Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 515.162.6

Пермяков Дмитрий Алексеевич

Погружения графов в поверхности

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

академик РАН,

профессор А.Т. Фоменко,

к.ф.м.н. Е.А. Кудрявцева

Москва — 2016

Содержание

Введение

Обзор основных известных результатов

Погружения кривых всегда вызывали интерес. Погружение кривой в плоскость естественно возникает как проекция узла. Гаусс [25], см. стр. 271-286, рассматривал конечные последовательности букв, каждая из которых встречается дважды. Он задавался вопросом, какие из таких последовательностей соответствуют самопересечениям проекции узла на плоскость. Задача была решена Трейбигом [33].

Уитни [34] определяет число вращения как количество оборотов, которое делает вектор скорости кривой. Он предложил следующую классификацию погружений кривых в плоскость.

Теорема 0.1 (Whitney-Graustein, [34])**.** *Две замкнутые регулярные кривые могут быть продеформированы одна в другую, т.е. между ними существует гомотопия в классе замкнутых регулярных кривых, тогда и только тогда, когда их числа вращения совпадают.*

Уитни также свел подсчет числа вращения к подсчету количества точек самопересечения разных типов, см. [34], Теорема 2.

Смейл решил задачу классификации погружений кривых в терминах фундаментальной группы единичного касательного расслоения.

Теорема 0.2 (Smale, [32])**.** *Пусть x_0 – точка единичного касательного расслоения T^1M риманова многообразия M. Тогда существует биекция между $\pi_1(T^1M, x_0)$ и множеством классов (с точностью до регулярной гомотопии, сохраняющей концы и направления в них) регулярных кривых на M с закрепленными концами и направлениями в них, задаваемыми x_0.*

Рейнхарт [29] определил число вращения на поверхностях с непустым краем. Он рассматривал ориентируемую замкнутую компактную поверхность и кривую с фиксированными в базисной точке $x \in M$ концами и направлением, задаваемым вектором $x_0 \in T^1_x M$. Число вращения определялось по модулю эйлеровой характеристики поверхности. Точнее, Рейнхарт определил и доказал существование и единственность гомоморфизма вращения $\omega\colon \pi_R(M, x_0) \to \mathbb{Z}_\chi$ из группы классов регулярной гомотопности кривых в кольцо целых чисел по модулю эйлеровой характеристики χ поверхности M, для которого $\omega = 0$

на некотором наборе образующих поверхности, и $\omega = 1$ на простой стягиваемой положительно ориентированной кривой. В продолжении [30] Рейнхарт расширил определение числа вращения для кусочно-регулярных кривых.

Чилингворс в статье [20] и ее продолжении [21] дал геометрическое определение числа вращения $\omega_X(\gamma, x)$ относительно векторного поля X без нулей. Неформально, число вращения определяется как количество оборотов, которое делает вектор скорости кривой, не проходящей через нули векторного поля X, относительно векторного поля. Для неориентируемой поверхности определяется по модулю 2.

Теорема 0.3 (Chillingworth, [20], теорема 3.1.). *Пусть M – гладкая поверхность с непустым краем. Пусть γ_1, γ_2 – две сохраняющие ориентацию регулярные замкнутые кривые на поверхности M, с совпадающим вектором скорости $X(x)$ в начальной точке, где X – векторное поле без нулей на M и $x \in M$. Пусть $[\gamma_1] = [\gamma_2] \in \pi_1(M, x)$. Тогда γ_1 регулярно гомотопна γ_2 относительно $X(x)$ тогда и только тогда, когда $\omega_X(\gamma_1, x) = \omega_X(\gamma_2, x)$.*

Помимо этого, в работах [20], [21] доказывается эквивалентность (для некоторого векторного поля) числу вращения, определенному Рейнхартом, а также определяется число вращения для элемента группы $\pi_1(M, x_0)$. В статье есть обобщения некоторых результатов на случаи замкнутой поверхности, меняющей ориентацию кривой или отсутствия базисной точки, но аналог теоремы Уитни-Грауштейна для этих случаев не получен.

Бурман и Поляк [19] рассматривали ориентируемую связную поверхность и замкнутые кривые без базисной точки. Их формулы устанавливают связь между числами вращения и самопересечениями кривых.

Никкуни [28] вычислил инвариант Ву для кусочно-линейных погружений графов в плоскость и показал, что два погружения регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда их инварианты Ву совпадают.

Группа гомеоморфизмов поверхности действует на множестве погружений кривых в поверхность. Исследование этого действия часто помогает установить нетривиальность гомеоморфизма, т.е. его неизотопность тождественному. Скручивание Дэна является простым примером нетривиального гомеоморфизма и возникает в разнообразных задачах, а потому представляет интерес.

Бирман и соавторы [18] рассматривают ориентируемую компактную риманову поверхность M, каждая компонента свзязности которой имеет отрицательную эйлерову характеристику. Они определяют группу $\mathcal{M}(M)$ классов изотопий автоморфизмов (т.е. сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов) поверхности M, сохраняющих каждую компоненту связности поверхности и переводящих каждую граничную окружность в себя. Доказывается, что любая абелева подгруппа в $\mathcal{M}(M)$ конечно порождена, не содержит кручения, и ранг ограничен числом $3g+b-3c$, где g — род поверхности, b — количество граничных окружностей, c — количество компонент связности. В той же статье утверждается, что скручивания Дэна вдоль набора простых попарно непересекающихся вложенных окружностей (т.е. кривых) на ориентируемой поверхности порождают абелеву подгруппу, ранг которой достигает указанную верхнюю оценку. Согласно работе Дэна [22], скручивания Дэна вдоль всевозможных двусторонних кривых порождают группу $\mathcal{M}(M)$.

Упомянутый выше результат Бирман и соавторов имеет важные приложения. Например, с помощью этого результата и важного результата Кудрявцевой и Пермякова [2] о пространствах функций Морса на произвольных (ориентируемых и неориентируемых) поверхностях, Кудрявцева в цикле работ [3], [4], [5], [6], [7] более детально изучает гомотопический тип этих пространств в случае ориентируемых поверхностей. Подчеркнем, что упомянутый выше результат Бирман и соавторов, а также использующий его результат Кудрявцевой, получены только для ориентируемых поверхностей. Поэтому задача распространения результата Бирман и соавторов на случай неориентируемых поверхностей представляется весьма актуальной.

Постановка задачи

Получить критерий регулярной гомотопности кусочно-регулярных погружений графа в связную компактную поверхность M. Получить классификацию таких погружений. В частности, получить аналог теоремы Уитни-Грауштейна для замкнутой кривой на неориентируемой поверхности без базисной точки. Вычислить ранг абелевой подгруппы группы классов отображений поверхности, порожденной скручиваниями Дэна вокруг попарно непересекающихся окружностей на поверхности.

Результаты диссертации

1. Построен инвариант $inv_{X,\mathcal{F}_0}$ регулярной гомотопности кусочно-регулярных погружений графов в компактные поверхности (ориентируемые или неориентируемые, с краем или без края), обобщающий инвариант Б.Л. Рейнхарта — число вращения регулярных погружений окружности в поверхность с непустым краем, см. раздел 3.1.

2. Получена классификация кусочно-регулярных погружений любого конечного графа в произвольную компактную поверхность с точностью до регулярной гомотопности. В частности, получен критерий регулярной гомотопности двух погружений, см. теоремы 2.2, 3.1, 3.2, 3.3 или работы автора [12], [14].

3. Вычислен ранг абелевой подгруппы группы классов отображений поверхности, порожденной скручиваниями Дэна вокруг попарно непересекающихся двусторонних окружностей на неориентируемой поверхности, см. теорему 4.1 или работу автора [13].

Апробация результатов работы

Результаты диссертации докладывались:

(1) на семинаре "Современные геометрические методы" (руководители акад. А.Т. Фоменко, д.ф.-м.н. А.В. Болсинов, д.ф.-м.н. А.С. Мищенко, д.ф.-м.н. А.А. Ошемков, к.ф.-м.н. Е.А. Кудрявцева, к.ф.-м.н. И.М. Никонов, к.ф.-м.н. А.Ю. Коняев), Москва, МГУ, 2006, 2011, 2012, 2015 гг.,

(2) на семинаре "Узлы и теория представлений" (руководители д.ф.-м.н. В.О. Мантуров, к.ф.-м.н. Д.П. Ильютко, к.ф.-м.н. И.М. Никонов), Москва, МГУ, 2015 г.,

(3) на семинаре "Алгебраическая топология и ее приложения" им. М.М. Постникова (руководители чл.-корр. РАН В.М. Бухштабер, д.ф.-м.н. А.В. Чернавский, д.ф.-м.н. И.А. Дынников, д.ф.-м.н. Т.Е. Панов, к.ф.-м.н. Л.А. Алания, д.ф.-м.н. А.А. Гайфуллин, к.ф.-м.н. Д.В. Миллионщиков), Москва, МГУ, 2015 г.,

(4) на семинаре "Семинар по геометрической топологии" (руководитель чл.-корр. РАН Е.В. Щепин), Мосва, Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, 2015, 2016 гг.,

(5) на семинаре "Асимптотические методы в математической физике" (руководитель д.ф.-м.н. С.Ю. Доброхотов), Москва, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, 2016 г.,

(6) на научно-исследовательском семинаре под руководством профессора (Dr. Habil.) M. Boileau, Institut de Mathematiques de Toulouse, г. Тулуза, Франция, 2007 г.,

(7) на международной конференции "Probability, analysis and geometry" (Москва, 26 сентября — 1 октября 2016 г.).

Публикации

Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно и опубликованы в работах [13], [12], [14], в журналах из перечня ВАК.

1 Число вращения: определения и предварительные результаты

1.1 Определения

Мы будем использовать определение числа вращения, предложенное в работе [20] (и ее продолжении [21]), поскольку считаем его наиболее естественным и аналогичным классическому определению для кривых на плоскости. Хотя в [20] дано определение для регулярных кривых, по замечанию самого автора это определение и все результаты легко обобщаются на случай кусочно-регулярных кривых. Определение в нашей статье несколько обобщено.

В данной работе M – произвольная гладкая компактная связная поверхность. Будем считать, что на M задана структура риманова многообразия, автоматически задающую норму на касательном пространстве в каждой точке. Обозначим

- $p_M\colon TM \to M$ проекцию касательного расслоения TM на M,
- $p_{M,1}\colon T^1M \to M$ проекцию единичного касательного расслоения T^1M на поверхность M,
- $p_1\colon T^0M \to T^1M$ нормирующую проекцию проколотого касательного расслоения T^0M, состоящего из ненулевых касательных векторов, на T^1M.

Пусть G – некоторый конечный связный граф, возможно, с петлями и кратными ребрами, L – ориентированный граф, гомеоморфный отрезку, с ребрами в одном направлении.

Определение кусочно-регулярной кривой и регулярной гомотопии. Отображение $\xi\colon L \to TM$ назовем *кусочно-регулярным*, если

- ξ непрерывно на ребрах, и в каждой вершине имеет отличные от нуля односторонние пределы в одном слое,
- $\xi(u) \in T^0M$, $u \in L$,
- никакие два односторонних предела в одной вершине не имеют противоположные направления.

Семейство ξ_t, $t \in [0,1]$ кусочно-регулярных отображений $\xi_0, \xi_1\colon L \to TM$ назовем *регулярной гомотопией*, если

- отображение ξ_t кусочно-регулярно для каждого $t \in [0,1]$,

- для каждого замкнутого ребра e при доопределении $\xi_t|_e$ в вершинах по непрерывности семейство $\xi_t|_e$, $t \in [0,1]$, является гомотопией.

Кривую $\gamma\colon\ L \to M$ назовем *кусочно-регулярной*, если вектор скорости γ' определен в каждой внутренней точке ребер, и может быть доопределен в вершинах по непрерывности справа, и отображение $\gamma'\colon\ L \to TM$ кусочно-регулярно.

Гомотопию γ_t, $t \in [0,1]$ кусочно-регулярных кривых $\gamma_0, \gamma_1\colon\ L \to M$ назовем *регулярной*, если

- отображение γ_t кусочно-регулярно для каждого $t \in [0,1]$,

- γ_t' является регулярной гомотопией отображений γ_0' и γ_1'.

Погружение $f\colon\ G \to M$ назовем *кусочно-регулярным*, если оно кусочно-регулярно на каждом простом пути. Если граф G – простой цикл, то погружение f будем называть замкнутой ориентированной кусочно-регулярной кривой. Гомотопию f_t, $t \in [0,1]$ кусочно-регулярных погружений $f_0, f_1\colon\ G \to M$ назовем *регулярной*, если она регулярна на каждом простом пути.

Определение $\omega_{\mathbf{X}}(\mathbf{f}, \mathbf{O}_{\mathbf{x_0}}, \mathbf{x_0}, \mathbf{f}(\mathbf{0}), \theta_{\mathbf{x_0}}) \in \mathbb{Z}$. Пусть S – граф, являющийся ориентированным простым циклом с выделенной точкой 0. Пусть на компактной поверхности M дано векторное поле X и кусочно-регулярное отображение $f\colon\ S \to TM$ такие, что $p_M(f(0)) = x_0$ и $f(0) = X(x_0)$ для некоторой точки $x_0 \in M$, и образ $p_M \circ f$ не содержит нули векторного поля X. Пусть O_{x_0} – некоторая локальная ориентация в точке x_0. Пусть $\theta_{x_0}\colon\ [0,1] \to T^1M$ – некоторый путь в слое $p_{M,1}^{-1}(x_0)$, соединяющий непрерывно точки $\theta_{x_0}(0) = p_1(X(x_0))$ и $\theta_{x_0}(1) = p_1(f(0))$. Введем понятие *числа вращения* в четыре шага.

Шаг 1. Построим непрерывное отображение f^*, являющееся “регуляризацией” отображения $p_1 \circ f$. Для этого рассмотрим ориентированный простой цикл $S^* \cong S^1$, полученный из цикла S разрезанием в каждой вершине и соединением двух полученных вершин новым ребром длины 1. На исходных открытых ребрах положим f^* равным $p_1 \circ f$, в вершиных доопределим по непрерывности и продолжим на новых ребрах f^* по кратчайшему пути между образами вершин в слое. Из кусочной регулярности отображения f следует, что $f^*\colon\ S^1 \to T^1M$ определено корректно и однозначно. Далее дополним f^* до $f^*_\theta = \theta_{x_0} \cdot f^* \cdot \theta_{x_0}^{-1}\colon\ S^1 \to T^0M$. Через $\theta_{x_0}^{-1}$ обозначено прохождение пути θ_{x_0} в обратном направлении.

Шаг 2. Непрерывное отображение $p_{M,1} \circ f_\theta^*\colon\ S^1 \to M$ задает индуцированное расслоение $p^f\colon\ E^f \to S^1$ со слоем S^1 такое, что диаграмма на рисунке 1 коммутативна, где F

$$\begin{tikzcd} E^f \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p^f"'] & T^1M \arrow[d, "p_{M,1}"] \\ S^1 \arrow[r, "p_{M,1}\circ f_\theta^*"] & M \end{tikzcd}$$

Рис. 1: Коммутативная диаграмма

является изоморфизмом на каждом слое. Тотальное пространство E^f является тором или бутылкой Клейна в зависимости от того, сохраняет $p_{M,1} \circ f_\theta^*$ ориентацию или меняет.

Шаг 3. Композиция $(p_1 \circ X) \circ (p_{M,1} \circ f_\theta^*)\colon\ S^1 \to T^1M$ индуцирует единственное сечение $X^f\colon\ S^1 \to E^f$, для которого $F \circ X^f = (p_1 \circ X) \circ (p_{M,1} \circ f_\theta^*)$. Отображение f_θ^* индуцирует единственное сечение $Z^f\colon\ S^1 \to E^f$, для которого $F \circ Z^f = f_\theta^*$. Из $f_\theta^*(0) = \theta_{x_0}(0) = p_1(X(x_0)) = p_1(X(p_{M,1}(f_\theta^*(0))))$ получаем $Z^f(0) = X^f(0)$, следовательно Z^f и X^f задают элементы $[Z^f]$, $[X^f]$ фундаментальной группы $\pi_1(E^f, X^f(0))$. Подробная диаграмма отображений представлена на рисунке 2.

$$\begin{tikzcd} E^f \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "p^f"'] & T^1M \arrow[d, shift right, "p_{M,1}"'] \\ S^1 \arrow[u, shift right, "X^f{,}Z^f"'] \arrow[ur, "f_\theta^*"] \arrow[r, "p_{M,1}\circ f_\theta^*"] & M \arrow[u, shift right, "p_1\circ X"'] \end{tikzcd}$$

Рис. 2: Подробная диаграмма

Шаг 4. Если замкнутый путь $p_{M,1} \circ f_\theta^*$ сохраняет ориентацию, то E^f – тор, и

$$\pi_1(E^f, X^f(0)) \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle.$$

Если $p_{M,1} \circ f_\theta^*$ меняет ориентацию, то E^f – бутылка Клейна, и $\pi_1(E^f, X^f(0)) \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b = 1 \rangle$. Можно выбрать $a = [X^f]$, и b представленным ориентированным слоем $(p^f)^{-1}(0)$ с положительной относительно O_{x_0} ориентацией. Тогда $p_\sharp^f(a)$ порождает $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ и $p_\sharp^f(b) = 0$. Из $p_\sharp^f([Z^f]) = p_\sharp^f(a)$ следует что $[Z^f] = b^m a$ для некоторого единственного $m \in \mathbb{Z}$. Определим *число вращения* $\omega_X(f, O_{x_0}, x_0, f(0), \theta_{x_0}) = m$.

Неформально число вращения равно числу оборотов, которое делает вектор f относительно X. Чтобы направления совпадали в начальной точке, f дополняется вращением вдоль θ_{x_0} вначале и $\theta_{x_0}^{-1}$ в конце.

В двух случаях обозначение числа вращения можно сократить. Если $f(0) = X(x_0)$, то путь θ_{x_0} можно выбрать тождественным $\theta_{x_0} = \mathrm{const}_{X(x_0)}$. В этом случае число обозначим вращения $\omega_X(f, O_{x_0}, x_0, X(x_0)) := \omega_X(f, O_{x_0}, x_0, f(0), \mathrm{const}_{X(x_0)})$.

Если путь $p_M \circ f$ сохраняет ориентацию, то есть E^f является тором, то число вращения не зависит от выбора пути θ_{x_0}: при добавлении к θ_{x_0} одного оборота в слое к пути Z^f добавляется образующая b вначале и b^{-1} в конце. Следовательно обозначение числа вращения в этом случае можно сократить до $\omega_X(f, O_{f(0)})$. В случае когда путь $p_M \circ f$ меняет ориентацию, при добавлении к θ_{x_0} одного оборота в слое число вращения $\omega_X(f, O_{x_0}, x_0, f(0), \theta_{x_0})$ увеличивается на 2. Следовательно для двух отображений f_1, f_2, $p_M(f_1(0)) = p_M(f_2(0)) = x_0$, $f_1(0) = f_2(0)$, разность

$$\omega_X(f_1, O_{x_0}, x_0, f_1(0), \theta_{x_0}) - \omega_X(f_2, O_{x_0}, x_0, f_2(0), \theta_{x_0})$$

не зависит от выбора θ_{x_0}.

В статье чаще всего число вращения будет рассматриваться для вектора скорости γ' кусочно-регулярного пути $\gamma\colon\ S \to M$. В этом случае будем говорить о числе вращения кусочно-регулярного пути и обозначать

$$\omega_X(\gamma, O_{x_0}, x_0, \gamma'(x_0), \theta_{x_0}) := \omega_X(\gamma', O_{x_0}, x_0, \gamma'(x_0), \theta_{x_0}).$$

Определение целых чисел $\mathbf{N}(\gamma_1, \mathbf{O_1}, \gamma_2, \mathbf{O_2}, \mathbf{x})$ и $\mathbf{N}(\gamma_1, \mathbf{O_1}, \gamma_2, \gamma_t(\mathbf{0}), \mathbf{x})$. Пусть M – компактная связная поверхность, для которой $\pi_2(M) = 0$. Пусть γ_1 и γ_2 – две гомотопные замкнутые ориентированные, кусочно-регулярные кривые на M и заданы локальные ориентации O_1 и O_2 в точках $\gamma_1(0)$ и $\gamma_2(0)$. Пусть точка x принадлежит $M \setminus (\mathrm{Im}\gamma_1 \cup \mathrm{Im}\gamma_2)$ и существует регулярная гомотопия γ_t, $t \in [1, 2]$, переводящая γ_1 в γ_2, локальную ориентацию O_1 в O_2 и пересекающая точку x трансверсально конечное число раз. Если кривые γ_1, γ_2 меняют ориентацию, то дополнительно предполагаем, что $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ и кривая $\gamma_t(0)$ сохраняет ориентацию. Назовем пересечение $\gamma_t(s) = x$ положительным, если репер $\left(\frac{\partial \gamma_t(s)}{\partial t}, \frac{\partial \gamma_t(s)}{\partial s}\right)$ положительный в ориентации, перенесенной из O_1 вдоль гомотопии, иначе назовем пересечение отрицательным. Обозначим разность количеств положительных и отрицательных пересечений

$$N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, O_2, x) = N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, O_2, x, \gamma_t)$$

для кривых γ_1, γ_2, сохраняющих ориентацию, и

$$N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, \gamma_t(0), x) = N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, \gamma_t(0), x, \gamma_t)$$

для кривых γ_1, γ_2, меняющих ориентацию.

