, существующее в силу его симметричности, и $H(x)$ – стационарная подгруппа точки x. Тогда оператор $\ell(x) - \lambda \cdot id(x)$ имеет в $(\tau_M)_x$ нетривиальное ядро и $H(x)$- инвариантен. Это ядро является $H(x)$-инвариантным подпространством в $(\tau_M)_x$ и, следовательно, совпадает со всем касательным пространством, т.к. представление $H(x)$ в $(\tau_M)_x$ по условию неприводимо. Таким образом, $\ell(x) = \lambda \cdot id(x)$, т.е. $\ell = \lambda(x) \cdot id$. Постоянство функции $\lambda(x)$ очевидно из транзитивности действия группы G. Лемма 2.I. доказана.

Напомним, что многообразием эйнштейна называется гладкое риманово многообразие M, имеющее скалярный оператор кривизны Риччи $Ric^M = \tau \cdot id$, $\tau = const$.

<u>Следствие 2.I</u>. Любое неприводимое компактное однородное риманово многообразие является замкнутым многообразием Эйнштейна.

Доказательство. Рассмотрим любое неприводимое компактное однородное риманово многообразие $M = G/H$. Замкнутость M обеспечивается компактностью и однородностью. Из (5) следует, что $\nabla_{gu}(gv) = g(\nabla_u v)$ для любых гладких векторных полей u и v на M. Из этого равенства вытекает G -инвариантность тензора $R^M \in C^\infty(T^1_3)$ римановой кривизны M. Тензорное поле кривизны Риччи $Ric^M \in C^\infty(T^1_1)$ получается из R^M при помощи операций поднятия индекса и свертки и, следовательно, G - инвариантно в силу (4). Кроме того, в каждой точке $x \in M$ оператор $Ric^M(x)$ симметричен. Осталось воспользоваться леммой 2.I. Следствие 2.I доказано.

Перейдем, собственно, к исследованию квадратичной формы второй вариации $\delta^2 E(f)$, соответствующей гармоническому отображению $f: M \to N$. Нас будет интересовать поведение этой формы на касательных векторных полях вдоль f. За основу для вычислений примем полученную на основании теоремы I.I формулу (2). Через id_M будем, как обычно, обозначать тождественное отображение M, а через $\mathcal{J}_M$ - соответствующий оператор Якоби. Используя оператор $\tilde{L}_f$ (3), введем вспомогательный линейный однородный дифференциальный оператор третьего порядка $\mathcal{D}_f$, действующий в пространстве $C^\infty(M)$ функций на M по формуле

$$\mathcal{D}_f(\varphi) = div \circ \tilde{L}_f \circ grad(\varphi), \quad \varphi \in C^\infty(M), \tag{6}$$

где $grad(\varphi) \in C^\infty(\tau_M)$ - градиент функции φ, а $div(u)$ - дивергенция векторного поля u на M.

<u>Лемма 2.2</u>. Пусть M – неприводимое компактное однородное риманово многообразие и существует такое гладкое векторное поле v на M, что $\mathcal{J}_M(v) = \lambda \cdot v$, где $\lambda = const < 0$. Тогда v является градиентом некоторой функции $\varphi \in C^\infty(M)$ и для любого гармонического отображения $f: M \to N$

$$\delta^2 E(f)[df v] = \lambda \int_M A_f(v,v)\, dv + 2\int_M \varphi\, \mathcal{D}_f(\varphi)\, dv.$$

Доказательство. Рассмотрим стандартное разложение Ходжа пространства $C^\infty(\tau_M)$ в L_2-ортогональную прямую сумму подпространств бездивергентных векторных полей и градиентов вещественно-значных функций на M. В силу следствия 2.I многообразие M является замкнутым многообразием Эйнштейна. В работе Р.Т.Смита [36] показано, что в этой ситуации оба слагаемых в указанной прямой сумме $\mathcal{J}_M$-инвариантны, причем на бездивергентных векторных полях оператор $\mathcal{J}_M$ положительно полуопределен. Таким образом, собственное векторное поле v оператора $\mathcal{J}_M$, соответствующее отрицательному собственному значению λ, является градиентом некоторой функции $\varphi \in C^\infty(M)$. Введем обозначение $u_\varphi = \tilde{L}_f \circ grad(\varphi)$. Из формулы (2) следует, что

$$\delta^2 E(f)[df\,v] = \lambda \int_M A_f(v,v)\,dv - 2\int_M \langle u_\varphi, grad(\varphi)\rangle dv. \quad (7)$$

Представим дивергенцию векторного поля φu_φ в виде $div(\varphi u_\varphi) = \varphi\, div(u_\varphi) + \langle u_\varphi, grad(\varphi)\rangle$. Из формулы Стокса следует, что интеграл по M от дивергенции произвольного гладкого векторного поля на M равен нулю. Поэтому

$$\int_M \varphi\, div(u_\varphi)\,dv = -\int_M \langle u_\varphi, grad(\varphi)\rangle dv. \quad (8)$$

Сравнение формул (7) и (8) приводит к требуемому равенству, если учесть, что в соответствии с (6) $div(u_\varphi) = \mathcal{D}_f(\varphi)$. Лемма 2.2 доказана.

Действие любого линейного однородного дифференциального оператора $\mathcal{D}$ порядка k в пространстве гладких функций на римановом многообразии M можно представить в виде следующей суммы:

$$\mathcal{D}(\varphi) = \sum_{p=0}^{k} (d_p, \nabla^p \varphi), \quad \varphi \in C^\infty(M),$$

где $d_p \in C^\infty(T^p_0)$ — некоторое тензорное поле типа $(p,0)$ на M, $\nabla^p \varphi \in C^\infty(T^0_p)$ — p-ая ковариантная производная функции φ (будем считать, что $\nabla^0\varphi = \varphi$), а круглые скобки обозначают свертку сопряженных тензорных полей. Тензорные поля d_p называются коэффициентами дифференциального оператора $\mathcal{D}$. Понятно, что набор этих коэффициентов определен неоднозначно.

Лемма 2.3. Коэффициенты $d_p \in C^\infty(T^p_0)$ $(p=0,1,2,3)$ дифференциального оператора $\mathcal{D}_f$ (6) можно выбрать таким образом, что

(а) $d_0=0$;

(б) если $\dim M=1$, то $d_1=0$;

(в) форма d_2 симметрична и $\operatorname{tr} d_2=0$;

(г) форма d_3 симметрична по всем трем индексам и может быть представлена в виде $d_3=\#\nabla A$, где $A\in C^\infty(T^0_2)$ - некоторое поле симметрических дважды ковариантных тензоров на M, а через $\#$ обозначен определяемый метрикой изоморфизм расслоений T^0_3 и T^3_0 (поднятие индексов).

Доказательство. Утверждение (а) тривиально, т.к. равенство $d_0=0$ эквивалентно условию $\mathcal{D}_f(const)=0$, которое, очевидно, выполняется. Доказательство пунктов (б)-(г) существенно сложнее. Оно будет разбито на несколько шагов и проводится в произвольной, но фиксированной системе локальных координат. По повторяющимся верхнему и нижнему индексам, как обычно, предполагается суммирование. Используются следующие обозначения: m_{ij} - элементы метрического тензора на M, m^{ij} - элементы соответствующего поля обратных матриц (т.е. $m^{ik}m_{kj}=\delta^i_j$), ∇_i - оператор ковариантного дифференцирования вдоль координатного векторного поля $\partial/\partial x^i$, соответствующий связности Леви-Чивита, $\nabla^i=m^{ij}\nabla_j$, $\varphi_i=\partial\varphi/\partial x^i$.

Из равенств (3) и (6), определяющих дифференциальные операторы $\mathcal{L}_f$ и $\mathcal{D}_f$ соответственно, видно, что оператор $\mathcal{D}_f$ действует по формуле:

$$\mathcal{D}_f(\varphi)=\nabla_k\left[(df^*)^k_\alpha\,(B_f)^\alpha_{ij}\,\nabla^i(\operatorname{grad}\varphi)^j\right],\quad \varphi\in C^\infty(M), \tag{9}$$

где B_f - вторая фундаментальная форма отображения $f: M\to N$.

Определим тензорное поле $B \in C^\infty(T^3_0)$ на M при помощи поднятия индексов поля $df^* \circ B_f \in C^\infty(T^1_2)$, т.е. положим

$$B^{kij} = (df^*)^k_\alpha (B_f)^\alpha_{rs} m^{ri} m^{sj}. \tag{10}$$

Форма B_f симметрична и имеет нулевой след, поскольку отображение f гармонично. Поэтому построенное поле B обладает следующими двумя свойствами:

$$\begin{aligned} &B^{kij} = B^{kji}, \\ &m_{ij} B^{kij} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Определим тензорное поле d_2 типа $(2,0)$ формулой

$$d_2^{ij} = \nabla_k B^{kij}.$$

Из свойств (11) немедленно следует, что d_2 удовлетворяет требованиям пункта (в) в формулировке леммы. Поскольку тензорные поля m_{ij} и m^{ij} ковариантно постоянны, операции поднятия и опускания индексов перестановочны с ковариантным дифференцированием. Поэтому равенство (9) принимает следующий вид:

$$\mathcal{D}_f(\varphi) = d_2^{ij} \nabla_i \varphi_j + B^{kij} \nabla_k \nabla_i \varphi_j. \tag{12}$$

Обозначим через $[ij]$ и $\{ij\}$ операции альтернирования и симметрирования индексов, нормированные таким образом, что $P^{ij} Q_{ij} = P^{ij} Q_{[ij]} + P^{\{ij\}} Q_{ij}$ для любых тензорных полей P и Q на M типа $(2,0)$ и $(0,2)$ соответственно. Положим

$$d_3^{kij} = B^{\{ki\}j}$$

и преобразуем второе слагаемое из правой части равенства (12):

$$B^{kij} \nabla_k \nabla_i \varphi_j = B^{kij} \nabla_{[k} \nabla_{i]} \varphi_j + d_3^{kij} \nabla_k \nabla_i \varphi_j. \tag{13}$$

Обозначим через R^* оператор кривизны индуцированной связности в расслоении τ^*_M. Тогда по определению оператора кривизны имеем:

$$\nabla_{[k}\nabla_{i]}(d\varphi) = \frac{1}{2} R^*\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) d\varphi .$$

Следовательно, первое слагаемое в правой части (I3) на самом деле является результатом применения к функции φ дифференциального оператора первого порядка:

$$B^{kij}\nabla_{[k}\nabla_{i]}\varphi_j = d_1^j \varphi_j , \qquad (I4)$$

где

$$d_1^j = \frac{1}{2} B^{kil} R^{*\cdot\cdot\cdot j}_{kil\cdot} .$$

Требование пункта (б) выполнено, т.к. $R^* = 0$ на одномерном многообразии. Если теперь подставить последнее равенство (I4) в формулу (I3), а ту, в свою очередь, - в формулу (I2), и учесть, что $d_0 = 0$, то получится разложение

$$\mathcal{D}_f(\varphi) = \sum_{p=0}^{3}{}' (d_p, \nabla^p \varphi) .$$

При этом уже доказано, что коэффициенты d_0, d_1 и d_2 удовлетворяют требованиям леммы. Осталось доказать, что утверждение (г) выполняется для тензорного поля

$$d_3^{kij} = B^{\{ki\}j} . \qquad (I5)$$

Дальнейшие рассуждения проведем в нормальной (геодезической) системе локальных координат с центром в произвольной, но фиксированной точке $x \in M$. Обозначим через e_i $(i = 1, 2, \dots, \dim M)$ соответствующий локальный базис координатных векторных полей. Из формулы (I0) следует, что в точке x

$$B^{kij} = \langle B_f(e_i, e_j), df(e_k) \rangle.$$

Проводя и далее все вычисления в точке x, воспользуемся равенством

$$B_f(e_i, e_j) = \nabla^f_j df(e_i),$$

вытекающим из формулы (4) первого параграфа, где ∇^f – связность в расслоении τ_f. В соответствии с равенством (I5)

$$d_3^{kij} = \frac{1}{2}\left[\langle \nabla_j df(e_i), df(e_k) \rangle + \langle \nabla_j df(e_k), df(e_i) \rangle\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \nabla_j \langle df(e_i), df(e_k) \rangle = \frac{1}{2} (\nabla_j A_f)(e_i, e_k),$$

где $A_f(\cdot,\cdot)$ – первая фундаментальная форма отображения f. Таким образом, $(\#^{-1} d_3)_{kij} = \nabla_j A_{ki}$ где $A = A_f/2$. Симметричность формы A следует из симметричности A_f. Симметричность тензора d_3 следует из формулы (I5) и симметричности B по второй паре индексов, отмеченно в (II). Лемма 2.3 полностью доказана.

Для дальнейшего исследования второй вариации функционала Дирихле нам понадобится понятие усреднения по действию компактной группы изометрий риманова многообразия.

<u>Определение 2.3</u>. Рассмотрим компактное однородное риманово многообразие $M = G/H$. Усреднением тензорного поля $t \in C^\infty(T^p_q)$ на M называется тензорное поле $\bar{t}$ того же типа, определяемое равенством

$$\bar{t} = \int_G (gt)\, dg, \quad g \in G,$$

где элемент объема dg на компактной группе изометрий G соответствует биинвариантной метрике, а значение поля $\overline{t}$ в точке $x \in M$ равно интегралу по группе G от вектор-функции $(gt)(x) : G \to (T^p_q)_x$.

Основным свойством усреднения является G-инвариантность тензорного поля $\overline{t}$, которая следует из изометричности левых сдвигов на группе.

Сформулированное определение позволяет ввести понятие усреднения дифференциального оператора. Рассмотрим произвольный линейный однородный дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ порядка κ, действующий в пространстве гладких функций на компактном однородном римановом многообразии $M = G/H$. Обозначим через d_p $(p=0,1,\dots,\kappa)$ коэффициенты этого оператора. Усреднением оператора $\mathcal{D}$ будем называть линейный однородный дифференциальный оператор $\overline{\mathcal{D}}$ того же порядка, имеющий коэффициенты $\overline{d_p}$:

$$\overline{\mathcal{D}}(\varphi) = \sum_{p=0}^{\kappa} (\overline{d}_p, \nabla^p \varphi), \quad \varphi \in C^\infty(M). \tag{I6}$$

Следующая лемма показывает, что усреднение $\overline{\mathcal{D}}$ не зависит от выбора коэффициентов оператора $\mathcal{D}$.