Число $N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, O_2, x, \gamma_t)$ можно эквивалентно определить через степень отображения для любой непрерывной гомотопии γ_t. Рассмотрим ориентирующее накрытие $\tilde{M}$ поверхности M и кривые $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$, накрывающие γ_1, γ_2 и начинающиеся в одной точке. Рассмотрим точки $\tilde{x}^{(1)}$, $\tilde{x}^{(2)}$, накрывающие точку x, гомотопию $\tilde{\gamma}_t$, накрывающую γ_t, и ориентацию на $\tilde{M}$, согласованную с $O_1(\gamma_1(0))$. Для каждой из точек $\tilde{x}^{(i)}$ рассмотрим открытый диск $D_{\tilde{x}^{(i)}} \subset \tilde{M} \setminus (\mathrm{Im}\tilde{\gamma}_1 \cup \mathrm{Im}\tilde{\gamma}_2)$, содержащий точку $\tilde{x}^{(i)}$. Пусть отображение $p_i \colon \tilde{M} \to S^2$ является стягиванием множества $\tilde{M} \setminus D_{\tilde{x}^{(i)}}$ в точку. Тогда гомотопия $p_i \circ \tilde{\gamma}_t \colon [0,1] \times [1,2] \to S^2$ отображает границу квадрата $\partial([0,1] \times [1,2])$ в одну точку, а значит ее можно представить как композицию $p_i \circ \tilde{\gamma}_t = f_i \circ p_i^{(1)}$, где $p_i^{(1)} \colon [0,1] \times [1,2] \to S^2$ – стягивание границы квадрата в точку, $f_i \colon S^2 \to S^2$. Определим число $N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, O_2, x, \gamma_t)$ или $N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, \gamma_t(0), x)$ как сумму степеней отображений f_1, f_2. Ориентация на прообразе S^2 переносится с квадрата $[0,1] \times [1,2]$, на котором репер $\left(\frac{\partial \gamma_t(s)}{\partial t}, \frac{\partial \gamma_t(s)}{\partial s}\right)$ считаем положительным, а на образе S^2 задается ориентацией на $\tilde{M}$, согласованной с O_1.

Согласно лемме 1.4 числа $N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, O_2, x)$ и $N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, \gamma_t(0), x)$ в случае поверхности M отличной от сферы, проективной плоскости, тора и бутылки Клейна не зависят от выбора регулярной гомотопии γ_t. Число $N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, \gamma_t(0), x)$ зависит от кривой $\gamma_t(0)$. Чаще всего нас будет интересовать гомотопия между γ_1 и γ_2, сохраняющая начальную точку. В этом случае кривая $\gamma_t(0)$ будет постоянной и обозначение примет вид $N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, \gamma_1(0), x)$.

Определение числа $\mathbf{d\omega_X}$. Пусть M – компактная связная поверхность, отличная от S^2, $\mathbb{R}P^2$, T^2, Kl^2, на которой задано векторное поле X с конечным числом нулевых точек x_i, $i = 1, \ldots, K$. Пусть даны два кусочно-регулярных отображения $f_1, f_2 \colon S \to TM$.

Определим $d\omega_X$ в случае, когда кривые $p_M \circ f_1$, $p_M \circ f_2$ гомотопны и сохраняют ориентацию:

$$\begin{gathered} d\omega_X(f_1, O_1, f_2, O_2) \\ = \omega_X(f_1, O_1) - \omega_X(f_2, O_2) - \sum_{i=1}^{K} i_X(x_i) N(p_M \circ f_1, O_1, p_M \circ f_2, O_2, x_i), \end{gathered}$$

где O_1, O_2 – некоторые локальные ориентации в точках $p_M(f_1(0))$, $p_M(f_2(0))$, а $i_X(x_i)$ – индекс векторного поля X в точке x_i.

Теперь определим $d\omega_X$ в случае, когда кривые $p_M \circ f_1$, $p_M \circ f_2$ гомотопны и меняют ориентацию. Пусть $f_1(0) = f_2(0)$ и задан путь $\delta \colon S^1 \to M$, $\delta(0) = p_M(f_1(0))$, сохраняющий ориентацию. Определим

$$d\omega_X(f_1, O_1, f_2, \delta, f_1(0))$$

$$= \omega_X(f_1, O_1, p_M(f_1(0)), f_1(0), \theta_{p_M(f_1(0))}) - \omega_X(f_2, O_1, p_M(f_1(0)), f_1(0), \theta_{p_M(f_1(0))})$$

$$- \sum_{i=1}^{K} i_X(x_i) N(p_M \circ f_1, O_1, p_M \circ f_2, \delta, x_i),$$

где O_1 – некоторая локальная ориентация в точке $p_M(f_1(0))$, а путь

$$\theta_{p_M(f_1(0))}\colon\ [0,1] \to T^1_{p_M(f_1(0))}M,$$

$$\theta_{p_M(f_1(0))}(0) = X(p_M(f_1(0)))/\|X(p_M(f_1(0)))\|,$$

$$\theta_{p_M(f_1(0))}(1) = f_1(0)/\|f_1(0)\|$$

выбирается произвольно. Как указано в определении числа

$$\omega_X(f, O_{x_0}, x_0, f(0), \theta_{x_0}),$$

выбор пути $\theta_{p_M(f(0))}$ не влияет на число $d\omega_X(f_1, O_1, f_2, \delta, f_1(0))$.

В случае постоянного пути δ, обозначение примет вид

$$d\omega_X(f_1, O_1, f_2, p_M(f_1(0)), f_1(0)).$$

В случае, когда $M = S^2$ и X – векторное поле с единственным нулем, определим $d\omega_X(f_1, O_1, f_2, O_2) \in \mathbb{Z}_2$ как разность $\omega_X(f_1, O_1)$ и $\omega_X(f_2, O_2)$ по модулю 2.

В случае, когда $M = T^2$ или $M = Kl^2$ и X – векторное поле без нулей, число N зависит от гомотопии, но оно не участвует в определении $d\omega$. Поэтому определение остается без изменений:

$$d\omega_X(f_1, O_1, f_2, O_2)$$

$$= \omega_X(f_1, O_1) - \omega_X(f_2, O_2),$$

$$d\omega_X(f_1, O_1, f_2, p_M(f_1(0)), f_1(0))$$

$$= \omega_X(f_1, O_1, p_M(f_1(0)), f_1(0), \theta_{p_M(f_1(0))}) - \omega_X(f_2, O_1, p_M(f_1(0)), f_1(0), \theta_{p_M(f_1(0))}).$$

Из Леммы 1.5, следует, что в случае кривых $p_M \circ f_1$, $p_M \circ f_2$, сохраняющих ориентацию, число $d\omega_X$ не меняется при гомотопиях отображений f_1 и f_2. В случае кривых $p_M \circ f_1$, $p_M \circ f_2$, меняющих ориентацию, число $d\omega_X$ не меняется при гомотопиях сохраняющих $p_M(f_t(0)) = p_M(f_1(0))$ и $f_t(0) = f_1(0)$.

Аналогично числу вращения, в случае, когда отображения f_1, f_2 являются векторами скорости кусочно-регулярных кривых γ_1, γ_2, обозначим

$$d\omega_X(\gamma_1, O_1, \gamma_2, O_2) = d\omega_X(\gamma_1', O_1, \gamma_2', O_2)$$

и

$$d\omega_X(\gamma_1, O_1, \gamma_2, \gamma_1(0), \gamma_1'(0)) = d\omega_X(\gamma_1', O_1, \gamma_2', \gamma_1(0), \gamma_1'(0)).$$

Определение числа вращения кривой основано на работе [20]. Определения числа вращения для отображения $\xi\colon\ L \to TM$, а также чисел N и $d\omega_X$ являются новыми.

1.2 Леммы

Сформулируем здесь теорему 3.1 из [20]. В оригинальной статье теорема была сформулирована для кривых, сохраняющих ориентацию, но доказательство дословно повторяется для любых кривых.

Теорема 1.1 ([20], теорема 3.1)**.** *Пусть γ_1 и γ_2 – две регулярные замкнутые кривые на M, $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0) = X(x)$, где X – векторное поле без нулей на компактной поверхности M, точка $x \in M$, и $[\gamma_1] = [\gamma_2] \in \pi_1(M, x)$. Тогда кривые γ_1, γ_2 гомотопны относительно $X(x)$ тогда и только тогда, когда $\omega_X(\gamma_1, O_x, x, X(x)) = \omega_X(\gamma_2, O_x, x, X(x))$, где O_x – локальная ориентация в точке x.*

Докажем лемму 1.4 о независимости определения чисел

$$N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, O_2, x), N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, \gamma_1(0), x)$$

от выбора гомотопии, соединяющей γ_1 и γ_2. Нам понадобится следующая

Лемма 1.1. *Пусть M – компактная связная поверхность, отличная от тора и бутылки Клейна. Пусть $a, b \in \pi_1(M)$ – два коммутирующих элемента. Тогда найдутся элемент $c \in \pi_1(M)$ и $m, n \in \mathbb{Z}$ такие, что $a = c^m$, $b = c^n$.*

Доказательство. Если поверхность M имеет край, то фундаментальная группа $\pi_1(M)$ свободна, и лемма доказана в [26], предложение 2.17. Пусть далее поверхность M замкнута. Рассмотрим гомоморфизм фундаментальной группы $\langle u, v \mid uvu^{-1}v^{-1}\rangle$ тора T в фундаментальную группу поверхности M, переводящий образующие u, v в элементы a, b. Этот гомоморфизм индуцирован непрерывным отображением $f\colon\ T \to M$. По теореме Кнезера геометрическая степень $G(f) \geq 0$ этого отображения либо равна 0, либо удовлетворяет неравенству Кнезера $\chi(T) \leq \chi(M)G(f)$, см. [31]. Поэтому либо $\chi(M) \geq 0$, либо $G(f) = 0$. Если $\chi(M) \geq 0$, то M является сферой или проективной плоскостью, а значит фундаментальная группа M порождается не более чем одним элементом. Если $\chi(M) < 0$, то $G(f) = 0$ и по определению геометрической степени f гомотопно отображению g, не являющемуся сюръективным (т.е. образ g содержится в проколотой поверхности $\mathring{M}$). Так как фундаментальная группа проколотой поверхности $\mathring{M}$ свободна, получаем гомоморфизм $\langle u, v \mid uvu^{-1}v^{-1} \rangle$ в свободную группу. Но в свободной группе коммутирующие элементы являются степенью одного и того же элемента, а фундаментальная группа $\pi_1(M)$ является фактор группой фундаментальной группы $\pi_1(\mathring{M})$. Поэтому при $\chi(M) < 0$ любые два коммутирующих элемента фундаментальной группы M являются целыми степенями одного и того же элемента. Лемма 1.1 доказана.

Лемма 1.2. *Пусть $f\colon T^2 \to M$ – непрерывное отображение тора в компактную поверхность M, отличную от T^2, Kl^2, S^2 и $\mathbb{R}P^2$. Тогда найдется $c \in \pi_1(M)$ такой, что для любой кривой γ, $[\gamma] = c$, отображение f можно прогомотопировать так, что его образ совпадет с образом γ.*

Доказательство. Пусть a, b – образующие тора. Тогда элементы $f|_a, f|_b \in \pi_1(M)$ коммутируют. Согласно лемме 1.1 эти кривые гомотопны степеням одной петли γ. Гомотопией отображения f добьемся, чтобы $f|_a$ и $f|_b$ совпадали с γ^m и γ^n, $m, n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим два отображения $\tilde{f}, g\colon D^2 \to M$. Отображение $\tilde{f}$ определяется как $\tilde{f} = f \circ t$, где $t\colon D^2 \to T^2$ – приклеивание диска к образующим. Отображение g зададим на половине граничной окружности диска между его нижней и верхней точками равным кривой γ^{m+n} и продлим на весь диск, полагая g постоянным на каждом горизонтальном отрезке. Таким образом, g отображает диск в кривую γ. Ограничения $\tilde{f}|_{\partial D^2}$ и $g|_{\partial D^2}$ совпадают, поэтому можно определить их на двух полушариях сферы и получить отображение $S^2 \to M$. Но $\pi_2(M) = 0$, поэтому полученное отображение стягиваемо. Значит отображения $\tilde{f}$ и g гомотопны относительно ∂D^2. Лемма 1.2 доказано.

Лемма 1.2 влечет

Лемма 1.3. *Степень непрерывного отображения тора в компактную поверхность M, отличную от T^2, Kl^2, S^2 и $\mathbb{R}P^2$, равна нулю.*

Лемма 1.4. *Пусть M – компактная связная поверхность с краем или отрицательной Эйлеровой характеристики, т.е. отличная от T^2, Kl^2, S^2 и $\mathbb{R}P^2$.*

(А) Пусть $\gamma_1, \gamma_2\colon S^1 \to M$ – две свободные петли, сохраняющие ориентацию, точка $x \in M \setminus (\mathrm{Im}\gamma_1 \cup \mathrm{Im}\gamma_2)$. Тогда для любых двух гомотопий $\gamma_{t,1}, \gamma_{t,2}$, переводящих γ_1 в γ_2 и O_1 в O_2, числа $N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, O_2, x, \gamma_{t,1})$ и $N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, O_2, x, \gamma_{t,2})$ совпадают.

(Б) Пусть $\gamma_1, \gamma_2\colon S^1 \to M$ – две петли, меняющие ориентацию, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Пусть кривая $\delta\colon S^1 \to M$, $\delta(0) = \gamma_1(0)$, сохраняет ориентацию, и дана точка $x \in M \setminus (\mathrm{Im}\gamma_1 \cup \mathrm{Im}\gamma_2 \cup \mathrm{Im}\delta)$. Тогда для любых двух гомотопий $\gamma_{t,1}, \gamma_{t,2}$, соединяющих γ_1 и γ_2, для которых $\gamma_{t,i}(0) \equiv \delta$, числа $N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, \delta, x, \gamma_{t,1})$ и $N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, \delta, x, \gamma_{t,2})$ совпадают.

Доказательство. Рассмотрим поднятия $\tilde{\gamma}_{t,1}$, $\tilde{\gamma}_{t,2}$ гомотопий $\gamma_{t,1}$, $\gamma_{t,2}$ на ориентирующее накрытие $\tilde{M}$.

(А) Объединение гомотопий $\tilde{\gamma}_{t,1}$ и $\tilde{\gamma}_{t,2}$ задает отображение $f\colon T^2 \to M$. Рассмотрим диск $D_{\tilde{x}_i}$ из определения числа $N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, O_2, x, \gamma_t)$ и стягивание $p\colon M \to S^2$ множества $M \setminus D_x$. Согласно лемме 1.3, степень отображения f равна нулю, а значит и степень отображения $p_i \circ f$ равна нулю.

(Б) Объединение гомотопий $\tilde{\gamma}_{t,1}$ и $\tilde{\gamma}_{t,2}$ задает отображение $f\colon S^2 \to \tilde{M}$. Из $\pi_2(M) = 0$ получаем, что степень отображения f равна нулю, а значит и степень отображения $p_i \circ f$ равна нулю.

Лемма 1.4 доказана.

Лемма 1.5. *Пусть M – компактная связная поверхность, $p_M\colon TM \to M$ – касательное расслоение. Пусть на M задано векторное поле X с конечным числом нулей x_i, $i = 1, \dots, K$, и регулярная гомотопия ξ_t, $t \in [1, 2]$, кусочно-регулярных отображений $\xi_1, \xi_2\colon S^1 \to TM$, где кривые $p_M \circ \xi_1$, $p_M \circ \xi_2$ не проходят через x_i. Пусть у X нет нулей в случае $M = T^2$ или $M = Kl^2$, и единственный ноль в случае $M = S^2$. Пусть заданы локальные ориентации O_1, O_2, в точках $p_M(\xi_1(0))$, $p_M(\xi_2(0))$, согласованные вдоль $p_M \circ \xi_t$. В случае если $p_M \circ \xi_1$ и $p_M \circ \xi_2$ меняют ориентацию, предполагаем, что $p_M(\xi_1(0)) = p_M(\xi_2(0))$, $\xi_1(0) = \xi_2(0)$), и путь $p_M \circ \xi_t(0)$, $t \in [1, 2]$, сохраняет ориентацию. Тогда выполнено*

$$d\omega_X(\xi_1, O_1, \xi_2, O_2) = 0$$

для кривых $p_M \circ \xi_1$, $p_M \circ \xi_2$, сохраняющих ориентацию, и

$$d\omega_X(\xi_1, O_1, \xi_2, p_M \circ \xi_t(0), \xi_1(0)) = 2\omega_X(\xi_t(0), O_1)$$

для кривых $p_M \circ \xi_1$, $p_M \circ \xi_2$, меняющих ориентацию.

Доказательство. Обозначим $\gamma_t = p_M \circ \xi_t$. Пусть кривые γ_1, γ_2 меняют ориентацию. Выберем произвольно путь $\theta_{\gamma_1(0)}\colon [0,1] \to T^1_{\gamma_1(0)}M$ из определения ω_X, т.е. $\theta_{\gamma_1(0)}(0) = X(\gamma_1(0))$, $\theta_{\gamma_1(0)}(1) = p_1(\xi_1(0))$. Перенесем этот путь непрерывно вдоль всей гомотопии ξ_t так, что в каждой точке $\gamma_t(0))$ есть путь $\theta_{\gamma_t(0)}\colon [0,1] \to T^1_{\gamma_t(0)}M$, непрерывно зависящий от t, для которого $\theta_{\gamma_t(0)}(0) = X(\gamma_t(0))$, $\theta_{\gamma_t(0)}(1) = p_1(\xi_t(0))$.

Пусть M отлична от S^2, $\mathbb{R}P^2$, T^2, Kl^2. Перенесем локальную ориентацию O_t непрерывно вдоль кривой $\gamma_t(0)$. Если на участке $[t_1, t_2]$ гомотопия не пересекает нули векторного поля, то число $\omega_X(\xi_t, O_t)$ или $\omega_X(\xi_t, O_t, \gamma_t(0), \xi_t(0), \theta_{\gamma_t(0)})$ постоянно, т.к. оно целое и непрерывно по t. Рассмотрим гомотопию γ_t в точке $\gamma_t(u)$ при пересечении нуля x_i векторного поля X. Будем читать, что репер $(\frac{\partial\gamma_t(u)}{\partial t}, \frac{\partial\gamma_t(u)}{\partial u})$ положителен относительно ориентации перенесенной из O_1 вдоль гомотопии. Кривые незадолго до и после пересечения обозначим γ_{t_1}, γ_{t_2}. Можем считать, что за пределами малой окресности x_i кривые совпадают, и кривая γ_{t_2} отличается от γ_{t_1} добавлением петли ℓ_s вокруг точки x_i. При обходе вдоль ℓ_s вектор ξ близок к $\xi_t(u)$. В малой окрестности x_i можно считать направление $\xi_t(u)$ постоянным, при этом векторное поле X делает $i_X(x_i)$ оборотов. Следовательно, вдоль ℓ_s вектор ξ делает $-i_X(x_i)$ оборотов относительно X. Таким образом,

$$\omega_X(\xi_{t_1}, O_{t_1}) - \omega_X(\xi_{t_2}, O_{t_2}) = i_X(x_i)$$

или

$$\omega_X(\xi_{t_1}, O_{t_1}, \gamma_{t_1}(0), \xi_{t_1}(0), \theta_{\gamma_{t_1}(0)}) - \omega_X(\xi_{t_2}, O_{t_2}, \gamma_{t_2}(0), \xi_{t_2}(0), \theta_{\gamma_{t_2}(0)}) = i_X(x_i),$$

где локальные ориентации O_{t_1}, O_{t_2} в точках $\gamma_{t_1}(0)$, $\gamma_{t_2}(0)$ получаются из O_1 переносом вдоль гомотопии. Суммированя эти равенства для всех пересечений гомотопией нулей векторного поля X получаем

$$\begin{gathered}\omega_X(\xi_1, O_1) - \omega_X(\xi_2, O_2)\\ -\sum_{i=1}^{K} i_X(x_i) N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, O_2, x_i) = 0,\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}\omega_X(\xi_1, O_1, \gamma_1(0), \xi_1(0), \theta_{\gamma_1(0)}) - \omega_X(\xi_2, O_2, \gamma_2(0), \xi_2(0), \theta_{\gamma_2(0)})\\ -\sum_{i=1}^{K} i_X(x_i) N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, \gamma_t(0), x_i) = 0.\end{gathered}$$

В случае кривых γ_1, γ_2, сохраняющих ориентацию, лемма доказана. Пусть γ_1 и γ_2 меняют ориентацию. Осталось доказать, что

$$\omega_X(\xi_2, O_2, \gamma_2(0), \xi_2(0), \theta_{\gamma_2(0)}) - \omega_X(\xi_2, O_2, \gamma_2(0), \xi_2(0), \theta_{\gamma_1(0)})$$

$$= 2\omega_X(\xi_t(0), O_1).$$

Это следует из того, что $\theta_{\gamma_2(0)}$ отличается от $\theta_{\gamma_1(0)}$ добавлением $\omega_X(\xi_t(0), O_1)$ оборотов, каждый из которых увеличивает число ω_X на 2.

Случай $M = S^2$ аналогичен общему. Числа вращения рассматриваются по модулю 2 и индекс единственного нуля векторного поля X равен 2. Поэтому при переходе гомотопии через нуль векторного поля число вращения кривой не меняется.

В случае $M = T^2$ или $M = Kl^2$ и отсутствия нулей векторного поля X требуемое равенство следует из того, что число вращения является целым и непрерывно меняется при гомотопии.

Лемма 1.5 доказана.

Из леммы 1.5 следует, что число $d\omega_X$ не меняется при регулярных гомотопиях отображений ξ_1, ξ_2.

2 Регулярная гомотопность погружений графов в поверхности

2.1 Классификация погружений графов в плоскость

Степень кусочно-регулярного погружения окружности в плоскость - количество оборотов, которое делает вектор скорости при обходе вдоль окружности (взятое с знаком). При этом при переходе через точку излома кривой считаем, что вектор поворачивает по наименьшему из возможных углов.

Заметим, что это классическое определение степени погружения совпадает с числом вращения погружения относительно параллельного векторного поля.

Хорошо известно следующее утверждение (см. теорему 0.1).

Лемма 2.1. *Два кусочно-регулярных погружения окружности в плоскость регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда их степени отображения равны.*

Определение инварианта U. Для фиксированного графа G возможное значение *инварианта U* является набором следующих объектов:

- класса одномерных когомологий графа;

- циклических порядков ребер, выходящих из каждой вершины графа G.