Лемма 2.4. Пусть $M = G/H$ – компактное однородное риманово многообразие и $\mathcal{D}$ – произвольный линейный однородный дифференциальный оператор в $C^\infty(M)$. Тогда для любых гладких функций φ и ψ на M

$$\iint_{G\times M} (g\psi)\, \mathcal{D}(g\varphi)\, dg\, dv = \int_M \psi\, \overline{\mathcal{D}}(\varphi)\, dv \quad (g \in G),$$

где dg и dv – элементы объема на G и M соответственно.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}_g$ линейный однородный дифференциальный оператор с коэффициентами $g^{-1} d_p$ $(p=0,1,\dots,\kappa)$, где $d_p \in C^\infty(T^p_0)$ – коэффициенты оператора $\mathcal{D}$. Поскольку переход к обратному элементу является изометрией группы G, снабженной биинвариантной метрикой,

$$\iint\limits_{G\times M} \psi\, \mathcal{D}_g(\varphi)\, dg\, dv = \int\limits_M \psi\, \bar{\mathcal{D}}(\varphi)\, dv. \tag{I7}$$

Из G -инвариантности ковариантного дифференцирования (5) и скалярного произведения тензоров следует, что

$$\mathcal{D}(g\varphi) = \sum_{p=0}^{k} g\left\langle g^{-1} d_p, \nabla^p \varphi \right\rangle = g\, \mathcal{D}_g(\varphi).$$

Если учесть, что действие G в $C^\infty(M)$ ортогонально в смысле L_2-структуры, то получим:

$$\iint\limits_{G\times M} (g\psi)\, \mathcal{D}(g\varphi)\, dg\, dv = \iint\limits_{G\times M} \psi\, \mathcal{D}_g(\varphi)\, dg\, dv. \tag{I8}$$

Сравнение равенств (I7) и (I8) приводит к нужной формуле. Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5. Пусть $\mathcal{D}_f$ -определяемый равенством (6) линейный однородный дифференциальный оператор, соответствующий гармоническому отображению $f: M \to N$ из неприводимого компактного риманова многообразия $M = G/H$ в некоторое риманово многообразие N. Тогда $\bar{\mathcal{D}}_f = 0$, где $\bar{\mathcal{D}}_f$ – усреднение оператора $\mathcal{D}_f$ в смысле (I6).

Доказательство. Обозначим через d_p $(p = 0, 1, 2, 3)$ коэффициенты оператора $\mathcal{D}_f$, описанные в лемме 2.3. Мы должны доказать, что $\bar{d}_p = 0$ для всех $p = 0, 1, 2, 3$. Равенство $\bar{d}_0 = 0$ следует из пункта (а) леммы 2.3. При $\dim M = 1$ равенство $\bar{d}_1 = 0$ следует из пункта (б) леммы 2.3. Пусть

$\dim M > 1$. Тогда для любой точки $x \in M$ подпространство, натянутое на вектор $\bar{d}_1(x)$, не может совпадать со всем касательным пространством $(\tau_M)_x$. Векторное поле $\bar{d}_1$ G-инвариантно. Следовательно, $\bar{d}_1 = 0$ в силу неприводимости M.

Назовем тензорные поля t_1 и t_2 на M слабо сопряженными, если они получаются друг из друга последовательным применением операций поднятия и опускания индексов. Эти операции являются изоморфизмами тензорных расслоений и перестановочны с действием группы изометрий G, а следовательно, - и с операцией усреднения. Поэтому равенство $\bar{t}_1 = 0$ эквивалентно равенству $\bar{t}_2 = 0$. В соответствии с пунктом (в) леммы 2.3 поле $\bar{d}_2$ слабо сопряжено с некоторым G-инвариантным полем симметрических линейных операторов с нулевым следом. Поэтому равенство $\bar{d}_2 = 0$ вытекает из леммы 2.I. В соответствии с пунктом (г) леммы 2.3 поле $\bar{d}_3$ слабо сопряжено с $\overline{\nabla \ell}$, где ℓ - некоторое поле симметрических линейных операторов на M. Из леммы 2.I следует, что $\bar{\ell} = \lambda \cdot id$, где $\lambda = const$. G-инвариантность связности ∇ обеспечивает перестановочность операций усреднения и ковариантного дифференцирования. Поэтому $\overline{\nabla \ell} = \nabla \bar{\ell} = \lambda \nabla id = 0$, т.е. $\bar{d}_3 = 0$. Лемма 2.5 доказана.

Сформулируем и докажем основной результат настоящего параграфа.

<u>Теорема 2.I</u>. Пусть $M = G/H$ - связное неприводимое компактное однородное риманово многообразие и тождественное отображение M в себя неустойчиво. Тогда неустойчивы все непостоянные гармонические отображения $f: M \to N$ из M в произвольное гладкое риманово многообразие N.

Доказательство. Неустойчивость тождественного отображения

id_M означает, что существует такое ненулевое векторное поле $v \in C^\infty(\tau_M)$, что $\mathcal{J}_M(v) = \lambda \cdot v$, где $\lambda = const < 0$, $\mathcal{J}_M = -\Delta - Ric^M$. Оператор Риччи Ric^M скалярен (следствие 2.I), а оператор Лапласа Δ G-инвариантен (это следует из G-инвариантности связности ∇ и из формулы $\Delta = tr\,\nabla^2$). Поэтому оператор $\mathcal{J}_M$ перестановочен с действием группы изометрий G в $C^\infty(\tau_M)$ и $\mathcal{J}_M(gv) = \lambda(gv)$ для любого $g \in G$. Из леммы 2.2 следует равенство

$$\delta^2 E(f)\left[df(gv)\right] = \lambda \int\limits_M (gA_f)(v,v)\,dv + 2\int\limits_M (g\varphi)\mathcal{D}_f(g\varphi)\,dv, \tag{I9}$$

где $grad\,\varphi = v$ и использован тот факт, что $grad(g\varphi) = gv$.

Проинтегрируем обе части (I9) по группе G. Используя результаты лемм 2.4 и 2.5, получаем:

$$\int\limits_G \delta^2 E(f)\left[df(gv)\right] dg = \lambda \int\limits_M \overline{A}_f(v,v)\,dv, \tag{20}$$

где $\overline{A}_f$ – усреднение первой фундаментальной формы отображения f. Из леммы 2.I следует, что симметрическая G-инвариантная форма $\overline{A}_f$ с точностью до постоянного множителя совпадает со скалярным произведением, т.е.

$$\overline{A}_f(v,v) = c\|v\|^2, \quad c = const. \tag{2I}$$

Докажем, что $c > 0$. Действительно, поскольку отображение f непостоянно, $tr\,A_f > 0$ на множестве положительной меры. Кроме того, $tr\,A_f \geqslant 0$ всюду на M. Поэтому $\overline{tr\,A_f} > 0$. Операция усреднения перестановочна со взятием следа в силу (4), следовательно, $c \cdot \dim M = tr\,\overline{A}_f > 0$. Таким образом, из отрицательности множителя λ и равенств (20) и (2I) следует неравенство

$$\int_G \delta^2 E(f)\left[df(gv)\right] dg < 0.$$

Это означает, что существует такой элемент $g_0 \in G$, что

$$\delta^2 E(f)\left[df(g_0 v)\right] < 0.$$

Следовательно, квадратичная форма $\delta^2 E(f)$ не является неотрицательной. Теорема 2.I доказана.

Теорема 2.I позволяет указать ряд примеров римановых многообразий, все непостоянные гармонические отображения которых неустойчивы.

Теорема 2.2. Обозначим через M связное компактное неприводимое неособое симметрическое пространство, снабженное стандартной римановой метрикой. Для любого гладкого риманова многообразия N в пространстве $C^\infty(M,N)$ нет ни одного непостоянного устойчивого гармонического отображения, если и только если M принадлежит одной из перечисленных ниже серий (а) - (д).

(а) Стандартные сферы S^n размерности $n \geq 4$.

(б) Многообразия Грассмана над телом кватернионов $Sp(p+q)/(Sp(p)\times Sp(q))$.

(в) Пространства $SU(2m)/Sp(m)$, соответствующие стандартному вложению подгруппы $Sp(m)$ в $SU(2m)$, $m \geq 2$.

(г) Специальные унитарные группы $SU(n)$, $n \geq 2$.

(д) Симплектические группы $Sp(n)$.

Отметим, что сфера $S^3 = SU(2)$ выброшена из серии (а) лишь для того, чтобы сосредоточить все группы Ли в сериях (г) и (д). Утверждение о неустойчивости непостоянных гармонических отображений $f: S^n \to N$ $(n \geq 3)$ ранее доказал Ксин [2I].

Доказательство. Из теоремы 2.I следует, что в рассматриваемом классе многообразий неустойчивость всех непостоянных гармонических отображений $f: M \to N$ (M фиксировано) эквивалентна неустойчивости тождественного отображения id_M. В работах Р.Т.Смита [36] и А.В.Тырина [20] показано, что в классе связных односвязных компактных неприводимых неособых симметрических пространств многообразия серий (а) – (д) и только они имеют неустойчивое тождественное отображение. Поэтому теорема будет доказана, если мы убедимся в односвязности любого связного компактного неприводимого однородного риманова многообразия M с неустойчивым отображением id_M. Пусть $\pi_1(M)$ нетривиальна, тогда (см., например, [9,I5]) на M существует нетривиальная гладкая замкнутая геодезическая такая, что соответствующее гармоническое отображение $\gamma: S^1 \to M$ минимизирует E в своем гомотопическом классе и, следовательно, непостоянно и устойчиво. Это противоречит результатам работы [20], в которой доказано, что любое непостоянное гармонические отображение $f': N' \to M$ из произвольного связного компактного ориентируемого гладкого риманова многообразия N' неустойчиво, если неустойчиво id_M. Теорема 2.2 доказана.

В заключение параграфа докажем теорему, связывающую отсутствие непостоянных устойчивых гармонических отображений с топологическим свойством двухсвязности, т.е. тривиальности первой и второй гомотопических групп многообразия. Напомним, что связное компактное неприводимое симметрическое пространство относится к типу I, если не является группой Ли, т.е. представимо в виде G/H, где G – связная компактная простая группа Ли, а H – ее собственная замкнутая подгруппа Ли.

Теорема 2.3. Все многообразия, перечисленные в теореме 2.2, двухсвязны. Связное компактное неприводимое неособое симметрическое пространство M типа I тогда и только тогда двухсвязно, когда неустойчивы все непостоянные гармонические отображения $f: M \to N$ в произвольное гладкое риманово многообразие N.

Доказательство. Группы Ли, перечисленные в сериях (г) и (д) теоремы 2.2 односвязны и, следовательно, двухсвязны, т.к. вторая гомотопическая группа группы Ли всегда тривиальна. Далее, существует полная классификация связных компактных неприводимых глобально симметрических пространств (см., например, [8, гл.IX]). Приведенный ниже перечень содержит все связные односвязные компактные неприводимые неособые симметрические пространства типа I (через n, p, q обозначены натуральные числа):

(1) $SO(n+1)/SO(n)$, $n \geq 4$;

(2) $Sp(p+q)/(Sp(p) \times Sp(q))$;

(3) $SU(2n)/Sp(n)$, $n \geq 2$;

(4) $Sp(n)/U(n)$, $n \geq 2$;

(5) $SU(n)/SO(n)$, $n \geq 3$;

(6) $SU(p+q)/S(U(p) \times U(q))$;

(7) $SO(2n)/U(n)$, $n \geq 3$;

(8) $SO(p+q)/(SO(p) \times SO(q))$, $p \geq 2, q \geq 3$.

Рассмотрим часть точной последовательности гомотопических групп расслоения для симметрического пространства $M = G/H$:

$$\pi_2(G) \to \pi_2(M) \to \pi_1(H) \xrightarrow{i_*} \pi_1(G)$$

где i_* - гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный вложением i подгруппы Ли H в группу Ли G. Равенство $\pi_2(G) = 0$ позволяет заключить, что $\pi_2(M) = \operatorname{Ker} i_*$. Учитывая односвязность всех перечисленных симметрических пространств, получаем, что среди многообразий из серий (I) - (8) те и только те двухсвязны, для которых i_* является мономорфизмом. Сферы, представленные серией (I) двухсвязны. Для остальных многообразий мы проанализируем гомоморфизм i_*, учитывая односвязность групп $Sp(n)$ и $SU(n)$ и следующие известные равенства: $\pi_1(U(n)) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(SO(m)) = \mathbb{Z}_2$ при $m \geqslant 3$. В сериях (2) и (3) обе группы $\pi_1(H)$ и $\pi_1(G)$ тривиальны, следовательно, i_* - изоморфизм. В сериях (4), (5) и (6) $\pi_1(G)$ тривиальна, а $\pi_1(H)$ равна либо $\mathbb{Z}$, либо $\mathbb{Z}_2$, т.е. мономорфизм невозможен. То же верно и для серий (7) и (8), в которых $\pi_1(G) = \mathbb{Z}_2$, а $\pi_1(H)$ равна либо $\mathbb{Z}$, либо либо $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$. Таким образом двухсвязны лишь симметрические пространства, перечисленные в сериях (I), (2) и (3), совпадающих с сериями (а), (б) и (в) теоремы 2.2. Теорема 2.3 доказана.

§ 3. Индексы гармонических отображений сфер.

Обозначим через S^n сферу некоторого положительного радиуса, стандартно вложенную в $\mathbb{R}^{n+1}$ и снабженную стандартной индуцированной из $\mathbb{R}^{n+1}$ римановой метрикой. В теореме 2.2 предыдущего параграфа доказано, что при $n \geqslant 3$ все непостоянные гармонические отображения $f : S^n \to N$ сферы S^n в произвольное гладкое риманово многообразие N неустойчивы. В настоящем параграфе мы точно оценим степень этой неустойчивости.

<u>Определение 3.I</u>. Индексом $\operatorname{ind}(f)$ гармонического отображения $f : M \to N$ римановых многообразий называется размерность

максимального подпространства в $C^\infty(\tau_f)$, на котором отрицательно определена форма $\delta^2 E(f)$ второй вариации функционала Дирихле, соответствующая отображению f.

Индекс гармонического отображения характеризует степень его неустойчивости. Необходимым условием того, что отображение f соответствует локальному минимуму функционала Дирихле является, очевидно, равенство $ind(f)=0$. Если M замкнуто (компактно и без края), то форма $\delta^2 E(f)$ имеет вид, указанный в лемме I.4. Из свойств оператора Якоби $\mathcal{J}_f = -\Delta_f - Ric^f$ (см. определение I.4) следует, что $ind(f)$ конечен.

<u>Теорема 3.I</u>. Пусть $f : S^n \to N$ – непостоянное гармоническое отображение стандартной сферы положительного радиуса и размерности $n \geqslant 3$ в произвольное гладкое риманово многообразие N. Тогда $ind(f) \geqslant n+1$. Соответствующее пространство векторных полей вдоль f, генерирующих локально уменьшающие значения E вариации отображения f, порождено полями вида $df(grad\,\theta)$, где θ – ограничение на S^n произвольной ненулевой линейной функции в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Прежде чем доказывать сформулированную теорему, отметим, что полученное в [36,37] равенство $ind(id_S) = n+1$ для индекса тождественного отображения сфер S^n $(n \geqslant 3)$ показывает, что оценка теоремы 3.I в общем случае не может быть улучшена. Отметим, также, что градиенты ограничений на S^n линейных в $\mathbb{R}^{n+1}$ функций порождают однопараметрические группы φ_t конформных диффеоморфизмов сферы. Соответствующие вариации отображения f, локально (при t, близких к нулю) уменьшающие E имеют вид $f_t = f \circ \varphi_t$, т.к. для таких вариаций $(\partial f_t/\partial t)_{t=0} = df(grad\,\theta)$.