Теперь определим значение инварианта U для погружения графа G в плоскость. Выберем произвольно в графе остовное дерево. Каждое репро вне максимального дерева единственным образом дополняется ребрами остовного дерева до несамопересекающегося цикла. Каждому такому циклу сопоставим целое число, являющееся степенью отображения этого цикла в плоскость. Сопоставление каждому из указанных циклов целого числа равносильно заданию класса одномерных когомологий графа G. Значение инварианта U для погружения графа G в плоскость является набором следующих объектов:

- определенного выше класса одномерных когомологий графа;
- циклических порядков ребер, выходящих из каждой вершины графа G, в котором эти ребра (отображенные в плоскость) следуют при обходе вершины против часовой стрелки.

Инвариант U устанавливает отображение из множества погружений графа в плоскость в множество $H^1(G;\mathbb{Z}) \oplus (\oplus_{u \in G} S_{deg(u)-1})$, где $deg(u)$ – степень вершины $u \in G$, а $S_{deg(u)-1}$ – множество из $(deg(u)-1)!$ циклических перестановок $deg(u)$ элементов.

Теорема 2.1. *Инвариант U устанавливает биекцию из множества погружений графа G в плоскость с точность до регулярной гомотопии в множество*

$$H^1(G;\mathbb{Z}) \times (\times_{u \in G} S_{deg(u)-1}).$$

2.2 Формулировка результата

Вопрос гомотопности кривых на поверхностях хорошо изучен, см. [16], [17].

Рассмотрим произвольный граф G и автоморфизм $g\colon G \to G$, сохраняющий точку v. Можно считать, что v является вершиной графа G, при необходимости сделав ее вершиной степени 2. Выделим в графе G остовное дерево T. Назовем *опорным циклом* каждый цикл C_i, состоящий из ребра $e_i \subset G \setminus T$ и простого пути, соединяющего вершины ребра e_i по дереву T. Назовем *базисным опорным циклом* $\check{C}_i \subset G$ цикл, состоящий из ребра e_i и двух простых путей, соединяющих вершины e_i с вершиной v по дереву T.

Можно считать, что каждое ребро e_i соединяет листья дерева T, причем каждый лист инцидентен не более чем одному ребру e_i, и среди e_i нет петель. Если это не так, то добавим на каждом ребре e_i по две вершины и отнесем крайние из полученных трех ребер к дереву T. Такое преобразование даст требуемое свойство. Аналогично можно считать, что в вершину v не ведет никакое ребро e_i.

Предложение 2.1. *Пусть M – поверхность с краем, $f\colon G \to M$ – непрерывное отображение, $g\colon G \to G$ – автоморфизм графа G, сохраняющий точку v. Тогда отображения f и $f \circ g$ гомотопны, если и только если для каждого базисного опорного цикла $\check{C}_i$ отображения $f|_{\check{C}_i}$ и $f \circ g|_{\check{C}_i}$ гомотопны относительно точки $f(v)$.*

Назовем отображение графа в поверхность регулярным, если оно регулярно на ребрах, и в каждой вершине направления касательных векторов к выходящим из нее ребрам различны. Гомотопия f_t, $t \in [0,1]$, отображений $f_0, f_1\colon G \to M$ регулярна, если каждое отображение f_t, $t \in [0,1]$, регулярно и для каждого ребра e касательное отображение $Tf_t|_e\colon T[0,1] \to TM$ непрерывно зависит от $t \in [0,1]$.

Теорема 2.2. *Пусть M – компактная связная поверхность, отличная от $\mathbb{R}P^2$. Пусть G – связный граф, v – некоторая вершина, T – остовное дерево. Предположим, что ребра вне T не являются петлями и соединяют листья дерева T. Пусть X – векторное поле на M без нулей в случае, когда M – тор, бутылка Клейна или поверхность с краем, и с единственным нулем $x \in M$ в остальных случаях, $f_1, f_2\colon G \to M$ – два регулярных погружения, образы которых не содержат x. Пусть заданы локальные ориентации O_1, O_2 в точках $f_1(v)$, $f_2(v)$. Пусть $\tilde{f}_1\colon G \to M$ – произвольное регулярное отображение, регулярно гомотопное f_1, для которого $\tilde{f}_1|_T \equiv f_2|_T$, локальная ориентация в точке $\tilde{f}_1(v) = f_2(v)$, перенесенная с гомотопией из O_1, совпадает с O_2, и $\tilde{f}_1$ гомотопно f_2 относительно точки v. Тогда существует регулярная гомотопия, преобразующая f_1 в f_2 и O_1 в O_2 тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия.*

1. *Существует гомотопия, преобразующая отображение f_1 в f_2 и локальную ориентацию O_1 в O_2.*

2. *В каждой вершине циклические порядки выходящих из нее ребер при отображениях f_1 и f_2 совпадают относительно локальных ориентаций, перенесенных из O_1 и O_2 вдоль дерева T.*

3. *Для каждого простого опорного цикла C_i, сохраняющего ориентацию, выполняется $d\omega_X(f_1|_{C_i}, O_1, f_2|_{C_i}, O_2) = 0$.*

4. *Число $d\omega_X(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, f_2(w_i), f_2|'_{C_i}(w_i))$ одинаково и четно для всех простых опорных циклов C_i, меняющих ориентацию, где w_i – ближайшая к v по дереву T точка цикла C_i, а локальная ориентация $O_{2,i}$ в точке $f_2(w_i)$ перенесена из O_2 вдоль дерева T.*

В случае, когда граф является единственной петлей, получаем аналог теоремы 3.1 из [20] на случай замкнутой поверхности или не сохраняющей ориентацию кривой при отсутствии базисной точки.

2.3 Гомотопность графов

Докажем предложение 2.1. Сначала докажем обратное утверждение. Покажем, что тождественное отображение id_G гомотопно отображению $\alpha\colon G \to G$, при котором дерево T отображается в точку v, а каждое ребро $e_i \subset G \setminus T$ - на базисный опорный цикл C_i без точки v. Рассмотрим гомотопию, начальным отображением готорой является id_G, каждая точка дерева T линейно движется по дереву к точке v. На каждом ребре $e_i \cong (0,1)$ в момент времени t середина $(t/4, 3t/4)$ линейно отображается во все ребро e_i, а края $(0, t/4)$ и $(3t/4, 1)$ – в пути от соответствующей вершины ребра e_i до образа этой вершины при уже построенной гомотопии на T.

Рассмотрим граф $\tilde{G}$ являющийся букетом окружностей $\tilde{C}_i$, находящихся во взаимно-однозначном соответствии с ребрами $e_i \subset G \setminus T$ графа G. Отображение α можно представить как композицию $\alpha = \alpha_2 \circ \alpha_1$ отображения $\alpha_1\colon G \to \tilde{G}$, являющегося стягиванием дерева T в точку, и отображения $\alpha_2\colon \tilde{G} \to G$, отображающего каждую окружность $\tilde{C}_i$ в базисный опорный цикл $\check{C}_i$. Отображения f и $f \circ g$ гомотопны $f \circ \alpha_2 \circ \alpha_1$ и $f \circ g \circ \alpha_2 \circ \alpha_1$ соответственно. Из гомотопности $f|_{\check{C}_i} \simeq f \circ g|_{\check{C}_i}$ относительно точки $f(v)$ для каждого цикла $\check{C}_i$ следует гомотопность $f \circ \alpha_2 \simeq f \circ g \circ \alpha_2$ с фиксированной точкой v. Отсюда следует гомотопность $f \circ \alpha \simeq f \circ g \circ \alpha$, а значит и гомотопность $f \simeq f \circ g$.

Теперь докажем предложение 2.1 в прямую сторону. Пусть при гомотопии отображений f и $f \circ g$ образ точки v проходит замкнутый путь δ. Тогда для для каждого цикла $C \subset G$, содержащего вершину v, выполнено $f \circ g|_C \simeq \delta^{-1} f|_C \delta$ относительно точки $f(v)$. Рассмотрим последовательность циклов $g^k(C)$, $k \in \mathbb{N}$. В графе существует конечное число последовательностей ребер фиксированной длины, поэтому среди этих циклов найдутся два, $g^k(C)$ и $g^{k+n}(C)$, задающих одинаковую последовательность ребер и направлений их прохождения. Такие циклы гомотопны в G относительно v, а значит и циклы C и $g^n(C)$ гомотопны относительно v. Тогда $f|_C \simeq f \circ g^n|_C \simeq \delta^{-n} f|_C \delta^n$ относително $f(v)$. Фундаментальная группа $\pi_1(M, f(v))$ является свободной и ее элементы $f|_C$ и δ^n коммутируют. Согласно [26], предложение 2.17, эти элементы являются степенями одного элемента фундаментальной группы. Следовательно, $f|_C$ и δ коммутируют, а значит $f \circ g|_C \simeq f|_C$

относительно $f(v)$.

2.4 Необходимость в Теореме 2.2

Докажем прямое утверждение Теоремы 2.2. Пусть существует регулярная гомотопия, переводящая f_1 в f_2 и O_1 в O_2. Регулярная гомотопия, переводящая f_1 в f_2, будет гомотопией, требуемой в условии 1. Циклические порядки ребер в вершине относительно ориентации перенесенной из вершины v вдоль дерева T не меняются при регулярной гомотопии, что доказывает условие 2. Выполнение условия 3 доказано в Лемме 1.5.

Докажем выполнение условия 4. Найдется регулярная гомотопия h_t, $1 \leq t \leq 2$, между $\tilde{f}_1$ и f_2. Рассмотрим произвольный опорный цикл C_i, меняющий ориентацию. Согласно определению $d\omega_X$, выполнено

$$\begin{aligned}
&d\omega_X(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, f_2(w_i), f_2|'_{C_i}(w_i)) \\
&= d\omega_X(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, h_t(w_i), f_2|'_{C_i}(w_i)) \\
&+ \sum_{k=1}^{K} i_X(x_k) N(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, h_t(w_i), x_k) \\
&- \sum_{k=1}^{K} i_X(x_k) N(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, f_2(w_i), x_k).
\end{aligned}$$

В частности, в случае $M = T^2$ или Kl^2, четность числа

$$d\omega_X(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, f_2(w_i), f_2|'_{C_i}(w_i))$$

следует из отсутствия нулей векторного поля X. В случае $M = S^2$ четность следует из $i_{x_k} = 2$. Для доказательства четности в остальных случаях достаточно доказать четность числа

$$N(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, h_t(w_i), x_k) - N(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, f_2(w_i), x_k)$$

для каждой точки x_k.

Кривые $\tilde{f}_1|_{C_i}$ и $f_2|_{C_i}$ гомотопны относительно точки $f_2(w_i)$. Эта гомотопия в объединении с гомотопией h_t дает отображение тора $z_{i,1}\colon T^2 \to M$. Обозначим начальную точку x_T на торе, $z_{i,1}(x_T) = f_2(w_i)$, и ориентированные образующие тора a, b, где $z_{i,1}|_a = h_t(w_i)$ и $z_{i,1}|_b = f_2|_{C_i}$. Выберем ориентацию O_T на торе, в которой репер (a, b) положителен. Согласно лемме 1.2, отображение $z_{i,1}$ можно прогомотопировать относительно $f_2(w_i)$ так, чтобы образ полученного отображения совпадал с образом одной кривой. Обозначим гомотопию $z_{i,u}$, $u \in [1, 2]$.

Рассмотрим поднятия $\tilde{z}_{i,1}$, $\tilde{z}_{i,2}$ и $\tilde{z}_{i,u}|_{h_t(w_i)}$ отображений $z_{i,1}$, $z_{i,2}$ и $z_{i,u}|_a$ на ориентирующее накрытие $\tilde{M}$. Поскольку у каждого из отображений $z_{i,1}$ и $z_{i,2}$ образующая a сохраняет ориентацию, а образующая b меняет, $\tilde{z}_{i,1}$ и $\tilde{z}_{i,2}$ являются отображениями цилиндра в $\tilde{M}$. Выберем поднятия $\tilde{z}_{i,1}$, $\tilde{z}_{i,2}$ идущими между парой точек, накрывающих $f_2(w_i)$, в одном направлении. Поскольку основания цилиндра $z_{i,u}|_a$ сохраняют ориентацию, $\tilde{z}_{i,u}|_a$ является обображением двух цилиндров в $\tilde{M}$. Можно представить $\tilde{z}_{i,u}|_a$ как объединение двух отображений цилиндров $\tilde{z}_{i,u}|_a^{(1)}$ и $\tilde{z}_{i,u}|_a^{(2)}$, каждое из которых накрывает $\tilde{z}_{i,u}|_a$.

Объединение отображений $\tilde{z}_{i,1}$, $\tilde{z}_{i,u}|_a^{(1)}$, $\tilde{z}_2$ и $\tilde{z}_{i,u}|_a^{(2)}$ задает отображение тора в $\tilde{M}$. Согласно лемме 1.3 степень этого отображения в каждой из точек $\tilde{x}_k^{(1)}$ и $\tilde{x}_k^{(2)}$ равна нулю. Заметим, что разница $N(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, h_t(w_i), x_k) - N(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, f_2(w_i), x_k)$ равна сумме степеней отображения $\tilde{z}_{i,1}$ в точках $\tilde{x}_k^{(1)}$ и $\tilde{x}_k^{(2)}$. Заметим, что образ $\tilde{z}_{i,2}$ лежит на накрытии образа одной кривой, а значит не содержит точек $\tilde{x}_k^{(1)}$ и $\tilde{x}_k^{(2)}$ и его степени в этих точках равны нулю. Наконец, сумма степеней отображения $\tilde{z}_{i,u}|_a^{(1)}$ в точках $\tilde{x}_k^{(1)}$, $\tilde{x}_k^{(2)}$ равна минус такой же сумме отображения $\tilde{z}_{i,u}|_a^{(2)}$ согласно замечанию 2.1. Но в объединяющем отображении тора ориентация цилиндра в прообразе $\tilde{z}_{i,u}|_a^{(2)}$ должна быть заменена на противоположную. Поэтому требуемая разница чисел N равна минус удвоенной сумме степеней отображения $\tilde{z}_{i,u}|_a^{(1)}$ в точках $\tilde{x}_k^{(1)}$ и $\tilde{x}_k^{(2)}$, а значит четна.

Замечание 2.1. Пусть $f\colon K \to M$ – непрерывное отображение ориентируемой поверхности K в поверхность M, и ограничение f на любую замкнутую кривую сохраняет ориентацию. Пусть $\tilde{f}^{(1)}, \tilde{f}^{(2)}\colon K \to \tilde{M}$ – два поднятия отображения f на ориентирующее накрытий $\tilde{M}$. Рассмотрим точку $x \in M \setminus \operatorname{Im}(f|_{\partial K})$ и накрывающие ее точки $\tilde{x}^{(1)}$, $\tilde{x}^{(2)}$. Тогда $\deg(\tilde{f}^{(1)}, O_K, \deg \tilde{x}^{(1)}, O_{\tilde{M}}) = -\deg(\tilde{f}^{(2)}, O_K, \deg \tilde{x}^{(2)}, O_{\tilde{M}})$ для любых ориентаций O_K, $O_{\tilde{M}}$ на K и $\tilde{M}$.

Замечание 2.1 следует из того, что каждому диску в прообразе $(\tilde{f}^{(1)})^{-1}(U_{\tilde{x}^{(1)}})$ окрестности $U_{\tilde{x}^{(1)}}$ точки $\tilde{x}^{(1)}$ соответствует аналогичный диск в прообразе $(\tilde{f}^{(2)})^{-1}(U_{\tilde{x}^{(2)}})$, причем отображения дисков ориентированны противоположно.

Теперь рассмотрим еще один опорный цикл C_j, меняющий ориентацию и докажем

$$d\omega_X(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, f_2(w_i), f_2|'_{C_i}(w_i))$$

$$-d\omega_X(\tilde{f}_1|_{C_j}, O_{2,j}, f_2|_{C_j}, f_2(w_j), f_2|'_{C_j}(w_j)) = 0.$$

Пусть точки w_i и w_j соединяются в дереве T простым путем V, ориентированным от w_i к w_j. В силу регулярности отображения h_t при каждом $t \in [1, 2]$, кривые $h_t|'_{C_i}(w_i)/|h_t|'_{C_i}(w_i)|$

и $h_t|'_V(w_i)/|h_t|'_V(w_i)|$ в T^1M не пересекаются. Значит, $h_t|'_{C_i}(w_i)$ и $h_t|'_V(w_i)$ делают одинаковое число оборотов относительно X и

$$d\omega_X(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, h_t(w_i), f_2|'_{C_i}(w_i))$$

$$= 2\omega_X(h_t|'_{C_i}(w_i), O_{2,i})$$

$$= 2\omega_X(h_t|'_V(w_i), O_{2,i}),$$

где первое равенство следует из леммы 1.5. Аналогично

$$d\omega_X(\tilde{f}_1|_{C_j}, O_{2,j}, f_2|_{C_j}, h_t(w_j), f_2|'_{C_j}(w_j))$$

$$= 2\omega_X(h_t|'_{C_j}(w_j), O_{2,j})$$

$$= 2\omega_X(h_t|'_V(w_j), O_{2,j}).$$

Заметим, что кусочно-регулярные отображения $h_t|'_V(w_i)$ и $h_t|'_V(w_j)$ соединены гомотопией $h_t|'_V(w_u)$, где точка w_u пробегает путь V. Согласно Лемме 1.5

$$\omega_X(h_t|'_V(w_i), O_{2,i})$$

$$-\omega_X(h_t|'_V(w_j), O_{2,j})$$

$$= -\sum_{k=1}^{K} i_X(x_k) N(h_t(w_i), O_{2,i}, h_t(w_j), O_{2,j}, x_k).$$

Получаем

$$d\omega_X(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, f_2(w_i), f_2|'_{C_i}(w_i))$$

$$-d\omega_X(\tilde{f}_1|_{C_j}, O_{2,j}, f_2|_{C_j}, f_2(w_j), f_2|'_{C_j}(w_j))$$

$$= d\omega_X(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, h_t(w_i), f_2|'_{C_i}(w_i))$$

$$-d\omega_X(\tilde{f}_1|_{C_j}, O_{2,j}, f_2|_{C_j}, h_t(w_j), f_2|'_{C_j}(w_j))$$

$$+\sum_{k=1}^{K} i_X(x_k) N(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, h_t(w_i), x_k)$$

$$-\sum_{k=1}^{K} i_X(x_k) N(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, f_2(w_i), x_k)$$

$$-\sum_{k=1}^{K} i_X(x_k) N(\tilde{f}_1|_{C_j}, O_{2,j}, f_2|_{C_j}, h_t(w_j), x_k)$$

$$+\sum_{k=1}^{K} i_X(x_k) N(\tilde{f}_1|_{C_j}, O_{2,j}, f_2|_{C_j}, f_2(w_j), x_k)$$

$$= -2\sum_{k=1}^{K} i_X(x_k) N(h_t(w_i), O_{2,i}, h_t(w_j), O_2(f_2(w_j)), x_k)$$
$$+ \sum_{k=1}^{K} i_X(x_k) N(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, h_t(w_i), x_k)$$
$$- \sum_{k=1}^{K} i_X(x_k) N(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, f_2(w_i), x_k)$$
$$- \sum_{k=1}^{K} i_X(x_k) N(\tilde{f}_1|_{C_j}, O_{2,j}, f_2|_{C_j}, h_t(w_j), x_k)$$
$$+ \sum_{k=1}^{K} i_X(x_k) N(\tilde{f}_1|_{C_j}, O_{2,j}, f_2|_{C_j}, f_2(w_j), x_k).$$

В случае $M = T^2$ или Kl^2 это выражение равно нулю вследствие отсутствия нулей у векторного поля X. В случае $M = S^2$ равенство нулю по модулю 2 следует из $i_X(x_k) = 2$. Чтобы доказать равенство выражения нулю в остальных случаях, докажем, что для каждого нуля x_k векторного поля X выполнено

$$-2N(h_t(w_i), O_{2,i}, h_t(w_j), O_{2,j}, x_k)$$
$$+N(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, h_t(w_i), x_k) - N(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, f_2(w_i), x_k)$$
$$-N(\tilde{f}_1|_{C_j}, O_{2,j}, f_2|_{C_j}, h_t(w_j), x_k) + N(\tilde{f}_1|_{C_j}, O_{2,j}, f_2|_{C_j}, f_2(w_j), x_k) = 0.$$

Как и в доказательстве четности $d\omega_X$, покажем, что это выражение равно степени некоторого отображения тора в $\tilde{M}$. Как и в доказательстве четности $d\omega_X$, разности

$$N(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, h_t(w_i), x_k) - N(\tilde{f}_1|_{C_i}, O_{2,i}, f_2|_{C_i}, f_2(w_i), x_k),$$
$$N(\tilde{f}_1|_{C_j}, O_{2,j}, f_2|_{C_j}, h_t(w_j), x_k) - N(\tilde{f}_1|_{C_j}, O_{2,j}, f_2|_{C_j}, f_2(w_j), x_k)$$

равны суммам степеней отображений $\tilde{z}_{i,1}$ и $\tilde{z}_{j,1}$ в точках $\tilde{x}_k^{(1)}$ и $\tilde{x}_k^{(2)}$. Число

$$-2N(h_t(w_i), O_{2,i}, h_t(w_j), O_{2,j}, x_k)$$

равно сумме степеней отображений $\tilde{h}_t|_V^{(1)}$ и $\tilde{h}_t|_V^{(2)}$, где на цилиндре в прообразе $\tilde{h}_t|_V^{(1)}$ ориентация противоположна той, которая задается гомотопией. Объединение отображений $\tilde{z}_{i,1}$, $\tilde{h}_t|_V^{(2)}$, $\tilde{z}_{j,1}$ и $\tilde{h}_t|_V^{(1)}$ задает отображение тора, что доказывает требуемое равенство.

2.5 Достаточность в Теореме 2.2

Докажем, что из условий 1-4 следует регулярная гомотопность отображений. Сначала рассмотрим случай $M = S^2$. Прогомотопируем отображение f_1 в $f_1^{(1)}$ так, чтобы для каждого опорного цикла выполнялось $\omega_X(f_1^{(1)}|_{C_i}, O_M) = \omega_X(f_2|_{C_i}, O_M)$ для некоторой ориентации O_M на M. Для этого достаточно пронести $f_1|_{C_i}$ через точку x нужное число раз, каждый раз меняя число ω_X на 2. После этого из сферы можно удалить окрестность точки x и свести теорему к случаю плоскости, разобранному в [12].

Далее считаем, что поверхность M отлична от сферы. Будем рассматривать отображения $g\colon G \to M$ вместе с локальной ориентацией $O_{g(v)}$ в точке $g(v)$. Пары $(g_1, O_{1,g_1(v)})$ и $(g_2, O_{2,g_2(v)})$ гомотопны если существует гомотопия, переводящая g_1 в g_2 и $O_{1,g_1(v)}$ в $O_{2,g_2(v)}$. Сначала проведем регулярную гомотопию пары $(f_1, O_{1,f_1(v)})$ в $(f_1^{(0)}, O_{1,f_1^{(0)}(v)})$, такую чтобы выполнялось $f_1^{(0)}(v) = f_2(v)$ и $O_{1,f_1^{(0)}(v)} = O_{2,f_2(v)}$. Согласно условию 1, пары $(f_1^{(0)}, O_{1,f_1(v)})$ и $(f_2, O_{2,f_2(v)})$ гомотопны. Пусть образ вершины v проходит при гомотопии переводящей $f_1^{(0)}$ в f_2 путь δ. Тогда δ сохраняет ориентацию, и для каждого базисного опорного цикла $\check{C}_i$ петли $f_1^{(0)}|_{\check{C}_i}$ и $\delta^{-1} \cdot f_2|_{\check{C}_i} \cdot \delta$ гомотопны относительно $f_2(v)$. Проведем произвольную регулярную гомотопию пары $(f_1^{(0)}, O_{1,f_1^{(0)}(v)})$ в $(f_1^{(1)}, O_{1,f_1^{(1)}(v)})$, при которой вершина v проходит путь δ. В результате для каждого базисного опорного цикла $\check{C}_i$ петли $f_1^{(1)}|_{\check{C}_i}$ и $f_2|_{\check{C}_i}$ гомотопны относительно $f_2(v)$.

Проведем регулярную гомотопию отображения $f_1^{(1)}$ в $f_1^{(2)}$ относительно точки v, чтобы $f_1^{(2)}|_T$ совпадало с $f_2|_T$. Согласно условию 4, число

$$d\omega_X(f_1^{(2)}|_{C_i}, O_{2,f_2(v)}, f_2|_{C_i}, f_2(w_i), f_2|'_{C_i}(w_i))$$

одинаково и четно для всех опорных циклов C_i, меняющх ориентацию.

Зафиксируем некоторую метрику на поверхности M. Рассмотрим замкнутые диски D_0, D_1 и D_2 маленьких радиусов $\varepsilon/2$, ε и 2ε соответственно с центрами в точке $Q = f_2(v)$. Считаем, что D_2 не содержит нулей векторного поля X. Рассмотрим отображение $f_T\colon T \to M$, обладающее следующими свойствами:

- отображение f_T кусочно-регулярно и инъективно,
- $\mathrm{Im} f_T \subset D_0$,
- $f_T(v) = Q$, все остальные вершины графа T попадают при отображении f_T на границу ∂D_0,

- циклические порядки ребер в каждой вершине при отображениях f_T, f_1 и f_2 совпадают.

Зафиксируем ориентацию O_D на D_2, согласованную с $O_{2,f_2(v)}$.

Проведем кусочно-регулярные гомотопии отображений $f_1^{(2)}$ и f_2, в результате которых ограничения отображений на дерево T совпадет с f_T. Для случая плоскости такая гомотопия описана в [12] (там все вершины лежат на границе диска, здесь вершина v будет находиться в центре диска), на произвольной поверхности построение не отличается. Далее на каждом ребре e_i проведем гомотопию отображений так, чтобы края ребра шли по радиусу от ∂D_0 до ∂D_1, а остальная часть была вне D_1. Полученные отображения обозначим $f_1^{(3)}$ и $f_2^{(3)}$. Гомотопии можно провести совпадающими на T и так, чтобы образы отображений не содержали нулей векторного поля X. Числа $d\omega_X$ для пар отображений $f_1^{(3)}|_{C_i}$, $f_2^{(3)}|_{C_i}$ будут такими же, как для пар $f_1^{(2)}|_{C_i}$, $f_2|_{C_i}$ так как они целые и непрерывно меняются при гомотопии.

Если среди опорных циклов $f_1|_{C_i}$ есть меняющие ориентацию, то проведем дополнительную гомотопию. Для этого построим изотопию I_u, $u \in [0,1]$, тождественного автоморфизма M в степень скручивания Дэна вокруг точки v. Положим автоморфизм I_u тождественным на $M \setminus D_2$, на диске D_0 зададим $I_u|_{D_0}$ вращением диска на угол

$$2\pi u \cdot \frac{1}{2} d\omega_X(f_1^{(3)}|_{C_i}, O_D, f_2^{(3)}|_{C_i}, f_1^{(3)}(w_i), f_1^{(3)}|'_{C_i}(w_i))$$

в положительном относительно O_D направлении. Согласно условию 4, это число не зависит от опорного цикла C_i, меняющего ориентацию, а значит I_u определено однозначно. На цилиндр $D_2 \setminus D_1$ изотопию I_u продолжим непрерывно и линейно в полярных координатах. Согласно лемме 1.5 выполнено

$$d\omega_X(I_0 \circ f_1^{(3)}|_{C_i}, O_D, I_1 \circ f_1^{(3)}|_{C_i}, f_1^{(3)}(w_i), f_1^{(3)}|'_{C_i}(w_i))$$

$$= 2\omega_X(\langle I_u \circ f_1^{(3)}(w_i), (I_u \circ f_1^{(3)}|_{C_i})'(w_i)\rangle).$$

По построению I_u, это число равно $d\omega_X(f_1^{(3)}|_{C_i}, O_D, f_2^{(3)}|_{C_i}, f_1^{(3)}(w_i), f_1^{(3)}|'_{C_i}(w_i))$. Заметим, что

$$d\omega_X(I_1 \circ f_1^{(3)}|_{C_i}, O_D, f_2^{(3)}|_{C_i}, f_1^{(3)}(w_i), f_1^{(3)}|'_{C_i}(w_i))$$

$$= d\omega_X(I_0 \circ f_1^{(3)}|_{C_i}, O_D, f_2^{(3)}|_{C_i}, f_1^{(3)}(w_i), f_1^{(3)}|'_{C_i}(w_i))$$

$$-d\omega_X(I_0 \circ f_1^{(3)}|_{C_i}, O_D, I_1 \circ f_1^{(3)}|_{C_i}, f_1^{(3)}(w_i), f_1^{(3)}|'_{C_i}(w_i)) = 0$$

для каждого опорного цикла C_i, меняющего ориентацию. Обозначим $f_1^{(4)} = I_1 \circ f_1^{(3)}$ и $f_2^{(4)} = f_2^{(3)}$. В случае отсутствия в графе простых опорных циклов, меняющих ориентацию, положим $f_1^{(4)} = f_1^{(3)}$.

Для каждого опорного цикла C_i построим некоторую вспомогательную гомотопию. Рассмотрим отображение $f_{1,i}\colon C_i \to M$, совпадающее с $f_1^{(4)}$ вне прообраза диска D_1, а на прообразе D_1 (т.е. на начальном и конечном участке цикла) идущее по радиусу из центра диска. Аналогично определим отображение $f_{2,i}\colon C_i \to M$ по отображению $f_2^{(4)}$. Заметим, что отображение $f_{1,i}$ регулярно гомотопно отображению $f_1^{(4)}|_{C_i}$ и $f_{2,i}$ регулярно гомотопно отображению $f_2^{(4)}|_{C_i}$, причем гомотопия общая в окрестности точки w_i. Значит

$$d\omega_X(f_{1,i}, O_D, f_{2_i}, O_D) = d\omega_X(f_1^{(4)}|_{C_i}, O_D, f_2^{(4)}|_{C_i}, O_D)$$

если $f_{1,i}$ сохраняет ориентацию, и

$$d\omega_X(f_{1,i}, O_D, f_{2,i}, f_{1,i}(w_i), f'_{1,i}(w_i)) = d\omega_X(f_1^{(4)}|_{C_i}, O_D, f_2^{(4)}|_{C_i}, f_1^{(4)}|_{C_i}, f_1^{(4)}|'_{C_i}(w_i))$$

если $f_{1,i}$ меняет ориентацию.

Рассмотрим маленький диск $D_b \subset D_0$, содержащий точку Q на своей границе, для которого $\mathrm{Int}(D_b) \cap f_{1,i}(C_i) = \emptyset$. Заметим, что кривые $f_{1,i}$ и $f_{2,i}$ идут из центра Q по одной и той же паре радиусов, поэтому $\mathrm{Int}(D_b) \cap f_{2,i}(C_i) = \emptyset$. Отображение $f_1^{(4)}$ можно заранее регулярно прогомотопировать так, чтобы гомотопия была постоянна на $(f_1^{(4)})^{-1}(D_1)$, и отображения $f_{1,i}$ и $f_{2,i}$ были гомотопны в $M \setminus (\mathrm{Int}D_b \cup \{x\})$ (или в $M \setminus \mathrm{Int}D_b$ если у X нет нулей) относительно Q, т.е. задавали совпадающие элементы группы $\pi_1(M \setminus \mathrm{Int}D_b; Q)$. Тогда $\omega_X(f_{1,i}, O_D, f_{1,i}(w_i), f'_{1,i}(w_i)) = \omega_X(f_{2,i}, O_D, f_{2,i}(w_i), f'_{2,i}(w_i))$, и согласно [3], Теорема 3.1, полученные отображения будут кусочно-регулярно гомотопны относительно точки Q в поверхности $M \setminus (\mathrm{Int}D_b \cup \{x\})$ (или в $M \setminus \mathrm{Int}D_b$). Рассмотрим эту кусочно-регулярную гомотопию f_t, $0 \le t \le 1$. Можно считать, что она пересекает точку Q только в образах вершины v.

Определим гомотопию $P_t\gamma$ для произвольной замкнутой кусочно-регулярной кривой $\gamma\colon [0,1] \to M$, $\gamma(0) = \gamma(1) = Q$, для которой $\gamma(u) \ne Q$, $u \in (0,1)$. Здесь P_t является оператором, действующим на пространстве указанных кривых γ. Сначала построим гомотопию $\tilde{P}_t\gamma$ отображения $\gamma|_{(0,1)}$. Для каждой точки $u \in \gamma^{-1}(M \setminus D_2)$, положим $\tilde{P}_t\gamma(u) = \gamma(u)$, $t \in [0,1]$. Для каждой точки $u \in \gamma^{-1}(D_2 \setminus Q)$ обозначим расстояние от $\gamma(u)$ до точки Q через $r(u)$, $0 < r(u) \le 2\varepsilon$. Положим $\tilde{P}_t\gamma(u)$ равным точке в D_2, лежащей на луче из точки Q в направлении $\gamma(u)$ на расстоянии $2\varepsilon - (2\varepsilon - r(u))(1 - 0.5t)$. Таким образом, точка

$\tilde{P}_t\gamma(u)$ движется в диске D_2 линейно по t, при $t = 0$ совпадает с $\gamma(u)$, а при $t = 1$ лежит на расстоянии более ε от центра Q, т.е. $\tilde{P}_1\gamma(u) \in D_2 \setminus D_1$. Теперь построим гомотопию $P_t\gamma$ отображения γ. Положим $P_t\gamma(0) = P_t\gamma(1) = Q$. При $0 < u < t/4$ положим $P_t\gamma(u)$ равным точке на расстоянии $4\varepsilon u$ от точки O в направлении касательного вектора кривой γ в точке 0. При $1-t/4 < u < 1$ положим $P_t\gamma(u)$ равным точке на расстоянии $4\varepsilon(1-u)$ от точки Q в направлении касательного вектора кривой γ в точке 1. При $t/4 < u < 1 - t/4$ положим $P_t\gamma(u) = \tilde{P}_t\gamma(\frac{u-t/4}{1-t/2})$. Полученная гомотопия является кусочно-регулярной.

Преобразуем гомотопию f_t. Новая кусочно-регулярная гомотопия будет последовательностью гомотопий $P_t f_0$, $0 \leq t \leq 1$, затем $P_1 f_t$, $0 \leq t \leq 1$, и затем $P_{1-t} f_1$, $0 \leq t \leq 1$. Полученная гомотопия обладает свойством, что в каждый момент времени отображение переводит края отрезка в радиусы диска D_1.

Вернемся к построению гомотопии между $f_1^{(4)}$ и $f_2^{(4)}$. Для каждого опорного цикла C_i мы построили вспомогательную кусочно-регулярную гомотопию отображений $f_{1,i}$ и $f_{2,i}$, причем отображения $f_{k,i}$ и $f_k^{(4)}|_{C_i}$, $k = 1, 2$, совпадают вне D_1 (и даже вне D_0) с точностью до перепараметризации. Для каждого ребра e_i определим гомотопию на прообразе $(f_1^{(4)}|_{e_i})^{-1}(M \setminus D_1)$ совпадающей с вспомогательной гомотопией для цикла C_i на такой же прообраз. На дереве T гомотопию определим тождественной. Осталось определить гомотопию на краях ребер e_i, переходящих при $f_1^{(4)}$ в цилиндр $D_1 \setminus D_0$. Введем на цилиндре полярные координаты r, φ, $r \in [\varepsilon/2, \varepsilon]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Определим гомотопию на граничных отрезках e_i в каждый момент времени соединяющей линейно уже определенные концы на ∂D_0 и ∂D_1. Полученное в результате этой регулярной гомотопии отображение обозначим $f_1^{(5)}$. Согласно лемме 1.5

$$d\omega_X(f_1^{(4)}, O_{1,f_1^{(4)}(w_i)}, f_1^{(5)}(w_i), f_1^{(5)}|'_{C_i}(w_i)) = 0$$

для каждого опорного цикла C_i. Следовательно

$$\begin{gathered} d\omega_X(f_1^{(4)}, O_{1,f_1^{(4)}(w_i)}, f_1^{(5)}, f_1^{(4)}(w_i), f_1^{(4)}|'_{C_i}(w_i)) \\ = d\omega_X(f_1^{(5)}, O_{1,f_1^{(5)}(w_i)}, f_2^{(4)}, f_1^{(5)}(w_i), f_1^{(5)}|'_{C_i}(w_i)) \\ + d\omega_X(f_1^{(4)}, O_{1,f_1^{(4)}(w_i)}, f_2^{(4)}, f_1^{(4)}(w_i), f_1^{(4)}|'_{C_i}(w_i)) = 0. \end{gathered}$$

Отображение $f_1^{(5)}$ будет отличаться от $f_2^{(4)}$ только на граничных отрезках ребер e_i. Каждый граничный отрезок делает несколько оборотов вокруг D_0, причем граничные отрезки одного ребра e_i делают равное число оборотов в силу $\omega_X(f_{1,i}) = \omega_X(f_1^{(4)}|_{C_i})$. Отрезок, делающий k оборотов в цилиндре можно регулярно прогомотопировать в отрезок, идущий по радиусу между основаниями, с k петлями (при этой гомотопии концы отрезка ни в какой момент времени не становятся касательными к основаниям цилиндра). Если опорный цикл C_i меняет ориентацию, то петли на граничных отрезках одного ребра e_i ориентированы противоположно, поэтому можно петли с одного конца e_i пронести на другой конец вдоль ребра. Пары противоположно ориентированных петель убираются регулярной гомотопией. Если опорный цикл C_i меняет ориентацию, то

$$d\omega_X(f_1^{(4)}, O_{1,f_1^{(4)}(w_i)}, f_1^{(5)}, f_1^{(4)}(w_i), f_1^{(4)}|'_{C_i}(w_i)) = 0$$

означает отсутствие петель. Полученное после убирания петель отображение совпадает с $f_2^{(4)}$. Таким образом, кусочно-регулярная гомотопность отображений f_1 и f_2 доказана.

3 Классификация погружений графов в поверхности с точностью до регулярной гомотопии

3.1 Определение инварианта

Как и ранее, M – гладкая связная компактная связная поверхность, отличная от $\mathbb{RP}^2$. Поверхность M может быть ориентируемой или неориентируемой, замкнутой или с краем. Проекции $p_M\colon TM \to M$, $p_{M,1}\colon T^1M \to M$ и $p_1\colon T^0M \to T^1M$ определены в разделе 1.1.

Определение $\omega_\mathbf{X}(\xi, \mathbf{O}_{\mathbf{x_0}}, \theta_{\mathbf{x_0}})$. Пусть S – граф, являющийся ориентированным простым циклом с выделенной точкой 0. Пусть на поверхности M дано векторное поле X и кусочно-регулярное отображение $\xi\colon S \to TM$ такие, что $p_M(\xi(0)) = x_0$ и $\xi(0) = X(x_0)$ для некоторой точки $x_0 \in M$, и образ $p_M \circ \xi$ не содержит нули векторного поля X. Пусть O_{x_0} – некоторая локальная ориентация в точке x_0. Пусть $\theta_{x_0}\colon [0,1] \to T^1M$ – некоторый путь в слое $p_{M,1}^{-1}(x_0)$, соединяющий непрерывно точки $\theta_{x_0}(0) = p_1(X(x_0))$ и $\theta_{x_0}(1) = p_1(\xi(0))$. Определим число вращения $\omega_X(\xi, O_{x_0}, \theta_{x_0}) = \omega_X(\xi, O_{x_0}, x_0, \xi(x_0), \theta_{x_0})$. Определение будет эквивалентно приведенному в разделе 1.1, но короче и удобнее для данной статьи. Для краткости мы будем опускать x_0 и $\xi(x_0)$ в обозначении числа вращения.

Построим регуляризацию $\xi^*_\theta\colon S \to T^1M$ как в разделе 1.1, шаг 1 определения числа $\omega_X(f, O_{x_0}, x_0, f(x_0), \theta_{x_0})$. Рассмотрим слой $h = p_{M,1}^{-1}(x_0)$ единичного касательного расслоения T^1M над точкой x_0. Локальлная ориентация O_{x_0} задает ориентацию на h. Заметим, что $\xi^*_\theta(1) = \xi^*_\theta(0) = p_1(X(x_0)) = p_1(X(p_{M,1}(\xi^*_\theta(0)))) = p_1(X(p_{M,1}(\xi^*_\theta(1))))$. Следовательно, определена замкнутая кривая $g = \xi^*_\theta \cdot (p_1 \circ X \circ p_{M,1} \circ \xi^*_\theta)^{-1}$, где $(p_1 \circ X \circ p_{M,1} \circ \xi^*_\theta)^{-1}$ обозначает путь $p_1 \circ X \circ p_{M,1} \circ \xi^*_\theta$, пройденный в обратном направлении. Замкнутый путь $p_{M,1} \circ g = p_{M,1} \circ \xi^*_\theta \cdot (p_{M,1} \circ \xi^*_\theta)^{-1}$ стягиваем относительно начальной точки, следовательно g гомотопен h^m относительно $p_1(X(x_0))$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. Определим *число врачения* $\omega_X(\xi, O_{x_0}, \theta_{x_0}) = m$.

Покажем, что число вращения определено однозначно. Предположим, что существует гомотопия ξ_t между степенями слоя h^m и h^n, $m, n \in \mathbb{Z}$, относительно выделенной точки. Пусть $\tilde{M}$ – универсальное накрытие поверхности M. Тогда $T^1\tilde{M}$ является накрытием T^1M, в котором слой h накрывается несвязным объединением замкнутых кривых. Пусть $\tilde{h}$ – одна из таких кривых. Гомотопия ξ_t подниматеся до гомотопии в $T^1\tilde{M}$, преобразующей $\tilde{h}^m$ в $\tilde{h}^n$. Фундаментальная группа $\pi_1(T^1\tilde{M}, \tilde{h}(0)) \cong \mathbb{Z}$ порождается элементом $[\tilde{h}]$, следовательно $m = n$.

Покажем эквивалентность определению из раздела 1.1 (используя введенные там обозначения). В разделе 1.1 число вращения определялось как степень m в разложении $[Z^f] = b^m[X^f]$, или $[Z^f \cdot (X^f)^{-1}] = b^m$. Заметим, что $F_\sharp(b) = [h]$, $F(Z^f) = \xi^*_\theta$, $F(X^f) = p_1 \circ X \circ p_{M,1} \circ \xi^*_\theta$, следовательно выполняется $[\xi^*_\theta \cdot (p_1 \circ X \circ p_{M,1} \circ \xi^*_\theta)^{-1}] = [h^m] \in \pi_1(T^1M, p_1(X(x_0)))$ для того же значения m. Эквивалентность доказана.

Числа

$$N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, O_2, x), \quad N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, \gamma_t(0), x),$$

$$d\omega_X(f_1, O_1, f_2, O_2), \quad d\omega_X(f_1, O_1, f_2, \delta, f_1(0))$$

определены в разделе 1.1. Будем использовать сокращенные обозначения:

$$N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, x) = N(\gamma_1, O_1, \gamma_2, \gamma_1(0), x)$$

в случае постоянного пути $\gamma_t(0)$ и

$$d\omega_X(f_1, O_1, f_2) = d\omega_X(f_1, O_1, f_2, p_M(f_1(0)), f_1(0))$$

в случае постоянного пути δ.