Нам понадобится следующая вычислительная лемма, использовавшаяся ранее в работах [26, 40].

Лемма 3.I. Пусть функция $\theta \in C^{\infty}(S^n)$ является ограничением на сферу радиуса r линейной функции Θ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда $\nabla(\mathrm{grad}\,\theta) = -(\theta/r^2)\cdot id$, где id – поле тождественных операторов в касательном расслоении сферы, а через ∇, как обычно, обозначена связность Леви-Чивита на S^n.

Доказательство. Обозначим через $\overline{\nabla}$ стандартной дифференцирование в $\mathbb{R}^{n+1}$. Поскольку $\mathrm{grad}\,\Theta$ является постоянным векторным полем в $\mathbb{R}^{n+1}$, $\overline{\nabla}(\mathrm{grad}\,\Theta) = 0$. Отметим, также, что $\mathrm{grad}\,\theta$ совпадает с проекцией $\mathrm{grad}\,\Theta$ в точках S^n на соответствующие касательные пространства сферы. Фиксируем произвольную точку $x \in S^n$ и произвольную пару векторов $a(x)$ и $b(x)$ в пространстве $(T_{S^n})_x$. Продолжим их векторными полями a и b таким образом, чтобы в точке x выяполнялось равенство $\nabla_a b = 0$. Тогда в точке x имеем:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_a(\mathrm{grad}\,\theta), b\rangle &= \nabla_a \langle \mathrm{grad}\,\theta, b\rangle = \\ &= \overline{\nabla}_a \langle \mathrm{grad}\,\Theta, b\rangle = \langle \mathrm{grad}\,\Theta, \overline{\nabla}_a b\rangle . \end{aligned} \tag{I}$$

Касательная к сфере составляющая вектора $\overline{\nabla}_a b(x)$ совпадает с $\nabla_a b(x)$ и, следовательно, равна нулю. Ортогональная составляющая равна, по определению, $B_{S^n}(a,b)(x)$, где B_{S^n} – вторая фундаментальная форма подмногообразия S^n в $\mathbb{R}^{n+1}$. Известно (см., например [3]), что $B_{S^n}(a,b) = -\frac{\langle a,b\rangle}{r}\vec{\nu}$, где $\vec{\nu}$ – поле единичных внешних нормалей к сфере. Если учесть еще равенство $\theta(x) = \langle \mathrm{grad}\,\Theta, r\vec{\nu}\rangle_x$, то из (I) следует, что в произвольной точке $x \in S^n$

$$\langle \nabla_a(\mathrm{grad}\,\theta), b\rangle = -\frac{\theta}{r^2}\langle a, b\rangle .$$

Лемма 3.I. доказана.

Доказательство теоремы 3.I. Обозначим через $\mathcal{J}_f$ и $\mathcal{J}_S$ операторы Якоби, соответствующие гармоническому отображению $f: S^n \to N$ и тождественному отображению сферы S^n. Пусть $\theta \in C^\infty(S^n)$ - ограничение на S^n произвольной ненулевой линейной функции в $\mathbb{R}^{n+1}$. В теореме I.I доказано, что

$$\mathcal{J}_f(df(\operatorname{grad}\theta)) = df(\mathcal{J}_S(\operatorname{grad}\theta)) - 2L_f(\operatorname{grad}\theta), \qquad (2)$$

где оператор L_f определяется равенством

$$L_f(\cdot) = \operatorname{tr}\left[v \to B_f(v, \nabla_v(\cdot))\right], \quad v \in C^\infty(\tau_{S^n}).$$

В соответствии с леммой 3.I

$$L_f(\operatorname{grad}\theta) = -\frac{\theta}{r^2}\operatorname{tr}B_f = -\frac{\theta}{r^2}H_f = 0,$$

где r - радиус сферы, а H_f - средняя кривизна отображения f, равная нулю в силу гармоничности f (см.определения I.I и I.2). Следовательно, равенство (2) приобретает вид

$$\mathcal{J}_f(df(\operatorname{grad}\theta)) = df(\mathcal{J}_S(\operatorname{grad}\theta)). \qquad (3)$$

Вычислим значение оператора $\mathcal{J}_S$ на векторном поле $\operatorname{grad}\theta$. Обозначим через Δ и Ric^S операторы Лапласа и Риччи соответственно в касательном расслоении сферы. Из леммы 3.I следует, что

$$\Delta(\operatorname{grad}\theta) = -\frac{1}{r^2}\operatorname{tr}(d\theta \otimes id) = -\frac{1}{r^2}\operatorname{grad}\theta. \qquad (4)$$

Известно (см., например, [3, § 3]), что тензор римановой кривизны сферы имеет вид

$$R^S(a,b)c = \frac{1}{r^2}\left(\langle b,c\rangle a - \langle a,c\rangle b\right),$$

где $a, b, c \in C^{\infty}(\tau_{S^n})$. Таким образом,

$$Ric^S = \frac{n-1}{\tau^2}\, id\,.$$

Из формулы $\mathcal{J}_S = -\Delta - Ric^S$ и равенства (4) следует, что

$$\mathcal{J}_S(grad\,\theta) = \left(\frac{2-n}{\tau^2}\right) grad\,\theta\,.$$

После подстановки этого выражения в (3) получаем:

$$\mathcal{J}_f(df(grad\,\theta)) = \left(\frac{2-n}{\tau^2}\right) df(grad\,\theta)\,,$$

т.е. векторные поля вдоль f вида $df(grad\,\theta)$ являются собственными для оператора $\mathcal{J}_f$ и соответствуют отрицательному при $n \geq 3$ собственному значению этого оператора.

Размерность пространства $\mathcal{F}$ ограничений на S^n линейных функций в $\mathbb{R}^{n+1}$ равна $n+1$. Предположим, что существует такая функция $\theta \in \mathcal{F}$, что $df(grad\,\theta) = 0$. Тогда отображение f постоянно вдоль интегральных траекторий векторного поля $grad\,\theta$. Отсюда следует, что f постоянно всюду на S^n, что противоречит условию теоремы. Таким образом, оператор $df \circ grad$ инъективен на пространстве $\mathcal{F}$ и пространство $df(grad(\mathcal{F}))$ имеет размерность $n+1$. Теорема 3.I доказана.

Глава 2. ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА ДИРИХЛЕ

§ 4. Предварительные вычисления.

Данный параграф посвящен доказательству ряда вспомогательных лемм технического характера, которые будут неоднократно использованы в последующих параграфах.

№3

(24.7.1) <u>Определение 4.I</u>. Интегральной плотностью гладкого отображения $f: M \to N$ гладких римановых конечномерных многообразий называется гладкая неотрицательная функция $e(f) = (1/2)\|df\|^2$ на многообразии M. Интеграл от $e(f)$ по измеримому подмножеству $B \subset M$ называется B-интегралом отображения f:

$$E(f \mid B) = \int_B e(f)\, dv.$$

В локальных координатах функция интегральной плотности вычисляется по формуле:

$$e(f) = \frac{1}{2} g^{ij} f_i^\alpha f_j^\beta \sigma_{\alpha\beta}, \qquad (\mathrm{I})$$

где g и σ - метрические тензоры на M и N соответственно. M-интеграл отображения f совпадает со значением $E(f)$ функционала Дирихле.

24.7.1 <u>Лемма 4.I</u>. Пусть $f: M \to N$ и $h: N \to P$ - гладкие отображения римановых многообразий. Тогда

$$e(h \circ f) \le 2e(f) \cdot f^* e(h).$$

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $x \in M$ и ортонормированные репперы в касательных пространствах $(\tau_M)_x$, $(\tau_N)_y$ и $(\tau_P)_{h(y)}$, где $y = f(x)$. Неравенство Шварца позволяет заключить, что

$$\|dh(y)\circ df(x)\| \leq \|dh(y)\|\cdot\|df(x)\|,$$

где $\|\cdot\|$ – норма Гильберта-Шмидта линейного оператора. Осталось воспользоваться равенством $d(h\circ f)=dh\circ df$ и определением 4.I. Лемма 4.I доказана.

Лемма 4.2. Пусть $f: M\to N$ и $h: N\to P$ – гладкие отображения римановых многообразий. Тогда

$$E(h\circ f\,|\,B) \leq 2E(f\,|\,B)\cdot \sup_{f(B)} e(h)$$

для любого измеримого подмножества $B\subset M$.

Доказательство. В соответствии с определением 4.I и леммой 4.I

$$E(h\circ f\,|\,B) \leq 2\int_B e(f)\cdot f^* e(h)\,dv.$$

Обе функции, стоящие под интегралом, неотрицательны. Осталось вынести максимум $f^*e(h)$ за знак интеграла. Лемма 4.2 доказана.

Определение 4.2. Рассмотрим гладкую субмерсию $f: M\to N$ римановых многообразий и предположим, что $\dim N>0$. Обозначим через τ_M^h подрасслоение касательного расслоения τ_M многообразия M, состоящее из горизонтальных подпространств, являющихся ортогональными дополнениями к пространствам $(\operatorname{Ker} df)_x$ $(x\in M)$. Обозначим через g_M^h и $f^*g_N^h$ ограничения исходной и индуцированной отображением f метрик многообразия M на слои расслоения τ_M^h. Объемной плотностью субмерсии f будем называть гладкую положительную функцию $\rho(f)$ на M, определяемую формулой

N 3

$$\rho(f) = \sqrt{\frac{\det(g^h_M)}{\det(f^* g^h_N)}} .$$

В случае $\dim N = 0$ положим $\rho(f) = 1$.

В приведенной формуле фигурируют матрицы метрических тензоров, которые зависят от выбранной локальной системы координат. Однако, сама функция объемной плотности от выбора системы координат не зависит и является корректно определенной глобальной гладкой функцией на многообразии M. В этом можно легко убедиться при помощи непосредственной проверки. Если f – диффеоморфизм, то функция $1/\rho(f)$ воспадает с производной Радона-Никодима индуцированной отображением f гладкой положительной меры на M относительно исходной меры:

$$\frac{1}{\rho(f)} = \frac{f^* dv_N}{dv_M} . \qquad (2)$$

29.7.

<u>Лемма 4.3.</u> Пусть $f : M \to N$ и $h : N \to P$ – гладкие отображения римановых многообразий, причем f – субмерсия. Тогда для любого измеримого подмножества $B \subset M$

$$E(h \circ f \mid B) \le 2 E(h \mid f(B)) \cdot \sup_{f(B)} \Psi_f ,$$

где функция Ψ_f на $f(B)$ положительна и определяется следующим равенством:

$$\Psi_f(y) = \int_{f^{-1}(y) \cap B} e(f) \rho(f) \, dv \qquad (y \in f(B)) .$$

Более того, если B компактно, то Ψ_f ограничена на $f(B)$.

Доказательство леммы основано на известной теореме Фубини (см., например, [4, гл.3, § 2]). Определим функцию θ на множестве $f(B)$ формулой

$$\Theta(y) = \int\limits_{f^{-1}(y)\cap B} e(h\circ f)\rho(f)\,dv .$$

Определение функции $\rho(f)$ выбрано таким образом, что применение теоремы Фубини при $\dim N > 0$ приводит к равенству

$$E(h\circ f\,|\,B) = \int\limits_{f(B)} \Theta\,dv . \qquad (3)$$

24.7.1

При $\dim N = 0$ обе части последней формулы равны нулю. Из леммы 4.I следует, что $\Theta \leq 2e(h)\cdot\Psi_f$. После подстановки этой оценки в (3) получается доказываемое неравенство.

Пусть множество $B\subset M$ компактно. Функции $e(f)$ и $\rho(f)$ ограничены на B. Поэтому для доказательства ограниченности Ψ_f на $f(B)$ достаточно убедиться в том, что все подмножества $f^{-1}(y)\cap B$ при $y\in f(B)$ имеют ограниченный в совокупности объем. Покроем компактное множество B системой таких открытых подмножеств U_α, в которых субмерсия f имеет вид проекции $\mathbb{R}^{n-k}\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$, и выберем конечное подпокрытие $U_1,\dots,U_\ell$ Понятно, что для каждого U_α существует такое число c_α, что $vol(f^{-1}(y)\cap U_\alpha)\leq c_\alpha$ для всех $y\in f(U_\alpha)$. Положим $c=\ell\cdot\max\{c_\alpha\,|\,\alpha=1,2,\dots,\ell\}$. Тогда $vol(f^{-1}(y)\cap B)\leq c$ для всех $y\in f(B)$. Лемма 4.3 доказана.

Смешанной плотностью диффеоморфизма $f: M\to N$ римановых многообразий будем называть гладкую неотрицательную функцию $e\rho(f)$ на M, определяемую следующим равенством:

$$e\rho(f) = e(f)\cdot\rho(f), \qquad (4)$$

↙63

где $e(f)$ – интегральная плотность, а $\rho(f)$ – объемная плотность диффеоморфизма f (см. определения 4.I и 4.2).

Лемма 4.4. Пусть $h, f : M \to M$ – диффеоморфизмы риманова многообразия M. Тогда

(а) $\rho(h \circ f) = \rho(f) \cdot f^* \rho(h)$;

(б) $e\rho(h \circ f) \leqslant 2 e\rho(f) \cdot f^* e\rho(h)$;

(в) $E(h \circ f \mid B) \leqslant 2 E(h \mid f(B)) \cdot \sup\limits_{B} e\rho(f)$

для любого измеримого подмножества $B \subset M$.

Доказательство. Утверждение (а) вытекает из определения 4.2 функции $\rho(f)$ и следующей очевидной цепочки равенств:

$$\rho(h \circ f) = \left(\frac{\det(g)}{\det(f^* g)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\det(f^* g)}{\det(f^* h^* g)}\right)^{\frac{1}{2}} = \rho(f) \cdot f^* \left(\frac{\det(g)}{\det(h^* g)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

где g – метрика многообразия M.

Неравенство (б) следует из (а) и леммы 4.I.

Неравенство (в) следует из леммы 4.3, поскольку в рассматриваемой ситуации $\Psi_f(f(x)) = e\rho(f)(x)$. Лемма 4.4 доказана.

Последняя лемма, которая будет доказана в этом параграфе, касается зависимости введенных выше характеристик отображения $f : M \to N$ от выбора римановых метрик на многообразиях M и N. Нам эта зависимость понадобится при рассмотрении диффеоморфизмов.

Лемма 4.5. Пусть $f : M \to N$ – диффеоморфизм компактных римановых многообразий. Обозначим через $\tilde{g}_M$ и $\tilde{g}_N$ некоторые римановы метрики на M и N соответственно, отличные от исходных. Тогда существуют не зависящие от f положительные константы C_1, C_2 и C_3 такие, что (а) $\tilde{e}(f) \leq C_1 \cdot e(f)$,

(б) $\tilde{E}(f|B) \leq C_2 \cdot E(f|B)$,

(в) $\tilde{\rho}(f) \leq C_3 \cdot \rho(f)$,

где B - произвольное измеримое подмножество в M , а волной помечены интегральная плотность, B - интеграл и объемная плотность, вычисленные в метриках $\tilde{g}_M$ и $\tilde{g}_N$.