Пусть G – конечный связный граф, v – некоторая вершина, T – остовное дерево, и ребра вне T не являются петлями и соединяют листья дерева T. Будем называть *ориентированным кусочно-регулярным погружением* пару (f, O) кусочно-регулярного погружения $f\colon G \to M$ и локальной ориентации O в точке $f(v)$. Два ориентированных кусочно-регулярных погружения (f_1, O_1) и (f_2, O_2) будем называть *(регулярно) гомотопными*, если существует (регулярная) гомотопия, преобразующая f_1 в f_2 и O_1 в O_2.

Для произвольной локальной ориентации O обозначим $-O$ противоположную локальную ориентацию. Для ориентированного кусочно-регулярного погружения (f, O) и произвольной вершины $u \in G$ обозначим $O^{f,u}$ локальную ориентацию в точке $f(u)$, перенесенную из $f(v)$ вдоль $f|_T$.

Для каждой вершины u графа G обозначим $S_{deg(u)-1}$ множество циклических перестановок выходящих из вершины u ребер, состоящее из $(deg(u)-1)!$ элементов. Рассмотрим множество $\prod_{u\in G} S_{deg(u)-1}$ циклических порядков во всех вершинах графа G. Для каждого элемента s множества $\prod_{u\in G} S_{deg(u)-1}$ определен элемент $-s$, состоящий из циклических порядков, обратных задаваемым элементом s. Если в графе G есть вершина степени не менее 3, то элементы s и $-s$ различны. Если в графе G степени всех вершин не более 2, то s и $-s$ совпадают, и $\mathcal{F}_0$ содержит единственный элемент f_0, O_0.

Назовем *базисным набором* $\mathcal{F}_0 = \{(f_s, O_s) \mid s \in \prod_{u\in G} S_{deg(u)-1}\}$ набор попарно гомотопных ориентированных кусочно-регулярных погружений (f_s, O_s) со следующими свойствами:

1. для каждого $s \in \prod_{u\in G} S_{deg(u)-1}$ набор циклических порядков ребер, выходящих из каждой вершины u, при погружении f_s относительно локальной ориентации $O_s^{f_s,u}$, совпадает с порядком, определяемым элементом s,

2. образы f_s не содержат нули векторного поля X,

3. если (f_s, O_s) и (f_{-s}, O_{-s}) гомотопны и в графе G есть вершина степени не менее 3, то $f_s \equiv f_{-s}$ и $O_{-s} = -O_s$.

Обозначим $[\mathcal{F}_0]$ множество ориентированных кусочно-регулярных погружений гомотопных элементам $\mathcal{F}_0$.

Определение опорного цикла C_i дано в разделе 2.2. Обозначим $\mathcal{C}_o$ и $\mathcal{C}_n$ множества опорных циклов в графе G, на которых элементы f_s сохраняют и меняют ориентацию соответственно. Обозначим $|\mathcal{C}_o|$ и $|\mathcal{C}_n|$ мощности этих множеств.

Определение $\mathbf{inv}_{\mathbf{X},\mathcal{F}_0}$. Определим инвариант регулярной гомотопии ориентированных кусочно-регулярных погружений

$$inv_{X,\mathcal{F}_0} \colon [\mathcal{F}_0] \to \left(\prod_{u\in G} S_{deg(u)-1}\right) \times \mathbb{Z}^{|\mathcal{C}_o|} \times \left(\mathbb{Z}^{|\mathcal{C}_n|}/2\mathbb{Z}\right), \qquad M \neq S^2,$$

$$inv_{X,\mathcal{F}_0} \colon [\mathcal{F}_0] \to \left(\prod_{u\in G} S_{deg(u)-1}\right) \times \mathbb{Z}_2^{|\mathcal{C}_o|}, \qquad M = S^2.$$

Через $\mathbb{Z}^{|\mathcal{C}_n|}/2\mathbb{Z}$ обозначено множество векторов из N_n целых чисел с точностью до прибавления одинакового четного числа ко всем координатам. При $|\mathcal{C}_n| > 0$ имеем $\mathbb{Z}^{|\mathcal{C}_n|}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^{|\mathcal{C}_n|-1}$, при $|\mathcal{C}_n| = 0$ множество $\mathbb{Z}^{|\mathcal{C}_n|}/2\mathbb{Z}$ является одноэлементным.

Составим инвариант как вектор с тремя координатными отображениями:

$$inv_{X,\mathcal{F}_0}(f,O) = (inv^1(f,O), inv^2_{X,\mathcal{F}_0}(f,O), inv^3_{X,\mathcal{F}_0}(f,O)).$$

Также представим $inv^2_{X,\mathcal{F}_0}(f,O)$ и $inv^3_{X,\mathcal{F}_0}(f,O)$ через их координаты:

$$inv^2_{X,\mathcal{F}_0}(f,O) = \{inv^{2,i}_{X,\mathcal{F}_0}(f,O) \mid C_i \in \mathcal{C}_o\},$$

$$inv^3_{X,\mathcal{F}_0}(f,O) = \{inv^{3,i}_{X,\mathcal{F}_0}(f,O) \mid C_i \in \mathcal{C}_n\}.$$

Обратим внимание на то, что отображения $inv^{2,i}_{X,\mathcal{F}_0}(f,O)$ индексируются номерами циклов, на которых погружения f_s, $(f_{0,s}, O_s) \in \mathcal{F}_0$, сохраняют ориентацию, а $inv^{3,i}_{X,\mathcal{F}_0}(f,O)$ – номерами циклов, на которых $f_{0,s}$ меняют ориентацию.

Положим $inv^1(f,O)$ равным набору циклических порядков ребер, выходящих из каждой вершины u, относительно ориентации $O^{f,u}$.

Назовем *опорной вершиной* w_i ближайшую к v вершину опорного цикла C_i вдоль дерева T. Будем сокращать обозначение $O^{(f,O),w_i} = O^{f_{inv^1(f,O)},w_i}_{inv^1(f,O)}$. Положим

$$inv^{2,i}_{X,\mathcal{F}_0}(f,O) = d\omega_X(f_{inv^1(f,O)}|_{C_i}, O^{(f,O),w_i}, f|_{C_i}, O^{f,w_i}), \qquad C_i \in \mathcal{C}_o.$$

Пусть ориентированные кусочно-регулярные погружения (f_1, O_1) и (f_2, O_2) гомотопны и $inv^1(f_1,O_1) = inv^1(f_2,O_2)$. Обозначим $\tilde{f}_{f_1,O_1,f_2,O_2}$ произвольное кусочно-регулярное погружение, для которого

- $(\tilde{f}_{f_1,O_1,f_2,O_2}, O_2)$ регулярно гомотопно (f_1, O_1),
- $\tilde{f}_{f_1,O_1,f_2,O_2}|_T = f_2|_T$,
- $\tilde{f}_{f_1,O_1,f_2,O_2}$ гомотопно f_2 относительно точки $f_2(v)$.

Обозначим $\tilde{f}_{f,O,\mathcal{F}_0} = \tilde{f}_{f,O,f_{inv^1(f,O)},O_{inv^1(f,O)}}$. Положим

$$inv^{3,i}_{X,\mathcal{F}_0}(f,O) = d\omega_X(f_{inv^1(f,O)}|_{C_i}, O^{(f,O),w_i}, \tilde{f}_{f,O,\mathcal{F}_0}|_{C_i}), \qquad C_i \in \mathcal{C}_n.$$

В определении $inv^3_{X,\mathcal{F}_0}(f,O)$ выбор $\tilde{f}_{f,O,\mathcal{F}_0}$ является неоднозначным. Пусть $\tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_2$ – два погружения, удовлетворяющих определению $\tilde{f}_{f,O,\mathcal{F}_0}$. Ориентированные кусочно-регулярные погружения $\tilde{f}_1, O_{inv^1(f,O)}$ и $\tilde{f}_2, O_{inv^1(f,O)}$ регулярно гомотопны, следовательно, согласно Теореме 2.2, число

$$d\omega_X(\tilde{f}_1|_{C_i}, O^{(f,O),w_i}, \tilde{f}_2|_{C_i})$$

одинаково и четно для всех $C_i \in \mathcal{C}_n$. Из

$$d\omega_X(\tilde{f}_1|_{C_i}, O^{(f,O),w_i}, \tilde{f}_2|_{C_i})$$

$$= d\omega_X(f_{inv^1(f,O)}|_{C_i}, O^{(f,O),w_i}, \tilde{f}_2|_{C_i}) - d\omega_X(f_{inv^1(f,O)}|_{C_i}, O^{(f,O),w_i}, \tilde{f}_1|_{C_i})$$

получаем, что числа $d\omega_X(f_{inv^1(f,O)}|_{C_i}, O^{(f,O),w_i}, \tilde{f}_{f,O,\mathcal{F}_0}|_{C_i})$ определены с точностью до прибавления одинакового четного числа. Следовательно, $inv^3_{X,\mathcal{F}_0}(f,O)$ однозначно задает элемент $\mathbb{Z}^{|\mathcal{C}_n|}/2\mathbb{Z}$. Определение инварианта $inv_{X,\mathcal{F}_0}$ завершено.

3.2 Формулировка результатов

Теорема 3.1. *Пусть M – компактная связная поверхность, отличная от $\mathbb{R}P^2$. Пусть G – связный граф, v – некоторая вершина, T – остовное дерево. Предположим, что ребра вне T не являются петлями и соединяют листья дерева T. Пусть X – векторное поле на M без нулей в случае, когда M – тор, бутылка Клейна или поверхность с краем, и с единственным нулем $x \in M$ в остальных случаях. Пусть даны базисный набор $\mathcal{F}_0$ ориентированных кусочно-регулярных погружений и ориентированные кусочно-регулярные погружения (f_1, O_1) и (f_2, O_2), гомотопные элементам $\mathcal{F}_0$, для которых образы f_1 и f_2 не содержат x. Тогда (f_1, O_1) и (f_2, O_2) регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда $inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_1, O_1) = inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_2, O_2)$. Отображение inv сюръективно.*

Теорема 3.2. *Пусть M, G, T, X, $\mathcal{F}_0$, f_i, O_i, $i = 1, 2$, – как в теореме 3.1. Пусть $f_2 = f_1$ и $O_2 = -O_1$. Обозначим $(f_0, O_0) = (f_{inv^1(f_1,O_1)}, O_{inv^1(f_1,O_1)}) \in \mathcal{F}_0$.*

Если в графе G есть вершина степени не менее 3, то

$$inv^1(f_1, -O_1) = -inv^1(f_1, O_1), \tag{3.1}$$

$$inv^{2,i}_{X,\mathcal{F}_0}(f_1, -O_1) = -inv^{2,i}_{X,\mathcal{F}_0}(f_1, O_1), \qquad C_i \in \mathcal{C}_o, \tag{3.2}$$

$$inv^{3,i}_{X,\mathcal{F}_0}(f_1, -O_1) = -inv^{3,i}_{X,\mathcal{F}_0}(f_1, O_1), \qquad C_i \in \mathcal{C}_n. \tag{3.3}$$

Если граф G является простым циклом и f_1 сохраняет ориентацию, то образы inv^1 и $inv^3_{X,\mathcal{F}_0}$ являются одноэлементными, и существует целое число $K^{2,i}_{f_0,O_0}$, $C_i \in \mathcal{C}_o$ такое, что выполнено

$$inv^{2,i}_{X,\mathcal{F}_0}(f_1, -O_1) = -inv^{2,i}_{X,\mathcal{F}_0}(f_1, O_1) + 2K^2_{f_0,O_0}, \qquad C_i \in \mathcal{C}_o. \tag{3.4}$$

Число $K^2_{f_0,O_0}$ не зависит от (f_1,O_1) и определяется формулой (3.5). Можно выбрать ориентированное кусочно-регулярное погружение (f_0,O_0) в данном классе гомотопности так, что число $K^2_{f_0,O_0}$ будет принимать любое наперед заданное значение, в т.ч. нулевое.

Если граф G является простым циклом и f_1 меняет ориентацию, то образы inv^1 и $inv^2_{X,\mathcal{F}_0}$ являются одноэлементными, и выполнено условие (3.3).

Определение $\mathbf{i\ddot{n}v_{X,\mathcal{F}_0}}$. Обозначим $[\mathcal{F}_0]_\sharp$ множество кусочно регулярных погружений гомотопных f_s, где $(f_s,O_s)\in\mathcal{F}_0$. Определим инвариант регулярной гомотопии кусочно-регулярных погружений

$$i\ddot{n}v_{X,\mathcal{F}_0}(f_1)=\{inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_1,O_1)\mid(f_1,O_1)\sim(f_s,O_s)\},$$

где множество берется для тех локальных ориентаций O_1 в точке $f_1(v)$, для которых ориентированное кусочно-регулярное погружение (f_1,O_1) гомотопно произвольному (f_s,O_s) из $\mathcal{F}_0$.

Пусть $M\neq S^2,\mathbb{RP}^2$. Если (f_s,O_s) и $(f_s,-O_s)$ не гомотопны, то локальная ориентация O_1 определяется однозначно, следовательно

$$i\ddot{n}v_{X,\mathcal{F}_0}\colon\ [\mathcal{F}_0]_\sharp\to\left(\prod_{u\in G}S_{deg(u)-1}\right)\times\mathbb{Z}^{|\mathcal{C}_o|}\times\left(\mathbb{Z}^{|\mathcal{C}_n|}/2\mathbb{Z}\right),\qquad M\neq S^2.$$

Если (f_s,O_s) и $(f_s,-O_s)$ гомотопны, то значения $inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_1,O_1)$ и $inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_1,-O_1)$ соответствуют одному и тому же значению инварианта $i\ddot{n}v_{X,\mathcal{F}_0}(f_1)$, следовательно

$$i\ddot{n}v_{X,\mathcal{F}_0}\colon\ [\mathcal{F}_0]_\sharp\to\left(\left(\prod_{u\in G}S_{deg(u)-1}\right)\times\mathbb{Z}^{|\mathcal{C}_o|}\times\left(\mathbb{Z}^{|\mathcal{C}_n|}/2\mathbb{Z}\right)\right)/\mathbb{Z}_2,\qquad M\neq S^2,$$

где действие группы $\mathbb{Z}_2$ отождествляет значения $inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_1,O_1)$ и $inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_1,-O_1)$, связанные формулами из теоремы 3.2.

В случае $M=S^2$ ориентированные кусочно-регулярные погружение (f_s,O_s) не гомотопно $(f_s,-O_s)$, и

$$i\ddot{n}v_{X,\mathcal{F}_0}\colon\ [f_0]\to\left(\prod_{u\in G}S_{deg(u)-1}\right)\times\mathbb{Z}_2^{|\mathcal{C}_o|},\qquad M=S^2.$$

Теорема 3.3. *Пусть M, G, T, X, $\mathcal{F}_0$, f_1, f_2, – как в теореме 3.1. Пусть отображения f_1 и f_2 гомотопны. Тогда f_1 и f_2 регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда $i\ddot{n}v_{X,\mathcal{F}_0}(f_1)=i\ddot{n}v_{X,\mathcal{F}_0}(f_2)$. Отображение $i\ddot{n}v_{X,\mathcal{F}_0}$ сюръективно.*

Следствие 3.1. *Пусть M, G, T, X, $\mathcal{F}_0$ – как в теореме 3.1, и граф G является простым циклом. Пусть (f_0, O_0) – произвольное ориентированное кусочно-регулярное погружение из базисного набора $\mathcal{F}_0$. Тогда отображения $inv_{X,\mathcal{F}_0}$ и $\ddot{inv}_{X,\mathcal{F}_0}$ имеют следующие образы в каждом из случаев A, B, C, D:*

A $M = S^2$

$$\mathrm{Im}(inv_{X,\mathcal{F}_0}) = \mathbb{Z}_2, \qquad \mathrm{Im}(\ddot{inv}_{X,\mathcal{F}_0}) = \mathbb{Z}_2,$$

B $M \neq S^2$, *кривая* f_0 *сохраняет ориентацию,* (f_0, O_0) *гомотопно* $(f_0, -O_0)$

$$\mathrm{Im}(inv_{X,\mathcal{F}_0}) = \mathbb{Z}, \qquad \mathrm{Im}(\ddot{inv}_{X,\mathcal{F}_0}) = \mathbb{Z}_2,$$

C $M \neq S^2$, *кривая* f_0 *сохраняет ориентацию,* (f_0, O_0) *не гомотопно* $(f_0, -O_0)$

$$\mathrm{Im}(inv_{X,\mathcal{F}_0}) = \mathbb{Z}, \qquad \mathrm{Im}(\ddot{inv}_{X,\mathcal{F}_0}) = \mathbb{Z}_{\geq K^2_{f_0,O_0}},$$

где $\mathbb{Z}_{\geq K^2_{f_0,O_0}}$ *– множество целых чисел не меньших* $K^2_{f_0,O_0}$,

D $M \neq S^2$, *кривая* f_0 *меняет ориентацию*

$$\mathrm{Im}(inv_{X,\mathcal{F}_0}) = \mathbb{Z}_2, \qquad \mathrm{Im}(\ddot{inv}_{X,\mathcal{F}_0}) = \mathbb{Z}_2.$$

3.3 Доказательство Теоремы 3.1

Для построения ориентированного кусочно-регулярного отображения (f, O) с заданным значением инварианта $inv_{X,\mathcal{F}_0}(f, O)$ достаточно добавить к погружению $f_{inv^1(f,O)}$ несколько маленьких петель на каждом ребре e_i. Каждая маленькая петля увеличивает или уменьшает на 1, в зависимости от направления, соответствующее значение $inv^{2,i}_{X,\mathcal{F}_0}(f, O)$ или $inv^{3,i}_{X,\mathcal{F}_0}(f, O)$, не изменяя остальные составляющие инварианта. Таким образом, отображение inv сюръективно.

Из любого из двух следующих предположений: регулярная гомотопность ориентированных кусочно-регулярных погружений (f_1, O_1) и (f_2, O_2) или равенство

$$inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_1, O_1) = inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_2, O_2),$$

следует равенство

$$inv^1_{X,\mathcal{F}_0}(f_1, O_1) = inv^1_{X,\mathcal{F}_0}(f_2, O_2).$$

Заметим, что равенства

$$d\omega_X(f_{inv^1(f_1,O_1)}|_{C_i}, O^{(f_1,O_1),w_i}, f_1|_{C_i}, O_1^{f_1,w_i})$$

$$= d\omega_X(f_{inv^1(f_2,O_2)}|_{C_i}, O^{(f_2,O_2),w_i}, f_2|_{C_i}, O_1^{f_2,w_i}),$$

$$d\omega_X(f_{inv^1(f_1,O_1)}|_{C_i}, O^{(f_1,O_1),w_i}, \tilde{f}_{f_1,O_1,\mathcal{F}_0}|_{C_i})$$

$$= d\omega_X(f_{inv^1(f_2,O_2)}|_{C_i}, O^{(f_2,O_2),w_i}, \tilde{f}_{f_2,O_2,\mathcal{F}_0}|_{C_i})$$

эквивалентны

$$d\omega_X(f_1|_{C_i}, O_1^{f_1,w_i}, f_2|_{C_i}, O_2^{f_2,w_i}) = 0,$$

$$d\omega_X(\tilde{f}_{f_1,O_1,\mathcal{F}_0}|_{C_i}, O^{(f_1,O_1),w_i}, \tilde{f}_{f_2,O_2,\mathcal{F}_0}|_{C_i}) = 0.$$

Заметим, что

$$\tilde{f}_{f_1,O_1,\mathcal{F}_0}|_T \equiv \tilde{f}_{f_2,O_2,\mathcal{F}_0}|_T \equiv f_{inv^1(f_1,O_1)}|_T.$$

Ориентированное кусочно-регулярное погружение $(\tilde{f}_{f_2,O_2,\mathcal{F}_0}, O_0)$ получено из (f_2, O_2) регулярной гомотопией $f_{2,t}$, $t \in [0,1]$. Рассмотрим произвольную регулярную гомотопию ориентированного погружения $(\tilde{f}_{f_1,O_1,\mathcal{F}_0}, O_0)$, ограничение которой на дерево T совпадает с гомотопией $f_{2,t}|_T$, где t меняется в обратном направлении, от 1 до 0. В результате этой гомотопии получаем отображение $\tilde{f}_{f_1,O_1,f_2,O_2}$. Так как регулярные гомотопии из $(\tilde{f}_{f_1,O_1,\mathcal{F}_0}, O_0)$ в $(\tilde{f}_{f_1,O_1,f_2,O_2}, O_2)$ и из $(\tilde{f}_{f_2,O_2,\mathcal{F}_0}, O_0)$ в (f_2, O_2) совпадают на дереве T, то при каждом значении параметра гомотопий определено число $d\omega_X$ для ограничений соответствующей пары погружений на C_i. Таким образом,

$$d\omega_X(\tilde{f}_{f_1,O_1,\mathcal{F}_0}|_{C_i}, O^{(f_1,O_1),w_i}, \tilde{f}_{f_2,O_2,\mathcal{F}_0}|_{C_i}) = d\omega_X(\tilde{f}_{f_1,O_1,f_2,O_2}|_{C_i}, O_2^{f_2,w_i}, f_2|_{C_i}),$$

а значит равенство

$$d\omega_X(\tilde{f}_{f_1,O_1,\mathcal{F}_0}|_{C_i}, O^{(f_1,O_1),w_i}, \tilde{f}_{f_2,O_2,\mathcal{F}_0}|_{C_i}) = 0$$

эквивалентно

$$d\omega_X(\tilde{f}_{f_1,O_1,f_2,O_2}|_{C_i}, O_2^{f_2,w_i}, f_2|_{C_i}) = 0.$$

Таким образом, мы свели теорему 3.1 к Теореме 2.2.

3.4 Доказательство Теоремы 3.2

Пусть в графе есть вершина степени не менее 3. Условие (3.1) следует из того, что циклические порядки в каждой вершине при отображении f_1 относительно локальных ориентаций O_1 и $-O_1$ противоположны.

Докажем выполнение условия (3.2). Заметим, что

$$O^{(f_1,-O_1),w_i} = O_{inv^1(f_1,-O_1)}^{f_{inv^1(f_1,-O_1)},w_i} = O_{-inv^1(f_1,O_1)}^{f_{-inv^1(f_1,O_1)},w_i} = -O_{inv^1(f_1,O_1)}^{f_{inv^1(f_1,O_1)},w_i} = -O^{(f_1,O_1),w_i}.$$

Следовательно

$$inv^{2,i}_{X,\mathcal{F}_0}(f_1,-O_1) = d\omega_X(f_{inv^1(f_1,-O_1)}|_{C_i}, O^{(f_1,-O_1)}, f_1|_{C_i}, -O_1^{f_1,w_i})$$

$$= d\omega_X(f_{inv^1(f_1,O_1)}|_{C_i}, -O^{(f_1,O_1)}, f_1|_{C_i}, -O_1^{f_1,w_i}) = -inv^{2,i}_{X,\mathcal{F}_0}(f_1,O_1).$$

Докажем выполнение условия (3.3). Заметим, что

$$\tilde{f}_{f_1,-O_1,\mathcal{F}_0} = \tilde{f}_{f_1,-O_1,f_{inv^1(f_1,-O_1)},O_{inv^1(f_1,-O_1)}} = \tilde{f}_{f_1,-O_1,f_{inv^1(f_1,O_1)},-O_{inv^1(f_1,O_1)}}$$

$$= \tilde{f}_{f_1,O_1,f_{inv^1(f_1,O_1)},O_{inv^1(f_1,O_1)}} = \tilde{f}_{f_1,-O_1,\mathcal{F}_0}.$$

Предпоследнее равенство следует из того, что если регулярная гомотопия переводит $(f_1,-O_1)$ в $(\tilde{f}_{f_1,-O_1,f_{inv^1(f_1,O_1)},-O_{inv^1(f_1,O_1)}}, -O_{inv^1(f_1,O_1)})$, то она подходит и под определение гомотопии, переводящей (f_1,O_1) в $(\tilde{f}_{f_1,O_1,f_{inv^1(f_1,O_1)},O_{inv^1(f_1,O_1)}}, O_{inv^1(f_1,O_1)})$ (после забывания локальных ориентаций у каждой гомотопии).

Пусть граф G является простым циклом и f_0 сохраняет ориентацию. Докажем выполнение условия (3.4).

$$inv^{2,i}_{X,\mathcal{F}_0}(f_1,-O_1) = d\omega_X(f_0,O_0,f_1,-O_1)$$

$$= \omega_X(f_0,O_0) - \omega_X(f_1,-O_1) - \sum_k i_X(x_k)N(f_0,O_0,f_1,-O_1,x_k).$$

Заметим, что

$$\omega_X(f_1,-O_1) = -\omega_X(f_1,O_1)$$

и

$$N(f_0,O_0,f_1,-O_1,x_k)$$

$$= N(f_0,O_0,f_0,-O_0,x_k) + N(f_0,-O_0,f_1,-O_1,x_k)$$

$$= N(f_0,O_0,f_0,-O_0,x_k) - N(f_0,O_0,f_1,O_1,x_k),$$

откуда

$$inv^{2,i}_{X,\mathcal{F}_0}(f_1,-O_1) = -d\omega_X(f_0,O_0,f_1,O_1)$$

$$+2\omega_X(f_0,O_0) - \sum_k i_X(x_k)N(f_0,O_0,f_0,-O_0,x_k).$$

Число $N(f_0,O_0,f_0,-O_0,x_k)$ определено, так как (f_1,O_1) гомотопно $(f_1,-O_1)$, а значит (f_0,O_0) гомотопно $(f_0,-O_0)$. Определим

$$K^2_{f_0,O_0} = \omega_X(f_0,O_0) - \frac{1}{2}\sum_k i_X(x_k)N(f_0,O_0,f_0,-O_0,x_k). \tag{3.5}$$

Покажем, что $K^2_{f_0,O_0} \in \mathbb{Z}$, то есть $\sum_k i_X(x_k)N(f_0,O_0,f_0,-O_0,x_k)$ четно. Если у векторного поля X нет нулей, то сумма не содержит слагаемых и равна нулю. Если $M = S^2$, то сумма опускается в определении числа $d\omega_X$. Пусть $M \neq S^2$ и у X есть нули, в частности, M отлично от T^2 и Kl^2. Существует гомотопия, преобразующая кривую f_0 в себя, но меняющая ориентацию в точке $f_0(v)$. Пусть образ точки v проходит при гомотопии путь δ. Тогда кривые f_0 и $\delta \cdot f_0 \cdot \delta^{-1}$ гомотопны относительно базисной точки. Согласно Лемме 3.1, кривые δ и f_0 гомотопны относительно базисной точки целым степеням одной кривой: $\delta \sim a^m$, $f_0 \sim a^n$. Кривая δ меняет ориентацию, следовательно a меняет ориентацию. Кривая f_0 сохраняет ориентацию, следовательно n четно. Заметим, что

$$N(f_0,O_0,f_0,-O_0,x_k) = N(f_0,O_0,a^n,O_0,x_k)$$

$$+N(a^n,O_0,a^n,-O_0,x_k) + N(a^n,-O_0,f_0,-O_0,x_k).$$

Кривую a^n можно прогомотопировать в себя “прокручивая” вдоль себя, т.е. беря композицию с вращением прообраза. Такая гомотопия меняет ориентацию в образе точки v и не пересекает нули векторного поля X, следовательно

$$N(a^n,O_0,a^n,-O_0,x_k) = 0.$$

Заметим, что

$$N(a^n,-O_0,f_0,-O_0,x_k) = -N(f_0,-O_0,a^n,-O_0,x_k)$$

$$= N(f_0,O_0,a^n,O_0,x_k).$$

Следовательно

$$K^2_{f_0,O_0} = \omega_X(f_0,O_0) - \sum_k i_X(x_k)N(f_0,O_0,a^n,O_0,x_k).$$

Можно получить любое значение $K^2_{f_0,O_0}$, добавляя маленькие петли к f_0. Каждая петля увеличивает или уменьшает $\omega_X(f_0,O_0)$ на единицу в зависимости от направления и не меняет $\sum_k i_X(x_k)N(f_0,O_0,a^n,O_0,x_k)$. Выполнение условия (3.4) доказано.

Пусть граф G является простым циклом и f_0 меняет ориентацию. Докажем выполнение условия (3.3). Определим число

$$K^3_{f_0,O_0} = d\omega_X(f_0,O_0,\tilde{f}_{f_1,O_1,f_0,O_0}) + d\omega_X(f_0,O_0,\tilde{f}_{f_1,-O_1,f_0,O_0}).$$

Требуется показать, что $K^3_{f_0,O_0}$ четное.

Сначала покажем, что при фиксированном (f_1, O_1) четность числа $K^3_{f_0,O_0}$ не зависит от выбора $\tilde{f}_{f_1,O_1,f_0,O_0}$ и $\tilde{f}_{f_1,-O_1,f_0,O_0}$. Рассмотрим два произвольных погружения $\tilde{f}^{(1)}_+$, $\tilde{f}^{(2)}_+$, удовлетворяющих определению $\tilde{f}_{f_1,O_1,f_0,O_0}$, а также два погружения $\tilde{f}^{(1)}_-$, $\tilde{f}^{(2)}_-$, удовлетворяющих определению $\tilde{f}_{f_1,-O_1,f_0,O_0}$. Рассмотрим числа $K^3_{f_0,O_0}$, определенные по этим отображениям:

$$K^{3,(1)}_{f_0,O_0} = d\omega_X(f_0, O_0, \tilde{f}^{(1)}_+) + d\omega_X(f_0, O_0, \tilde{f}^{(1)}_-),$$

$$K^{3,(2)}_{f_0,O_0} = d\omega_X(f_0, O_0, \tilde{f}^{(2)}_+) + d\omega_X(f_0, O_0, \tilde{f}^{(2)}_-).$$

Рассмотрим их разность

$$K^{3,(2)}_{f_0,O_0} - 2K^{3,(1)}_{f_0,O_0} = d\omega_X(f_0, O_0, \tilde{f}^{(2)}_+) - d\omega_X(f_0, O_0, \tilde{f}^{(1)}_+)$$

$$+d\omega_X(f_0, O_0, \tilde{f}^{(2)}_-) - d\omega_X(f_0, O_0, \tilde{f}^{(1)}_-)$$

$$= d\omega_X(\tilde{f}^{(1)}_+, O_0, \tilde{f}^{(2)}_+) + d\omega_X(\tilde{f}^{(1)}_-, O_0, \tilde{f}^{(2)}_-).$$

Заметим, что согласно определению ориентированные кусочно-регулярные погружения $(f^{(1)}_+, O_0)$ и $(f^{(2)}_+, O_0)$ регулярно гомотопны. Из Теоремы 2.2 следует, что числа

$$d\omega_X(f^{(1)}_+, O_0, \tilde{f}^{(2)}_+), \quad d\omega_X(f^{(1)}_-, O_0, \tilde{f}^{(2)}_-)$$

четны. Таким образом, четность числа $K^3_{f_0,O_0}$ не зависит от выбора $\tilde{f}_{f_1,O_1,f_0,O_0}$ и $\tilde{f}_{f_1,-O_1,f_0,O_0}$.

Далее нам понадобится следующая лемма, являющаяся рассмотрением дополнительного случая к Лемме 1.5.

Лемма 3.1. *Пусть M – компактная паверхность, $p_M\colon TM \to M$ – касательное расслоение. Пусть на M задано векторное поле X с конечным числом нулей, и регулярная гомотопия ξ_t, $t \in [0,1]$, кусочно-регулярных отображений $\xi_0, \xi_1\colon S^1 \to TM$, где $p_M \circ \xi_t$ не проходит через нули векторного поля X. Пусть $p_M \circ \xi_i$, $i = 0,1$, меняют ориентацию, выполнено $\xi_0(0) = \xi_1(0)$, и путь $p_M \circ \xi_t(0)$, $t \in [0,1]$, меняет ориентацию. Пусть заданы произвольная локальная ориентация O в точке $x_0 = p_M(\xi_0(0))$ и путь $\theta\colon [0,1] \to T^1M$ в слое $p^{-1}_{M,1}(x_0)$, $\theta(0) = p_1(X(x_0))$, $\theta(1) = p_1(\xi(0))$. Тогда*

$$\omega_X(\xi_0, O, \theta) + \omega_X(\xi_1, O, \theta) = 2\omega_X(\xi_t(0), O, \theta).$$

Доказательство. Пусть $h = p^{-1}_{M,1}(x_0)$ – слой единичного касательного расслоения T^1M над точкой x_0 с ориентацией, заданной локальной ориентацией O и начальной точкой

$p_1(X(x_0))$. Согласно определению числа вращения, следующие пары кривых гомотопны относительно базисной точки

$$\theta \cdot \xi_0 \cdot \theta^{-1} \cdot X(p_1(\xi_0))^{-1} \sim h^{\omega_X(\xi_0,O,\theta)}, \tag{3.6}$$

$$\theta \cdot \xi_t(1) \cdot \theta^{-1} \cdot X(p_1(\xi_t(1)))^{-1} \sim h^{\omega_X(\xi_t(1),O,\theta)}, \tag{3.7}$$

$$\theta \cdot \xi_t(0) \cdot \theta^{-1} \cdot X(p_1(\xi_t(0)))^{-1} \sim h^{\omega_X(\xi_t(0),O,\theta)}, \tag{3.8}$$

$$\theta \cdot \xi_1 \cdot \theta^{-1} \cdot X(p_1(\xi_1))^{-1} \sim h^{\omega_X(\xi_1,O,\theta)}. \tag{3.9}$$

Заметим, что кривые

$$\xi_0 \cdot \xi_t(1) \sim \xi_t(0) \cdot \xi_1$$

и

$$X(p_M(\xi_0)) \cdot X(p_M(\xi_t(1))) \sim X(p_M(\xi_t(0))) \cdot X(p_M(\xi_1))$$

гомотопны относительно концов, а значит кривые

$$\theta \cdot \xi_0 \cdot \theta^{-1} \cdot \theta \cdot \xi_t(1) \cdot \theta^{-1} \cdot X(p_1(\xi_t(1)))^{-1} \cdot X(p_1(\xi_0))^{-1}$$

$$\sim \theta \cdot \xi_t(0) \cdot \theta^{-1} \cdot \theta \cdot \xi_1 \cdot \theta^{-1} \cdot X(p_1(\xi_1))^{-1} \cdot X(p_1(\xi_t(0)))^{-1}$$

гомотопны относительно базисной точки. Рассмотрим серию гомотопий относительно базисной точки

$$\theta \cdot \xi_0 \cdot \theta^{-1} \cdot \theta \cdot \xi_t(1) \cdot \theta^{-1} \cdot X(p_1(\xi_t(1)))^{-1} \cdot X(p_1(\xi_0))^{-1}$$

$$\sim \theta \cdot \xi_0 \cdot \theta^{-1} \cdot h^{\omega_X(\xi_t(1),O,\theta)} \cdot X(p_1(\xi_0))^{-1}$$

$$\sim \left(\theta \cdot \xi_0 \cdot \theta^{-1} \cdot X(p_1(\xi_0))^{-1}\right) \cdot \left(X(p_1(\xi_0)) \cdot h^{\omega_X(\xi_t(1),O,\theta)} \cdot X(p_1(\xi_0))^{-1}\right)$$

$$\sim h^{\omega_X(\xi_0,O,\theta)} \cdot \left(X(p_1(\xi_0)) \cdot h^{\omega_X(\xi_t(1),O,\theta)} \cdot X(p_1(\xi_0))^{-1}\right)$$

$$\sim h^{\omega_X(\xi_0,O,\theta)} \cdot h^{-\omega_X(\xi_t(1),O,\theta)}.$$

Последняя гомотопность следует из того, что замкнутый путь $p_M(X(p_1(\xi_0))) = p_M(\xi_0)$ меняет ориентацию. Аналогично

$$\theta \cdot \xi_t(0) \cdot \theta^{-1} \cdot \theta \cdot \xi_1 \cdot \theta^{-1} \cdot X(p_1(\xi_1))^{-1} \cdot X(p_1(\xi_t(0)))^{-1}$$

$$\sim h^{\omega_X(\xi_t(0),O,\theta)} \cdot h^{-\omega_X(\xi_1,O,\theta)}.$$

Получаем равенство

$$\omega_X(\xi_0,O,\theta) - \omega_X(\xi_t(1),O,\theta) = \omega_X(\xi_t(0),O,\theta) - \omega_X(\xi_1,O,\theta).$$

Осталось заметить, что кривые $\xi_t(0)$ и $\xi_t(1)$ совпадают. Лемма 3.1 доказана.

Существует гомотопия, переводящая ориентированное кусочно-регулярные погружение (f_0, O_0) в $(f_0, -O_0)$. Точка v проходит при этой гомотопии некоторый путь δ, который можно выбрать регулярлным. Определим вспомогательную гомотопию $F_{\pm,t,0}$, $t \in [0,1]$, являющуюся аналогом стандартной гомотопии, преобразующей некоторую кривую γ в кривую $\delta \cdot \gamma \cdot \delta^{-1}$. Положим $F_{\pm,0,0} = \tilde{f}_{f_1,O_1,f_0,O_0}$. На единственном ребре e_i вне остовного дерева T выделим среднюю треть $\tilde{e}_i$ и определим $F_{\pm,t,0}$ на $\tilde{e}_i$ как равномерное растягивание вдоль $F_{\pm,t,0}|_{e_i}$. Заметим, что $G \setminus \cup\tilde{e}_i$ является деревом. Для каждой точки $u \in G \setminus \tilde{e}_i$ определим путь l_u как несамопересекающийся путь от u до вершины v вдоль дерева $G \setminus \cup\tilde{e}_i$. Определим $F_{\pm,t,0}|_T(u)$, $t \in [0,1]$, как путь $F_{\pm,0,0}|_{l_u} \cdot \delta \cdot F_{\pm,0,0}|_{l_u}^{-1}$, где каждый из путей $F_{\pm,0,0}|_{l_u}$, δ, $F_{\pm,0,0}|_{l_u}^{-1}$ проходится за треть времени. Пусть u_1, u_2 – две точки одного ребра e_i, где u_1 является вершиной, а u_2 – ближайшая к ней точка $\tilde{e}_i$. Пусть $[u_2, u_1]$ – несамопересекающийся путь, соединяющий u_2 и u_1 по ребру e_i. Определим $F_{\pm,1,0}|_{[u_2,u_1]} = F_{\pm,0,0}|_{l_{u_1}} \cdot \delta \cdot F_{\pm,0,0}|_{l_{u_1}}^{-1}$. Определим гомотопию $F_{\pm,t,0}$ на отрезке $[u_2, u_1]$ как преобразование из $\tilde{f}_{f_1,O_1,f_0,O_0}|_{[u_2,u_1]}$ в $F_{\pm,1,0}|_{[u_2,u_1]} = F_{\pm,0,0}|_{l_{u_1}} \cdot \delta \cdot F_{\pm,0,0}|_{l_{u_1}}^{-1}$ вдоль объединяющего пути $F_{\pm,0,0}|_{l_{u_2}} \cdot \delta \cdot F_{\pm,0,0}|_{l_{u_1}}^{-1}$.

Гомотопия $F_{\pm,t,0}$ не является регулярной. Она может быть преобразована в регулярную гомотопией в малой окрестности образа. Точнее, рассмотрим гомотопию $F_{\pm,t,s}\colon G \times [0,1] \times [0,1] \to M$, где $t, s \in [0,1]$, со следующими свойствами:

- $F_{\pm,0,s} = \tilde{f}_{f_1,O_1,f_0,O_0}$, $s \in [0,1]$,
- $F_{\pm,t,1}$ кусочно-регулярно, $t \in [0,1]$,
- $F_{\pm,1,1}|_T = F_{\pm,1,0}|_T$,
- $F_{\pm,t,s}$ не пересекает нули векторного поля X.

Заметим, что отображение $F_{\pm,1,1}$ удовлетворяет определению $\tilde{f}_{f_1,-O_1,f_0,O_0}$.

Вернемся к доказательству того, что число $K^3_{f_0,O_0}$ является четным. Обозначим $\tilde{f}_+ = \tilde{f}_{f_1,O_1,f_0,O_0}$ и $\tilde{f}_- = \tilde{f}_{f_1,-O_1,f_0,O_0} = F_{\pm,1,1}$.

$$2K^3_{f_0,O_0} = d\omega_X(f_0, O_0, \tilde{f}_+) + d\omega_X(f_0, O_0, \tilde{f}_-)$$

$$= \omega_X(f_0, O_0, \theta) - \omega_X(\tilde{f}_+, O_0, \theta) + \omega_X(f_0, O_0, \theta) - \omega_X(\tilde{f}_-, O_0, \theta)$$

$$- \sum_k i_X(x_k) N(f_0, O_0, \tilde{f}_+, x_k) - \sum_k i_X(x_k) N(f_0, O_0, \tilde{f}_-, x_k).$$

Гомотопия $F_{\pm,t,1}$, $t \in [0,1]$, между кривыми f_+ и f_- не пересекает нули векторного поля X. Согласно лемме 3.1а

$$\omega_X(\tilde{f}_+, O_0, \theta) + \omega_X(\tilde{f}_-, O_0, \theta) = 2\omega_X(\xi_t(v), O_0, \theta),$$

где $\xi_{t,i}(w_i)$ – вектор скорости кривой $F_{\pm,t,1}$ в точке v. Заметим, что

$$N(f_0, O_0, \tilde{f}_+, x_k) + N(f_0, O_0, \tilde{f}_-, x_k)$$

$$= 2N(f_0, O_0, \tilde{f}_+, x_k) + N(\tilde{f}_+, O_0, \tilde{f}_-, x_k).$$

Если у векторного поля X нет нулей, то

$$\sum i_X(x_k) N(\tilde{f}_+, O_0, \tilde{f}_-, x_k) = 0. \tag{3.10}$$

Пусть у векторного поля X есть нули, в частности, M отлично от T^2 и Kl^2. Выполняется

$$N(\tilde{f}_+, O_0, \tilde{f}_-, x_k) = N(\tilde{f}_+, O_0, F_{\pm,1,0}, x_k) + N(F_{\pm,1,0}, O_0, \tilde{f}_-, x_k).$$

Гомотопия $F_{\pm,1,u}$, $u \in [0,1]$, не пересекает нули векторного поля X, следовательно

$$N(F_{\pm,1,0}, O_0, \tilde{f}_-, x_k) = 0.$$

По построению

$$F_{\pm,1,0} = \delta^{-1} \cdot \tilde{f}_+ \cdot \delta.$$

Гомотопию между $\tilde{f}_+$ и $F_{\pm,1,0}$, сохраняющую точку $\tilde{f}_+(v)$, можно представить как отображение тора в поверхность M, где отображение на образующих тора совпадает с $\tilde{f}_+$ и δ. Согласно Лемме 1.2, это отображение можно прогомотопировать так, что образом будет кривая, а значит

$$N(\tilde{f}_+, O_0, F_{\pm,1,0}, x_k) = 0.$$

Таким образом, в случае наличия нулей у X также выполнено равенство 3.10. Получаем

$$K^3_{f_0,O_0} = \omega_X(f_0, O_0, \theta)$$

$$-\omega_X(\xi_t(v), O_0, \theta) - \sum_k i_X(x_k) N(f_0, O_0, \tilde{f}_+, x_k).$$

Мы доказали, что $K^3_{f_0,O_0}$ четно.

3.5 Доказательство Теоремы 3.3

Пусть (f_s, O_s) и $(f_s, -O_s)$ не гомотопны. Тогда существуют единственные локальные ориентации O_1, O_2, что ориентированные кусочно-регулярные погружения (f_1, O_1) и (f_2, O_2) принадлежат $\mathcal{F}_0$.