Доказательство. Обозначим через $\tilde{M}$ и $\tilde{N}$ экземпляры гладких многообразий M и N , снабженные римановыми метриками $\tilde{g}_M$ и $\tilde{g}_N$ соответственно. Пусть $\alpha : \tilde{M} \to M$ и $\beta : N \to \tilde{N}$ - канонические диффеоморфизмы, индуцированные отождествлением экземпляров. Понятно, что доказываемые неравенства (а) - (в) эквивалентны следующим трем неравенствам, которые мы и докажем:

$$e(\beta \circ f \circ \alpha) \leq C_1 \cdot \alpha^* e(f), \tag{5}$$

$$E(\beta \circ f \circ \alpha \,|\, \alpha^{-1} B) \leq C_2 \cdot E(f|B), \tag{6}$$

$$\rho(\beta \circ f \circ \alpha) \leq C_3 \cdot \alpha^* \rho(f). \tag{7}$$

Из леммы 4.I вытекает, что

$$e(\beta \circ f \circ \alpha) \leq 2 e(\alpha) \cdot \alpha^* e(\beta \circ f) \leq 4 e(\alpha) \cdot \alpha^* f^* e(\beta) \cdot \alpha^* e(f).$$

Отсюда следует (5), если положить

$$C_1 = 4 \max_{\tilde{M}} e(\alpha) \cdot \max_{N} e(\beta).$$

Из леммы 4.2 и пункта (в) леммы 4.4 получаем:

$$E(\beta \circ f \circ \alpha \,|\, \alpha^{-1} B) \leq C_2' \cdot E(\beta \circ f | B) \leq C_2' C_2'' \cdot E(f|B),$$

где

$$C_2' = 2\max_{\widetilde{M}} e\rho(\alpha)\,,\quad C_2'' = 2\max_{N} e(\beta)\,.$$

Это доказывает неравенство (6), в котором $C_2 = C_2' \cdot C_2''$. Оценка (7) следует из равенства (а) леммы 4.4. Действительно,

$$\rho(\beta\circ f\circ\alpha) = \rho(\alpha)\cdot\alpha^* f^* \rho(\beta)\cdot\alpha^*\rho(f)\,,$$

поэтому достаточно положить

$$C_3 = \max_{\widetilde{M}} \rho(\alpha)\cdot \max_{N} \rho(\beta)\,.$$

Лемма 4.5 доказана.

§ 5. Поведение функционала Дирихле на группе диффеоморфизмов двухсвязного многообразия.

Настоящий параграф посвящен вычислению точной нижней границы множества значений функционала Дирихле E на группе диффеоморфизмов связного замкнутого (компактного и без края) двухсвязного риманова многообразия (связное многообразие называется двухсвязным, если его первая и вторая гомотопические группы тривиальны). Основным результатом параграфа является

Теорема 5.I. Пусть M - произвольное связное замкнутое двухсвязное гладкое многообразие размерности $\geqslant 5$ или одна из стандартных сфер S^3 , S^4 . Тогда существует диффеотопия φ_t ($0 \le t < 1$) многообразия M такая, что $\varphi_0 = id_M$ и для любой римановой метрики на M

$$\lim_{t\to 1} E(\varphi_t) = 0.$$

Утверждение теоремы означает, в частности, что $\inf E = 0$

(т.е. значения функционала E не отделены от нуля) на компоненте единицы группы диффеоморфизмов многообразия M, удовлетворяющего условиям теоремы 5.I. Следовательно, $\inf E = 0$ в гомотопическом классе тождественного отображения id_M многообразия M, причем независимо от выбора римановой метрики на M. Ряд следствий из этого факта будет получен в следующем параграфе. Утверждение теоремы 5.I для сфер S^n $(n \geq 3)$ ранее доказали Иллс и Сэмпсон [27].

Доказательство теоремы проводится явным построением требуемой диффеотопии и включает в себя ряд нижеследующих лемм. Без дополнительных оговорок будут использоваться следующие характеристики отображения f римановых многообразий, введенные в предыдущем параграфе: интегральная плотность $e(f)$ и B-интеграл $E(f|B)$ (определение 4.I), объемная плотность $\rho(f)$ (определение 4.2) и смешанная плотность $e\rho(f)$ формула (4) четвертого параграфа). Через vol будем обозначать функционал объема.

Начнем с построения необходимой нам специальной диффеотопии евклидова пространства. Обозначим через $\mathcal{D}^q(r)$ компактный шар радиуса r в пространстве $\mathbb{R}^q$ с центром в начале координат.

<u>Лемма 5.I</u>. При $q \geq 3$ существует такая диффеотопия φ_t ($0 \leq t < 1$) пространства $\mathbb{R}^q$, что $\varphi_0 = id$ и выполнены следующие условия:

(а) диффеоморфизмы φ_t тождественны вне $\mathcal{D}^q(1)$,

(б) $E(\varphi_t | A_t) \to 0$ при $t \to 1$,

(в) $vol(A_t) \to 0$ при $t \to 1$,

(г) $\rho(\varphi_t) \leq C_1$ на всем $\mathbb{R}^q$ и при всех t,

(д) $e\rho(\varphi_t) \leq C_2$ на $\mathbb{R}^q \setminus B_t$ при всех t, где $A_t = \varphi_t^{-1} \mathcal{D}^q(1/2)$, $B_t = \varphi_t^{-1} \mathcal{D}^q(1/4)$, а положительные константы C_1 и C_2 не зависят от t.

Доказательство. Пусть (s, τ) - сферические координаты в пространстве $\mathbb{R}^q \setminus \{0\}$ (s - элемент единичной сферы). Рассмотрим произвольный диффеоморфизм φ пространства $\mathbb{R}^q$, имеющий вид

$$\varphi(s,\tau) = (s, R(\tau)), \tag{I}$$

где R - некоторая гладкая монотонно возрастающая функция на полупрямой $\{\tau \geqslant 0\}$, равная нулю при $\tau = 0$. Хорошо известно, что матрицы метрических тензоров g_R и g_s на $\mathbb{R}^q$ и S^{q-1} соответственно связаны равенством

$$g_R(s,\tau) = \left(\begin{array}{c|c} \tau^2 \cdot g_s(s) & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array}\right). \tag{2}$$

Из (I) очевидно, что дифференциал диффеоморфизма φ в координатах (s, τ) выражается равенством

$$d\varphi(s,\tau) = \mathrm{diag}\,(1, \dots, 1, R'(\tau)).$$

Следовательно,

$$\varphi^* g_R(s,\tau) = \left(\begin{array}{c|c} R^2 \cdot g_s(s) & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \dots 0 & (R')^2 \end{array}\right). \tag{3}$$

Вычислим объемную плотность диффеоморфизма φ. Взяв квадратный корень отношения определителей матриц (2) и (3), получим:

$$\rho(\varphi) = \left(\frac{\tau}{R}\right)^{q-1} \cdot \frac{1}{R'}. \tag{4}$$

Интегральная плотность диффеоморфизма равна половине следа произведения матрицы (3) и матрицы, обратной к (2):

$$e(\varphi) = \frac{1}{2}\left[(q-1)\left(\frac{R}{\tau}\right)^2 + (R')^2\right]. \qquad (5)$$

Пусть теперь $R_t(\tau)$ $(0 \le t < 1)$ — такое гладкое семейство гладких монотонно возрастающих функций на полупрямой $\{\tau \ge 0\}$, что $R_0(\tau) \equiv \tau$ и для всех t функция $R - \tau$ обращается в ноль при $\tau = 0$ и $\tau \ge 1$ вместе со всеми своими производными. Тогда семейство отображений

$$\varphi_t(s,\tau) = (s, R_t(\tau)) \qquad (0 \le t < 1) \qquad (6)$$

образует диффеотопию $\mathbb{R}^q$, начинающуюся тождественным отображением φ_0 и удовлетворяющую требованиям пункта (а) доказываемой леммы. Сравнение равенств (6) и (I) показывает, что мы вправе использовать формулы (4) и (5) для диффеотопии φ_t. Обозначим через ε_t существующее для каждого t число, определяемое равенством $R_t(\varepsilon_t) = 1/2$, и покажем, что для выполнения требований пунктов (б) – (д) достаточно, чтобы семейство $R_t(\tau)$ удовлетворяло следующим дополнительным условиям:

$$R_t \ge \tau, \quad R_t' \ge A, \qquad (7)$$

$$R_t' \le B \quad \text{при } \tau \ge \varepsilon_t, \qquad (8)$$

$$R_t' \le \frac{C}{\tau} \quad \text{на } [0, \varepsilon_t], \qquad (9)$$

$$R_t' \le \frac{\mathcal{D}}{\tau} R_t \quad \text{на } [\delta_t, \varepsilon_t], \qquad (\mathrm{I0})$$

$$\varepsilon_t \to 0 \quad \text{при } t \to 1, \qquad (\mathrm{II})$$

где A, B, C, $\mathcal{D}$ – не зависящие от t положительные константы, а числа δ_t определяются равенством $R_t(\delta_t) = 1/4$. Действительно, рассмотрим условие (б) на A_t -интеграл отображения φ_t. Из формулы (6) следует, что

$$E(\varphi_t \mid A_t) = \varkappa_q \int_0^{\varepsilon_t} e(\varphi_t)\, \tau^{q-1}\, d\tau,$$

где $\varkappa_q$ – объем $(q-1)$ -мерной сферы единичного радиуса. Поскольку $R_t \leq 1$ на $[0, 1]$, подстановка (9) в (5) приводит к неравенству $e(\varphi_t) \leq \mathrm{const}/\tau^2$, выполненному на $[0, \varepsilon_t]$. Таким образом,

$$E(\varphi_t \mid A_t) \leq \mathrm{const}\, \frac{\varepsilon_t^{q-2}}{q-2},$$

откуда и следует (б) при $q \geq 3$, если учесть (II). Выполнение требования (в) вытекает так же из (II), посколвку

$$\mathrm{vol}(A_t) = \varkappa_q \int_0^{\varepsilon_t} \tau^{q-1}\, d\tau = \varkappa_q \frac{\varepsilon_t^{q}}{q}.$$

Подстановка неравенств (7) в формулу (4) приводит к оценке (г). Из (4) и (5) следует, что

$$e\rho(\varphi_t) = \frac{q-1}{2}\left(\frac{\tau}{R_t}\right)^{q-3} \cdot \frac{1}{R_t'} + \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{R_t}\right)^{q-1} \cdot R_t'.$$

При $q \geq 3$ ограниченность первого слагаемого в правой части последнего равенства вытекает из (7), а второго – из (7) и (8) для $\tau \geq \varepsilon_t$ и из (7) и (I0) при $\tau \in [\delta_t, \varepsilon_t]$. Неравенство (д) доказано.

Для того, чтобы закончить доказательство леммы 5.I, осталось убедиться в существовании описанного выше семейства функций $R_t(\tau)$. Введем обозначения:

$$a_t = \frac{1-t}{4}\ , \quad b_t = \frac{3+t}{4}\ , \quad t \in [0,1).$$

Рассмотрим соответствующее семейство кусочно-линейных непрерывных функций $\overline{R}_t(\tau)$ на полупрямой $\{\tau \geq 0\}$, равных τ вне интервалов (a_t, b_t), линейных на $[a_t, 3a_t/2]$ и $[3a_t/2, b_t]$ и равных $1/2$ при $\tau = \varepsilon_t$, где $\varepsilon_t = 2a_t \to 0$ при $t \to 1$. Эти функции, очевидно, монотонно возрастают, и $\overline{R}_0(\tau) \equiv \tau$. Тривиальный подсчет показывает, что на линейных участках выполнены требования (7) - (10). Таким образом, в качестве семейства $R_t(\tau)$ можно взять результат сглаживания функций $\overline{R}_t(\tau)$, изменяющего их в достаточно малых окрестностях точек излома a_t, $3a_t/2$ и b_t так, что производная R_t' в этих окрестностях монотонна. Лемма 5.I доказана.

Для удобства дальнейшего изложения введем следующее

Определение 5.I. Пусть M - замкнутое (компактное и без края) гладкое многообразие. Компактное подмножество $K \subseteq M$ назовем правильным, если $\overline{\operatorname{int} K} = K$ и существует такая диффеотопия φ_t $(0 \leq t < 1)$ многообразия M, что $\varphi_0 = id_M$ и в любой римановой метрике на M выполняются следующие условия:

(а) $E(\varphi_t \mid K_t) \to 0$ при $t \to 1$,

(б) $e\rho(\varphi_t) \leq C$ на $M \setminus K_t$,

где $K_t = \varphi_t^{-1} K$, а C - не зависящая от t константа. При этом саму диффеотопию φ_t будем называть правильной относительно K.

Отметим, что утверждение теоремы 5.I означает правильность всего многообразия M, удовлетворяющего условиям теоремы 5.I.

<u>Лемма 5.2.</u> Пусть условия определения 5.I выполнены для компактного подмножества K замкнутого многообразия M и диффеотопии φ_t хотя бы в одной римановой метрике на M. Тогда φ_t – правильная относительно K диффеотопия. Более того, если $f: M \to N$ – диффеоморфизм замкнутых многообразий и $K \subseteq M$ – правильное подмножество, то $f(K) \subseteq N$ – тоже правильное подмножество.

Доказательство. Выполнение условий (а) и (б) определения 5.I в любой римановой метрике на M следует из леммы 4.5, что доказывает первое утверждение. Для доказательства второго утверждения обозначим через φ_t диффеотопию многообразия M, правильную относительно компактного подмножества $K \subseteq M$. Фиксируем риманову метрику на M и введем на N такую риманову метрику, в которой диффеоморфизм f является изометрией. В этой метрике для диффеотопии $f \circ \varphi_t \circ f^{-1}$ и подмножества $f(K) \subseteq N$ выполнены все требования определения 5.I, т.к. композиция с изометрией, очевидно, сохраняет функции плотности и $f(K)_t = f(K_t)$. Следовательно, эти требования выполнены в любой другой римановой метрике на N. Лемма 5.2 доказана.

Введенное понятие правильности подмножества и диффеотопии полезно в связи со следующим результатом:

<u>Лемма 5.3.</u> Пусть гладкое закнутое многообразие M обладает таким открытым подмножеством U, которое диффеоморфно диску и имеет правильное дополнение $M \setminus U$. Тогда M правильно, т.е. существует такая диффеотопия Φ_t $(0 \le t < 1)$ многообразия M, что $\Phi_0 = id_M$ и $E(\Phi_t) \to 0$ при $t \to 1$ для любой римановой метрики на M.

Доказательство. Фиксируем на M риманову метрику. Поскольку замыкание подмножества $M\setminus\overline{U}\neq\emptyset$ совпадает с $M\setminus U$ (см. Определение 5.I), существует открытое подмножество $V\subset M$, диффеоморфное диску и содержащее замыкание множества U. Обозначим через ψ_t $(0\leq t\leq 1)$ гладкую гомотопию многообразия M, тождественную вне V и стягивающую U в точку: $\psi_0=id_M$, $\psi_1(U)$ - точка, принадлежащая U. Не составляет труда выбрать эту гомотопию таким образом, что ψ_t является диффеотопией многообразия M при $t<1$. Следовательно, поскольку U-интеграл отображения ψ_1 равен нулю,

$$E(\psi_t\,|\,U)\to 0 \text{ при } t\to 1\ . \qquad (I2)$$

Диффеотопию многообразия M, правильную относительно $M\setminus U$, обозначим через φ_t $(0\leq t<1)$. Определим новую диффеотопию Φ_t многообразия M равенством $\Phi_t=\psi_t\circ\varphi_t$. Понятно, что $\Phi_0=id_M$. Положим $K_t=\varphi_t^{-1}(M\setminus U)$ и представим интеграл Дирихле $E(\Phi_t)$ в виде суммы K_t-интеграла и $(M\setminus K_t)$-интеграла. Используя лемму 4.2, неравенство (в) леммы 4.4 и очевидное равенство $\varphi_t(M\setminus K_t)=U$, получаем:

$$E(\Phi_t)\leq 2E(\varphi_t\,|\,K_t)\cdot\max_{M} e(\psi_t)+2E(\psi_t\,|\,U)\cdot\sup_{M\setminus K_t} e_\rho(\varphi_t).$$

Первое слагаемое в правой части стремится к нулю при $t\to 1$ в силу условия (а) определения 5.I и ограниченности функции $e(\psi_t)$ на компакте $M\times[0,1]$, а второе слагаемое - в силу (I2) и условия (б) определения 5.I. Тот факт, что $E(\Phi_t)\to 0$ при $t\to 1$ в любой римановой метрике на M, следует из леммы 5.2. Лемма 5.3 доказана.

Следующий результат является основным шагом в доказательстве теоремы 5.I.

<u>Лемма 5.4</u>. Пусть M - связное замкнутое гладкое многообразие размерности $n \geqslant 3$, и μ - гладкая функция Морса на M, имеющая один локальный минимум, один локальный максимум и по одной критической точке на каждом критическом уровне. Пусть μ не имеет критических точек с индексами $n-1$ и $n-2$. Тогда для каждого некритического значения $a \in \mathbb{R}$ функции μ подмножество $M^a = \mu^{-1}(-\infty, a] \subset M$ правильно (см. определение 5.I).

Доказательство леммы проводится индукцией по количеству критических точек функции μ, содержащихся в M^a. Пусть такая точка одна. Следовательно, это минимум, а M^a диффеоморфно n-мерному диску. Фиксируем карту $U \subset M$, содержащую M^a, таким образом, что $M^a = \{|x| \leqslant 1/2\}$, где $x : U \xrightarrow{(\cong)} \mathbb{R}^n$ - локальные координаты на U. Перенесем на подмножество $\mathcal{D} = \{|x| \leqslant 1\} \subset U$ евклидову метрику из $\mathbb{R}^n$ и продолжим ее произвольным образом до римановой метрики на всем M. Обозначим через θ_t перенесенную на область U диффеотопию $\mathbb{R}^n$, построенную в лемме 5.I, и определим диффеотопию многообразия M равенством

$$\varphi_t = \begin{cases} \theta_t \text{ на } U, \\ id_M \text{ на } M \setminus U \qquad (0 \leqslant t < 1). \end{cases}$$

Следовательно, $\varphi_0 = id_M$ и на подмножестве $(M \setminus U) \cup (U \setminus \mathcal{D})$ все диффеоморфизмы φ_t тождественны (см. пункт (а) леммы 5.I). Поэтому выполнение условий (а) и (б) определения 5.I вытекает из утверждений (б) и (д) леммы 5.I и очевидного равенства $ep(id_M) \equiv \frac{n}{2}$.

24.8.

Из леммы 5.2 следует, что диффеотопия φ_t правильна относительно M^a, т.е. M^a – правильное подмножество.

Шаг индукции осуществляется при помощи рассмотрения таких некритических значений $a < b$ функции f^μ, что подмножество $M^b \setminus M^a$ содержит ровно одну критическую точку функции f^μ с индексом λ. Хорошо известно, что многообразие M^b диффеоморфно многообразию $M^a \cup H^n_\lambda$, получнному "приклеиванием" к M^a ручки Смейла индекса λ. Опишем структуру множества H^n_λ, следуя работе [I3]. Обозначим через $\omega(t)$ непрерывную при $t \leq 1$ и гладкую при $t < 1$ функцию на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяющую следующим свойствам: а) $\omega = 1/2$ при $t \leq 1/2$, б) $\omega(t)$ возрастает при $t \geq 1/2$, и $\omega(1) = 1$, в) обратная функция $\omega^{-1}(\tau)$ при $\tau > 1/2$ бесконечно дифференцируема и при $\tau = 1$ обращается в ноль вместе со всеми своими производными. Ручка H^n_λ гомеоморфна диску $\mathcal{D}^n$ и определяется формулой

$$H^n_\lambda = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^{n-\lambda} \,\middle|\, |x| \leq 1, |y| \leq \frac{1}{2}\omega(|x|) \right\}. \qquad (I3)$$

Приклеивание ручки H^n_λ к многообразию M^a осуществляется при помощи гладкого отображения подмножества $\{|x| = 1, |y| \leq 1\}$ множества H^n_λ в край ∂M^a. Перечисленные выше свойства функции ω обеспечивают гладкость многообразия $M^a \cup H^n_\lambda$. Можно считать, что ручка H^n_λ вложена в замыкание подмножества $M \setminus M^a$, и существует диффеоморфизм многообразия M, переводящий M^b в $M^a \cup H^n_\lambda$. Из леммы 5.2 вытекает, что для доказательства леммы 5.4 достаточно убедиться в том, что правильность подмножества M^a влечет правильность $M^a \cup H^n_\lambda$, причем условия определения 5.I должны выполняться хотя бы в одной римановой метрике на M .

Продолжим координаты (x,y) ручки H^n_λ до локальной системы координат в некоторой области $U \subset M$ таким образом, чтобы $U \cap M^a = \{|x| \geq 1\}$. Неравенство $n-\lambda \geq 3$ позволяет рассмотреть диффеотопию θ_τ пространства $\mathbb{R}^{n-\lambda}$, построенную в лемме 5.I. Обозначим через $\Theta_\tau : \mathbb{R}^{n-\lambda} \times \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^{n-\lambda}$ такую двухпараметрическую диффеотопию $\mathbb{R}^{n-\lambda}$, что $\Theta_\tau(y,u) = \theta_\tau(y)$ при $u \leq 1$, $\Theta_\tau(y,u) = y$ при $u \geq 2$, и $\Theta_\tau(y,u) = y$ при $|y| > 1$. Определим, наконец, диффеотопию многообразия M равенством

$$\psi_\tau = \begin{cases} (x,y) \to (x, \Theta_\tau(y,|x|)) \text{ на } U, \\ id_M \text{ на } M \setminus U \;, \end{cases} \tag{I4}$$

где $0 \leq \tau < 1$. Введем обозначение

$$Q = \{(x,y) \in U \,|\, |x| \leq 1, |y| \leq 1\} \subset M,$$

перенесем на Q евклидову метрику из $\mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^{n-\lambda}$ и распространим ее до римановой метрики на всем M . Положим $H_\tau = \psi_\tau^{-1} H^n_\lambda$ и исследуем поведение характеристик $E(\psi_\tau | H_\tau)$ и $ep(\psi_\tau)$ диффеотопии ψ_τ при $\tau \to 1$. При этом необходимо учесть следующие включения, вытекающие из (I3) и свойств функции ω :

$$\{|x| \leq 1, |y| \leq \tfrac{1}{4}\} \subset H^n_\lambda \subset Q, \tag{I5}$$

$$H^n_\lambda \subset \{|x| \leq 1, |y| \leq \tfrac{1}{2}\} \subset Q. \tag{I6}$$

Из формулы (I4) и свойств диффеотопии Θ_τ следует, что на множестве Q

$$e(\psi_\tau) = \frac{\lambda}{2} + e(\theta_\tau),$$

$$\rho(\psi_\tau) = \rho(\theta_\tau).$$

Учитывая (I6), получаем:

$$E(\psi_\tau | H_\tau) \leq \frac{\lambda}{2}\,\overline{\varkappa}_\lambda \cdot vol(A_\tau) + \overline{\varkappa}_\lambda \cdot E(\theta_\tau | A_\tau),$$

где $A_\tau = \theta_\tau^{-1}\mathcal{D}^{n-\lambda}(1/2)$, а $\overline{\varkappa}_\lambda$ – объем диска $\mathcal{D}^\lambda(1)$. Следовательно, в силу утверждений (б) и (в) леммы 5.I

$$E(\psi_\tau | H_\tau) \to 0 \quad (\tau \to 1). \tag{I7}$$

Учитывая (I5), получаем, что функция $e\rho(\psi_\tau)$ на $Q \setminus H_\tau$ ограничена сверху максимумом функции $(\lambda/2)\,\rho(\theta_\tau) + e\rho(\theta_\tau)$ на множестве $\mathcal{D}^{n-\lambda}(1) \setminus B_\tau$, где $B_\tau = \theta_\tau^{-1}\mathcal{D}^{n-\lambda}(1/4)$. Следовательно, в силу утверждений (г) и (д) леммы 5.I существует такая не зависящая от τ константа C, что $e\rho(\psi_\tau) \leq C$ на $Q \setminus H_\tau$. Более того, поскольку все диффеоморфизмы ψ_τ тождественны вне множества $M^a \cup Q$,

$$e\rho(\psi_\tau) \leq C \text{ на } M \setminus (M^a \cup H^n_\tau). \tag{I8}$$

Обозначим через φ_t $(0 \leq t < 1)$ существующую по предположению индукции диффеотопию многообразия M, правильную относительно M^a. Условие (а) определения 5.I позволяет выбрать такую гладкую монотонную замену параметра $t(\tau)$, что $t(0) = 0$, $t(1) = 1$ и

$$E(\varphi_{t(\tau)} | M^a_\tau) \cdot \max_M e(\psi_\tau) \to 0 \quad (\tau \to 1), \tag{I9}$$

где $M^a_\tau = \varphi^{-1}_{t(\tau)} M^a$. Определим новую диффеотопию многообразия M равенством

$$\Phi_\tau = \psi_\tau \circ \varphi_{t(\tau)} \qquad (0 \le \tau < 1)$$

и докажем, что Φ_τ удовлетворяет требованиям (а) и (б) определения 5.I относительно компактного подмногообразия $M^a \cup H^n_\lambda$.

а) Введем обозначение $P_\tau = \Phi^{-1}_\tau (M^a \cup H^n_\lambda)$. Выше было указано, что $M^a \cap U = \{|x| \ge 1\}$, поэтому $\psi_\tau(M^a) = M^a$. Следовательно, $P_\tau = M^a_\tau \cup \varphi^{-1}_{t(\tau)} H_\tau$. Представим P_τ - интеграл диффеоморфизма Φ_τ в виде суммы M^a_τ-интеграла и $\varphi^{-1}_{t(\tau)} H_\tau$ - интеграла. На основании леммы 4.2 и неравенства (в) леммы 4.4, учитывая включение $\varphi^{-1}_{t(\tau)} H_\tau \subset M \setminus M^a_\tau$, получаем:

$$E(\Phi_\tau | P_\tau) \le 2E(\varphi_{t(\tau)} | M^a_\tau) \cdot \max_M e(\psi_\tau) + 2E(\psi_\tau | H_\tau) \cdot \sup_{M \setminus M^a_\tau} e\rho(\varphi_{t(\tau)}).$$

Первое слагаемое в правой части стремится к нулю при $\tau \to 1$ в силу (I9), а второе - в силу (I7) и условия (б) определения 5.I. Следовательно,

$$E(\Phi_\tau | P_\tau) \to 0 \quad \text{при } \tau \to 1. \qquad (20)$$

б) Из неравенства (б) леммы 4.4 следует оценка

$$e\rho(\Phi_\tau) \le 2e\rho(\varphi_{t(\tau)}) \cdot \varphi^*_{t(\tau)} e\rho(\psi_\tau).$$

Первый сомножитель в правой части ограничен не зависящей от τ константой на $M \setminus M^a_\tau$ (условие (б) определения 5.I), а второй - на $M \setminus P_\tau$ в силу (I8). Учитывая включение $M \setminus P_\tau \subset M \setminus M^a_\tau$, получаем, что семейство функций $e\rho(\Phi_\tau)$ ограничено в совокупности на множестве $M \setminus P_\tau$. Это утверждение вместе с (20) означает, что диффеотопия Φ_τ удовлетворяет требованиям (а) и (б) определения 5.I. Выше было отмечено, что отсюда вытекает правильность Φ_τ относительно $M^a \cup H^n_\lambda$. Следовательно, подмногообразие $M^a \cup H^n_\lambda$ и диффеоморфное ему подмногообразие M^b правильны. Поскольку некритические значения $a < b$ функции μ были выбраны произвольно, лемма 5.4 доказана.

Доказательство теоремы 5.I завершается объединением утверждений двух последних лемм 5.3 и 5.4. Действительно, пусть M - связное замкнутое двухсвязное гладкое многообразие размерности $\geqslant 6$. Из результатов С.Смейла [24] следует, что на M существует гладкая функция Морса μ, удовлетворяющая требованиям леммы 5.4. Далее, если связное замкнутое двухсвязное гладкое многообразие M имеет размерность $\leqslant 5$, то стандартные рассуждения с привлечением двойственности Пуанкаре и теорем Гуревича и Уайтхеда позволяют заключить, что M гомотопически эквивалентно сфере. Как показано в [23], в размерностях 5 и 6 отсюда следует, что M диффеоморфно сфере. Для всех гладких сфер S^n в размерностях $n \geqslant 3$ требованиям леммы 5.4 удовлетворяет функция Морса, являющаяся ограничением на S^n любого ненулевого вещественного линейного функционала в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Таким образом, нужная функция μ существует на любом многообразии M, удовлетворяющем условиям теоремы 5.I. Положим $M^a = \mu^{-1}(-\infty, a]$, где $a \in \mathbb{R}$ - такое некритическое значение функции μ, что подмножество $M \setminus M^a$ содержит ровно одну критическую точку - максимум функции μ. Компактное подмногообразие M^a правильно (это следует из леммы 5.4), а подмножество $M \setminus M^a$ диффеоморфно открытому диску. Следовательно, выполнены условия леммы 5.3 и многообразие M правильно, т.е. сушествует диффеотопия φ_t $(0 \le t < 1)$ многообразия M, начинающаяся тождественным отображением φ_0 и такая, что $E(\varphi_t) \to 0$ при $t \to 1$ для любой римановой метрики на M. Теорема 5.I доказана.