Пусть существует регулярная гомотопия, преобразующая f_1 в f_2. Тогда она преобразует O_1 в O_2. Следовательно, по теореме 3.1 выполнено $inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_1, O_1) = inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_2, O_2)$, а значит

$$\ddot{inv}_{X,\mathcal{F}_0}(f_1) = \{inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_1, O_1)\} = \{inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_2, O_2)\} = \ddot{inv}_{X,\mathcal{F}_0}(f_2).$$

Обратно, пусть $\ddot{inv}_{X,\mathcal{F}_0}(f_1) = \ddot{inv}_{X,\mathcal{F}_0}(f_2)$. Тогда для некоторых локальных ориентаций O_1, O_2 выполнено $inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_1, O_1) = inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_2, O_2)$. По теореме 3.1 ориентированные кусочно-регулярные погружения (f_1, O_1) и (f_2, O_2) регулярно гомотопны.

Пусть теперь (f_s, O_s) и $(f_s, -O_s)$ гомотопны. Рассмотрим произвольную локальную ориентацию O_1 в точке $f_1(v)$.

Пусть f_1 регулярно гомотопно f_2. Тогда (f_1, O_1) регулярно гомотопно (f_2, O_2) для некоторой локальной ориентации O_2 в точке $f_2(v)$. По теореме 3.1 выполнено $inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_1, O_1) = inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_2, O_2)$. По теореме 3.2 также выполнено $inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_1, -O_1) = inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_2, -O_2)$, а значит

$$\ddot{inv}_{X,\mathcal{F}_0}(f_1) = \{inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_1, O_1), inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_1, -O_1)\}$$

$$= \{inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_2, O_2), inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_1, -O_1)\} = \ddot{inv}_{X,\mathcal{F}_0}(f_2).$$

Обратно, пусть $\ddot{inv}_{X,\mathcal{F}_0}(f_1) = \ddot{inv}_{X,\mathcal{F}_0}(f_2)$. Тогда для некоторой локальной ориентации O_2 в точке $f_2(v)$ выполнено

$$inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_1, O_1) = inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_2, O_2),$$

$$inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_1, -O_1) = inv_{X,\mathcal{F}_0}(f_2, -O_2).$$

По теореме 3.1 ориентированные кусочно-регулярные погружения (f_1, O_1) и (f_2, O_2) реуглярно гомотопны, а значит f_1 и f_2 регулярно гомотопны.

Из сюръективности $inv_{X,\mathcal{F}_0}$ следует сюръективность $\ddot{inv}_{X,\mathcal{F}_0}$. Теорема 3.3 доказана.

4 Линейная независимость скручиваний Дэна

4.1 Определения

Пусть M — компактная связная поверхность. Рассмотрим двустороннюю (т.е. сохраняющую ориентацию) простую замкнутую кривую γ на M. Скручиванием Дэна [22] вдоль γ называется гомеоморфизм M на себя, который есть результат разрезания поверхности M вдоль γ, скручиванием одного из полученных концов на 2π и приклеиванием обратно. Носитель гомеоморфизма (т.е. замыкание множества точек, не являющихся неподвижными точками гомеоморфизма) лежит в цилиндре, основания которого гомотопны γ как кривые в этом цилиндре. В координатах (θ, h), $\theta \in [0; 2\pi]$, $h \in [0; 1]$, на цилиндре гомеоморфизм имеет вид $(\theta, h) \mapsto (\theta + 2\pi h, h)$.

Для задания скручивания Дэна необходима локальная ориентация в окрестности кривой γ. Для данной локальной ориентации можно выбрать координаты (θ, h), $\theta \in [0; 2\pi]$, $h \in [0; 1]$, на цилиндре возле кривой γ положительно ориентированными. При замене локальной ориентации построенное таким образом скручивание Дэна будет меняться на гомотопное обратному.

Скручивание Дэна является одним из простейших гомеоморфизмов, не гомотопных тождественному (если кривая γ не ограничивает на поверхности M диск, цилиндр или лист Мебиуса), поэтому оно часто используется (подробнее см. [24]).

Основной результат раздела — теорема 4.1. В случае ориентируемой поверхности M он является уточнением классического, см. [18], лемма 2.1(1), хотя автору не удалось найти опубликованного доказательства. В случае неориентируемой поверхности M результат новый.

4.2 Формулировка основного результата

Обозначим через $\mathrm{Homeo}(M; \partial M)$ пространство гомеоморфизмов поверхности M, тождественных на ∂M, а через $\mathrm{Homeo}^0(M; \partial M) \subset \mathrm{Homeo}(M; \partial M)$ — компоненту связности тождественного гомеоморфизма в $\mathrm{Homeo}(M; \partial M)$. Пусть $\pi_M := \pi^{fr}(M) \sqcup \pi(M, \partial M)$, где $\pi^{fr}(M)$ — пространство классов свободных петель, т.е. гомотопических классов отображений окружности в M, а $\pi(M, \partial M)$ – пространство классов путей в M с концами на ∂M с точностью до гомотопий с фиксированными концами.

Теорема 4.1. *Пусть M — компактная связная поверхность отрицательной эйлеровой* *характеристики (ориентируемая или нет, с краем или без). Пусть* $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ *— конечный набор попарно непересекающихся простых замкнутых двусторонних кривых в* $\mathrm{Int}(M)$*, такой что любая компонента связности множества* $M \setminus (\cup\gamma_i)$ *не является ни открытым диском, ни открытым цилиндром, ни внутренностью листа Мебиуса. Пусть* $t_{\gamma_i} \in \mathrm{Homeo}(M;\partial M)$ *— скручивания Дэна вдоль кривых* γ_i*. Тогда*

1) классы $[t_{\gamma_i}] \in \mathrm{Homeo}(M;\partial M)/\mathrm{Homeo}^0(M;\partial M)$ *этих гомеоморфизмов порождают подгруппу, изоморфную свободной абелевой группе ранга, равного количеству кривых;*

2) любая нетождественная композиция целых степеней указанных гомеоморфизмов нетривиально действует на пространстве π_M*;*

3) существует набор простых кривых $\hat{\gamma}_i$*,* $1 \le i \le n$*, классов* $[\hat{\gamma}_i] \in \pi_M$ *такой, что кривые* γ_i *и* $\hat{\gamma}_j$ *не пересекаются при* $i \ne j$ *и кривые* $\hat{\gamma}_i$ *и* $t_{\gamma_i}^k \hat{\gamma}_i$ *не гомотопны при любом* $k \ne 0$*.*

Далее будем считать, что каждая кривая γ_i, гомотопная компоненте связности края, вся проходит по краю. Набор кривых γ_i можно дополнить до такого набора, что каждая компонента связности множества $M \setminus \cup_i \gamma_i$ является либо сферой с тремя проколами, либо открытым цилиндром с пленкой Мебиуса, либо открытым диском с двумя пленками Мебиуса (т.е. имеет эйлерову характеристику -1). Такой набор кривых назовем максимальным. Теорему достаточно доказать для максимального набора.

Замечание 4.1. *Проверим, выполнена ли теорема для поверхности с* $\chi(M) \ge 0$*. Если поверхность* M *является сферой, диском, проективной плоскостью или листом Мебиуса, то на ней возможен только пустой набор кривых* γ_i*. Если поверхность* M *является тором, то максимальный набор состоит из одной кривой* γ_1*. Тогда выберем кривую* $\hat{\gamma}_1$ *с единичным индексом пересечения с кривой* γ_1*. Кривая* $t_{\gamma_1}^k \hat{\gamma}_1$ *имеет индекс пересечения* k *с кривой* γ_1*, поэтому при разных* k *такие кривые негомотопны и теорема остается верна. Если поверхность* M *является цилиндром, то теорема также верна. Доказательство аналогично, только кривая* $\hat{\gamma}_1$ *идет от одной граничной окружности до другой. Случай, когда поверхность* M *— бутылка Клейна, является единственным, когда теорема не выполняется. Максимальный набор состоит из одной кривой* γ_1*, дополнение до которой является цилиндром. Представим* $t_{\gamma_1}^2$ *как композицию двух скручиваний Дэна в примыкающих цилиндрах. Пронесем один из цилиндров вместе с соответствующим скручиванием через всю бутылку Клейна. Ориентация цилиндра изменится, а значит, скручивание Дэна заменится на противоположное. Получилась гомотопия* $t_{\gamma_1}^2 \sim t_{\gamma_1} t_{\gamma_1}^{-1} \sim \mathrm{id}$*. При* *этом одно скручивание Дэна не гомотопно тождественному, так как существует кривая* $\hat{\gamma}_1$*, индекс пересечения которой с собой равен* $1 \mod 2$*, а индекс пересечения с* $t_{\gamma_1}\hat{\gamma}_1$ *равен* $0 \mod 2$*. Таким образом, скручивание Дэна порождает группу гомеоморфную* $\mathbb{Z}_2$*.*

Замечание 4.2. *В [23] дано определение маркировки на компактной ориентируемой поверхности* S *без края с проколами. Если в случае ориентированной поверхности* M *удалить из* M *все компоненты края, а из набора* $\{(\gamma_1, \hat{\gamma}_1), \dots, (\gamma_n, \hat{\gamma}_n)\}$ *выкинуть все кривые* γ_i*, гомотопные краю, и соответствующие кривые* $\hat{\gamma}_i$ *(описанные в доказательстве теоремы), то получится маркировка оставшейся поверхности. В частности, если* $\partial M = \emptyset$*, то набор* $\{(\gamma_1, \hat{\gamma}_1), \dots, (\gamma_n, \hat{\gamma}_n)\}$ *является маркировкой на* M*. В общем случае набор* $\{(\gamma_1, \hat{\gamma}_1), \dots, (\gamma_n, \hat{\gamma}_n)\}$ *является обобщением понятия маркировки для неориентируемой поверхности с краем.*

4.3 Граф Θ, двойственный набору окружностей γ_i

В пп. 4.3, 4.4, 4.5 поверхность M ориентируема, $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ — максимальный набор. Построим граф $\Theta = \Theta_{M,\{\gamma_i\}}$. Каждой компоненте связности множества $M \setminus \cup_i \gamma_i$ будет отвечать вершина степени 3, каждой компоненте связности множества ∂M — вершина степени 1. Две вершины соединим k ребрами, если замыкания отвечающих вершинам множеств пересекаются по k окружностям. Каждой окружности γ_i, лежащей в замыкании только одного множества, соответствующего вершине, сопоставим петлю с концами в этой вершине. Заметим, что замыкания множеств, соответствующих вершинам, пересекаются только по окружностям γ_i. Тем самым окружности γ_i находятся во взаимно однозначном соответствии с ребрами графа Θ.

Построим (неоднозначно) сюръективное непрерывное отображение $\xi : M \to \Theta$. Пусть Z — подмножество M, отвечающее вершине графа Θ. Если Z – компонента связности ∂M, то отображение ξ переводит все Z в соответствующую вершину степени 1. Если Z – сфера с тремя дырками, то в ней можно выделить (неоднозначно) букет из двух окружностей, дополнение до которого является несвязным объединением трех открытых цилиндров. Отображение ξ переводит этот букет в соответствующую вершину степени 3. Больше прообразов у вешин нет. Дополнение объединения прообразов всех вершин в поверхности M является несвязным объединением открытых цилиндров, замыкание каждого из которых содержит ровно по одной окружности γ_i, а значит соответствует некоторому ребру графа Θ. Отображение ξ определим на цилиндре следующими условиями:

ξ отображает цилиндр сюръективно на соответствующее открытое ребро;

ξ непрерывно на замыкании цилиндра.

Назовем граф Θ_0 топологическим подграфом графа Θ, если Θ_0 является топологическим подпространством графа Θ и каждая вершина графа Θ_0 является вершиной такой же степени графа Θ. При этом точка, являющаяся вершиной графа Θ и лежащая в Θ_0, необязательно вершина графа Θ_0. Граф Θ_0 может не быть подграфом Θ с комбинаторной точки зрения, но он гомеоморфен некоторому подграфу, и этот подграф может быть получен из Θ_0 добавлением вершин на некоторых ребрах. Ясно, что любой топологический подграф графа Θ_0 является топологическим подграфом графа Θ.

По произвольному топологическому подграфу Θ_0 графа Θ построим поверхности M_{Θ_0} и $\tilde{M}_{\Theta_0} \subset M_{\Theta_0}$. Поверхность $\tilde{M}_{\Theta_0} \subset M$ является малой регулярной окрестностью множества $\xi^{-1}(\Theta_0)$ в M. Рассмотрим замыкание поверхности $\tilde{M}_{\Theta_0}$ в M и стянем в точку каждую компоненту края, не являющуюся компонентой края для M. Полученную поверхность обозачим M_{Θ_0}. Ясно, что $\tilde{M}_{\Theta_0} \subset M_{\Theta_0}$ и $\tilde{M}_{\Theta_0}$ получается из M_{Θ_0} выкалыванием конечного числа точек. На поверхности $\tilde{M}_{\Theta_0}$, а значит, и на $M_{\Theta_0} \supset \tilde{M}_{\Theta_0}$ определен индуцированный набор окружностей γ_{i,Θ_0} — это те окружности γ_i на поверхности M, которые лежат в $\tilde{M}_{\Theta_0}$.

Поверхность M_{Θ_0} с набором окружностей $\{\gamma_{i,\Theta_0}\}$ допускает и комбинаторное описание. Каждой вершине степени 3 графа Θ_0 соответствует сфера без трех открытых дисков, каждой вершине степени 1 – цилиндр. Каждому ребру графа Θ_0 соответствует склейка граничных окружностей поверхностей, соответствующих вершинам. Для определения направлений склейки сфер без дисков достаточно задать ориентацию на каждой поверхности, соответствующей вершине, и делать склейку в согласовании с выбранными ориентациями. Кривые γ_{i,Θ_0} совпадают с окружностями склейки. Гомеоморфным топологическим подграфам соответствуют гомеоморфные поверхности M_{Θ_0}. Комбинаторное описание позволяет строить поверхность M_{Θ_0} с набором окружностей $\{\gamma_{i,\Theta_0}\}$ по любому графу Θ_0 с вершинами степени 1 и 3, а не только по топологическому подграфу графа Θ.

Лемма 4.1. *Пусть Θ_0 — связный топологический подграф графа Θ. Тогда существует непрерывная сюръекция $\lambda_{\Theta_0}\colon M \to M_{\Theta_0}$, такая, что отображение $\lambda_{\Theta_0}|_{\tilde{M}_{\Theta_0}}$ совпадает с отображением включения $\tilde{M}_{\Theta_0} \hookrightarrow M_{\Theta_0}$.*

Для доказательства леммы 4.1 нам понадобится

Утверждение 4.1. *Пусть Θ_0 — связный подграф связного графа Θ, отличный от всего Θ. Тогда найдется открытое ребро e в $\Theta \setminus \Theta_0$, такое, что либо e не мост, т.е. граф $\Theta \setminus e$ связен, либо e ведет в вершину степени 1 графа Θ.*

Здесь и далее под ребром понимается открытое ребро.

Расстоянием от вершины графа Θ до подграфа Θ_0 назовем минимальное количество ребер, необходимое для того, чтобы добраться от вершины до Θ_0. Если связный подграф Θ_0 содержит все вершины графа Θ, то ребро вне Θ_0 не может быть мостом. Далее считаем, что найдется вершина вне Θ_0. Пусть v – любая из наиболее далеких от Θ_0 вершин графа Θ, e – любое из выходящих из v ребер. Предположим, что e — мост. Если вершина v лежит в той же компоненте связности графа $\Theta \setminus e$, что и подграф Θ_0, то в графе Θ расстояние от второй вершины v' ребра e до графа Θ_0 на единицу больше, чем от вершины v, так как любой путь от v' до Θ_0 проходит через ребро e. Значит, вершина v лежит в компоненте связности графа $\Theta \setminus e$, не содержащей подграф Θ_0. Если вершина v имеет степень больше 1, то она соединена с некоторой вершиной v'' (возможно, совпадающей с v) ребром e', отличным от e. Если $v'' \neq v$, то любой путь от v'' до Θ_0 проходит через вершину v, поэтому v'' дальше от Θ_0, чем v, что противоречит выбору вершины v. Если $v'' = v$, то ребро $e' \subset \Theta \setminus \Theta_0$ — петля, а значит не мост. Утверждение 4.1 доказано.

Теперь докажем лемму 4.1. Если $\Theta_0 = \Theta$, то $\lambda_{\Theta_0} = \mathrm{id}_M$. Пусть $\Theta_0 \subsetneq \Theta$. Будем строить отображение λ_{Θ_0} по индукции. Пусть отображение λ_{Θ_1} построено для некоторого связного топологического подграфа Θ_1 графа Θ, содержащего Θ_0 в качестве своего топологического подграфа. Согласно утверждению 4.1 в $\Theta_1 \setminus \Theta_0$ найдется ребро e графа Θ_1, либо ведущее в вершину степени 1, либо не являющееся мостом. Опишем максимальный по включению топологический подграф $\Theta_2 \subset \Theta_1$, не содержащий ребро e. Если ребро e не является петлей, то Θ_2 получается из Θ_1 удалением внутренних точек ребра e, удалением концевой вершины степени 1, если такая есть, и заменой каждой концевой вершины степени 3 с двумя не входящими в e ребрами на одно ребро. Если ребро e является петлей, то найдется ребро e', выходящее из концевой вершины петли e и заканчивающееся в вершине v степени 3. Граф Θ_2 получается из Θ_1 удалением ребер e и e' вместе с их общей вершиной и заменой вершины v и двух оставшихся выходящих из нее ребер на одно ребро. Заметим, что удаленные подмножество $\Theta_1 \setminus \Theta_2$ графа Θ_1 не пересекается ни с каким топологическим подграфом Θ_1, отличным от всего Θ_1, а значит $\Theta_0 \subset \Theta_2$. Заметим также, что вершины графа Θ_1, не являющиеся вершинами Θ_2, не являются вершинами никакого топологического подграфа Θ_1, отличного от всего Θ_1. Таким образом, граф Θ_0

является топологическим подграфом графа Θ_2.

Из включения поверхностей $\tilde{M}_{\Theta_2} \subset \tilde{M}_{\Theta_1} \subset M_{\Theta_1}$ следует, что достаточно построить непрерывную сюръекцию $\lambda_{\Theta_1,\Theta_2} : M_{\Theta_1} \to M_{\Theta_2}$ с условием $\lambda_{\Theta_1,\Theta_2}|_{\tilde{M}_{\Theta_2}} = \mathrm{id}_{\tilde{M}_{\Theta_2}}$ и определить $\lambda_{\Theta_2} := \lambda_{\Theta_1,\Theta_2} \circ \lambda_{\Theta_1}$.

Если ребро e является петлей или ведет в вершину степени 1, то определим сюръекцию $\lambda_{\Theta_1,\Theta_2}|_{M_{\Theta_1}\setminus\tilde{M}_{\Theta_2}}$ как отображение, образом которого является одна точка $M_{\Theta_2} \setminus \tilde{M}_{\Theta_2}$. Полученное отображение $\lambda_{\Theta_1,\Theta_2}$ будет совпадать со стягиванием подмножества $M_{\Theta_1} \setminus \tilde{M}_{\Theta_2} \subset M_{\Theta_1}$ в одну точку, а значит, непрерывно. Пусть вершины ребра e различны и имеют степень 3. Тогда множество $M_{\Theta_1} \setminus \tilde{M}_{\Theta_2}$ является замкнутым цилиндром, а множество $M_{\Theta_2} \setminus \tilde{M}_{\Theta_2}$ состоит из двух точек. Ребро e в этом случае не является мостом графа Θ_1, поэтому найдется путь между вершинами ребра e по графу Θ_2, а значит, найдется путь $\tau : [0,1] \to M_{\Theta_2}$ между двумя точками множества $M_{\Theta_2} \setminus \tilde{M}_{\Theta_2}$ по поверхности M_{Θ_2}. Определим ограничение отображения $\lambda_{\Theta_1,\Theta_2}$ на множество $M_{\Theta_1} \setminus \tilde{M}_{\Theta_2}$ как композицию отображения в отрезок, переводящего основания цилиндра в концы отрезка, и отображения τ. Таким образом, сюръекция $\lambda_{\Theta_1,\Theta_2}$ построена на всей поверхности M_{Θ_1}. По индукции будет получено отображение λ_{Θ_0}. Лемма 4.1 доказана.

4.4 Леммы о негомотопности кривых

Для доказательства леммы 4.3 нам понадобится следствие из теоремы о сопряженности в свободных произведениях с амальгамированной подгруппой [26], теорема 2.8, а именно

Утверждение 4.2. *Пусть G, H — группы, $A \subset G$ — подгруппа, порожденная одним элементом g, $\phi : A \to H$ — мономорфизм. Рассмотрим группу $P = G \underset{g=\phi(g)}{*} H$. Пусть $a, c \in G \setminus A$, $b, d \in H \setminus \phi(A)$ и элементы ab и cd сопряжены в группе P. Тогда найдутся $u_1 = g^m, u_2 = g^n$, такие, что в группах G и H выполняются равенства $a = u_1^{-1} c u_2$ и $b = u_2^{-1} d u_1$ соответственно.*

Доказательство. По теореме о нормальной форме для свободных произведений с амальгамированной подгруппой [26], теорема 2.6, группы G и H естественно вложены в P, поэтому все элементы можно рассматривать как элементы из P. По теореме 2.8 из [26] найдется элемент $u \in A$, такой, что $ab = u^{-1} c d u$ или $ab = u^{-1} d c u$. Случай $ab = u^{-1} d c u$ невозможен по теореме 2.6 из [26]. Обозначим $\tilde{c} = u^{-1} c \in G$, $\tilde{d} = du \in H$, тогда $(\tilde{c}^{-1} a) \cdot (b \tilde{d}^{-1}) = 1$. По теореме 2.6 из [26] получаем $\tilde{c}^{-1} a \in A$, $b\tilde{d}^{-1} \in A$. Отсюда $a = u_1^{-1} c u_2$ и $b = u_2^{-1} d u_1$ для $u_2 = \tilde{c}^{-1} a \in A$. □

Лемма 4.2. *Пусть ω — граничная окружность поверхности M, поверхность $\tilde{M}$ является замыканием компоненты связности множества $M \setminus \cup_i \gamma_i$, содержит ω и отлична от цилиндра. Тогда найдется замкнутая кривая $\hat{\omega}$ в $\tilde{M}$ с закрепленными концами на ω, такая, что кривые с закрепленными концами $\hat{\omega}$ и $t_\omega^k \hat{\omega}$ не гомотопны в M ни при каком целом $k \neq 0$. В частности, кривая $\hat{\omega}$ не гомотопна ω^k.*

Доказательство. Поверхность $\tilde{M}$ является либо сферой без трех открытых дисков, либо тором с дыркой. Сначала рассмотрим случай, когда $\tilde{M}$ является сферой без трех открытых дисков. Обозначим через γ_1 и γ_2 две граничные окружности $\tilde{M}$, отличные от ω. Выберем кривую $\hat{\omega}$ так, чтобы кривые γ_1 и γ_2 лежали в разных компонентах связности множества $\tilde{M} \setminus \hat{\omega}$, а кривая ω лежала в одной компоненте связности с кривой γ_1. Кривая $t_\omega^k \hat{\omega}$ гомотопна $\omega^k \hat{\omega} \omega^{-k}$, покажем, что она не гомотопна $\hat{\omega}$.