§ 6. Необходимое топологическое условие существования нетривиальных глобально минимальных гармонических отображений

Перейдем к изучению вопроса о существовании гомотопически нетривиальных гармонических отображений, реализующих глобальный минимум функционала Дирихле E в своем гомотопическом классе гладких отображений. Мы сосредоточим усилия на выяснении необходимых топологических условий существования таких отображений. Важную роль в этом вопросе, как будет показано ниже, играет гомотопический класс $[id_M]$ тождественного отображения гладкого риманова многообразия M. Все рассматриваемые ниже многообразия, отображения и гомотопии как обычно предполагаются гладкими (бесконечно-дифференцируемыми). В частности, мы отождествляем элементы множества $[M, N]$ гомотопических классов отображений многообразий M и N с соответствующими компонентами связности топологического пространства $C^\infty(M, N)$. Введем важную вариационную характеристику риманова многообразия M:

$$E(M) = \inf \{ E(\varphi) \mid \varphi \in [id_M] \}.$$

Вообще, через $\inf E$ мы будем обозначать точную нижнюю границу множества значений функционала Дирихле на некотором подмножестве пространства отображений, специально указываемом в конкретных ситуациях.

Первая теорема, которая будет доказана в настоящем параграфе, в топологических терминах описывает класс римановых многообразий M , удовлетворяющих равенству $E(M)=0$.

24.6.5

Теорема 6.I. Пусть M – замкнутое гладкое риманово многообразие. Тогда $E(M)=0$, если и только если каждая компонента связности многообразия M двухсвязна, т.е. ее первая и вторая гомотопическое группы тривиальны.

Из сформулированной теоремы немедленно вытекает

Следствие 6.I. Если хотя бы одна из групп $\pi_1(M)$ и $\pi_2(M)$ связного замкнутого гладкого многообразия M нетривиальна, то $E(M)>0$ для любой римановой метрики на M .

24.6.5

Для доказательства теоремы 6.I нам понадобятся три нижеследующие леммы. Напомним, что в соответствии с замечанием I.I при рассмотрении гладких дифференциально-геометрических объектов над многообразием с краем предполагается, что эти объекты допускают распространение на некоторое многообразие без края, содержащее исходное многообразие. Точно такой же подход мы будем использовать при рассмотрении прямых произведений, хотя их край, вообще говоря, не является гладким многообразием.

24.9

Лемма 6.I. Пусть M , P и N – компактные гладкие римановы многообразия, P связно и $\inf E=0$ в гомотопическом классе некоторого гладкого отображения $F: M\times P\to N$. Тогда для любой точки $z_0\in P$ $\inf E=0$ в гомотопическом классе отображения $f=F|M\times\{z_0\}$ из M в N .

Доказательство. По условию леммы существует такая последовательность F_i $(i=1,2,\ldots)$ гомотопных отображнию F гладких отображений из $M\times P$ в N , что $E(F_i)\to 0$ при $i\to\infty$. Введем обозначение

$$F_i^z = F_i\,|\,M\times\{z\}: M\longrightarrow N \quad (z\in P).$$

На $M\times P$ предполагается введенной метрика, являющаяся прямым произведением метрик многообразий M и P. Поэтому для любой точки $x \in M$ функции интегральной плотности отображений F_i и F_i^z связаны следующим неравенством (см.формулу (I) четвертого параграфа): (пункта 24.7):

$$e(F_i^z)(x) \leqslant e(F_i)(x, z).$$

Следовательно,

$$\int\limits_P E(F_i^z)\,dv \leqslant E(F_i) \longrightarrow 0 \quad (i \to \infty).$$

Отсюда вытекает существование такой подпоследовательности индексов i_k, что $E(F^z_{i_k}) \to 0$ при $k \to \infty$ почти для всех $z \in P$. Фиксируем такое z, для которого это утверждение выполняется, и положим $f_k = F^z_{i_k}$. Тогда $E(f_k) \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$. В силу связности многообразия P отображение f, определенное в формулировке леммы, гомотопно отображению $F|M \times \{z\}$, которое, в свою очередь, гомотопно f_k для всех k (это следует из гомотопности F и F_{i_k}). Лемма 6.I (24.9.2) доказана.

24.9.

Лемма 6.2. Пусть M - связное замкнутое двухсвязное гладкое риманово многообразие. Тогда $E(M) = 0$.

Доказательство. Если $\dim M \geqslant 5$, то утверждение леммы прямо следует из теоремы 5.I (24.6.9). В общем случае рассмотрим риманово произведение $M \times P$, где P - некоторое связное замкнутое двухсвязное гладкое риманово многообразие размерности $\geqslant 5$ (например - S^5). Тогда многообразие $M \times P$ удовлетворяет условиям теоремы 5.I (24.6.9), откуда следует, что существует такая последовательность F_i $(i = 1, 2, \ldots)$ гомотопных тождественному отображению гладких отображений многообразия $M \times P$ в себя, что $E(F_i) \to 0$ при $i \to \infty$. Обозначим через π проекцию $M \times P$ на первый сомножитель. Из леммы 4.2 очевидно, что $E(\pi \circ F_i) \to 0$ при $i \to \infty$, т.е. $\inf E = 0$ в гомотопическом классе отображения π, поскольку все F_i гомотопны тождественному отображению многообразия $M \times P$. Фиксируем произвольную точку $z \in P$ и отождествим многообразие M с подмногообразием $M \times \{z\}$ в прямом произведении $M \times P$. Тогда $\pi | M \times \{z\} = id_M$. Следовательно, в силу леммы 6.I $\inf E = 0$ в гомотопическом классе отображения id_M. Лемма 6.2 доказана.

Лемма 6.3. Пусть N и M – компактные гладкие римановы многообразия и $E(M) = 0$. Тогда $\inf E = 0$ в любом гомотопическом классе гладких отображений из N в M.

Доказательство. Если многообразие M нульмерно, что утверждение леммы тривиально. Пусть $\dim M > 0$. Фиксируем произвольный гомотопический класс гладких отображений из N в M и выберем в нем такое отображение f, что $f(N) \cap \partial M = \emptyset$. Рассмотрим касательное вдоль f векторное расслоение τ_f над N, описанное в первом параграфе. Из теории конечномерных линейных расслоений известно, что τ_f является подрасслоением тривиального k-мерного расслоения $N \times \mathbb{R}^k \to N$, послойную проекцию которого на τ_f мы обозначим через π. Многообразие $N \times \mathbb{R}^k$ снабдим естественной римановой метрикой произведения, индуцированной римановой метрикой N и евклидовой метрикой $\mathbb{R}^k$. Процедура отождествления слоев расслоений τ_f и τ_M над точками $x \in N$ и $f(x) \in M$ соответственно позволяет рассмотреть гладко параметризованное точками $x \in N$ индуцированное семейство линейных субмерсий $\pi_x : \mathbb{R}^k \longrightarrow (\tau_M)_{f(x)}$. Поскольку N компактно, не ограничивая общности можно считать, что $\|\pi_x\| \le \varepsilon$ для всех $x \in N$, где число $\varepsilon > 0$ выбрано таким образом, что $\operatorname{dist}(f(N), \partial M) \geqslant 2\varepsilon$ (если $\partial M = \emptyset$, то $\varepsilon > 0$ произвольно). Обозначим через $\mathcal{D}^k$ компактный единичный диск в $\mathbb{R}^k$ с центром в начале координат и определим отображение $F : N \times \mathcal{D}^k \to M$ формулой

$$F(x, v) = \operatorname{Exp}^M_{f(x)}(\pi_x v), \tag{I}$$

где Exp^M_y - экспоненциальное отображение многообразия M, корректно определенное в точках $y \in f(N)$ на касательных векторах с нормой $\leq \varepsilon$.

Обозначим через φ_i $(i = 1, 2, \dots)$ существующую по условию леммы последовательность гладких отображений из класса $[id_M]$ таких, что $E(\varphi_i) \to 0$ при $i \to \infty$. Положим

$$F_i = \varphi_i \circ F : N \times \mathcal{D}^k \to M .$$

Введенное формулой (I) отображение F является субмерсией, поэтому из леммы 4.3 следует существования такой положительной константы C, что последовательность $E(F_i)$ мажорируется последовательностью $C \cdot E(\varphi_i)$. Следовательно, $E(F_i) \to 0$ при $i \to \infty$. Понятно, что все отображения F_i гомотопны F. Поэтому $\inf E = 0$ в классе $[F]$. Из леммы 6.I получаем, что $\inf E = 0$ в гомотопическом классе отображения $F | N \times \{0\}$, совпадающего с f в силу (I). Лемма 6.3 доказана.

Доказательство теоремы 6.I. Обозначим M произвольное гладкое риманово многообразие. Понятно, что если M компактно, то $E(M) = 0$ тогда и только тогда, когда то же равенство выполняется для любой компоненты связности многообразия M. Следовательно, теорему 6.I достаточно доказать для связных многообразий. Прямое утверждение теоремы доказано в лемме 6.2: $E(M) = 0$, если M - связное замкнутое двухсвязное риманово многообразие. Докажем обратное утверждением путем сопоставления леммы 24.9. 6.3 и известных теорем о глобально минимальной реализации гомотопических классов. Пусть M – связное замкнутое гладкое риманово многообразие и $E(M) = 0$. Из леммы 24.9. 6.3 получаем, что $\inf E = 0$ в любом гомотопическом классе из $[S^1, M]$ и $[S^2, M]$. Следовательно, не существует нетривиальных гармонических отображений из S^1 или S^2 в M, минимизирующих функционал Дирихле в своем гомотопическом классе. С другой стороны, каждый гомотопический класс отображений из S^1 в M представим глобально минимальной замкнутой геодезической (см., например, [9,I5]). Следовательно, множество $[S^1, M]$ состоит из одного элемента и многообразие M односвязно. Тривиальность $\pi_2(M)$ и, следовательно, двухсвязность M доказывается при помощи другой теоремы реализации, утверждающей, что если $\pi_2(M)$ нетривиальна, то существует нетривиальное гармоническое отображение $S^2 \to M$, минимизирующее функционал Дирихле в своем гомотопическом классе (Сакс и Уленбек 368 [39]). 24.6.5. Теорема 6.I доказана.

В классе компактных симметрических пространств типа I (т.е. не являющихся группами Ли) обнаруживается тесная связь вопросов о существовании глобально минимальных и устойчивых гармонических отображений.

<u>Следствие 6.2</u>. Пусть M – произвольное связное компактное неприводимое неособое симметрическое пространство типа I, снабженное стандартной римановой метрикой. Тогда

(I) все непостоянные гармонические отображения из M в произвольное гладкое риманово многообразие неустойчивы, если и только если $E(M) = 0$,

(2) тождественное отображение id_M устойчиво, если и

только если $E(M) > 0$. следствия 24.6.2.

Доказательство. Утверждение (I) является прямым следствием теорем 2.3 и 6.I. 24.6.5. Докажем утверждение (2). Из утверждения (I) и теоремы 2.I вытекает, что равенство $E(M) = 0$ эквивалентно неустойчивости отображения id_M (т.к. $\dim M > 0$), т.е. устойчивость id_M эквивалентна неравенству $E(M) > 0$. Следствие 6.2 доказано.

Следующая теорема демонстрирует важность роли гомотопического класса тождественного отображения в задаче минимизации функционала Дирихле и показывает, что вариационное равенство $E(M) = 0$, связанное в теореме 6.I с топологическим свойством двухсвязности, влечет равенство нулю точных границ множеств значений функционала E также и в других гомотопических классах.

Теорема 6.2. Пусть M -компактное гладкое риманово многообразие. Тогда следующие три утверждения эквивалентны.

(а) $E(M) = 0$.

(б) $\inf E = 0$ во всех гомотопических классах из $[M, N]$ для произвольного гладкого риманова многообразия N.

(в) $\inf E = 0$ во всех гомотопических классах из $[N', M]$ для произвольного гладкого компактного риманова многообразия N'.

Ослабленный вариант теоремы 6.2 доказан Иллсом и Лемэром в [26], где утверждение (в) распространяется лишь на те гомотопические классы, которые содержат римановы субмерсии.

Из теорем 6.I и 6.2 извлекается

Следствие 6.3. Пусть M - замкнутое связное двухсвязное гладкое многообразие. Тогда в любой римановой метрике на M выполнены утверждения (б) и (в) теоремы 6.2.

Замечание 6.I. Пусть $\varphi_M : M \to \widetilde{M}$ и $\varphi_N : N \to \widetilde{N}$ -

диффеоморфизмы компактных гладких римановых многообразий и $\inf E = 0$ в гомотопическом классе $[f]$ некоторого отображения $f \in C^\infty(M, N)$. Тогда из лемм 4.2 и 4.3 немедленно следует, что $\inf E = 0$ в гомотопическом классе отображения $\varphi_N \circ f \circ \varphi_M^{-1} \in C^\infty(\tilde{M}, \tilde{N})$. В частности, $\inf E = 0$ в классе $[f]$ в любых других римановых метриках на M и N (для доказательства достаточно взять в качестве φ_M и φ_N тождественные отображения экземпляров гладких многообразий M и N соответственно, снабженных разными римановыми метриками).

24.6.6.

Доказательство теоремы 6.2. Импликации (б) $\Rightarrow$ (а) и (в) $\Rightarrow$ (а) очевидны (достаточно воспользоваться подстановками $N = M$ и $N' = M$). Импликация (а) $\Rightarrow$ (в) доказана в лемме 6.3. Предположим, что $E(M) = 0$, и докажем утверждение (б). Фиксируем произвольное гладкое отображение $f: M \to N$ и обозначим через φ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ последовательность гладких отображений многообразия M в себя такую, что $\varphi_i \in [id_M]$ и $E(\varphi_i) \to 0$ при $i \to \infty$. Из леммы 4.2 получаем, что

$$E(f \circ \varphi_i) \leq const \cdot E(\varphi_i) \to 0 \quad (i \to \infty).$$

Поскольку все отображения $f \circ \varphi_i$, очевидно, гомотопны f, отсюда следует, что $\inf E = 0$ в гомотопическом классе $[f]$. Утверждение (б) доказано, т.к. отображение f было выбрано произвольно. Теорема 6.2 доказана.

<u>Следствие 6.4</u>. Пусть M и N – произвольные связные компактные гладкие римановы многообразия и $f \in C^\infty(M, N)$ – глобально минимальное (в своем гомотопическом классе) гармоническое отображение. Тогда $f = const$, если хотя бы одно из многообразий M и N двухсвязно и не имеет края.

Доказательство. Если одно из многообразий M и N не

следствие 24.6.4.

имеет края и двухсвязно, то $\inf E = 0$ в гомотопическом классе тождественного отображения этого многообразия (теорема 6.1). При этом соответствующая импликация (а) $\Rightarrow$ (б) или (а) $\Rightarrow$ (в) теоремы 6.2 показывает, что $\inf E = 0$ в гомотопическом классе $[f]$. Следовательно, $E(f) = 0$, т.е. f постоянно, т.к. M связно. Следствие 6.4 доказано.

Замечание 6.2. Пусть M и N - связные замкнутые гладкие римановы многообразия и хотя бы одно из них двухсвязно. В доказательстве следствия 6.4 установлено, что $\inf E = 0$ в любом гомотопическом классе $\alpha \in [M, N]$. Если при этом M и N являются (вещественно) аналитическими многообразиями, то применение известной теоремы об аналитической аппроксимации приводит к следующему утверждению: в каждом гомотопическом классе $\alpha \in [M, N]$ содержатся аналитические отображения f со сколь угодно малым значением $E(f)$ функционала Дирихле.