Предположим, что замыкание множества $M \setminus \tilde{M}$ несвязно, т.е. является объединением двух поверхностей M_1 и M_2, . Тогда группа $\pi_1(M)$ изоморфна свободному произведению групп $\pi_1(M_1)$ и $\pi_1(M_2)$. Чтобы зафиксировать изоморфизм $\pi_1(M) \cong \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2)$, достаточно дополнить кривые γ_1 и γ_2 отрезками до замкнутых кривых $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ с концами, совпадающими с концом кривой $\hat{\omega}$. Отрезки выберем так, чтобы $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ пересекали $\hat{\omega}$ только в конечной точке. Кривая с закрепленными концами $\hat{\omega}$ гомотопна $\tilde{\gamma}_2 \in \pi_1(M_2)$, а ω гомотопна $\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2$. Кривая $\omega^k \hat{\omega} \omega^{-k}$ гомотопна $(\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2)^k \hat{\omega} (\tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2)^{-k}$ и не принадлежит $\pi_1(M_2)$, поэтому кривые с закрепленными концами $\hat{\omega}$ и $\omega^k \hat{\omega} \omega^{-k}$ негомотопны.

Предположим теперь, что замыкание множества $M \setminus \tilde{M}$ связно. Тогда в графе Θ найдется топологический подграф Θ', являющийся объединением незамкнутого ребра и петли, в котором вершина степени 1 соответствует ω, а вершина степени 3 (как вершина графа Θ) — поверхности $\tilde{M}$. Если кривые $\hat{\omega}$ и $\omega^k \gamma \omega^{-k}$ гомотопны, то и их образы при отображении $\lambda_{\Theta'}$ гомотопны в поверхности $M_{\Theta'}$. Поверхность $M_{\Theta'}$ является тором с дыркой. Фундаментальная группа поверхности $M_{\Theta'}$ свободна. Негомотопность кривых $\lambda_{\Theta'} \circ \hat{\omega}$ и $\lambda_{\Theta'} \circ \omega^k \hat{\omega} \omega^{-k}$ доказывается рассмотрением образующих фундаментальной группы.

Случай, когда поверхность $\tilde{M}$ является тором с дыркой, аналогичен случаю связного множества $M \setminus \tilde{M}$. Лемма 4.2 доказана.

Лемма 4.3. *Пусть M_1 и M_2 — компактные поверхности с краем, поверхность M получается из M_1 и M_2 склеиванием вдоль одной граничной окружности ω. Замкнутая кривая $\gamma^{(i)} = \gamma_1^{(i)} \cdot \gamma_2$, $i = 1, 2$, получается объединением замкнутых кривых $\gamma_1^{(i)} : S^1 \to M_1$ и $\gamma_2 : S^1 \to M_2$. Пусть кривые $\gamma_1^{(1)}$ и $\gamma_1^{(2)}$ не гомотопны как петли с фиксированными* *концами в M_1, а кривые γ_2 и ω^k негомотопны как петли с фиксированными концами в M_2 ни при каком целом k (в частности, γ_2 нестягиваема). Тогда*

(a) кривые $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$ не гомотопны как свободные петли в M;

(b) кривая $\gamma^{(1)}$ не гомотопна никакой замкнутой кривой в M_1.

Доказательство. Предположим, что $\gamma^{(1)}$ и $\gamma^{(2)}$ гомотопны как свободные петли. Тогда они сопряжены как элементы $\pi_1(M)$. Из утверждения 2 следует, что для некоторых целых m и n в $\pi_1(M_1)$ выполнено равенство $\gamma_1^{(1)} = \omega^{-m}\gamma_1^{(2)}\omega^n$, а в $\pi_1(M_2)$ — равенство $\gamma_2 = \omega^{-n}\gamma_2\omega^m$. Если $m = n = 0$, то $\gamma_1^{(1)}$ и $\gamma_1^{(2)}$ гомотопны как кривые с фиксированными концами, что противоречит условию. Значит, числа m и n не равны одновременно нулю. Выберем в M_2 образующие так, чтобы ω была одной из них. Тогда записи кривых γ_2 и $\omega^{-n}\gamma_2\omega^m$ через образующие группы $\pi_1(M_2)$ заведомо различны.

Предположим, что $\gamma^{(1)}$ гомотопна некоторой кривой β в M_1. Стянем поверхность M_1 в точку. Получим, что кривая γ_2 стягиваема в поверхности M_2/ω. Следовательно, кривая γ_2 гомотопна степени ω в M_2, что противоречит условию леммы. Лемма 4.3 доказана.

Следствие 4.1. *Пусть ребро e_i графа Θ является мостом. Тогда найдется кривая $\hat{\gamma}_i \in \pi_M$, не пересекающая γ_j при $j \neq i$, такая, что кривые $\hat{\gamma}_i$ и $t^k_{\gamma_i}\hat{\gamma}_i$, $k \neq 0$, задают разные элементы в π_M. Более того, любая кривая из π_M, не пересекающая γ_i, задает элемент π_M, отличный от $\hat{\gamma}_i$.*

Доказательство. Пусть ребро e_i ведет в вершину степени 1. Тогда следствие 4.1 сразу получается из леммы 4.2.

Пусть каждая вершина ребра e_i имеет степень 3. Кривая γ_i разбивает поверхность M на две поверхности M_1 и M_2. Рассмотрим замкнутые кривые $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ в поверхностях M_1 и M_2 соответственно, получаемые по лемме 4.2, а также замкнутую кривую $\hat{\gamma}_i = \tilde{\gamma}_1 \cdot \tilde{\gamma}_2$. Считаем, что носитель скручивания Дэна t_{γ_i} лежит в M_1. Согласно лемме 4.3(a), примененной к кривым $\tilde{\gamma}_1$ и $t^k_{\gamma_i}\tilde{\gamma}_1$ в поверхности M_1 и к кривой $\tilde{\gamma}_2$ в поверхности M_2, свободные петли $\hat{\gamma}_i$ и $t^k_{\gamma_i}\hat{\gamma}_i$, $k \neq 0$, не гомотопны. Негомотопность $\hat{\gamma}_i$ и любой кривой, непересекающей γ_i, сразу следует из леммы 4.3(b). Следствие 4.1 доказано.

4.5 Доказательство теоремы 4.1 для ориентируемой поверхности M

Достаточно доказать, что для любого ребра e_i найдется кривая $\hat{\gamma}_i \in \pi_M$, не пересекающая γ_j при $j \neq i$, такая что кривые $\hat{\gamma}_i$ и $t^k_{\gamma_i}\hat{\gamma}_i$ не гомотопны при $k \neq 0$. Если ребро e_i является мостом, то это утверждение доказано в следствии 4.1. Рассмотрим случай, когда ребро e_i не является мостом.

Построим связное двулистное накрытие $\bar{\Theta}$ графа Θ. Рассмотрим две копии графа Θ. Удалим обе копии $v_1'v_2'$ и $v_1''v_2''$ ребра e_i и добавим ребра $v_1'v_2''$ и $v_1''v_2'$. Так как ребро e_i не является мостом связного графа Θ, полученный граф $\bar{\Theta}$ также будет связным. На графе $\bar{\Theta}$ естественным образом определено отображение $p : \bar{\Theta} \to \Theta$, задающее структуру двулистного накрытия.

Непрерывная сюръекция $\xi : M_\Theta \to \Theta$ индуцирует ассоциированное двулистное накрытие $p^* : M_{\bar{\Theta}} \to M_\Theta$ и отображение $\xi_{\bar{\Theta}} : M_{\bar{\Theta}} \to \bar{\Theta}$. Здесь поверхность $M_{\bar{\Theta}}$ является поверхностью, построенной по графу $\bar{\Theta}$ аналогично поверхностям M_{Θ_0} для топологических подграфов $\Theta_0 \subset \Theta$.

Пусть $e_i^{(1)}$ и $e_i^{(2)}$ – два ребра графа $\bar{\Theta}$, накрывающие ребро $e_i \subset \Theta$. Тогда ребро $e_i^{(1)}$ является мостом топологического подграфа $\bar{\Theta}_0 = \bar{\Theta} \setminus e_i^{(2)}$ (указано равенство подмножеств $\bar{\Theta}$ как топологических пространств). Рассмотрим кривую $\hat{\gamma}_{i,\bar{\Theta}_0} \in \pi_{M_{\bar{\Theta}_0}}$, построенную по следствию 4.1. Малой гомотопией можно добиться, чтобы кривая $\hat{\gamma}_{i,\bar{\Theta}_0}$ не проходила через двухточечное множество $M_{\bar{\Theta}_0} \setminus \tilde{M}_{\bar{\Theta}_0}$. Таким образом, можно считать, что эта кривая совпадает с некоторой кривой $\hat{\gamma}_{i,\bar{\Theta}}$ на поверхности $\tilde{M}_{\bar{\Theta}_0} \subset M_{\bar{\Theta}}$.

Обозначим $\hat{\gamma}_i = p^* \circ \hat{\gamma}_{i,\bar{\Theta}} \in \pi_M$. По построению эта кривая не пересекает окружности γ_j при $j \neq i$. Докажем, что кривые $\hat{\gamma}_i$ и $t_{\gamma_i}^k \hat{\gamma}_i$ не гомотопны при $k \neq 0$. Предположим противное. Используя теорему о накрывающей гомотопии, поднимем гомотопию кривых $\hat{\gamma}_i$ и $t_{\gamma_i}^k \hat{\gamma}_i$ до гомотопии кривых в $M_{\bar{\Theta}}$. Получится гомотопия кривых $\hat{\gamma}_{i,\bar{\Theta}}$ и $t_{\gamma_{i,\bar{\Theta}}}^k \hat{\gamma}_{i,\bar{\Theta}}$. После взятия непрерывного отображения $\lambda_{\bar{\Theta}_0} : M_{\bar{\Theta}} \to M_{\bar{\Theta}_0}$ будем иметь гомотопию кривых $\hat{\gamma}_{i,\bar{\Theta}_0}$ и $t_{\gamma_{i,\bar{\Theta}_0}}^k \hat{\gamma}_{i,\bar{\Theta}_0}$, что противоречит выбору кривой $\hat{\gamma}_{i,\bar{\Theta}_0}$. Полученное противоречие доказывает негомотопность кривых $\hat{\gamma}_i$ и $t_{\gamma_i}^k \hat{\gamma}_i$. Теорема 4.1 для ориентируемой поверхности M доказана.

Теперь докажем, что кривая $\hat{\gamma}_i$ не гомотопна никакой кривой $t_{\gamma_j}^k \hat{\gamma}_j$, $j \neq i$, $k \in \mathbb{Z}$. Это понадобится при доказательстве теоремы для неориентируемой поверхности M. По построению $t_{\gamma_j}^k \hat{\gamma}_j$ не пересекает γ_i. Если ребро e_i является мостом, то негомотопность $\hat{\gamma}_i$ и $t_{\gamma_j}^k \hat{\gamma}_j$ сразу получается из следствия 4.1. Пусть далее e_i не мост. Если кривые $\hat{\gamma}_i$ и $t_{\gamma_j}^k \hat{\gamma}_j$ гомотопны, то гомотопны и накрывающие их кривые $\hat{\gamma}_{i,\bar{\Theta}}$ и β, где β – одна из двух кривых, накрывающих $t_{\gamma_j}^k \hat{\gamma}_j$. Тогда гомотопны кривые $\hat{\gamma}_{i,\bar{\Theta}_0} = \lambda \circ \hat{\gamma}_{i,\bar{\Theta}}$ и $\lambda \circ \beta$, что неверно, согласно следствию 4.1.

4.6 Доказательство теоремы 4.1 для неориентируемой поверхности M

Пусть M — неориентируемая поверхность. Каждая компонента связности множества $M \setminus \cup_i \gamma_i$ является либо сферой с тремя дырками, либо открытым цилиндром с пленкой Мебиуса, либо открытым диском с двумя пленками Мебиуса. В каждой неориентируемой компоненте связности множества $M \setminus \cup_i \gamma_i$ выберем одну или две окружности ω_k, дополнение до которых является сферой с тремя дырками (окружности ω_k соответствуют пленкам Мебиуса).

Рассмотрим ориентируемое двулистное накрытие $p : \bar{M} \to M$ поверхности M. Каждая окружность γ_i сохраняет ориентацию, а значит, накрывается двумя окружностями $\gamma_i^{(1)}$ и $\gamma_i^{(2)}$. Каждая окружность ω_k меняет ориентацию, а значит, накрывается одной окружностью $\bar{\omega}_k$. Каждая компонента связности множества $M \setminus \cup_i \gamma_i$, являющаяся сферой с тремя дырками, накрывается двумя сферами с тремя дырками. Цилиндр с пленкой Мебиуса (соответственно диск с пленкой Мебиуса) накрывается двумя сферами с тремя дырками, склеенными по одной (соответственно двум) окружности $\bar{\omega}_k$. Таким образом, набор окружностей $\gamma_i^{(1)}, \gamma_i^{(2)}, \omega_k$ для всех i, k разбивает поверхность $\bar{M}$ на сферы с тремя дырками. Согласно уже доказанной теореме 4.1 для ориентируемой поверхности M, найдется набор кривых $\hat{\gamma}_i^{(1)}, \hat{\gamma}_i^{(2)}, \hat{\omega}_k$, каждая из которых может пересекать только соответствующую кривую набора $\gamma_i^{(1)}, \gamma_i^{(2)}, \omega_k$. Можно считать, что кривые $p \circ \hat{\gamma}_i^{(1)}$ и $p \circ \hat{\gamma}_i^{(2)}$ совпадают. Положим $\hat{\gamma}_i = p \circ \hat{\gamma}_i^{(1)} \in \pi_M$. Предположим, что кривые $\hat{\gamma}_i$ и $t^k_{\gamma_i} \hat{\gamma}_i$ гомотопны при некотором $k \neq 0$. По теореме о накрывающей гомотопии поднимем эту гомотопию на поверхность M. Получится гомотопия кривой $\hat{\gamma}_i^{(1)}$ и одной из кривых $t^k_{\gamma_i^{(1)}} \hat{\gamma}_i^{(1)}$ и $t^k_{\gamma_i^{(2)}} \hat{\gamma}_i^{(2)}$. Кривые $\hat{\gamma}_i^{(1)}$ и $t^k_{\gamma_i^{(1)}} \hat{\gamma}_i^{(1)}$ негомотопны по выбору кривой $\hat{\gamma}_i^{(1)}$. Негомотопность кривых $\hat{\gamma}_i^{(1)}$ и $t^k_{\gamma_i^{(2)}} \hat{\gamma}_i^{(2)}$, вытекающая из того, что они не пересекаются, доказана в предыдущем пункте.

5 Заключение

В работе получена классификация погружений графов в поверхности с точностью до регулярной гомотопии. Для этого построен инвариант погружения, описан образ этого инварианта и доказана биективность отображения классов эквивалентности погружений на образ инварианта. Инвариант строится конструктивно и легко вычисляется для конкретного погружения. Он является обобщением классических инвариантов, описанных

Уитни и Чиллингворсом.

Также в работе рассматриваются скручивания Дэна вокруг некоторого семейства окружностей на поверхности. Доказывается линейная независимость скручиваний Дэна. Доказательство во многом опирается на действие скручиваний Дэна на кривые на поверхности.

Интересны следующие направления дальнейших исследований.

- Классификация кусочно-регулярных погружений графов в проективную плоскость с точностью до регулярной гомотопии.
- Исследование подгрупп группы классов отображений поверхности, порожденных скручиваниями Дэна вокруг наборов окружностей без требования отсутствия пересечений. В общем случае подгруппы не будут абелевыми.

Благодарности. Глубоко признателен своим научным руководителям академику РАН А.Т. Фоменко и к.ф.м.н. Е.А. Кудрявцевой за постановку задач, многочисленные обсуждения и внимание к работе. Глубоко благодарен профессору А.А. Ошемкову за обсуждения и советы. Благодарю всех сотрудников кафедры дифференциальной геометрии и приложений за творческую обстановку и внимание к работе. Благодарю близких за вдохновение.

Список литературы

[1] Е.А. Кудрявцева, И.М. Никонов, А.Т. Фоменко. Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия // *Математический Сборник,* **199:9** (2008) 3-96.

[2] Е.А. Кудрявцева, Д.А. Пермяков. Оснащенные функции Морса на поверхностях // *Матем. Сб.* **201:4** (2010), 33-98.

[3] Е.А. Кудрявцева. Топология пространств функций Морса на поверхностях // *Матем. заметки*, **92:2** (2012), 241–261.

[4] Е.А. Кудрявцева. Специальные оснащенные функции Морса на поверхностях // *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.*, **4** (2012), 14-20.

[5] Е. А. Кудрявцева. Связные компоненты пространств функций Морса с фиксированными критическими точками // *Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ.*, **1** (2012), 3–12.

[6] Е.А. Кудрявцева. О гомотопическом типе пространств функций Морса на поверхностях // *Математический Сборник*, **204:1** (2013), 79–118.

[7] Е.А. Кудрявцева. Топология пространств функций с заданными особенностями на поверхностях // *Докл. Акад. Наук*, **468:1** (2016), 139-142.

[8] С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко. Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии // *Издательство МГУ,* Москва (1991).

[9] С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко. Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. Второе издание, переработанное и дополненное // *Издательство Наука* Москва (1998).

[10] С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко. Изоэнергетические поверхности гамильтоновых систем, перечисление трехмерных многообразий в порядке возрастания их сложности и вычисление объемов замкнутых гиперболических многообразий // *Успехи математических наук,* **43:1(259)** (1998), 5–22.

[11] А.А. Ошемков, Ф.Ю. Попеленский, А.А. Тужилин, А.Т. Фоменко, А.И. Шафаревич. Курс наглядной геометрии и топологии // *Классический учебник МГУ, URSS, Леланд,* Москва (2014).

[12] D.A. Permyakov. Classification of immersions of graphs into a plane // *Moscow. Univ. Math. Bull.,* **63:5** (2008), 208–210.

[13] D.A. Permyakov. Abelian subgroups of the homeomorphism group generated by Dehn twists // *Moscow. Univ. Math. Bull.* **68:1** (2013), 42–47.

[14] Д.А. Пермяков. Регулярная гомотопность погружений графов в поверхности // *Математический Сборник,* **207:6** (2016) 93-112.

[15] А.Т. Фоменко. Топологические вариационные задачи // *Издательство МГУ,* Москва (1984).

[16] А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс. Курс гомотопической топологии // *Издательство Наука,* Москва (1989).

[17] А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс. Курс гомотопической топологии, второе издание // *URSS, Леланд,* Москва Классический учебник МГУ (2014).

[18] J.S. Birman, A. Lubotzky, J. McCarthy. Abelian and solvable subgroups of the mapping class group // *Duke Math. J.,* **50:4** (1983), 1107–1120.

[19] Y. Burman, M. Polyak. Whitney's formulas for curves on surfaces // *Geometriae Dedicata* **151:97** (2011), 97–106.

[20] D.R.J. Chillingworth. Winding Numbers on Surfaces, I // *Math. Ann.* **196:218** (1972), 218–249.

[21] D.R.J Chillingworth. Winding Numbers on Surfaces, II // *Math. Ann.,* **199:131** (1972), 131–153.

[22] M. Dehn. Die Gruppe der Abbildungsklassen // *Acta Math.,* **69:1** (1938), 135-206.

[23] M. Duchin, K. Rafi. Divergence of geodesics in Teichmüller space and the mapping class group // *Geometric And Funct. Anal.,* **19:3** (2009), 722-742.

[24] B. Farb, D. Margalit. A primer on mapping class groups // *Princeton University Press,* (2011).

[25] C.F.Gauss. Werke VIII // *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1900), 271-286.

[26] R. Lyndon, P.E. Schupp. Combinatorial group theory // *Springer-Verlag*, Berlin (1978).

[27] M. McIntyre, G. Cairns. A new formula for winding number // *Geometriae Dedicata* **46:2** (1993), 149–160.

[28] R. Nikkuni. On the Wu invariants for immersions of a graph into the plane // *Homology, Homotopy and Applications* **12:1** (2010), 45–60.

[29] B.L. Reinhart. The winding number on two manifolds // *Ann. Inst. Fourier* **10** (1960), 271–283.

[30] B.L. Reinhart. Further remarks on the winding number // *Ann. Inst. Fourier,* **13:1** (1963), 155-160.

[31] R. Skora. The degree of a map between surfaces // *Math. Ann.* **276:3** (1987), 415–423.

[32] S. Smale. Regular curves on Riemmannian manifolds // *Trans. Amer. Math. Soc.* **87:2** (1958), 492–512.

[33] L.B. Treybig. A characterization of the double point structure of the projection of a polygonal knot in regular position // *Trans. Amer. Math. Soc.,* **130:2** (1968), 223–247.

[34] H. Whitney. On regular closed curves in the plane // *Compositio Math.* **4** (1937), 276–286.