Дальнейшие результаты связаны с рассмотрением прямых произведений $M \times P$ гладких многообразий. Если оба многообразия M и P не имеют края, то структура гладкого многообразия на $M \times P$ вводится канонически. Если это не так, то мы будем, как обычно, предполагать, что рассматриваемые гладкие объекты определены на некотором гладком многообразии без края, содержащем открытую область $(\operatorname{int} M) \times (\operatorname{int} P)$ и кусочно гладкую гиперповерхность $\partial(M \times P)$. Если M и P - римановы многообразия, то многообразие $M \times P$ с канонической метрикой прямого произведения будем называть римановым прямым произведением.

Теорема 6.3. Рассмотрим компактные связные гладкие римановы многообразия M , N , Q и обозначим через π_N и π_Q канонические проекции риманова прямого произведения $N \times Q$ на пер-

№6

вый и второй сомножители соответственно. Пусть Q двухсвязно и не имеет края. Тогда

$$\inf_{[F]} E = \inf_{[\pi_N \circ F]} E$$

для любого $F \in C^\infty(M, N \times Q)$. При этом $\inf E$ на $[F]$ не достигается, если гомотопический класс $[\pi_Q \circ F]$ нетривиален, т.е. не содержит постоянных отображений.

Теорема 24.6.7.

Доказательство. Введем обозначения $f = \pi_N \circ F$ и $\varphi = \pi_Q \circ F$. Отображения f и φ независимы и определяют $F = (f, \varphi)$, причем

$$E(F) = E(f) + E(\varphi) \geq \inf_{[f]} E . \tag{2}$$

24.

В силу следствия 6.3 существует последовательность $\varphi_i \in [\varphi]$ ($i = 1, 2, \ldots$) такая, что $E(\varphi_i) \to 0$ при $i \to \infty$. Пусть $f_i \in [f]$ ($i = 1, 2, \ldots$) - произвольная последовательность, минимизирующая E на $[f]$ (т.е. $E(f_i) \to \inf_{[f]} E$ при $i \to \infty$). Положим $F_i = (f_i, \varphi_i)$. Тогда

$$E(F_i) = E(f_i) + E(\varphi_i) \to \inf_{[f]} E \quad (i \to \infty). \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что

$$\inf_{[F]} E = \inf_{[f]} E .$$

Если класс $[\varphi]$ нетривиален, то $E(\varphi') > 0$ для всех $\varphi' \in [\varphi]$ и неравенство (2) не может обратиться в равенство. Это означает недостижимость $\inf E$ на $[F]$. Теорема 6.3 доказана.

N6

Следствие 6.5. Пусть выполнены условия теоремы 6.3, $\partial M = \partial N = \varnothing$ и двумерная кривизна N неположительна. Предположим, что оба отображения $\pi_N \circ F$ и $\pi_Q \circ F$ гомотопически нетривиальны. Тогда $\inf E$ положителен в классе $[F]$, но не достигается ни на одном гладком отображении из $[F]$.

следствие 24.6.5.

Доказательство. Недостижимость $\inf E$ на $[F]$ следует из теоремы 6.3 (24.6.7). Далее, в работах [I4,27] (1, 202) доказано, что любой класс $[\pi_N \circ F]$ реализуется глобально минимальным гармоническим отображением $\pi_N \circ F_0$, т.к. кривизна N неположительна. Это отображение непостоянно, т.к. $[\pi_N \circ F]$ нетривиален. Следовательно,

$$\inf_{[F]} E = \inf_{[\pi_N \circ F]} E = E(\pi_N \circ F_0) > 0.$$

Следствие 6.5 доказано.

Теорема 6.4. Рассмотрим компактные связные гладкие римановы многообразия M, N, P, Q и произвольные гладкие отображения $f: M \to N$ и $\varphi: P \to Q$. Обозначим через $f \times \varphi$ соответствующее индуцированное отображение из $M \times P$ в $N \times Q$. Пусть хотя бы одно из многообразий P и Q двухсвязно и не имеет края. Тогда

$$\inf_{[f \times \varphi]} E = vol(P) \cdot \inf_{[f]} E,$$

где $vol(P)$ – объем многообразия P (если $\dim P = 0$, то положим $vol(P) = 1$). При этом $\inf E$ на $[f \times \varphi]$ не достигается, если гомотопический класс $[\varphi]$ нетривиален.

теорема 24.5.8.

Доказательство. Если $\dim P = 0$, то утверждение теоремы тривиально. Будем считать, что $\dim P > 0$. Обозначим через π_N и π_Q проекции риманова прямого произведения $N \times Q$ на первый и второй сомножители соответственно. Для произвольных точек $x \in M$, $y \in P$ введем соответствующие канонические вложения

$$\begin{aligned} i_y &: M \to M \times \{y\} \subset M \times P, \\ i_x &: P \to \{x\} \times P \subset M \times P. \end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим произвольное гладкое отображение $F \in [f \times \varphi]$ и положим

$$\begin{aligned} F_y &= \pi_N \circ F \circ i_y : M \to N, \\ F_x &= \pi_Q \circ F \circ i_x : P \to Q. \end{aligned} \tag{5}$$

Понятно, что нормы Гильберта-Шмидта операторов dF, dF_x и dF_y связаны неравенством $\|dF\|^2 \geqslant \|dF_x\|^2 + \|dF_y\|^2$. Следовательно, (см. определение I.3).

$$E(F) \geqslant \int_M E(F_x)\,dx + \int_P E(F_y)\,dy \geqslant$$

$$\geqslant vol(M) \cdot E(F_{x_0}) + vol(P) \cdot E(F_{y_0}) = E(F_{y_0} \times F_{x_0}), \tag{6}$$

где dx и dy -элементы объема римановых многообразий M и P соответственно, а x_0 и y_0 - точки минимума непрерывных функций $E(F_x)$ и $E(F_y)$ на компактных многообразиях M и P соответственно.

Обозначим через $[f] \times [\varphi]$ множество гладких отображений вида $f' \times \varphi' : M \times P \to N \times Q$ таких, что $f' \in [f]$ и $\varphi' \in [\varphi]$. Понятно, что $[f] \times [\varphi] \subset [f \times \varphi]$

24.9.

Лемма 6.4. Для любых $x \in M$ и $y \in P$

$$F_y \times F_x \in [f] \times [\varphi].$$

Доказательство. Поскольку $F \in [f \times \varphi]$, существует гладкое отображение $\Phi : M \times P \times I \to N \times Q$ (где $I = [0, 1]$) такое, что

$$\Phi | M \times P \times \{0\} = F, \qquad \Phi | M \times P \times \{1\} = f \times \varphi . \tag{7}$$

Введем следующие вложения, индуцированные вложениями (4):

$$\hat{i}_y = i_y \times id_I : M \times I \to M \times P \times I, \qquad \hat{i}_x = i_x \times id_I : P \times I \to M \times P \times I . \tag{8}$$

Рассмотрим отображения

$$\Phi_y = \pi_N \circ \Phi \circ \hat{i}_y : M \times I \to N,$$

$$\Phi_x = \pi_Q \circ \Phi \circ \hat{i}_x : P \times I \to Q .$$

Из (5), (7) и (8) получаем:

$$\Phi_y | M \times \{0\} = F_y,$$

$$\Phi_y | M \times \{1\} = f,$$

$$\Phi_x | M \times \{0\} = F_x,$$

$$\Phi_x | M \times \{1\} = \varphi,$$

т.е. $F_y \in [f]$ и $F_x \in [\varphi]$. Лемма 6.4 доказана.

Пусть последовательность гладких отображений $F_i \in [f \times \varphi]$ ($i = 1, 2, \dots$) минимизирует E в классе $[f \times \varphi]$. Из (6) и леммы 6.4 вытекает, что отображения F_i можно выбрать в виде $F_i = f_i \times \varphi_i \in [f] \times [\varphi]$. Следовательно,

$$\inf_{[f \times \varphi]} E = \inf_{[f] \times [\varphi]} E . \tag{9}$$

Для любого гладкого отображения $f' \times \varphi' \in [f] \times [\varphi]$ имеем:

$$E(f'\times\varphi') = vol(P)\cdot E(f') + vol(M)\cdot E(\varphi') \geqslant$$

$$\geqslant vol(P)\cdot E(f') \geqslant vol(P)\cdot \inf_{[f]} E \quad . \tag{10}$$

24.

В силу следствия 6.3 существует последовательность $\varphi_i \in [\varphi]$ ($i=1,2,\dots$) такая, что $E(\varphi_i)\to 0$ при $i\to\infty$. Пусть $f_i \in C^\infty(M,N)$ ($i=1,2,\dots$) – произвольная последовательность, минимизирующая E на $[f]$, т.е. $f_i\in[f]$ и $E(f_i)\to \inf_{[f]} E$ при $i\to\infty$. Учитывая равенство в (10), получаем:

$$E(f_i\times\varphi_i) \to vol(P)\cdot \inf_{[f]} E \quad (i\to\infty)\,. \tag{11}$$

Из (9) – (11) следует, что

$$\inf_{[f\times\varphi]} E = \inf_{[f]\times[\varphi]} E = vol(P)\cdot \inf_{[f]} E\,.$$

Если гомотопический класс $[\varphi]$ нетривиален, то $E(\varphi')>0$ для всех $\varphi'\in[\varphi]$. В частности, первое неравенство в (10) не может обратиться в равенство. Это означает недостижимость $\inf E$ на $[f]\times[\varphi]$ и, следовательно, на $[f\times\varphi]$. Теорема 6.4 доказана.

Следствие 6.6. Пусть выполнены условия теоремы 6.4 и в каждой компоненте связности пространства $C^\infty(M,N)$ содержится глобально минимальное гармоническое отображение. Предположим, что оба отображения f и φ гомотопически нетривиальны. Тогда $\inf E>0$ на $[f\times\varphi]$, но не достигается ни на одном гладком отображении из этого гомотопического класса.

Доказательство. Недостижимость $\inf E$ на $[f\times\varphi]$ следует из теоремы 24.6.8 6.4. Далее, пусть $\inf E$ в классе $[f]$ достигается на отображении f_0. Тогда

$$\inf_{[f\times\varphi]} E = vol(P)\cdot\inf_{[f]} E = vol(P)\cdot E(f_0) > 0,$$

т.к. $f_0 \neq const$ в силу нетривиальности класса $[f]$. Следствие 6.6 доказано.

Следствие 6.7. Пусть M и P -связные замкнутые гладкие римановы многообразия, причем $\dim P > 0$, группы $\pi_1(P)$ и $\pi_2(P)$ тривиальны, а хотя бы одна из групп $\pi_1(M)$ и $\pi_2(M)$ нетривиальна. Тогда $\inf E$ в гомотопическом классе тождественного отображения многообразия $M\times P$ положителен, но не реализуется ни на одном гладком отображении из этого гомотопического класса.

(следствия 24.6.7.)

Доказательство. Положительность $\inf E$ в классе $[id]$ тождественного отображения многообразия $M\times P$ (т.е. неравенство $E(M\times P) > 0$) вытекает из следствия 24. 6.I, т.к. одна из групп $\pi_1(M\times P)$ и $\pi_2(M\times P)$, по условию, нетривиальна. Недостижимость $\inf E$ в $[id]$ следует из теоремы 24.6.8 6.4. Действительно, $id = id_M\times id_P$, а гомотопический класс $[id_P]$ нетривиален, т.к. P замкнуто и $\dim P > 0$. Следствие 6.7 доказано.

N6

§ 7. Некоторые свойства пространств Соболева отображений римановых многообразий

Рассмотрим компактные гладкие римановы многообразия M и N и фиксируем изометрическое вложение N в евклидово пространство $\mathbb{R}^K$ достаточно большой размерности. Рассмотрим стандартное линейное топологическое пространство Соболева $W_p^m(M)$ классов эквивалентных обобщенных функций на M, которые вместе со своими обобщенными производными до порядка m включительно принадлежат $L_p(M)$ (интегрируемы в степени $p > 0$). Обозначим через $W_p^m(M, \mathbb{R}^k)$ прямое произведение k экземпляров пространства $W_p^m(M)$, понимаемое как линейное топологическое пространство отображений из M в $\mathbb{R}^k$ и являющееся пополнением $C^\infty(M, \mathbb{R}^k)$ по норме прямого произведения. Допуская некоторую неточность, мы будем говорить об отображениях $f \in W_p^m(M, \mathbb{R}^k)$, хотя элементами пространства Соболева являются классы эквивалентных (совпадающих почти всюду) отображений. Вложение N в $\mathbb{R}^k$ позволяет считать N подмногообразием евклидова пространства.

<u>Определение 7.I</u>. Пространством Соболева $W_p^m(M, N)$ отображений компактных гладких римановых многообразий M и N называется снабженное индуцированной топологией подмножество в $W_p^m(M, \mathbb{R}^k)$, состоящее из таких отображений $f: M \to \mathbb{R}^k$, что $f(x) \in N$ почти для всех $x \in M$.

Поскольку L_p-сходимость последовательности функций влечет существование подпоследовательности, сходящейся поточечно почти всюду, подпространство $W_p^m(M, N)$ замкнуто в $W_p^m(M, \mathbb{R}^k)$. Убедимся в том, что топология пространства Соболева не зависит от выбора вложения в евклидово пространство и, более того, от выбора римановых метрик на многообразиях.

<u>Лемма 7.I</u>. Пусть компактные гладкие римановы многообразия M и N диффеоморфны римановым многообразиям M' и N' соответственно. Тогда для любых изометрических вложений многообразий N и N' в евклидовы пространства соответствующие пространства Соболева $W_p^m(M, N)$ и $W_p^m(M', N')$ гомеоморфны.

Доказательство. Обозначим через $\varphi: M \to M'$ и $\psi: N \to N'$ существующие по условию леммы диффеоморфизмы и фиксируем произвольные изометрические вложения многообразий N и N' в евклидовы пространства $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно. Не ограничивая общности можно считать, что $q = k$ и диффеоморфизм ψ продолжен до диффеоморфизма Ψ пространства $\mathbb{R}^k$, тождественного вне некоторого компактного подмножества. Известная теорема об инвариантности пространств соболевских функций относительно замены переменных показывает, что отображение $\alpha : C^\infty(M, \mathbb{R}^k) \to$ $\to C^\infty(M', \mathbb{R}^k)$, определенное формулой $\alpha(f) = f \circ \varphi^{-1}$, продолжается до гомеоморфизма $\hat{\alpha}$ пространств $W_p^m(M, \mathbb{R}^k)$ и $W_p^m(M', \mathbb{R}^k)$. При этом $\hat{\alpha}\left(W_p^m(M, N)\right) = W_p^m(M', N)$. Точно так же, оператор композиции $\beta(f) = \Psi \circ f$ отображений $f \in C^\infty(M', \mathbb{R}^k)$ с финитным диффеоморфизмом Ψ индуцирует такой гомеоморфизм $\hat{\beta}$ пространства $W_p^m(M', \mathbb{R}^k)$, что $\hat{\beta}\left(W_p^m(M', N)\right) = W_p^m(M', N')$. Следовательно, композиция $\hat{\beta} \circ \hat{\alpha}$ является искомым гомеоморфизмом пространств $W_p^m(M, N)$ и $W_p^m(M', N')$. Лемма 7.I доказана.

В дальнейшем нас будет интересовать пространство Соболева $W_2^1(M, N)$. Норму $\|\cdot\|_1$ в объемлющем гильбертовом пространстве $W_2^1(M, \mathbb{R}^k)$ можно задавать многими эквивалентными способами. Мы будем использовать формулу

$$\|f\|_1^2 = \int_M |f|^2 dv + \frac{1}{2}\int_M \|df\|^2 dv, \qquad \text{(I)}$$

где $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^k)$, dv - элемент объема на M, $|\cdot|$ - евклидова норма в $\mathbb{R}^k$. Первое слагаемое в (I) совпадает с квадратом L_2 - нормы $\|f\|_0$ отображения f, а второе - с интегралом Дирихле $E(f)$. Пространство $W_2^1(M, \mathbb{R}^k)$ является пополнением $C^\infty(M, \mathbb{R}^k)$ по норме (I), поэтому продолжение функционала Дирихле на пространство Соболева $W_2^1(M, N)$ корректно определяется следующей простой формулой:

$$E(f) = \|f\|_1^2 - \|f\|_0^2,$$

$$f \in W_2^1(M, N) \subset W_2^1(M, \mathbb{R}^k).$$

Тесная связь функционала Дирихле с нормой объемлющего гильбертова пространства позволяет извлечь из результатов предыдущего параграфа следствия, касающиеся топологической структуры "нелинейного" пространства Соболева.

Теорема 7.I. Пусть M - связное замкнутое гладкое многообразие. Тогда двухсвязность M эквивалентна любому из следующих двух утверждений, выполненному для всех связных компактных гладких римановых многообразий N и при произвольном выборе римановой метрики на M.

(а) Замыкание в $W_2^1(M, N)$ любой компоненты связности пространства $C^\infty(M, N)$ содержит множество постоянных отображений из M в N.

(б) То же утверждение с переменой местами M и N.

Прежде чем доказывать сформулированную теорему, отметим очевидно вытекающее из нее

Следствие 7.I. Пусть M и N -произвольные связные замкнутые гладкие римановы многообразия и хотя бы одно из них двухсвязно. Тогда пересечение замыканий в $W_2^1(M, N)$ всех компонент связности пространства $C^\infty(M, N)$ непусто и содержит множество постоянных отображений. В частности, замыкание пространства $C^\infty(M, N)$ в $W_2^1(M, N)$ связно.

Для доказательства теоремы 7.I нам понадобится

Лемма 7.2. Пусть $f_i : M \to N$ $(i = 1, 2, \dots)$ - такая последовательность гладких отображений компактных связных римановых многообразий, что $E(f_i) \to 0$ при $i \to \infty$. Тогда существует подпоследовательность этой последовательности, сходящаяся в $W_2^1(M,N)$ к постоянному отображению.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}$ диск единичного радиуса и размерности $n = \dim M$ с центром в начале координат в $\mathbb{R}^n$. Сначала докажем утверждение леммы для последовательности гладких ограниченных в совокупности функций φ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ на $\mathcal{D}$. Положим

$$\tilde{\varphi}_i = \varphi_i - m_i\,, \quad m_i = \int_{\mathcal{D}} \varphi_i\, dv\,,$$

и воспользуемся неравенством Пуанкаре (см., например [7, гл.II, § 4]) для функций $\tilde{\varphi}_i$:

$$\int_{\mathcal{D}} |\tilde{\varphi}_i|^2 dv \leq const \left[\int_{\mathcal{D}} \tilde{\varphi}_i\, dv + 2 \cdot E(\tilde{\varphi}_i) \right].$$

Понятно, что $E(\tilde{\varphi}_i) = E(\varphi_i) \longrightarrow 0$ при $i \to \infty$, а средние значения всех $\tilde{\varphi}_i$ равны нулю. Следовательно, последовательность $\tilde{\varphi}_i$ при $i \to \infty$ сходится к нулю в $W_2^1(\mathcal{D})$. Ограниченная последовательность m_i обладает сходящейся подпоследовательностью чисел $m_{i_p} \to m_\infty$ $(p \to \infty)$, поэтому соответствующая подпоследовательность функций φ_{i_p} сходится к постоянной функции $\varphi_\infty \equiv m_\infty$ в $W_2^1(\mathcal{D})$.

Фиксируем вложение многообразия N в $\mathbb{R}^k$ и конечное покрытие компактного многообразия M подмножествами V_j $(j = 1, 2, \ldots, \tau)$, диффеоморфными либо диску $\mathcal{D}$, либо полудиску $\mathcal{D}_+ = \{x \in \mathcal{D} \mid x^n \geqslant 0\}$. Учитывая лемму 7.I и очевидное обобщение только что доказанного утверждения на случай соболевских пространств вектор-функций на диске, получаем, что для всех V_j последовательность ограничений $f_i | V_j$ $(i = 1, 2, \ldots)$

обладает подпоследовательностью, сходящейся в $W_2^1(V_j, \mathbb{R}^k)$ к постоянному отображению $V_j \to c_j \in \mathbb{R}^k$.

Можно считать, что открытые подмножества $\operatorname{int} V_j$ $(j=1,2,\dots,\tau)$ также покрывают M. Поскольку M связно, это позволяет упорядочить элементы покрытия таким образом, что для любого $1<j_0\le\tau$

$$vol\left[V_{j_0}\cap\left(\bigcup_{j=1}^{j_0-1}V_j\right)\right]>0 .$$

Обозначим через $f_i^{(1)}$ сходящуюся в $W_2^1(V_1, \mathbb{R}^k)$ подпоследовательность последовательности f_i и выберем уже из $f_i^{(1)}$ подпоследовательность $f_i^{(2)}$, сходящуюся в $W_2^1(V_2, \mathbb{R}^k)$ и, следовательно, в $W_2^1(V_1\cup V_2, \mathbb{R}^k)$. Из поточечной сходимости почти всюду на $V_1\cap V_2$ обеих последовательностей вытекает, что $c_2=c_1$. Продолжая этот процесс, мы получим подпоследовательность $f_i^{(\tau)}$ исходной последовательности f_i, сходящуюся в $W_2^1(M, \mathbb{R}^k)$ к постоянному отображению $f_\infty\equiv c_1\in\mathbb{R}^k$. Из поточечной сходимости $f_i^{(\tau)}$ почти всюду на M следует, что $c_1\in N$. Лемма 7.2 доказана.

Доказательство теоремы 7.I. Если M двухсвязно, то из теорем 6.I и 6.2 следует, что $\inf E=0$ на любой компоненте связности пространств $C^\infty(M, N)$ и $C^\infty(N, M)$ для любого гладкого компактного риманова многообразия N и при произвольном выборе римановой метрики на M. Используя лемму 7.2, получаем, что замыкание любой компоненты связности этих пространств в $W_2^1(M, N)$ и $W_2^1(N, M)$ соответственно содержит хотя бы одно постоянное отображение. Поскольку M и N связны, то же замыкание содержит все постоянные отображения, т.е. выполнены утверждения (а) и (б) доказываемой теоремы.

Наоборот, пусть выполнено утверждение (а) для любого компактного гладкого риманова многообразия N. Тогда из формулы (I) очевидно, что $\inf E = 0$ в любом гомотопическом классе гладких отображений из M в N. Поэтому двухсвязность M вытекает из импликации (б) $\Rightarrow$ (а) теоремы 6.2 и из теоремы 6.I. Если для тех же N выполнено утверждение (б) доказываемой теоремы, то двухсвязность M аналогично следует из импликации (в) $\Rightarrow$ (а) теоремы 6.2 и из теоремы 6.I. Теорема 7.I доказана.

ЛИТЕРАТУРА

I. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. – М.:Наука, I979.

2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы теории гомологий. – М.:Наука,I984.

3. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. – М.: Мир, I97I.

4. Зуланке Р., Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения. – М.: Мир, I975.

5. Фоменко А.Т. Вариационные методы в топологии. –М. :Наука, I982.

6. Фоменко А.Т. Топологические вариационные задачи. – М.: Изд-во МГУ, I984.

7. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, I977.

8. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. – М.:Мир, I964.

9. Клингенберг В. Лекции о замкнутых геодезических. – М.:Мир, I982.

I0. Фоменко А.Т. Периодичность Ботта с точки зрения многомерного функционала Дирихле. – Изв. АН СССР, серия матем.,I97I, т.35, вып.3, с.667-68I.

II. Фоменко А.Т. Вполне геодезические модели циклов. – В кн.: Труды сем. по вект. и тенз.анализу, М.:Изд-во МГУ, I972, вып.I6, с.I4-98.

I2. Новиков С.П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса. – УМН, I982, т.37, вып.5, с.3-49.

I3. Аносов Д.В. Приложение. – В кн.: Милнор Дж. Теория Морса, М.:Мир, I965.

I4. Альбер С.И. О пространствах отображений в многообразие отрицательной кривизны. - ДАН СССР, I968, т.I78, № I, с.I3-I6.

I5. Альбер С.И. Топология функциональных многообразий и вариационное исчисление в целом. - УМН, I970, т.25, вып.4, с.57-I22.

I6. Плужников А.И. О гармонических отображениях римановых поверхностей и расслоенных многообразий. - Матем. Сборник,I980, т. II3(I55), вып.2, с.340-347.

I7. Плужников А.И. Некоторые свойства гармонических отображений в случае сфер и групп Ли. -ДАН СССР, I983, т.268, № 6, с.I300-I302.

I8. Плужников А.И. Индексы гармонических отображений сфер. - В кн.: Геометрия и топология в глобальных нелинейных задачах, Воронеж: Изд-во ВГУ, I984, с.I62-I66.

I9. Плужников А.И. Задача минимизации функционала энергии. - М.,I984. 40 с. - Рукопись представлена Инст-ом проблем управления, Москва. Деп. в ВИНИТИ I авг. I984, № 5584-84.

20. Тырин А.В. Критические точки многомерного функционала Дирихле. - Матем. Сборник,I984, т.I24, вып.I, с.I46-I58.

2I. Мантуров О.В. Однородные римановы пространства с неприводимой группой вращений. -В кн.: Труды сем. по вект. и тенз. анализу, М.: Изд-во МГУ, I966, вып.I3, с.68-I45.

22. Simons J. Minimal varieties in riemannian manifolds. - Annals of Math.,I968, v.88, N I, p.62-I05. (Русский перевод: Саймонс Дж. Минимальные подмножества римановых многообразий. - В кн.: Целочисленные потоки и минимальные поверхности, М.:Мир, I973, с.I32-I97).

23. Smale S. Generalized Poincare's conjecture in dimensions greater than four.- Annals of Math.,I96I, v.74, N 2, p.39I-

406. (Русский перевод: Смейл С. Обобщенная гипотеза Пуанкаре для размерностей, больших четырех. -Математика (сб.перев.), I962, т.6, № 3, с.I39-I55).

24. Smale S. On the structure of manifolds.- Amer.J. Math., I962, v.84, p.387-399. (Русский перевод: Смейл С. О строении многообразий. - Математика (сб.перев.), I964, т.8, № 4, с.95-I08).

25. Eells J., Lemaire L. A report on harmonic maps.- Bull.London Math. Soc.,I978, v.I0, N I, p.I-68.

26. Eells J., Lemaire L. Selected topics in harmonic maps.- Regional conf. ser. in math.(Conf. board of the math.sciences), USA: N.S.F., I983, v.50.

27. Eells J., Sampson J.H. Harmonic mappings of riemannian manifolds.- Amer.J.Math., I964, v.86, N I, p.I09-I60.

28. Eells J., Wood J.C. Harmonic maps from surfaces to complex projective spaces.- Advances in Math.,I983, v.49, N 3, p.2I7-263.

29. Morrey C.B. Multiple integrals in the calculus of variations.- Berlin: Springer, I966.

30. Hopf H., Rinow W. Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche.-Comment. Math.Helv.,I93I, v.3, p.209-225.

3I. Lemaire L. Applications harmoniques de surfaces riemanniennes.- J. Diff.Geom.,I978, v.I3, p.5I-78.

32. Lemaire L. Applications harmoniques de varie'te's produits.- Comm.Math.Helv.,I977, v.52, N I, p.II-24.

33. Smale S. On the Morse index theorem.- J. Math. and Mech., I965, v.I4, N 6, p.I049-I055.

34. Non-linear problems in geometry. Proc.conf. at Katata.-
461 Tokyo, I979.

35. Smith R.T. Harmonic mappings of spheres.- Amer.J.Math.,
385 I975, v.97, N 2, p.364-385.

36. Smith R.T. The second variation formula for harmonic map-
334 pings.- Proc.Amer.Math.Soc.,I975, v.47, N I, p.229-236.

37. Mazet E. La formule de la variation secondle de l'energie
454 au voisinage d'une application harmonique.- J.Diff.Geom.,
I973, v.8, p.279-296.

38. Lichnerowicz A. Applications harmoniques et varie'te's
288 kählериennes.- In:Symp.Math.,Bologna,I970, v.3, p.34I-402.

39. Sacks J., Uhlenbeck K. The existence of minimal immersions
368 of 2-spheres.- Annals of Math., ser.2, I98I, v.II3, N I,
p.I-24.

40. Xin Y.L. Some results on stable harmonic maps.- Duke Math.
411 J., I980, v.47, N 3, p.609-6I3.

4I. Hamilton R.S. Harmonic maps of manifolds with boundary.-
458 Lecture Notes in Math., Berlin- N.Y.: Springer-Verlag,I975,
v.47I.

42. Hildebrandt S., Kaul H., Widman K.O. An existence theorem
459 for harmonic mappings of Riemannian manifolds.- Acta Math.,
I977, v.I38, N I, p.I-I6.

43. Karcher H., Wood J.C. Non-existence results and growth
460 properties for harmonic maps and forms.- J.Für de Reine und
Angewandte Math., I984, b.353, I65-I80.

44. Hartman P. On homotopic harmonic maps.- Canad.J.of Math.,
250 I967, v.I9, N 4, p.673-687.

45. Leung P.- F. On the stability of harmonic maps.- In: Lecture
293 Notes in Math., Berlin- N.Y.: Springer-Verlag, I982, v.949.

p.I22–I29.

46. Erdem S., Wood J.C. On the construction of harmonic maps into a grassmannian.– J. London Math. Soc.,ser.2, I983, v.28, p.I6I–I74.

47. Фоменко А.Т. Многомерные вариационные методы в топологии экстремалей. – УМН, I98I, т.36, вып.6, с.I05–I35.

48. Тырин А.В. О свойстве отсутствия локальных минимумов у многомерного функционала Дирихле. – УМН, I984, т.39, вып.2, с.I93–I94.

49. Вишик М.И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений. – Матем. Сборник, I95I, т.29, вып.3, с.6I5–676.